Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Identidades Polinomiais para a Álgebra das Matrizes de Ordem dois sobre Corpos de Característica Zero

por

José Antônio Oliveira de Freitas †

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Plamen Kochloukov

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Identidades Polinomiais para a Álgebra das Matrizes de Ordem dois sobre Corpos de Característica Zero

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **José Antônio Oliveira de Freitas** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de Fevereiro de 2006.

Prof. Dr. Plamen Kochloukov

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexei Nikolaevich Krassilnikov.

Prof. Dr. Ivan Chestakov.

Prof. Dr. Plamen Kochloukov.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA UNICAMP
Bibliotecário: Helena Joana Flipsen – CRB-8ª / 5283

	Freitas, José Antônio Oliveira de.
F884i	Identidades polinomiais para a álgebra das matrizes de ordem dois sobre corpos de característica zero / José Antônio Oliveira de Freitas. – Campinas, SP : [s.n.], 2006.
	Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação.
	1. Álgebra. 2. Polinômios. 3. Representações de grupo.

Tradução do título em inglês: Polynomial identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic zero.

Palavras-chave em inglês (Keywords): Algebra, Polynomials, Representation of groups.

Área de concentração: Matemática.

Titulação: Mestre em Matemática.

Banca examinadora: Plamen Emilov Kochloukov, Alexei Nikolaevich Krassilnikov, Ivan Chestakov.

Data da defesa: 20-02-2006.

Dissertação de Mestrado defendida em 20 de fevereiro de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

P Kochloukov

____

Prof. (a). Dr (a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

____

Prof. (a). Dr (a). IVAN CHESTAKOV

____

Prof. (a). Dr (a). ALEXEI NIKOLAEVICH KRASSILNIKOV

Aos meus pais Manoel e
Maria do Carmo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado esta oportunidade e me guiado nesta dissertação. Sem Ele nada disso teria sentido.

A meus pais Maria do Carmo e Manoel. Meus irmãos Leandro, Giovane, João Paulo e Marcos Vinícius que sempre me incentivaram e apoiaram nesta caminhada.

Aos meus amigos Aline, Ana Cristina, Anderson, Antônio Brandão, Ariosvaldo, Bruno, Carlinhos, Eduardo, Elder, Gláucia, Ísis, José Barros e Gina, sua esposa, Lien, Maurício, Marcelo, Marcelo Mineirinho e sua esposa, Rogério Casagrande, Rogério, Sérgio e sua esposa Maura, Vinícius, Weber, aos colegas de curso tanto do IMECC/UNICAMP quanto da UFV, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória. E aos amigos que permanecem em minha cidade, Viçosa, e outros que há muito não vejo.

Aos professores do IMECC-UNICAMP e da UFV. Em especial meu orientador, Plamen Kochloukov, pela paciência, dedicação, orientação excelente e por toda ajuda que me concedeu com o seu imenso conhecimento matemático. E também em especial à professora Marinês Guerreiro que me proporcionou estudar Representações de grupos ainda na graduação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro indispensável.

Muito obrigado.

Resumo

Esta dissertação introduz as primeiras noções para o estudo da teoria de álgebras que satisfazem identidades polinomiais (chamadas *PI - álgebras*), bem como alguns resultados importantes.

Expomos alguns fatos e resultados fundamentais sobre representações dos grupos simétricos e geral linear. Estes resultados serão posteriormente utilizados para estudar as identidades polinomiais da álgebra das matrizes de ordem dois sobre um corpo de característica 0.

Apresentamos os métodos desenvolvidos por Razmyslov, que permitem descrever uma base para as identidades da álgebra associativa das matrizes 2×2, bem como para a álgebra de Lie das matrizes 2×2 de traço zero. Em seguida expomos o trabalho de Drensky, no qual é utilizado teoria de representações para obter uma base minimal para esta álgebra importante.

Abstract

This work introduces the first notions for the study of the theory of algebras that satisfy polynomial identities (so called PI-algebras), as well as some important results.

We discuss the fundamental facts and results about representations of the symmetric and the general linear groups. These results are used later on to study the polynomial identities of the 2×2 matrix algebra over a field of characteristic 0.

We present the methods developed by Razmyslov in order to describe a basis for the identities for the associative algebra of the 2×2 matrices as well as for the Lie algebra of the 2×2 traceless matrices. Furthermore we expose the work of Drensky where he applies the representation theory for obtaining a minimal basis for this important algebra.

SUMÁRIO

Introdução

As álgebras com identidades polinomiais são álgebras para as quais existe um polinômio não nulo, em variáveis não necessariamente comutativas, que se anula sobre tal álgebra. Tais álgebras também são chamadas de *PI-álgebras*. Exemplos de *PI-álgebras* são as álgebras de matrizes sobre anéis, bem como as álgebras comutativas e álgebras de dimensão finita. O objetivo de estudar *PI-álgebras* é tentar entender como a existência de identidades polinomiais influência na compreensão da estrutura das álgebras que as satisfazem.

O desenvolvimento da Teoria de Identidades Polinomiais se deu em torno dos anos 1950, quando foi publicado o Teorema de Amitsur-Levitzki, mostrando que a álgebra das matrizes de ordem n satisfaz a identidade "standard", de grau $2n$. Na mesma época, Specht apresentou a questão: "Toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais?". Esta pergunta ficou conhecida como o Problema de Specht e motivou uma boa parte do desenvolvimento desta teoria. O Problema de Specht foi respondido afirmativamente em 1987 por Kemer.

Nesta dissertação apresentamos um estudo das identidades polinomiais da álgebra das matrizes de ordem dois sobre corpos de característica zero. Para este estudo utilizamos o método de representações de grupos. A origem deste método pode ser encontrada nos artigos de Malcev [24] e Specht [31], em 1950, onde eles aplicam pela primeira vez representações do grupo simétrico para estudar PI - álgebras. Outras contribuições ao método foram desenvolvidas em uma série de artigos de Regev, como por exemplo, em [27], utilizando a linguagem de representações do grupo simétrico, nos anos 70. Regev também utilizou outras técnicas como métodos assintóticos e combinatórios que hoje são considerados como uma parte do método da teoria de representações. Posteriormente, Berele [3] e Drensky [7], nos anos 80, começaram a utilizar representações do grupo geral linear que apareceram inicialmente em alguns artigos de Razmyslov, Procesi e outros. Aplicamos estes métodos para estudar as identidades de $M_2(K)$.

Para estudarmos as identidades de $M_2(K)$ utilizamos a abordagem feita por Razmyslov em [26]. Tal abordagem consiste em estudar primeiro as identidades que são válidas somente em $sl_2(K)$. Tais identidades que se verificam numa subálgebra de Lie G de uma álgebra associativa R são chamadas *identidades fracas* ou *identidades polinomiais de representações de álgebras de Lie* e são muito úteis no estudo de identidades em álgebras não associativas relacionadas com as associativas como, por exemplo, álgebras de Lie, Jordan, alternativas, etc. Este modo de abordar o problema apareceu pela primeira vez nos trabalhos de Razmyslov. Sendo assim olhamos primeiro para o problema de encontrar um conjunto de geradores para as identidades polinomiais da álgebra de Lie $sl_2(K)$.

Quanto ao texto, ele está dividido em cinco capítulos, onde expomos os resultados dos artigos [6] e [26] que originaram esta dissertação. Os capítulos estão organizados da seguinte forma:

O primeiro é um capítulo preliminar, onde apresentamos alguns dos nossos principais objetos de estudo e resultados clássicos da Teoria de Identidades Polinomiais. Este capítulo contém além disso, algumas definições básicas, bem como alguns resultados sobre representações de grupos, que serão úteis nos capítulos seguintes.

O segundo capítulo começa apresentando alguns resultados sobre representações do grupo simétrico. Tais resultados, serão a seguir utilizados para estudar certos tipos de identidades da álgebra das matrizes de traço zero, $sl_2(K)$, sobre o corpo K de característica zero. Em seguida apresentamos alguns fatos sobre representações do grupo geral linear. Como no caso de representações do grupo simétrico, utilizamos as representações do grupo geral linear para estudar um certo espaço de identidades polinomiais, mas neste caso, estudamos as identidades de $M_2(K)$, a álgebra das matrizes 2×2 sobre o corpo K.

O terceiro capítulo contém um estudo das identidades que se verificam na álgebra $sl_2(K)$.

Obtemos aqui, uma base para as identidades de $sl_2(K)$ formada por duas identidades de grau 5. Neste capítulo fazemos uso da teoria de representações de S_n apresentada no capítulo anterior.

Já no quarto capítulo encontramos um conjunto finito de identidades que geram as identidades de $M_2(K)$. Tal conjunto é obtido utilizando as identidades encontradas no capítulo anterior para $sl_2(K)$ e mais algumas identidades que são obtidas neste capítulo. Tal conjunto de geradores conterá 7 elementos que possuirão grau 4, 5 e 6.

Finalmente no quinto capítulo, apresentamos o artigo de Drensky, [6], no qual é obtido um conjunto mínimo de geradores. Tal conjunto será formado por duas identidades, que são conhecidas como identidade "standard"e identidade de Hall, sendo que são de grau 4 e 5, respectivamente. Para provar que tais polinômios geram todas a identidades de $M_2(K)$, fazemos uso da teoria de representação do grupo geral linear, exposta no Capítulo 2. O interessante a notar é que não fazemos uso da forma concreta das identidades na base encontrada por Razmyslov.

CAPÍTULO 1

Conceitos Preliminares

Apresentamos neste capítulo alguns conceitos e propriedades básicas para o entendimento desta dissertação. Definimos nosso objeto de estudo que são as PI - álgebras e apresentamos uma série de resultados de grande utilidade no estudo das identidades polinomiais. Expomos também alguns fatos sobre as álgebras de Lie, dentre os quais podemos citar os teoremas de Poincaré-Birkhoff-Witt, Witt, Shirshov, etc., além de alguns resultados gerais sobre representações de grupos. Para uma visão mais aprofundada veja [2], [5], [9], [14], [22].

1.1 Conceitos Básicos

As principais referências desta seção são: [5], [9], [14].

Definição 1.1.1. Uma função bijetora do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ em si próprio é chamada uma *permutação* de n símbolos. O conjunto de todas as permutações de n símbolos juntamente com a operação de composição de funções é um grupo multiplicativo. Tal grupo é chamado o *grupo simétrico* em n símbolos e será denotado por S_n. Os elementos de S_n são chamados de *permutações*.

Observação 1.1.2. Note que S_n possui exatamente $n!$ elementos.

Definição 1.1.3. Uma permutação $\pi \in S_n$ será escrita na forma de um diagrama no qual a primeira linha contém os símbolos 1, ..., n e a segunda suas imagens através de π, por exemplo,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Definição 1.1.4. Uma permutação da forma

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \\ i_2 & i_3 & \dots & i_r & i_1 & i_{r+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

é chamada *cíclica* ou *r-ciclo*, onde r é o número de símbolos que são movidos por esta permutação. Escreveremos neste caso $(i_1 \dots i_r)$.

Definição 1.1.5. Dois ciclos são *disjuntos* se os conjuntos de símbolos movidos por cada um são disjuntos.

Lema 1.1.6. *Toda permutação pode ser escrita como um produto de ciclos disjuntos.*

Definição 1.1.7. Ordenando os comprimentos α_1, ..., α_h, $\alpha_j \geqslant \alpha_{j+1}$ dos fatores cíclicos de uma permutação $\pi \in S_n$, com respeito à notação cíclica de π e incluindo os ciclos de comprimento 1, formamos uma *partição* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de n, isto é,

$$\sum_i \alpha_i = n, \quad \alpha_i \in \mathbb{N},\ \alpha_j \geqslant \alpha_{j+1}\ (1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Teorema 1.1.8. *As classes de conjugação de S_n consistem das permutações correspondentes à mesma partição.*

Definição 1.1.9. Um conjunto não vazio R é chamado um *anel associativo* se em R estão definidas duas operações binárias, denotadas por $+$ e $\cdot$ tais que para todo $a,\ b,\ c\ \in R$:

(1) $a + b = b + a$.

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(3) Existe um elemento $0 \in R$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in R$.

(4) Para cada $a \in R$, existe um elemento $-a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$.

(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Se existe um elemento $1 \in R$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, dizemos que R é um *anel com unidade*. Além disso, se $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a,\ b \in R$ então chamamos R de *anel comutativo*.

Definição 1.1.10. Um espaço vetorial A sobre o corpo K é chamado uma *álgebra*, ou K-álgebra, se está definida uma operação binária $\cdot : A \times A \to A$, chamada *multiplicação* que satisfaz, para quaisquer $a,\ b,\ c \in A$ e $\alpha \in K$, as seguintes propriedades:

(1) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

(2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

(3) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$.

Por simplicidade, escreveremos simplesmente ab ao invés de $a \cdot b$.

Definição 1.1.11. Seja A uma álgebra.

(1) A é dita *associativa*, se $(ab)c = a(bc)$, para todo $a,\ b,\ c \in A$.

(2) A é dita *comutativa*, se $ab = ba$, para todo $a,\ b \in A$.

(3) A é dita *unitária*, se possui uma *unidade*, isto é, um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$, para todo $a \in A$. No decorrer do texto, freqüentemente usaremos 1 ao invés de 1_A.

Definição 1.1.12. Seja $(G, +)$ um grupo abeliano aditivo. Uma álgebra A é dita ser G-*graduada*, se $A = \oplus_{g \in G} A_g$ onde A_g é subespaço de A para todo $g \in G$ e $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$ para todos $g,\ h \in G$.

Um elemento $a \in \cup_{g \in G} A_g$ é chamado *homogêneo*. Para todo elemento homogêneo a, temos $a \in A_g$ para algum $g \in G$. Dessa forma, o grau homogêneo de a é igual a g, e denotamos isso por $w_G(a) = g$. Se $a = \sum_{g \in G} a_g$, onde $a_g \in A_g$, chamamos a_g de *componente homogênea* de grau g em a.

Definição 1.1.13. Um subespaço B de uma álgebra G-graduada A é dito ser G-graduado, ou G-homogêneo, se:

$$B = \sum_{g \in G} B_g \text{ onde } B_g = B \cap A_g.$$

Em todo o texto estaremos trabalhando, em geral, com álgebras associativas e unitárias. Portanto, daqui em diante exceto menção explícita do contrário, o termo *álgebra* deverá ser entendido como *álgebra associativa unitária*.

Exemplo 1.1.14. Seja V um espaço vetorial com base enumerável $\{e_i \mid i \in I\}$. A *álgebra de Grassmann*, ou álgebra exterior, $E = E(V)$ é a álgebra associativa gerada por $\{e_i \mid i \in I\}$ que satisfaz as seguintes relações:

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \text{ para todo } i,\ j \in I.$$

E se a característica de K for igual a dois, exigimos também $e_i^2 = 0$, para todo $i \in I$.

Note que $D = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r,\ r = 1, 2, 3 \dots\}$ é uma base de E. Além disso, se V_n é o subespaço de V gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$, denotaremos por $E(V_n)$ sua álgebra de Grassmann correspondente.

Exemplo 1.1.15. Seja A uma álgebra. Considere $A^{op} = A$, como espaço vetorial. Definimos em A^{op} a multiplicação $*$ como:

$$a * b = ba, \text{ para todo } a,\ b \in A^{op}.$$

Dessa forma, A^{op} é uma álgebra, chamada de *álgebra oposta* de A.

Definição 1.1.16. O subespaço vetorial B da álgebra A é chamado uma *subálgebra* se $1 \in B$ e para todo $b_1,\ b_2 \in B$, temos $b_1 b_2 \in B$. O subespaço I de A é chamado de *ideal à esquerda* se para todo $a \in A$ e $i \in I$, temos $ai \in I$. De modo análogo, define-se *ideal à direita*. Um ideal bilateral, isto é, ideal à esquerda e à direita ao mesmo tempo, é chamado simplesmente de *ideal*.

Exemplo 1.1.17. O conjunto $C(A) = \{a \in A \mid ax = xa \text{ para todo } x \in A\}$ é uma subálgebra de A. Esta subálgebra é chamada de *centro de* A e seus elementos são ditos *centrais*. Quando $A = E$ (a álgebra de Grassmann) temos que $C(E) = E_0$, onde E_0 é o subespaço de E gerado por $D_0 = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r,\ r = 2, 4, 6, \dots\}$.

Exemplo 1.1.18. Seja $M_n(E)$ a álgebra das matrizes de ordem n com entradas na álgebra de Grassmann E. Para quaisquer $a,\ b \in \mathbb{N}$ tais que $a+b=n$, verifica-se através das regras de multiplicação de matrizes em blocos, que o conjunto $M_{a,b}(E)$ das matrizes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} E_0 & \dots & E_0 & E_1 & \dots & E_1 \\ \vdots & a\times a & \vdots & \vdots & a\times b & \vdots \\ E_0 & \dots & E_0 & E_1 & \dots & E_1 \\ \hline E_1 & \dots & E_1 & E_0 & \dots & E_0 \\ \vdots & b\times a & \vdots & \vdots & b\times b & \vdots \\ E_1 & \dots & E_1 & E_0 & \dots & E_0 \end{array}\right)$$

é uma subálgebra de $M_n(E)$.

Definição 1.1.19. Uma transformação linear $\varphi : A_1 \to A_2$ entre as álgebras A_1 e A_2 é dita um *homomorfismo* de álgebras se:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \text{ para todo } a,\ b \in A_1$$

e, além disso $\varphi(1) = 1$. De modo análogo às demais estruturas algébricas, chamamos *isomorfismo* quando φ for um homomorfismo bijetor e denotaremos $A_1 \cong A_2$, *mergulho* quando for injetor, *endomorfismo* quando for um homomorfismo de A_1 para A_1, e *automorfismo* quando for um endomorfismo bijetor.

Exemplo 1.1.20. Seja A' uma álgebra sem unidade. Podemos mergulhar A' numa álgebra com unidade. Com efeito, considere $A = A' \oplus K$ como soma direta de espaços vetoriais. Definimos em A a seguinte multiplicação:

$$(a,\alpha)\cdot(b,\beta) = (\alpha b + \beta a + ab, \alpha\beta), \text{ para todo } a,\ b \in A';\ \alpha,\ \beta \in K.$$

Temos que $(0,1)$ é a unidade de A e a inclusão $A' \hookrightarrow A$ é um mergulho. Dizemos que A é obtida através de A' por *introdução formal da unidade.*

O próximo resultado é muito comum nas estruturas algébricas e é geralmente denominado Teorema do Isomorfismo.

Teorema 1.1.21. *Seja $\varphi : A_1 \to A_2$ um homomorfismo. Então o núcleo de φ,*

$$\ker\varphi = \{a \in A_1 \mid \varphi(a) = 0\}$$

é um ideal de A_1 e a álgebra quociente $A_1/\ker\varphi$ é isomorfa a sua imagem

$$\varphi(A_1) = \{\varphi(a) \mid a \in A_1\}.$$

1.2 Representações de Grupos

Apresentamos aqui algumas propriedades básicas sobre representações de grupos sem no entanto nos preocuparmos com suas demonstrações. No Capítulo 2 apresentamos mais algumas propriedades das representações do grupo simétrico e geral linear que serão necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Para maiores detalhes sobre representações de grupos ver [5] e [28].

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K. Considere $GL(V)$ o conjunto das transformações lineares bijetoras de V em V. É fácil verificar que $GL(V)$ munido da operação de composição de funções é um grupo. No caso particular de V ser de dimensão finita, temos que $GL(V) \cong GL_n(K)$, o grupo das matrizes invertíveis de ordem n.

Observação 1.2.1. A menos de menção em contrário, o espaço vetorial V sobre o corpo K terá dimensão finita.

Definição 1.2.2. Seja G um grupo. A K-álgebra KG considerada como um espaço vetorial com base $\{g \mid g \in G\}$ e com multiplicação entre os elementos da base definida pela multiplicação em G é chamada *álgebra de grupo* de G.

Definição 1.2.3. Sejam G um grupo e V um espaço vetorial.

(i) Uma *representação* de G em V é um homomorfismo

$$\phi : G \to GL(V).$$

O *grau* da representação ϕ é igual à dimensão do espaço vetorial V. A representação ϕ é *fiel* se o núcleo de ϕ é trivial e ϕ é *trivial* se seu núcleo coincide com G.

(ii) Duas representações $\phi : G \to GL(V)$ e $\rho : G \to GL(W)$ são *equivalentes* ou *isomorfas*, se existe um isomorfismo $\theta : V \to W$ dos espaços vetoriais V e W tal que

$$(\theta \circ \phi(g))(v) = (\rho(g) \circ \theta)(v), \quad v \in V,\ g \in G.$$

(iii) Seja W um subespaço de V tal que $(\phi(G))(W) = W$. Então definimos uma representação $\psi : G \to GL(W)$ dada por

$$(\psi(g))(w) = (\phi(g))(w), \quad g \in G,\ w \in W \subseteq V,$$

é chamada *subrepresentação* da representação $\phi : G \to GL(V)$. A subrepresentação ψ é *própria* se $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$.

(iv) Se $\phi : G \to GL(V)$ e $\psi : G \to GL(W)$ são representações de G, então a representação $\rho = \phi \oplus \psi : G \to GL(V \oplus W)$ definida por

$$(\rho(g))(v, w) = ((\phi(g))(v), (\psi(g)(w))), \quad g \in G,\ (v, w) \in V \oplus W,$$

é a *soma direta* de ϕ e ψ. De modo análogo definimos a soma direta de um conjunto finito ou infinito de representações. O *produto tensorial* $\rho = \phi \otimes \psi : G \to GL(V \otimes W)$ é definido por

$$(\rho(g))(v \otimes w) = (\phi(g))(v) \otimes (\psi(g)(w)), \quad g \in G,\ v \otimes w \in V \otimes W.$$

(v) A representação $\phi : G \to GL(V)$ é *irredutível* se não possui nenhuma subrepresentação própria; ϕ é chamada *completamente redutível* se é uma soma direta de representações irredutíveis.

Teorema 1.2.4 (Maschke). *Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de dimensão finita de um grupo finito G. Se $\operatorname{char} K \nmid |G|$, então ρ é completamente redutível, isto é, é uma soma direta de representações irredutíveis.*

Lema 1.2.5 (Schur). *Sejam $\rho : G \to GL(V)$, $\psi : G \to GL(W)$ representações irredutíveis de G e K um corpo algebricamente fechado. Seja $f : V \to W$ uma transformação linear tal que $\rho \circ f = f \circ \psi$ para todo $g \in G$. Então:*

(1) Se ρ e ψ não são isomorfas, então $f = 0$.

(2) Se $V = W$ e $\rho = \psi$, então existe $\lambda \in F$ tal que $f = \lambda Id$, onde Id é a identidade em W e $\lambda \in K$.

Definição 1.2.6. Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de G. Para cada $g \in G$ defina

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)),$$

onde $\operatorname{tr}(\rho(g))$ é o traço da matriz $\rho(g)$. A função χ_ρ obtida é chamada de *caracter* da representação ρ.

