

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Famílias de Conjuntos Minimais em
Sistemas Reversíveis**

por

Maurício Firmino Silva Lima [†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Fapesp, Processo n° 01/10730-9.

Famílias de Conjuntos Minimais em Sistemas Reversíveis

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Maurício Firmino Silva Lima** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de Março de 2006.

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.

Prof Dr. Lorenzo Justiniano Diaz Casado.

Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro.

Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo.

Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Lima, Maurício Firmino Silva

L628f Famílias de conjuntos minimais em sistemas reversíveis / Maurício
Firmino Silva Lima -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Marco Antonio Teixeira

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Forma normal (Matemática). 3. Órbitas
periódicas. 4. Simetria. I. Teixeira, Marco Antonio. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Families of minimal sets in reversible systems

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dynamical systems. 2. Normal form
(Mathematics). 3. Periodic orbits. 4. Symmetry.

Área de concentração: Sistemas dinâmicos

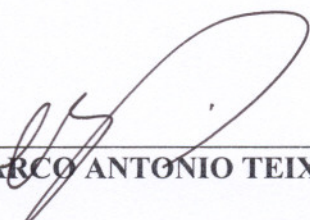
Titulação: Doutorado em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Lorenzo Justiniano Dias Casado (PUC/RIO)
Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro (UFMG)
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME/USP)
Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi (IBILCE/UNESP)

Data da defesa: 24/03/2006

Tese de Doutorado defendida em 24 de março de 2006e aprovada

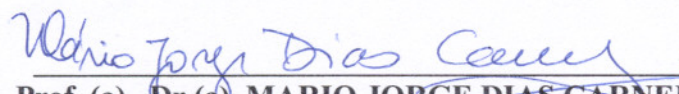
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



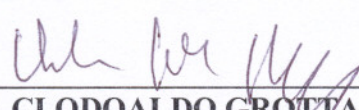
Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



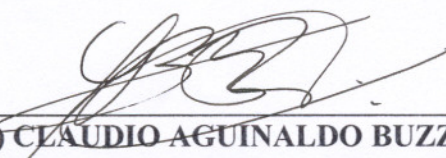
Prof. (a). Dr (a). LORENZO JUSTINIANO DIAZ CASADO



Prof. (a). Dr (a). MARIO JORGE DIAS CARNEIRO



Prof. (a). Dr (a). CLODOALDO GROTTA RAGAZZO



Prof. (a) Dr. (a) CLAUDIO AGUINALDO BUZZI

AGRADECIMENTOS

Muitos foram aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho, contudo agradeço em especial:

- A Deus, pelo dom da vida;
- Aos meus pais e irmãos, que mesmo à distância demonstraram seu apoio.
- Ao Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira pela paciência e atenção dedicada para a realização deste trabalho. Com certeza devo-lhe muito de tudo o que aprendi durante esses anos de orientação.
- Aos velhos e novos amigos, pelo companheirismo.
- A todos meus professores, pelos conhecimentos transmitidos. Aos funcionários do IMECC/UNICAMP pelas preciosas colaborações em problemas burocráticos.
- A Fapesp, pelo financiamento deste trabalho, sem o qual o mesmo não seria possível.

RESUMO

Neste trabalho tratamos de famílias a um-parâmetro de campos vetoriais R -reversíveis definidos em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio ressonante em $\mathbb{R}^{2n}$. Focalizamos a atenção às 0:p:q-ressonâncias.

Inicialmente estudamos a existência/bifurcação de órbitas periódicas simétricas para tais sistemas.

A existência e rigidez de famílias de órbitas homoclínicas também são discutidas. Além disso, também analisamos, para $n = 3$, a rigidez de “famílias de Cantor” de dois-toros invariantes por meio da Teoria KAM.

ABSTRACT

In this work we deal with one parameter families of R -reversible vector fields defined around a resonant equilibrium point in $\mathbb{R}^{2n}$. We focus our attention to $0:p:q$ resonances.

First of all we study the existence/bifurcation of symmetric periodic orbits for such systems.

The existence and rigidity of families of homoclinic orbits are also discussed. We also analyze for $n = 3$ the rigidity of “Cantor families” of invariant two-torus by means of KAM Theory.

INTRODUÇÃO

Na teoria de sistemas dinâmicos é grande o interesse no estudo de objetos minimais tais como órbitas periódicas, órbitas homoclínicas e toros invariantes. Existe, portanto, na literatura, uma exaustiva bibliografia tratando desses assuntos. Esses objetos são, em geral, tratados em famílias de campos vetoriais que podem ou não preservar alguma estrutura. Grandes contribuições foram dadas em vários contextos, tais como sistemas Hamiltonianos, sistemas equivariantes ou reversíveis e também para sistemas onde nenhuma estrutura, a priori, é preservada.

A existência de parâmetros é importante para detectar tipos de bifurcações que ocorrem em famílias de campos vetoriais e, no que tange a existência de toros invariantes, a presença de tais parâmetros se faz necessária já que o uso da teoria KAM exige essa dependência. Algumas boas referências nesta direção são [3],[4],[7],[12],[14] e [19] entre outros. Nosso objetivo nesta tese será abordar esses assuntos em famílias de campos vetoriais que apresentam certos tipos de ressonância.

Em se tratando de bifurcações de soluções periódicas existem técnicas freqüentemente utilizadas na literatura, a saber, a Redução de Lyapunov-Schmidt [14], [25] e a Teoria de Formas Normais, onde nesta última ferramenta a Forma Normal de Belitskii se mostra bastante adequada.

A Redução de Lyapunov-Schmidt aborda exclusivamente o estudo local de soluções periódicas, ignorando demais comportamentos dinâmicos. O objetivo dessa teoria é reduzir o problema de existência local de soluções periódicas de um dado sistema a resolver um sistema de equações algébricas num espaço de dimensão finita, cuja dimensão depende do

tipo de ressonância que o campo vetorial em questão satisfaz.

Por outro lado, a Teoria de Formas Normais consiste em encontrar mudanças de coordenadas próximas à identidade, que levam o campo vetorial a uma forma mais “simples”.

Neste contexto, resultados relativos a existência e bifurcação de soluções periódicas simétricas serão abordados em diversas situações para famílias de campos vetoriais em espaço de dimensão arbitrária e onde o campo não bifurcado tem um equilíbrio ressonante na origem.

Nas situações tratadas nesta tese o equilíbrio na origem possui 0 (zero) como autovalor com multiplicidade algébrica dois. Nesse contexto, bifurcações do equilíbrio também serão consideradas.

Podemos citar várias referências onde ferramentas como as utilizadas aqui também são utilizadas tais como [14],[23] e [25]. Nestes casos o equilíbrio na origem não admite autovalor zero e portanto bifurcações do equilíbrio na origem não se fazem presentes.

Um outro caminho seguido nesta tese quando tratamos de existência/persistência de soluções homoclínicas para soluções periódicas, é a utilização de ferramentas de análise funcional, como o conhecido Teorema do Ponto Fixo de Banach. O principal objetivo é estabelecer a persistência de soluções homoclínicas para famílias de soluções periódicas que sabemos existir para o campo truncado nos termos de ordem dois (ou superior) que estão na forma normal. Neste contexto, técnicas utilizadas em [18] e [19] foram adaptadas para o nosso caso.

Em [18] e [19] a existência de um equilíbrio tipo sela-centro para uma família de campos vetoriais em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^6$ é considerada onde, para a forma normal truncada, tal equilíbrio admite uma solução homoclínica. Além disso, famílias de soluções periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio admitem soluções homoclínicas quando considerado o campo truncado. Neste caso, utilizando a solução homoclínica associada ao equilíbrio, Lombardi estabelece a persistência de soluções homoclínicas para soluções periódicas próximas do equilíbrio. Em [19] o contexto analítico em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^6$ é considerado e em [18] o contexto C^∞ em $\mathbb{R}^4$ é abordado.

A principal diferença do nosso caso para os encontrados em [18] e [19] é o fato de que no nosso problema o equilíbrio na origem não admite solução homoclínica. Por isso, nosso método de perturbação utiliza as soluções homoclínicas associadas às soluções periódicas a fim de garantir a persistência das mesmas para o campo geral, diferentemente do que ocorre em [18] e [19].

Finalmente, consideraremos uma família de campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$ onde a persistência de toros 2-dimensionais será estudada à luz de resultados provenientes da teoria KAM es-

tabelecidos por Broer em [3] para campos vetoriais reversíveis e em [4] para campos mais gerais.

Durante todo o trabalho, estaremos restritos a uma classe extremamente importante de campos vetoriais, a saber, campos vetoriais que anticomutam com difeomorfismos involutivos usualmente chamados de Campos Vetoriais Reversíveis.

0.1 Estrutura dos Tópicos Apresentados/ Comentário sobre os Principais Resultados

O presente trabalho está dividido da seguinte forma:

- No capítulo 1, apresentamos uma síntese de algumas propriedades importantes dos campos vetoriais reversíveis que serão relevantes no decorrer de todo o trabalho. Algumas proposições serão enunciadas sem demonstração. O leitor interessado na demonstração desses resultados poderá encontrá-las em [15]. Além disso, apresentamos algumas definições relativas a toros invariantes que serão necessárias no capítulo 6. Enunciaremos também um resultado importante sobre persistência de toros invariantes. A demonstração de tal resultado será omitida e pode ser encontrada em [3].
- No capítulo 2, formas normais para os campos vetoriais tratados nesta tese serão estabelecidas. Essas formas normais serão importantes nos estudos realizados em todos os outros capítulos desta tese. As formas normais aqui encontradas serão as formas normais de Belitskii, as quais se mostram úteis para os nossos objetivos.

Neste contexto, estabeleceremos o primeiro resultado principal (Teorema A) onde uma forma normal formal para campos vetoriais reversíveis em $\mathbb{R}^{2n}$ que têm singularidade na origem 0-não-ressonante será obtida. A partir daí, estenderemos esse resultado para campos em $\mathbb{R}^6$ que têm singularidade na origem 0:p:q-ressonante.

- No capítulo 3, apresentamos o método da Redução de Lyapunov-Schmidt adaptado a cada caso tratado nesta tese.
- No capítulo 4, utilizaremos as Reduções obtidas no capítulo anterior, juntamente com as formas normais do capítulo 2, a fim de estabelecer condições nos termos de ordem dois da forma normal para a existência de soluções periódicas de famílias a

um-parâmetro de campos vetoriais reversíveis. Neste contexto, estabeleceremos um dos teoremas principais do texto (Teorema B). Neste teorema veremos que dada uma família de campos vetoriais em $\mathbb{R}^{2n}$ $X(x, \lambda)$, com uma singularidade *0-não-ressonante* na origem para $\lambda = 0$, através de condições genéricas sobre os coeficientes do 2-jato em $\lambda = 0$ obtemos a existência de famílias de soluções periódicas simétricas numa vizinhança da origem. Além disso, bifurcações de Hopf podem surgir dependendo de propriedades do 2-jato. Mostramos também que todas as soluções periódicas numa vizinhança suficientemente pequena da origem resulta ser simétrica.

- No capítulo 5, a persistência de soluções homoclínicas para soluções periódicas é estudada em várias situações. Neste capítulo estabelecemos a persistência de soluções homoclínicas simétricas associadas a soluções periódicas simétricas numa vizinhança da origem para campos R -reversíveis em $\mathbb{R}^4$. Essa é o conteúdo do Teorema C. Esse resultado é uma extensão dos resultados de Lombardi [18] e Iooss [11]. Além disso, esse resultado será estendido para campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$ sob hipóteses adicionais as consideradas no caso 4-dimensional.

A idéia principal aqui é reduzir o problema da persistência de soluções homoclínicas a encontrar um ponto fixo de uma equação funcional utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

- No capítulo 6, abordamos a existência/persistência de toros invariantes com dinâmica paralela para famílias de campos vetoriais reversíveis em $\mathbb{R}^6$.

Estabeleceremos a persistência de famílias de 2-toros invariantes para uma família de campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$ (Teorema D) utilizando, para isso, resultados da Teoria KAM. De fato, adaptamos nossa família de forma que um resultado devido a Broer em [3] possa ser aplicado à nossa situação.

0.2 Resultados Principais

Nesta seção enunciaremos os resultados principais contidos nessa tese.

Teorema A. *Seja $X \in \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^{2n})$ 0-não ressonante em $x = 0$ tal que $X(0) = 0$. Então X é formalmente conjugado, numa vizinhança de 0, a*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_3 = -x_4 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_4 = x_3 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = -x_{2n} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_{2n} = x_{2n-1} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \end{cases}$$

Teorema B: *Existe um subconjunto aberto $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) \times (-\lambda_o, \lambda_o)\}$ em $\mathcal{X}_\lambda^{2n}$ tal que:*

(I) *os elementos de $\{\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2\}$ são determinados pelos 2-jatos dos campos vetoriais.*

(II) *se $X(x, 0) \in \mathcal{U}_1$ então:*

(i) *para $\lambda = 0$ existem $2(n-1)$ famílias de órbitas periódicas R -simétricas convergindo para o equilíbrio $x = 0$.*

(ii) *para $\lambda < 0$ existem dois equilíbrios simétricos (uma sela-centro e um ponto elítico) e $(n-1)$ -famílias de órbitas periódicas simétricas convergindo para cada um desses pontos.*

(iii) *para $\lambda > 0$ não existem pontos de equilíbrio numa vizinhança suficientemente pequena de $x = 0$ e apenas $(n-1)$ -famílias de órbitas periódicas simétricas persistem numa vizinhança da origem.*

(III) *Se $X(x, 0) \in \mathcal{U}_2$ então em $\lambda = 0$ ocorre uma bifurcação de Hopf subcrítica. Então, em $\lambda = 0$ não existem órbitas periódicas e para $\lambda < 0$ surgem $(n-1)$ -famílias de órbitas periódicas simétricas, convergindo para cada um dos equilíbrios (sela-centro e elítico).*

Mais ainda, todas as soluções periódicas numa vizinhança da origem resultam ser simétricas.

Teorema C: *Existe um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^4)$ tal que para cada $X \in \mathcal{U}$ existe um ε -re-escalamento nas variáveis dado por $(y_1, y_2, r, \theta, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ tal que nestas novas coordenadas o campo é expresso por Y_ε e para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente próximo de zero, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que para $k \geq k_\varepsilon$ existem duas soluções homoclínicas simétricas associadas a uma solução periódicas simétrica $\hat{Y}_k(t, \varepsilon)$.*

Teorema D: *Seja $\tilde{X}_\lambda(x) = \tilde{X}(x, \lambda)$ uma família analítica de campos vetoriais R -reversíveis em $\mathbb{R}^6$ tal que $\tilde{X}_0$ tem um equilíbrio na origem 0-não-ressonante ou 0:p:q-ressonante com $p+q > 3$. Então, numa vizinhança suficientemente próxima da origem, existe um “conjunto de Cantor” $\tilde{X}$ -invariante $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^6 \times P$ difeomorfo por um difeomorfismo C^∞ -próximo a identidade a $\mathbb{T}^2 \times \{0\} \times \Gamma_\gamma \subset \mathbb{R}^6 \times P$. Em cada toro $V_\lambda \times \{\lambda\}$, $\lambda \in \Gamma_\gamma$, uma equivalência topológica de X a $\tilde{X}$ é induzida e tal equivalência Φ preserva a projeção em P e o comportamento linear normal onde X é dado pelo truncamento do campo original nos termos de ordem dois dados na forma normal.*

SUMÁRIO

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Resumo	iv
0.1 Estrutura dos Tópicos Apresentados/ Comentário sobre os Principais Resultados	vi
0.2 Resultados Principais	viii
1 Preliminares	1
1.1 Introdução	1
1.2 Órbitas Simétricas	4
1.3 Órbitas Homoclínicas Simétricas	5
1.4 Toros Invariantes	6
1.5 Topologia Compacto-aberta	8
1.6 KAM teorema	9
2 Forma Normal de Belitskii	11
2.1 Introdução	11
2.2 Caso θ -não-ressonante	14
2.3 Caso $\theta:p:q$ -ressonante com $p + q > 3$	17
2.4 Caso $0 : 1 : 2 - \text{ressonante}$	19
2.5 Caso $0 : 1 : 1 - \text{ressonante}$	22
2.6 Dinâmica e Propriedades do Campo na Forma Normal	25

3	Redução de Lyapunov-Schmidt	29
3.1	Introdução	29
3.2	Caso 0 -não-ressonante em $\mathbb{R}^{2n}$	32
3.3	Caso $0 : p : q$ – ressonante em $\mathbb{R}^6$ com $p, q > 1$	37
3.4	Caso $0 : 1 : 2$ – ressonante em $\mathbb{R}^6$	37
3.5	Caso $0 : 1 : 1$ – ressonante em $\mathbb{R}^6$	39
4	Existência e Bifurcação de Soluções Periódicas	40
4.1	Caso 0 -não-ressonante	40
4.2	Caso $0:p:q$ -ressonante com $p, q > 1$	49
4.3	Caso $0:1:2$ -ressonante	49
4.4	Caso $0:1:1$ -ressonante	57
5	Persistência de Soluções Homoclínicas	63
5.1	Caso 4-Dimensional	63
5.2	Caso 6-Dimensional	82
6	Persistência de Toros Invariantes	96
	Bibliografia	113
	Índice Remissivo	116

CAPÍTULO 1

Preliminares

Este capítulo é dedicado à introdução dos conceitos referentes a Sistemas Equivariantes e Reversíveis, além de uma descrição de algumas propriedades importantes do fluxo para tais sistemas. Além disso, algumas definições acerca de toros invariantes serão dadas e um resultado abordando a persistência de tais toros será enunciado.

1.1 Introdução

Sejam

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (1.1)$$

um campo de vetores C^∞ e

$$S : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (1.2)$$

um difeomorfismo involutivo, isto é, $S^2 = Id$.

Definição 1.1. Dizemos que (1.1) é **equivariante** com relação a S (ou S -equivariante) se X satisfaz:

$$DS(x).X(x) = X(Sx). \quad (1.3)$$

Neste caso diremos que S é uma **simetria** para o campo X ou uma simetria associada a X . Por outro lado, dizemos que (1.1) é **reversível** com relação a S (ou S -reversível) se X satisfaz:

$$DS(x).X(x) = -X(Sx). \quad (1.4)$$

Neste caso diremos que S é uma **anti-simetria** para o campo X ou uma *anti-simetria associada a X* .

Vale observar que essas definições podem ser estendidas a contextos mais gerais como, por exemplo, quando o espaço de fase é uma variedade diferenciável M . Ainda pode-se definir campos vetoriais fracamente equivariantes/reversíveis onde não se exige que S seja uma involução. No entanto, para nossos propósitos a aplicação S será sempre considerada involutiva.

Uma consequência direta da definição acima é a seguinte:
se X é S -equivariante, então uma órbita de X é aplicada por S em uma outra órbita de X preservando o sentido do tempo.

Por outro lado, se X é S -reversível, então órbitas de X são aplicadas por S em órbitas de X revertendo o sentido do tempo.

De fato, as seguintes relações são válidas:
se $\varphi_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é o fluxo associado ao campo vetorial X , então:

$$S(\varphi_t(x)) = \varphi_t(Sx)$$

se X é S -equivariante, e

$$S(\varphi_t(x)) = \varphi_{-t}(Sx)$$

se X é S -reversível.

Se um campo vetorial tem alguma propriedade de simetria ou anti-simetria, então podemos construir, a partir das simetrias (anti-simetrias) conhecidas, outras por composição.

Podemos ver facilmente que as seguintes afirmações são válidas:

- Se S_1 e S_2 são duas simetrias para X , então a composição $S_1 \circ S_2$ também é uma simetria para X .
- Se S_1 e S_2 são duas anti-simetrias para X , então a composição $S_1 \circ S_2$ é uma simetria para X .
- Se S_1 e S_2 são tais que S_1 é uma simetria para X e S_2 é uma anti-simetria para X , então $S_1 \circ S_2$ é uma anti-simetria para X .

Exemplo 1.2. Seja $X_H(q, p)$ um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana $H(q, p)$ satisfazendo $H(q, -p) = H(q, p)$, isto é,

$$X_H : \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases}.$$

Então X_H é reversível segundo a involução linear $S(q, p) = (q, -p)$.

Na realidade, as estruturas Hamiltoniana e Reversível possuem muitas propriedades em comum.

Na prática, muitos sistemas Hamiltonianos são reversíveis e vice-versa ver [17] como exemplo. Uma linha de estudo bastante abordada é aquela onde o contexto Reversível é associado ao Hamiltoniano.

Nosso interesse nesta tese está voltado principalmente para a propriedade de anti-simetria. Os resultados aqui estabelecidos são obtidos considerando apenas propriedades de anti-simetria, o que é interessante por abordar uma classe maior de sistemas.

Em [21] encontramos vários exemplos que mostram que, de fato, estas duas classes de sistemas não coincidem.

Considere o seguinte exemplo:

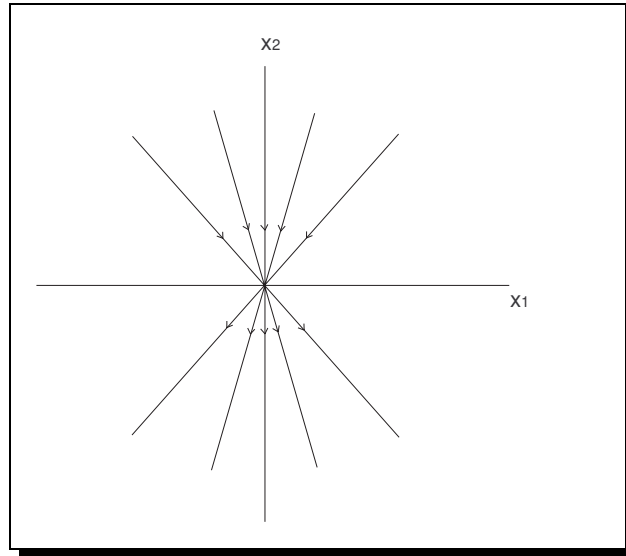


Figura 1.1: Reversível não Hamiltoniano

Esse sistema planar resulta ser S -reversível, onde $S(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. No entanto, não é Hamiltoniano já que, claramente, não preserva volume.

1.2 Órbitas Simétricas

Definição 1.3. Para cada $x_o \in \mathbb{R}^N$ definimos a órbita por x_o como:

$$\mathcal{O}(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^N / x = \varphi_t(x_o); t \in \mathbb{R}\},$$

onde φ_t é o fluxo de X .

Definição 1.4. : Dizemos que uma órbita de um campo vetorial é simétrica com relação a uma simetria (ou anti-simetria) S se S aplica a órbita nela mesma, isto é, $\mathcal{O}(x_o)$ é simétrica se $S(\mathcal{O}(x_o)) = \mathcal{O}(x_o)$.

Segue da definição que se uma órbita é simétrica com relação a uma simetria (ou anti-simetria) S , então todo ponto dessa órbita é aplicado por S na mesma órbita, isto é, $S(x) = \varphi_\tau(x)$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$.

Daí segue que $x \in \text{Fix}[(\varphi_\tau^{-1}) \circ S]$, onde

$$\text{Fix}(A) = \{x \in \mathbb{R}^N / Ax = x\}$$

é o conjunto dos pontos fixados por A .

Definição 1.5. (*Ponto de equilíbrio Simétrico*): Dizemos que um ponto de equilíbrio para um campo vetorial é simétrico se ele pertence ao conjunto $\text{Fix}(S)$ onde S é a simetria (ou anti-simetria) para o referido campo.

Para os objetos descritos até aqui temos o seguinte resultado:

Proposição 1.6. Quanto a posição de uma órbita de um campo vetorial S -reversível com relação a variedade $\text{Fix}(S)$ três situações são possíveis:

- (i) $\mathcal{O}(x_o)$ não encontra $\text{Fix}(S)$ e neste caso $\mathcal{O}(x_o)$ e $S(\mathcal{O}(x_o))$ são duas órbitas distintas de X .
- (ii) $\mathcal{O}(x_o)$ encontra $\text{Fix}(S)$ em apenas um ponto e, neste caso, $\mathcal{O}(x_o)$ é simétrica e portanto $\mathcal{O}(x_o)$ e $S(\mathcal{O}(x_o))$ representam a mesma órbita.
- (iii) $\mathcal{O}(x_o)$ encontra $\text{Fix}(S)$ em exatamente dois pontos e, neste caso, $\mathcal{O}(x_o)$ é uma órbita periódica simétrica e se T é o período de $\mathcal{O}(x_o)$ e $x \in \mathcal{O}(x_o) \cap \text{Fix}(S)$ então $\varphi_{\frac{T}{2}}(x) \in \text{Fix}(S)$.

Note que para órbitas simétricas, a propriedade de simetria (anti-simetria) é extremamente importante. Ela nos diz muito sobre as órbitas que interceptam $Fix(S)$.

Por outro lado, para órbitas que têm intersecção vazia com $Fix(S)$, a única informação que podemos obter da propriedade simétrica (anti-simétrica) é que tais órbitas ocorrem em pares, a saber, $\mathcal{O}(x_o)$ e $S(\mathcal{O}(x_o))$.

Ou seja, para cada equilíbrio não simétrico $x \in \mathbb{R}^N$ outro equilíbrio $S(x)$ está associado. Mais ainda, se $x \in \mathbb{R}^N$ é um atrator, então $S(x)$ também é um atrator se X é S -equivariante e é um repulsor se X é S -reversível.

Também, para cada órbita periódica não simétrica, uma outra órbita periódica não simétrica está associada.

1.3 Órbitas Homoclínicas Simétricas

Seja $x_o \in \mathbb{R}^N$ um ponto de equilíbrio de X e sejam

$$W^s(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^N / \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = x_o\}$$

e

$$W^u(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^N / \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = x_o\}$$

as variedades estável e instável, respectivamente, em x_o , onde $t \in \mathbb{R}$.

Um ponto $x \in W^s(x_o) \cap W^u(x_o)$ é chamado um *ponto homoclínico* para x_o e a órbita por x é chamada de *órbita homoclínica* associada ao equilíbrio x_o .

Proposição 1.7. *Seja S uma simetria de um campo vetorial tendo x_o como ponto de equilíbrio, então*

$$S(W^{s(u)}(x_o)) = W^{s(u)}(x_o) \Leftrightarrow x_o \in Fix(S).$$

Proposição 1.8. *Seja S uma anti-simetria para um campo vetorial que tem x_o como ponto de equilíbrio, então*

$$W^s(x_o) \cap Fix(S) \subset W^u(S(x_o)),$$

$$W^u(x_o) \cap Fix(S) \subset W^s(S(x_o)).$$

Proposição 1.9. *Seja S uma anti-simetria para um campo vetorial que tem x_o como ponto de equilíbrio, então*

$$S(W^{s(u)}(x_o)) = W^{u(s)}(x_o) \Leftrightarrow x_o \in \text{Fix}(S).$$

Observação 1.3.1. *Se S é uma anti-simetria para um campo vetorial e $x_o \in \text{Fix}(S)$ é um ponto de equilíbrio para o sistema, então interseções de variedades estável (instável) com $\text{Fix}(S)$ implicam na existência de órbitas homoclínicas simétricas com relação à anti-simetria S . Assim, a proposição (1.8) fornece um critério para persistência de órbitas homoclínicas que são simétricas com relação à anti-simetria reversa.*

Em se tratando de sistemas equivariantes/reversíveis a aplicação S pode, localmente, sempre ser considerada linear. De fato, dado o difeomorfismo involutivo S considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\phi = I + DS(0)S.$$

Note que,

$$\begin{aligned} (\phi S)(x) &= \phi(S(x)) = S(x) + DS(0)S(S(x)) = S(x) + DS(0)x = \\ &= DS(0)(x + DS(0)S(x)) = DS(0)(I + DS(0)S)x = \\ &= (DS(0)\phi)(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi S \phi^{-1} = DS(0)$$

e portanto S é conjugada por ϕ a sua parte linear.

De fato um resultado mais geral para grupos de transformações compactos é válido devido a Bochner em [1].

1.4 Toros Invariantes

Seja X um campo vetorial em uma variedade M com um toro n -dimensional X -invariante T , isto é, se φ_t é o fluxo associado a X , então

$$\varphi_t(T) \subset T, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.10. (*Dinâmica Paralela*): *Dizemos que X induz no toro T uma dinâmica paralela (ou condicionalmente periódica), se existe um difeomorfismo $T \rightarrow \mathbb{T}^n$ que leva a restrição $X|_T$ a um campo vetorial constante $\sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ no toro canônico $\mathbb{T}^n := (S^1)^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ com coordenadas $\theta_1, \dots, \theta_n \bmod 2\pi$.*

Desta forma o campo vetorial determina um sistema linear $\dot{\theta}_i = \omega_i$, $1 \leq i \leq n$ de equações diferenciais.

Os números $\omega_1, \dots, \omega_n$ são chamados frequências (internas) da dinâmica em T .

Desta forma, a dinâmica de $X|_T$, fica totalmente caracterizada pelas frequências internas.

Definição 1.11. (*Toro quasi-periódico*): Uma dinâmica paralela em um n -toro invariante T com vetor frequência ω é chamada quasi-periódica ou não-ressonante se as frequências $\omega_1, \dots, \omega_n$ são racionalmente independentes, isto é, se temos $\langle \omega, k \rangle := \sum_{i=1}^n \omega_i k_i \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Nesse caso, o toro T é chamado de toro quasi-periódico.

Caso contrário, o toro invariante T com dinâmica paralela é chamado *ressonante*.

É fato que, para toros quasi-periódicos, a órbita por cada ponto de T é densa em T .

Por outro lado, toros ressonantes são folheados por subtoros invariantes de dimensão menor.

Como exemplo disso, consideremos um campo vetorial X que tem um toro 2-dimensional T invariante com dinâmica paralela. Assim, a restrição $X|_T$ é conjugada ao campo

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \end{cases}$$

em $\mathbb{T}^2$.

Aqui a dinâmica em $\mathbb{T}^2$ pode ser de dois tipos:

(i) Dinâmica quasi-periódica:

Neste caso ω_1 e ω_2 são racionalmente independentes e a órbita por cada ponto $x \in \mathbb{T}^2$ é densa em $\mathbb{T}^2$.

(ii) Dinâmica periódicas:

Neste caso ω_1 e ω_2 são racionalmente dependentes, digamos $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Assim, a órbita por cada ponto $x \in \mathbb{T}^2$ resulta ser periódicas de período q . Cada uma dessas órbitas periódicas é homeomorfa a um toro $\mathbb{T}^1$.

Portanto, neste caso, o toro $\mathbb{T}^2$ é folheado por subtoros invariantes de dimensão 1.

Definição 1.12. (*Toros Diofantinos*): Diz-se que um n -toro T com dinâmica paralela é Diofantino se para constantes $\tau > 0$ e $\gamma > 0$ o correspondente vetor frequência ω satisfaz o seguinte sistema infinito de inequações:

$$|\langle \omega, k \rangle| \geq \gamma |k|^{-\tau}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, onde $|k| := \sum_{i=1}^n |k_i|$.

É claro que toros Diofantinos são quasi-periódicos, no entanto, a recíproca é falsa.

Para $\tau > n - 1$ o conjunto de todos os vetores frequência $\omega \in \mathbb{R}^n$ que são Diofantinos no sentido acima tem medida de Lebesgue positiva [4].