Observação 1.2.7. (1) Segue das propriedades do traço de matrizes que o valor do caracter da representação ρ não depende da base de V.

(2) Estaremos considerando a partir de agora espaços vetoriais sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Definição 1.2.8. Se ϕ e ψ são funções a valores complexos, defina

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{k}\sum_{g \in G} \psi(g)\overline{\psi(g)},$$

onde $k = |G|$ e a barra é a conjugação complexa. É fácil verificar que $(|)$ é um produto escalar.

Teorema 1.2.9. *(i) Se χ é o caracter de uma representação irredutível, então $(\chi|\chi) = 1$.*

(ii) Se χ e $\chi^{'}$ são caracteres de duas representações irredutíveis não-isomorfas, então $(\chi|\chi^{'}) = 0$, isto é, χ e $\chi^{'}$ são ortogonais.

Teorema 1.2.10. *Seja V uma representação de G com caracter ϕ e suponha que V se decomponha na soma direta de representações irredutíveis*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Então, se W é uma representação irredutível com caracter χ, o número de W_i isomorfos a W é igual ao produto escalar $(\phi|\chi)$.

Corolário 1.2.11. *O número de W_i isomorfos a W não depende da decomposição escolhida.*

Corolário 1.2.12. *Duas representações com o mesmo caracter são isomorfas.*

Teorema 1.2.13. *Se ϕ é o caracter da representação V, então $(\phi|\phi)$ é um inteiro positivo e $(\phi|\phi) = 1$ se, e somente se, V é irredutível.*

Teorema 1.2.14. *O número de representações irredutíveis de G, a menos de isomorfismo, é igual ao número de classes de conjugação de G.*

Definição 1.2.15. Sejam $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de G e H um subgrupo de G. A *restrição* de ρ a H é a função $\phi : H \to GL(V)$ tal que $(\phi(h))(v) = (\rho(h))(v)$.

Definição 1.2.16. Sejam $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de G e H um subgrupo de G. Considere ρ_H a restrição de ρ a H. Sejam W uma subrepresentação de H e $\theta : H \to GL(W)$ a representação de H em W definida por ρ_H. Dado $g \in G$, o espaço vetorial $\rho(g)(W)$ depende somente da classe lateral gH de g. Se σ é uma classe lateral de H, podemos definir um subespaço W_σ de V como sendo $\rho(g)(W)$ para qualquer $g \in \sigma$. A soma $\sum_\sigma W_\sigma$, onde σ percorre as classes laterais de G por H, é uma subrepresentação de V.

Definição 1.2.17. Dizemos que uma representação ρ de G em V é *induzida* pela representação θ de H em W se V é igual a soma de W_σ, onde σ percorre as classes laterais de G por H. Mais ainda, esta soma é direta, isto é, $V = \oplus_\sigma W_\sigma$.

1.3 Álgebras Livres e Identidades Polinomiais

Aqui estamos seguindo os livros [2] e [9].

Definição 1.3.1. (1) Seja $\mathfrak{U}$ uma classe de álgebras não necessariamente associativas. A álgebra $F \in \mathfrak{U}$ é chamada *álgebra livre* na classe $\mathfrak{U}$, com *sistema de geradores livres* X, se F é gerada por X e para toda álgebra $R \in \mathfrak{U}$, toda aplicação $X \to R$ pode ser estendida a um homomorfismo $F \to R$. A cardinalidade do conjunto X é chamada o *posto* de F.

(2) A álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias é chamada uma *álgebra associativa livre*, ou simplesmente álgebra livre. Se ela é gerada pelo conjunto X, então a denotamos por $K\langle X\rangle$ e chamamos seus elementos *polinômios* nas variáveis não comutativas X.

Observação 1.3.2. Até o fim deste trabalho fixaremos um conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Assumimos que $K\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ é uma subálgebra de $K\langle X\rangle$.

Proposição 1.3.3. *Seja $X = \{x_i \mid i \in I\}$ um conjunto de símbolos. Então $K\langle X\rangle$ é isomorfa à álgebra que é um espaço vetorial tendo por base os elementos da forma:*

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}, \quad x_{i_j} \in X, \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

onde o elemento de comprimento 0 será denotado por 1*. A multiplicação de dois quaisquer elementos $x_{i_1}\dots x_{i_p}$ e $x_{j_1}\dots x_{j_q}$ é dada pela regra*

$$(x_{i_1}\dots x_{i_p})(x_{j_1}\dots x_{j_q}) = x_{i_1}\dots x_{i_p}x_{j_1}\dots x_{j_q}.$$

O subespaço $K\langle X\rangle' \subseteq K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, $x_{i_j} \in X$, $n = 1, 2, \dots,$ é uma subálgebra chamada de *álgebra associativa livre sem unidade.*

Note que a álgebra $K\langle X\rangle$ definida acima é, em outras palavras, a álgebra dos polinômios não comutativos.

As álgebras $K\langle X\rangle$ e $K\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ são graduadas de modo natural: $(K\langle X\rangle)^{(n)}$ consiste de todos os polinômios homogêneos de grau n, isto é, das combinações lineares de palavras de comprimento n, $(K\langle x_1, \dots, x_m\rangle)^{(n_1,\dots,n_m)}$ é gerado por todas palavras que incluem a variável x_i exatamente n_i vezes, $i = 1, \dots, m$.

Definição 1.3.4. O elemento $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é chamado uma *identidade polinomial* para a álgebra R, se $f(r_1, \dots, r_n) = 0$ para todo $r_1, \dots, r_n \in R$. Em outras palavras, $f(x_1, \dots, x_n)$ pertence ao núcleo de todos homomorfismos $K\langle X\rangle \to R$. Se existe $f(x_1, \dots, x_n)$ um elemento não nulo de $K\langle X\rangle$ que é uma identidade polinomial para R, então R é chamada uma *PI - álgebra.*

Exemplo 1.3.5. Seja A uma PI - álgebra. É imediato que a álgebra oposta A^{op} é uma PI - álgebra.

Exemplo 1.3.6. Recordemos que uma álgebra A, sem unidade, é chamada *nil de índice limitado* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$. Agora se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 a_2 \ldots a_m = 0$, para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$, então A é chamada *nilpotente* e m é chamado o *índice de nilpotência*. É imediato que toda álgebra nilpotente é nil de índice limitado.

Toda álgebra nil de índice limitado, em particular toda álgebra nilpotente é uma PI - álgebra. De fato, o polinômio $f(x) = x^n$ é uma identidade polinomial de A. Quando a álgebra A é nilpotente de índice m, o polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 x_2 \ldots x_m$ também é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.3.7. Toda álgebra comutativa A é uma PI - álgebra, pois o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.3.8. A álgebra de Grassmann E é uma PI - álgebra, pois um cálculo direto usando os elementos da base de E mostra que $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3] = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial de E.

Exemplo 1.3.9. Seja A uma álgebra de dimensão finita, onde $\dim A < n$. Então A é uma PI - álgebra, pois satisfaz uma generalização do polinômio comutador $[x_1, x_2]$, conhecida como *identidade "standard"* de grau n:

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde $(-1)^\sigma$ é o sinal de $\sigma \in S_n$, o grupo das permutações de n elementos. A álgebra A também satisfaz a *identidade de Capelli*:

$$d_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \ldots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}.$$

Para verificarmos as afirmações acima, basta fazê-lo para uma base de A, pois os polinômios s_n e d_n são lineares nas variáveis x_i's.

Após vários exemplos de PI - álgebras, surge uma pergunta inevitável: "Existem álgebras que não são PI - álgebras?". A resposta é sim. A álgebra $K\langle X\rangle$, por exemplo não satisfaz nenhuma identidade polinomial não nula. Isto pode ser compreendido por um argumento simples. Observe inicialmente que qualquer polinômio em $K\langle X\rangle$ é combinação linear de monômios, mas os monômios em $K\langle X\rangle$ são linearmente independentes. Portanto $K\langle X\rangle$ não satisfaz nenhuma identidade polinomial não nula.

Definição 1.3.10. Seja K um corpo e L um espaço vetorial sobre K. Dizemos que L é uma *álgebra de Lie* se existe uma multiplicação $\cdot$ em L satisfazendo

(1) $x \cdot y = -y \cdot x$, para todo $x,\ y \in L$. Esta propriedade é conhecida como lei anti-comutativa. E se $\operatorname{char} K = 2$, então exigimos que $x^2 = 0$.

(2) $(x\cdot y)\cdot z + (y\cdot z)\cdot x + (z\cdot x)\cdot y = 0,\ x,\ y,\ z \in L$. Conhecido como *identidade de Jacobi.*

Observação 1.3.11. Se $\operatorname{char} K \neq 2$ então a condição (1) da definição anterior é equivalente a $x^2 = 0$.

Definição 1.3.12. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in L$. O produto $x_1 \ldots x_n$ será escrito da esquerda para a direita, isto é,

$$x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n = ((x_1x_2)\ldots x_{n-1})x_n, \quad x_1,\ \ldots,\ x_n \in L,\ n \geqslant 3.$$

Exemplo 1.3.13. Toda álgebra associativa A torna-se uma álgebra de Lie, que denotaremos por $A^{(-)}$, com respeito à operação

$$[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1,\ a_i \in A,\ i = 1,\ 2.$$

Observação 1.3.14. O Teorema 1.3.25 mostra que toda álgebra de Lie é uma subálgebra de $A^{(-)}$ para uma álgebra associativa conveniente A.

Exemplo 1.3.15. Sejam V um K-espaço vetorial e $End_K(V)$ o espaço dos endomorfismos de V. Então $End_K(V)$ torna-se uma álgebra de Lie com respeito ao comutador. Denotaremos $End_K(V)^{(-)} = gl(V)$. Se $\dim V < \infty$, então $gl(V) = gl_n(K)$ é a álgebra das matrizes $n \times n$ com a multiplicação $[a, b] = ab - ba$.

Exemplo 1.3.16. $sl_n(K) = \{x \in M_n(K) \mid \operatorname{tr}(x) = 0\}$ é uma álgebra de Lie com respeito ao comutador.

Exemplo 1.3.17. $so_n(K) = \{x \in M_n(K) \mid x^t = -x\}$ é uma álgebra de Lie.

Definição 1.3.18. Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ uma aplicação. Dizemos que T é uma *derivação* se T é linear e $T(xy) = T(x)y + xT(y)$.

Exemplo 1.3.19. Seja R uma álgebra e considere $D = Der_K\ (R) = \{x \in gl\ (R) \mid x$ é uma derivação em $R\}$. Então $D \subseteq gl\ (R)$ é uma subálgebra de Lie. De fato, sejam $\delta_1,\ \delta_2 \in D$. Daí

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2](xy) &= \delta_1(\delta_2(x)y + x\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(x)y + x\delta_1(y)) \\
&= \delta_1\delta_2(x)y + \delta_2(x)\delta_1(y) + \delta_1(x)\delta_2(y) + x\delta_1\delta_2(y) \\
&\quad -\delta_2\delta_1(x)y - \delta_1(x)\delta_2(y) - \delta_2(x)\delta_1(y) - x\delta_2\delta_1(y) \\
&= [\delta_1, \delta_2](x)y + x[\delta_1, \delta_2](y).
\end{aligned}$$

A identidade de Jacobi é de verificação imediata.

Definição 1.3.20. Seja L uma álgebra de Lie e $x \in L$. Definimos um endomorfismo de L por $y(\operatorname{ad} x) = [y, x]$ ou $y(\operatorname{ad} x) = yx$.

Definição 1.3.21. Seja J um K-espaço vetorial. Se em J está definido um produto $\circ$ que satisfaz

(i) $x \circ y = y \circ x$,

(ii) $x^2 \circ (y \circ x) = (x^2 \circ y) \circ x$,

então dizemos que J é uma *álgebra de Jordan.*

Exemplo 1.3.22. Seja A uma K-álgebra associativa com $\operatorname{char} K \neq 2$. Se definirmos $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, então $(J, \circ)$ é uma álgebra de Jordan.

Exemplo 1.3.23. Seja $s_n(K) = \{a \in M_n(K) \mid a^t = a\}$. Então $(s_n(K), \circ)$ é uma álgebra de Jordan, onde $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Exemplo 1.3.24. Seja V um K-espaço vetorial e $f : V \times V \to K$ uma forma bilinear simétrica. Seja $B = K \oplus V$ e defina

$$(\alpha + u) \circ (\beta + v) = (\alpha\beta + f(u, v)) + (\alpha v + \beta u).$$

Então $(B, \circ)$ é uma álgebra de Jordan.

Teorema 1.3.25 (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Seja G uma álgebra de Lie com base como espaço vetorial dada por*

$$\{g_i \mid i \in I\}$$

onde I é um conjunto ordenado. Então:

(i) Existe uma álgebra associativa $U(G)$, chamada álgebra universal envolvente *de G tal que G é uma subálgebra de Lie de $U(G)^{(-)}$ e para toda álgebra associativa A, todo homomorfismo de álgebras de Lie*

$$\phi : G \to A^{(-)}$$

pode ser estendido para um homomorfismo de álgebras associativas

$$\psi : U(G) \to A.$$

Além disso, $U(G)$ é única a menos de isomorfismo.

(ii) A álgebra universal envolvente $U(G)$ de G tem uma base dada por

$$\{g_{i_1} \dots g_{i_n} \mid i_1 \leqslant \dots \leqslant i_n,\ n = 0,\ 1,\ \dots\}.$$

Teorema 1.3.26 (Witt). *A álgebra de Lie livre, isto é, a álgebra livre na classe de todas álgebras de Lie no sentido da Definição 1.3.1, com conjunto de geradores livres X é isomorfa à subálgebra de Lie gerada por X na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. Tal álgebra será denotada por $L(X)$.*

Vamos agora apresentar uma base para a álgebra de Lie livre descrita por Shirshov. As demonstrações podem ser encontradas em [26] e em [29].

Definição 1.3.27. Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um alfabeto enumerável. Assumiremos que as letras desse alfabeto são ordenadas de modo natural, isto é, $x_i < x_{i+1}$. As expressões da forma $x_{i_1} \dots x_{i_k}$, onde $x_{i_j} \in X$ são chamadas *palavras* no alfabeto X e o número k é chamado *comprimento* da palavra. Para a palavra vazia teremos $k = 0$. Para qualquer palavra v em X, denotaremos por $|v|$ o comprimento de v e por $v^k = \underbrace{vv \dots v}_{k}$. O conjunto de todas as palavras em X será denotado por $W(X)$.

Lema 1.3.28. *Sejam u e v palavras não vazias em X tais que $uv = vu$. Então existe uma palavra w tal que $u = w^k$ e $v = w^l$ para alguns inteiros k e l.*

Uma ordem total no alfabeto X nos permite introduzir, através de indução, uma ordem total $>$ no conjunto $W(X)$ por:

(a) a palavra vazia é maior que qualquer outra palavra,

(b) se $u = x_i u'$, $v = x_j v'$ e $x_i > x_j$, então $u > v$,

(c) se $u = x_i u'$ e $v = x_i v'$, então $u > v$ se, e somente se, $u' > v'$.

A ordem definida acima é chamada *ordem lexicográfica* no conjunto de palavras e depende somente da ordem nas letras do alfabeto X.

Vamos agora adicionar uma nova letra y ao alfabeto X. Assumiremos que no novo alfabeto nós temos $x_{k-1} < y < x_k$ e as outras letras são ordenadas do mesmo modo que em X. Denote este novo alfabeto por Y. Para qualquer letra x_i ($x_i < x_k$) definamos uma aplicação $s_{ik} : W(X) \to W(Y)$ tal que

$$s_{ik}(u_1 x_k x_i u_2 x_k x_i u_3 \ldots u_l x_i u_{l+1}) = u_1 y u_2 y u_3 \ldots u_l y u_{l+1},$$

onde nenhuma palavra u_j, $j = 1, \ldots, l+1$ contém a sub-palavra $x_k x_i$.

Lema 1.3.29. *Suponha que u, $v \in W(X)$ e x_i é a menor letra ocorrendo nestas palavras. Então para qualquer $k > i$ a desigualdade $u <_X v$ ocorre se, e somente se, $s_{ik}(u) <_Y s_{ik}(v)$. Os símbolos $<_X$ e $<_Y$ significam as ordens em X e Y respectivamente.*

Definição 1.3.30. Uma palavra u no alfabeto X é chamada *regular* se para qualquer decomposição não trivial $u = u_1 u_2$, a desigualdade estrita $u > u_2 u_1$ ocorre. Uma palavra u no alfabeto X é *cíclica* se $u = w^k$ para alguma palavra w e $k > 1$.

Definição 1.3.31. Diz-se que a palavra v é obtida de u por uma *permutação cíclica* se $v = u_2 u_1$ e $u = u_1 u_2$.

Observação 1.3.32. Para uma palavra arbitrária u consideremos o conjunto de todas as palavras que são uma permutação cíclica. Do Lema 1.3.28 segue que a maior palavra neste conjunto é cíclica ou regular.

Lema 1.3.33. *Sejam u uma palavra no alfabeto X e x_i a menor letra ocorrendo nesta palavra. Suponha que $k > i$. Então u é uma palavra regular no alfabeto X se, e somente se, $v = s_{ik}(u)$ é uma palavra regular no alfabeto $Y = X \cup \{y\}$, $x_{k-1} < y < x_k$.*

Lema 1.3.34. *Qualquer palavra $u \in W(X)$ pode ser representada na forma*

$$u = v_1 v_2 \dots v_k,$$

onde v_1, v_2, ..., v_k são palavras regulares e $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_k$.

Corolário 1.3.35. *Seja v uma palavra regular de comprimento $|v|$ pelo menos 2, no alfabeto X. Então existe uma decomposição não trivial $v = v_1 v_2$, onde v_1 e v_2 são palavras regulares e $v_1 > v_2$.*

Seja F a K-álgebra de Lie livre com conjunto enumerável de geradores livres X. Em F definimos por indução o seguinte subconjunto $M(X)$:

(a) todos elementos $x_i \in X$ pertencem a $M(X)$,

(b) se u, $v \in M(X)$, então $[u, v] \in M(X)$.

Os elementos do conjunto $M(X)$ são chamados *comutadores*.

Pelo Teorema 1.3.26 podemos assumir que a álgebra de Lie livre F está mergulhada na álgebra associativa $K\langle X\rangle$ e que o espaço vetorial F é gerado por $M(X)$.

Para qualquer elemento $w \in K\langle X\rangle$ denotaremos por $l(w)$ a maior palavra em $W(X)$ que ocorre com coeficiente não nulo na decomposição da palavra w com respeito à base $W(X)$.

Lema 1.3.36. *Em toda palavra regular $u \in W(X)$ podemos trocar os colchetes duplos de tal modo que para o comutador $[u] \in M(X)$ obtemos a igualdade $l([u]) = u$ em $K\langle X\rangle$.*

Definição 1.3.37. Uma tal reordenação dos comutadores duplos em uma palavra regular será chamada *admissível*.

Teorema 1.3.38 (Shirshov). *Fixemos para qualquer palavra regular $w \in W(X)$ exatamente uma reordenação admissível de colchetes $[u]$. Então o subconjunto $[M]$ de comutadores $[u]$ deste tipo, onde u percorre todas as palavras regulares, forma uma base da álgebra de Lie livre F.*

Exemplo 1.3.39. Vamos construir a base de Shirshov para a álgebra de Lie livre, gerada por x e y. Suponhamos $x < y$. Vamos construir o conjunto M indutivamente do seguinte modo.

1. $[M_1] = \{x, y\}$.

2. Se já construímos $[M_k]$ para $k = 1, \ldots, n-1$, então $[M_n]$ consiste de todos comutadores $[w]$ de grau n tais que $[w] = [[u], [v]]$, onde $[u] \in [M_k]$, $[v] \in [M_{k-1}]$ e $[u] = u_1 \ldots u_p$, $[v] = v_1 \ldots v_q$, $[w] = w_1 \ldots w_r$ satisfazem as condições:

   (a) $u_1 \ldots u_p > w_1 \ldots w_r > v_1 \ldots v_q$;

   (b) Se $[u] = [[u_1], [u_2]]$ com $u_2 = u_{p_1} \ldots u_{p_r}$, então $u_{p_1} \ldots u_{p_r} \leqslant v_1 \ldots v_q$.

Com essa ordem os elementos de grau até 5 na base de Shirshov serão:

$$[M_1] = \{x, y\},\ [M_2] = \{[y, x]\}$$
$$x < yx < y;$$
$$[M_3] = \{[[y, x], x], [y, [y, x]]\},$$
$$x < yxx < yx < yyx < y$$
$$[M_4] = \{[y, [y, [y, x]]], [y, [[y, x], x]], [[[y, x], x], x]\},$$
$$x < yxxx < yxx < yx < yyxx < yyx < yyyx < y;$$
$$[M_5] = \{[y, [y, [y, [y, x]]]], [y, [y, [[y, x], x]]], [y, [[[y, x], x], x]], [[y, [y, [y, x]]], x]\};$$
$$x < yyxxx < yxxx < yxx < yx < yyxx < yyyxx < yyyx < yyyyx < y.$$

1.4 Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Nesta seção e nas próximas estaremos seguindo o livro [9].

Definição 1.4.1. (1) Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. A classe $\mathfrak{V}$ das álgebras associativas satisfazendo as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i \in I$ é chamada a *variedade* de álgebras associativas definida, ou determinada, pelo sistema de identidades polinomiais $\{f_i \mid i \in i\}$. A variedade $\mathfrak{W}$ é chamada uma *subvariedade* de $\mathfrak{V}$ se $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$.

(2) O conjunto $T(\mathfrak{V})$ de todas identidades polinomiais satisfeitas pela variedade $\mathfrak{V}$ é chamado o *T-ideal* ou *ideal verbal* de $\mathfrak{V}$. Dizemos que o T-ideal $T(\mathfrak{V})$ é gerado como T-ideal pelo conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ da variedade $\mathfrak{V}$, se o menor ideal gerado por $\{f_i \mid i \in I\}$ coincide com $T(\mathfrak{V})$. Usamos a notação $T(\mathfrak{V}) = \langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ e dizemos que o conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ é uma *base* das identidades polinomiais para $\mathfrak{V}$ se f_i não pertence ao ideal gerado por $\{f_j \mid j \in I,\ j \neq i\}$. Os elementos de $T(\mathfrak{V})$ são chamados *conseqüências*, ou seguem, das identidades polinomiais na base.

(3) Se R é qualquer álgebra, denotamos por $T(R)$ o ideal das identidades polinomiais de R.

Observação 1.4.2. 1. Por base minimal para as identidades de $T(\mathfrak{V})$ entenderemos um conjunto mínimo que gere as identidades de $T(\mathfrak{V})$, e além disso, as identidades desse conjunto devem ser multihomogênas. Para definição de polinômios multihomogêneos veja Definição 1.5.2 na Seção 1.5.