1.5 Topologia Compacto-aberta

Nesta seção definiremos a topologia compacto-aberta no conjunto das famílias de campos vetoriais analíticos.

Sejam $M = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^m$ e $P \subset \mathbb{R}^k$ um espaço de parâmetros.

Considere X uma família de campos vetoriais analítica em M parametrizada sob P .

Para $I \subset \mathbb{R}^k$ e $\rho > 0$ dados defina:

$$I + \rho := \bigcup_{x \in I} \{z \in \mathbb{C}^k \mid \text{para } 1 \leq j \leq k, |z_j - x_j| \leq \rho\}.$$

Suponha que X tem uma extensão analítica complexa a domínios compactos da forma

$$\mathcal{O} := (\mathbb{T}^n + k) \times \Delta \times (\Gamma + \rho), \quad k > 0 \text{ e } 0 < \rho \leq 1$$

onde $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ é uma vizinhança compacta de 0 e onde $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ é um conjunto compacto.

Escrevendo

$$X(x, y, \lambda) = \omega(\lambda) \frac{\partial}{\partial x} + \Omega(\lambda) y \frac{\partial}{\partial y},$$

uma vizinhança compacto-aberta $\mathcal{V}$ de X é formada pelos

$$\tilde{X} = X + f(x, y, \lambda) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y, \lambda) \frac{\partial}{\partial y}$$

tal que f e g têm extensão analítica a $\mathcal{O}$ e $|f|_{\mathcal{O}} < \delta$ e $|g|_{\mathcal{O}} < \delta^2$ onde $|\cdot|_{\mathcal{O}}$ denota a norma do supremo em $\mathcal{O}$.

Essa topologia será chamada *topologia real analítica*.

1.6 KAM teorema

No contexto de dinâmica quasi-periódica o nosso objetivo é aplicar parte da teoria KAM que, genericamente, estabelece a existência e persistência de toros quasi-periódicos em sistemas dinâmicos, à nossa família de campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$ a fim de detectar a persistência de toros 2-dimensionais.

Na teoria KAM, as frequências dos toros quasi-periódicos, além de racionalmente independentes, satisfazem a condições não-ressonantes mais fortes, a saber, a de serem Diofantinos.

O seguinte resultado devido a Broer e Huitema [3] estabelece a persistência de toros invariantes para o caso especial de quando a família de campos vetoriais é G -reversível. Esse resultado será aplicado ao nosso caso em famílias de campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$ no capítulo 6 desta tese.

Teorema 1.13. *Seja $Y(x, y, z, \mu)$, $(x, y, z) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2p} = M$ uma família analítica de campos vetoriais G -reversíveis parametrizada sob um subconjunto aberto P de $\mathbb{R}^N$, onde Y é dado por $Y(x, y, z, \mu) = \omega(\mu) \frac{\partial}{\partial x} + \Omega(\mu) z \frac{\partial}{\partial z}$ e $G(x, y, z) = (-x, y, Sz)$ com $\dim \text{Fix}(S) = p$. Desta forma, para cada $\mu_o \in P$ fixado, Y possui um toro invariante n -dimensional com dinâmica paralela dada por $\omega(\mu_o)$. Suponha que a matriz $\Omega(\mu_o)$ tenha apenas autovalores simples e que a aplicação $\mathcal{F} : \omega \times \text{spec} : P \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ seja uma submersão em $\mu_o \in P$.*

Então, para $\gamma > 0$ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança Γ de μ_o em P e uma vizinhança $\mathcal{U}$ de Y na topologia analítica real de campos vetoriais G -reversíveis em M tal que para todo $\tilde{Y} \in \mathcal{U}$ existe uma aplicação $\Phi : M \times P \rightarrow M \times P$ tal que:

(i) A restrição de Φ a $\mu \in \Gamma$ é um difeomorfismo C^∞ em sua imagem, C^∞ -próximo a aplicação identidade. Além disso, Φ preserva a projeção em P e Φ é real analítica em x e afim nas variáveis y e z .

(ii) Uma outra restrição de Φ a $\mu \in \Gamma_\gamma$ define uma conjugação entre todos os $\tilde{Y} \in \mathcal{U}$ e Y no conjunto $T_o \times \Gamma_\gamma$.

Este teorema garante a persistência de uma família de toros invariantes de Y , a saber, $T_o \times \Gamma_\gamma$, onde Γ_γ é um conjunto de Cantor. Mais ainda, tal persistência é estabelecida por conjugação C^∞ .

A aplicação $\mathcal{F}$ é definida da seguinte forma:

Como $\Omega(\mu)$ é G -reversível seus autovalores são simétricos com relação a origem. Desta forma,

sejam

$$\pm\delta_1, \dots, \pm\delta_{N_1}; \pm i\varepsilon_1, \dots, \pm i\varepsilon_{N_2}; \pm\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \pm\alpha_{N_3} \pm i\beta_{N_3}$$

autovalores de $\Omega(\mu)$, onde $p = N_1 + N_2 + 2N_3$. Como para μ_o supomos que $\Omega(\mu_o)$ só possui autovalores simples a matriz $\Omega(\mu_o)$ não tem zero como autovalor o que vale obviamente numa vizinhança de μ_o suficientemente pequena. Desta forma, tomamos os $\delta_j, \varepsilon_j, \alpha_j$ e β_j positivos.

Assim, definimos a aplicação

$$spec : P \rightarrow \mathbb{R}^q$$

por $spec(\mu) = (\delta_{n_1}(\mu), \varepsilon_{n_2}(\mu), \alpha_{n_3}(\mu), \beta_{n_3}(\mu))$, onde $1 \leq n_j \leq N_j$, $j = 1, 2, 3$.

Além disso, definimos Γ_γ como

$$\Gamma_\gamma := \{\omega \in \mathbb{R}^n; |\langle \omega, k \rangle + \langle \omega^N, l \rangle| \geq \gamma |k|^{-\tau}\}$$

onde ω^N é um vetor formado com os valores positivos das partes imaginárias dos autovalores de $\Omega(\mu)$, isto é, pelos ε_j e β_j .

CAPÍTULO 2

Forma Normal de Belitskii

2.1 Introdução

Neste capítulo encontraremos a forma normal de Belitskii para as diversas situações tratadas nesta tese. O principal resultado utilizado neste capítulo é o Teorema da Forma Normal. O mesmo será enunciado sem demonstração e pode ser encontrado em [23].

Desta forma, encontraremos uma forma normal de qualquer ordem para um campo vetorial em $\mathbb{R}^{2n}$ que possui na origem um equilíbrio *0-não-ressonante*.

Nos casos onde ressonâncias do tipo $0:p:q$ estão presentes, formas normais de ordem 2 são encontradas. Veremos que, para o nosso objetivo, a determinação de uma forma normal de ordem 2 será suficiente.

Seja

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (2.1)$$

um campo vetorial C^∞ S -reversível, onde S é um difeomorfismo involutivo em $\mathbb{R}^N$, isto é, $S^2 = Id$ e tal que $X(0) = 0$. Seja $A = DX(0)$.

Para $X \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ denote por $T_m X$ o polinômio de Taylor de grau m em $x = 0$ e $\tilde{T}_m X(x)$ sua parte homogênea de grau m , isto é,

$$T_m X(x) = \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} D^l X(0) x^{(l)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\tilde{T}_m X(x) = \frac{1}{m!} D^m X(0) x^{(m)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

onde $x^{(l)}$ denota a l -upla $(x, \dots, x)$.

Diremos que o campo vetorial (2.1) está na *forma normal de Belitskii* (com respeito a A) até ordem m ($m \geq 2$) se

$$A^* \tilde{T}_l X(x) = D \tilde{T}_l X(x) A^* x, \quad \forall l \in \{2, \dots, m\},$$

isto é,

$\tilde{T}_l X$, $l = 2, \dots, m$, comutam com a matriz A^* , onde A^* é a matriz adjunta de A .

Um fato importante a se observar é o seguinte:

Se $A = S + N$ onde S é semi-simples e N é nilpotente com $SN = NS$ então pode-se mostrar que X está na forma normal de Belitskii com respeito a A se, e somente se, X está na forma normal de Belitskii com respeito a S e N simultaneamente, isto é, se, e somente se,

$$S^* \tilde{T}_l X(x) = D \tilde{T}_l X(x) S^* x, \quad \forall l \in \{2, \dots, m\}$$

e

$$N^* \tilde{T}_l X(x) = D \tilde{T}_l X(x) N^* x, \quad \forall l \in \{2, \dots, m\}.$$

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [23].

Considere agora

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ y &\mapsto x = \Phi(y) = y + h(y) \end{aligned}$$

um difeomorfismo, com $h(y) = o(|y|^2)$.

Aplicando a transformação $x = \Phi(y)$ a (2.1) obtemos

$$\dot{y} = \Phi^* X(y) := D\Phi(y)^{-1} X(\Phi(y)) = Y(y).$$

O teorema seguinte garante que sempre podemos colocar (2.1) na forma normal por uma mudança de coordenadas da forma de Φ .

Teorema 2.1. (*Teorema da Forma Normal [23]*): *Seja $X \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para cada $m \geq 2$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_m$ da origem em $\mathbb{R}^N$ e uma aplicação $\Phi \in C^\infty(\mathcal{U}_m)$ tal que $\Phi^* X(y) =$*

$Ay + g(y)$, onde $Dg(0) = 0$ e

$$A^* \tilde{T}_l g(y) = D \tilde{T}_l g(y) A^* x, \quad \forall l \in \{2, \dots, m\}.$$

Lembre que estamos supondo X um campo vetorial S -reversível. É claro que uma mudança de coordenadas como Φ pode alterar esta propriedade. De fato, temos o seguinte resultado:

Fixaremos, a partir daqui, os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{X}_S(\mathbb{R}^N) = \{\text{espaço de germes de campos vetoriais } C^\infty \text{ em } 0 \in \mathbb{R}^N; X \text{ é } S\text{-reversível}\}$$

e

$$\mathcal{X}_S^\lambda(\mathbb{R}^N) = \mathcal{X}_S(\mathbb{R}^N) \times (-\lambda_o, \lambda_o)$$

conjunto de famílias a um-parâmetro de germes em $\mathcal{X}_S$ munidos com a topologia C^∞ .

Proposição 2.2. *Seja $X \in \mathcal{X}_S(\mathbb{R}^N)$. Então o campo vetorial $Y(y) = \Phi^* X(y) \in \mathcal{X}_{S^*}(\mathbb{R}^N)$ onde $S^* = \Phi^{-1} \circ S \circ \Phi$.*

Dem: Aplicação direta da definição. ■

A fim de que não percamos a S -reversibilidade, podemos tomar a transformação Φ como no teorema seguinte:

Teorema 2.3. *[13] A aplicação Φ do teorema 2.1 pode ser escolhida de forma que $\Phi(Sy) = S(\Phi(y))$. Assim, se $Y(y) = \Phi^* X(y)$, temos que $DS(y)Y(y) = -Y(Sy)$.*

Em outras palavras, é possível encontrar uma aplicação Φ tal que o campo vetorial na forma normal Y ainda seja S -reversível.

Um outro resultado que será útil nos próximos capítulos é o seguinte:

Proposição 2.4. *Para um campo vetorial $X \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $X(0) = 0$ e $A = DX(0)$ são equivalentes:*

- (i) $A^* T_m X(x) = D T_m X(x) A^* x$;
- (ii) $T_m X \exp(tA^*) = \exp(tA^*) T_m X, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

2.2 Caso 0-não-ressonante

Nesta seção encontraremos a forma normal de Belitskii até ordem m ($m \geq 2$) onde m pode ser escolhido tão grande quanto se queira. O resultado disto é uma forma normal formal, ou seja, uma forma normal de ordem infinita, onde todo o campo vetorial está na forma normal. No entanto, não sabemos se a mesma é convergente. Lembre que estamos tratando de campos C^∞ . Ela é interessante pelo fato de que nos serve de inspiração para o estudo de objetos que são de nosso interesse, a saber, soluções periódicas e homoclínicas além de toros invariantes.

Seja $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$ um campo vetorial tal que $X(0) = 0$ e

$$A = DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & -\alpha_1 & & \\ & & \alpha_1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -\alpha_{n-1} \\ & & & & & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

e tal que X é R -reversível onde R é a involução linear em $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$R(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (x_1, -x_2, \dots, x_{2n-1}, -x_{2n}).$$

Definição 2.5. (i) Dizemos que os autovalores $\pm i\alpha_j$, $j = 1, \dots, n-1$ são **não ressonantes** se eles satisfazem:

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_j \alpha_j = 0, \quad k_j \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad k_j = 0 \quad j = 1, \dots, n-1,$$

ou seja, são linearmente independentes sob os inteiros (racionalmente independentes).

(ii) O campo vetorial X , com $X(0) = 0$ é dito **0-não-ressonante** se $A = DX(0)$, escrita como acima, é tal que os autovalores imaginários puros são não ressonantes como em (i).

Como $\dot{x} = X(x)$ é tal que $X(0) = 0$ e $A = DX(0)$ podemos escrever:

$$\dot{x} = Ax + h(x) + o(|x|^{m+1})$$

onde h é formado por monômios homogêneos de grau menor que $m+1$ e maior que 1.

Como queremos achar a forma normal de Belitskii, devemos encontrar uma base para os elementos do núcleo do *operador homológico*

$$L_{A^*} := A^*h(x) - Dh(x)A^*x.$$

Em [11] encontramos uma técnica para detectar uma forma normal para um campo em $\mathbb{R}^4$. O objetivo desta seção é estender e generalizar esta técnica para obtermos os resultados seguintes.

Teorema A. *Seja $X \in \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^{2n})$ 0-não ressonante em $x = 0$ tal que $X(0) = 0$ com $A = DX(0)$ e R dados pelas condições acima. Então X é formalmente conjugado, numa vizinhança de 0, a*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_3 = -x_4 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_4 = x_3 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = -x_{2n} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_{2n} = x_{2n-1} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \end{cases}.$$

Dem: Considere inicialmente o campo em coordenadas complexas. Então sua parte linear é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & i\alpha_1 & & & \\ & & & -i\alpha_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & i\alpha_{n-1} \\ & & & & & & -i\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Se $h(x) = (h_1(x), \dots, h_{2n}(x))$ a condição

$$A^*h(x) = Dh(x)A^*x,$$

com $x = (x_1, x_2, z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_{n-1})$, implica em

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= 0 \\ Dh_2(x) &= h_1 \\ Dh_3(x) &= -i\alpha_1 h_3 \\ Dh_4(x) &= i\alpha_1 h_4 \\ &\vdots \\ Dh_{2n-1}(x) &= -i\alpha_{n-1} h_{2n-1} \\ Dh_{2n}(x) &= i\alpha_{n-1} h_{2n} \end{aligned}$$

onde

$$D := x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - i\alpha_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + i\alpha_1 \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \dots - i\alpha_{n-1} z_{n-1} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + i\alpha_{n-1} \bar{z}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}.$$

Segue que

$$Dh_1(x) = 0 \Rightarrow h_1(x) = \varphi_1(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2)$$

se as condições de não-ressonância são satisfeitas, isto é,

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_{n-1} \alpha_{n-1} = 0, \quad k_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_1 = \dots = k_{n-1} = 0.$$

Mas, devido a R-reversibilidade, temos que:

$$h_1(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) = -h_1(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2).$$

Assim

$$h_1 = 0.$$

Daí,

$$Dh_2 = h_1 = 0 \Rightarrow h_2 = \varphi_2(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2).$$

Considere agora $g_{2j+1} = \bar{z}_j h_{2j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$.

Então, g_{2j+1} satisfaz $Dg_{2j+1} = 0 \Rightarrow g_{2j+1} = g_{2j+1}(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2)$.

Mas como $g_{2j+1} = 0$ para $z_j = 0$, $j = 1, \dots, n-1$ temos: $g_{2j+1} = |z_j|^2 \tilde{\varphi}_{2j+1}(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2)$

e assim $h_{2j+1} = z_j \tilde{\varphi}_3(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2)$.

Similarmente, segue que $h_{2j+2} = \bar{z}_j \tilde{\varphi}_{2j+2}(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2)$

Mas $\tilde{\varphi}_{2j+2} = \tilde{\varphi}_{2j+1}$ e a condição de reversibilidade implicam $\tilde{\varphi}_{2j+1} = -\tilde{\varphi}_{2j+2}$.

E portanto $\tilde{\varphi}_{2j+1} = i\varphi_{2j+1}$, com φ_{2j+1} , $j = 1, \dots, n-1$ real.

Logo,

$$\begin{aligned} h_{2j+1} &= iz_j \varphi_{2j+1}(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) \text{ e} \\ h_{2j+2} &= -i\bar{z}_j \varphi_{2j+j}(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \dots, n-1$.

Desta forma, chegamos que a seguinte forma normal R -reversível:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) \\ \dot{z}_1 = iz_1 \varphi_3(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) \\ \dot{\bar{z}}_1 = -i\bar{z}_1 \varphi_3(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = iz_{n-1} \varphi_{n+1}(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) \\ \dot{\bar{z}}_{n-1} = -i\bar{z}_{n-1} \varphi_{n+1}(x_1, |z_1|^2, \dots, |z_{n-1}|^2) \end{cases}$$

que escrito nas coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$ é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_3 = -x_4 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_4 = x_3 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = -x_{2n} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_{2n} = x_{2n-1} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \end{cases}.$$

■

2.3 Caso $0:p:q$ -ressonante com $p+q > 3$

Definição 2.6. *Seja $\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$, $A = DX(0)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^6$ R -reversível, onde $R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5, -x_6)$ e tal que*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & -\alpha_1 & & \\ & & \alpha_1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -\alpha_2 \\ & & & & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que X é **0:p:q-ressonante** se A é da forma acima e α_1, α_2 estão em $p : q$ ressonância, isto é, $q\alpha_1 - p\alpha_2 = 0$.

Veremos nesta seção que a forma normal de Belitskii até ordem 2 para um campo satisfazendo a condição de $0 : p : q$ -ressonância, com $p + q > 3$ em $\mathbb{R}^6$ coincide com a forma normal para o caso 0-não-ressonante.

De fato, queremos estabelecer o seguinte resultado:

Proposição 2.7. *Seja $X \in \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^6)$ 0:p:q-ressonante em $x = 0$ tal que $X(0) = 0$ com $A = DX(0)$ e R dados como acima e $p + q > 3$. Então a forma normal até a ordem 2, coincide com a forma normal para o caso 0-não-ressonante.*

Dem: Note que o operador D é o mesmo do caso 0-não-ressonante.

Para resolver

$$Dh_1 = 0 \tag{2.2}$$

considere o seguinte monômio:

$$v = x_1^{k_1} z_1^{k_2} \bar{z}_1^{k_3} z_2^{k_4} \bar{z}_2^{k_5}.$$

Ele satisfaz (2.2) se, e somente se,

$$(k_2 - k_3)\alpha + (k_4 - k_5)\beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_2 = k_3 + kq \\ k_5 = k_4 + kp \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} k_3 = k_2 + kq \\ k_4 = k_5 + kp \end{cases}.$$

Então

$$v = x_1^{k_1} z^{k_3+kq} \bar{z}^{k_3} \omega^{k_4} \bar{\omega}^{k_4+kp} = x_1^{k_1} (z\bar{z})^{k_3} (\omega\bar{\omega})^{k_4} (z^q \bar{\omega}^p)^k$$

ou

$$v = x_1^{k_1} z_1^{k_3} \bar{z}_1^{k_2+kq} z_2^{k_5+kp} \bar{z}_2^{k_5} = x_1^{k_1} (z_1 \bar{z}_1)^{k_2} (z_2 \bar{z}_2)^{k_5} (z_1^q \bar{z}_2^p)^k,$$

isto é,

$$h_1 = h_1(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2, z_1^q \bar{z}_2^p).$$

Como estamos interessados em termos de ordem dois, temos:

$$h_1^{(2)} = h_1(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2)$$

e, pela condição de R -reversibilidade, segue que $h_1^{(2)} = 0$.

Agora,

$$Dh_2 = h_1$$

implica para termos de ordem dois que $Dh_2^{(2)} = 0$. Então

$$h_2^{(2)}(x) = h_2(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2).$$

O mesmo raciocínio feito no Teorema A vale para $h_3, \dots, h_6$ e assim obtemos, até ordem 2, a mesma forma normal do caso θ -não-ressonante.

■

2.4 Caso $0 : 1 : 2$ – *ressonante*

O caso $0 : 1 : 2$ – *ressonante* não está obviamente incluído no anterior. Nesta seção estabeleceremos a forma normal de Belitskii até ordem 2 para esta situação. Veremos que, neste caso, a forma normal resulta ser diferente dos casos tratados anteriormente.

Para isso, considere $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^6$ um campo vetorial R -reversível que tem $x = 0$ como um equilíbrio $0 : 1 : 2$ – *ressonante*. Podemos supor, sem perda de generalidade, que a matriz $A = DX(0)$ tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -2 \\ & & & & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com base nisso, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.8. *Seja $X \in \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^6)$ tal que $X(0) = 0$ com $A = DX(0)$ e R dados pelas condições acima. Então X é conjugado, numa vizinhança de 0, a seguinte forma normal:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1^2 + b_2(x_3^2 + x_4^2) + b_3(x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4 - a_1 x_1 x_4 - a_2(x_3 x_6 - x_4 x_5) + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3 + a_1 x_1 x_3 + a_2(x_3 x_5 + x_4 x_6) + o(3) \\ \dot{x}_5 = -2x_6 - c_2 x_1 x_6 - 2c_1 x_3 x_4 + o(3) \\ \dot{x}_6 = 2x_5 + c_2 x_1 x_5 + c_1(x_3^2 - x_4^2) + o(3) \end{cases}$$

onde $o(3)$ indica os termos de ordem superior ≥ 3 .

Dem: Considere inicialmente o campo em coordenadas (x_1, x_2, z_1, z_2) onde $z_1 = x_3 + ix_4$, $z_2 = x_5 + ix_6$ são coordenadas complexas. Então, nestas coordenadas, sua parte linear é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & i & & & \\ & & & -i & & \\ & & & & 2i & \\ & & & & & -2i \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $\dot{x} = Ax + h^{(2)}(x) + o(3)$ temos que a condição

$$A^*h^{(2)}(x) = Dh^{(2)}(x)A^*x,$$

com $x = (x_1, x_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$, implica em

$$\begin{aligned} Dh_1^{(2)}(x) &= 0 \\ Dh_2^{(2)}(x) &= h_1 \\ Dh_3^{(2)}(x) &= -ih_3 \\ Dh_4^{(2)}(x) &= ih_4 \\ Dh_5^{(2)}(x) &= -2ih_5 \\ Dh_6^{(2)}(x) &= 2ih_6 \end{aligned}$$

onde

$$h^{(2)}(x) = (h_1^{(2)}, h_2^{(2)}, h_3^{(2)}, h_4^{(2)}, h_5^{(2)}, h_6^{(2)})$$

e

$$D := x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + i\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - 2iz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + 2i\bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}.$$

Da mesma forma que nos outros casos, devido a forma de D , temos que quando um monômio está na forma normal o mesmo independe de x_2 .

Vejamos então quais monômios da forma $u = x_1^{k_1} z_1^{k_2} \bar{z}_1^{k_3} z_2^{k_4} \bar{z}_2^{k_5}$ estão na forma normal até ordem dois. Note que nesse caso estamos supondo $|k| = \sum_{j=1}^5 k_j = 2$ onde $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$.

Análise de $h_1^{(2)}$:

$$Du = 0 \Rightarrow (-ik_2 + ik_3 - 2ik_4 + 2ik_5)u = 0 \Rightarrow (k_2 - k_3) + 2(k_4 - k_5) = 0.$$

Os elementos k que satisfazem a condição acima e ainda $|k| = 2$ são dados por:

$$(0, 1, 1, 0, 0); \quad (0, 0, 0, 1, 1); \quad (2, 0, 0, 0, 0)$$

que equivalem respectivamente aos monônios

$$|z_1|^2, \quad |z_2|^2 \quad \text{e} \quad x_1^2.$$

Daí, $Dh_1^{(2)} = 0 \Rightarrow h_1^{(2)} = h_1^{(2)}(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2)$.

Da R -reversibilidade devemos ainda ter

$$Rh(x) = -h(Rx) \Rightarrow h_1^{(2)}(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2) = -h_1^{(2)}(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2) \Rightarrow h_1^{(2)} \equiv 0.$$

Portanto,

$$Dh_2^{(2)} = h_1^{(2)} = 0 \Rightarrow h_2^{(2)} = \varphi(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2) = b_1 x_2^2 + b_2 |z_1|^2 + b_3 |z_2|^2.$$

que já satisfaz a condição de R -reversibilidade.

Análise de $h_3^{(2)}$:

$$Du = -iu \Rightarrow (k_2 - k_3 - 1) + 2(k_4 - k_5) = 0.$$

Os elementos que satisfazem tal condição e $|k| = 2$ são:

$$(1, 1, 0, 0, 0); \quad (0, 0, 1, 1, 0)$$

que representam respectivamente

$$x_1 z_1 \quad \text{e} \quad \bar{z}_1 z_2.$$

Logo,

$$h_3^{(2)} = \tilde{a}_1 x_1 z_1 + \tilde{a}_2 \bar{z}_1 z_2.$$

Analogamente, para $h_4^{(2)}$ obtemos

$$h_4^{(2)} = \tilde{b}_1 x_1 \bar{z}_1 + \tilde{b}_2 z_1 \bar{z}_2.$$

Agora, sabemos que $\bar{h}_3 = h_4$. Então $\begin{cases} \bar{\tilde{a}}_1 = \tilde{b}_1 \\ \bar{\tilde{a}}_2 = \tilde{b}_2 \end{cases} (a).$

Por outro lado, da R -reversibilidade, onde $R(x_1, x_2, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = (x_1, -x_2, \bar{z}_1, z_1, \bar{z}_2, z_2)$ temos $\begin{cases} \tilde{b}_1 = -\tilde{a}_1 \\ \tilde{b}_2 = -\tilde{a}_2 \end{cases} (b).$

De (a) e (b) segue que $\begin{cases} \tilde{a}_1 = ia_1 \\ \tilde{a}_2 = ia_2 \end{cases}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$

Daí,

$$\begin{aligned} h_3^{(2)} &= i[a_1 x_1 + a_2 \bar{z}_1 z_2], \\ h_4^{(2)} &= -i[a_1 x_1 z_1 + a_2 z_1 \bar{z}_2]. \end{aligned}$$

Cálculos análogos seguem para $h_5^{(2)}$ e $h_6^{(2)}$.

Obtemos, desta forma, a forma normal

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1^2 + b_2 |z_1|^2 + b_3 |z_2|^2 + o(3) \\ \dot{z}_1 = iz_1 + i[a_1 x_1 z_1 + a_2 \bar{z}_1 z_2] + o(3) \\ \dot{z}_2 = 2iz_2 + i[c_1 z_1^2 + c_2 x_1 z_2] + o(3) \end{cases},$$

ou ainda, em coordenadas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1^2 + b_2 (x_3^2 + x_4^2) + b_3 (x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4 - a_1 x_1 x_4 - a_2 (x_3 x_6 - x_4 x_5) + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3 + a_1 x_1 x_3 + a_2 (x_3 x_5 + x_4 x_6) + o(3) \\ \dot{x}_5 = -2x_6 - c_2 x_1 x_6 - 2c_1 x_3 x_4 + o(3) \\ \dot{x}_6 = 2x_5 + c_2 x_1 x_5 + c_1 (x_3^2 - x_4^2) + o(3) \end{cases}.$$

■

2.5 Caso 0 : 1 : 1 – *ressonante*

Neste caso, duas situações serão abordadas.

Suponha que $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^6$ é um campo vetorial R_1 -reversível, onde

$$R_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, -x_5, x_6),$$

com um equilíbrio 0 : 1 : 1 – *ressonante* na origem, ou seja, $X(0) = 0$ e $A = DX(0)$ é uma matriz tal que $\text{spec}(A) = \{0, \pm i\}$ todos com multiplicidade algébrica 2. Iremos supor que

0 tem multiplicidade geométrica 1 e que $\pm i$ têm multiplicidade geométrica 1 (no caso (i)) e multiplicidade geométrica 2 (no caso (ii)).

Assim escrevemos:

(i)

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \mu & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & \mu \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in (0,1].$$

(ii)

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nosso objetivo aqui é encontrar as formas normais de ordem 2 em ambos os casos. Veremos também que a forma normal no caso (i), quando $\mu \neq 0$, não converge para qualquer forma normal do caso (ii), quando $\mu = 0$, embora a parte linear A_μ convirja para A_o quando $\mu \rightarrow 0$.

De maneira geral, temos os seguintes resultados:

Teorema 2.9. *Seja $X_\mu \in \mathcal{X}_{R_1}(\mathbb{R}^6)$ tal que $X_\mu(0) = 0$, onde $A_\mu = DX_\mu(0)$ é dada em (i). Então, a forma normal de Belitskii, até ordem 2, é dada por:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1^2 + b_2 (x_3^2 + x_4^2) - b_3 x_3 x_6 + b_3 x_4 x_5 + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4 + \mu x_5 - c_3 x_1 x_4 + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3 + \mu x_6 + c_3 x_1 x_3 + o(3) \\ \dot{x}_5 = -x_6 + c_4 x_1 x_3 + c_7 x_1 x_6 - \mu (c_7 + c_3) x_2 x_4 + o(3) \\ \dot{x}_6 = x_5 + c_4 x_1 x_4 - c_7 x_1 x_5 \mu (c_7 + c_3) x_2 x_3 + o(3) \end{cases}. \quad (2.3)$$

Teorema 2.10. *Seja $X_o \in \mathcal{X}_{R_1}(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $X_o(0) = 0$, onde $A_o = DX_\mu(0)$ é dada em (ii). Então, a forma normal de Belitskii, até ordem 2, é dada por:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1^2 + b_1 (x_3^2 + x_4^2) + b_3 (x_3 x_5 + x_4 x_6) + b_2 (x_4 x_5 - x_3 x_6) + b_4 (x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4 - c_2 x_1 x_4 - c_5 x_1 x_5 + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_5 x_1 x_6 + o(3) \\ \dot{x}_5 = -x_6 + c_7 x_1 x_3 - c_8 x_1 x_6 + o(3) \\ \dot{x}_6 = x_5 + c_7 x_1 x_4 + c_8 x_1 x_5 + o(3) \end{cases} \quad (2.4)$$

Dem: Encontramos os termos quadráticos na forma normal resolvendo um sistema linear num espaço de dimensão finita. Observe que existem $n_2 = 6 \times 21$ monômios vetoriais $[\delta(i, j) x_1^{k_{i,1}} x_2^{k_{i,2}} \dots x_6^{k_{i,6}}, i = 1, \dots, 6]$ (onde δ é o símbolo de Kronecker) de grau total igual a 2 que podem aparecer na parte quadrática. Denote por $\{m_i, i = 1, \dots, n_2\}$ o conjunto de todos esses monômios. Considere a soma formal $S = \sum_{i=1}^{n_2} \theta_i m_i$ de todos esses monômios onde $\theta_i, i = 1, \dots, n_2$ são reais desconhecidos.

Computamos a imagem de S pelo operador homológico $L_S := L_{A_\lambda^*}(S)$. Os coeficientes de L_S considerados como variáveis indeterminadas ($\theta_i, i = 1, \dots, n_2$) devem se anular. Isso nos fornece um sistema linear E de equações envolvendo as incógnitas $\theta_i, i = 1, \dots, n_2$. Então, resolvemos o sistema E^r reduzido das equações não-nulas com respeito a $\theta_i, i = 1, \dots, n_2$. Todos os $\theta_i, i = 1, \dots, n_2$ são expressos com respeito a um sistema de variáveis indeterminadas primitivas $\theta_i, i \in P$, onde P é um conjunto de inteiros. Os coeficientes $\theta_i, i \in P$ são exatamente os coeficientes no 2-jato da forma normal. Por exemplo, no caso do Teorema 2.9, o sistema linear E^r consiste de 125 equações, e é resolvido com respeito as 125 variáveis indeterminadas presentes. A solução é parametrizada por 11 coeficientes, como aparece no teorema 2.9.

Esse procedimento fora realizado utilizando ferramentas do maple.

O algoritmo utilizado nesta demonstração pode ser encontrado no apêndice 2 no final desta tese.

■

2.6 Dinâmica e Propriedades do Campo na Forma Normal

Nesta seção faremos uma análise do campo vetorial de classe C^∞ *0-não ressonante* quando o mesmo está na forma normal dada pelo teorema A. Veremos ao longo do texto, que esta análise será bastante útil, no sentido de que nos serve de inspiração para estabelecer a persistência para o sistema original, de objetos que serão aqui formalmente encontrados.

Desta forma, considere $\dot{x} = X(x)$ um campo vetorial C^∞ em $\mathbb{R}^{2n}$ dado pela forma normal

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_3 = -x_4 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_4 = x_3 \varphi_3(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = -x_{2n} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \\ \dot{x}_{2n} = x_{2n-1} \varphi_{n+1}(x_1, x_3^2 + x_4^2, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \end{cases}.$$

Podemos notar que esse sistema é integrável com integrais primeiras dadas pelas funções

$$\begin{aligned} H_1 &= x_3^2 + x_4^2 \\ H_2 &= x_5^2 + x_6^2 \\ &\vdots \\ H_{n-1} &= x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 \\ H_n &= x_2^2 - \int \varphi_2(x_1, H_1, \dots, H_{n-1}) dx_1 \end{aligned}.$$

Façamos uma análise local para alguns casos particulares.

Caso n=2:

Suponha que os autovalores de A são 0 (duplo) e $\pm i$.

Em $\mathbb{R}^4$ temos duas integrais primeiras, a saber:

$$\begin{aligned} H_1 &= x_3^2 + x_4^2 \\ H_2 &= x_2^2 - \int \varphi_2(x_1, H_1) dx_1. \end{aligned}$$

Note que se escrevemos tal sistema nas coordenadas (x_1, x_2, r, θ) onde $\begin{cases} x_3 = r \cos \theta \\ x_4 = r \sin \theta \end{cases}$ temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, r^2) \\ \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \varphi_3(x_1, r^2) \end{cases},$$

onde $\varphi_3(x_1, r^2) = 1 + \tilde{\varphi}_3(x_1, r^2)$.

Logo podemos considerar θ como o tempo e analisar o sistema auxiliar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, r^2) \end{cases}$$

para cada $r^2 = c$ (constante).

Se $\varphi_2(x_1, r^2) = a_1 x_1^2 + b_1 r^2 + O(3)$ então, para $a_1 \cdot b_1 < 0$ e $r^2 = c > 0$ temos

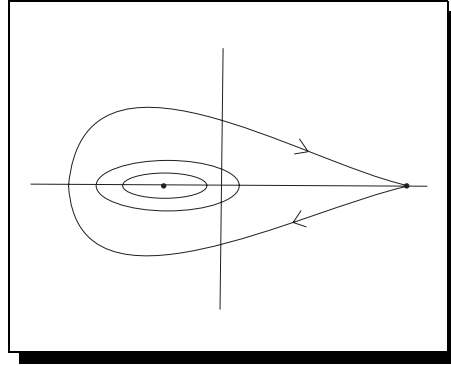


Figura 2.1: Solução Homoclínica

onde cada equilíbrio no sistema auxiliar corresponde a uma órbita periódica simétrica para o sistema original.

Para $r = 0$ temos:

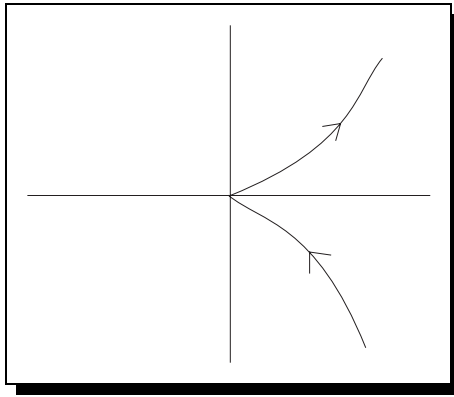


Figura 2.2: Cúspide

Logo, numa vizinhança da origem, temos a seguinte configuração:

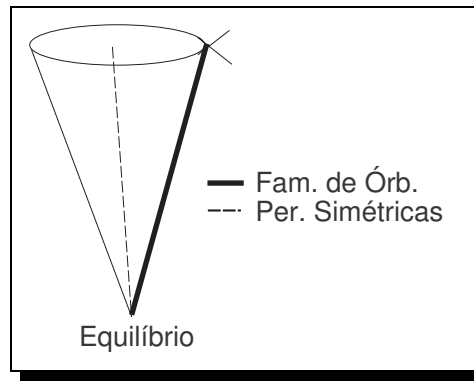


Figura 2.3: Situação Geral

Caso $n=3$:

Como no caso anterior temos em coordenadas $(x_1, x_2, r, \theta, \rho, \psi)$ o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, r^2, \rho^2) \\ \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \varphi_3(x_1, r^2, \rho^2) \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\psi} = \varphi_4(x_1, r^2, \rho^2) \end{cases} .$$

Daí, para cada $r^2 = c_1$, $\rho^2 = c_2$, $c_1, c_2 > 0$ temos um toro invariante com uma órbita

bi-assintótica para ele se considerarmos condições equivalentes ao caso $n=2$.

Se $r^2 = c_1$, $\rho = 0$ ou $r = 0$, $\rho^2 = c_2$ temos uma configuração tipo caso $n=2$.

Mais geralmente, o seguinte resultado segue:

Defina o seguinte conjunto:

$$\mathcal{X}_{R,N}(\mathbb{R}^{2n}) := \left\{ \begin{array}{l} \text{espaço de germes de campos vetoriais } C^\infty \text{ em } \mathbb{R}^{2n}; \\ X \text{ é } R - \text{reversível e é dado pela forma normal do Teorema A} \end{array} \right\}.$$

Proposição 2.11. *Existe um conjunto aberto $\mathcal{U}$ em $\mathcal{X}_{R,N}(\mathbb{R}^{2n})$ determinado pelo 2-jato do campo vetorial X tal que cada $X \in \mathcal{U}$ satisfaz:*

- (i) *X é completamente integrável;*
- (ii) *Existem duas famílias a um-parâmetro de $(n-1)$ -toros T_μ^{n-1} e K_μ^{n-1} terminando na origem;*
- (iii) *Existe uma família de n -toros topológicos T_μ^n contendo T_μ^{n-1} terminando na origem;*
- (iv) *Existe uma família a dois-parâmetros de n -toros $T_{\mu,\nu}^n$ terminando na origem quando $\mu \rightarrow 0$, e para cada μ_o , a família $T_{\mu_o,\nu}^n$ começa em $T_{\mu_o}^n$ e termina em $K_{\mu_o}^{n-1}$, quando ν tende a $\pm\infty$;*
- (v) *Existe um inteiro $k < n$, dependendo do 2-jato do campo tal que X tem:*
 - (a) *$2k$ famílias a um-parâmetro de órbitas periódicas terminando na origem (com períodos limitados) γ_μ^i e δ_μ^n ;*
 - (b) *k órbitas homoclínicas T_μ^i terminando em 0.*

Consideraremos a partir daqui, campos vetoriais $X \in \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^{2n})$ como os anteriormente descritos e iremos supor que os seus 2-jatos estão na forma normal de Belitskii.

A partir daí, inserimos os mesmos numa família genérica a um parâmetro de campos vetoriais reversíveis em $\mathcal{X}_R(\mathbb{R}^{2n})$, $n \geq 2$.

Tais desdobramentos são dados por:

$$X(x, \lambda) = \lambda e_2 + X(x), \quad (2.5)$$

onde os coeficientes em $X(x)$ dependem de λ de modo C^∞ .

CAPÍTULO 3

Redução de Lyapunov-Schmidt

Com o objetivo de reduzir o problema de encontrar soluções periódicas para um sistema de equações R -reversível a resolver um sistema de equações algébricas, desenvolveremos aqui um método alternativo eficiente, que é uma variação da redução de Lyapunov-Schmidt encontrada em [8]. Este método foi inspirado em trabalhos como [14],[25] e [23], onde a existência de soluções periódicas é abordada. Desta forma, faremos aqui uma adaptação do método de tal modo que ele se aplique a todos os casos abordados nesta tese.

3.1 Introdução

Considere uma família de EDOs R -reversíveis dada por

$$\dot{x} = X(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

onde R é uma involução linear fixada anteriormente.

Neste contexto, vários cenários serão abordados, a saber:

(1) X é um campo vetorial em $\mathbb{R}^{2n}$ onde $X(0,0) = 0$ e

$$A_o = DX(0,0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & -\alpha_1 & \\ & & \alpha_1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 0 & -\alpha_{n-1} \\ & & & & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

e tal que o conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ é racionalmente independente. Neste caso diremos que o campo $X(x,0)$ tem um equilíbrio *0-não-ressonante* na origem.

(2) X é um campo vetorial em $\mathbb{R}^6$ onde $X(0,0) = 0$ e

$$A_o = DX(0,0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & -\alpha_1 & \\ & & \alpha_1 & 0 & \\ & & & & 0 & -\alpha_2 \\ & & & & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

e tal que α_1 e α_2 estão em ressonância $p : q$ com $p, q > 1$, isto é, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p}{q}$. Neste caso diremos que o campo $X(x,0)$ tem um equilíbrio *0:p:q-ressonante* na origem.

(3) X é um campo vetorial em $\mathbb{R}^6$ onde $X(0,0) = 0$ e

$$A_o = DX(0,0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & -\alpha_1 & \\ & & \alpha_1 & 0 & \\ & & & & 0 & -\alpha_2 \\ & & & & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

e tal que α_1 e α_2 estão em ressonância $1 : 2$, isto é, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2}$. Neste caso diremos que o campo $X(x,0)$ tem um equilíbrio *0:1:2-ressonante* na origem.

Note que neste caso, podemos supor sem perda de generalidade, que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$.

(4) X_μ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^6$ onde $X_\mu(0, 0) = 0$ e

$$A_o^\mu = DX_\mu(0, 0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & \mu & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & \mu \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, o equilíbrio, para $\lambda = 0$, tem autovalores 0 e $\pm i$ (todos com multiplicidade algébrica 2) e quando $\mu \neq 0$ $\pm i$ tem multiplicidade geométrica 1 e multiplicidade geométrica 2 caso contrário, onde $\mu \in [0, 1]$. Neste caso diremos que o campo $X(x, 0)$ tem um equilíbrio *0:1:1-ressonante* na origem.

Cada um dos casos acima será tratado separadamente já que, para cada caso, uma redução diferente é encontrada, exceto os casos (1) e (2) os quais têm reduções similares.

Em cada situação, inspirados no campo vetorial dado pela parte linear, que tem órbitas periódicas R -simétricas (R_1 -simétricas para o caso (4)) de períodos $\frac{2\pi}{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, n-1$ para o caso (1), ou $j = 1, 2$ para o caso (2), 2π e π para o caso (3) e 2π para o caso (4), queremos encontrar condições genéricas para a existência de órbitas periódicas com períodos próximos daqueles detectados no caso linear para os campos vetoriais R -reversível (R_1 -reversível) que têm como parte linear as matrizes acima descritas. Veremos que estas condições genéricas serão dadas com respeito aos 2-jatos das famílias de campos vetoriais envolvidos, os quais iremos supor estar na forma normal de Belitskii.

Nota: Como ficará claro no decorrer deste capítulo, situações mais gerais envolvendo campos com parte linear que não satisfazem necessariamente as condições acima, mas que satisfazem relações que envolvem mais de uma das situações anteriores também poderão ser consideradas, com pequenas alterações na redução. De fato, a única coisa que se altera é a dimensão final da redução, ou seja, o número de equações que o nosso sistema de equações algébricas terá.

3.2 Caso 0-não-ressonante em $\mathbb{R}^{2n}$

Denote $C_{2\pi}^0$ como o espaço de Banach de funções contínuas 2π -periódicas $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 2$; e por $C_{2\pi}^1$ o correspondente C^1 -subespaço.

Definimos um produto interno em $C_{2\pi}^0$ por

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle x_1(t), x_2(t) \rangle dt$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota um produto interno em $\mathbb{R}^{2n}$.

Agora considere as aplicações $F_j : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow C_{2\pi}^0$ definidas por

$$F_j(x, \sigma, \lambda)(t) = (1 + \sigma) \alpha_j \dot{x}(t) - X(x(t), \lambda), \quad j = 1, \dots, n-1$$

Note que se $(x_o, \sigma_o, \lambda_o) \in C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é tal que

$$F_j(x_o, \sigma_o, \lambda_o) = 0 \tag{3.2}$$

então $\tilde{x}(t) := x_o((1 + \sigma_o) \alpha_j t)$ é uma solução $\frac{2\pi}{(1 + \sigma_o) \alpha_j}$ -periódica de (3.1) para $\lambda = \lambda_o$.

Assim, o problema de encontrar soluções periódicas de (3.1) com períodos próximos de um dado período, no caso $\frac{2\pi}{\alpha_j}$, se reduz a encontrar os zeros de F_j .

Para cada aplicação F_j associamos os seus zeros a soluções periódicas de período próximo a $\frac{2\pi}{\alpha_j}$ do campo vetorial original (3.1).

Nosso objetivo agora é reduzir esses problemas, inicialmente definidos em espaços de dimensão infinita, para outros equivalentes em espaços de dimensão finita. Para isso, utilizaremos o Teorema das Funções Implícitas **(TFI)** [8].

Observe que $(0, 0, 0)$ é uma solução de (3.2) para qualquer j . Isto segue diretamente da hipótese de que $X(0, 0) = 0$.

Sejam

$$L_j := D_1 F_j(0, 0, 0) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$$

dadas por

$$L_j x(t) = \dot{x}(t) - \frac{1}{\alpha_j} A_o x(t).$$

Considere $A_o = S_o + N_o$ como a única decomposição de A_o em parte semi-simples (S_o) e nilpotente (N_o) com $S_o N_o = N_o S_o$.

Fixemos os seguintes subespaços:

$$V_j := \text{ger}\{e_1, e_2, e_{2j+1}, e_{2j+2}\}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

onde os e_k 's são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{2n}$.

Agora defina os subespaços de $C_{2\pi}^1$:

$$\mathcal{N}_j := \{q; q(t) = \exp(tS_o/\alpha_j)v_j, \quad v_j \in V_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

A idéia para a construção desses subespaços é a seguinte:

Se olharmos para as aplicações $L_j := D_1 F_j(0, 0, 0)$, os subespaços $\mathcal{N}_j$ são escolhidos de forma que o núcleo desses operadores ($\ker(L_j)$) estejam contidos nos $\mathcal{N}_j$.

De fato, note que para $j = 1$ temos:

$$L_1 x(t) = \dot{x}(t) - \frac{1}{\alpha_1} A_o x(t).$$

Queremos analisar a equação $L_1 x(t) = 0$ ou, de maneira equivalente:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\alpha_1} A_o x(t)$$

que tem solução em $C_{2\pi}^1$ contida em $\mathcal{N}_1$.

O objetivo a partir daqui é colocar, em cada caso, as soluções de (3.2) em correspondência um a um com as soluções de uma equação em $\mathcal{N}_j$. Desta forma, para cada j , defina os seguintes subespaços:

$$\begin{aligned} X_j &= \{x \in C_{2\pi}^1; (x, \mathcal{N}_j) = 0\} \\ \text{e} \qquad \qquad \qquad & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, n-1 \\ Y_j &= \{y \in C_{2\pi}^0; (y, \mathcal{N}_j) = 0\} \end{aligned}$$

como os complementos ortogonais de $\mathcal{N}_j$ em $C_{2\pi}^1$ e $C_{2\pi}^0$, respectivamente.

Seja $(q_{j,1}, q_{j,2}, q_{j,3}, q_{j,4})$ com $q_{j,i} = \exp(tS_o/\alpha_j)v_{j,i}$ onde

$$\{v_{j,1} = e_1, v_{j,2} = e_2, v_{j,3} = e_{2j+1}, v_{j,4} = e_{2j+2}\}$$

é uma base de V_j .

Agora defina as projeções

$$\mathcal{P}_j : C_{2\pi}^0 \rightarrow C_{2\pi}^0$$

por

$$\mathcal{P}_j(\cdot) = \sum_{i=1}^4 (q_{j,i})^* (\cdot) q_{j,i} \in \mathcal{L}(C_{2\pi}^0) \quad (3.3)$$

onde $(q_{j,i})^* (x) = (q_{j,i}, x)$.

Temos que:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\mathcal{P}_j) &= \mathcal{N}_j \text{ e } \text{Ker}(\mathcal{P}_j) = Y_j, \\ C_{2\pi}^1 &= X_j \oplus \mathcal{N}_j, \quad C_{2\pi}^0 = Y_j \oplus \mathcal{N}_j. \end{aligned}$$

Finalmente definimos

$$F_j(x, \sigma, \lambda) = F_j(q_j + x_j, \sigma, \lambda) =: \hat{F}_j(q_j, x_j, \sigma, \lambda), \quad q_j \in \mathcal{N}_j, \quad x_j \in X_j.$$

Lembremos aqui que $\mathcal{N}_j$, $j = 1, \dots, n-1$ são subespaços de dimensão quatro em $C_{2\pi}^1$.

O lema seguinte é um resultado clássico da teoria de Equações Diferenciais e cuja demonstração pode ser encontrada em [9].

Lema 3.1. (*Alternativa de Fredholm*): *Sejam $A(t)$ uma matriz em C_T^0 e g em C_T , então a equação*

$$\dot{x} = A(t)x + g(t)$$

tem uma solução em C_T se e somente se

$$\int_0^T \langle y(t), g(t) \rangle dt = 0$$

para toda solução y da equação adjunta

$$\dot{y} = -A^*(t)y$$

tal que y está em C_T .

O lema anterior será importante para estabelecer o seguinte lema:

Lema 3.2. *As aplicações $\hat{L}_j := L_j|_{X_j}: X_j \rightarrow Y_j$ são injetoras e sobre para todo $j = 1, \dots, n-1$.*

Dem: Inicialmente note que, para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$ fixado temos:

$$\text{Ker } L_j = \text{ger}\{v_1, v_2, v_3\},$$

onde $v_1 = e_1$ (primeiro vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$), $v_2 = (0, 0, \dots, 0, \cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0)$ e $v_3 = (0, 0, \dots, 0, -\sin(t), \cos(t), 0, \dots, 0)$, onde as entradas não nulas são as entradas $2j+1$ e $2j+2$.

Assim, $\text{ker } L_j \subsetneq \mathcal{N}_j$ para todo j e portanto $\hat{L}_j$ é 1-1.

Por outro lado, seja $y_j \in Y_j$.

Por definição, $(y_j, \mathcal{N}_j) = 0$.

Agora, as soluções 2π -periódicas da equação adjunta

$$\dot{y} = -\frac{1}{\alpha_j} A^* y$$

estão contidas em $\mathcal{N}_j$.

De fato, essas soluções são geradas pelos vetores $u_1 = e_2$, v_2 e v_3 que estão contidos em $\mathcal{N}_j$.

Portanto, pelo lema anterior, existe $x_1 \in C_{2\pi}^1$ que é solução de $\dot{x} = \frac{1}{\alpha_j} Ax + y_1$ e como $L_j(\mathcal{N}_j) \subset \mathcal{N}_j$ segue que $x_1 \in X_1$ e assim segue que L_j é sobre. ■

Agora observe que

$$\begin{aligned} \hat{F}_j(q_j, x_j, \sigma, \lambda) = 0 &\Leftrightarrow (I - \mathcal{P}_j) \circ \hat{F}_j(q_j, x_j, \sigma, \lambda) = 0 \\ &\mathcal{P}_j \circ \hat{F}_j(q_j, x_j, \sigma, \lambda) = 0 \end{aligned}$$

e pelo **TFI** e lema 3.2 a primeira equação pode ser localmente resolvida para $x_j = x_j^*(q_j, \sigma, \lambda)$.

Assim (3.2) é reduzida a

$$\tilde{F}_j(q_j, \sigma, \lambda) := \mathcal{P}_j \circ \hat{F}_j(q_j, x_j^*(q_j, \sigma, \lambda), \sigma, \lambda) = 0.$$

Por outro lado, segue de (3.3) que esta equação é satisfeita se, e somente se,

$$q_{j,i}^* \left(\hat{F}_j(q_j, x_j^*(q_j, \sigma, \lambda), \sigma, \lambda) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.4)$$

Logo, (v_j, σ, λ) , $v_j = (x_1, x_2, x_{2j+1}, x_{2j+2})$ é uma solução de (3.2) desde que:

$$B_j(v_j, \sigma, \lambda) = 0$$

com $B_j : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ definidas por

$$B_j(v_j, \sigma, \lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-tS_{o,j}/\alpha_j) \Pi_j \hat{F}_j(x_j^*(v_j, \sigma, \lambda), \sigma, \lambda) dt,$$

onde

$$\Pi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2j+1}, x_{2j+1}, \dots, x_{2n}) = (x_1, x_2, x_{2j+1}, x_{2j+2})$$

e

$$x_j^*(v_j, \sigma, \lambda) := \exp(tS_{o,j}/\alpha_j)v_j + x_j^*(\exp(tS_{o,j}/\alpha_j)v_j, \sigma, \lambda).$$

com

$$S_{o,j} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -\alpha_j \\ & & \alpha_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots, n-1.$$

A forma acima para a equação B_j segue diretamente das equações em (3.4), da definição de $q_{j,i}^*(\cdot)$ que é dada pelo produto interno $(\cdot, \cdot)$ e do fato de que $S_o^T = -S_o$.

Propriedades das reduções B_j

Lema 3.3. [25],[23]: As aplicações B_j têm as seguintes propriedades:

$$(i) R'B_j(v_j, \sigma, \lambda) = -B_j(R'v_j, \sigma, \lambda),$$

$$(ii) s_\phi B_j(v_j, \sigma, \lambda) = B_j(s_\phi v_j, \sigma, \lambda),$$

onde $s_\phi v_j = \exp(-\phi S_{o,j}/\alpha_j)v_j$. e $R'(x_1, x_2, x_{2j+1}, x_{2j+2}) = (x_1, -x_2, x_{2j+1}, -x_{2j+2})$

A condição (i) afirma que as aplicações B_j herdam as propriedades anti-simétricas do campo X enquanto que (ii) diz que as aplicações B_j são rotacionalmente equivariantes.

Assumiremos aqui que (3.1) está na forma normal de Belitskii até ordem m . Assim, seja o campo vetorial $X(x, \lambda) = \lambda e_2 + A_o x + \tilde{X}(x, \lambda) + r_m(x, \lambda)$, onde $x \in \mathbb{R}^{2n}$, $T_m X(x, \lambda) = \lambda e_2 + A_o x + \tilde{X}(x, \lambda)$ está na forma normal e $r_m(x, \lambda) = o(|x|^{m+1})$. Com essas hipóteses temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *As seguintes propriedades são válidas:*

- (i) $x_j^*(v_j, \sigma, \lambda) = \exp(tS_{o,j}/\alpha_j)v_j + o(\|v_j\|^{m+1})$
(ii) $B_j(v_j, \sigma, \lambda) = (1 + \sigma)S_{o,j}v_j - A_{o,j}v_j - \lambda e_{2,j} - \tilde{X}_j(v_j, \lambda) + o(\|v_j\|^{m+1})$,

onde

$$S_{o,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -\alpha_j \\ & & \alpha_j & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{o,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -\alpha_j \\ & & \alpha_j & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{2,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{X}_j = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_{2j+1} \\ \tilde{x}_{2j+2} \end{pmatrix}.$$

Dem: A demonstração deste resultado segue com pequenas modificações da encontrada em [25] e [23] e portanto será omitida aqui. ■

3.3 Caso $0 : p : q$ – ressonante em $\mathbb{R}^6$ com $p, q > 1$

Este caso está incluído no anterior já que não há alteração nas dimensões dos subespaços $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ associados às aplicações F_1 e F_2 .

É necessário apenas lembrar que todos os objetos que dependem de n (metade da dimensão do espaço de fase) devem ser considerados com $n = 3$.

3.4 Caso $0 : 1 : 2$ – ressonante em $\mathbb{R}^6$

Neste caso, podemos escrever a matriz da parte linear na forma:

$$A_o = D_1 X(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -2 \\ & & & & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nosso objetivo aqui é encontrar equações que associam aos seus zeros soluções periódicas de período próximo a π e 2π para o campo vetorial.

Para encontrarmos as soluções periódicas com período próximo de π , o estudo realizado na seção 3.2 pode ser utilizado para obter uma redução

$$B_2 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

dada por:

$$B_2(u_2, \sigma, \lambda) = (1 + \sigma) S_{o,2} u_2 - A_{o,2} u_2 - \lambda e_{2,2} - \tilde{X}_2(u_2, \lambda) + o(\|u_2\|^{m+1})$$

onde

$$S_{o,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -2 \\ & & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{o,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & -2 \\ & & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{pmatrix}$$

e $u_2 = (x_1, x_2, x_5, x_6)$.

Vejamos agora o que ocorre quando estamos interessados em detectar soluções periódicas de período próximo a 2π .

Para tanto, considere a aplicação $F_1 : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow C_{2\pi}^0$ definida por

$$F_1(x, \sigma, \lambda)(t) = (1 + \sigma) \dot{x}(t) - X(x(t), \lambda).$$

Como antes, seja

$$L_1 := D_1 F_1(0, 0, 0) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$$

dada por

$$L_1 x(t) = \dot{x}(t) - A_o x(t)$$

e defina um subespaço de $C_{2\pi}^1$ por:

$$\mathcal{N}_1 := \{q; q(t) = \exp(tS_o)u, \quad u \in \mathbb{R}^6\}$$

e associado a ele defina

$$X_1 = \{x \in C_{2\pi}^1; (x, \mathcal{N}_1) = 0\}$$

e

$$Y_1 = \{y \in C_{2\pi}^0; (y, \mathcal{N}_1) = 0\}.$$

Novamente, seja $(q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, q_{1,6})$ com $q_{1,i} = \exp(tS_o)e_i$, onde

$$\{e_i, i = 1, \dots, 6\}$$

é a base canônica de $\mathbb{R}^6$.

Agora defina a projeção

$$\mathcal{P}_1 : C_{2\pi}^0 \rightarrow C_{2\pi}^0$$

como na seção 3.2 e utilizando o lema 3.2 com as devidas alterações obtemos uma redução $B_1 : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ definida por

$$B_1(u_1, \sigma, \lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-tS_o) F_1(x_1^*(u_1, \sigma, \lambda), \sigma, \lambda) dt$$

e

$$x_1^*(u_1, \sigma, \lambda) = \exp(tS_o)u_1 + x_1^*(\exp(tS_o)u_1, \sigma, \lambda).$$

De forma análoga a seção 3.2 temos os seguintes resultados:

Lema 3.5. *A aplicação B_1 satisfaz:*

$$(i) \ R B_1(u_1, \sigma, \lambda) = -B_1(Ru_1, \sigma, \lambda),$$

$$(ii) \ s_\phi B_1(u_1, \sigma, \lambda) = B_1(s_\phi u_1, \sigma, \lambda),$$

$$\text{onde } s_\phi u_1 = \exp(-\phi S_o) u_1.$$

Teorema 3.6. *A aplicação B_1 tem a forma*

$$B_1(u_1, \sigma, \lambda) = (1 + \sigma) S_o u_1 - A_o u_1 - \lambda e_2 - \tilde{X}(u_1, \lambda) + o(|u_1|^{m+1})$$

se o campo vetorial X está na forma normal de Belitskii até ordem m e $u_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

3.5 Caso $0 : 1 : 1$ – ressonante em $\mathbb{R}^6$

Neste caso, utilizando o método como na seção 3.4 para encontrar B_1 , obtemos uma única redução de Lyapunov-Schmidt $B_1 : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ cuja forma é dada como no teorema 3.6.

Lembre-se, no entanto, que para este caso consideramos uma outra involução linear dada por R_1 e assim, no lema 3.5 devemos substituir R por R_1 .

CAPÍTULO 4

Existência e Bifurcação de Soluções Periódicas

O objetivo deste capítulo é aplicar o método desenvolvido no capítulo anterior (redução de Lyapunov-Schmidt) para as famílias de campos vetoriais reversíveis em estudo, a fim de encontrar condições para a existência e bifurcação de famílias de órbitas periódicas numa vizinhança da origem, com ênfase nas famílias de órbitas periódicas simétricas.

Faremos aqui as demonstrações para os quatro casos básicos em estudo. No entanto, vale ressaltar que pequenas adaptações nos métodos estabelecidos anteriormente para esses casos podem ser feitas a fim de aplicá-los a situações mais gerais como casos que englobam mais de um dos casos básicos simultaneamente. A única possível alteração é na dimensão da redução, dependendo de que tipo de órbita periódica estamos procurando.

4.1 Caso *0-não-ressonante*

Para este caso, consideraremos o campo vetorial dado na forma normal de Belitskii até a ordem dois, cuja forma foi obtida no teorema A. Consideremos uma bifurcação genérica deste campo vetorial, no mundo reversível, da forma (2.5).

A partir daí, utilizaremos a redução de Lyapunov-Schmidt obtida no teorema 3.4 (ii),

para garantir a existência de soluções para o sistema de equações algébricas dado por

$$B(v, \lambda, \sigma) = 0.$$

Ao final desta seção queremos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema B: *Existe um subconjunto aberto $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) \times (-\lambda_o, \lambda_o)\}$ em $\mathcal{X}_\lambda^{2n}$ tal que:*

(I) os elementos de $\{\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2\}$ são determinados pelos 2-jatos dos campos vetoriais.

(II) se $X(x, 0) \in \mathcal{U}_1$ então:

(i) para $\lambda = 0$ existem $2(n-1)$ famílias de órbitas periódicas R -simétricas convergindo para o equilíbrio $x = 0$.

(ii) para $\lambda < 0$ existem dois equilíbrios simétricos (uma sela-centro e um ponto elítico) e $(n-1)$ -famílias de órbitas periódicas simétricas convergindo para cada um desses pontos.

(iii) para $\lambda > 0$ não existem pontos de equilíbrio numa vizinhança suficientemente pequena de $x = 0$ e apenas $(n-1)$ -famílias de órbitas periódicas simétricas persistem numa vizinhança da origem.