2. Quando $\mathfrak{V}$ é determinada pelas identidades de uma PI - álgebra R dizemos que a variedade $\mathfrak{V} = \operatorname{var} R$ é gerada por R.

3. É imediato que $T(\mathcal{V})$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso, para qualquer variedade $\mathcal{V}$, seu T-ideal é invariante sob todos os endomorfismos de $K\langle X\rangle$. Com efeito, seja $f(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) \in T(\mathcal{V})$ e $\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um endomorfismo. Então $\varphi(x_{i_j}) = g_{i_j} \in K\langle X\rangle$. Podemos assumir que $g_{i_j} = g_{i_j}(x_1,\dots,x_r)$ para r suficientemente grande. Sejam $A \in \mathcal{V}$ e $a_1, \dots, a_r \in A$. Chame $a_{i_j} = g_{i_j}(a_1,\dots,a_r)$ e note que:

$$0 = f(a_{i_1},\dots,a_{i_n}) = f(g_{i_1}(a_1,\dots,a_r),\ \dots,\ g_{i_n}(a_1,\dots,a_r)) = \varphi(f)(a_1,\dots,a_r).$$

Logo, temos que $\varphi(f) \in T(\mathcal{V})$.

Vale destacar que, do argumento acima, segue que:

$$T(\mathcal{V}) \cap K\langle x_1,\dots,x_m\rangle, \quad x_1,\ \dots,\ x_m \in X$$

também é invariante sob os endomorfismos de $K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$.

Proposição 1.4.3. *O ideal U é um ideal da álgebra livre $K\langle X\rangle$ (respectivamente, de $K\langle x_1, \dots, x_m\rangle$). São equivalentes:*

1. *U é um T-ideal;*

2. *U é um ideal de identidades de uma álgebra R (ou respectivamente, um ideal de identidades polinomiais em m variáveis de alguma variedade $\mathfrak{U}$);*

3. *U é fechado para endomorfismo de $K\langle X\rangle$ (respectivamente, de $K\langle x_1, \dots, x_m\rangle$).*

Definição 1.4.4. Sejam $\mathfrak{U}$ uma variedade de álgebras e U o T-ideal correspondente de $K\langle X\rangle$. As álgebras

$$F(\mathfrak{U}) = F_\infty(\mathfrak{U}) = K\langle X\rangle/U, \qquad F_m(\mathfrak{U}) = K\langle x_1, \dots, x_m\rangle/(K\langle x_1, \dots, x_m\rangle \cap U)$$

são chamadas as *álgebras relativamente livres* em $\mathfrak{U}$ de posto contável e posto m, respectivamente.

Teorema 1.4.5 (Amitsur-Levitzki [1]). *(i) A identidade standard s_{2n} verifica-se para a álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$.*

(ii) Suponha que S_{n+1} age no conjunto de símbolos $\{0, 1, \dots, n\}$. Então $M_n(K)$ satisfaz a identidade de algebricidade

$$\begin{aligned} a_n(x, y_1, \dots, y_n) &= d_{n+1}(1, x, x^2, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_{n+1}} (-1)^\pi x^{\pi(0)} y_1^{\pi(1)} y_2 \dots x^{\pi(n-1)} y_k x^{\pi(n)}. \end{aligned}$$

Observação 1.4.6. Para $n > 1$ a identidade de algebricidade não segue da identidade standard s_{2n}. Pois se seguisse da identidade standard s_{2n}, então

$$a_n(x, y, \dots, y) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \alpha_i u_i s_{2n}(v_{i_1}, \dots, v_{i_{2n}}) w_i, \quad \alpha_i \in K,$$

onde u_i, v_i, w_i são monômios em $K\langle x, y\rangle$. Podemos assumir que o grau total de u_i, v_i, w_i em y e em x é $\frac{1}{2}k(k+1)$. Isto significa que na identidade standard $s_{2n}(v_{i_1}, \dots, v_{i_{2n}})$ não mais que k monômios v_{i_j} contém y e os outros são potências positivas de x. Como a identidade standard é anti-simétrica, obtemos que todos os monômios v_{i_j} são distintos e daí o grau total em x não é menor que $1 + 2 + \cdots + k$. Portanto todos os monômios v_{i_j} contendo y serão iguais a y e como $n \geqslant 2$ isto é impossível.

Teorema 1.4.7. *Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então, $I = T(K\langle X\rangle/I)$.*

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $f_1, \ldots, f_n \in K\langle X\rangle$. Como $f(f_1, \ldots, f_n) \in I$, temos que:

$$f(f_1 + I, \ldots, f_n + I) = f(f_1, \ldots, f_n) + I = I$$

Logo, $I \subseteq T(K\langle X\rangle/I)$. Por outro lado, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(K\langle X\rangle/I)$ temos que $I = f(x_1 + I, \ldots, x_n + I) = f(x_1, \ldots, x_n) + I$ e então $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$. ∎

O próximo teorema mostra que toda variedade possui uma álgebra livre.

Teorema 1.4.8. *Seja V uma variedade não trivial de álgebras e $\Pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/T(V)$ a projeção canônica. Então,*

(1) A restrição de Π à X é injetora;

(2) A álgebra $K\langle X\rangle/T(V)$ é livre na variedade V com conjunto gerador livre $\Pi(X)$.

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\Pi(x_1) = \Pi(x_2)$. Consideramos uma álgebra não nula A de V e um elemento não nulo a de A. Então existe um homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle \to A$ tal que $\Psi(x_1) = a$ e $\Psi(x_2) = 0$. Como $T(V)$ está contido no núcleo de Ψ, existe um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle/T(V) \to A$ para o qual $\Phi \circ \Pi = \Psi$. Mas,

$$a = \Psi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_2) = \Psi(x_2) = 0$$

o que é uma contradição.

A álgebra $K\langle X\rangle/T(V)$ é gerada pelo conjunto $\Pi(X)$ e pertence a V desde que satisfaz todas identidades de $T(V)$. Vamos mostrar que esta álgebra é livre em V, com conjunto gerador livre $\Pi(X)$. Sejam $A \in V$ e σ uma aplicação de $\Pi(X)$ em A. Como $K\langle X\rangle$ é álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma \circ \Pi : X \to A$ estende-se a um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle \to A$. Existe homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle/T(V) \to A$ para o qual $\Psi \circ \Pi = \Phi$, pois $T(V) \subseteq Ker(\Phi)$. Se $x \in X$, temos que

$$\Psi(\Pi(x)) = \Psi \circ \Pi(x) = \Phi(x) = \sigma \circ \Pi(x) = \sigma(\Pi(x))$$

ou seja, o homomorfismo Ψ estende a aplicação σ. Logo, Ψ é o homomorfismo procurado. Assim $K\langle X\rangle/T(V)$ é uma álgebra livre na variedade V com conjunto gerador livre $\Pi(X)$. ■

No próximo lema, listamos algumas das propriedades básicas das variedades (omitimos a prova, pois a mesma é bastante direta). É importante frisar que ele só é válido, pois o conjunto X é infinito.

Teorema 1.4.9. *Sejam U_1 e U_2 duas classes de álgebras e V uma variedade de álgebras. Então,*

(1) $T(U_1) = \cap_{A\in U_1} T(A) = T(var(U_1))$;

(2) Se $U_1 \subseteq U_2$, então $T(U_2) \subseteq T(U_1)$;

(3) $U_1 \subseteq V \Leftrightarrow T(V) \subseteq T(U_1)$;

(4) Se F é uma álgebra livre em V então $T(V) = T(F)$.

Corolário 1.4.10. *Se A é uma álgebra, então $T(var(A)) = T(A)$.*

A seguinte proposição caracteriza as álgebras relativamente livres em qualquer variedade.

Proposição 1.4.11. *Sejam $\mathcal{V}$ a variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto arbitrário e J um ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por:*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_j \in K\langle Y\rangle,\ i \in I\}.$$

Então a álgebra $F = K\langle Y\rangle/J$ é a álgebra relativamente livre, com $\overline{Y} = \{y + J \mid y \in Y\}$ sendo seu conjunto de geradores. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres de mesmo posto são isomorfas.

Prova:

(1) Vamos mostrar que $F \in \mathcal{V}$. Seja $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ uma das identidades que definem $\mathcal{V}$ e sejam $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n} \in F$ onde $\overline{g_j} = g_j + J$ com $g_j \in K\langle Y\rangle$. Então, $f_i(g_1, \ldots, g_n) \in J$. Logo, $f_i(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) = 0$. Isto mostra que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ é identidade polinomial para F. Daí, $F \in \mathcal{V}$.

(2) Agora vamos provar a propriedade universal de F. Seja A uma álgebra de $\mathcal{V}$ e seja $\Psi : \overline{Y} \to A$ uma aplicação arbitrária. Definimos a aplicação $\Theta : Y \to A$ pondo $\Theta(y) = \Psi(\overline{y})$ e estendemos Θ a um homomorfismo, também denotado por Θ, $\Theta : K\langle Y\rangle \to A$. Isto sempre é possível por que $K\langle Y\rangle$ é álgebra associativa livre. Para provar que Ψ pode ser estendido a um homomorfismo $U \to A$, é suficiente mostrarmos que $J \subseteq Ker(\Theta)$. Seja $f \in J$, isto é,

$$f = \sum_{i\in I} u_i f_i(\overline{g_{i_1}}, \ldots, \overline{g_{i_n}})v_i \text{ onde } g_{i_j},\ u_i,\ v_i \in K\langle Y\rangle.$$

Para $r_{i_1}, \ldots, r_{i_n} \in A$, o elemento $f_i(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n})$ é igual a zero em A, e isto implica que $\Theta(f) = 0$, isto é, $J \subseteq Ker(\Theta)$ e $U \cong U_{\overline{Y}}(V)$ é a álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$, livremente gerada por $\overline{Y}$.

(3) Se $|Y| = |Z|$ com $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ e $Z = \{Z_i \mid i \in I\}$. Sejam $F_Y(\mathcal{V})$ e $F_Z(\mathcal{V})$ as respectivas álgebras relativamente livres. Sendo ambas relativamente livres, podemos definir homomorfismos:

$$\Psi : F_Y(\mathcal{V}) \to F_Z(\mathcal{V}); \Phi : F_Z(\mathcal{V}) \to F_Y(\mathcal{V})$$

pondo $\Psi(y_i) = z_i$ e $\Phi(z_i) = y_i$. Assim, Ψ e Φ são isomorfismos. ■

Observação 1.4.12. Se $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ são variedades tais que $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$, então temos que $T(\mathcal{V}_1) \supseteq T(\mathcal{V}_2)$ e, desta forma, podemos considerar as identidades polinomiais de $\mathcal{V}_1$ módulo $T(\mathcal{V}_2)$. Portanto, se conhecermos as identidades polinomiais de $\mathcal{V}_2$ e queremos estudar as identidades polinomiais de $\mathcal{V}_1$, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre $F(\mathcal{V}_2)$ ao invés de $K\langle X\rangle$.

Uma questão natural é nos perguntarmos: Quais seriam as propriedades que uma classe de álgebras deve satisfazer para ser uma variedade? A resposta é dada pelo Teorema de Birkhoff.

Teorema 1.4.13 (Birkhoff). *Uma classe de álgebras $\mathcal{V} \neq \varnothing$ é uma variedade se, e somente se, é fechada com relação ao produto direto infinito, formação de subálgebras e álgebras quocientes.*

Prova: Veja [9], Teorema 2.3.2, pp. 24–25. ■

Um dos principais problemas da Teoria de Identidades Polinomiais consiste em encontrar uma base para as identidades polinomiais de uma álgebra. Em 1950, Specht propôs no artigo

[31] o seguinte problema para álgebras associativas sobre corpos com característica zero: "Toda álgebra possui uma base finita para suas identidades polinomiais?". Esta pergunta, que ficou conhecida como o problema de Specht, passou a ser uma das questões centrais da teoria de identidades polinomiais e foi finalmente respondida de modo positivo por Kemer em 1987 (veja [16]) que, para tanto, desenvolveu uma densa teoria sobre a estrutura dos T-ideais. No entanto a demonstração de Kemer não é construtiva, no sentido de que nela não aparece nenhuma dica de como construir a base mesmo em álgebras concretas como, por exemplo, álgebras de matrizes. Seguem alguns exemplos de bases de identidades polinomiais.

Exemplo 1.4.14. *(veja [6])* Mostraremos no decorrer deste trabalho que a álgebra $M_2(K)$ quando K é um corpo de característica zero, tem por base as identidades:

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{e} \quad h(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3].$$

Exemplo 1.4.15. Regev e Krakowski(veja [21]), demonstraram que sobre corpos de característica zero as identidades da álgebra de Grassmann seguem da identidade $[[x_1, x_2], x_3] = 0$.

1.5 Identidades Homogêneas, Multilineares e Próprias

Definição 1.5.1. Um monômio M tem grau k em x_i se, a variável x_i ocorre em M exatamente k vezes. Um polinômio é *homogêneo* de grau k em x_i, se todos os seus monômios têm grau k em x_i, e será denotado por $\deg_{x_i} f = k$. Um *polinômio linear* em x_i é um polinômio de grau um em x_i.

Definição 1.5.2. Um polinômio é *multihomogêneo*, se para cada variável x_i todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. Um polinômio é *multilinear*, se é linear em cada variável. O *grau* de um polinômio é o grau de seu maior monômio.

Definição 1.5.3. Sejam $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio em $K\langle X\rangle$ e $y_1, \ldots, y_k$ em

$X - \{x_1, \ldots, x_n\}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos fL_i^k por

$$
\begin{aligned}
&fL_i^k(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \cdots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\
&-\sum_{q=1}^{k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \cdots + \widehat{y}_q + \cdots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\
&+ \sum_{1 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \cdots + \widehat{y}_{q_1} + \cdots + \widehat{y}_{q_2} + \cdots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\
&- \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^{k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_q, x_{i+1}, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

onde $\widehat{y}_q$ indica que retiraremos essa parcela da soma e assim, no último somatório, um y_{q_j} será a parcela que vai restar após cada escolha dos $y_{q_1}, \ldots, y_{q_{k-1}}$. Chamaremos L_i^k de *operador linearização.*

Observação 1.5.4. As demonstrações dos resultados a seguir sobre o operador linearização podem ser encontradas em [37].

Proposição 1.5.5. *Seja P um semigrupo e Q um subgrupo do grupo aditivo da K-álgebra A. Se para qualquer polinômio não associativo $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e quaisquer elementos $a_1, \ldots, a_i \in P$ temos que $f(a_1, \ldots, a_n) \in Q$, então para quaisquer $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_k, a_{i+1}, \ldots, a_n \in P$ teremos $fL_i^k(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_k, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q$. Em particular, se $f \in T(A)$, então $fL_i^k \in T(A)$.*

Lema 1.5.6. *Seja $g : A \times A \times \cdots \times A \to A$ uma função em n variáveis que está definida para a K-álgebra A e é linear em cada variável. Então para quaisquer $a_1, \ldots, a_k \in A$, onde*

$k \geqslant n$,

$$
\begin{aligned}
g(a_1 &+ a_2 + \cdots + a_k, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\
&- \sum_{q=1}^{k} g(a_1 + a_2 + \cdots + \widehat{a}_q + \cdots + a_k, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + \widehat{a}_q + \cdots + a_k) \\
&+ \sum_{1 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant k} g(a_1 + \cdots + \widehat{a}_{q_1} + \cdots + \widehat{a}_{q_2} + \cdots + a_k, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + \widehat{a}_{q_1} \\
&+ \cdots + \widehat{a}_{q_2} + \cdots + a_k) \\
&+ \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^{k} g(a_q, \ldots, q_q) \\
&= \begin{cases} \sum_{(i_1 \ldots i_n) \in S_n} g(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}), & se\ k = n \\ 0, & se\ k > n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposição 1.5.7. *Para quaisquer f, $f' \in K\langle X\rangle$ nos quais L_i^k está definido, $(f + f')L_i^k = fL_I^k + f'L_i^k$. Se $f = f(x_1, \ldots, x_m)$ é um monômio de grau n em x_i e $g = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ é um monômio linear em $y_1, \ldots, y_n \in X\backslash\{x_1, \ldots, x_m\}$ tal que $f(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_i, x_{n+1}, \ldots, x_m)$, então*

$$
\begin{aligned}
&fL_i^k(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_1, \ldots, z_k, x_{i+1}, \ldots, x_m) \\
&\quad = \begin{cases} \sum_{(i_1 \ldots i_n) \in S_n} g(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}, x_{n+1}, \ldots, x_m), & se\ k = n, \\ 0, & se\ k > n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Definição 1.5.8. Dado $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multihomogêneo de multigrau $(k_1, \ldots, k_n)$, o polinômio multilinear $fL_1^{k_1}L_2^{k_2} \ldots L_n^{k_n}$ é chamado *linearização completa* de f.

Exemplo 1.5.9. Ilustraremos a proposição anterior com os seguintes exemplos:

$$
\begin{aligned}
&[x_1^2(x_2x_1)]L_1^3 = (y_1y_2)(x_2y_3) + (y_2y_1)(x_2y_3) + (y_1y_3)(x_2y_2) + (y_3y_1)(x_2y_2) \\
&\quad +(y_2y_3)(x_2y_1) + (y_3y_2)(x_2y_1). \\
&[(x_1^2x_2)x_1^2]L_1^5 = 0. \\
&[x_1^2x_2^2]L_1^2L_1^2 = (y_1y_2)(z_1z_2) + (y_2y_1)(z_1z_2) + (y_1y_2)(z_2z_1) + (y_2y_1)(z_2z_1).
\end{aligned}
$$

Definição 1.5.10. Sejam f um polinômio em $K\langle X\rangle$ de grau n e x_k uma variável de f. Podemos escrevê-lo como uma soma, $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada polinômio f_i é homogêneo de grau i na variável x_k. Cada polinômio f_i é chamado a *componente homogênea* de grau i em x_k do polinômio f.

Teorema 1.5.11. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio não associativo que se anula pela substituição de quaisquer elementos de um subgrupo P do grupo aditivo da álgebra A. Então a linearização completa de qualquer uma de suas componentes homogêneas com grau maximal também se anula em P.*

Definição 1.5.12. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ é *multilinear de grau m*, se f é multihomogêneo de grau $(1, \ldots, 1)$ em $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \subseteq K\langle X\rangle$. Denotamos por P o conjunto de todos os polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$. Enquanto que por P_n denotaremos o espaço vetorial dos polinômios multilineares de grau n.

Corolário 1.5.13. *Se uma álgebra A satisfaz alguma identidade, então ela também satisfaz alguma identidade multilinear.*

Observação 1.5.14. A dimensão de P_n é $n!$ e uma base é dada por

$$\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Proposição 1.5.15. *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X\rangle,$$

onde f_i são as componentes homogêneas de f com grau i em x_1.

(1) Se o corpo K tem mais que n elementos, então as identidades polinomiais $f_i = 0,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, seguem de $f = 0$.

(2) Se $\operatorname{char} K = 0$ ou $\operatorname{char} K > \deg f$, então $f = 0$ é equivalente a um sistema de identidades polinomiais multilineares.

Prova: (i) Seja $I = \langle f\rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como I é um T-ideal, temos:

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I; \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0, 1, \ldots,$ n. Sendo o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)$$

o determinante de Vandermonde que é diferente de zero, resolvemos o sistema pela regra de Crammer. A solução é obtida através de somas, subtrações, multiplicações e divisão por escalar. Assim como I é um ideal temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I$, ou seja, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são conseqüências de $f = 0$.

(ii) Pela parte (i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é multihomogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$, escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in I$ sob a forma:

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo, $f_i \in I$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Como $\deg_{y_i} f_i < k$; $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2$, podemos utilizar indução para cada f_i e obtemos assim um conjunto de conseqüências multilineares de $f = 0$. Para ver que estas identidades multilineares são equivalentes a $f = 0$, é suficiente observarmos que:

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{k}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e o coeficiente binomial é diferente de zero, pois assumimos que $\operatorname{char} K = 0$ ou maior que o grau de f. ∎

Observamos que, o item (i) do lema acima significa que os T-ideais gerados pelo polinômio f e pelos polinômios f_i para i=0, 1, ..., n coincidem.

Corolário 1.5.16. *Seja A uma álgebra.*

(i) Se o corpo K é infinito, então todas identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multihomogêneas;

(ii) Se o corpo K tem característica zero, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multilineares.

Proposição 1.5.17. *Se $\tilde{K}$ é uma extensão do corpo K, de característica zero e R é uma K-álgebra, então a $\tilde{K}$-álgebra $\tilde{R} = \tilde{K} \otimes_K R$ tem as mesmas identidades polinomiais que R, com coeficientes em K. Isto é, se mergulhamos $T(R) \subset K\langle X\rangle$ em $\tilde{K}\langle X\rangle = \tilde{K} \otimes_K K\langle X\rangle$, então $T(\tilde{R}) = \tilde{K} \otimes_K T(R)$.*

Prova: Segue usando que o T-ideal de R é gerado por elementos multilineares e $f \in P_n$ pertence ao T-ideal de R se, e somente se, f se anula numa base de R. ■

Observação 1.5.18. No caso de característica positiva e o corpo infinito esta proposição ainda é verdadeira, mas o argumento multilinear não funciona. Para este caso veja [13].

Definição 1.5.19. (1) O *comutador de comprimento* n, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ é definido indutivamente por:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n],\ n \geqslant 3.$$

(2) Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado *polinômio próprio* se é combinação linear de produtos de comutadores, isto é:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{(i,\ldots,j)}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}], \quad \alpha_{(i,\ldots,j)} \in K.$$

Para uma definição mais abrangente, assumiremos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores. Denotaremos por B o conjunto de todos os polinômios próprios em $K\langle X\rangle$.

Lema 1.5.20. *Seja*

$$x_1, \ldots, x_m, u_1 = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}], u_2 = [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}], \ldots$$

uma base ordenada da álgebra de Lie livre L_m consistindo dos geradores livres $x_1, \ldots, x_m$ e de comutadores. Então os produtos

$$x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m} u_1^{b_1} \ldots x_k^{b_k},\ a_i \geqslant 0,\ b_j \geqslant 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m,\ j = 1,\ \ldots,\ k,\ k \geqslant 0$$

formam uma base da álgebra associativa livre $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$.

Prova: As afirmações seguem imediatamente do Teorema de Witt 1.3.26, que diz que a álgebra associativa livre é a álgebra universal envolvente da álgebra de Lie livre e do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt 1.3.25 (ii) que expressa a base da álgebra universal envolvente em termos da base da álgebra de Lie. ■

Lema 1.5.21. *Seja*

$$f(x_1,\dots,x_m)=\sum_a\sum_b p_{ab}x_1^{a_1}\dots x_m^{a_m}u_1^{b_1}\dots u_k^{b_k},\ p_{ab}\in K$$

uma identidade polinomial da álgebra com unidade R, onde $u_1^{b_1},\ \dots,\ u_k^{b_k}$ são comutadores da base de L_m. Então para toda seqüência fixada de índices $a=(a_1,\dots,a_m)$, o elemento de $K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$

$$f_a(x_1,\dots,x_m)=\sum_b p_{ab}u_1^{b_1}\dots u_k^{b_k}$$

é também uma identidade polinomial de R.

Prova: Uma vez que $u_j(x_1,\dots,x_m)=[x_{j_1},\dots,x_{j_r}]$, $r>2$, então

$$u_j(x_1+q,x_2,\dots,x_m)=u_j(x_1,\dots,x_m)$$

para todo $q\in K$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(x_1+q,x_2,\dots,x_m) &= \sum_a\sum_b p_{ab}(x_1+q)^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m}u_1^{b_1}\dots u_k^{b_k}\\ &= \sum_a\sum_b\sum_c p_{ab}\binom{a_1}{c}q^c x_1^{a_1-c}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m}u_1^{b_1}\dots u_k^{b_k}. \end{aligned}$$

Seja $a_1^{'}$ o maior inteiro tal que $p_{ab}\neq 0$. Atribuindo a q diferentes valores em K, aplicando-se um argumento baseado no determinante de Vandermonde e resolvendo o sistema linear homogêneo (mais precisamente congruência módulo $T(R)$) obtemos que

$$\sum_{a'}\sum_b p_{a'b}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m}u_1^{b_1}\dots u_k^{b_k},\ a^{'}=(a_1^{'},a_2,\dots,a_m),$$

é uma identidade polinomial de R. Agora para completarmos a prova basta aplicar indução primeiro em a_1 e então nos outros índices $a_i,\ i=2,\ \dots,\ m$. ■

Observação 1.5.22. Se R for uma álgebra sem unidade a afirmação do lema não é necessariamente verdadeira.

O próximo resultado é uma versão do que fora observado por Specht, no artigo clássico [31]. Ele mostra a importância dos polinômios comutadores para encontrar uma base das identidades de uma álgebra unitária. Sua prova não é complicada e pode ser encontrada em [9], proposição 4.3.3, pp 42-44. A demonstração está baseada no Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt sobre a álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie, e mais especificamente, que a álgebra $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre de Lie, livremente gerada pelo conjunto X.

Proposição 1.5.23. *1. Seja*

$$x_1, x_2, \ldots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \ldots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \ldots$$

uma base ordenada da álgebra de Lie livre consistido das variáveis x_1, x_2, $\ldots$ e de alguns comutadores, tais que as variáveis são menores que os comutadores. Então o espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem uma base formada pelos elementos

$$x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \ldots [x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}]^c,$$

onde $a_1, \ldots, a_m, b, \ldots, c \geqslant 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \cdots < [x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}]$ na base ordenada de $L(X)$. Os elementos da base de $K\langle X\rangle$ com $a_1 = \cdots = a_m = 0$ formam uma base para o espaço vetorial B dos polinômios próprios.

2. Seja A uma PI - álgebra sobre um corpo infinito K, $1 \in A$. Então as identidades polinomiais de A seguem das identidades próprias, isto é, o conjunto $T(A) \cap B$ gera o T-ideal $T(A)$. Se a característica de K é zero, podemos restringir ainda mais, isto é, o conjunto $(T(A) \cap B) \cap P$ gera o T-ideal $T(A)$.

Prova: Veja [9], Proposição 4.3.3 (ii), pp. 42–44. ■

Definição 1.5.24. Os elementos de $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ que são combinações lineares de produtos de comutadores $u_1^{b_1} \ldots u_k^{b_k}$, $b_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k$ são chamados *polinômios próprios* ou *polinômios comutadores*. Denotaremos por

$$B_m = sp\{[x_{i_1}, \ldots] \ldots [\ldots, x_{i_n}]\}$$

o subespaço dos polinômios próprios em $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ de grau m e por

$$\Gamma_n = B_m \cap P_n,\ n \leqslant m$$

o subespaço dos polinômios próprios multilineares de grau n em $K\langle X\rangle$.

Teorema 1.5.25. *Uma base do espaço vetorial $\Gamma_n,\ n \geqslant 2$ consiste dos seguintes produtos de comutadores*

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}]$$

onde:

(i) Todos os produtos são multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$;

(ii) Cada fator $[x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_s}]$ é escrito a partir da esquerda, tem comprimento pelo menos 2 e o maior índice está na primeira posição, isto é, $p_1 > p_2, \ldots, p_s$;

(iii) Em cada produto o comutador mais curto precede o mais longo, isto é, no começo do enunciado do teorema $k \leqslant \cdots \leqslant l$.

(iv) Se dois fatores consecutivos são comutadores de igual comprimento, então a primeira variável do primeiro comutador é menor que a primeira do segundo, isto é,

$$\ldots [x_{p_1}, \ldots, x_{p_s}][x_{q_1}, \ldots, x_{q_s}] \ldots$$

satisfaz $p_1 < q_1$.

Prova: Escolhemos a base de $L(X)$ como no Lema 1.5.20 assumindo que na ordenação da base os comutadores mais curtos precedem os mais longos e se dois comutadores são do mesmo comprimento, aquele com a primeira variável menor precede o outro. Agora o teorema segue diretamente do Lema 1.5.20 e do fato de que $PL_n = P_n \cap L(X)$ tem uma base dada por $\{[x_n, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}] \mid \sigma \in S_{n-1}\}$. ■

1.6 Séries de Hilbert

Definição 1.6.1. Um espaço vetorial V é dito ser *graduado*, se ele for soma direta de subespaços V^n onde $n \geqslant 0$, isto é,

$$V = \bigoplus_{n \geqslant 0} V^n = \sum_{n \geqslant 0} V^n.$$

Os subespaços V^n são denominados as *componentes homogêneas* de grau n de V. Analogamente, introduzimos a noção de *multigraduação* em V, se

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_i \geqslant 0} V^{(n_1,\ldots,n_m)}.$$

Denominamos $V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ sua *componente homogênea* de *multigrau* $(n_1,\ldots,n_m)$. O subespaço W de $V = \sum_{n\geqslant 0} V^n$ é subespaço graduado ou homogêneo, se $W = \sum_{n\geqslant 0} W \cap V^n$. Neste caso, o espaço quociente V/W também é naturalmente graduado, dizemos que V/W herda a graduação de V.

Exemplo 1.6.2. A álgebra polinomial $K[x_1,\ldots,x_m]$ é graduada assumindo que os polinômios homogêneos de grau n, no sentido usual, são os elementos de grau n. De modo análogo, $K[x_1,\ldots,x_m]$ é multigraduada, contando as entradas de cada variável nos monômios.

Definição 1.6.3. Seja $V = \sum_{n\geqslant 0} V^n$ um espaço vetorial graduado e seja $\dim V^n < \infty$. A série formal de potências:

$$H(V,t) = \mathrm{Hilb}\,(V,t) = \sum_{n\geqslant 0} (\dim V^n) t^n$$

é denominada a *série de Hilbert ou de Poincaré* de V. Para uma função $f(t)$, usamos a convenção que $H(V,t) = f(t)$, se a série $H(V,t)$ converge em alguma vizinhança de zero, e as funções $H(V,t)$ e $f(t)$ são iguais nesta. Analogamente, se o espaço vetorial

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_i \geqslant 0} V^{(n_1,\ldots,n_m)}$$

é multigraduado, então a série de Hilbert de V é definida por:

$$H(V;t_1,\ldots,t_m) = \mathit{Hilb}\,(V;t_1,\ldots,t_m) = \sum_{n\geqslant 0} (\dim V^{(n_1,\ldots,n_m)}) t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m}.$$

Proposição 1.6.4. *Sejam V e W espaços vetoriais graduados. Então:*

(1) $Hilb(V \oplus W, t) = Hilb(V, t) + Hilb(W, t)$;

(2) $Hilb(V \otimes W, t) = Hilb(V, t) Hilb(W, t)$;

(3) $Hilb(V, t) = Hilb(V/W, t) + Hilb(W, t)$ onde $W \subset V$.

Exemplo 1.6.5. Usando as graduações do Exemplo 1.6.2, temos:

(1) $\operatorname{Hilb}(K[x], t) = \dfrac{1}{1-t}$;

(2) $\operatorname{Hilb}(K[x_1, \ldots, x_m]; t_1, \ldots, t_m) = \dfrac{1}{1-(t_1+\cdots+t_m)}$;

(3) $\operatorname{Hilb}(K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle, t) = \dfrac{1}{1-mt}$.

Vamos agora apresentar alguns resultados que relacionam a série de Hilbert de álgebras relativamente livres com sua parte própria.

Exemplo 1.6.6. Sejam $B^{(n)}$ as componentes homogêneas de grau n de B. Então: $B^{(0)} = K$, $B^{(1)} = 0$; $B^{(2)}$ e $B^{(3)}$ têm bases, respectivamente,

$$\{[x_i, x_j] \mid i > j\} \quad e \quad \{[x_i, x_j, x_k] \mid i > j \leqslant k\}$$

Teorema 1.6.7. *Seja A uma PI álgebra unitária sobre um corpo infinito K. Seja $\{w_j(x_1, \ldots, x_m) \mid j = 1, 2, \ldots\}$ uma base do espaço vetorial $B_m(A)$ dos polinômios próprios na álgebra relativamente livre $U_m(A)$ de posto m, isto é,*

$$B_m(A) = \frac{B \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle}{B \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap T(A)}.$$

Então, $U_m(A)$ tem base:

$$\{x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m} w_j(x_1, \ldots, x_m) \mid a_i \geqslant 0;\ j = 1, 2, \ldots\}.$$

Prova: (Idéia) Sejam $w_j'(x_1, \ldots, x_m) \in B_m$ as pré-imagens homogêneas dos elementos $w_j(x_1, \ldots, x_m)$ de $B_m(A)$. Escolhemos uma base homogênea $\{v_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ de $B_m \cap T(A)$. Então,

$$\{w_j'(x_1, \ldots, x_m), v_k \mid j = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots\}$$

é uma base homogênea de B_m. Assim, $U_m(A)$ é gerada por

$$\{x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} w_j(x_1, \dots, x_m) \mid a_i \geqslant 0;\ j = 1, 2, \dots\}$$

e estes elementos são linearmente independentes. ■

Teorema 1.6.8. *Seja A uma PI - álgebra unitária sobre um corpo K infinito. As séries de Hilbert da álgebra relativamente livre $U_m(A)$ e seus elementos próprios são relacionados por:*

$$Hilb\,(U_m(A); t_1, \dots, t_m) = Hilb\,(B_m(A); t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - t_i}$$

e

$$Hilb\,(U_m(A); t) = Hilb\,(B_m(A); t) \frac{1}{(1 - t)^m}.$$

Prova: Segue diretamente do Teorema 1.6.7 e do Exemplo 1.6.5. ■

CAPÍTULO 2

Representações de Grupos e Identidades Polinomiais

Neste capítulo utilizaremos as representações dos grupos simétrico e geral linear para estudar as identidades polinomiais multilineares e próprias. Embora a maioria dos resultados aqui apresentados, sobre representações, sejam válidos em qualquer corpo K de característica zero, assumiremos que K é algebricamente fechado de característica 0, por exemplo, $K = \mathbb{C}$. Para grupos quaisquer essa hipótese pode comprometer o estudo de representações mas para S_n não há problema nenhum pois suas representações irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$ são absolutamente irredutíveis, isto é, são irredutíveis sobre qualquer extensão do corpo.

2.1 Representação do Grupo Simétrico

Antes de começarmos com representações de grupos, vamos apresentar alguns fatos básicos sobre álgebras de dimensão finita e semi-simples. Veja por exemplo [22].

Definição 2.1.1. Seja R uma anel com unidade. Um R-módulo A é dito ser *semi-simples* se A é isomorfo a uma soma direta de submódulos irredutíveis.

Definição 2.1.2. Um anel R é chamado *simples* se os únicos ideais (bilaterais) de R são: 0 e R.

Definição 2.1.3. Um anel R é chamado *semi-primo* se a interseção de todos os ideais primos é trivial.

Proposição 2.1.4. *Se K é um ideal minimal à direita de R, então $K^2 = 0$ ou $K = eR$ onde $e^2 = e \in K$.*

Corolário 2.1.5. *Todo ideal minimal à direita de um anel semi-primo R tem a forma eR, onde $e^2 = e \in R$.*

Proposição 2.1.6. *Se R é semi-primo e $e^2 = e \in R$, então eR é um ideal minimal à direita se, e somente se, eRe é um anel com divisão.*

Proposição 2.1.7. *As seguintes afirmações sobre o anel R são equivalentes:*

(1) Todo R-módulo à direita é semi-simples.

(2) R é um R-módulo à direita semi-simples.

(3) Todo R-módulo à esquerda é semi-simples.

(4) R é um R-módulo à esquerda semi-simples.

Corolário 2.1.8. *Todo espaço vetorial é semi-simples.*

Proposição 2.1.9 (Wedderburn-Artin). *(a) Um anel R é semi-simples se, e somente se, é isomorfo a uma soma direta de anéis simples e semi-simples.*

(b) Um anel R é simples se, e somente se, é o anel de transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão finita.

Observação 2.1.10. Como definimos anteriormente, uma *partição* do inteiro não negativo n, notação $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$, é uma seqüência de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tal que

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r \geqslant 0 \ \text{ e } \ \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n.$$

Definição 2.1.11. (i) O *diagrama de Young* $[\lambda]$ da partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ é o conjunto de os todos pontos $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, tais que, $1 \leqslant j \leqslant \lambda_i$, $i = 1, \ldots, r$. Apresentamos graficamente o diagrama de Young substituindo os pontos por quadrados tais que a primeira coordenada, i (o índice das linhas), cresce de cima para baixo e a segunda coordenada, j (o índice das colunas), cresce da esquerda para a direita. Por exemplo, o diagrama da partição $\lambda = (5, 3^2, 2) = (5, 3, 3, 2)$ é dado na Figura 2.1. Quando tivermos k ocorrências de λ_i, escreveremos λ_i^k.

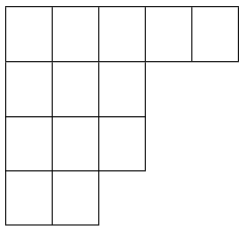

Figura 2.1: O Diagrama de Young $[\lambda] = [5, 3^2, 2]$.

(ii) Seja λ uma partição de n. Denote por $\lambda_j^{'}$ o comprimento da j-ésima coluna de $[\lambda]$. A partição $\lambda^{'} = (\lambda_1^{'}, \ldots, \lambda_l^{'})$ e seu digrama $[\lambda^{'}]$ são chamados *conjugados* respectivamente a λ e $[\lambda]$.

(iii) Sejam λ, μ partições de n. Diremos que o diagrama $[\lambda]$ *contém* $[\mu]$ e escreveremos $[\lambda] \supset [\mu]$, se $\lambda_i \geqslant \mu_i$ para todo $i \geqslant 1$.

(iv) A *diferença* $[\lambda] \backslash [\mu]$ de dois diagramas $[\lambda]$ e $[\mu]$, é definida como o conjunto dos quadrados de $[\lambda]$ que não pertencem a $[\mu]$. Por exemplo, na Figura 2.2, damos os diagramas para as partições $\lambda = (5, 3^2, 2)$, $\mu = (4, 3, 1)$ e sua diferença $[\lambda] \backslash [\mu]$.

Definição 2.1.12. (1) Uma *tabela de Young* T_λ do diagrama $[\lambda]$, ou uma λ-tabela, é um preenchimento dos quadrados de $[\lambda]$ com inteiros positivos. A tabela T_λ é de *conteúdo* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, se α_i é o número de vezes que o inteiro i ocorre em T_λ. Se λ é uma partição de n e $\tau \in S_n$, denotamos por $T_\lambda(\tau)$ a tabela tal que a primeira coluna

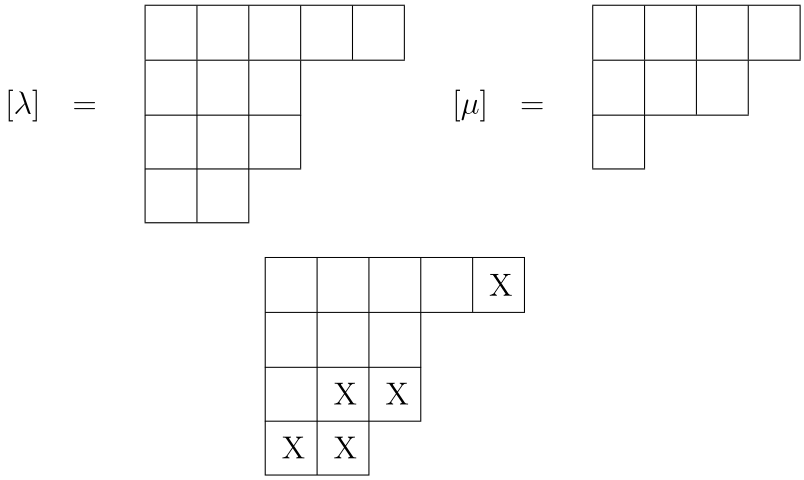

Figura 2.2: A diferença $[\lambda]\backslash[\mu]$ é o conjunto de quadrados de $[\lambda]$ marcados com X.

contém os inteiros $\tau(1), \ldots, \tau(k_1)$ escritos de cima para baixo, a segunda coluna contém $\tau(k_1+1), \ldots, \tau(k_1+k_2)$, etc. Por exemplo, a Figura 2.3, mostra a tabela $T_\lambda(\tau)$ para $\lambda = (4,3,1)$ e $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 2 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$T_\lambda(\tau) =$

3	8	1	7
4	2	6	
5			

Figura 2.3: Uma $(4,3,1)$-tabela.

(2) A tabela T_λ é chamada *semistandard*, se os inteiros em cada coluna crescem estritamente de cima para baixo e os inteiros em cada linha são crescentes, com possíveis repetições, da esquerda para a direita. As tabelas semistandard de conteúdo $(1, \ldots, 1)$ são chamadas de *standard*. Por exemplo, na Figura 2.4, temos uma tabela semistandard de conteúdo $(1,3,2,1,0,1)$ e uma standard, ambas correspondendo a $\lambda = (4,3,1)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \cline{1-3} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 2.4: Tabelas semistandard de conteúdo $(1, 3, 2, 1, 0, 1)$ e $(4, 3, 1)$-tabela standard.

(3) Por analogia com (1) e (2) definimos tabelas semistandard e standard para a diferença de dois diagramas.

Definição 2.1.13. Sejam $\lambda \vdash n$, $\tau \in S_n$ e $T = T_\lambda(\tau)$ o diagrama de Young correspondente. O *estabilizador linha* de T é o subgrupo $R(T)$ de todas permutações ρ em S_n tais que i e $\rho(i)$ estão na mesma linha de T, $i = 1, \ldots, n$. Analogamente definimos o *estabilizador coluna* de T.

Observação 2.1.14. Observe que o estabilizador linha de fato estabiliza as linhas como conjuntos, isto é, permuta os elementos dentro das linhas.

Exemplo 2.1.15. Na Figura 2.3, $R(T)$ é o subgrupo $S_4 \times S_3 \times S_1$ de S_8, onde S_4, S_3 e S_1 agem, respectivamente, nos conjuntos $\{3, 8, 1, 7\}$, $\{4, 2, 6\}$ e $\{5\}$.

Os seguintes teoremas dão à descrição das representações irredutíveis de S_n.

Teorema 2.1.16. *Sejam n um inteiro positivo e K qualquer corpo de característica 0.*

(i) As representações irredutíveis de S_n estão em correspondência biunívoca com as partições λ de n. Denotamos por ϕ_λ, $M(\phi_\lambda)$ e χ_λ a representação irredutível correspondente a λ, o S_n-módulo irredutível e seu caracter, respectivamente.

(ii) Sejam $\lambda \vdash n$, $\tau \in S_n$ e $T = T_\lambda(\tau)$ a tabela de Young correspondente. A menos de uma constante multiplicativa o elemento de KS_n

$$e_T = \sum_{\rho \in R(T)} \sum_{\gamma \in C(T)} (-1)^\gamma \rho\gamma \tag{2.1}$$

é um idempotente minimal que gera um submódulo de KS_n *isomorfo a* $M(\lambda)$. *Todo* S_n*-submódulo* $M(\lambda)$ *de* KS_n *é gerado por um elemento*

$$e = \sum a_T \sigma_T e_T \tag{2.2}$$

para convenientes $a_T \in K$ *e* $\sigma_T \in S_n$, *onde o somatório percorre todas as* λ*-tabelas* $T = T_\lambda(\tau),\ \tau \in S_n$.

(iii) O grau $\deg \phi_\lambda$ *da representação* ϕ_λ *é dado pela fórmula*

$$\deg \phi_\lambda = \frac{n!}{\prod(\lambda_i + \lambda_j^{'} - i - j + 1)} \tag{2.3}$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\lambda' = (\lambda_1^{'}, \ldots, \lambda_r^{'})$ *e o produto no denominador percorre todos os quadrados de* $[\lambda]$. *O grau* $\deg \phi_\lambda$ *é igual também ao número de* λ*-tabelas standard* $T_\lambda(\tau)$, $\tau \in S_n$. *Esta fórmula também é conhecida como* fórmula do gancho, *pois* $\lambda_i + \lambda_j^{'} - i - j + 1$ *é o número de quadrados abaixo e à esquerda do quadrado* (i, j) *(e o próprio quadrado* (i, j)*).*

Apresentamos a seguir um teorema que é conhecido como Branching Rule (regra sobre a ramificação).

Observação 2.1.17. As notações $M \downarrow G$ e $M \uparrow G$, onde G é um grupo, significam a representação restrita e induzida, respectivamente, que foram definidas em (1.2.15) e (1.2.16).

Teorema 2.1.18. *Sejam* $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-1$ *e* S_{n-1} *contido em* S_n *como um subgrupo fixando o símbolo* n. *Então:*

(i) $M(\lambda) \downarrow S_{n-1} \cong \sum M(\mu^{(i)})$, *onde o somatório percorre todas as partições* $\mu^{(i)}$ *de* $n-1$ *tais que seus diagramas* $[\mu^{(i)}]$ *são obtidos apagando-se um quadrado de cada diagrama* $[\lambda]$.

(ii) $M(\mu) \uparrow S_n \cong \sum M(\lambda^{(i)})$, *onde o somatório é em todas as partições* $\lambda^{(i)}$ *de* n *tais que seus diagramas* $[\lambda^{(i)}]$ *são obtidos adicionando-se um quadrado ao diagrama de* $[\mu]$.