(III) Se $X(x, 0) \in \mathcal{U}_2$ então em $\lambda = 0$ ocorre uma bifurcação de Hopf subcrítica. Então, em $\lambda = 0$ não existem órbitas periódicas e para $\lambda < 0$ surge $(n-1)$ -famílias de órbitas periódicas simétricas, convergindo para cada um dos equilíbrios (sela-centro e elítico).

Mais ainda, todas as soluções periódicas numa vizinhança da origem resultam ser simétricas.

Dem: Procederemos da seguinte forma: consideraremos inicialmente o caso $n = 2$, depois o caso $n = 3$ e finalmente estenderemos o resultado para n qualquer.

(a) $n = 2$:

Neste caso, a família $X(x, \lambda)$ tem forma normal de Belitskii até ordem dois dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = \lambda + a_2(\lambda)x_1^2 + b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4 - c_1(\lambda)x_1x_4 + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3 + c_1(\lambda)x_1x_3 + o(3) \end{cases}.$$

Agora, dada a forma normal, queremos encontrar soluções não triviais para o sistema $B(v, \sigma, \lambda)$ que é dada pelo teorema 3.4 (ii). O objetivo aqui é encontrar soluções periódicas com período próximo a 2π .

Note que estamos supondo que o campo vetorial $X(x, 0)$ tem equilíbrio na origem $x = 0$ com autovalores 0 (duplo) e $\pm i$. O que não é uma restrição. Uma reparametrização do tempo

nos leva a esta situação.

Assim, sejam

$$S_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da forma de $B(v, \sigma, \lambda) = 0$ temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x_2 + o(3) = 0 & (a) \\ -\lambda - a_2(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + o(3) = 0 & (b) \\ -\sigma x_4 + c_1(\lambda)x_1x_4 + o(3) = 0 & (c) \\ \sigma x_3 - c_1(\lambda)x_1x_3 + o(3) = 0 & (d) \end{cases}. \quad (4.1)$$

Iremos considerar aqui duas situações, a saber:

Caso 1: Órbitas periódicas simétricas: neste caso restringimos o estudo ao conjunto

$$Fix(R) = \{x_2 = x_4 = 0\}.$$

Caso 2: Caso geral onde órbitas periódicas não simétricas podem ocorrer. Na realidade mostraremos que todas as órbitas periódicas numa vizinhança do equilíbrio resultam ser R -simétricas.

Caso 1: Aqui restringimos o sistema (4.1) a $x_2 = x_4 = 0$. Pela propriedade de R -reversibilidade de B dada pelo lema (3.3) (i) obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\lambda - a_2(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)x_3^2 + o(3) = 0 \\ \sigma x_3 - c_1(\lambda)x_1x_3 + o(3) = 0 \end{cases}.$$

Considere o sistema auxiliar:

$$\begin{cases} -\lambda - a_2(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)x_3^2 = 0 \\ \sigma x_3 - c_1(\lambda)x_1x_3 = 0 \end{cases}. \quad (4.2)$$

A primeira equação tem as seguintes formas para diferentes valores do parâmetro λ :

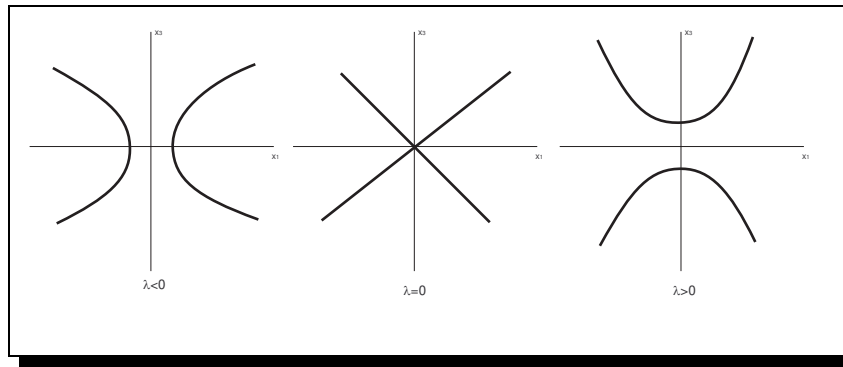


Figura 4.1:

Desde que $a_2(0).b_2(0) < 0$. Sem perda de generalidade supomos $a_1(0) > 0$, $b_2(0) < 0$.

Quanto a segunda equação temos a seguinte forma:

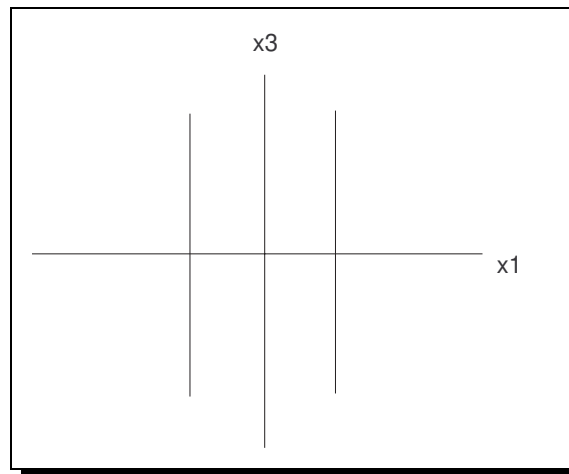


Figura 4.2:

se $c_1(0) \neq 0$.

Logo, a intersecção desses dois sistemas nos fornece o seguinte cenário:

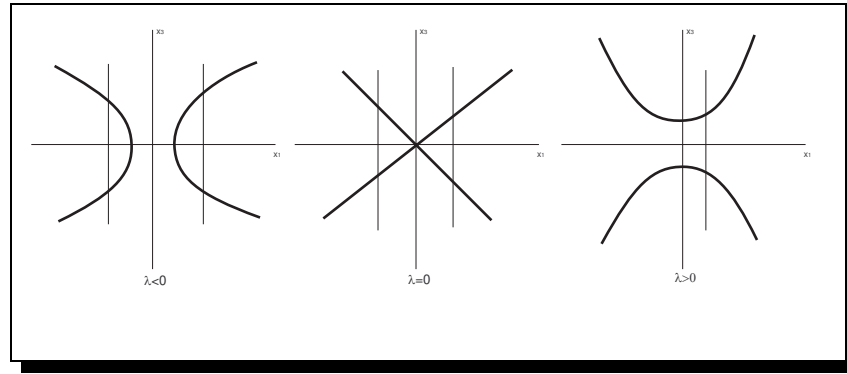


Figura 4.3:

Agora lembre que estamos supondo que $a_2(0) > 0$ e $b_2(0) < 0$. Neste caso, para $\lambda < 0$ o nosso sistema em $\mathbb{R}^4$ admite dois equilíbrios numa vizinhança da origem e para $\lambda > 0$ nenhum equilíbrio é encontrado.

Daí, neste contexto, obtemos para $\lambda = 0$, duas famílias de órbitas periódicas simétricas. Os dois pontos do lado direito na figura 4.3 para $\lambda = 0$ equivalem à mesma órbita pois B é s_φ -equivariante. Na realidade, esses dois pontos equivalem aos dois pontos onde a órbita periódica intercepta o conjunto $Fix(R)$.

Se, por exemplo, $c_1(0) > 0$, então pontos do lado direito equivalem a órbitas periódicas de período próximo a 2π que têm período $< 2\pi$ (o período é dado por $\frac{2\pi}{1+\sigma}$) e, neste caso, $\sigma > 0$.

O resultado para o sistema geral (4.1) segue por transversalidade.

Finalmente temos o seguinte:

- para $\lambda = 0$, duas famílias de órbitas periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio cujo período converge para 2π .
- para $\lambda < 0$, duas famílias de órbitas periódicas simétricas sendo uma para cada equilíbrio.
- para $\lambda > 0$, uma família de órbitas periódicas simétricas na vizinhança da origem.

Agora, caso tenhamos $a_2(0)$, $b_2(0)$ com o mesmo sinal, por exemplo, se $a_2(0)$, $b_2(0) > 0$ segue que a intersecção das duas equações de (4.2), nos fornece o seguinte cenário:

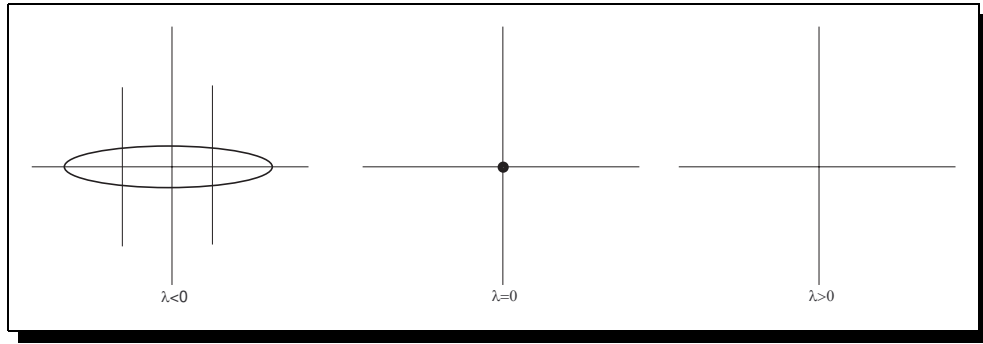


Figura 4.4:

onde obtemos, desta forma, uma bifurcação de Hopf subcrítica.

Caso 2: Voltemos agora ao caso geral. Aqui não fazemos nenhuma restrição ao conjunto $Fix(R)$ como antes.

Consideremos então o sistema auxiliar a (4.1):

$$\begin{cases} x_2 = 0 & (a) \\ -\lambda - a_2(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) = 0 & (b) \\ -\sigma x_4 + c_1(\lambda)x_1x_4 = 0 & (c) \\ \sigma x_3 - c_1(\lambda)x_1x_3 = 0 & (d) \end{cases}.$$

De (c) e (d) obtemos:

$$x_3 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{\sigma}{c_1(\lambda)}$$

$$x_4 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{\sigma}{c_1(\lambda)}$$

Como $x_3 = x_4 = 0$ conduzem a soluções triviais devemos ter

$$x_1 = \frac{\sigma}{c_1(\lambda)}.$$

E, da equação (b) obtemos o seguinte cenário:

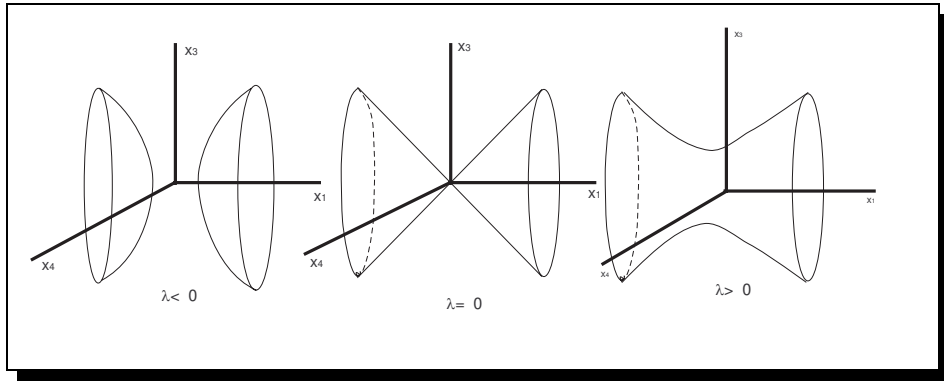


Figura 4.5:

cuja intersecção com $x_1 = \frac{\sigma}{c_1(\lambda)}$ é dada por:

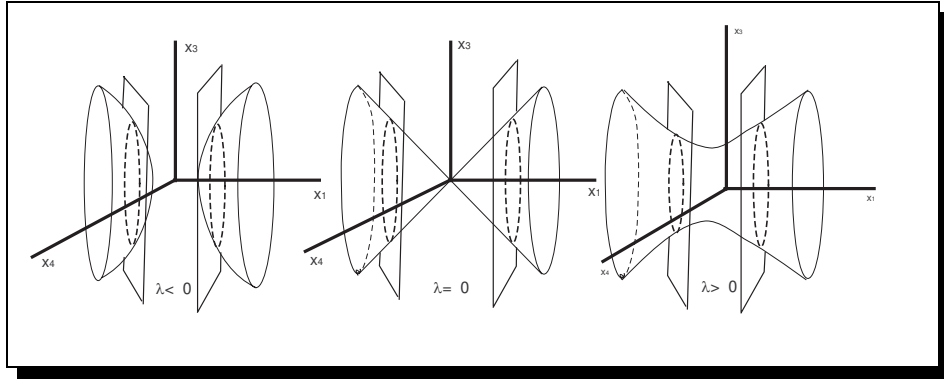


Figura 4.6:

Agora note que, como no caso 1, todos os pontos do mesmo lado, em cada figura, equivalem à mesma órbita (pela s_φ -equivariância). Como para cada conjunto de pontos, obtemos um ponto com $x_2 = x_4 = 0$ que pertence a $Fix(R)$ segue que essas órbitas são as mesmas detectadas no caso 1.

Portanto, temos que:

Todas as órbitas periódicas numa vizinhança do equilíbrio para a família de campos vetoriais $X(x, \lambda)$ são R -simétricas.

O resultado como enunciado no teorema segue, para o caso $n = 2$, considerando

$$\mathcal{U}_1 = \{X_\lambda \in \mathcal{X}_\lambda^4; X_\lambda^4 \text{ está na forma normal até ordem 2 e tal que } a_2(0).b_2(0) < 0, c_1(0) \neq 0\}$$

e

$$\mathcal{U}_2 = \{X_\lambda \in \mathcal{X}_\lambda^4; X_\lambda^4 \text{ está na forma normal até ordem 2 e tal que } a_2(0), b_2(0) > 0, c_1(0) \neq 0\}$$

Se definirmos um conjunto $\tilde{\mathcal{U}}_2$ substituindo em $\mathcal{U}_2$ $a_2(0), b_2(0) > 0$ por $a_2(0), b_2(0) < 0$ obtemos uma bifurcação de Hopf supercrítica.

(b) Caso $n = 3$:

Neste caso temos uma matriz da parte linear de $X(x, \lambda)$, para $\lambda = 0$ dada por

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queremos, desta forma, utilizar a redução de Lyapunov-Schmidt para encontrar famílias de órbitas periódicas com períodos próximos a $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ e $\frac{2\pi}{\alpha_2}$.

Um fato importante aqui é que α_1 e α_2 são racionalmente independentes e assim, as reduções de Lyapunov-Schmidt para os dois casos têm dimensão 4, como vimos no teorema 3.4.

Encontremos as soluções periódicas, com período próximo a $\frac{2\pi}{\alpha_1}$.

A forma normal de Belitskii, até ordem 2, para a família $X(x, \lambda)$ é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = \lambda + a_2^\varphi(\lambda)x_1^2 + b_2^\varphi(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + c_2^\varphi(\lambda)(x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4[\alpha_1 + a_1^\psi(\lambda)x_1] + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3[\alpha_1 + a_1^\psi(\lambda)x_1] + o(3) \\ \dot{x}_5 = -x_6[\alpha_2 + a_1^\phi(\lambda)x_1] + o(3) \\ \dot{x}_6 = x_5[\alpha_2 + a_1^\phi(\lambda)x_1] + o(3) \end{cases}.$$

Assim, utilizando a redução de Lyapunov-Schmidt do teorema 3.4, devemos encontrar

soluções não triviais para o sistema

$$\begin{cases} x_2 + o(3) = 0 \\ \lambda + a_2^\varphi(\lambda)x_1^2 + b_2^\varphi(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + o(3) = 0 \\ -\sigma\alpha_1x_4 + a_1^\psi(\lambda)x_1x_4 + o(3) = 0 \\ \sigma\alpha_1x_3 - a_1^\psi(\lambda)x_1x_3 + o(3) = 0 \end{cases}.$$

Observe que este sistema é similar ao do caso $n = 2$. Portanto, condições sobre os coeficientes $a_2^\varphi(0)$, $b_2^\varphi(0)$ e $a_1^\psi(0)$ como as dadas respectivamente para $a_2(0)$, $b_2(0)$ e $c_1(0)$ no caso $n = 2$ nos fornecem o mesmo resultado obtido anteriormente a cerca da existência e bifurcação de soluções periódicas.

Para encontrarmos as soluções periódicas de período próximo a $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ o sistema de equações obtido a partir do teorema 3.4 é o seguinte:

$$\begin{cases} x_2 + o(3) = 0 \\ \lambda + a_2^\varphi(\lambda)x_1^2 + c_2^\varphi(\lambda)(x_5^2 + x_6^2) + o(3) = 0 \\ -\sigma\alpha_2x_6 + a_1^\phi(\lambda)x_1x_6 + o(3) = 0 \\ \sigma\alpha_2x_5 - a_1^\phi(\lambda)x_1x_5 + o(3) = 0 \end{cases}$$

que obviamente pode ser resolvido como antes.

Desta forma, segue que todas as soluções periódicas numa vizinhança de $x = 0$ são R -simétricas e as famílias são obtidas como no enunciado do teorema, onde

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{array}{l} X_\lambda \in \mathcal{X}_\lambda^6; \ X_\lambda^6 \text{ está na forma normal até ordem 2 e tal que} \\ a_2^\varphi(0).b_2^\varphi(0) < 0, \ a_2^\varphi(0).c_2^\varphi(0) < 0, \ a_1^\phi(0), a_1^\psi(0) \neq 0 \end{array} \right\}$$

e

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ \begin{array}{l} X_\lambda \in \mathcal{X}_\lambda^6; \ X_\lambda^6 \text{ está na forma normal até ordem 2 e tal que} \\ a_2^\varphi(0), b_2^\varphi(0), c_2^\varphi(0) > 0, \ a_1^\phi(0), a_1^\psi(0) \neq 0 \end{array} \right\}.$$

(c) Caso $n > 3$:

Para concluir a demonstração, observamos que podemos proceder exatamente como feito para $n = 3$ onde a análise foi reduzida a resolver dois sistemas de quatro equações algébricas da forma dada para $n = 2$.

Aqui obtemos $(n-1)$ sistemas de equações onde, em cada um deles, condições como as dadas nos casos $n = 2$ e 3 permitem estabelecer o resultado pretendido.

■

4.2 Caso $0:p:q$ -ressonante com $p, q > 1$

Mostramos que, nesta situação, a forma normal de Belitskii até ordem 2 coincide com a forma normal do caso 0-não-ressonante (proposição 2.7).

Pelo tipo de ressonância ($p, q > 1$) as dimensões das reduções de Lyapunov-Schmidt são iguais a 4 tanto para órbitas com período próximo a $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ quanto para aquelas com período próximo a $\frac{2\pi}{\alpha_2}$.

Assim, como na seção anterior, onde condições nos termos de grau dois foram feitas para obter o resultado, segue que condições análogas podem ser feitas aqui a fim de que o mesmo resultado da seção anterior se aplique a este caso, ou seja, o Teorema B é válido nesta situação. Para isso, basta tomar $n = 3$ no enunciado do mesmo.

4.3 Caso $0:1:2$ -ressonante

Este caso é um dos que não está incluído nas situações anteriores. Aqui, pelo fato da forma normal de ordem dois não coincidir com a dos dois casos anteriores, a análise da redução é um pouco diferente. Além disso, pela forma da parte linear uma redução de ordem seis é possível quando estamos procurando soluções periódicas de período próximo a 2π .

Pelas propriedades da matriz A , podemos supor, sem perda de generalidade, que ela é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -2 \\ & & & & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, vemos que, utilizando a redução de Lyapunov-Schmidt, podemos procurar soluções periódicas com período próximo a 2π e π .

No primeiro caso, uma redução de ordem 6 é obtida como no teorema 3.6. Por outro lado, para obtermos soluções periódicas com período próximo a π uma redução de ordem 4 envolvendo as variáveis (x_1, x_2, x_5, x_6) está estabelecida assim como no caso 0-não-ressonante.

O objetivo desta seção é obter o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Para as órbitas periódicas com período próximo a 2π temos que: existe um subconjunto aberto $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) \times (-\lambda_o, \lambda_o)\}$ em $\mathcal{X}_\lambda^6$ tal que:*

(I) *os elementos de $\{\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2\}$ são determinados pelos 2-jatos dos campos vetoriais.*

(II) *se $X(x, 0) \in \mathcal{U}_1$ então:*

para $\lambda = 0$ não existem soluções periódicas R-simétricas convergindo para o equilíbrio em $x = 0$ e, nesse ponto, ocorre uma bifurcação de Hopf onde para $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$ famílias de soluções periódicas simétricas surgem numa vizinhança do equilíbrio (o número de famílias, que pode ser duas ou quatro, depende de relações entre os coeficientes do 2-jato).

(III) *Se $X(x, 0) \in \mathcal{U}_2$ então em $\lambda = 0$ também ocorre uma bifurcação de Hopf onde o número de famílias soluções periódicas simétricas existentes para $\lambda = 0$ pode diminuir ou aumentar dependendo de relações entre os coeficientes do 2-jato.*

Para as órbitas periódicas com período próximo a π um resultado similar ao do caso 0-não-ressonante também é obtido.

Dem: Consideremos a princípio as órbitas periódicas de período próximo a 2π .

Neste caso, dada a família de campos vetoriais $X(x, \lambda)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + o(3) \\ \dot{x}_2 = \lambda + b_1(\lambda)x_1^2 + b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + b_3(\lambda)(x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4 - a_1(\lambda)x_1x_4 - a_2(\lambda)(x_3x_6 - x_4x_5) + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3 + a_1(\lambda)x_1x_3 + a_2(\lambda)(x_3x_5 + x_4x_6) + o(3) \\ \dot{x}_5 = -2x_6 - c_2(\lambda)x_1x_6 - 2c_1(\lambda)x_3x_4 + o(3) \\ \dot{x}_6 = 2x_5 + c_2(\lambda)x_1x_5 + c_1(\lambda)(x_3^2 - x_4^2) + o(3) \end{cases}$$

devemos estudar o seguinte sistema de equações dado pelo teorema 3.6.

$$\begin{cases} x_2 + o(3) = 0 & (a) \\ -\lambda - b_1(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) - b_3(\lambda)(x_5^2 + x_6^2) + o(3) = 0 & (b) \\ -\sigma x_4 + a_1(\lambda)x_1x_4 + a_2(\lambda)(x_3x_6 - x_4x_5) + o(3) = 0 & (c) \\ \sigma x_3 - a_1(\lambda)x_1x_3 - a_2(\lambda)(x_3x_5 - x_4x_6) + o(3) = 0 & (d) \\ -2\sigma x_6 + c_2(\lambda)x_1x_6 + 2c_1(\lambda)x_3x_4 + o(3) = 0 & (e) \\ 2\sigma x_5 - c_2(\lambda)x_1x_5 - c_1(\lambda)(x_3^2 - x_4^2) + o(3) = 0 & (f) \end{cases}.$$

Suponha que $-2\sigma + c_2(\lambda)x_1 \neq 0$. Então, das equações (e) e (f) obtemos, respectivamente:

$$x_6 = -\frac{2c_1(\lambda)x_3x_4 + o(3)}{-2\sigma + c_2(\lambda)x_1} \quad x_5 = \frac{c_1(\lambda)(x_3^2 - x_4^2 + o(3))}{-2\sigma + c_2(\lambda)x_1}$$

que, substituído nas outras equações, nos fornece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -4\lambda\sigma^2 + 4\lambda\sigma x_1 - (\lambda c_2^2(\lambda) + 4\sigma^2 b_1(\lambda))x_1^2 - 4b_2(\lambda)\sigma^2(x_3^2 + x_4^2) + \tilde{\varphi}_1(x_1, x_3, x_4, \sigma) = 0 \\ 2\sigma^2 x_4 - c_2(\lambda)\sigma x_1 x_4 - 2a_1(\lambda)\sigma x_1 x_4 + a_1(\lambda)c_2(\lambda)x_1^2 x_4 + \tilde{\varphi}_2(x_1, x_3, x_4) = 0 \\ -2\sigma^2 x_3 + c_2(\lambda)\sigma x_1 x_3 + 2a_1(\lambda)\sigma x_1 x_3 - a_1(\lambda)c_2(\lambda)x_1^2 x_3 + \tilde{\varphi}_3(x_1, x_3, x_4) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $\tilde{\varphi}_i(x_1, x_3, x_4) = o(3)$.

Da R -reversibilidade de B segue que $\tilde{\varphi}_2 = x_4\Theta(x_1, x_3, x_4)$, onde $\Theta(x_1, x_3, -x_4) = \Theta(x_1, x_3, x_4)$. Note que R fixa x_1, x_3 e troca o sinal de x_4 . Daí, a forma de $\tilde{\varphi}_2$.

Lembremos ainda que, pelo lema 3.5 (ii) $s_\phi B(u, \sigma, \lambda) = B(s_\phi u, \sigma, \lambda)$, onde neste caso, $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ e $s_\phi u = \exp(-\phi S_o) u$.

Daí, se $B = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ temos que, tomando $\phi = \frac{\pi}{2}$ vale:

$$\begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ -f_4(u) \\ f_3(u) \\ -f_6(u) \\ f_5(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_4, -x_3, x_6, -x_5) \\ f_2(x_1, x_2, x_4, -x_3, x_6, -x_5) \\ f_3(x_1, x_2, x_4, -x_3, x_6, -x_5) \\ f_4(x_1, x_2, x_4, -x_3, x_6, -x_5) \\ f_5(x_1, x_2, x_4, -x_3, x_6, -x_5) \\ f_6(x_1, x_2, x_4, -x_3, x_6, -x_5) \end{pmatrix}.$$

Assim, a igualdade

$$f_3(x_1, x_2, x_4, -x_3, x_6, -x_5) = -f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

tem a seguinte consequência no sistema 4.3:

$$\tilde{\varphi}_3(x_1, x_3, x_4) = -\tilde{\varphi}_2(x_1, x_4, -x_3) = -x_3\Theta(x_1, x_4, -x_3) = -x_3\Theta_1(x_1, x_3, x_4).$$

Portanto, o sistema 4.3 pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} -4\lambda\sigma^2 + 4\lambda\sigma x_1 - (\lambda c_2^2(\lambda) + 4\sigma^2 b_1(\lambda))x_1^2 - 4b_2(\lambda)\sigma^2(x_3^2 + x_4^2) + \tilde{\varphi}_1(x_1, x_3, x_4) = 0 & (1) \\ x_4(2\sigma^2 - c_2(\lambda)\sigma x_1 - 2a_1(\lambda)\sigma x_1 + a_1(\lambda)c_2(\lambda)x_1^2 + \Theta(x_1, x_3, x_4)) = 0 & (2) \\ -x_3(2\sigma^2 - c_2(\lambda)\sigma x_1 - 2a_1(\lambda)\sigma x_1 + a_1(\lambda)c_2(\lambda)x_1^2 + \Theta_1(x_1, x_3, x_4)) = 0 & (3) \end{cases}.$$

A fim de obter soluções R -simétricas tomamos $x_4 = 0$. Além disso, para que as soluções encontradas estejam associadas a soluções não triviais devemos ter $x_3 \neq 0$. Portanto,

$$2\sigma^2 - c_2(\lambda)\sigma x_1 - 2a_1(\lambda)\sigma x_1 + a_1(\lambda)c_2(\lambda)x_1^2 + a_2(\lambda)c_1(\lambda)x_3^2 + \Theta_1(x_1, x_3) = 0.$$

Assim, reduzimos o problema a resolver o seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 2\sigma^2 - c_2(\lambda)\sigma x_1 - 2a_1(\lambda)\sigma x_1 + a_1(\lambda)c_2(\lambda)x_1^2 + a_2(\lambda)c_1(\lambda)x_3^2 + \Theta_1(x_1, x_3) = 0 & (I) \\ -4\lambda\sigma^2 + 4\lambda\sigma x_1 - (\lambda c_2^2(\lambda) + 4\sigma^2 b_1(\lambda))x_1^2 - 4b_2(\lambda)\sigma^2 x_3^2 + \tilde{\varphi}_1(x_1, x_3) = 0 & (II) \end{cases}$$

onde $\Theta_1(x_1, x_3) = o(3)$ e $\varphi_1(x_1, x_3) = o(3)$.

Lembre que estamos restritos a $x_4 = 0$.

O nosso objetivo agora é encontrar soluções não triviais do sistema formada pelas equações (I) e (II).