Exemplo 2.1.19. Se $n = 8$, $\mu = (3^2, 1)$, então na Figura 2.5 temos:

$$M(3^2, 1) \uparrow S_8 \cong M(4, 1) \oplus M(3^2, 2) \oplus M(3^2, 1^2).$$

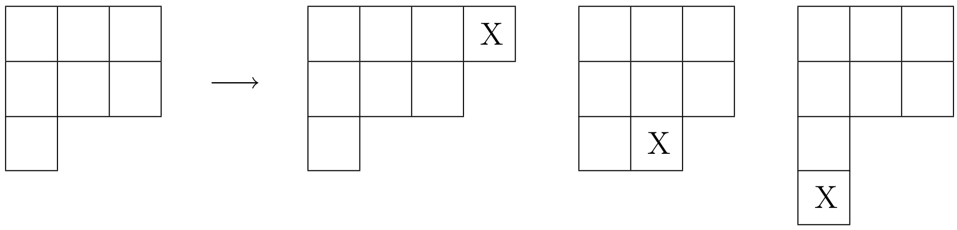

Figura 2.5: $M(3^2, 1) \uparrow S_8 \cong M(4, 1) \oplus M(3^2, 2) \oplus M(3^2, 1^2)$.

Na próxima seção utilizaremos alguns resultados obtidos aqui para determinar uma decomposição do espaço dos polinômios multilineares de Lie de grau pequeno. Esta decomposição será de grande utilidade no estudo das identidades de Lie de $sl_2(K)$.

2.2 Identidades Multilineares da Álgebra de Lie

Aqui estaremos seguindo os livros [2] e [9].

Seja P_n o conjunto de todos os polinômios multilineares de grau n na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. Uma base do K-espaço vetorial P_n é dada por

$$x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

onde $\sigma \in S_n$. Assim $\dim P_n = n!$.

Se definirmos

$$\sigma \circ f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in S_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$$

então P_n é um S_n-módulo à esquerda isomorfo a KS_n, considerado como um S_n-módulo à esquerda. De fato, o espaço vetorial P_n tem base $\{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$. Identifique $\sigma \in S_n$ com $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$. Desse modo obtemos um isomorfismo de KS_n e P_n como espaços vetoriais. Além disso, este é um isomorfismo de S_n-módulos. Agora KS_n pode ser representado na forma

$$KS_n = \sum_{\lambda \vdash n} KS_n e(T_\lambda),$$

onde $KS_ne(T_\lambda) \cong KS_ne(T_\mu)$ se, e somente se, $\lambda = \mu$.

Se f, $g \in P_n$, então $g = 0$ é uma conseqüência de $f = 0$ se, e só se, $g \in KS_nf$. Daí temos tantos sistemas distintos de identidades multilineares de grau n quantos forem os KS_n-submódulos distintos em P_n. Podemos considerar que P_n é gerado como KS_n-módulo por $x_1x_2\dots x_n$, assim podemos escrever

$$P_n = \sum_{\lambda\vdash n} Af_{T_\lambda}, \quad f_{T_\lambda} = e(T_\lambda)\circ(x_1x_2\dots x_n), \tag{2.4}$$

onde $A = KS_n$. Como $Ae(T_\lambda)$ é um S_n-módulo simples, então Af_{T_λ} é zero ou simples. Assim podemos descartar alguns somandos em (2.4) de modo a obter uma soma direta.

Se identificarmos em $f_{T_\lambda(\tau)}$ as variáveis cujos índices correspondem às entradas de uma mesma linha em $T_\lambda(\tau)$ como a mesma variável, e dividirmos o polinômio obtido pela ordem de R_T, obteremos um polinômio g_T em m variáveis, onde m é o número de linhas de T_λ. Além disso, teremos que $g = 0$ é uma conseqüência de $f = 0$. Como $\operatorname{char} K = 0$, a recíproca também é válida, isto é, $f_T = 0$ é uma conseqüência de $g_T = 0$, uma vez que f_T é a linearização completa de g_T.

Sejam $L = L(X)$ a álgebra de Lie livre considerada como uma subálgebra de Lie da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ e $PL_n = P_n \cap L$ o conjunto de todos os polinômios de Lie multilineares de grau n.

Lema 2.2.1. *Uma base de PL_n é formada pelos elementos*

$$\{[x_n, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}] \mid \sigma \in S_{n-1}\}. \tag{2.5}$$

Prova: Usando indução sobre n podemos assumir que um comutador $w \in PL_n$ pode ser escrito na forma $[x_n, u, v]$ onde $[x_n, u]$ é um comutador da forma (2.5). Se o comprimento de v é igual a 1, então w é da forma desejada. Caso contrário, $v = [v_1, v_2]$ e daí $w = -[v_1, v_2, [x_n, u]] = [[[x_n, u], v_2], v_1] - [[[x_n, u], v_1], v_2]$. Usando indução sobre $[[x_n, u], v_2]$ e $[[x_n, u], v_1]$ podemos diminuir o comprimento de v. Por indução sobre n, mostramos que w pode ser expresso como combinação linear de elementos da forma (2.5).

Se $\sum_{\sigma\in S_{n-1}} \alpha_\sigma[x_n, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}] = 0$ e o coeficiente α_1 de $[x_n, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}]$ for não nulo, substituiremos os x_i por elementos apropriados da álgebra de Lie $gl_{n+1}(K)$. Tome $x_n = e_{n+1,n}$, $x_1 = e_{n,n-1}$, $x_2 = e_{n-1,n-2}$, $\dots$, $x_{n-1} = e_{21}$, onde os elementos e_{ij} formam a base usual de $M_n(K)$. A única parcela do somatório que não se anula após tal substituição é $\alpha_1 x_n x_1 \dots x_{n-1}$ cujo valor será $\alpha_1 e_{n+1,1}$. Logo tal somatório não se anula em $gl_{n+1}(K)$, o que é um absurdo. Portanto os elementos (2.5) são linearmente independentes. ■

Observação 2.2.2. Do lema acima segue imediatamente que $\dim PL_n = (n-1)!$.

Temos que PL_n é um S_n-submódulo de P_n. Vamos agora utilizar o exposto anteriormente para determinar a estrutura de PL_n para n pequeno.

Inicialmente note que para as partições (n) e (1^n) os polinômios g_T são respectivamente: x^n e $s_n(x_1, \dots, x_n)$. Mas esses polinômios não correspondem a elementos em PL_n para $n > 2$. Portanto não aparecem em sua decomposição. Quando n=2, s_2 é polinômio de Lie e PL_2 é gerado por $[x_1, x_2] = s_2$.

(i) n = 3. Aqui teremos $\dim PL_3 = 2$ e o único diagrama possível é:

$$T = T_{(2,1)} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,.$$

A dimensão do S_3-módulo correspondente é 2 e $g_T = (x_1x_2 - x_2x_1)x_1 \neq 0$ pois $M_2(K)$ não satisfaz nenhuma identidade de grau menor que 4. Daí a menos de equivalência, $x_1^2 x_2 = 0$ é a única identidade de grau 3. É óbvio que $x_1x_2x_3 = 0$ é uma identidade equivalente a esta última.

(ii) n = 4. Neste caso $\dim PL_4 = 6$ e os diagramas possíveis são

$$T_1 = T_{(3,1)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\;; \quad T_2 = T_{(2^2)} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline\end{array}\;; \quad T_3 = T_{(2,1^2)} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,.$$

As dimensões correspondentes são: $d_{T_1} = d_{T_3} = 3$, $d_{T_2} = 2$. Tomando as tabelas

$$T_1(\tau_1) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\;; \quad T_3(\tau_3) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

os estabilizadores linha e coluna são, respectivamente : $R_{T_1(\tau_1)} = S_3$, $C_{T_1(\tau_1)} = S_2$, S_2 agindo em $\{1,4\}$; $R_{T_3(\tau_3)} = S_2$, S_2 agindo em $\{1,4\}$, $C_{T_3(\tau_3)} = S_3$. Assim $g_{T_1(\tau_1)} = x_1^3 x_2 - x_2 x_1^3 \neq 0$

e $g_{T_3(\tau_3)} = s_3(x_1, x_2, x_3)x_1 \neq 0$. Portanto T_2 não participa em PL_4. Logo $PL_4 \cong Af_{T_1(\tau_1)} \oplus Af_{T_3(\tau_3)}$ e $Af_{T_1(\tau_1)} \ncong Af_{T_3(\tau_3)}$.

(iii) n = 5. Temos que $\dim PL_5 = 24$ e os diagramas possíveis são

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$T_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad T_5 = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

As dimensões dos módulos correspondentes são: $d_{T_1} = d_{T_5} = 4$, $d_{T_2} = d_{T_4} = 5$, $d_{T_3} = 6$ e todos estes módulos participam na decomposição de PL_5. Usando as tabelas abaixo teremos as identidades associadas:

$$T_1(\tau_1) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad g_{T_1(\tau_1)} = x_1^4 x_2 - x_2 x_1^4;$$

$$T_2(\tau_2) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad g_{T_2(\tau_2)} = x_1^3 x_2 - x_2 x_1^2 x_2 - (x_1x_2)^2 x_1 + x_2^2 x_1^3;$$

$$T_3(\tau_3) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{aligned} g_{T_3(\tau_3)} &= x_1^2 x_2 x_1 x_3 - x_2 x_1^3 x_3 - x_3 x_1 x_2 x_1^2 - x_1^2 x_3 x_1 x_2 \\ &+ x_2 x_1 x_3 x_1^2 + x_3 x_1^3 x_2; \end{aligned}$$

$$T_4(\tau_4) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{aligned} g_{T_4(\tau_4)} &= x_1^2(x_2^2 x_3 - x_3 x_2^2) + x_2^2(x_1^2 x_3 - x_3 x_1^2) + x_1 x_2 (x_3 x_1 x_2 \\ &- x_2 x_1 x_3) + x_2 x_1 (x_3 x_2 x_1 - x_1 x_2 x_3) + x_3 x_1 (x_1 x_2^2 - x_2^2 x_1) \\ &+ x_3 x_2 (x_2 x_1^2 - x_1^2 x_2); \end{aligned}$$

$$T_5(\tau_5) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{aligned} g_{T_5(\tau_5)} &= x_1^2x_2x_3x_4 - x_3x_1^2x_3x_4 - x_3x_1x_2x_1x_4 - x_4x_1x_2x_3x_1 \\ &-x_1^2x_3x_2x_4 - x_1^2x_4x_3x_2 - x_1^2x_2x_4x_3 + x_2x_1x_3x_1x_4 + x_2x_1x_4x_3x_1 \\ &+x_3x_1x_2x_4x_1 + x_3x_1^2x_2x_4 + x_4x_1^2x_3x_2 + x_4x_1x_2x_1x_3 + x_1^2x_2x_4x_3 \\ &+x_1^2x_4x_2x_3 + x_2x_1^2x_4x_3 + x_3x_1x_4x_2x_1 + x_4x_1x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3x_4x_1 \\ &-x_2x_1x_4x_1x_3 - x_2x_1x_4x_1x_3 - x_3x_1^2x_4x_2 - x_4x_1x_3x_1x_2 - x_4x_1^2x_2x_3. \end{aligned}$$

Mas $M_3(K)$ não satisfaz nenhuma identidade de grau menor que 6. Logo $sl_3(K)$ não satisfaz identidades próprias de grau menor que 6, e assim estes polinômios são não nulos. Logo

$$PL_5 = Af_{T_1(\tau_1)} \oplus Af_{T_2(\tau_2)} \oplus Af_{T_3(\tau_3)} \oplus Af_{T_4(\tau_4)} \oplus Af_{T_5(\tau_5)}.$$

Como todos estes módulos são dois a dois não isomorfos, qualquer submódulos é uma soma direta de alguns destes módulos. Logo qualquer sistema de identidades homogêneas de grau 5 é equivalente a exatamente um sistema da forma

$$\{g_{T(\tau)} = 0 \mid T(\tau) \in T\}$$

onde $T \subseteq \{T_1(\tau_1),\ T_2(\tau_2),\ T_3(\tau_3),\ T_4(\tau_4),\ T_5(\tau_5)\}$. O número total de tais sistemas é 31.

(iv) n = 6. Neste caso temos $\dim PL_6 = 120$ e as partições admissíveis de 6, correspondendo a componentes irredutíveis de PL_6 como S_6-módulos são do tipo

$$\lambda_1 = (5,1),\ \lambda_2 = (4,2),\ \lambda_3 = (4,1^2),\ \lambda_4 = (3,3),\ \lambda_5 = (3,2,1),$$
$$\lambda_6 = (3,1^3),\ \lambda_7 = (2^2,1^2),\ \lambda_8 = (2,1^4).$$

As dimensões dos S_6-módulos correspondentes são: $d_{\lambda_1} = d_{\lambda_8} = 5$, $d_{\lambda_2} = d_{\lambda_7} = 9$, $d_{\lambda_3} = d_{\lambda_6} = 10$, $d_{\lambda_4} = 5$, $d_{\lambda_5} = 16$. Como a soma destas dimensões é estritamente menor que 120 todos eles participam em PL_6 com algumas multiplicidades. De fato, no caso de λ_5 a multiplicidade é 3 e para λ_3 e λ_7 é 2.

2.3 Representações do Grupo Geral Linear

Para representações do grupo geral linear veja [15] e [36]. Utilizaremos também [9].

Vamos fixar o espaço vetorial V_m com base $\{x_1, \ldots, x_m\}$ e com a ação canônica de $GL_m(K)$. Assumiremos que

$$K\langle V_m\rangle = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$$

é a álgebra associativa livre de posto m. Vamos agora definir uma ação de $GL_m(K)$ na álgebra associativa livre $K\langle V_m\rangle$ por

$$g(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = g(x_{i_1}) \ldots g(x_{i_n}), \quad g \in GL_m(K), \quad 1 \leqslant i_j \leqslant n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Como $GL_m(K)$ age em V_m, esta ação torna $K\langle V_m\rangle$ um $GL_m(K)$-módulo à esquerda. Agora se $f \in (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ para algum $n \geqslant 0$, então $gf \in (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ e daí $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ é $GL_m(K)$-invariante. Portanto $K\langle V_m\rangle = \oplus_{n\geqslant 0}(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$, onde $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ é a componente homogênea de grau n de $K\langle V_m\rangle$. Além disso, temos que para todo T-ideal U de $K\langle X\rangle$, os espaços vetoriais $U\cap K\langle V_m\rangle$ e $U\cap(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ são submódulos de $K\langle V_m\rangle$. Mais ainda, todo submódulo W de $K\langle V_m\rangle$ é uma soma direta das componentes homogêneas $W \cap (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$. Para ver esta última afirmação seja f_n a componente homogênea de grau n do polinômio $f \in W$. A ação da matriz escalar αI, $0 \neq \alpha \in K$ e I a matriz identidade em $GL_m(K)$, multiplica f_n por α^n. Assim aplicando o determinante de Vandermonde para f_n o resultado segue.

Definição 2.3.1. (i) A representação do grupo geral linear GL_m

$$\phi : GL_m \longrightarrow GL_s = GL(W)$$

é chamada *polinomial*, e W é um GL_m-módulo polinomial, se as entradas $\phi_{pq}(g)$ da matriz $s \times s$ $\phi(g)$ são funções polinomiais das entradas a_{ij} da matriz $g = (a_{ij})$ de ordem m, para todo $g \in GL_m$. Quando todos ϕ_{pq} são polinômios homogêneos de grau n, então ϕ é uma *representação homogênea* de grau n.

(ii) Seja

$$D_m = \{d \in GL_m \mid d = d(b_1, \ldots, b_m) = b_1 e_{11} + \cdots + b_m e_{mm}\}$$

o subgrupo das matrizes diagonais de GL_m. Para toda m-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ definimos a *componente homogênea de peso* α, ou de *grau* α, do GL_m-módulo W por

$$W^\alpha = \{w \in W \mid d(b_1, \ldots, b_m)(w) = b_1^{\alpha_1} \ldots b_m^{\alpha_m} \text{ para todo } d \in D_m\}.$$

Algumas propriedades das representações polinomiais de $GL_m(K)$ são semelhantes às das representações dos grupos finitos apesar de $GL_m(K)$ ser infinito, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.3.2. *(i) Toda representação de $GL_m(K)$ é uma soma direta de representações polinomiais homogêneas irredutíveis.*

(ii) Todo $GL_m(K)$-módulo polinomial homogêneo irredutível de grau $n \geqslant 0$ é isomorfo a um submódulo $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$.

As representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau n de $GL_m(K)$ são descritas por partições de n em não mais que m partes e por diagramas de Young.

Teorema 2.3.3. *Seja m um inteiro positivo e K qualquer corpo de característica 0.*

(i) As representações polinomiais homogêneas irredutíveis, duas a duas não isomorfas de GL_m estão em correspondência biunívoca com as partições em não mais que m partes $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \geqslant 0$. Denotamos por $W_m(\lambda)$ o GL_m-módulo irredutível correspondendo a λ.

(ii) Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n. O $GL_m(K)$-módulo $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$. O $GL_m(K)$-módulo $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ pode ser decomposto como

$$(K\langle V_m\rangle)^{(n)} \cong \sum d_\lambda W_m(\lambda),$$

onde d_λ é a dimensão do S_n-módulo irredutível $M(\lambda)$ e o somatório percorre todas as partições de n em não mais que m partes.

(iii) Como subespaço de $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ o espaço vetorial $W_m(\lambda)$ é multihomogêneo. A dimensão da componente multihomogênea $W^{(n_1,\ldots,n_m)}$ é igual ao número de λ-tabelas semistandard de conteúdo $(n_1, \ldots, n_m)$ e é dada pela fórmula

$$\dim W_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{m \geqslant i > j \geqslant 1} \frac{\lambda_j - \lambda_i + i - j}{i - j}. \tag{2.6}$$

(iv) A série de Hilbert

$$Hilb\,(W_m(\lambda); t_1, \ldots, t_m) = \sum (\dim W^{(n_1,\ldots,n_m)}) t_1^{n_1} \ldots t_m^{n_m}$$

é um polinômio simétrico e é igual ao quociente

$$\frac{V(\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \ldots, \lambda_{m-1} + 1, \lambda_m)}{V(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)}$$

onde

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1} & t_2^{\lambda_1} & \ldots & t_m^{\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_2} & t_2^{\lambda_2} & \ldots & t_m^{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{\lambda_m} & t_2^{\lambda_m} & \ldots & t_m^{\lambda_m} \end{vmatrix}.$$

A função

$$S_\lambda(t_1, \ldots, t_m) = Hilb\,(W_m(\lambda); t_1, \ldots, t_m)$$

é chamada função de Schur *correspondente a λ.*

Teorema 2.3.4. *Seja $W = \sum m_\lambda W_m(\lambda)$ um $GL_m(K)$-módulo polinomial, $W_m(\lambda) \subset K\langle V_m\rangle$. Então a série de Hilbert $Hilb\,(W; t_1, \ldots, t_m)$ determina W a menos de isomorfismo.*

Corolário 2.3.5. *Seja $F_m(R)$ a álgebra relativamente livre da variedade gerada pela PI - álgebra R. Então a série de Hilbert $Hilb\,(F_m(R); t_1, \ldots, t_m)$ é uma série formal de funções de Schur e se*

$$Hilb\,(F_m(R); t_1, \ldots, t_m) = \sum_\lambda k_\lambda(R) s_\lambda(t_1, \ldots, t_m), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

então

$$F_m(R) \cong \sum_\lambda k_\lambda(R) W_m(\lambda),$$

isto é, a série de Hilbert de $F_m(R)$ determina a estrutura de $GL_m(K)$-módulo de $F_m(R)$.

Como mencionado anteriormente, existe uma grande semelhança entre as representações irredutíveis do grupo simétrico e as representações polinomiais irredutíveis de $GL_m(K)$. Apresentaremos a seguir um resultado análogo ao Teorema 2.1.16, para isso vamos definir uma ação à direita de S_n em $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ por

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_n})\sigma^{-1} = x_{i_{\sigma(1)}} \ldots x_{i_{\sigma(n)}}, \quad x_{i_1},\ \ldots,\ x_{i_n} \in (K\langle V_m\rangle)^{(n)},\ \sigma \in S_n.$$

Com esta ação, $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ é um S_n-módulo à direita.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e $q_1, \ldots, q_k$ os comprimentos das colunas do diagrama $[\lambda]$, isto é, $k = \lambda_1$ e $q_j = \lambda_j'$. Denote por $s_\lambda = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$, $q = q_1$ o polinômio

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{j=1}^{k} s_{q_j}(x_1, \ldots, x_{q_j})$$

de $K\langle V_m\rangle$, onde $s_p(x_1, \ldots, x_p)$ é o polinômio standard.

Teorema 2.3.6. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ uma componente homogênea de grau n em $K\langle V_m\rangle$.*

(1) O elemento $s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$ gera um $GL_m(K)$-submódulo de $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ isomorfo a $W_m(\lambda)$.

(2) Todo $W_m(\lambda) \subset (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ é gerado por um elemento não nulo

$$w_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q) \sum_{\pi \in S_q} \alpha_\sigma \sigma, \quad \alpha_\sigma \in K. \tag{2.7}$$

O elemento $w_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$ é chamado o vetor de peso máximo *de $W_m(\lambda)$. Este elemento é único a menos de uma constante multiplicativa e está contido no espaço vetorial de dimensão 1 formado pelos elementos multihomogêneos de grau $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ em $W_m(\lambda)$.*

(3) Sejam W e W' dois $GL_m(K)$-submódulos de $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ isomorfos a $W_m(\lambda)$ e com vetores de peso máximo w' e w'', respectivamente. Se $\phi : W' \longrightarrow W''$ é um isomorfismo de GL_m-módulos, então $\phi(w') = \alpha w''$ para algum $\alpha \neq 0$. Mais ainda, todo isomorfismo $W' \cong W''$ é obtido deste modo.

Proposição 2.3.7. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n e $W_m(\lambda) \subset (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$. O vetor de peso máximo w_λ de $W_m(\lambda)$ pode ser escrito de modo único como uma combinação linear de polinômios $w_\sigma = s_\lambda \sigma^{-1}$, onde σ é tal que as λ-tabelas $T(\sigma)$ são standard.*

Proposição 2.3.8. *Sejam $m \geqslant n$, $\lambda \vdash n$ e $W_m(\lambda) \subset (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$. O conjunto $M = W_m(\lambda) \cap P_n$ de todos os elementos multilineares em $W_m(\lambda)$ é um S_n-submódulo de P_n isomorfo a $M(\lambda)$. Todo submódulo $M(\lambda)$ de P_n é obtido deste modo.*

Definição 2.3.9. Sejam ν, λ partições satisfazendo $[\nu] \supset [\lambda]$, $|\nu| = |\lambda| = n$ e $T = T_{[\nu]\setminus[\lambda]}$ uma tabela de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Seja $w(T) = b_1 \ldots b_n$ uma palavra nos símbolos $1, \ldots, m$ obtida a partir dos elementos de T escritos da direita para a esquerda e da primeira linha para a última. A palavra $w(T)$ é chamada *permutação reticulada* se para todo $r = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, m-1$, o número de participações de i na seqüência $b_1, \ldots, b_r$ não é menor que o número de participações de $i+1$.

Exemplo 2.3.10. Na Figura 2.6 temos um exemplo de uma permutação reticulada para $\nu = (5,4,2,1)$, $\lambda = (3,2)$ e $\alpha = (3,2,2)$.

$$T = T_{[\nu]\setminus[\lambda]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 2 \\ \cline{1-4} 2 & 3 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Figura 2.6: A palavra $w(T) = 1121323$ é uma permutação reticulada.

Teorema 2.3.11 (Regra de Littlewood-Richardson). *Sejam λ, μ, ν partições, $[\lambda] \subset [\nu]$, $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$ e $c^{\nu}_{\lambda_\mu}$ o número de todas $[\nu] \setminus [\lambda]$-tabelas semistandard de conteúdo μ tais que as palavras $w(T)$ correspondentes são permutações reticuladas.*

(i) O seguinte isomorfismo de GL_m-módulos verifica-se

$$W_m(\lambda) \otimes W_m(\mu) \cong \sum c^{\nu}_{\lambda_\mu} W_m(\nu),$$

onde o somatório percorre todos ν tais que $[\lambda] \subset [\nu]$ e $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$.

(ii) Na linguagem das funções de Schur a condição (i) é equivalente à igualdade

$$S_\lambda(t_1, \ldots, t_m) S_\mu(t_1, \ldots, t_m) = \sum c^{\nu}_{\lambda_\mu} S_\nu(t_1, \ldots, t_m),$$

onde o somatório é como em (i).

(iii) Seja $|\lambda| = p$, $|\mu| = q$ e os grupos S_p e S_q mergulhados em S_{p+q} como subgrupos fixando, respectivamente os símbolos $p+1, \ldots, p+q$ e $1, \ldots, p$. O seguinte isomorfismo de S_{p+q}-módulo verifica-se

$$(M(\lambda) \otimes M(\mu)) \uparrow S_{p+q} \cong \sum c^{\nu}_{\lambda_\mu} M(\nu),$$

onde o somatório é como em (i) e o produto tensorial $M(\lambda) \otimes M(\mu)$ é considerado com a estrutura natural de um $S_p \times S_q$-módulo.

Exemplo 2.3.12. A Figura 2.7 apresenta um exemplo da Regra de Littlewood-Richardson para $W_5(3,1) \otimes W_5(2,1)$

$$\begin{aligned} W_5(3,1) \otimes W_5(2,1) &\cong W_5(5,2) \oplus W_5(4,3) \oplus 2W_5(4,2,1) \oplus W_5(4,1^3) \\ &\oplus W_5(3^2,1) \oplus W_5(3,2^2) \oplus W_5(3,2,1^2) \end{aligned}$$

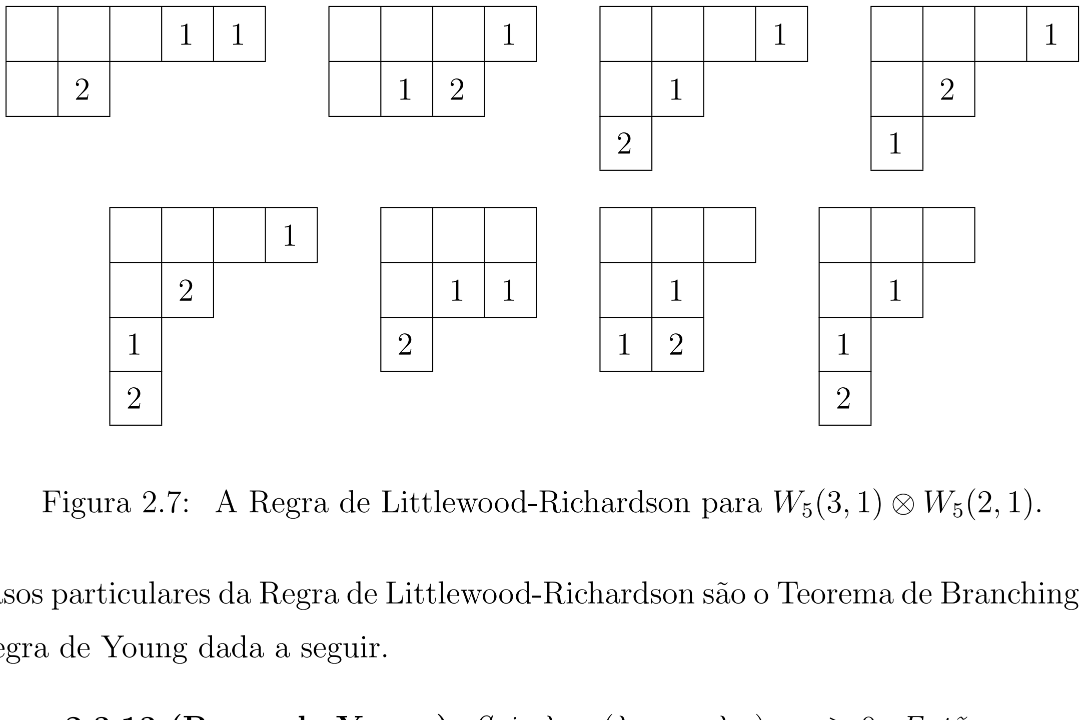

Figura 2.7: A Regra de Littlewood-Richardson para $W_5(3,1) \otimes W_5(2,1)$.

Casos particulares da Regra de Littlewood-Richardson são o Teorema de Branching 2.1.18 e a Regra de Young dada a seguir.

Teorema 2.3.13 (Regra de Young). *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ e $q \geqslant 0$. Então*

$$W_m(\lambda) \otimes W_m(q) \cong \sum W_m(\nu),$$

onde o somatório percorre todas as partições $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ de $|\lambda| + q$ tais que

$$\nu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \nu_m \geqslant \lambda_m.$$

Exemplo 2.3.14. Para $W_5(3, 2^2) \otimes W_5(2)$ a Regra de Young nos dá, veja a Figura 2.8:

$$W_5(3, 2^2) \otimes W_5(2) \cong W_5(5, 2^2) \oplus W_5(4, 3, 2) \oplus W_5(4, 2^2, 1) \oplus W_5(3^2, 2, 1) \oplus W_5(3, 2^3).$$

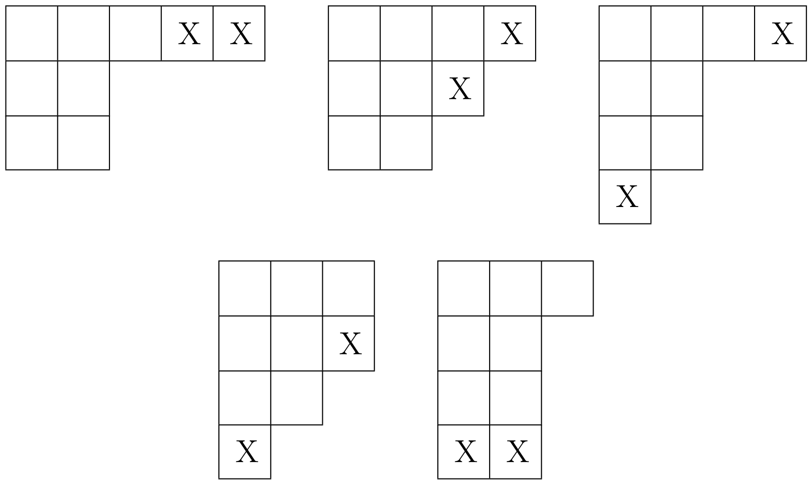

Figura 2.8: A Regra de Young para $W_5(3, 2^2) \otimes W_5(2)$.

2.4 Estrutura de Módulos dos Polinômios Próprios

Nesta seção seguiremos o livro [9] além de alguns artigos que serão citados no decorrer do texto. Alguns resultados apresentados aqui foram obtidos por V.S. Drensky, juntamente com Azniv Kasparin [10].

O propósito dessa seção é encontrar uma apresentação do GL_m-módulo B_m dos polinômios próprios em $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ que permita explicitar $B_m^{(n)}$ como uma soma direta de submódulos irredutíveis para n pequeno.

Denotaremos por $U_k = U_k(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $k \times k$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \ a_{ij} \in K, \ i, \ j = 1, \ldots, \ k,$$

e por $\mathfrak{U}_k = \operatorname{var} U_k$ a variedade de álgebras correspondente. A base das identidades polinomiais de U_k foi encontrada por Yu. N. Maltsev [25] e uma base de $F_m(\mathfrak{U}_k)$ como um espaço vetorial por Siderov [30].

Teorema 2.4.1. *Seja $k \geqslant 1$.*

(i) [25] O T-ideal $T(U_k) = T(\mathfrak{U}_k)$ é gerado pela identidade polinomial

$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

(ii) [30] O espaço vetorial

$$(K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap T(U_{k-1}))/(K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap T(U_k))$$

(assumindo que $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap T(U_0) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$) tem uma base consistindo de todos os produtos dependendo em não mais que m variáveis

$$x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}] \tag{2.8}$$

$a_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, onde os comutadores são normados à esquerda, seu número é exatamente igual a $k-1$ e $i_1 > i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_p, \ldots, j_1 > j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_q$.

(iii) Os elementos em (2.8) satisfazendo $a_1 = \cdots = a_m = 0$ *formam uma base do espaço vetorial* $(B_m \cap T(U_{k-1}))/(B_m \cap T(U_k))$.

Prova: (iii) Segue de (ii) usando a Proposição 1.5.23. ■

Lema 2.4.2. *Para* $m,\ n \geqslant 2$, *o* GL_m*-módulo*

$$(B_m^{(n)} \cap T(U_1))/(B_m^{(n)} \cap T(U_2))$$

é isomorfo a $W_m(n-1,1)$ *e tem por vetor de peso máximo o polinômio*

$$w_{(n-1,1)}(x_1, x_2) = x_2(ad\, x_1)^{n-1} = [x_2, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n-1 \text{ vezes}}].$$

Prova: Pelo Teorema 2.4.1 (iii), o espaço vetorial $(B_m^{(n)} \cap T(U_1))/(B_m^{(n)} \cap T(U_2))$ tem uma base consistindo de todos comutadores

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}],\ m \geqslant i_1 > i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant m.$$

Estes comutadores estão em correspondência 1-1 com as $(n-1,1)$-tabelas semistandard e pelo Teorema 2.3.4 (ii) a série de Hilbert do GL_m-módulo $(B_m^{(n)} \cap T(U_1))/(B_m^{(n)} \cap T(U_2))$

i_2	i_3	$\ldots$	i_n
i_1			

é igual a função de Schur $S_{(n-1,1)}(t_1, \ldots, t_n)$. Pelo Teorema 2.3.4, temos que este módulo é isomorfo a $W_m(n-1,1)$. Finalmente, $w_{(n-1,1)}$ é um vetor de peso máximo porque $x_2(\mathrm{ad}\, x_1) = -s_2(x_1, x_2)$ e $w_{(n-1,1)}$ é da forma (2.7). ■

Proposição 2.4.3 ([10]). *O seguinte isomorfismo de* GL_m*-módulos se verifica*

$$(B_m \cap T(U_{k-1}))/(B_m \cap T(U_k)) \cong \sum W_m(p_1 - 1, 1) \otimes \cdots \otimes W_m(p_{k-1} - 1, 1)$$

onde o somatório percorre todos $p_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Prova: Pelo Teorema 2.4.1 (ii), o seguinte isomorfismo de espaços vetoriais graduados verifica-se

$$\begin{aligned}(B_m \cap T(U_{k-1}))/(B_m \cap T(U_k)) &\cong ((B_m \cap T(U_1))/(B_m \cap T(U_2)))^{\otimes(k-1)} \\ &\cong \sum_{p_i \geqslant 2} (B_m^{(p_i)} \cap T(U_1))/(B_m^{(p_1)} \cap T(U_2)) \otimes \dots \\ &\otimes \ (B_m^{(p_{k-1})} \cap T(U_1))/(B_m^{(p_{k-1})} \cap T(U_2)).\end{aligned}$$

Logo utilizando o Lema 2.4.2, concluímos que a série de Hilbert do GL_m-módulo $(B_m \cap T(U_{k-1}))/(B_m \cap T(U_k))$ coincide com a série de Hilbert do GL_m-módulo

$$\sum W_m(p_1 - 1, 1) \otimes \dots \otimes W_m(p_{k-1} - 1, 1).$$

Daí, pelo Teorema 2.3.4 (iv), estes dois módulos são isomorfos. ■

Teorema 2.4.4 ([10]). *O seguinte isomorfismo de GL_m-módulos verifica-se*

$$B_m \cong \sum_{k \geqslant 0} \sum W_m(p_1 - 1, 1) \otimes \dots \otimes W_m(p_{k-1} - 1, 1),$$

onde a soma interna é em todos $p_i \geqslant 2$, $i = 1, \dots, k-1$.

Prova: Desde que $\cap_{k \geqslant 0} T(U_k) = 0$ e o GL_m-módulo B_m é completamente redutível, obtemos que B_m é isomorfo ao GL_m-módulo

$$\sum_{k \geqslant 0} (B_m \cap T(U_{k-1}))/(B_m \cap T(U_k)).$$

Agora a prova segue imediatamente da Proposição 2.4.3. ■

Exemplo 2.4.5. (i) $B_m^{(0)} \cong W_m(0) \cong K$, $B_m^{(1)} \cong 0$;

(ii) $B_m^{(2)} \cong W_m(1^2)$ e $W_m(1^2)$ tem por vetor de peso máximo

$$w_{(1^2)}(x_1, x_2) = [x_1, x_2];$$

(iii) $B_m^{(3)} \cong W_m(2, 1)$ com vetor de peso máximo

$$w_{(2,1)}(x_1, x_2) = [x_2, x_1, x_1];$$

(iv) $B_m^{(4)} \cong W_m(3,1) \oplus W_m(2^2) \oplus W_m(2,1^2) \oplus W_m(1^4)$ com vetores de peso máximo, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
&w_{(3,1)}(x_1,x_2) = [x_2,x_1,x_1,x_1],\\
&w_{(2^2)}(x_1,x_2) = [x_1,x_2]^2,\\
&w_{(2,1^2)}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [x_{\pi(1)},x_1][x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}],\\
&w_{(1^4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = s_4(x_1,x_2,x_3,x_4).
\end{aligned}
$$

Como identidades polinomiais $w_{(2,1)}(x_1,x_2)$ e $w_{(2,1^2)}(x_1,x_2,x_3)$ são equivalentes, respectivamente, a $[x_1,x_2,x_3]$ e $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]]$.

Prova: As decomposições de B_m para $n \leqslant 3$ seguem imediatamente do Teorema 2.4.4. Para $n = 4$

$$B_m^{(4)} \cong W_m(3,1) \oplus W_m(1^2) \otimes W_m(1^2)$$

e pela Regra de Young 2.3.13 calculamos (ver Figura 2.9)

$$W_m(1^2) \otimes W_m(1^2) \cong W_m(2^2) \oplus W_m(2,1^2) \oplus W_m(1^4).$$

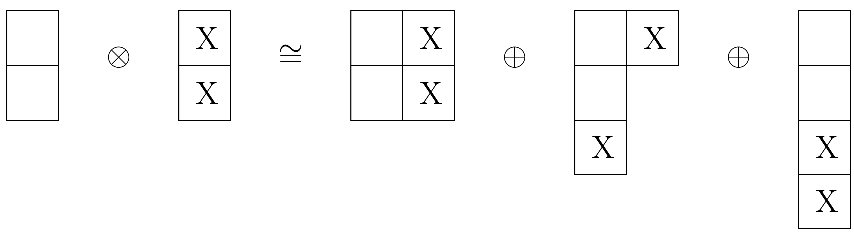

Figura 2.9: $W_m(1^2) \otimes W_m(1^2) \cong W_m(2^2) \oplus W_m(2,1^2) \oplus W_m(1^4)$.

Desde que $[x_1,x_2] = s_2(x_1,x_2)$ os elementos dados são da forma (2.7) e, portanto, são vetores de peso máximo.

Finalmente, o GL_m-módulo $B_m^{(3)}$ é irredutível e é gerado pelo vetor de peso máximo $w_{(2,1)}(x_1, x_2)$ bem como por $[x_1, x_2, x_3]$. Daí estas duas identidades são equivalentes. Analogamente,

$$w_{(2,1^2)}(x_1, x_2, x_3) = 2([x_2, x_1][x_3, x_1] - [x_3, x_1][x_2, x_1]) = 2[[x_2, x_1], [x_3, x_1]],$$

isto é, $w_{(2,1^2)}(x_1, x_2, x_3)$ é uma conseqüência de $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$. Usando as fórmulas para a dimensão dos S_n-módulos irredutíveis, calculamos para o S_4-módulo $M(2, 1^2)$ gerado pela linearização de $w_{(2,1^2)}(x_1, x_2, x_3)$ que $\dim M(2, 1^2) = 3$. Por outro lado o S_4-módulo M gerado por $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ também é gerado pelos comutadores

$$[[x_2, x_1], [x_4, x_3]], [[x_3, x_1], [x_4, x_2]], [[x_4, x_1], [x_3, x_2]].$$

Daí $3 \geqslant \dim M \geqslant \dim M(2, 1^2) = 3$ e $M = M(2, 1^2)$, isto é, as duas identidades são equivalentes. ■

Observação 2.4.6. Utilizando a Proposição 1.5.17 podemos considerar que o corpo K contém $\sqrt{-1}$. Daí tome as seguintes matrizes

$$b_1 = -\frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})\sqrt{-1}, \quad b_2 = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21})\sqrt{-1}, \quad b_3 = \frac{1}{2}(e_{12} - e_{21})\sqrt{-1}.$$

A tabela de multiplicação é:

$$b_1 b_2 = -b_2 b_1 = \frac{b_3}{2}, \quad b_2 b_3 = -b_3 b_2 = -\frac{b_1}{2}, \quad b_3 b_1 = -b_1 b_3 = -\frac{b_2}{2}, \quad [b_1, b_2] = b_3,$$
$$[b_2, b_3] = b_1, \quad [b_1, b_3] = b_2, \quad b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = -\frac{e}{4},$$

onde e é a matriz identidade.

Teorema 2.4.7 ([7]). *Seja $\mathfrak{M}_2 = var\, M_2(K)$ a variedade das matrizes 2×2. O seguinte $GL_m(K)$-isomorfismo se verifica*

$$B_m(\mathfrak{M}_2) \cong K + \sum W_m(\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

onde o somatório percorre todas partições $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ diferentes de (1^3) e (n), $n \geqslant 0$.

Prova: Seja $B_m(\mathfrak{M}_2) \cong \sum k(\mu)W_m(\mu)$, $k \geqslant 0$. Inicialmente temos que toda matriz $a \in M_2(K)$ pode ser escrita na forma $a = a_0 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(a)1$, onde a_0 é uma matriz de traço zero e $1 = e_{11} + e_{22}$ é a matriz identidade. Sejam $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ uma partição de um natural n e $w_m(x_1, \ldots, x_r)$ um vetor de peso máximo do submódulo $W_m(\mu)$ do GL_m-módulo B_m. Como w_μ é um vetor de peso máximo, cada variável x_i participa em w_μ em uma soma anti-simétrica junto com x_1, …, x_{i-1}. Além disso w_μ é um polinômio próprio, donde

$$w_\mu(x_1, \ldots, x_i + a, \ldots, x_r) = w_\mu(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_r), \quad a \in K.$$

Logo é suficiente verificar que $w_\mu(x_1, \ldots, x_r) = 0$ para todas r-uplas de matrizes v_1, …, v_r linearmente independentes no espaço vetorial $sl_2(K)$. Mas $\dim sl_2(K) = 3$ e portanto $w_\mu(v_1, \ldots, v_r) = 0$ para $\mu_4 \neq 0$. Logo podemos assumir que $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. É imediato ver que o caso $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ corresponde ao corpo K cuja multiplicidade em B_m é 1. Os módulos $W_m(\mu)$ para $\mu = (1^3)$ e $\mu = (n)$, $n > 0$, têm multiplicidade 1 na álgebra livre $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ e seus vetores de peso máximo são $w_{(1^3)} = s_3(x_1, x_2, x_3)$ e $w_{(n)}(x_1) = x_1^n$. Mas esses elementos não são polinômios próprios, logo os GL_m-módulos $W_m(1^3)$ e $W_m(n)$ não participam na decomposição de B_m e portanto não participam na de $B_m(\mathfrak{M}_2)$. Suponha então que $\mu \neq (1^3)$, (n) e $k(\mu) > 1$. Sejam $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $w_\mu^{'}(x_1, \ldots, x_r)$ e $w_\mu^{''}(x_1, \ldots, x_r)$ vetores de peso máximo de dois GL_m-módulos isomorfos $W_m(\mu)$ de $B_m \subset K\langle V_m\rangle$ e seja $w_\mu^{'} \notin B_m \cap T(M_2(K))$. Tome $a_1 = e_{11} - e_{22}$, $a_2 = e_{12} + e_{21}$, $a_3 = e_{12} - e_{21}$. Um cálculo simples mostra que

$$a_1a_2 = -a_2a_1 = a_3, \quad a_2a_3 = -a_3a_2 = -a_1, \quad a_3a_1 = -a_1a_3 = -a_2$$
$$a_1^2 = a_2^2 = 1, \quad a_3^2 = -1.$$

Assim reordenando os elementos em $w_\mu(a_1, a_2, a_3)$ com a ajuda da primeira linha e em seguida utilizando as relações da segunda linha vemos que existem $\alpha^{'}$, $\alpha^{''} \in K$ tais que

$$w_\mu^{'}(a_1, a_2, a_3) = \alpha^{'} a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}a_3^{\epsilon_3}, \quad w_\mu^{''}(a_1, a_2, a_3) = \alpha^{''} a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}a_3^{\epsilon_3},$$

onde $\epsilon_i = 0, 1$, $\epsilon_i \equiv \mu_i \pmod 2$, $i = 1, 2$. Como $w_\mu^{'}$ não é identidade polinomial de $M_2(K)$, então $\alpha^{'} \neq 0$. Por outro lado,

$$w_\mu(x_1, x_2, x_3) = \alpha^{''} w_\mu^{'}(x_1, x_2, x_3) - \alpha^{'} w_\mu^{''}(x_1, x_2, x_3) \in B_m$$

é nulo para $x_i = a_i$, $i = 1, 2, 3$ e assim $w_\mu(x_1, x_2, x_3)$ é uma identidade própria para $M_2(K)$. Portanto, w'_μ e w''_μ são linearmente dependentes módulo $B_m \cap T(M_2(K))$ e assim $k(\mu) \leqslant 1$. A prova estará completa se construirmos um vetor de peso máximo não nulo $w_\mu \in B_m(\mathfrak{M}_2)$. Vamos fazer isso analisando alguns casos.