Para isso, considere o sistema auxiliar dado por:

$$\begin{cases} 2\sigma^2 - c_2(\lambda)\sigma x_1 - 2a_1(\lambda)\sigma x_1 + a_1(\lambda)c_2(\lambda)x_1^2 + a_2(\lambda)c_1(\lambda)x_3^2 = 0 & (I.1) \\ -4\lambda\sigma^2 + 4\lambda\sigma x_1 - \lambda c_2^2(\lambda)x_1^2 + 4\sigma^2 b_1(\lambda)x_1^2 - 4b_2(\lambda)\sigma^2 x_3^2 = 0 & (II.1) \end{cases}.$$

A equação (I.1) pode ser escrita na forma:

$$a_2(\lambda)c_1(\lambda)x_3^2 + a_1(\lambda)c_2(\lambda) \left(x_1 - \sigma \frac{(c_2(\lambda) + 2a_1(\lambda))}{2a_1(\lambda)c_2(\lambda)} \right)^2 = \sigma^2 \left(\frac{(c_2(\lambda) + 2a_1(\lambda))^2}{4a_1(\lambda)c_2(\lambda)} - 2 \right)$$

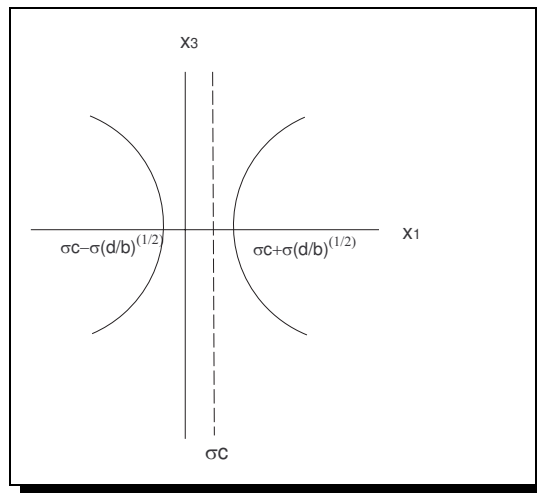
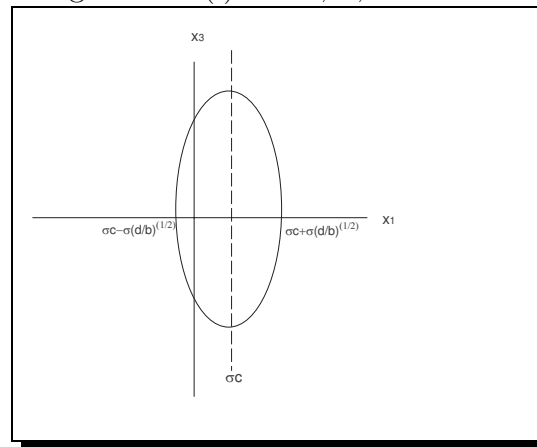
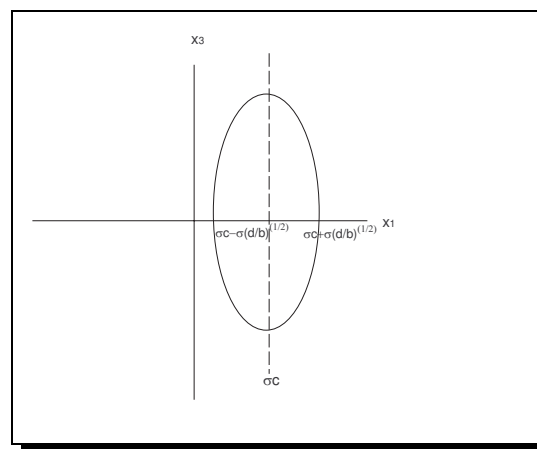
ou, de forma mais resumida,

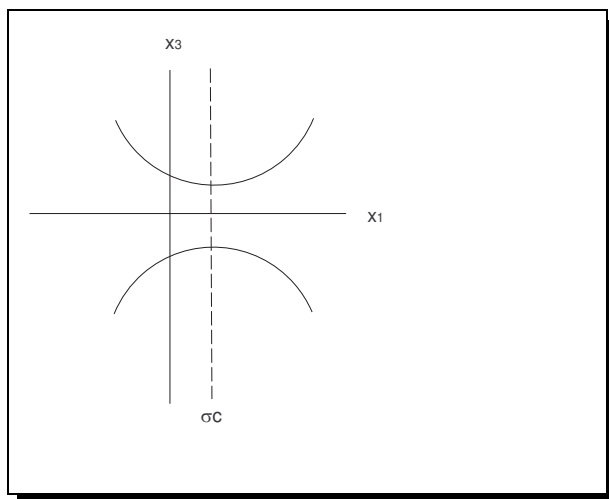
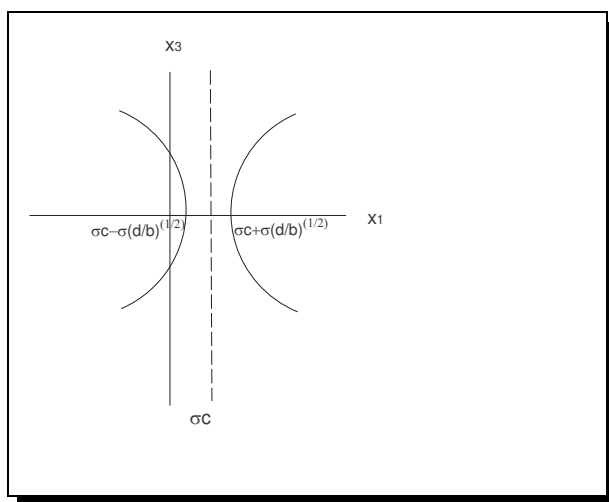
$$a(\lambda)x_3^2 + b(\lambda)(x_1 - \sigma c(\lambda))^2 = \sigma^2 d(\lambda) \quad (4.4)$$

onde

$$a = a_2c_1, \quad b = a_1c_2, \quad c = \frac{c_2 + 2a_1}{2a_1c_2} \quad d = \frac{(c_2 + 2a_1)^2}{4a_1c_2} - 2.$$

A equação (4.4) pode ter várias formas dependendo dos sinais de a, b e d . As possíveis situações são dadas pelas figuras abaixo:

Figura 4.7: (i) $a > 0$; $b, d < 0$.Figura 4.8: (ii) $a, b, d < 0$.Figura 4.9: (iii) $a, b, d > 0$.

Figura 4.10: (iv) $a < 0$; $b > 0$; $d < 0$.Figura 4.11: (v) $a < 0$; $b, d > 0$.

Por outro lado, a equação (II.1) pode ser escrita na forma:

$$4b_2(\lambda)\sigma^2x_3^2 + (\lambda c_2(\lambda) - 4\sigma^2b_1(\lambda)) \left(x_1 - \frac{2\lambda\sigma}{\lambda c_2(\lambda) - 4\sigma^2b_1(\lambda)} \right)^2 = 4\lambda\sigma^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda c_2(\lambda) - 4\sigma^2b_1(\lambda)} - 1 \right)$$

ou ainda de forma mais concisa

$$\alpha(\lambda)x_3^2 + \beta(\lambda)(x_1 - \sigma\gamma(\lambda))^2 = \sigma^2\omega(\lambda) \quad (4.5)$$

onde

$$\alpha(\lambda) = 4b_2(\lambda)\sigma^2; \quad \beta(\lambda) = (\lambda c_2(\lambda) - 4\sigma^2 b_1(\lambda)); \quad \gamma(\lambda) = \frac{2\lambda}{\lambda c_2(\lambda) - 4\sigma^2 b_1(\lambda)}$$

e

$$\omega(\lambda) = 4\lambda \left(\frac{\lambda}{\lambda c_2(\lambda) - 4\sigma^2 b_1(\lambda)} - 1 \right).$$

As possíveis formas da equação (4.5) são dadas nas figuras abaixo, onde consideramos para cada caso, os possíveis valores de λ .

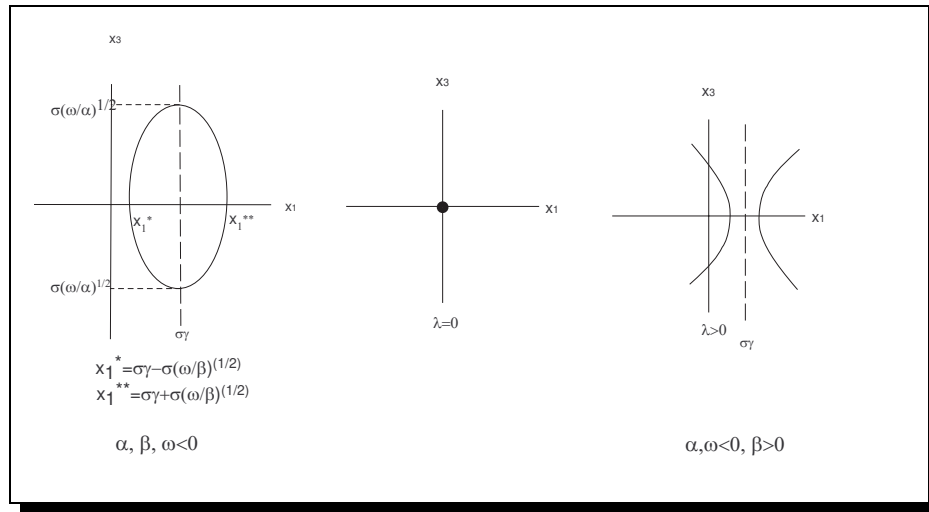


Figura 4.12: Se $b_1(0)b_2(0) < 0$ e $0 < c_2(0) < 1$

onde supomos, sem perda de generalidade, $b_1(0) > 0$ e $b_2(0) < 0$.

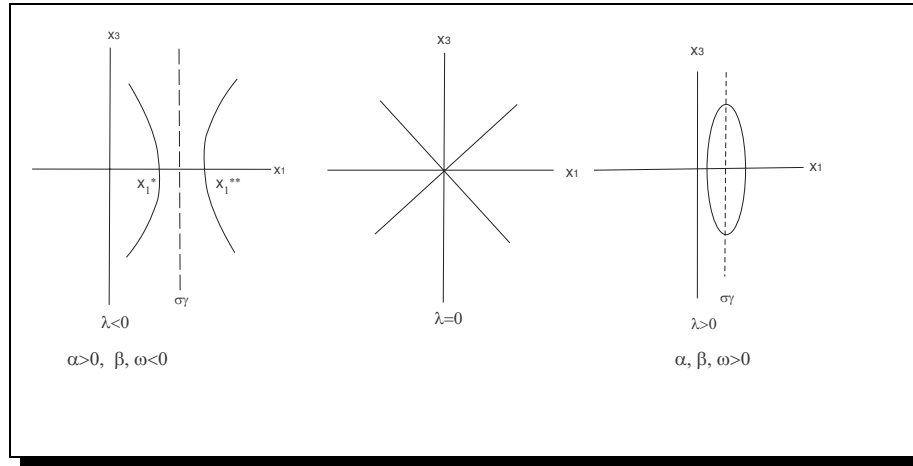


Figura 4.13: Se $b_1(0)b_2(0) > 0$ e $0 < c_2(0) < 1$

onde supomos $b_1(0), b_2(0) > 0$.

A prova, neste caso, é direta através da Teoria Elementar das Cônicas e as figuras anteriores expressam fielmente o fenômeno.

De fato, inicialmente note que para cada uma das figuras acima, temos uma outra figura associada dada pela reflexão em torno do eixo x_3 pois σ é tomado numa vizinhança de 0.

Considerando as possíveis interseções transversais de (I.1) com (II.1) podemos encontrar uma ou duas famílias de soluções periódicas simétricas. Isso implica em duas ou quatro famílias de soluções periódicas simétricas quando consideramos o sinal de σ .

Assim, se $X(x, 0)$ satisfaz as condições da figura 4.12 então ocorre uma bifurcação de Hopf com o aparecimento de famílias de soluções periódicas numa vizinhança da origem para $\lambda \neq 0$.

Por outro lado, se $X(x, 0)$ satisfaz as condições da figura 4.13 então ocorre uma bifurcação de Hopf, onde para $\lambda \neq 0$ o número de famílias de soluções periódicas varia no ponto de bifurcação $\lambda = 0$.

Consideremos agora as soluções periódicas de período próximo a π .

Neste caso, temos um sistema de quatro equações nas variáveis (x_1, x_2, x_5, x_6) que quando restrito ao conjunto $Fix(R)$ se reduz a um sistema de duas equações nas variáveis (x_1, x_5) dado por:

$$\begin{cases} \lambda + a_2^\varphi(\lambda)x_1^2 + c_2^\varphi(\lambda)x_5^2 + o(3) = 0 \\ 2\sigma x_5 - a_1^\phi(\lambda)x_1x_5 + o(3) = 0 \end{cases}$$

A análise deste sistema é a mesma feita no caso 0-não-ressonante em $\mathbb{R}^4$. Logo, para

$a_1^\phi(0) \neq 0$ temos o seguinte:

Se $a_2^\varphi(0).c_2^\varphi(0) < 0$ temos, para $\lambda = 0$ duas famílias de soluções periódicas simétricas convergindo para o equilíbrio $x = 0$. Para $\lambda > 0$ temos uma família de soluções periódicas numa vizinhança da origem e para $\lambda < 0$ temos duas famílias de soluções periódicas cada uma convergindo para um equilíbrio diferente.

Se $a_2^\varphi(0).c_2^\varphi(0) > 0$ temos uma bifurcação de Hopf subcrítica.

■

4.4 Caso 0:1:1-ressonante

Nesta situação temos dois casos a analisar, a saber:

- (i) quando os autovalores $\pm i$ têm multiplicidade geométrica 1 (caso $\mu \neq 0$).
- (ii) quando os autovalores $\pm i$ têm multiplicidade geométrica 2 (caso $\mu = 0$).

O objetivo desta seção é estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Seja $X_\mu(x, \lambda) \in \mathcal{X}_\lambda^6$ uma família de campos vetoriais R_1 -reversíveis em $\mathbb{R}^6$ onde $x = 0$ é um equilíbrio 0:1:1-ressonante para $X_\mu(x, 0)$ e tal que, para $\mu \neq 0$ os autovalores $\pm i$ têm multiplicidade geométrica 1 e, para $\mu = 0$, têm multiplicidade geométrica 2. Então existe um subconjunto aberto $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) \times (-\lambda_o, \lambda_o)\}$ em $\mathcal{X}_\lambda^6$ tal que:*

(I) os elementos de $\{\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2\}$ são determinados pelos 2-jatos dos campos vetoriais escritos na forma normal.

(II) se $X_\mu(x, 0) \in \mathcal{U}_1$ então:

(i) para $\lambda = 0$ existe(m) uma (resp. duas) família(s) de órbitas periódicas R_1 -simétricas convergindo para o equilíbrio $x = 0$ se $\mu \neq 0$ (resp. $\mu = 0$).

(ii) para $\lambda < 0$ existem dois equilíbrios simétricos e uma (resp. duas) família(s) de órbitas periódicas simétricas convergindo para um desses pontos (resp. convergindo para cada um desses equilíbrios).

(iii) para $\lambda > 0$ não existem pontos de equilíbrio numa vizinhança suficientemente pequena de $x = 0$ e apenas uma família de órbitas periódicas simétricas persiste numa vizinhança da origem para $\mu \neq 0$ e $\mu = 0$.

(III) Se $X_\mu(x, 0) \in \mathcal{U}_2$ então em $\lambda = 0$ ocorre uma bifurcação de Hopf subcrítica. Então, em $\lambda = 0$ não existem órbitas periódicas e para $\lambda < 0$ surge(m) uma (resp. duas) família(s) de órbitas periódicas simétricas convergindo para um dos equilíbrios se $\mu \neq 0$ e, para o caso $\mu = 0$, cada família converge para um dos equilíbrios.

Dem: Iniciemos a demonstração com o caso $\mu \neq 0$, $\mu \in (0,1]$.

Seja $X_\mu(x, \lambda) \in \mathcal{X}_\lambda^6$ onde $X_\mu(0, 0) = 0$ e $A_\mu = DX_\mu(0, 0)$ é dada por

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O teorema 2.9 nos fornece a forma normal de Belitskii até ordem 2 neste caso. Com esta forma normal em mãos consideramos a bifurcação do campo obtendo assim o campo X_λ . Devemos então utilizar a forma de $B(x, \sigma, \lambda)$ a fim de encontrar soluções periódicas com período próximo a 2π . Consideremos inicialmente $\mu = 1$.

Obtemos um sistema de seis equações da forma

$$\begin{cases} -x_2 + o(3) = 0 & (1) \\ -\lambda - a_1(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + b_3(\lambda)(x_3x_6 - x_4x_5) + o(3) = 0 & (2) \\ -\sigma x_4 - x_5 + c_3(\lambda)x_1x_4 + o(3) = 0 & (3) \\ \sigma x_3 - x_6 - c_3(\lambda)x_1x_3 + o(3) = 0 & (4) \\ -\sigma x_6 - c_4(\lambda)x_1x_3 - c_7(\lambda)x_1x_6 + (c_3(\lambda) + c_7(\lambda))x_2x_4 + o(3) = 0 & (5) \\ \sigma x_5 - c_4(\lambda)x_1x_4 + c_7(\lambda)x_1x_5 - (c_3(\lambda) + c_7(\lambda))x_2x_3 + o(3) = 0 & (6) \end{cases}.$$

Note que, como dissemos no caso 0-não-ressonante, podemos supor, sem perda de generalidade que a equação (1) acima é dada por $x_2 = 0$.

Agora, de (3) e (4) temos:

$$\begin{aligned} x_5 &= -\sigma x_4 + c_3x_1x_4 + o(3) \\ x_6 &= \sigma x_3 - c_3x_1x_3 + o(3) \end{aligned}$$

que substituindo nas outras equações nos dá um sistema nas variáveis (x_1, x_3, x_4) da forma:

$$\begin{cases} -\lambda - a_1(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + b_3(\lambda)\sigma(x_3^2 + x_4^2) - b_3(\lambda)c_3(\lambda)x_1(x_3^2 + x_4^2) + o(3) = 0 \\ x_3(-\sigma^2 + \sigma c_3(\lambda)x_1 - c_4(\lambda)x_1 - c_7(\lambda)\sigma x_1 + c_3(\lambda)c_7(\lambda)x_1^2) + \varphi_2(x_1, x_3, x_4) = 0 \\ x_4(-\sigma^2 + \sigma c_3(\lambda)x_1 - c_4(\lambda)x_1 - c_7(\lambda)\sigma x_1 + c_3(\lambda)c_7(\lambda)x_1^2) + \varphi_3(x_1, x_3, x_4) = 0 \end{cases}.$$

Lembre que a involução R_1 anticomuta com B . Assim, como B fixa x_1, x_3 e troca o sinal de x_4 , segue que a última equação do sistema 3-dimensional anterior pode ser escrita na

forma:

$$x_4 f_\sigma(x_1) + x_4 \Theta(x_1, x_3, x_4), \quad \Theta(x_1, x_3, -x_4) = \Theta(x_1, x_3, x_4).$$

Por outro lado, pela s_ϕ -simetria, com $\phi = \frac{\pi}{2}$ temos que

$$\varphi_2(x_1, x_3, x_4) = -x_3 \Theta(x_1, x_4, -x_3) = -x_3 \Theta_1(x_1, x_3, x_4).$$

Note que este argumento fora usado na demonstração do caso 0:1:2-ressonante.

Com essas informações, podemos reescrever o sistema na forma:

$$\begin{cases} -\lambda - a_1(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + b_3(\lambda)\sigma(x_3^2 + x_4^2) - b_3(\lambda)c_3(\lambda)x_1(x_3^2 + x_4^2) + o(3) = 0 \\ -x_3(f_\sigma(x_1) + \Theta_1(x_1, x_3, x_4)) = 0 \\ x_4(f_\sigma(x_1) + \Theta(x_1, x_3, x_4)) = 0 \end{cases}$$

onde

$$f_\sigma(x_1) = -\sigma^2 + c_3(\lambda)\sigma x_1 - c_4(\lambda)x_1 - c_7(\lambda)\sigma x_1 + c_3(\lambda)c_7(\lambda)x_1^2.$$

A fim de obtermos soluções simétricas tomamos $x_4 = 0$ e para que as soluções obtidas sejam não triviais tomamos $x_3 \neq 0$ o que nos fornece

$$f_\sigma(x_1) + \Theta_1(x_1, x_3) = 0$$

que pode ser resolvida para x_1 desde que $c_4 \neq 0$ da seguinte forma:

$$x_1 = -\frac{1}{c_4}\sigma^2 + o(3).$$

A primeira equação toma a forma:

$$-\lambda - a_1(\lambda)x_1^2 - b_2(\lambda)x_3^2 + o(3) = 0.$$

Supondo $a_1(0) > 0$ $b_2(0) < 0$ temos um cenário como abaixo:

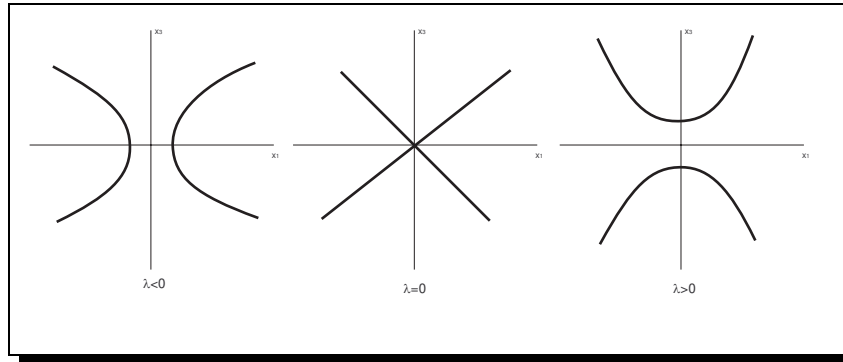


Figura 4.14:

que tem intersecção com $x_1 = -\frac{1}{c_4}\sigma^2 + o(3)$ na forma:

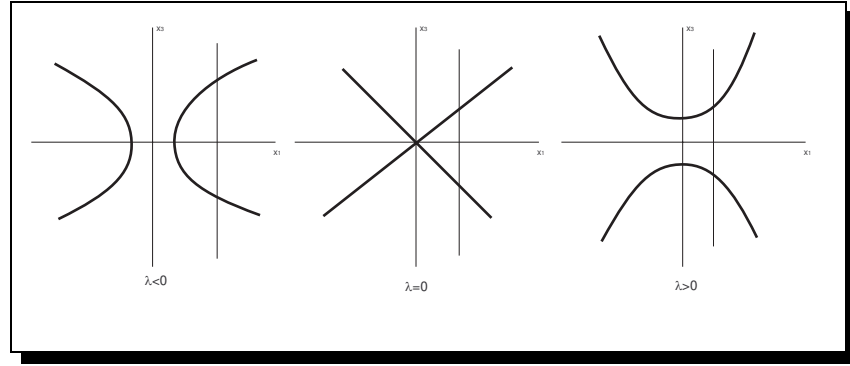


Figura 4.15:

para $c_2(0) < 0$.

O caso onde $a_1(0), b_2(0) > 0$ se comporta como o caso 0-não-ressonante onde uma bifurcação de Hopf subcrítica aparece com o surgimento de uma família de soluções periódicas simétricas.

Note que, neste caso, temos um cenário como no caso 0-não-ressonante em $\mathbb{R}^4$ com metade das órbitas periódicas detectadas naquele caso. Isso se deve ao fato de que a forma de x_1 é dada por $o(\sigma^2)$.

Quando consideramos o caso $\mu \neq 0$ arbitrário, temos o mesmo resultado. Basta, para isso, substituir c_4 por μc_4 na expressão acima para x_1 e obter as soluções desejadas.

Caso $\mu = 0$:

Neste caso, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_2 + o(2) = 0 & (1) \\ -\lambda - a_1(\lambda)x_1^2 - b_1(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + b_2(\lambda)(x_3x_6 - x_4x_5) - b_4(\lambda)(x_5^2 + x_6^2) + o(3) = 0 & (2) \\ -\sigma x_4 + c_2(\lambda)x_1x_4 - c_5(\lambda)x_1x_5 + \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0 & (3) \\ \sigma x_3 - c_2(\lambda)x_1x_3 - c_5(\lambda)x_1x_6 + \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0 & (4) \\ -\sigma x_6 - c_7(\lambda)x_1x_3 + c_8(\lambda)x_1x_6 + \varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0 & (5) \\ \sigma x_5 - c_7(\lambda)x_1x_4 - c_8(\lambda)x_1x_5 + \varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0 & (6) \end{cases}$$

com $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = o(3)$.

Suponha que $-\sigma + c_8(\lambda)x_1 \neq 0$. Então considerando as duas últimas equações obtemos

$$x_6 = \frac{c_7(\lambda)x_1x_3 + o(3)}{-\sigma + c_8(\lambda)x_1} \quad x_5 = -\frac{c_7(\lambda)x_1x_4 + o(3)}{-\sigma + c_8(\lambda)x_1}.$$

Substituindo estas duas igualdades nas equações (3) e (4) temos:

$$\sigma^2 - c_8(\lambda)\sigma x_1 - c_2(\lambda)\sigma x_1 + c_2(\lambda)c_8(\lambda)x_1^2 + c_5(\lambda)c_7(\lambda)x_1^2 + o(3) = 0.$$

Genericamente, (para $c_2(\lambda)c_8(\lambda) + c_7(\lambda)c_5(\lambda) \neq 0$) e desde que $c_8^2(\lambda) - 2c_2(\lambda)c_8(\lambda) + c_2^2(\lambda) - 4c_5(\lambda)c_7(\lambda) > 0$, a equação acima nos fornece duas soluções reais da forma

$$x_1 = k^\pm \sigma + o(2)$$

onde $k^\pm$ são raízes de uma equação quadrática

$$k^\pm = \frac{1}{2} \frac{c_8(\lambda) + c_2(\lambda) \pm \sqrt{c_8^2(\lambda) - 2c_2(\lambda)c_8(\lambda) + c_2^2(\lambda) - 4c_5(\lambda)c_7(\lambda)}}{c_2(\lambda)c_8(\lambda) + c_5(\lambda)c_7(\lambda)}.$$

Substituindo as expressões para x_1 na equação (2) restrita a

$$Fix(R) = \{x_2 = x_4 = x_5 = 0\}$$

temos:

$$\begin{aligned} & \lambda(-1 + 2c_8(\lambda)k - c_8^2(\lambda)k^2) + \sigma^2(-a_1(\lambda)k^2(-1 + c_8(\lambda)k)^2) + \\ & + (b_1(\lambda) + 2b_1(\lambda)c_8(\lambda)k - b_1(\lambda)c_8^2(\lambda)k^2 - b_2(\lambda)c_7(\lambda)k + b_2(\lambda)c_8(\lambda)k^2 - b_4(\lambda)c_7^2(\lambda)k^2) x_3^2 + o(3) = 0 \end{aligned}$$

ou de forma mais compacta:

$$\lambda\gamma + \alpha\sigma^2 + \beta x_3^2 + o(3) = 0.$$

Note que desta forma temos:

$$x_3^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\lambda}{a_1(\lambda)k^2} + \sigma^2 \right)$$

que tem solução para $\alpha, \beta < 0$ da seguinte forma:

(i) Se $\frac{\lambda}{a_1} > 0$ duas soluções que equivalem a uma solução periódica. Isso conduz a duas soluções periódicas se considerarmos os dois valores de x_1 .

(ii) Se $\lambda = 0$ duas soluções que, como acima, conduzem a duas soluções periódicas simétricas convergindo para a origem. Note que aqui $\sigma \rightarrow 0$.

(iii) Se $\frac{\lambda}{a_1} < 0$ (onde temos dois equilíbrios simétricos para o sistema) obtemos duas soluções periódicas. Cada uma convergindo para cada um dos equilíbrios. De fato, neste caso $\sigma^2 > -\frac{\lambda}{a_1 k^2}$.

Assim, temos um cenário como no caso *0-não-ressonante*

Por outro lado, se $\alpha.\beta > 0$ então temos uma bifurcação de Hopf subcrítica, pois a equação

$$x_3^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\lambda}{a_1(\lambda)k^2} + \sigma^2 \right)$$

só tem solução para $\frac{\lambda}{a_1} < 0$ o que implica $\sigma^2 < -\frac{\lambda}{a_1 k^2}$.

Novamente o mesmo cenário do caso *0-não-ressonante* é encontrado.

CAPÍTULO 5

Persistência de Soluções Homoclínicas

Neste capítulo apresentaremos a demonstração da persistência de soluções homoclínicas associadas a soluções periódicas simétricas para campos vetoriais em $\mathbb{R}^4$, com equilíbrio na origem onde a parte linear tem autovalores como fixado anteriormente.

Além disso, condições serão estabelecidas para que este resultado possa ser aplicado a campos em $\mathbb{R}^6$ com singularidade na origem 0-não-ressonante ou $0 : p : q$ -ressonante com $p + q > 3$.

A principal ferramenta utilizada aqui é o Teorema do Ponto Fixo de Banach [2]. O objetivo é reduzir o problema a encontrar o ponto fixo de uma equação funcional definida em um espaço de Banach apropriado.

5.1 Caso 4-Dimensional

Neste caso, consideraremos um campo vetorial R -reversível que tem um equilíbrio na origem e cuja matriz da parte linear tenha autovalores 0 (duplo) e $\pm\alpha i$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha = 1$. Suponha que o campo, como acima é dado na forma normal de Belitskii até ordem dois, cuja forma fora obtida no teorema A.

A técnica a ser utilizada aqui segue as idéias desenvolvidas por Lombardi em [18] e [19]. Nesses casos uma órbita homoclínica para um equilíbrio sela-centro é encontrada para a forma normal truncada e esta serve de base para encontrar soluções homoclínicas para soluções periódicas do campo vetorial geral. No nosso caso, tal órbita homoclínica para

o equilíbrio não existe e, desta forma, as órbitas homoclínicas para as soluções periódicas do sistema truncado na forma normal serão utilizadas a fim de garantir a persistência das mesmas para o campo geral.

Como supomos que o campo vetorial tem seu 2-jato na forma normal de Belitskii, podemos escrevê-lo na forma:

$$X : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1^2 + b_2(x_3^2 + x_4^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4 - c_1 x_1 x_4 + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3 + c_1 x_1 x_3 + o(3) \end{cases} . \quad (5.1)$$

Note que, na primeira equação, estamos desconsiderando os termos de ordem superior. Isso pode ser feito por uma mudança de coordenadas da forma

$$y_j = x_j, \quad j = 1, 3, 4 \text{ e } y_2 = x_2 + o(3).$$

De fato, com isso obtemos uma família como acima, onde a primeira equação é dada por $\dot{y}_1 = y_2$. Em resumo, podemos considerar a forma normal de Belitskii acima onde a primeira equação $(x_2 + o(3))$ seja dada apenas por x_2 nas novas coordenadas.

Para que soluções periódicas e homoclínicas sejam possíveis para a forma normal truncada nos termos de ordem dois, iremos supor as seguintes condições genéricas sob as constantes:

$$H_1 : \{a_2 > 0, \quad b_2 < 0, \quad c_1 \neq 0\}.$$

Com isso, por uma mudança de variáveis, podemos tomar $a_2 = 1$, $b_2 = -1$. Assim escrevendo o sistema nas coordenadas (x_1, x_2, Z) , onde $Z = x_3 + ix_4$, temos:

$$X : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - |Z|^2 + R_1(x_1, x_2, Z, \bar{Z}) \\ \dot{Z} = iZ(1 + c_1 x_1) + R_2(x_1, x_2, Z, \bar{Z}) \end{cases}$$

onde R_1, R_2 indicam termos de ordem superior (≥ 3).

Considere agora a seguinte mudança de variáveis:

$$x_1 = \varepsilon y_1, \quad x_2 = \varepsilon^{3/2} y_2, \quad Z = \varepsilon z, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t \quad \text{para } \varepsilon > 0. \quad (5.2)$$

Nas novas coordenadas, o sistema é dado por:

$$Y_\varepsilon : \begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = y_1^2 - |z|^2 + R_1(y_1, y_2, z, \bar{z}, \varepsilon) \\ \frac{dz}{d\tau} = iz \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} + c_1 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) + R_2(y_1, y_2, z, \bar{z}, \mu) \end{cases}$$

onde

$$R_1 = \mathcal{O}(\varepsilon(|y_1| + |y_2| + |z|)^3),$$

$$R_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}(|y_1| + |y_2| + |z|)^3).$$

Ainda,

$$\begin{aligned} R_1(Y', \varepsilon) - R_1(Y, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon|Y' - Y|), \\ R_2(Y', \varepsilon) - R_2(Y, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y' - Y|) \end{aligned}$$

onde $Y = (y_1, y_2, z, \bar{z})$.

Escrevendo o sistema em coordenadas $y_1, y_2, z = re^{i\theta}$ temos:

$$Y_\varepsilon : \begin{cases} \frac{dY}{d\tau} = f_1(Y, \theta) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 - r^2 + \tilde{R}_1(y_1, y_2, r, \theta, \varepsilon) \\ \tilde{R}_r(y_1, y_2, r, \theta, \varepsilon) \end{pmatrix} \\ \frac{d\theta}{d\tau} = f_2(Y, \theta) = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} + R_\theta(y_1, y_2, r, \theta, \varepsilon) \end{cases} \quad (5.3)$$

onde consideramos aqui $Y(\tau) = (y_1(\tau), y_2(\tau), r(\tau))$.

Nessas novas coordenadas a reversibilidade R agora toma a forma:

$$R' f_1(Y, \theta) = -f_1(R'Y, -\theta), \text{ onde } R'(y_1, y_2, r) = (y_1, -y_2, r)$$

e θ é uma função ímpar.

Temos ainda:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_1 &= \mathcal{O}(\varepsilon|Y|), \\
\tilde{R}_1(Y', \theta, \varepsilon) - \tilde{R}_1(Y, \theta, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon|Y' - Y|), \\
\tilde{R}_r &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y|), \\
\tilde{R}_r(Y', \theta, \varepsilon) - \tilde{R}_r(Y, \theta, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y' - Y|), \\
\tilde{R}_\theta &= \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/2} + \frac{\varepsilon^{3/2}}{r}|Y|\right), \\
\tilde{R}_\theta(Y', \theta, \varepsilon) - \tilde{R}_\theta(Y, \theta, \varepsilon) &= \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{3/2} \left[\frac{1}{r'} + \frac{|Y|}{rr'}\right] |Y' - Y|\right).
\end{aligned}$$

Queremos associar ao sistema (5.3), um sistema auxiliar onde consideramos o θ como o tempo. Para isso, precisamos considerar o campo $\frac{dY}{d\theta}$. Neste sentido, a função θ deve ser um difeomorfismo. Para isso, consideremos uma restrição ao conjunto

$$\mathcal{E}_\alpha = \{(Y, \theta) / \sup_{\tau \in \mathbb{R}} |Y| \leq M, r \geq \frac{\varepsilon^\alpha}{2}\}, \quad \text{com } \alpha < \frac{1}{2}.$$

Assim, para $(Y, \theta) \in \mathcal{E}_\alpha$ temos:

$$\begin{aligned}
R_\theta &= \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}), \\
R_\theta(Y', \theta, \varepsilon) - R_\theta(Y, \theta, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}|Y' - Y|)
\end{aligned}$$

o que garante que θ é um difeomorfismo local.

A partir daqui, reduzimos o estudo ao subsistema f_1 tomando θ como o tempo. Para isso, consideremos o sistema na forma:

$$\begin{cases} \frac{dY}{d\theta} = F_\varepsilon(Y) + \tilde{T}(Y, \theta, \varepsilon) \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} + R_\theta(Y, \theta, \varepsilon) \end{cases}$$

onde $F_\varepsilon = \varepsilon^{1/2} F$, $F = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 - r^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Y = (y_1, y_2, r)$.

Analisemos então o sistema

$$\tilde{Y}_{\theta, \varepsilon} : \frac{dY}{d\theta} = F_\varepsilon(Y) + \tilde{T}(Y, \theta, \varepsilon).$$

Por uma reparametrização de θ podemos considerá-lo na forma

$$Y_{\theta, \varepsilon} : \frac{dY}{d\theta} = F(Y) + T(Y, \theta, \varepsilon) \tag{5.4}$$

com

$$T = \begin{pmatrix} s_1(Y, \theta, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon|Y|) \\ s_2(Y, \theta, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon|Y|) \\ R_r(Y, \theta, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y|) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Desta forma, $T(Y, \theta, 0) \equiv 0$ e assim podemos escrever

$$\frac{dY}{d\theta} = F(Y) + \varepsilon \hat{T}(Y, \theta, \varepsilon).$$

Para $\varepsilon = 0$ temos o sistema truncado

$$\frac{dY}{d\theta} = F(Y) \quad (5.6)$$

o qual satisfaz:

Esse sistema tem $H_2 = r^2$ como integral primeira e para cada $r = k > 0$ existe uma órbita homoclínica $H_k(\theta)$ para o equilíbrio $Y_k = (k, 0, k)$ onde

$$H_k(\theta) = (y_1(\theta), y_2(\theta), k)$$

com

$$y_1(\theta) = k - \frac{3k}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\theta\right)}, \quad y_2(\theta) = \frac{3k\sqrt{2k}tgh\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\theta\right)}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\theta\right)}.$$

Note que, para o sistema original, o equilíbrio Y_k corresponde a uma órbita periódica simétrica $Y_k(t)$ e $H_k(\theta)$ a uma órbita homoclínica simétrica $H_k(t)$ associada a $Y_k(t)$.

Observe ainda que a forma normal truncada em $\mathbb{R}^4$ é invariante por

$$S_\varphi(y_1, y_2, z) = (y_1, y_2, ze^{i\varphi}).$$

Assim, a existência da órbita homoclínica simétrica $H_k(t)$ para $Y_k(t)$ implica na existência de outra órbita homoclínica simétrica para $Y_k(t)$, a saber, $S_\pi H_k(t)$.

Logo, cada órbita periódica tem duas órbitas homoclínicas simétricas associadas a ela.

No capítulo anterior mostramos que as órbitas periódicas são persistentes para $\varepsilon > 0$.

Nosso objetivo agora é verificar a persistência das homoclínicas.

Note que toda a análise pode ser resumida a estudar o sistema auxiliar $\frac{dY}{d\theta}$.

Lema Fundamental 1: *Seja $Y_{\theta,\varepsilon}$ um campo vetorial dado por (5.4). Então, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $k_\varepsilon > 0$ tal que, para $k \geq k_\varepsilon$, a continuação de Y_k de (5.6) para (5.4) dada por $\hat{Y}_k(\theta, \varepsilon)$ admite duas soluções homoclínicas simétricas associadas a ela.*

Dem: Vimos que o problema de estabelecer a persistência de soluções homoclínicas para o campo vetorial em $\mathbb{R}^4$, se reduz a estudar a persistência das soluções homoclínicas para o sistema

$$\frac{dY}{d\theta} = F(Y) + \varepsilon \hat{T}(Y, \theta, \varepsilon) \quad (5.7)$$

que existem quando consideramos o sistema truncado na forma normal, isto é, o sistema acima quando $\varepsilon = 0$.

Suponha que exista uma órbita de (5.7) da forma

$$Y(\theta, \varepsilon) = H_k(\theta) - Y_k + U(\theta, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta, \varepsilon) \quad (5.8)$$

onde $\hat{Y}_k(\theta, \varepsilon)$ é a continuação de Y_k para (5.7) detectada pela redução de Lyapunov-Schmidt.

A fim de garantir que $Y(\theta, \varepsilon)$ seja uma órbita homoclínica para $\hat{Y}_k(\theta, \varepsilon)$ vamos restringir U ao conjunto

$$E_\beta = \{U = (y_1, y_2, r) / U \in C^o(\mathbb{R}), U \text{ é reversível e } \|U\|_\beta < \infty\}$$

onde

$$\|U\|_\beta = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (|U(\theta, \varepsilon)| e^{\beta|\theta|}) \quad e \quad 0 < \beta < \sqrt{2k}.$$

E_β é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\beta$.

Ainda, para garantir que $Y(\theta, \varepsilon) \in \mathcal{E}_\alpha$, vamos restringir U ao subconjunto convexo de E_β dado por:

$$E_{\beta,d} = \left\{ U \in E_\beta / \|U\|_\beta \leq d, |\Pi_r(U)| \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \right\} \quad (5.9)$$

onde $\Pi_r(\cdot)$ é a projeção na r -ésima coordenada, isto é,

$$\begin{aligned} \Pi_r : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (y_1, y_2, r) &\mapsto r \end{aligned}$$

De fato, note que, neste caso,

$$|\Pi_r(Y)| = |\Pi_r(H_k(\theta) - Y_k + U(\theta, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta, \varepsilon))| \geq \varepsilon^\alpha - \frac{\varepsilon^\alpha}{2} = \frac{\varepsilon^\alpha}{2}.$$

Agora, se $Y(\theta, \varepsilon)$ é solução de (5.7), então $U(\theta, \varepsilon)$ satisfaz:

$$\frac{dU}{d\theta} - DF(H_k(\theta))U = \hat{N}(U(\theta, \varepsilon), \theta) + \varepsilon \hat{R}(U(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon) \quad (5.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{N}(U(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon) &= F(H_k(\theta) - Y_k + U(\theta, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta)) - F(H_k(\theta)) \\ &\quad - F(\hat{Y}_k(\theta, \varepsilon)) - DF(H_k(\theta))U \\ \hat{R}(U(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon) &= \hat{T}(H_k(\theta) - Y_k + U(\theta, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon) - \hat{T}(\hat{Y}_k(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon) \end{aligned}$$

Segue da desigualdade do valor médio que existe $M > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \|\hat{N}(U(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon)\| &\leq M \left(\varepsilon e^{-\sqrt{2k}\theta} + \varepsilon |U(\theta, \varepsilon)| + |U(\theta, \varepsilon)|^2 \right) \\ \|\hat{R}(U(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon)\| &\leq M \left(e^{-\sqrt{2k}\theta} + |U(\theta, \varepsilon)| \right) \\ \|\hat{N}(U'(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon) - \hat{N}(U(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon)\| &\leq M (|U(\theta, \varepsilon)| + |U'(\theta, \varepsilon)| + \varepsilon) |(U' - U)(\theta, \varepsilon)| \\ \|\hat{R}(U'(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon) - \hat{R}(U(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon)\| &\leq M |(U - U')(\theta, \varepsilon)| \end{aligned} \quad (5.11)$$

Note que, as duas primeiras desigualdades implicam que $\hat{N}$ e $\hat{R}$ aplicam E_β em E_β já que $\beta < \sqrt{2k}$.

A fim de que a restrição de E_β a $E_{\beta,d}$ também satisfaça a condição acima faremos algumas restrições nos valores de ε e d como veremos adiante.

Estudemos agora o campo linear

$$\frac{dU}{d\theta} = DF(H_k(\theta))U. \quad (5.12)$$

Nosso objetivo agora é encontrar uma base de soluções de (5.12).

Em geral, isso não é sempre possível. No entanto usaremos as propriedades de R' -reversibilidade para obter tal base.

Sabemos que,

$$p(\theta) = \frac{\partial H_k}{\partial \theta}(\theta) = \left(y_2(\theta), \frac{\partial y_2}{\partial \theta}, 0 \right)$$

é sempre uma solução de (5.12).

Além disso, $p(\theta)$ satisfaz:

$$R'p(\theta) = -p(-\theta), \text{ isto é, } p \text{ é } R'\text{-antireversível e } p(\theta) = \mathcal{O}\left(e^{-\sqrt{2k}\theta}\right) \text{ quando } |\theta| \rightarrow \infty.$$

Ainda,

$$r(\theta) = \frac{\partial H_k}{\partial k}(\theta) = (r_1(\theta), r_2(\theta), 1)$$

é uma outra solução de (5.12). Essa solução tem as seguintes propriedades:

$$R'r(\theta) = r(-\theta), \text{ isto é, } r \text{ é } R'\text{-reversível e } r(\theta) \text{ é limitada.}$$

Finalmente, pela R' -reversibilidade de (5.12) segue que, associada à solução $p(\theta)$, existe uma outra solução $q(\theta)$ com as seguintes propriedades:

$$R'q(\theta) = q(-\theta), \text{ isto é, } q \text{ é } R'\text{-reversível e } q(\theta) = \mathcal{O}\left(e^{\sqrt{2k}\theta}\right) \text{ quando } |\theta| \rightarrow \infty.$$

Logo, como as soluções $p(\theta)$, $r(\theta)$ e $q(\theta)$ são três soluções linearmente independentes de (5.12) segue que

$$\{p(\theta), r(\theta), q(\theta)\}$$

é uma base de solução de (5.12).

Assim, temos que:

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} p(\theta) & : & r(\theta) & : & q(\theta) \end{pmatrix}$$

é uma matriz fundamental de (5.12).

Considerando $T(\theta, \phi) = \Phi(\theta)\Phi^{-1}(\phi)$, a solução de (5.10) é dada por

$$U(\theta) = T(\theta, 0)U(0) + \int_0^\theta T(\theta, \phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi. \quad (5.13)$$

Seja $P(\theta)$ a projeção na direção $p(\theta)$ ao longo das direções $\{r(\theta), q(\theta)\}$ e $Q(\theta) = Id - P(\theta)$.

Desdobrando a equação (5.13) para $\theta > 0$ temos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\theta T(\theta, \phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi = \\
& = \int_0^\theta T(\theta, \phi) P(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi + \\
& + \int_0^\theta T(\theta, \phi) Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi = \\
& = \int_0^\theta T(\theta, \phi) P(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi + \\
& + \int_\infty^\theta T(\theta, \phi) Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi + \\
& + \int_0^\infty T(\theta, \phi) Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi,
\end{aligned}$$

desde que as integrais impróprias convirjam.

Daí, podemos escrever a solução (5.13) na forma:

$$\begin{aligned}
U(\theta) = & T(\theta, 0) \left(U(0) + \int_0^\infty T(0, \phi) Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi \right) + \\
& + \int_0^\theta T(\theta, \phi) P(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi + \\
& + \int_\infty^\theta T(\theta, \phi) Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi
\end{aligned}$$

Agora sabemos por [10] que essa solução é limitada em $\mathbb{R}_+$, se e somente se,

$$Q(0) \left(U(0) + \int_0^\infty T(0, \phi) Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi \right) = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 0 &= Q(0)U(0) + \int_0^\infty Q(0)T(0, \phi)Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi = \\
 &= Q(0)U(0) + \int_0^\infty T(0, \phi)Q(\phi)^2 \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi = \\
 &= U(0) - P(0)U(0) + \int_0^\infty T(0, \phi)Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi.
 \end{aligned}$$

Aqui, usamos na segunda igualdade, o fato de que $Q(0)T(0, \phi) = T(0, \phi)Q(\phi)$ (lema 5.1) e, na terceira igualdade, o fato de que $Q = Id - P$ e $Q^2 = Q$ (pois Q é uma projeção).

Assim temos:

$$U(0) + \int_0^\infty T(0, \phi)Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi = P(0)U(0).$$

Logo, a solução (5.13) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
 U(\theta) &= T(\theta, 0)P(0)U(0) + \int_0^\theta T(\theta, \phi)P(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi - \\
 &\quad - \int_\theta^\infty T(\theta, \phi)Q(\phi) \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Agora, seja $\{p^*(\theta), r^*(\theta), q^*(\theta)\}$ uma base adjunta de $\{p(\theta), r(\theta), q(\theta)\}$, então $\{p^*(\theta), r^*(\theta), q^*(\theta)\}$ é uma família de soluções da equação adjunta

$$\frac{dU}{d\theta} = -DF(H_k(\theta))^T U \tag{5.15}$$

que tem

$$\Psi(\theta) = \begin{pmatrix} p^*(\theta) & \vdots & r^*(\theta) & \vdots & q^*(\theta) \end{pmatrix}$$

como uma matriz fundamental.

Note que, como $\{p^*(\phi), r^*(\phi), q^*(\phi)\}$ é base adjunta de $\{p(\phi), r(\phi), q(\phi)\}$ segue que $\Psi^T(\phi) = \Phi^{-1}(\phi)$. Logo

$$T(\theta, \phi) = \Phi(\theta)\Phi^{-1}(\phi) = \Phi(\theta)\Psi^T(\phi)$$

e assim podemos escrever (5.14) na forma:

$$\begin{aligned}
 U(\theta) &= \eta p(\theta) + \int_0^\theta \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), p^*(\phi) \right\rangle d\phi p(\theta) - \\
 &\quad - \int_\theta^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), r^*(\phi) \right\rangle d\phi r(\theta) - \\
 &\quad - \int_\theta^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), q^*(\phi) \right\rangle d\phi q(\theta)
 \end{aligned}$$

onde $\eta = \langle U(0), p^*(0) \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$.

De fato, note que:

$$\begin{aligned}
 T(\theta, 0)P(0)U(0) &= T(\theta, 0) \langle U(0), p^*(0) \rangle p(0) \\
 &= \langle U(0), p^*(0) \rangle \Phi(\theta)\Psi(0)^T p(0) \\
 &= \eta \Phi(\theta) e_1 \\
 &= \eta p(\theta)
 \end{aligned}$$

onde $\eta = \langle U(0), p^*(0) \rangle$ e $e_1 = (1, 0, 0)^T$.

Agora, pela R' -reversibilidade de U devemos ter:

$$R'U(0) = U(0)$$

e assim, substituindo na expressão de U acima temos:

$$\begin{aligned}
 0 = R'U(0) - U(0) &= R' \left[\eta p(0) - \int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), r^*(\phi) \right\rangle d\phi r(0) \right] \\
 &\quad - R' \left[\int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), q^*(\phi) \right\rangle d\phi q(0) \right] \\
 &= \eta [R'p(0) - p(0)] - \\
 &\quad - \int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), r^*(\phi) \right\rangle d\phi [R'r(0) - r(0)] \\
 &\quad - \int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), q^*(\phi) \right\rangle d\phi [R'q(0) - q(0)] \\
 &= -2\eta p(0)
 \end{aligned}$$

pela R' -antireversibilidade de p e pela R' -reversibilidade de r e q .

A igualdade

$$2\eta p(0) = 0$$

implica $\eta = 0$ e portanto,

$$\begin{aligned}
 U(\theta) &= \int_0^\theta \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), p^*(\phi) \right\rangle d\phi p(\theta) - \\
 &\quad - \int_\theta^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), r^*(\phi) \right\rangle d\phi r(\theta) - \\
 &\quad - \int_\theta^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), q^*(\phi) \right\rangle d\phi q(\theta).
 \end{aligned}$$

Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} G(U(\theta)) = & \int_0^\theta \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), p^*(\phi) \right\rangle d\phi p(\theta) - \\ & - \int_\theta^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), r^*(\phi) \right\rangle d\phi r(\theta) - \\ & - \int_\theta^\infty \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), q^*(\phi) \right\rangle d\phi q(\theta). \end{aligned}$$

Nosso objetivo é mostrar que G define uma aplicação de $E_{\beta,d}$ em $E_{\beta,d}$ e que tem um ponto fixo nesse conjunto. Mostrando isso, teremos mostrado que uma solução de (5.7) da forma (5.8) existe e, desta forma, concluímos a demonstração.

Mostremos inicialmente que $|\Pi_r(G(U))| \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2}$.

Note que, como $\Pi_r(p(\theta)) = 0$ e $\Pi_r(q(\theta)) = 0$, o nosso problema se reduz à segunda integral na expressão de $G(U)$.

Lembre que

$$DF(y_1, y_2, r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2y_1 & 0 & -2r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, a equação adjunta é dada por:

$$\frac{dU}{d\theta} = -DF(H_k(\theta))^T U, \quad \text{onde} \quad DF(H_k(\theta)) = \begin{pmatrix} 0 & 2y_1(\theta) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou, de outra forma:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\theta} = -2y_1(\theta)u_2 \\ \frac{du_2}{d\theta} = -u_1 \\ \frac{du_3}{d\theta} = 2ku_2 \end{cases}.$$

Assim, vemos que $(0, 0, \alpha)$ é uma solução da equação adjunta. Daí, podemos tomar, na base adjunta $\{p^*(\theta), r^*(\theta), q^*(\theta)\}$, $r^*(\theta) = (0, 0, 1)$.

Desta forma, como $\Pi_r(r(\theta)) = 1$ e $r^*(\theta) = (0, 0, 1)$ segue que

$$\Pi_r(G(U(\theta, \varepsilon))) = - \int_{\theta}^{\infty} \Pi_r \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] d\phi.$$

Por outro lado,

$$\Pi_r(F) = 0.$$

Assim,

$$\Pi_r \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] = 0$$

e daí,

$$\begin{aligned} \Pi_r \left[\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] &= \\ &= \Pi_r \left[\varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) \right] \\ &= \varepsilon \Pi_r \left[\hat{T} \left(H_k(\phi) - Y_k + U(\phi, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) - \hat{T} \left(\hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) \right] \\ &= \Pi_r \left[T \left(H_k(\phi) - Y_k + U(\phi, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) - T \left(\hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) \right] \\ &= R_r \left(H_k(\phi) - Y_k + U(\phi, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) - R_r \left(\hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Agora lembre que, segundo (5.5),

$$R_r(Y, \theta, \varepsilon) - R_r(Y', \theta, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y - Y'|).$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\Pi_r(G(U))| &= \left| \int_{\theta}^{\infty} R_r \left(H_k(\phi) - Y_k + U(\phi, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) - R_r \left(\hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) d\phi \right| \\ &\leq \int_{\theta}^{\infty} \left| R_r \left(H_k(\phi) - Y_k + U(\phi, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) - R_r \left(\hat{Y}_k(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon \right) \right| d\phi \\ &\leq M_1 \varepsilon^{3/2} \int_{\theta}^{\infty} (|H_k(\phi) - Y_k| + |U(\phi, \varepsilon)|) d\phi \\ &\leq^* M_2 \frac{\varepsilon^{3/2}}{\beta} \left(\|U\|_{\beta} + e^{-\sqrt{2k}\theta} \right). \end{aligned}$$

Verifiquemos a desigualdade (*):

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\infty} |U(\phi, \varepsilon)| d\phi &= \int_{\theta}^{\infty} |U(\phi, \varepsilon)| e^{\beta\phi} e^{-\beta\phi} d\phi \\ &\leq \int_{\theta}^{\infty} \|U\|_{\beta} e^{-\beta\phi} d\phi \\ &= \frac{\|U\|_{\beta}}{\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\infty} |H_k(\phi) - Y_k| d\phi &\leq M_2 \int_{\theta}^{\infty} e^{-\sqrt{2k}\phi} d\phi \\ &= M_2 \frac{e^{-\sqrt{2k}\theta}}{\sqrt{2k}} < M_2 \frac{e^{-\sqrt{2k}\theta}}{\beta}. \end{aligned}$$

Como $k \geq \frac{\varepsilon^{\alpha}}{2}$, tomando $\beta \geq \frac{\sqrt{2k}}{2}$, segue que $\frac{1}{\beta} \leq \frac{2}{\varepsilon^{\alpha/2}}$.

Daí,

$$|\Pi_r(G(U))| \leq M_3 \varepsilon^{3/2-\alpha/2} \left(\|U\|_{\beta} + e^{-\sqrt{2k}\theta} \right)$$

o que implica, pelo fato de $\alpha < 1/2$, que

$$|\Pi_r(G(U))| \leq \frac{\varepsilon^{\alpha}}{2}.$$

Por outro lado, segue da definição de $G(U(\theta))$ que G é R' -reversível.

Falta agora mostrar que $\|G(U)\|_{\beta} \leq d$.

Para isso, devemos estimar

$$|G(U(\theta))| e^{\beta\theta}.$$

Podemos assim escrever:

$$\begin{aligned}
 |G(U(\theta))|e^{\beta\theta} &\leq \int_0^\theta \left| \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), p^*(\phi) \right\rangle \right| d\phi |p(\theta)|e^{\beta\theta} \\
 &+ \int_\theta^\infty \left| \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), r^*(\phi) \right\rangle \right| d\phi |r(\theta)|e^{\beta\theta} \\
 &+ \int_\theta^\infty \left| \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), q^*(\phi) \right\rangle \right| d\phi |q(\theta)|e^{\beta\theta}.
 \end{aligned}$$

Vamos analisar cada uma das integrais acima separadamente. Faremos as estimativas para a parte que depende de $\hat{N}$, pois a parte em $\varepsilon \hat{R}$ tem estimativas semelhantes. De fato, isso segue de (5.11).

Estimativas para a primeira integral:

Estimaremos inicialmente o integrando e depois aplicaremos a integral.

$$\begin{aligned}
 |\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon)| \cdot |p^*(\phi)| &\leq M \left(\varepsilon e^{-\sqrt{2k}\phi} + \varepsilon |U(\phi, \varepsilon)| + |U(\phi, \varepsilon)|^2 \right) e^{\sqrt{2k}\phi} \left(\frac{e^{\beta\phi}}{e^{\beta\phi}} \right) \\
 &= M \left(\varepsilon e^{-(\sqrt{2k}-\beta)\phi} + \varepsilon |U(\phi, \varepsilon)| e^{\beta\phi} + |U(\phi, \varepsilon)|^2 e^{\beta\phi} \right) e^{(\sqrt{2k}-\beta)\phi} \\
 &\leq M \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{|U(\phi, \varepsilon)|^2}{2} e^{2\beta\phi} + |U(\phi, \varepsilon)|^2 e^{\beta\phi} \right) e^{(\sqrt{2k}-\beta)\phi} \\
 &\leq M' \left(\varepsilon + \|U\|_\beta^2 \right) e^{(\sqrt{2k}-\beta)\phi}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\theta \left| \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), p^*(\phi) \right\rangle \right| d\phi |p(\theta)| \\
& \leq M' \int_0^\theta (\varepsilon + \|U\|_\beta^2) e^{(\sqrt{2k}-\beta)\phi} d\phi e^{-\sqrt{2k}\theta} \\
& = M' \left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{2k}-\beta} \left(e^{(\sqrt{2k}-\beta)\theta} - 1 \right) + \frac{\|U\|_\beta^2}{\sqrt{2k}-\beta} \left(e^{(\sqrt{2k}-\beta)\theta} - 1 \right) \right] e^{\sqrt{2k}\theta} \\
& \leq M' \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2k}-\beta} + \frac{\|U\|_\beta^2}{\sqrt{2k}-\beta} \right) e^{-\beta\theta}
\end{aligned}$$

Estimativas para a segunda integral:

$$\begin{aligned}
|\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon))| \cdot |r^*(\phi)| & \leq M \left(\varepsilon e^{-\sqrt{2k}\phi} + \varepsilon |U(\phi, \varepsilon)| + |U(\phi, \varepsilon)|^2 \right) \left(\frac{e^{\beta\phi}}{e^{\beta\phi}} \right) \\
& = M \left(\varepsilon e^{-(\sqrt{2k}-\beta)\phi} + \varepsilon |U(\phi, \varepsilon)| e^{\beta\phi} + |U(\phi, \varepsilon)|^2 e^{\beta\phi} \right) e^{-\beta\phi} \\
& \leq M \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{|U(\phi, \varepsilon)|^2}{2} e^{2\beta\phi} + |U(\phi, \varepsilon)|^2 e^{\beta\phi} \right) e^{-\beta\phi} \\
& \leq M' (\varepsilon + \|U\|_\beta^2) e^{-\beta\phi}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\theta^\infty \left| \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), r^*(\phi) \right\rangle \right| d\phi |r(\theta)| & \leq M' \int_\theta^\infty (\varepsilon + \|U\|_\beta^2) e^{-\beta\phi} d\phi |r(\theta)| \\
& \leq \tilde{M}' \int_\theta^\infty (\varepsilon + \|U\|_\beta^2) e^{-\beta\phi} d\phi \\
& = M' \left(\frac{\varepsilon}{\beta} + \frac{\|U\|_\beta^2}{\beta} \right) e^{-\beta\theta}.
\end{aligned}$$

Estimativas para a terceira integral:

$$\begin{aligned}
|\hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon))| \cdot |q^*(\phi)| &\leq M \left(\varepsilon e^{-\sqrt{2k}\phi} + \varepsilon |U(\phi, \varepsilon)| + |U(\phi, \varepsilon)|^2 \right) e^{-\sqrt{2k}\phi} \left(\frac{e^{\beta\phi}}{e^{\beta\phi}} \right) \\
&= M \left(\varepsilon e^{-(\sqrt{2k}-\beta)\phi} + \varepsilon |U(\phi, \varepsilon)| e^{\beta\phi} + |U(\phi, \varepsilon)|^2 e^{\beta\phi} \right) e^{-(\sqrt{2k}-\beta)\phi} \\
&\leq M \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{|U(\phi, \varepsilon)|^2}{2} e^{2\beta\phi} + |U(\phi, \varepsilon)|^2 e^{\beta\phi} \right) e^{-(\sqrt{2k}-\beta)\phi} \\
&\leq M' (\varepsilon + \|U\|_\beta^2) e^{-(\sqrt{2k}-\beta)\phi}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_\theta^\infty \left| \left\langle \hat{N}(U(\phi, \varepsilon), \phi, \varepsilon), q^*(\phi) \right\rangle \right| d\phi |q(\theta)| \\
&\leq M' \int_\theta^\infty (\varepsilon + \|U\|_\beta^2) e^{-(\sqrt{2k}-\beta)\phi} d\phi e^{\sqrt{2k}\theta} \\
&= M' \left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{2k} + \beta} \left(e^{-(\sqrt{2k}+\beta)\theta} - 1 \right) + \frac{\|U\|_\beta^2}{\sqrt{2k} + \beta} \left(e^{-(\sqrt{2k}+\beta)\theta} - 1 \right) \right] e^{\sqrt{2k}\theta} \\
&\leq M' \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2k} - \beta} + \frac{\|U\|_\beta^2}{\sqrt{2k} - \beta} \right) e^{-\beta\theta}.
\end{aligned}$$

Relembremos que estimativas semelhantes são válidas para os termos em $\hat{R}$.

Assim, concluímos que

$$\|G(U)\|_\beta \leq M' \left[(\varepsilon + \|U\|_\beta^2) \frac{\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k} - \beta)\beta} \right] \quad (5.16)$$

Cálculos semelhantes utilizando as duas últimas estimativas em (5.11) mostram que:

$$\|G(U) - G(U')\|_\beta \leq M' \left[(\varepsilon + \|U\|_\beta^2 + \|U'\|_\beta^2) \frac{\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k} - \beta)\beta} \right] \|U - U'\|_\beta. \quad (5.17)$$

Assim, para cada $k > 0$, podemos tomar $\varepsilon_k > 0$ e d suficientemente pequenos, tais que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$, G aplica $E_{\beta,d}$ em $E_{\beta,d}$ (por (5.16)) e é uma contração (por (5.17)). Daí, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, G tem um único ponto fixo em $E_{\beta,d}$.

Ainda, trocando (5.8) por

$$Y(\theta, \varepsilon) = H_k(\theta) - Y_k + U(\theta, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta + \pi, \varepsilon) \quad (5.18)$$

e repetindo os cálculos a partir de (5.8) chegamos ao mesmo resultado.

Lembre que $\hat{Y}_k(\theta, \varepsilon)$ é simétrica e atinge $Fix(R')$ para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Portanto, temos que dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que: se $k \geq k_\varepsilon$ então $\hat{Y}_k(\theta, \varepsilon)$ admite duas soluções homoclínicas simétricas associadas a ela. ■

Lema 5.1. *Com as notações do lema anterior, vale:*

$$Q(\theta)T(\theta, \phi) = T(\theta, \phi)Q(\phi), \quad \text{para } \theta, \phi \in \mathbb{R}.$$

Dem: Seja $v \in \mathbb{R}^3$ fixado. Temos que v pode ser escrito na forma:

$$v = \langle v, p^*(\phi) \rangle p(\phi) + \langle v, r^*(\phi) \rangle r(\phi) + \langle v, q^*(\phi) \rangle q(\phi).$$

Assim, como $Q(\phi)$ é a projeção na direção de $r(\phi)$, $q(\phi)$ segue que:

$$\begin{aligned} T(\theta, \phi)Q(\phi)v &= T(\theta, \phi) (\langle v, r^*(\phi) \rangle r(\phi) + \langle v, q^*(\phi) \rangle q(\phi)) \\ &= \langle v, r^*(\phi) \rangle \Phi(\theta)e_2 + \langle v, q^*(\phi) \rangle \Phi(\theta)e_3 \\ &= \langle v, r^*(\phi) \rangle r(\theta) + \langle v, q^*(\phi) \rangle q(\theta). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Q(\theta)T(\theta, \phi)v &= Q(\theta)\Phi(\theta)\Psi(\phi) (\langle v, p^*(\phi) \rangle p(\phi) + \langle v, r^*(\phi) \rangle r(\phi) + \langle v, q^*(\phi) \rangle q(\phi)) \\ &= Q(\theta)\Phi(\theta) (\langle v, p^*(\phi) \rangle e_1 + \langle v, r^*(\phi) \rangle e_2 + \langle v, q^*(\phi) \rangle e_3) \\ &= Q(\theta) (\langle v, p^*(\phi) \rangle p(\theta) + \langle v, r^*(\phi) \rangle r(\theta) + \langle v, q^*(\phi) \rangle q(\theta)) \\ &= \langle v, r^*(\phi) \rangle r(\theta) + \langle v, q^*(\phi) \rangle q(\theta) \end{aligned}$$

onde $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ e $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

Assim concluímos a demonstração do lema. ■

Teorema C: *Existe um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^4)$ tal que para cada $X \in \mathcal{U}$ existe um ε -re-escalamento nas variáveis dado por $(y_1, y_2, r, \theta, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ tal que nestas novas coordenadas o campo é expresso por Y_ε e para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente próximo de zero, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que para $k \geq k_\varepsilon$ existem duas soluções homoclínicas simétricas associadas a uma solução periódica simétrica $\hat{Y}_k(t, \varepsilon)$.*

Dem: Imediata a partir do lema fundamental 1. ■

5.2 Caso 6-Dimensional

Aqui, consideraremos um campo vetorial R -reversível, com um equilíbrio na origem, e tal que a matriz da parte linear tem como autovalores 0 (duplo), $\pm\alpha i$ e $\pm\beta i$ onde α, β ou são não ressonantes ou estão em ressonância $p : q$ com $p + q > 3$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que o campo esteja na forma normal de Belitskii até a ordem dois, como dadas no teorema A e proposição 2.7. Note que nos dois casos, as formas normais até ordem dois coincidem.