- Se $\mu_1 - \mu_2 \equiv 1 \pmod 2$, então

$$w_\mu = [x_1, x_2](s_3(\operatorname{ad} x_1, \operatorname{ad} x_2, \operatorname{ad} x_3))^{\mu_3}(\operatorname{ad} x_1)^{\mu_1-\mu_2}(\operatorname{ad}[x_1, x_2])^{\mu_2-\mu_3-1}.$$

- Se $\mu_1 - \mu_2 \equiv 0$, $\mu_2 - \mu_3 \equiv 1 \pmod 2$, então

$$w_\mu = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}(s_3(\operatorname{ad} x_1, \operatorname{ad} x_2, \operatorname{ad} x_3))^{\mu_3}(\operatorname{ad} x_1)^{\mu_1-\mu_2}(\operatorname{ad}[x_1, x_2])^{\mu_2-\mu_3-1}, x_{\sigma(2)}].$$

- Se $\mu_1 - \mu_2 \equiv \mu_2 - \mu_3 \equiv 0 \pmod 2$ e $\mu_2 \neq \mu_3$, então

$$w_\mu = w_\nu[x_1, x_2], \quad \nu = (\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \mu_3).$$

- Se $\mu_1 - \mu_2 \equiv 0 \pmod 2$ e $\mu_2 = \mu_3 > 0$, então

$$w_\mu = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}(s_3(\operatorname{ad} x_1, \operatorname{ad} x_2, \operatorname{ad} x_3))^{\mu_3-1}(\operatorname{ad} x_1)^{\mu_1-\mu_2}[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}].$$

Uma vez que $[x_1, x_2] = s_2(x_1, x_2)$, obtemos que os polinômios w_μ são da forma (2.7) e são anti-simétricos. Logo são vetores de peso máximo de $W_m(\mu) \subset B_m$. Tomando h_1, h_2 e h_3 como na Observação 2.4.6 concluímos que $w_\mu(h_1, h_2, h_3) \neq 0$, isto é, w_μ são elementos não nulos de $B_m(\mathfrak{M}_2)$. ■

Corolário 2.4.8 ([7]). *Seja $var\, sl_2(K)$ a variedade de álgebra de Lie gerada pela álgebra $sl_2(K)$ das matrizes 2×2 com traço zero. Então o seguinte $GL_m(K)$-isomorfismo verifica-se para a álgebra relativamente livre $F_m(var\, sl_2(K))$*

$$F_m(var\, sl_2(K)) \cong W_m(1) + \sum W_m(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

onde o somatório percorre todas partições com $\mu_2 > 0$ e tais que pelo menos um dos inteiros $\mu_1 - \mu_2$ e $\mu_2 - \mu_3$ é ímpar.

Prova: Sabemos que a álgebra $F = F_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$ é isomorfa à subálgebra de Lie de $F_m(\mathfrak{M}_2)$ gerada por $x_1, \ldots, x_m$. Como em $F_m(\mathfrak{M}_2)$ o módulo $W_m(1)$ têm multiplicidade 1 e coincide com o espaço vetorial gerado por $x_1, \ldots, x_m$ temos que $W_m(1) \subset F_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$ e é suficiente encontrar a decomposição do ideal comutador $F'_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$. Mas os elementos de $F'_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$ são combinações lineares de produtos de comutadores, assim $F'_m(\mathrm{var}\, sl_2(K)) \subset B_m(\mathfrak{M}_2)$. Pelo Teorema 2.4.7, $F'_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$ é uma soma direta de GL_m-módulos $W_m(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_2 > 0$, dois a dois não isomorfos. Na parte final da prova do Teorema 2.4.7 vimos que para $\mu_1 - \mu_2 \not\equiv 0$ ou $\mu_2 - \mu_3 \not\equiv 0 \pmod 2$, o vetor de peso máximo w_μ é um elemento de Lie. Logo os módulos correspondentes a estes vetores participam da decomposição de $F_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$. Seja $\mu_1 - \mu_2 \equiv \mu_2 - \mu_3 \equiv 0 \pmod 2$ e suponha que $w_\mu(x_1, x_2, x_3) \in W_m(\mu) \subset F_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$. Então como na prova do Teorema 2.4.7,

$$w_\mu(x_1, x_2, x_3) = a h_1^\delta h_2^\delta h_3^\delta, \quad 0 \neq a \in K,\ \delta \equiv \mu_3 \pmod 2,$$

e assim $w_\mu(h_1, h_2, h_3)$ é uma matriz escalar não nula e não pertence a $sl_2(K)$. Portanto $W_m(\mu)$ não participa da decomposição de $F_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$. ∎

CAPÍTULO 3

Uma Base para as Identidades de $sl_2(K)$

Neste capítulo provaremos que a variedade V gerada pela álgebra de Lie $gl_2(K)$ de todas as matrizes de ordem 2 sobre um corpo de característica zero possui uma base finita de identidades polinomiais. Este teorema falha no caso onde o corpo é infinito de característica 2, veja [35]. Se a característica do corpo K é diferente de 2, qualquer matriz pode ser representada como uma soma de uma matriz escalar com uma de traço zero. Assim $\mathrm{var}\,(gl_2(K)) = \mathrm{var}\,(sl_2(K))$ e podemos trabalhar com $sl_2(K)$, a álgebra de Lie das matrizes de ordem 2 com traço zero, com entradas num corpo K de característica zero. Estes resultados podem ser encontrados em [2] e em [26].

3.1 Identidades Fracas

Definição 3.1.1. Seja (R, G) um par cujas componentes são respectivamente uma álgebra associativa R e uma subálgebra de Lie $G \subseteq R^{(-)}$, sobre um corpo K, tais que G gera R como uma álgebra associativa. O polinômio associativo não nulo $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ em $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$, a álgebra associativa livre sobre K livremente gerada por x_1, x_2, $\ldots$, x_n é chamado uma *identidade fraca* do par (R, G) se para qualquer escolha de $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ temos $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 0$.

Defina $a \circ b = ab + ba$. Um cálculo simples mostra que para $a,\ b \in sl_2(K)$, $a \circ b$ é uma matriz escalar. Assim $(M_2(K), sl_2(K))$ satisfaz a identidade fraca:

$$[x \circ y, z] = 0. \tag{3.1}$$

Observação 3.1.2. A seguinte relação é válida em qualquer álgebra associativa

$$[x, y, z] = (y \circ z) \circ x - (z \circ x) \circ y. \tag{3.2}$$

Lema 3.1.3. *As seguintes identidades são conseqüências da identidade (3.1) (isto é, elas verificam-se em qualquer par satisfazendo (3.1)):*

$$\begin{aligned} [x, y, z] &= 2(y \circ z)x - 2(x \circ z)y && (3.3) \\ x(y \circ [z, u]) &= (x \circ y)[z, u] + (z \circ x)[u, y] - (u \circ x)[z, y] && (3.4) \\ 4(x \circ y)[z, u] &= [z, x, y, u] + [z, y, x, u] - [u, x, z, y] - [u, y, z, x]. && (3.5) \end{aligned}$$

Prova: A identidade (3.3) é conseqüência imediata de (3.2). Agora, usando (3.1) e (3.3) temos:

$$\begin{aligned} 2x(y \circ [z, u]) - 2(x \circ y)[z, u] &= 2(y \circ [z, u])x - 2(x \circ y)[z, u] = [x, [z, u], y] \\ &= [u, z, x, y] = [2(z \circ x)u - 2(u \circ x)z, y] \\ &= 2(z \circ x)[u, y] - 2(u \circ x)[z, y] \end{aligned}$$

que é a identidade (3.4).

Utilizando a equação (3.3) podemos reescrever os termos do lado direito da equação (3.5) da seguinte forma:

$$[x, y, z, u] = 2[(y \circ z)x, u] - 2[(x \circ z)y, u]$$

$$[x, z, y, u] = 2[(z \circ y)x, u] - 2[(x \circ y)z, u]$$

$$-[u, y, x, z] = -2[(y \circ x)u, z] + 2[(u \circ x)y, z]$$

$$-[u, z, x, y] = -2[(z \circ x)u, y] + 2[(u \circ x)z, y].$$

Somando estes termos e considerando o fato de $a \circ b$ ser um elemento central temos a identidade (3.5). ■

Lema 3.1.4. *Sejam* $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_l)$ *um polinômio multilinear em* $K\langle x_1, x_2, \ldots, x_l\rangle$ *e* $f' = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_l)$*. Então existe um polinômio multilinear* $v(y_0, y_1, \ldots, y_{l-2})$ *tal que*

$$f - f' = v([x_1, x_2], x_3, \ldots, x_l) \tag{3.6}$$

é uma conseqüência da identidade fraca (3.1).

Prova: A prova será por indução sobre $\deg f = l$. Seja C a subálgebra de $K\langle x_1, \ldots, x_l\rangle$ gerada pelos elementos $x_i \circ x_j$ e $x_i \circ [x_j, x_m]$, $1 \leqslant i,\ j,\ m \leqslant l$, cujas imagens em $M_2(K)$ são centrais. Aplicando as identidades (3.1)-(3.4) podemos escrever f como combinação C-linear de comutadores de comprimento 1 ou 2 em $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_l$. Utilizando as identidades (3.1) e (3.3) podemos reescrever, módulo a identidade (3.1), qualquer comutador de comprimento $\geqslant 3$ como uma combinação linear de comutadores de comprimento no máximo 2. Assim resta mostrar que o mesmo acontece com elementos da forma $[x_i, x_j]x_m$. Mas

$$[x_i, x_j]x_m = \frac{1}{2}[x_i, x_j] \circ x_m + \frac{1}{2}[[x_i, x_j], x_m] = \frac{1}{2}[x_i, x_j] \circ x_m + (x_j \circ x_m)x_i - (x_i \circ x_m)x_j.$$

Logo segue desta observação e da identidade (3.4) que para mostrar a existência de uma conseqüência da forma (3.6) é suficiente considerar f tendo uma das seguintes formas:

(I) $f = [x_1, x_2]$,

(II) $f = x_1 \circ x_2$,

(III) $f = (x_1 \circ x_3)x_2$,

(IV) $f = [x_1, x_3] \circ x_2$.

No caso (I) $f - f' = [x_1, x_2] - [x_2, x_1] = 2[x_1, x_2]$, então basta tomar $v(y_0) = 2y_0$; no caso (II) $f - f' = (x_1 \circ x_2) - (x_2 \circ x_1) = 0$ e basta tomar $v = 0$; no caso (III) $f - f' = (x_1 \circ x_3)x_2 - (x_2 \circ x_3)x_1 = -\frac{1}{2}[x_1, x_2, x_2]$ e podemos definir $v = \frac{1}{2}[y_0, y_1]$. No caso (IV) observemos que $0 = [x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z]$ de onde concluímos que $[x_1, x_3] \circ x_2 = [x_2, x_1] \circ x_3$ e assim

$$\begin{aligned} f - f' &= [x_1, x_3] \circ x_2 - [x_2, x_3] \circ x_1 \\ &= [x_2, x_1] \circ x_2 - [x_1, x_2] \circ x_3 \\ &= -2(x_3 \circ [x_1, x_2]), \end{aligned}$$

logo basta definir $v(y_0, y_1) = -2(y_1 \circ y_0)$. Assim a base da indução está provada.

Suponha que para qualquer identidade fraca de grau menor que l a identidade (3.6) seja uma conseqüência de (3.1). Seja f de grau l uma identidade fraca de $sl_2(K)$. Então f' também é uma identidade fraca de $sl_2(K)$, daí o mesmo vale para $v([x_1, x_2], x_3, \ldots, x_l) = 0$. Como $sl_2(K)$ é igual a sua subálgebra derivada (pois é simples), então $v(y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}) = 0$ é uma conseqüência de (3.1) pela hipótese de indução. Logo $f - f' = 0$ é uma conseqüência da identidade (3.1). ■

Teorema 3.1.5. *Seja K um corpo tal que $char K = 0$. Se f é uma identidade fraca do par $(M_2(K), sl_2(K))$, então f é uma conseqüência de (3.1).*

Prova: Como no lema anterior a escolha do par (x_1, x_2) foi arbitrária, então para qualquer permutação σ dos índices 1, 2, ..., l a seguinte equação é uma conseqüência da identidade (3.1):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_l) - f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(l)}) = 0.$$

Somando todas as equações acima quando $\sigma \in S_l$ chegamos que a equação:

$$l! f(x_1, x_2, \ldots, x_l) - \lambda \sum_{\sigma \in S_l} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(l)} = 0$$

é uma conseqüência da identidade (3.1). Substituindo

$$h = x_1 = x_2 = \cdots = x_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

teremos $\lambda l! h^l = 0$, daí $\lambda = 0$. Portanto $f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = 0$ é uma conseqüência da identidade (3.1). ■

3.2 Identidades da Álgebra de Lie $sl_2(K)$

Lema 3.2.1. *A álgebra $G = sl_2(K)$ satisfaz as seguintes identidades standard (de Lie)*

$$\sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^\sigma [x_n, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}] = 0 \quad n = 5,\ 6,\ \ldots \tag{3.7}$$

Prova: Como $sl_2(K)$ é de dimensão 3 e a identidade (3.7) é de grau maior ou igual a 5, é imediato verificar a afirmação do lema. ■

Lema 3.2.2. *Para todo número natural s, $sl_2(K)$ satisfaz*

$$([y,z])(ad\,x)^{2s+1} = [y, z(ad\,x)^{2s+1}] + [y(ad\,x)^{2s+1}, z]. \tag{3.8}$$

Prova: De fato, pela equação (3.5) temos

$$4x^2[y,x] = y(\mathrm{ad}\,x)^3. \tag{3.9}$$

Daí

$$\begin{aligned} ([y,z])(\mathrm{ad}\,x)^{2s+1} &= 2^{2s}x^{2s}[y,z,x] = [y, 2^{2s}x^{2s}[z,x]] + [2^{2s}x^{2s}[y,x],z] \\ &= [y, z(\mathrm{ad}\,x)^{2s+1}] + [y(\mathrm{ad}\,x)^{2s+1}, z]. \end{aligned}$$

■

Pela Seção 2.2, o espaço PL_5 dos polinômios comutadores multilineares (isto é, os polinômios de Lie com respeito ao colchete) é uma soma direta dos seguintes S_5-submódulos irredutíveis:

$$PL_5 = Af_{T_1(\tau_1)} \oplus Af_{T_2(\tau_2)} \oplus Af_{T_3(\tau_3)} \oplus Af_{T_4(\tau_4)} \oplus Af_{T_5(\tau_5)}.$$

Denote por $PL'(V)$, $V = \mathrm{var}\,(G)$, o conjunto de todas as identidades multilineares de grau 5 verificadas em V. Assim $PL'(V)$ será um submódulo de PL_5, mas cada S_5-submódulo em $PL_5(X)$ é igual à soma de alguns dos $Af_{T_i(\tau_i)}$, $T_i(\tau_i) \in T$, onde $T \subseteq \{T_1(\tau_1), T_2(\tau_2), T_3(\tau_3), T_4(\tau_4), T_5(\tau_5)\}$. Vamos verificar a validade das identidades da forma $g_{T_i(\tau_i)} = 0$ em G. Temos que $g_{T_5(\tau_5)} = (-1)\sum_{\sigma\in S_4}(-1)^\sigma[x_1, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}] = 0$ é uma conseqüência da identidade (3.7) com $n = 5$. Mais ainda,

$$g_{T_3(\tau_3)} = [x_2,x_3](\mathrm{ad}\,x_1)^3 + [x_3, x_2(\mathrm{ad}\,x_1)^3] + [x_3(\mathrm{ad}\,x_1)^3, x_2].$$

Logo $g_{T_3(\tau_3)} = 0$ é uma conseqüência da identidade (3.8) com $s = 1$. Além disso, $g_{T_1(\tau_1)} = 2([x_1,x_2])(\mathrm{ad}\,x_1)^3$, $g_{T_2(\tau_2)} = [x_1,x_2,x_1,x_1,x_2] - [x_1,x_2,x_1,x_2,x_1]$ e

$$\begin{aligned} g_{T_4(\tau_4)} &= [x_1,x_2,x_1,x_2,x_3] + [x_2,x_3,x_1,x_2,x_1] + [x_3,x_1,x_1,x_2,x_2] \\ &+ [x_3,x_2,x_2,x_1,x_1] + [x_1,x_3,x_2,x_1,x_2]. \end{aligned}$$

Escolhemos a base canônica de $sl_2(K)$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

com tabela de multiplicação $[e_1, e_3] = -2e_1$, $[e_3, e_2] = -2e_2$, $[e_2, e_1] = -e_3$. É imediato ver que $g_{T_1(\tau_1)}$ não é nulo para $x_1 = e_3$, $x_2 = e_1$, $g_{T_4(\tau_4)}$ assume um valor não nulo em $x_1 = e_3$, $x_2 = e_2$, $x_3 = e_1$. Agora no caso de $g_{T_2(\tau_2)}$ é suficiente tomar $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$. Portanto,

$$PL'(V) = Af_{T_3(\tau_3)} \oplus Af_{T_5(\tau_5)}.$$

Lema 3.2.3. *As seguintes identidades de grau 6 são identidades da álgebra de Lie $sl_2(K)$.*

$$[y, z, u, x, x, x] = [y, x, x, z, u, x] - [z, x, y, x, u, x] \tag{3.10}$$

$$[y, x, x, x, z, u] = [y, x, z, z, z, u] - [u, x, [y, x, z], x] \tag{3.11}$$

Prova: Basta mostrar que estas identidades são identidades fracas. Estas seguem usando (3.9) e $4x^2[y, z] = [y, x, x, z] - [z, x, y, x]$ que são conseqüências da identidade fraca (3.5). De fato,

$$\begin{aligned} [y, z, u, x, x, x] &= [y, z, u](\operatorname{ad} x)^3 = 4x^2[y, z, u, x] = [4x^2[y, z], u, x] \\ &= [y, x, x, z, u, x] - [z, x, y, x, u, x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [y, x, x, x, z, u] &= [y(\operatorname{ad} x)^3, z, u] = [4x^2[y, x], z, u] = 4x^2[y, x, z, u] \\ &= [y, x, z, z, z, u] - [u, x, [y, x, z], x]. \end{aligned}$$

■

Nosso objetivo é mostrar que a identidade (3.7) com $n = 5$ e a identidade (3.8) com $s = 1$ formam uma base das identidades polinomiais de $sl_2(K)$, quando K é um corpo de característica zero. A prova deste fato usa o mesmo método do Teorema 3.1.5. Sendo assim vamos formular aqui um lema que auxiliará-nos em nosso objetivo.

Escreveremos $\sigma_{ij} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_l) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_l)$. Finalmente usaremos o símbolo $\widehat{\ }$ para significar que a variável sob este sinal deverá ser omitida.

Lema 3.2.4. *Seja $\mathfrak{U}$ a variedade de álgebras de Lie determinada pelas identidades*

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma [x_5, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}] = 0 \tag{3.12}$$

$$[y, z](ad\,x)^3 = [y(ad\,x)^3, z] + [y, z(ad\,x)^3]. \tag{3.13}$$

Dado um polinômio de Lie f de grau > 4 e dois índices i, j, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, existe um polinômio multilinear de Lie $g(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_l)$ de grau $l-1$ tal que

$$f - \sigma_{ij} f = \beta \Big\{ (1 - \sigma_{ij}) \sum_{\sigma} [x_i, x_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{i_{\sigma(l-2)}}, x_j] \Big\} + g|_{x_i = [x_i, x_j]}, \tag{3.14}$$

onde β é algum escalar e a soma é sobre todas as permutações σ do conjunto $\{1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, \widehat{j}, \ldots, l\}$. No caso de l ímpar podemos tomar $\beta = 0$.

Prova: A prova será feita por indução no grau l de f. Inicialmente observe que em qualquer álgebra de Lie temos a seguinte igualdade, que pode ser verificada por indução sobre k e utilizando a anticomutatividade e a identidade de Jacobi:

$$k![a, v_1, \ldots, v_k] = \sum_{\sigma \in S_k} [a, v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}] + \sum_{w_i} [a, w_1, \ldots, w_{k-1}], \tag{3.15}$$

onde w_i são comutadores em $v_1, \ldots, v_k$. Assumiremos que f é um comutador, uma vez que uma base de $P_l(x_1, \ldots, x_l)$ é formada por monômios da forma $[x_l, v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(l-1)}]$. Além disso tomaremos $i = l$, $j = l - 1$ e por questão de simplicidade escreveremos $x_l = z$, $x_{l-1} = x$ e $\tau_{l,l-1} = \tau$.

A base da indução é o caso $l = 5$. Se $f = [[z, x], \ldots]$, $[z, x_1, x, \ldots]$, então basta tomar $\beta = 0$, utilizar a anticomutatividade e a identidade de Jacobi e teremos a equação (3.14). Seja $f = [z, x_1, x_2, x, x_3]$, então aplicando a equação (3.3) podemos escrever

$$\begin{aligned} f - \tau(f) &= 2(x_1 \circ x_2)[z, x, x_3] - 2(z \circ x_2)[x_1, x, x_3] - 2(x_1 \circ x_2)[x, z, x_3] \\ &+ 2(x \circ x_2)[x_1, z, x_3] = 4(x_1 \circ x_2)[z, x, x_3] + [x, z, x_2, x_1, x_3]. \end{aligned}$$

Agora substituindo $y = x_1$, $z = x_2$, $x = [z, x]$ e $u = x_3$ na equação (3.5) temos que

$$\begin{aligned} f - \tau(f) &= [z, x, x_1, x_2, x_3] + 2[z, x, x_2, x_1, x_3] - [x_3, x_1, [z, x], x_2] \\ &- [x_3, x_2, [z, x], x_1] \end{aligned}$$

que é a decomposição desejada tomando $\beta = 0$.

Pela identidade (3.15) resta considerar os dois casos seguintes.

(i) $f = \sum_{\sigma \in S_3} [z, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x]$. Neste caso basta fazer a linearização completa da equação (3.8). Assim teremos a identidade (3.14) para $\beta = 0$.

(ii) $[[x_i, x_j], z, x_t, x]$. Usando a equação (3.3) temos:

$$\begin{aligned} f - \tau(f) &= 2(z \circ x_t)[[x_i, x_j], x] - 2([x_i, x_j] \circ x_t)[z, x] - 2(x \circ x_t)[[x_i, x_j], z] \\ &\quad +2(z \circ x_t)[[x_i, x_j], x] + 2([x_i, x_j] \circ x_t)[x, z] \\ &= -4([x_i, x_j] \circ x_t)[x, z] + [[x_i, x_j], [x, z, t]]. \end{aligned}$$

Utilizando a equação (3.6) obtemos

$$\begin{aligned} f - \tau(f) &= -[x, [x_i, x_j], x_t, z] - [x, x_t, [x_i, x_j], z] \\ &\quad +[z, [x_i, x_j], x, x_t] + [z, x_t, x, [x_i, x_j]] + [[x_i, x_j], [x, z, t]] \end{aligned}$$

que é a decomposição desejada. Logo a base da indução está provada.