Vários passos utilizados aqui serão similares ao do caso anterior e, desta forma, nestes casos os detalhes serão omitidos.

Podemos escrever o campo vetorial na forma:

$$X : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1^2 + b(x_3^2 + x_4^2) + c(x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_4 - a_1 x_1 x_4 + o(3) \\ \dot{x}_4 = \alpha x_3 + a_1 x_1 x_3 + o(3) \\ \dot{x}_5 = -\beta x_6 + a_2 x_1 x_6 + o(3) \\ \dot{x}_6 = \beta x_5 + a_2 x_1 x_5 + o(3) \end{cases} . \quad (5.19)$$

Como antes, vamos supor que X satisfaz a condição genérica

$$H'_1 : \{a > 0, b, c < 0 \text{ e } a_1, a_2 \neq 0\}.$$

Essa condição nos fornece para a forma normal truncada, soluções periódicas simétricas e soluções homoclínicas simétricas associadas a elas.

Sem perda de generalidade, suponha que $a = 1, b, c = -1$. Isso pode ser feito por uma mudança de coordenadas.

Escrevendo o sistema em coordenadas $(x_1, x_2, Z_1, x_5, x_6)$ onde $Z_1 = x_3 + ix_4$ temos:

$$X : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - |Z_1|^2 - (x_5^2 + x_6^2) + R_1(x_1, x_2, Z_1, \bar{Z}_1, x_5, x_6) \\ \dot{Z}_1 = iZ_1(\alpha + a_1x_1) + R_2(x_1, x_2, Z_1, \bar{Z}_1, x_5, x_6) \\ \dot{x}_5 = -x_6(\beta + a_2x_1) + R_3(x_1, x_2, Z_1, \bar{Z}_1, x_5, x_6) \\ \dot{x}_6 = x_5(\beta + a_2x_1) + R_4(x_1, x_2, Z_1, \bar{Z}_1, x_5, x_6) \end{cases}.$$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$x_1 = \varepsilon y_1, \quad x_2 = \varepsilon^{3/2} y_2, \quad Z_1 = \varepsilon z_1, \quad x_5 = \varepsilon y_5, \quad x_6 = \varepsilon y_6, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t \quad \text{para } \varepsilon > 0. \quad (5.20)$$

Daí obtemos:

$$Y_\varepsilon : \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1^2 - |z_1|^2 - (y_5^2 + y_6^2) + R_1(y_1, y_2, z_1, \bar{z}_1, y_5, y_6, \varepsilon) \\ \dot{z}_1 = iz_1 \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^{1/2}} + a_1 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) + R_2(y_1, y_2, z_1, \bar{z}_1, y_5, y_6, \varepsilon) \\ \dot{y}_5 = -y_6 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + a_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) + R_3(y_1, y_2, z_1, \bar{z}_1, y_5, y_6, \varepsilon) \\ \dot{y}_6 = y_5 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + a_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) + R_4(y_1, y_2, z_1, \bar{z}_1, y_5, y_6, \varepsilon) \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathcal{O}(\varepsilon (|y_1| + |z_1| + |y_5| + |y_6|)^3), \\ R_2 &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2} (|y_1| + |z_1| + |y_5| + |y_6|)^3), \\ R_3, R_4 &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2} (|y_1| + |z_1| + |y_5| + |y_6|)^3) \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} R_1(Y', \varepsilon) - R_1(Y, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon |Y' - Y|), \\ R_2(Y', \varepsilon) - R_2(Y, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2} |Y' - Y|), \\ R_3(Y', \varepsilon) - R_3(Y, \varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2} |Y' - Y|) \end{aligned}$$

onde $Y(\tau) = (y_1(\tau), y_2(\tau), z_1(\tau), \bar{z}_1(\tau), y_5(\tau), y_6(\tau))$.

Escrevendo o sistema em coordenadas $y_1, y_2, z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, y_5, y_6$ temos:

$$Y_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{d\tau} = f_1(Y, \theta_1) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 - r_1^2 - (y_5^2 + y_6^2) + \tilde{R}_1(y_1, y_2, r_1, y_5, y_6, \theta_1, \varepsilon) \\ \tilde{R}_{r_1}(y_1, y_2, r_1, y_5, y_6, \theta_1, \varepsilon) \\ -y_6 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + a_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) + \tilde{R}_3(y_1, y_2, r_1, y_5, y_6, \theta_1, \varepsilon) \\ y_5 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + a_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) + \tilde{R}_4(y_1, y_2, r_1, y_5, y_6, \theta_1, \varepsilon) \end{pmatrix} \\ \frac{d\theta_1}{d\tau} = f_2(Y, \theta_1) = \frac{\alpha}{\varepsilon^{1/2}} + R_{\theta_1}(y_1, y_2, r_1, y_5, y_6, \theta_1, \varepsilon) \end{array} \right. .$$

Aqui, $Y(\tau) = (y_1(\tau), y_2(\tau), r_1(\tau), y_5(\tau), y_6(\tau))$.

Nas novas coordenadas, a reversibilidade R é dada por:

$$R' f_1(Y, \theta_1) = -f_1(R'Y, -\theta_1) \text{ onde } R'(y_1, y_2, r_1, y_5, y_6) = (y_1, -y_2, r_1, y_5, -y_6)$$

e θ_1 é uma função ímpar.

$$\tilde{R}_1 = \mathcal{O}(\varepsilon|Y|),$$

$$\tilde{R}_1(Y', \theta_1, \varepsilon) - \tilde{R}_1(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon|Y' - Y|),$$

$$\tilde{R}_{r_1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y|),$$

$$\tilde{R}_{r_1}(Y', \theta_1, \varepsilon) - \tilde{R}_{r_1}(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y' - Y|),$$

$$\tilde{R}_{3(4)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y|),$$

$$\tilde{R}_{3(4)}(Y', \theta_1, \varepsilon) - \tilde{R}_{3(4)}(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y' - Y|),$$

$$\tilde{R}_{\theta_1} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/2} + \frac{\varepsilon^{3/2}}{r_1}|Y|\right),$$

$$\tilde{R}_{\theta_1}(Y', \theta_1, \varepsilon) - \tilde{R}_{\theta_1}(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{3/2}\left[\frac{1}{r'_1} + \frac{|Y|}{r_1 r'_1}\right]|Y' - Y|\right).$$

Como antes, vamos restringir ao conjunto

$$\mathcal{E}_\eta = \left\{ (Y, \theta_1) / \sup_{t \in \mathbb{R}} \leq M_1, r_1 \geq \frac{\varepsilon^\eta}{2} \right\} \quad \text{com } \eta < \frac{1}{2}.$$

Assim, para $(Y, \theta_1) \in \mathcal{E}_\eta$ temos:

$$R_{\theta_1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}), \quad R_{\theta_1}(Y', \theta_1, \varepsilon) - R_{\theta_1}(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}|Y' - Y|).$$

Reduzindo o estudo ao subsistema f_1 considerando θ_1 como o tempo, obtemos um sistema na forma:

$$\begin{cases} \frac{dY}{d\theta_1} = \mathcal{N}_\varepsilon(Y, \varepsilon) + \bar{\mathcal{R}}(Y, \theta_1, \varepsilon) \\ \frac{d\theta_1}{d\tau} = \frac{\alpha}{\varepsilon^{1/2}} + \mathcal{R}_{\theta_1}(Y, \theta_1, \varepsilon) \end{cases}$$

onde $\mathcal{N}_\varepsilon = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha} \mathcal{N}$, $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 - r_1^2 - (y_5^2 + y_6^2) \\ 0 \\ -y_6 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + b_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) \\ y_5 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + b_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) \end{pmatrix}$ é a forma normal truncada na ordem 2 e $b_2 = a_2 \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)$.

Analisemos agora o sistema:

$$\frac{dY}{d\theta_1} = \mathcal{N}_\varepsilon(Y, \varepsilon) + \bar{\mathcal{R}}(Y, \theta_1, \varepsilon).$$

Por uma reparametrização de θ_1 podemos considerá-lo na forma

$$Y_{\theta_1, \varepsilon} : \frac{dY}{d\theta_1} = \mathcal{N}(Y, \varepsilon) + \mathcal{R}(Y, \theta_1, \varepsilon) \quad (5.21)$$

com

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} r_1(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon|Y|) \\ r_2(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon|Y|) \\ \mathcal{R}_{r_1}(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y|) \\ r_5(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y|) \\ r_6(Y, \theta_1, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}|Y|) \end{pmatrix}.$$

Assim podemos escrever

$$\mathcal{R}(Y, \theta_1, \varepsilon) = \varepsilon \hat{\mathcal{R}}(Y, \theta_1, \varepsilon)$$

e com isso o sistema (5.21) fica na forma:

$$\frac{dY}{d\theta_1} = \mathcal{N}(Y, \varepsilon) + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}(Y, \theta_1, \varepsilon). \quad (5.22)$$

Analisemos agora o sistema truncado

$$\frac{dY}{d\theta_1} = \mathcal{N}(Y, \varepsilon). \quad (5.23)$$

Esse sistema possui como integrais primeiras

$$H_1 = r_1^2, \quad H_2 = y_5^2 + y_6^2, \quad H_3 = \frac{y_2^2}{2} - \int_0^{y_1} (s^2 - H_1 - H_2) ds.$$

Restringindo o estudo ao nível $H_2 = 0$ temos um subsistema em $\mathbb{R}^3$ com as mesmas características do sistema do caso $\mathbb{R}^4$, isto é, para cada $r_1 = k > 0$ existe uma órbita homoclínica R' -métrica $\mathcal{H}_k(\theta_1)$ para o equilíbrio R' -simétrico $Y_k = (k, 0, k, 0, 0)$, onde

$$\mathcal{H}_k(\theta_1) = (y_1(\theta_1), y_2(\theta_1), k, 0, 0)$$

com

$$y_1(\theta_1) = k - \frac{3k}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\theta_1\right)}, \quad y_2(\theta_1) = \frac{3k\sqrt{2k}\tanh\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\theta_1\right)}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2k}}{2}\theta_1\right)}.$$

Para o sistema original (truncado) o equilíbrio Y_k corresponde a uma órbita periódica simétrica, e $\mathcal{H}_k(\theta_1)$ a uma órbita homoclínica simétrica para a órbita periódica correspondente.

Note ainda que a forma normal truncada em $\mathbb{R}^6$ é invariante por

$$S_\alpha^\varphi(y_1, y_2, z_1, y_5, y_6) = (y_1, y_2, z_1 e^{i\varphi}, y_5, y_6)$$

e

$$S_\beta^\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4, z_2) = (y_1, y_2, y_3, y_4, z_2 e^{i\varphi}).$$

Assim, da S_α^φ -equivariância, a existência da órbita $\mathcal{H}_k(t)$ para $Y_k(t)$ implica na existência de outra órbita homoclínica simétrica para $Y_k(t)$, a saber, $S_\alpha^\pi \mathcal{H}_k(t)$.

Logo, cada órbita periódica tem duas órbitas homoclínicas simétricas associadas a ela.

Dado que as órbitas periódicas são persistentes para o sistema geral (Lyapunov-Schmidt) queremos saber se as órbitas homoclínicas acima detectadas também são persistentes.

Consideremos assim o sistema (5.22) e suponha que exista uma órbita de (5.22) da forma

$$Y(\theta_1, \varepsilon) = \mathcal{H}_k(\theta_1) - Y_k + U(\theta_1, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon) \quad (5.24)$$

onde $\hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon)$ é a continuação de Y_k para (5.22) detectada pela redução de Lyapunov-Schmidt.

Como antes, a fim de que (5.24) seja uma solução homoclínica para $\hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon)$, vamos restringir U ao conjunto

$$E_\gamma = \{U = (y_1, y_2, r_1, y_5, y_6) / U \in C^o(\mathbb{R}), U \text{ é } R'\text{-reversível e } \|U\|_\gamma < \infty\}$$

onde

$$\|U\|_\gamma = \sup_{\theta_1 \in \mathbb{R}} (|U(\theta_1, \varepsilon)| e^{\gamma|\theta_1|}) \quad e \quad \gamma = \sqrt{2k} \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

Novamente, E_γ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\gamma$.

Além disso, uma restrição de E_γ como em (5.9) é necessária para garantir que $Y \in \mathcal{E}_\eta$. Chamaremos tal restrição de $E_{\gamma,d}$.

A fim de que $Y(\theta_1, \varepsilon)$ seja uma solução de (5.22), $U(\theta_1, \varepsilon)$ deve ser uma solução do seguinte sistema:

$$\frac{dU}{d\theta_1} - D\mathcal{N}(\mathcal{H}_k(\theta_1, \varepsilon))U = \hat{N}(U(\theta_1, \varepsilon), \theta_1, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(\theta_1, \varepsilon), \theta_1, \varepsilon) \quad (5.25)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{N}(U(\theta_1, \varepsilon), \theta_1, \varepsilon) &= \mathcal{N}\left(\mathcal{H}_k(\theta_1) - Y_k + U(\theta_1, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon)\right) - \mathcal{N}(\mathcal{H}_k(\theta_1)) \\ &\quad - \mathcal{N}\left(\hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon)\right) - D\mathcal{N}(\mathcal{H}_k(\theta_1))U \end{aligned}$$

$$\hat{R}(U(\theta_1), \theta_1, \varepsilon) = \hat{\mathcal{R}}\left(\mathcal{H}_k(\theta_1) - Y_k + U(\theta_1, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon), \theta_1, \varepsilon\right) - \hat{\mathcal{R}}\left(\hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon), \theta_1, \varepsilon\right)$$

Assim como no caso 4-dimensional, existe $M > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \|\hat{N}(U(\theta_1), \theta_1, \varepsilon)\| &\leq M \left(\varepsilon e^{-\sqrt{2k}\theta_1} + \varepsilon |U(\theta_1, \varepsilon)| + |U(\theta_1, \varepsilon)|^2 \right) \\ \|\hat{R}(U(\theta_1, \varepsilon), \theta_1, \varepsilon)\| &\leq M \left(e^{-\sqrt{2k}\theta_1} + |U(\theta_1, \varepsilon)| \right) \\ \|\hat{N}(U', \theta_1, \varepsilon) - \hat{N}(U, \theta_1, \varepsilon)\| &\leq M (\varepsilon + |U(\theta_1, \varepsilon)| + |U'(\theta_1, \varepsilon)|) |(U' - U)(\theta_1, \varepsilon)| \\ \|\hat{R}(U', \theta_1, \varepsilon) - \hat{R}(U, \theta_1, \varepsilon)\| &\leq M |(U - U')(\theta_1, \varepsilon)| \end{aligned} \quad (5.26)$$

Estudemos agora a linearização de (5.25) dada por:

$$\frac{dU}{d\theta_1} = D\mathcal{N}(\mathcal{H}_k(\theta_1), \varepsilon)U. \quad (5.27)$$

Lembre que

$$\mathcal{N}(Y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 - r_1^2 - (y_5^2 + y_6^2) \\ 0 \\ -y_6 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + b_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) \\ y_5 \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + b_2 \varepsilon^{1/2} y_1 \right) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{H}_k(\theta_1) = (y_1(\theta_1), y_2(\theta_1), k, 0, 0).$$

Daí,

$$DN(\mathcal{H}_k(\theta_1), \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 2y_1(\theta_1) & 0 & -2k & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & -\left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + b_2\varepsilon^{1/2}y_1(\theta_1)\right) \\ & & & \left(\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + b_2\varepsilon^{1/2}y_1(\theta_1)\right) & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz $DN(\mathcal{H}_k(\theta_1))$ é da forma bloco diagonal com dois blocos sendo um 3×3 e outro 2×2 . Logo, podemos analisar separadamente cada bloco, para obter uma base de soluções para (5.27).

Quando restringimos ao bloco 3×3 temos uma base de soluções, como no caso 4-dimensional, dada por $\{p(\theta_1), r(\theta_1), q(\theta_1)\}$ onde:

$$p(\theta_1) = \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \theta_1}(\theta_1) = \left(y_2(\theta_1), \frac{\partial y_2}{\partial \theta_1}(\theta_1), 0, 0, 0 \right)$$

que satisfaz:

$$R'p(\theta_1) = -p(-\theta_1), \quad p(\theta_1) = \mathcal{O}\left(e^{-\sqrt{2k}\theta_1}\right) \text{ para } |\theta_1| \rightarrow \infty.$$

$$r(\theta_1) = \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial k}(\theta_1) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial k}(\theta_1), \frac{\partial y_2}{\partial k}(\theta_1), 1, 0, 0 \right)$$

que é limitada e

$$R'r(\theta_1) = r(-\theta_1).$$

$q(\theta)$ segue da R' -reversibilidade do sistema restrito a $\mathbb{R}^3$ e portanto é da forma

$$q(\theta_1) = (q_1(\theta_1), q_2(\theta_1), 0, 0, 0), \quad R'q(\theta_1) = q(-\theta_1)$$

e

$$q(\theta_1) = \mathcal{O}\left(e^{\sqrt{2k}\theta_1}\right) \text{ para } |\theta_1| \rightarrow \infty.$$

Para o bloco 2×2 , como os autovalores dessa matriz são imaginários puros, segue que uma base de soluções é dada por:

$$r_+(\theta_1, \varepsilon) = (0, 0, 0, \cos(h(\theta_1, \varepsilon)), \operatorname{sen}(h(\theta_1, \varepsilon)))$$

e

$$r_-(\theta_1, \varepsilon) = (0, 0, 0, -\operatorname{sen}(h(\theta_1, \varepsilon)), \cos(h(\theta_1, \varepsilon))),$$

onde

$$h(\theta_1, \varepsilon) = \frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} \theta_1 + b_2 \varepsilon^{1/2} \int_0^{\theta_1} y_1(s) ds.$$

Note ainda que r_+ , r_- são limitadas e que

$$R'r_+(\theta_1, \varepsilon) = r_+(-\theta_1, \varepsilon)$$

$$R'r_-(\theta_1, \varepsilon) = -r_-(-\theta_1, \varepsilon).$$

Segue imediatamente das formas de p , r , q , r_+ e r_- que o conjunto

$$\{p(\theta_1), r(\theta_1), q(\theta_1), r_+(\theta_1, \varepsilon), r_-(\theta_1, \varepsilon)\}$$

é linearmente independente e portanto forma uma base de soluções de (5.27).

Como fizemos no caso 4-dimensional, seja $\{p^*(\theta_1), r^*(\theta_1), q^*(\theta_1), r_+^*(\theta_1, \varepsilon), r_-^*(\theta_1, \varepsilon)\}$ a respectiva base adjunta, a qual é uma base de soluções da equação adjunta

$$\frac{dU}{d\theta_1} = -D\mathcal{N}(\mathcal{H}_k(\theta_1), \varepsilon)^T U$$

e tal que:

$$\begin{aligned} p^*(\theta_1) &= \mathcal{O}\left(e^{\sqrt{2k}\theta_1}\right) \text{ quando } |\theta_1| \rightarrow \infty & R'p^*(\theta_1) &= -p^*(-\theta_1) \\ r^*(\theta_1) &\text{ é limitada} & R'r^*(\theta_1) &= r^*(-\theta_1) \\ q^*(\theta_1) &= \mathcal{O}\left(e^{-\sqrt{2k}\theta_1}\right) \text{ quando } |\theta_1| \rightarrow \infty & R'q^*(\theta_1) &= q^*(-\theta_1) \\ r_{\pm}^*(\theta_1, \varepsilon) &\text{ são limitadas} & R'r_{\pm}^*(\theta_1, \varepsilon) &= \pm r_{\pm}^*(-\theta_1, \varepsilon) \end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever a solução de (5.25) na forma:

$$\begin{aligned}
U(\theta_1, \varepsilon) = & \left(a_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), p^*(s) \right\rangle ds \right) p(\theta_1) \\
& + \left(b_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), q^*(s) \right\rangle ds \right) q(\theta_1) \\
& + \left(c_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r^*(s) \right\rangle ds \right) r(\theta_1) \\
& + \left(d_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_+^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds \right) r_+(\theta_1, \varepsilon) \\
& + \left(e_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_-^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds \right) r_-(\theta_1, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Como supomos $U \rightarrow 0$ quando $\theta_1 \rightarrow \infty$ devemos ter:

$$\langle q^*(\theta_1), U(\theta_1, \varepsilon) \rangle = b_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), q^*(s) \right\rangle ds \rightarrow 0 \text{ quando } \theta_1 \rightarrow \infty$$

$$\langle r^*(\theta_1), U(\theta_1, \varepsilon) \rangle = c_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r^*(s) \right\rangle ds \rightarrow 0 \text{ quando } \theta_1 \rightarrow \infty$$

$$\langle r_+^*(\theta_1), U(\theta_1, \varepsilon) \rangle = d_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_+^*(s) \right\rangle ds \rightarrow 0 \text{ quando } \theta_1 \rightarrow \infty$$

$$\langle r_-^*(\theta_1), U(\theta_1, \varepsilon) \rangle = e_o + \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_-^*(s) \right\rangle ds \rightarrow 0 \text{ quando } \theta_1 \rightarrow \infty.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
b_o &= - \int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), q^*(s) \right\rangle ds \\
c_o &= - \int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r^*(s) \right\rangle ds \\
d_o &= - \int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_+^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds \\
e_o &= - \int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_-^*(s) \right\rangle ds.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Ainda, a fim de que U seja R' -reversível devemos ter:

$$0 = R'U(0, \varepsilon) - U(0, \varepsilon) = 2a_0p(0) + 2e_or_-(0, \varepsilon) \quad (5.29)$$

e daí

$$a_o = 0 = e_o.$$

Logo, de (5.28) e (5.29) temos:

$$a_o = 0$$

e

$$\int_0^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_-^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds = 0. \quad (5.30)$$

Desta forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned} U(\theta_1, \varepsilon) = & \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), p^*(s) \right\rangle ds p(\theta_1) \\ & - \int_{\theta_1}^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), q^*(s) \right\rangle ds q(\theta_1) \\ & - \int_{\theta_1}^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r^*(s) \right\rangle ds r(\theta_1) \\ & - \int_{\theta_1}^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_+^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds r_+(\theta_1, \varepsilon) \\ & - \int_{\theta_1}^\infty \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_-^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds r_-(\theta_1, \varepsilon). \end{aligned}$$

Suponha que a condição (5.30) seja satisfeita.

Com isso, para mostrar a existência de uma solução limitada $U(\theta_1, \varepsilon)$ de (5.25) devemos

encontrar um ponto fixo para o funcional

$$\begin{aligned}
 G(U(\theta_1, \varepsilon)) = & \int_0^{\theta_1} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), p^*(s) \right\rangle ds \, p(\theta_1) \\
 & - \int_{\theta_1}^{\infty} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), q^*(s) \right\rangle ds \, q(\theta_1) \\
 & - \int_{\theta_1}^{\infty} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r^*(s) \right\rangle ds \, r(\theta_1) \\
 & - \int_{\theta_1}^{\infty} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_+^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds \, r_+(\theta_1, \varepsilon) \\
 & - \int_{\theta_1}^{\infty} \left\langle \hat{N}(U(s), s, \varepsilon) + \varepsilon \hat{R}(U(s), s, \varepsilon), r_-^*(s, \varepsilon) \right\rangle ds \, r_-(\theta_1, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Isso pode ser feito como no caso 4-dimensional, considerando a função $G(U)$ restrita ao conjunto:

$$E_{\gamma, d} = \left\{ U \in E_{\gamma}; \, \|U\|_{\gamma} \leq d, \, |\Pi_{r_1}(U)| \leq \frac{\varepsilon^{\eta}}{2} \right\}$$

para d suficientemente pequeno.

O objetivo é encontrar tal ponto fixo em $E_{\gamma, d}$.

Note que as estimativas feitas no caso 4-dimensional foram obtidas utilizando os seguintes fatos:

- $p(\theta) = \mathcal{O}(e^{-\sqrt{2k}\theta})$ e $p^*(\theta) = \mathcal{O}(e^{\sqrt{2k}\theta})$;
- $r(\theta)$, $r^*(\theta)$ são limitados;
- $q(\theta) = \mathcal{O}(e^{\sqrt{2k}\theta})$ e $q^*(\theta) = \mathcal{O}(e^{-\sqrt{2k}\theta})$;
- As desigualdades (5.11).

Como todas essas propriedades também são válidas aqui, concluímos que tais estimativas também se aplicam neste caso, isto é,

$$\begin{aligned}
 \|G(U)\|_{\gamma} & \leq M' \left[(\varepsilon + \|U\|_{\gamma}^2) \frac{\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k} - \gamma)\gamma} \right] \\
 \|G(U') - G(U)\|_{\gamma} & \leq M' \left[(\varepsilon + (\|U\|_{\gamma} + \|U'\|_{\gamma})) \frac{\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k} - \gamma)\gamma} \right] \|U - U'\|_{\gamma}.
 \end{aligned}$$

Além disso, segue que $G(U)$ é R' -reversível.

Com isso, obtemos o mesmo resultado que no caso 4-dimensional.

Lembre ainda que podemos considerar ao invés de (5.24) uma solução alternativa dada por

$$Y(\theta_1, \varepsilon) = \mathcal{H}_k(\theta_1) - Y_k + U(\theta_1, \varepsilon) + \hat{Y}_k(\theta_1 + \pi, \varepsilon) \quad (5.31)$$

e, desta forma, obter duas soluções homoclínicas associadas a $\hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon)$.

Assim, podemos estabelecer o seguinte resultado:

Lema Fundamental 2: *Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que se $k \geq k_\varepsilon > 0$ então $\hat{Y}_k(\theta_1, \varepsilon)$ admite duas órbitas homoclínicas simétricas desde que a condição (5.30) seja satisfeita.*

O resultado seguinte, assim como no caso 4-dimensional, segue do lema anterior:

Teorema 5.2. *Existe um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_R(\mathbb{R}^6)$ tal que para cada $X \in \mathcal{U}$ existe um ε -re-escalamento nas variáveis dado por $(y_1, y_2, r_1, \theta_1, y_5, y_6\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ tal que nestas novas coordenadas o campo é expresso por Y_ε e para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente próximo de zero, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que para $k \geq k_\varepsilon$ existem duas soluções homoclínicas simétricas associadas a uma solução periódica simétrica $\hat{Y}_k(t, \varepsilon)$ desde que a condição (5.30) seja satisfeita.*

Como consequência os seguintes corolários seguem:

Corolário 5.3. *Se Y em (5.22) admite $H_2 = y_5^2 + y_6^2$ como integral primeira, então Y satisfaz (5.30) e assim o teorema 5.2 é aplicável.*

Note que o nosso campo vetorial (5.19) quando truncado nos termos de ordem dois, admite outras reversibilidades além da R fixada inicialmente como:

$$S_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (y_1, -y_2, y_3, -y_4, -y_5, y_6)$$

$$S_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (y_1, -y_2, -y_3, y_4, y_5, -y_6)$$

entre outras.

Com isso podemos estabelecer o seguinte:

Corolário 5.4. *Se Y em (5.22) é S'_1 -reversível, onde $S'_1(y_1, y_2, r_1, y_5, y_6) = (y_1, -y_2, r_1, -y_5, y_6)$ então Y satisfaz (5.30) e assim o teorema 5.2 é aplicável.*

Nota: A demonstração dos corolários anteriores segue do fato de que, em ambos os casos, a sub-variedade $\{x_5 = x_6 = 0\}$ é invariante e, desta forma, a condição (5.30) é trivialmente satisfeita.

Finalmente, podemos ver que o mesmo raciocínio feito para as soluções periódicas de período próximo a $\frac{2\pi}{\alpha}$, também se aplica às soluções periódicas de período próximo a $\frac{2\pi}{\beta}$.

CAPÍTULO 6

Persistência de Toros Invariantes

O objetivo deste capítulo é estabelecer, através de resultados provenientes da Teoria KAM, mais especificamente do teorema 1.13, a persistência de famílias de toros T^2 invariantes para famílias de campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$ $X(x, \lambda)$ tal que $X(0, 0) = 0$ é um equilíbrio 0-não-ressonante ou $0 : p : q$ -ressonante com $p + q > 3$. Lembremos que, em ambos os casos, as formas normais de Belitskii de ordem dois coincidem.

Consideremos aqui um campo vetorial

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^6$$

com uma singularidade isolada na origem, onde $A = DX(0)$ tem autovalores satisfazendo as condições de 0-não-ressonância ou $0 : p : q$ -ressonância. Desta forma, temos

$$\text{spec}(A) = \{0^{(2)}, \pm i\alpha, \pm i\beta\}$$

onde $0^{(2)}$ indica que 0 é um autovalor com multiplicidade algébrica 2. Como antes, iremos supor que a respectiva multiplicidade geométrica é 1. Além disso, supomos que X é R -reversível, onde

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5, -x_6)$$

e que X é um campo real analítico. Broer estabeleceu em [4] que isso, de fato, não é uma restrição já que adaptações podem ser feitas para o caso C^∞ ou mesmo C^k com $k < \infty$. A

demonstração inicial fora feita para o caso em que a família X é analítica. No entanto, se X é de classe C^∞ não analítica pode-se considerar na demonstração original uma sequência de campos analíticos convergindo para o campo X e a partir daí aplicar o resultado obtido para campos analíticos. Para mais detalhes ver Apêndice do capítulo 1 em [4].

Como sabemos, é possível obter uma mudança de coordenadas $h = Id + o(2)$, comutando com a involução R , de forma que o campo X é levado por h na forma normal de Belitskii de uma dada ordem m com m arbitrário.

Segue do teorema A e da Proposição 2.7 que, para $m = 2$, a seguinte forma de X é atingida:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1^2 + c_1(x_3^2 + x_4^2) + d_1(x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4(\alpha + a_1 x_1) + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3(\alpha + a_1 x_1) + o(3) \\ \dot{x}_5 = -x_6(\beta + a_2 x_1) + o(3) \\ \dot{x}_6 = x_5(\beta + a_2 x_1) + o(3) \end{cases}$$

A fim de que toros 2-dimensionais sejam possíveis as seguintes condições genéricas serão impostas:

$$H_2 : \{b_1 c_1 < 0, b_1 d_1 < 0\}.$$

Sem perda de generalidade iremos supor $b_1 > 0$, $c_1 < 0$, $d_1 < 0$.

Além disso, inserimos o campo vetorial acima numa família genérica a um-parâmetro de campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$ dada por:

$$\tilde{X}_\lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda + b_1(\lambda)x_1^2 + c_1(\lambda)(x_3^2 + x_4^2) + d_1(\lambda)(x_5^2 + x_6^2) + o(3) \\ \dot{x}_3 = -x_4(\alpha + \lambda + a_1(\lambda)x_1) + o(3) \\ \dot{x}_4 = x_3(\alpha + \lambda + a_1(\lambda)x_1) + o(3) \\ \dot{x}_5 = -x_6(\beta + \lambda + a_2(\lambda)x_1) + o(3) \\ \dot{x}_6 = x_5(\beta + \lambda + a_2(\lambda)x_1) + o(3) \end{cases}, \quad (6.1)$$

onde $\lambda \in (-a, a)$, $0 < a \ll 1$.

Nosso objetivo é estabelecer o seguinte resultado:

Teorema D: *Seja $\tilde{X}_\lambda(x) = \tilde{X}(x, \lambda)$ uma família analítica de campos vetoriais R -reversíveis em $\mathbb{R}^6$ como em (6.1) onde X_o tem um equilíbrio na origem 0-não-ressonante ou 0:p:q-ressonante com $p + q > 3$. Então, numa vizinhança suficientemente próxima da origem, existe um “conjunto de Cantor” $\tilde{X}$ -invariante $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^6 \times P$ difeomorfo por um difeomorfismo C^∞ -próximo a identidade a $\mathbb{T}^2 \times \{0\} \times \Gamma_\gamma \subset \mathbb{R}^6 \times P$. Em cada toro $V_\lambda \times \{\lambda\}$, $\lambda \in \Gamma_\gamma$, uma equivalência topológica de X a $\tilde{X}$ é induzida e tal equivalência Φ preserva a projeção em P e o comportamento linear normal onde X é dado pelo truncamento de (6.1) nos termos de ordem dois.*

Nota: A família de Cantor de toros invariantes persistentes, como no teorema acima, é dada pelo conjunto Γ_γ dos parâmetros associados a frequências internas que satisfazem as condições Diofantinas dadas pelas desigualdades $|\langle \omega, k \rangle| \geq \gamma |k|^{-\tau}$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\mu \in \Gamma_\gamma \Leftrightarrow |\langle \omega(\mu), k \rangle| \geq \gamma |k|^{-\tau}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração do Teorema D: Consideremos inicialmente o campo vetorial (6.1) nas variáveis $(\theta_1, \theta_2, r_1, r_2, x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = M$. Assim podemos escrever:

$$\tilde{X}_\lambda : \begin{cases} \dot{\theta}_1 = (\alpha + \lambda) + a_1(\lambda)x_1 + o(3) \\ \dot{\theta}_2 = (\beta + \lambda) + a_2(\lambda)x_1 + o(3) \\ \dot{r}_1 = o(3) \\ \dot{r}_2 = o(3) \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda + b_1(\lambda)x_1^2 + c_1(\lambda)r_1^2 + d_1(\lambda)r_2^2 + o(3) \end{cases} \quad (6.2)$$

Esta família de campos vetoriais será vista como uma perturbação analítica da família de campos vetoriais dada pelo truncamento nos termos de ordem dois do campo acima, ou seja, do campo polinomial de ordem dois que é dado na forma normal, o qual é escrito na forma:

$$X_\lambda : \begin{cases} \dot{\theta}_1 = (\alpha + \lambda) + a_1(\lambda)x_1 \\ \dot{\theta}_2 = (\beta + \lambda) + a_2(\lambda)x_1 \\ \dot{r}_1 = 0 \\ \dot{r}_2 = 0 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda + b_1(\lambda)x_1^2 + c_1(\lambda)r_1^2 + d_1(\lambda)r_2^2 \end{cases}$$

para $(\theta_1, \theta_2, r_1, r_2, x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, já que (θ_1, θ_2) são dados *mod* 2π .

Note que $\tilde{X}_\lambda$ é um campo próximo a X_λ para x numa vizinhança da origem.

Por simplicidade, considerando a hipótese H_2 , suponha $b_1 = 1$, $c_1 = d_1 = -1$.

A família X_λ possui como integrais primeiras as funções

$$\begin{aligned} H_1 &= r_1^2 \\ H_2 &= r_2^2 \\ H_3 &= \frac{x_2^2}{2} - \int_0^{x_1} (\lambda + s^2 - H_1 - H_2) ds \end{aligned}$$

Fixados $r_1, r_2 > 0$ temos que, para cada equilíbrio do subsistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda + x_1^2 - (r_1^2 + r_2^2) \end{cases} ,$$

temos associado um 2-toro T^2 , invariante pelo fluxo.

Os equilíbrios do sistema acima são dados por:

$$\left(\pm \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \lambda}, 0 \right)$$

desde que $r_1^2 + r_2^2 - \lambda > 0$. Desta forma, temos dois 2-toros invariantes para o nosso campo polinomial de ordem dois.

Analisemos o 2-toro obtido a partir do equilíbrio $\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \lambda}, 0 \right)$.

A fim de que o mesmo seja associado a um equilíbrio na origem, consideremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \lambda} \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Desta forma obtemos um novo sistema dependendo do parâmetro λ como abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \left(\alpha + \lambda + a_1(\lambda)\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \lambda} \right) + a_1(\lambda)y_1 \\ \dot{\theta}_2 = \left(\beta + \lambda + a_2(\lambda)\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \lambda} \right) + a_2(\lambda)y_1 \\ \dot{r}_1 = 0 \\ \dot{r}_2 = 0 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \lambda}y_1 + y_1^2 \end{cases}$$

Nosso objetivo a partir daqui é estabelecer condições para a persistência dos dois toros invariantes detectados no campo acima para o nosso campo geral, o qual não é necessariamente integrável.

Note que o campo não truncado pode ser visto como uma perturbação de um campo vetorial integrável numa vizinhança da origem.

A partir daqui será conveniente considerar o problema localizado. Isso consiste no seguinte: cada par $(r_1, r_2) = (k_1, k_2)$ é visto como um par de parâmetros adicionais, obtendo assim uma família a três parâmetros onde, para cada valor dos parâmetros $(k_1, k_2, \lambda) \in P$, $P = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (-a, a)$ $0 < a \ll 1$, temos associado um 2-toro invariante que corresponde ao equilíbrio na origem do subsistema $(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$.

Note que, neste novo contexto localizado, cada campo vetorial tem associado a ele um único toro 2-dimensional, visto que, para cada conjunto de nível das integrais primeiras H_1 e H_2 , associamos um campo vetorial específico na família $X_{k_1, k_2, \lambda}$.

Formalmente, podemos fazer essa localização tomando

$$r = k + r_{loc} \quad \text{e} \quad X_{loc}(\theta, r_{loc}, y; k, \lambda) := X(\theta, k + r_{loc}, y, \lambda).$$

onde $r = (r_1, r_2)$, $k = (k_1, k_2)$ e $r_{loc} = (r_{1,loc}, r_{2,loc}) \sim (0, 0)$.

Desta forma, obtemos uma família parametrizada de campos vetoriais R -reversíveis. Neste novo contexto, estamos interessados na persistência do toro invariante T_o , correspondendo a $(r_{loc}, y) = (0, 0)$. Em outras palavras, para quais valores dos parâmetros (k_1, k_2, λ) o toro $X_{k_1, k_2, \lambda}$ -invariante é persistente.

Por simplicidade, não escreveremos a partir daqui, o subscrito "loc".

Neste novo contexto podemos escrever nossa família de campos vetoriais na seguinte

forma:

$$X_N(x, k, \lambda) = \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \left(\alpha + \lambda + a_1(\lambda) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} \right) + a_1(\lambda) y_1 \\ \dot{\theta}_2 = \left(\beta + \lambda + a_2(\lambda) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} \right) + a_2(\lambda) y_1 \\ \dot{r}_1 = 0 \\ \dot{r}_2 = 0 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} y_1 + y_1^2 \end{cases} \quad (6.3)$$

$$x = (\theta_1, \theta_2, r_1, r_2, y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Note que a família (6.2) é uma perturbação da família (6.3) agora no contexto localizado.

Nosso objetivo, a partir daqui, é aplicar o teorema 1.13 a fim de estabelecer a persistência do toro T_o para a família (6.2) no contexto localizado.

Para o campo vetorial, como definido em (6.3), a aplicação $\mathcal{F}$ associada dada no teorema 1.13 não é uma submersão. Por isso, a fim de que esta hipótese seja satisfeita, consideremos um parâmetro adicional obtido através de uma reparametrização do tempo, isto é,

$$t = \eta\tau, \quad \eta > 0$$

obtendo, desta forma, o campo

$$\eta X_N(x, k, \lambda) := X_N(x, k, \lambda, \eta).$$

Esta família é topologicamente (orbitalmente) equivalente à família (6.3).

Considera agora, para cada $\epsilon > 0$, o seguinte operador:

$$\begin{aligned} D_\epsilon : M &\rightarrow M \\ (\theta, r, y) &\mapsto D_\epsilon(\theta, r, y) = \left(\theta, \frac{r}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Esse operador comuta com a involução G e portanto preserva a reversibilidade.

Note que, para nosso caso, a involução G é dada por

$$G(\theta, r, x) = (-\theta, r, Sx), \text{ onde } S(x_1, x_2) = (x_1, -x_2).$$

Pela linearidade de D_ϵ temos:

$$\begin{aligned} (D_\epsilon)_* X_N(x, k, \lambda, \eta) &= D_\epsilon(X_N(D_\epsilon^{-1}(\theta, r, y), k, \lambda, \eta)) \\ &= \begin{pmatrix} \eta \left(\alpha + \lambda + a_1(\lambda) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} \right) + \eta a_1(\lambda) \epsilon^2 y_1 \\ \eta \left(\beta + \lambda + a_2(\lambda) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} \right) + \eta a_2(\lambda) \epsilon^2 y_1 \\ 0 \\ 0 \\ \eta y_2 \\ 2\eta \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} y_1 + \epsilon^2 y_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos o seguinte campo vetorial:

$$Y(\theta, r, y) = (\omega(k, \lambda, \eta), 0, \Omega(k, \lambda, \eta)y)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= (\theta_1, \theta_2), \\ \omega(k, \lambda, \eta) &= \eta \left(\alpha + \lambda + a_1(\lambda) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda}, \beta + \lambda + a_2(\lambda) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} \right) \end{aligned}$$

e

$$\Omega(k, \lambda, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 2\eta \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

Agora note que

$$\text{spec}(\Omega(k, \lambda, \eta)) = \left\{ \pm \sqrt{2}\eta (k_1^2 + k_2^2 - \lambda)^{1/4} \right\}$$

que é formado por autovalores simples para todo $\eta > 0$, $(k_1, k_2) \in (0, \epsilon_1)^2$ e $\lambda \sim 0$. (lembre-se que consideramos parâmetros tais que $k_1^2 + k_2^2 - \lambda > 0$.)

Além disso, a aplicação

$$\mathcal{F} : P_{loc} \times P \times (0, \epsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

dada por

$$\mathcal{F}(k, \lambda, \eta) = \left(\omega(k, \lambda, \eta), \sqrt{2}\eta(k_1^2 + k_2^2 - \lambda)^{1/4} \right)$$

é tal que $D\mathcal{F}(k, \lambda, \eta)$ tem, genericamente, posto 3 sendo assim uma submersão.

Portanto, pelo teorema 1.13, podemos encontrar uma vizinhança $\mathcal{U}$ de Y onde todo campo vetorial $\tilde{Y} \in \mathcal{U}$ é conjugado a Y no conjunto $T_o \times \Gamma_\gamma$, ou seja, a família de toros $T_o \times \Gamma_\gamma$ persiste numa vizinhança de Y .

Para obter o resultado para o campo vetorial $X_N(x, k, \lambda, \eta)$ tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $(D_\epsilon)_* X_N \in \mathcal{U}$. Seja $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ uma vizinhança aberta de $(D_\epsilon)_* X_N$. Então podemos encontrar uma conjugação no conjunto $T_o \times \Gamma_\gamma$ entre $(D_\epsilon)_* X_N$ e todos os campos vetoriais em $\mathcal{U}'$.

Aplicando o “pull-back” $(D_\epsilon)^*$ a $\mathcal{U}'$ concluímos que todos os campos vetoriais na vizinhança $\mathcal{U}'_\epsilon = (D_\epsilon)^*(\mathcal{U}')$ de $X_N(x, k, \lambda, \eta)$ são conjugados quando restritos ao conjunto de Cantor de toros X_N -invariantes $T_o \times \Gamma_\gamma$.

Como a família $X_N(x, k, \lambda)$ é equivalente a $X_N(x, k, \lambda, \eta)$ segue que o mesmo é válido para $X_N(x, k, \lambda)$ por equivalência topológica.

■

Apêndice 1

Nesta seção apresentaremos alguns problemas onde pretendemos trabalhar, com o objetivo de estender e melhorar alguns resultados obtidos nesta tese.

Seja

$$\dot{x} = X(x)$$

um campo vetorial C^∞ em $\mathbb{R}^6$ com um equilíbrio na origem. Denotemos o conjunto de tais campos por $\Phi_o(\mathbb{R}^6)$.

Suponha que existam duas involuções lineares R_1 e R_2 em $\mathbb{R}^6$ tais que X é R_i -reversível para $i = 1, 2$ e $\dim \text{Fix}(R_1) = 3$.

Então, como vimos anteriormente, segue que X é S -equivariante, onde $S = R_1 \circ R_2$.

Neste caso diremos que X é um campo *reversível-equivariante*.

Suponha ainda que R_1 e R_2 estão em posição genérica em $\mathbb{R}^6$ no sentido de que $\text{Fix}(R_1)$ e $\text{Fix}(R_2)$ são transversais em $\mathbb{R}^6$.

Nosso objetivo aqui é estender, para campos vetoriais reversíveis-equivariantes mais gerais o resultado obtido no corolário 5.4, isto é, estabelecer a persistência de soluções homoclínicas para famílias de soluções periódicas que convergem para um equilíbrio (fixado, sem perda de generalidade, na origem).

A presença de simetrias adicionais é importante pelo fato de que, com isso, é possível encontrar variedades invariantes de dimensão menor que 6.

De fato, para sistemas S -equivariantes a variedade $\text{Fix}(S)$ resulta ser X -invariante.

Com essa redução de dimensão, condições de transversalidade que eventualmente não ocorrem quando consideramos o campo em $\mathbb{R}^6$, podem ser possíveis quando restringimos o

campo à variedade invariantes $Fix(S)$.

Note que quando consideramos o problema da persistência de soluções homoclínicas para o caso 4-dimensional tínhamos por um lado,

$$\dim Fix(R) = 2$$

e, por outro lado, as variedades estáveis das soluções periódicas eram dois dimensionais e, que em $\mathbb{R}^4$ estão em posição genérica. Daí fora possível obter o resultado sem restrições adicionais.

Por outro lado, o caso $\mathbb{R}^6$ estudado satisfaz as seguintes propriedades:

$$\dim Fix(R) = 3$$

e

$$\dim W^s(\gamma_k(t)) = 2$$

onde $\gamma_k(t)$ é a família a um-parâmetro de soluções periódicas para o campo truncado.

Desta forma, não podemos ter transversalidade em $\mathbb{R}^6$ entre $Fix(R)$ e $W^s(\gamma_k(t))$ neste caso.

No entanto, quando consideramos a reversibilidade adicional, tal transversalidade ocorre quando restrito a $Fix(S)$.

Dentro deste mesmo mundo (reversível-equivariante) pretendemos encontrar formas normais a fim de aplicar a redução de Lyapunov-Schmidt para obter famílias de soluções periódicas R_i -simétricas.

Um artigo que trata de campos reversíveis-equivariantes como descritos acima é a referência [6].

Ainda no mundo reversível-equivariante temos interesse no seguinte problema:

Suponha que um elemento $X_o \in \Phi_o(\mathbb{R}^{2n})$ satisfaça:

- (i) $X(0) = 0$ e os autovalores de $DX(0)$ são $\lambda_1 = 0$ (duplo), $\lambda_2 = \pm ip$, $\lambda_3 = \pm iq$, $\lambda_4 = \pm i\alpha_4, \dots, \lambda_n = \pm i\alpha_n$.
- (ii) no par $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ é permitido ocorrer a única ressonância sobre o conjunto $\Lambda = \{\lambda_j, j = 1, \dots, n\}$.
- (iii) X é um campo vetorial reversível e equivariante segundo involuções lineares R_1 e R_2 , onde R_1 e R_2 estão em posição genérica.

(iv) Caso $n = 3$, isto é, campos vetoriais em $\mathbb{R}^6$: seja $\varepsilon = 0$ ou 1 .

Consideraremos dois casos distintos: onde a matriz $DX_o(0)$ tem as seguintes formas:

$$DX_o(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & \varepsilon & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & \varepsilon \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Neste caso, para $\varepsilon \neq 0$ os autovalores $\pm i$ têm multiplicidade geométrica 1 e para $\varepsilon = 0$ multiplicidade geométrica 2.

(v) Considere $\Phi_{\lambda,\mu}$ o espaço das famílias $X_{\lambda,\mu}$ a dois-parâmetros de campos vetoriais equivariantes e reversíveis tais que $X_{0,0} \in \Phi_o$ e tal que

$$X_{\lambda,\mu}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = X_{0,0}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) + (0, \lambda, \mu y_1, \mu y_2, 0, 0) + o(n_o)$$

com λ, μ próximos de 0 e $n_o > 1$.

As seguintes questões serão objeto de estudo:

1. Encontrar a forma normal (formal) de Belistkii $\tilde{X}$ para os elementos $X \in \Phi_o$. Estudar as propriedades que possui um elemento expresso pela forma normal acima determinada. Esperamos encontrar então condições para a existência de famílias de órbitas periódicas, toros invariantes e órbitas homoclínicas convergindo para a origem para tais $\tilde{X}$.
2. Verificar quais destas propriedades (acima citadas) persistem quando o sistema original X é considerado.
3. Estudar as propriedades do campo bifurcado $X_{\lambda,\mu}$.

Um outro ponto de nosso interesse é estender os resultados estabelecidos no capítulo 5 para campos em $\mathbb{R}^6$ com equilíbrios na origem it 0:1:2-ressonantes e it 0:1:1-ressonantes. Note que, para esses campos, a forma normal truncada não é integrável. Daí, um estudo mais cuidadoso dessa forma normal se faz necessário a fim de detectar famílias de soluções homoclínicas para a forma normal.

Uma outra linha de estudos do nosso interesse refere-se à existência de famílias de 3-toros invariantes para famílias de campos vetoriais reversíveis como os abordados no capítulo 6 desta tese.

É possível mostrar que tais famílias de toros invariantes existem quando consideramos a família truncada. No entanto, quando escrevemos essa família na forma (6.2), agora nas coordenadas $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$, sua expressão é dada por funções que dependem das variáveis θ_i , $i = 1, 2, 3$. Neste caso o teorema 1.13 não pode ser aplicado.

Assim, nosso objetivo é encontrar um sistema de coordenadas tal que o campo possa ser escrito de forma a independe das variáveis θ_i (Forma Floquet).

O mesmo argumento é válido para as famílias em $\mathbb{R}^4$ com respeito a existência de 2-toros.

Apêndice 2

Nesta seção apresentamos o algoritmo utilizado para obter as formas normais dadas nos Teoremas 2.9 e 2.10 do capítulo 2.

```
> restart;with(Groebner):with(linalg):
```

Entre com a matriz:

```
> Nbre:=6:A:=matrix([[0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,-1,1,0],[0,0,1,0,0,1],  
[0,0,0,0,0,-1],[0,0,0,0,1,0]]);
```

ou

```
> Nbre:=6:A:=matrix([[0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,-1,0,0],[0,0,1,0,0,0],  
[0,0,0,0,0,-1],[0,0,0,0,1,0]]);
```

A função `degreFormelMon` computa o grau de um monômio $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_6^{k_6}$, isto é, $[k_1, k_2, \dots, k_6]$ Os k_i 's são inteiros formais.

```
> capturerMonomes:=proc(Polynome)  
  local ZEROMONO, ListeMon;  
  ListeMon:=remove(x->(x=ZEROMONO),[op(Polynome+ZEROMONO)]);
```

```
ListeMon;
end:
```

```
> degreFormelMon:=proc(m)
  local mm;
  mm:=combine(m,power);
  [seq(logFormel(mm,var),var=[seq(x[i],i=1..Nbre)])];
end:
```

```
> logFormel:=proc(Monome,Var)
  if diff(Monome,Var) = 0 then 0 else
simplify(eval(diff(Monome,Var)/Monome,[seq(x[i]=1,i=1..Nbre)])) fi;
end:
```

```
> degreFormelPol:=proc(Polynome)
  [seq(degreFormelMon(m),m=capturerMonomes(Polynome))];
end:
```

```
> coeffFormelsNuls:=proc(Polynome)
? on calcule les coeffs en évaluant à 1 chaque variable.
  local mm,m,cm,SetCoeffNul;
  if Polynome=0 then RETURN() fi;
  SetCoeffNul:=;
  for m in capturerMonomes(Polynome) do
    cm:=eval(m,[seq(x[i]=1,i=1..Nbre)]);
    SetCoeffNul:=cm,op(SetCoeffNul);
  od;
  seq(cm=0,cm=SetCoeffNul);
end:
```

```

> TesterMonomeR:=proc(H,A)
  local Hv,AH,X,AX,DH,DHAX,DIF,Residu;
  Hv:=transpose(matrix([[op(H)]]));
  AH:=multiply(transpose(A),Hv);
  X:=transpose(matrix([[seq(x[i],i=1..Nbre)]]));
  AX:=multiply(transpose(A),X);
  DH:=jacobian(H,[seq(x[i],i=1..Nbre)]);
  DHAX:=multiply(DH,AX);
  DIF:=evalm(AH-DHAX);
  map(x->simplify(expand(x,power)),[seq(DIF[i,1],i=1..Nbre)]);
end:

> construitMonomeScalaire:=proc(Coefficient,Indice,LettreExpo)
  local i,a,k;
  a:=Coefficient;i:=Indice;k:=LettreExpo;
  foldl('*, a, op([seq(x[j]k[i,j],j=1..Nbre)]));
end:

> VectMonoGene:=[seq(construitMonomeScalaire(a[i],i,k),i=1..Nbre)];

> VecPolCond:=(TesterMonomeR(VectMonoGene,A)):

> homog:=proc(Nbre,d)
  local liste;
  liste:=[op(expand((foldl('+',0,seq(x[j],j=1..Nbre)))d))];
  liste:=[seq(simplify(i/eval(i,[seq(x[j]=1,j=1..Nbre)])),i=liste)];end;

```

```

> kroneck:=proc(i,j)
  if i=j then RETURN(1) else RETURN(0) fi; end:

> h:=homog(6,2);

> TousLesMon:=[seq(seq([seq(expand(kroneck(i,j)*m),j=1..6)],m=h),i=1..6)];

> TesterMonomeR:=proc(H,A)
  local Hv,AH,X,AX,DH,DHAX,DIF,Residu;
  Hv:=transpose(matrix([[op(H)]]));
  AH:=multiply(transpose(A),Hv);
  X:=transpose(matrix([[seq(x[i],i=1..Nbre)]]));
  AX:=multiply(transpose(A),X);
  DH:=jacobian(H,[seq(x[i],i=1..Nbre)]);
  DHAX:=multiply(DH,AX);
  DIF:=evalm(AH-DHAX);
  map(x->simplify(expand(x,power)),[seq(DIF[i,1],i=1..Nbre)]);
end:

> CombLin:=[seq(foldl('+',0,seq(a[i,op(j)]*op(j,homog(Nbre,2)),
  j=1..nops(homog(Nbre,2)))),i=1..Nbre)];

> TM:=TesterMonomeR(CombLin,A);

> SysLinFinal:=remove(x->x=0,[seq(coeffs(TM[j],[seq(x[i],i=1..Nbre)]),j=1..Nbre)]);

```

```
> RelationsCoeffsFN2:=solve(op(SysLinFinal),indets(SysLinFinal));
```

o 2-jato da forma normal tem a forma:

```
> FormeNormale2:=eval(CombLin,RelationsCoeffsFN2);
```

```
> TesterMonomeR(FormeNormale2,A); ? verification
```

na seqüência a forma normal é reescrita, reenumerando os coeficientes.

```
> Symboles:=[op(seq(op(indets(FormeNormale2[i])),i=1..Nbre))]:
```

```
> for i from 1 to Nbre do Symboles:=remove(t- >t=x[i],Symboles) od:
```

```
> ForNorRed2:=eval(FormeNormale2,[seq(Symboles[i]=c[i],i=1..nops(Symboles)),
    seq(x[i]=X[i],i=1..Nbre)]):
```

```
> multiply(A,matrix([seq([X[i]],i=1..Nbre)]))+
    matrix([seq([collect (ForNorRed2[i],[seq(X[v],v=1..Nbre)],distributed)],
    i=1..Nbre)]);
```

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bochner, S. *Compact Groups of Differentiable Transformations*. Ann. of Math (2) **46** 372-381 (1945).
- [2] Brézis, H. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, 1987.
- [3] Broer, H.W. and Huiteima, G.B. *Unfolding of Quasi-periodic Tori in Reversible Systems*. Journal of Dyn. and Diff. Equations. **Vol 7** n°1 (1995), 191-212.
- [4] Broer, H.W., Huiteima, G.B., Takens, F. and Braaksma, B.L.J. *Unfoldings and bifurcations of Quasi-periodic Tori*. Memoirs of Am. Math. Soc. **Vol 83** n°421 (1990).
- [5] Buzzi, C., Teixeira, M.A. and Yang, J. *Hopf-zero Bifurcations of Reversible Vector Fields*. Nonlinearity. **14** 623-638 (2001).
- [6] Buzzi, C. and Lamb, J. *Reversible equivariant Hopf bifurcation*. Arch. Rat. Mech. Anal. **175** 39-84 (2005).
- [7] Ciocci, M.C. *Bifurcations of periodic orbits and persistence of quasi periodic orbits in families of reversible systems*. Phd Thesis. Univ. Gent. (2003).
- [8] Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Vol 1. Applied Mathematical Sciences 51. Springer-Verlag. 1984.
- [9] Hale, J. *Ordinary Differential Equations*. New York, Wilay-Interscience. 1969.

- [10] Rodrigues, H.R. *Introdução ao Método Alternativo e Aplicações*. Notas Didáticas do ICMC-USP. Jul./1997
- [11] Iooss, G. and Kirchgässner, K. *Water Waves for Small Surface Tension: an approach via normal form*. Proc. Royal Soc. Edinburg, **112 A**, (1992), 267-299.
- [12] Iooss, G. and Pérouème, M.C. *Perturbed Homoclinic Solutions in Reversible 1:1 Resonance Vector Fields*. Journal of Differential Equations. **102**, (1993) 62-88.
- [13] Iooss, G. and Adelmeyer, M. *Topics in Bifurcation Theory and Applications*. Adv. Non-linear Dynamics **3**, World Scientific, Singapore. 1992.
- [14] Knobloch, J. and Vanderbauwhede, A. *A General Reduction Method for Periodic Solutions in Conservative and Reversible Systems*. J. Dyn. Diff. Equations, **8** n° 1, (1996), 71-102.
- [15] Lamb, J. and Roberts J. *Time-reversal Symmetry in Dynamical Systems: A survey*. Physica D **Vol 122**, (1998) 1-39.
- [16] Lamb, J. *Reversing symmetries in dynamical systems*. Phd Thesis, University of Amsterdam, (1994).
- [17] Lamb, J., Teixeira, M.A. and Yang, J. *On the equivalence of reversible and hamiltonian normal forms for elliptic equilibria of reversible vector fields in R^4* . In preparation.
- [18] Lombardi, E. *Homoclinic Orbits to Small Periodic Orbits for a Class of Reversible Systems*. Proc. Roy. Soc. of Edimburgh. **126A**, (1996) 1035-1054.
- [19] Lombardi, E. *Oscillatory Integrals and Phenomena Beyond all Algebraic Orders*. Lec. Notes in Math. 1741. (2000).
- [20] Palis, J. and Melo, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Projeto Euclides. 1978.
- [21] Roberts, J.A.G. and Quispel, G.R.W. *Chaos and Time-reversal Symmetry: order and Chaos in Reversible Dynamical Systems*. Phys. Rep. **Vol 216**, 63 (1992).
- [22] Schmidt, D.S. *Hopf's Bifurcation Theorem and the Center Theorem of Liapunov with Resonance Cases*. J. Math. Anal. and Applications, **63**, (1978), 354-370.

- [23] Shi, C.W. *Bifurcations of Symmetric Periodic Orbits near Equilibrium in Reversible Systems*. Int. J. Bifurcation and Chaos. **7**, (1997) 569-584.
- [24] Teixeira, M.A. and Yang, J. *The Center-Focus Problem and Reversibility*. Journal of Differential Equations. **174**, 237-251 (2001).
- [25] Wagenknecht, T. *An Analytical Study of a two degrees of Freedom Hamiltonian System associated the Reversible Hyperbolic Umbilic*. Thesis, University Ilmenau, Germany.

ÍNDICE REMISSIVO

- 0-não-ressonante, 14
- 0:p:q-ressonante, 18
- Alternativa de Fredholm, 34
- anti-simetria, 2
- base adjunta, 72
- bifurcação
 - de Hopf subcrítica, 41
 - de Hopf supercrítica, 47
- bifurcação de Hopf subcrítica, viii
- campo de vetores, 1
- condições genéricas, 31, 97
- conjunto de Cantor, 9
- contração, 80
- desdobramentos, 28
- difeomorfismo involutivo, 1, 11
- dinâmica paralela, 6
- equação adjunta, 34, 72
- equivalência topológica, 98
- equivariante, 1
- espaço de Banach, 32
- família genérica, 28
- forma normal
 - de Belitskii, 15
 - formal, 14
 - truncada, 86
- freqüência, 7
- integrais primeiras, 25
- linearização, 88
- matriz
 - bloco diagonal, 89
 - fundamental, 70
- nível, 87
- núcleo do operador, 33
- não ressonantes, 14
- operador homológico, 15
- órbita, 4
 - homoclínica, 5
 - simétrica, 4
- p:q ressonância, 18
- parte homogênea, 11

- polinômio de Taylor, 11
- instável, 5
- ponto
 - de equilíbrio simétrico, 4
 - fixo, 75
 - homoclínico, 5
- produto interno, 32
- projeção, 68, 70
- projeções, 34
- redução de Lyapunov-Schmidt, 29
- reversível, 1
- rotacionalmente equivariantes, 36
- S_α^φ -equivariância, 87
- s_φ -equivariância, 46
- simetria, 1
- sistema
 - auxiliar, 66
 - integrável, 25
 - truncado, 86
- Teorema
 - da Forma Normal, 12
 - das Funções Implícitas, 32
 - do Ponto Fixo de Banach, 80
- teoria KAM, 9
- topologia
 - compacto-aberta, 8
 - real analítica, 8
- toro
 - Diofantino, 8
 - quasi-periódico, 7
- variedade
 - estável, 5