Suponha que o lema esteja provado para o caso onde o grau de f é menor que l. Seja f de grau l.

Primeiro vamos considerar o caso l par. Se $f = [z, x_1, \ldots, x_t, x, x_{t+1}, \ldots, x_{l-2}]$ com $t < l - 2$, então temos pela hipótese de indução que para o comutador de grau ímpar $f' = [z, x_1, \ldots, x_t, x, x_{t+1}, \ldots, x_{l-3}]$ existe um polinômio de Lie g' satisfazendo a identidade (3.14) para $\beta = 0$. Então $g = [g', x_{l-2}]$ satisfaz (3.14) para $\beta = 0$. Agora a igualdade (3.15) implica que resta considerar os dois casos seguintes:

(i) $f = \sum_{\sigma \in S_{l-1}} [z, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l-2)}, x]$. Neste caso basta tomar $\beta = 1$ e $g = 0$.

(ii) $f = [z, x_1, \ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots, x_{l-2}, x]$. Então pela hipótese de indução, para o comutador de grau ímpar $f = [z, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_{l-2}, x]$ existe um polinômio de Lie $g'(z, x_1, \ldots, \widehat{x}_{i+1}, \ldots, x_{l-2})$ tal que a identidade (3.14) é satisfeita com $\beta = 0$. Daí f satisfaz a identidade (3.14) com $\beta = 0$ e $g = g'|_{x_i = [x_i, x_{i+1}]}$.

Considere o caso em que l é ímpar. Neste caso devemos ter $\beta = 0$. Agora se $f = [z, \ldots, x, \ldots, x_{l-3}, x_{l-2}]$, então a identidade (3.14) com $\beta = 0$ segue imediatamente da hipótese de indução.

Se $f = [z, x_1, \ldots, x_{l-3}, x, x_{l-2}]$, então pela hipótese de indução

$$f - \tau(f) = \beta\left\{(1-\tau)\sum_{\sigma\in S_{l-3}}[z, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l-3)}, x, x_{l-2}]\right\} + [g^{'}|_{z=[z,x]}, x_{l-2}].$$

O segundo termo na soma tem a forma desejada e como l é ímpar, aplicando a linearização da seguinte identidade de Lie, que é uma conseqüência de (3.11):

$$[z(\operatorname{ad} y)^{2k}, x, x_{l-2}] = [z(\operatorname{ad} y)^{2(k-1)}, x, y, y, x_{l-2}] + [y, x_{l-2}, [z(\operatorname{ad} y)^{2(k-1)}, x], y]$$

e usando a hipótese de indução, o primeiro termo pode ser reduzido à forma desejada.

A igualdade (3.15) implica que resta considerar os dois casos seguintes:

(i) $f = \sum_{\sigma\in S_{l-2}}[z, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(2k+1)}, x]$, $l-2 = 2k+1$. Neste caso a identidade (3.14) para $\beta = 0$ é obtida através da linearização completa da identidade (3.13), que é uma conseqüência de (3.5).

(ii) $f = [z, x_1, \ldots, x_{l-3}, x]|_{x_i=[x_i,x_{l-2}]}$. Então pela hipótese de indução

$$f - \tau(f) = \beta^{'}\left\{(1-\tau)\sum_{\sigma\in S_{l-3}}[z, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(l-3)}, x]\right\}|_{x_i=[x_i,x_{l-2}]} + g^{'}|_{z=[z,x],x_i=[x_i,x_{l-2}]}.$$

O último somando é da forma desejada. O primeiro termo pode ser reescrito como $a = \beta^{'}\sum[[x_i, x_{l-2}], \ldots]$. Assim a é anti-simétrico com respeito à $x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{l-3}$. Aplicando a equação (3.10), para $t \geqslant 3$ temos

$$[[u, v, z](\operatorname{ad} y)^t, x] = [[u, y, y, v, z](\operatorname{ad} y)^{t-2}, x] + [[y, v, u, y, z](\operatorname{ad} y)^{t-2}, x].$$

Continuando a aplicar (3.10) para cada termo do lado direito desta última igualdade, se for possível, obtemos a seguinte identidade de Lie, que segue de (3.12) e (3.13):

$$[[u, v, z](\operatorname{ad} y)^t, x] = \sum_i \pm[w_i^{'}, z, y, y, x] + \sum_i \pm[u_i^{'}, v_i^{'}, z, y, x] \tag{3.16}$$

onde $w_i^{'}$, $u_i^{'}$, $v_i^{'}$ são comutadores em u, v, y. A linearização completa de (3.16) com respeito à y mostra que a pode ser representado na forma

$$(1-\tau)\left\{\sum_i \pm[w_i, z, x_t, x_r, x] + \sum_i \pm[u_i, v_i, z, x_t, x] + [b, [z, x]]\right\}$$

onde w_i, u_i, v_i são comutadores e b é um polinômio de Lie. No entanto para comutadores de comprimento 5 a identidade (3.14) se verifica com $\beta = 0$. Portanto (3.14) também se verifica para o elemento a com $\beta = 0$. Logo também para f, o que prova lema. ■

Lema 3.2.5. *Seja $f(x_1, \ldots, x_l) = 0$ uma identidade multilinear de grau maior que 4 de $sl_2(K)$. Então existe um polinômio $g(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_l)$ tal que a identidade*

$$f - \tau_{ij}(f) = g|_{x_i=[x_i,x_j]} \tag{3.17}$$

é uma conseqüência de (3.12) e (3.13).

Prova: Seja f uma identidade multilinear de grau l. Se l é ímpar, o Lema 3.2.4 garante a existência de g tal que a equação (3.17) é uma conseqüência de (3.12) e (3.13). Se l é par, então pelo Lema 3.2.4, existem β e g tais que a identidade (3.17) é uma conseqüência de (3.12) e (3.13). Agora substitua $x_i = e_1$, $x_j = e_2$ e a demais variáveis por e_3. Assim teremos

$$0 = \beta(l-2)!2e_3$$

uma vez que $[x_i, x_j] = e_3$ e $g|_{[x_i,x_j]} = 0$. Logo $\beta = 0$ e daí para qualquer identidade de $sl_2(K)$ existe g tal que

$$f - \tau(f) = g|_{x_i=[x_i,x_j]}$$

é uma conseqüência de (3.12) e (3.13). ■

Teorema 3.2.6. *As identidades polinomiais da álgebra de Lie $G = sl_2(K)$ sobre um corpo K de característica zero admitem uma base da forma*

$$\sum_{\sigma\in S_4} (-1)^{\sigma}[x_5, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}] = 0$$

$$([y, z])(adx)^3 = [(y)(adx)^3, z] + [y, (z)(adx)^3].$$

Prova: O teorema será demonstrado por indução sobre o grau l das identidades multilineares de $sl_2(K)$. A base da indução é o caso $l = 4$. Uma vez que a única identidade de grau 4 de $sl_2(K)$ é a identidade standard e esta não é uma identidade de Lie, este caso está provado.

Suponha que para as identidades multilineares de $sl_2(K)$ de grau menor que l o teorema seja verdadeiro. Seja $f(x_1, \ldots, x_l) = 0$ uma identidade multilinear em $sl_2(K)$. Então pelo Lema 3.2.5 existe um polinômio $g(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_l)$ tal que a identidade (3.17) é uma conseqüência de (3.12) e (3.13). Desde que $f = 0$ é uma identidade de $sl_2(K)$ devemos ter $g|_{x_i=[x_i,x_j]} = 0$ uma identidade de $sl_2(K)$. Como $sl_2(K)$ é igual a sua subálgebra derivada, $g = 0$ é uma identidade de grau $l - 1$ de $sl_2(K)$ e daí pela hipótese de indução $f - \sigma(f) = 0$ segue de (3.12) e (3.13). Além disso, para qualquer $\sigma \in S_l$ a identidade $f - \sigma(f) = 0$ é uma conseqüência de (3.12) e (3.13). Logo o mesmo é verdadeiro para a identidade $l!f = \sum_{\sigma \in S_l} \sigma(f) = 0$. Portanto o teorema está provado. ■

CAPÍTULO 4

Uma Base das Identidades de $M_2(K)$

Neste capítulo provaremos que as identidades multilineares da álgebra associativa $M_2(K)$ admitem uma base finita. Para isto acrescentaremos à base das identidades de $sl_2(K)$, obtida no capítulo anterior, mais algumas identidades que são válidas na álgebra $M_2(K)$ e que irão gerar todas as identidades multilineares de $M_2(K)$. Tais identidades serão determinadas no decorrer da prova do Teorema 4.0.16. Os resultados deste capítulo foram obtidos por Razmyslov [26].

Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com geradores livres x_1, x_2, ... Queremos encontrar um conjunto finito de identidades P verificadas em $M_2(K)$ e tal que todas as identidades multilineares da álgebra $M_2(K)$ sejam conseqüências de P. O conjunto P consistirá das identidades de Lie (3.12) e (3.13), das identidades multilineares

$$\sum_{\sigma\in S_4}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = 0, \tag{4.1}$$

$$[v_1 \circ v_2, z] = 0, \tag{4.2}$$

$$4[z,x](v_1 \circ v_2) = [z,v_1,v_2,x] + [z,v_2,v_1,x] - [x,v_1,z,v_2] - [x,v_2,z,v_1], \tag{4.3}$$

onde a notação $v_1 \circ v_2$ é a definida anteriormente, v_1 e v_2 são comutadores de comprimento 2 e das duas identidades multilineares de grau 6: $f_i' = \sum_j \beta_{ij}(u_{ij} \circ [v_{ij}, x_6]) = 0$ $i = 1, 2$, para alguns u_{ij} e v_{ij}.

Definição 4.0.7. Considere os comutadores em $x_1, \ldots, x_{l-1}$ totalmente ordenados de tal forma que se o comprimento de u é menor que o de v, então $u < v$, onde u e v são comutadores em $x_1, \ldots, x_{l-1}$. Então os *comutadores básicos* são definidos da seguinte maneira:

(1) os comutadores básicos de comprimento 1 são $x_1, \ldots, x_{l-1}$,

(2) se os comutadores básicos de comprimento menor que n estão definidos, então o comutador $[u, v]$ de comprimento n é básico se, e somente se:

   (a) u e v são comutadores básicos e $u > v$,

   (b) se $u = [u_1, u_2]$, então $u_2 \leqslant v$.

Observação 4.0.8. Estes comutadores básicos também são chamados de comutadores básicos de Hall. Do Teorema 1.3.38 temos que os comutadores básicos formam uma base da álgebra de Lie livre com geradores livres $x_1, \ldots, x_{l-1}$.

Lema 4.0.9. *As identidades (3.12), (3.13), (4.1) e (4.2) verificam-se na álgebra $M_2(K)$.*

Prova: Uma vez que v_1 e v_2 são comutadores de comprimento 2, então $v_1, v_2 \in sl_2(K)$, assim $v_1 \circ v_2$ é uma matriz escalar. Logo $[v_1 \circ v_2, z] = 0$ é uma identidade polinomial para $M_2(K)$.

Como $\operatorname{char} K \neq 2$, qualquer matriz de $M_2(K)$ pode ser representada como uma soma de uma matriz escalar com uma matriz de traço zero. Reescreva a equação (4.1) da seguinte forma

$$s_4 = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3].$$

Assim é fácil ver que a equação (4.1) é uma identidade quando uma das matrizes é escalar. Portanto substituímos somente por matrizes de $sl_2(K)$. Mas $\dim sl_2 = 3$, logo $s_4 = 0$ em $sl_2(K)$. Portanto $s_4 = 0$ em $M_2(K)$. Como $M_2(K)$ tem dimensão 4 e (3.12) tem grau 5, é imediato ver que esta última é uma identidade de $M_2(K)$. Agora com o mesmo argumento utilizado para (4.1) vemos que (3.13) é uma identidade de $M_2(K)$. Portanto todas essas identidades verificam-se em $M_2(K)$. ∎

Lema 4.0.10. *Módulo as identidades (4.2) e (4.3) todo polinômio da forma $a = u_1u_2\dots u_n$, onde u_i são comutadores nos geradores x_1, x_2, $\dots$ de comprimento $\geqslant 2$ pode ser representado da forma*

$$a = c + v; \tag{4.4}$$

onde v é um polinômio de Lie e $c = \sum_i \beta_i(u_i' \circ [x_i, x_t])$, u_i' é um comutador nos geradores x_1, x_2, $\dots$ de comprimento $\geqslant 2$ e x_t um gerador fixado.

Prova: Indução sobre n. No caso $n = 1$ basta tomar $v = u_1$. Suponha que para todo polinômio em no máximo $n-1$ comutadores u_i o enunciado seja verdadeiro. Assim se $a = u_1\dots u_{n-1}u_n$, então

$$a = u_1\dots u_{n-1}u_n = u_1\dots u_{n-2}(\frac{1}{2}(u_{n-1}\circ u_n) + \frac{1}{2}[u_{n-1}, u_n]).$$

Se $n > 2$, então pela hipótese de indução $u_1\dots u_{n-1}$ é redutível à forma (4.4). Por outro lado a identidade (4.3) implica que $u_{n-2}(u_{n-1}\circ u_n)$ é um polinômio de Lie, logo $u_1\dots u_{n-1}u_n$ pode ser representado na forma (4.4).

Seja $n = 2$. Então

$$a = \frac{1}{2}(u_1\circ u_2) + [u_1, u_2].$$

Agora de (4.2) temos que $0 = [z, v_1\circ v_2] = [z, v_1]\circ v_2 + v_1\circ [z, v_2]$ e assim

$$[v_1, z]\circ v_2 = v_1\circ [z, v_2]. \tag{4.5}$$

Seja x_t um gerador que participa em u_1 e u_2. Com a ajuda de (4.5) podemos reordenar os elementos de $u_1\circ u_2$ de modo a obter uma expressão da forma $\sum_i \beta_i\{u_i'\circ [x_i, x_t]\}$. Portanto o lema está provado. ■

Observação 4.0.11. A Proposição 1.5.23 nos dá que as identidades de $M_2(K)$ são conseqüências das identidades próprias.

Assim pela observação anterior f pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma $u_1\dots u_n$, onde u_t são comutadores de comprimento > 2. Logo pelo Lema 4.0.10 uma base das identidades da álgebra $M_2(K)$ pode ser escolhida entre as identidades da forma $c+v = 0$, onde $v(x_1,\dots,x_l)$ é um polinômio multilinear de Lie e $c = \sum_i \beta_i(u_i'\circ[x_i, x_l])$, com $u_i^{'}$ um polinômio multilinear de Lie em $x_1, \ldots, \hat{x}_t, \ldots, x_{l-1}$ e $\beta_i \in K$. De (4.2) temos que os valores do polinômio c em $M_2(K)$ são matrizes escalares e os valores de v estão em $sl_2(K)$. Agora, se $\operatorname{char} K \neq 2$, então podemos escrever qualquer matriz em $M_2(K)$ como uma soma de uma matriz escalar com uma de traço zero. Daí $c + v = 0$ em $M_2(K)$, se e somente se, $c = 0$ e $v = 0$ em $M_2(K)$. Pelo Teorema 3.2.6, $v = 0$ é uma conseqüência de (3.12) e (3.13). Logo as identidades de Lie de $M_2(K)$ são conseqüências de (3.12), (3.13), (4.2) e (4.3), então basta procurar um conjunto de geradores para as identidades da forma $c = 0$.

Lema 4.0.12. *Seja $c = \sum_i \beta_i(u_i \circ [v_i, x_l])$ um polinômio multilinear, onde $\beta_i \in K$, u_i e v_i são comutadores em $x_1, \ldots, x_{l-1}$ e o comprimento de u_i é $\geqslant 2$. Então a identidade $c = 0$ verifica-se na álgebra $M_2(K)$ se, e somente se, $\sum_i \beta_i[u_i, v_i] = 0$ em $sl_2(K)$.*

Prova: Suponha que $\sum_i \beta_i[u_i, v_i]$ não é uma identidade fraca em $sl_2(K)$. Então existem $h_1, \ldots, h_{l-1} \in sl_2(K)$ tais que

$$(\sum_i \beta_i[u_i, v_i])|_{x_1=h_1,\ldots,x_{l-1}=h_{l-1}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

onde pelo menos um dos números α, β, γ é diferente de zero. Agora

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha^{'} & \beta^{'} \\ \gamma^{'} & -\alpha^{'} \end{pmatrix} = (2\alpha\alpha^{'} + \beta\beta^{'} + \gamma\gamma^{'}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como K é de característica diferente de 2, existem $h_l \in sl_2(K)$ tal que

$$(\sum_i \beta_i[u_i, v_i] \circ x_l)|_{x_1=h_1,\ \ldots,\ x_l=h_l} \neq 0 \quad \text{em} \quad sl_2(K).$$

Logo $(\sum_i \beta_i[u_i, v_i]) \circ x_l$ não é uma identidade de $M_2(K)$.

Seja $\sum_i \beta_i(u_i \circ [v_i, x_l])$ uma identidade de $M_2(K)$. Então esse polinômio é uma identidade fraca de $sl_2(K)$. Agora de (4.2) temos que

$$([x, y] \circ z) = (x \circ [y, z])$$

e daí

$$0 = \sum_i \beta_i(u_i \circ [v_i, x_l]) = \sum_i \beta_i[u_i, v_i] \circ x_l.$$

Se $\sum_i \beta_i[u_i, v_i] \neq 0$ para algumas matrizes A, $B \in sl_2(K)$, então como char $K \neq 2$ existe $h \in sl_2(K)$ tal que tomando $x_l = h$ temos que $\sum_i \beta_i(u_i \circ [v_i, x_l]) \neq 0$, o que é um absurdo. Logo $\sum_i \beta_i[u_{i,i}]$ é uma identidade fraca de $sl_2(K)$. ■

Observação 4.0.13. Em $sl_2(K)$ temos a identidade de Jacobi $[x_1, x_2, x_3] + [x_3, x_1, x_2] + [x_2, x_1, x_3] = 0$, portanto pelo Lema 4.0.12, em $M_2(K)$ temos a identidade

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_l] + [x_3, x_1] \circ [x_2, x_l] + [x_2, x_3] \circ [x_1, x_l] = 0 \tag{4.6}$$

que é a identidade standard de grau 4.

Lema 4.0.14. *Sejam u e v polinômios de Lie nos geradores $x_1, \ldots, x_{l-1}$, onde o comprimento de u é $\geqslant 2$ e, além disso, seja $[u, v] = \sum_i \delta_i[u_i, v_i]$, onde $[u_i, v_i]$ são comutadores básicos em $x_1, \ldots, x_{l-1}$, então a igualdade*

$$u \circ [v, x_l] = \sum_i \delta_i(u_i \circ [v_i, x_l]) \tag{4.7}$$

é uma conseqüência das identidades (4.6) e (4.2).

Prova: Utilizaremos a identidade (4.5) na seguinte forma

$$z_1 \circ [z_2, x_l] = -(z_2 \circ [z_1, x_l]), \tag{4.8}$$

onde z_1 e z_2 são comutadores com comprimento pelo menos 2.

Como os comutadores básicos formam uma base da álgebra de Lie livre com geradores livres $x_1, \ldots, x_{l-1}$, qualquer comutador de comprimento n pode ser representado como combinação linear de comutadores básicos de mesmo comprimento. Usando (4.8) podemos reordenar a expressão (4.7) de modo a obter uma soma de comutadores básicos, assim basta provar o lema para estes comutadores básicos. Sendo assim vamos supor u e v comutadores básicos, $u > v$ e que o comprimento de u é $\geqslant 2$.

Provaremos a igualdade (4.7) por indução no comutador básico v. Se $[u, v]$ é um comutador básico o resultado segue imediatamente de (4.2).

Suponha que para $[w_1, w_2]$, onde o comprimento de $[w_1, w_2]$ é igual ao comprimento de $[u, v]$, o comprimento de w_1 é $\geqslant 2$, $w_1 > w_2 > v_1$, w_1 e w_2 são comutadores básicos, o lema seja verdadeiro. Provaremos que o mesmo acontece para $[u, v]$. Como o comprimento de u é $\geqslant 2$, temos $u = [u_1, u_2]$ e pela definição de comutadores básicos u_1 e u_2 são comutadores básicos com $u_1 > u_2$. Se $u_2 \leqslant v$, então $[u, v]$ é um comutador básico e nada há a fazer. Suponha que $u_2 > v$. Então $[[u_1, u_2], v] = [[u_1, v], u_2] - [[u_2, v], u_1]$ e por (4.6) temos que

$$[u_1, u_2] \circ [v, x_l] = [u_1, v] \circ [u_2, x_l] - [u_2, v] \circ [u_1, x_l].$$

Assim se provarmos o lema para $[[u_1, v], u_2]$ e $[[u_2, v], u_1]$, ele será verdadeiro para $[[u_1, u_2], v]$.

Seja $[u_1, v] = \sum_i \delta_i w_i$, onde w_i são comutadores básicos. Como $u_1 > u_2$, devemos ter o comprimento de w_i igual ao comprimento de $[u_1, v]$, que por sua vez é maior que o de u_2, logo $w_i > u_2$. Mas $u_2 > v$, daí pela hipótese de indução o lema é válido para $[w_i, u_2]$ e portanto também é válido para $[[u_1, v], u_2]$.

Seja $[u_2, v] = \sum_i \varepsilon_i w_i^{'}$, onde w_i é um comutador básico. Se $w_i^{'} = u_1$, então $[w_i^{'}, u_1] = 0$ e utilizando (4.8) a afirmação do lema é válida. Se $w_i^{'} > u_1$ então da relação $u_1 > u_2 > v$ segue pela hipótese de indução que o lema é válido para o comutador $[w_i^{'}, u_1]$. Agora se $w_i^{'} < u_1$, então o comprimento de $w_i^{'}$ é igual ao comprimento de $[u_2, v]$ que por sua vez é maior que o de v. Logo $w_i^{'} > v$ e pela hipótese de indução o lema é válido para $[u_1, w_i^{'}]$. Utilizando (4.8) também será válido para $[w_i^{'}, u_1]$. Portanto a afirmação do lema está provada para o comutador $[[u_2, v], u_1]$. ∎

Corolário 4.0.15. *Suponha que na álgebra de Lie livre com geradores livres $x_1, \ldots, x_{l-1}$ a igualdade $\sum_i \delta_i [u_i, v_i] = 0$ verifica-se, onde u_i e v_i são comutadores básicos e o comprimento de u_i é $\geqslant 2$, então a identidade $\sum_i \delta_i (u_i \circ [v_i, x_l]) = 0$ é uma conseqüência das identidades (4.6) e (4.2).*

Prova: Uma vez que os comutadores básicos formam uma base da álgebra de Lie livre, o elemento $\sum_i \delta_i [u_i, v_i] = 0$ pode ser representado como uma combinação linear de comutadores básicos com coeficientes zero. Assim a afirmação segue do Lema 4.0.14. ∎

Teorema 4.0.16. *Seja K um corpo de característica zero, então qualquer identidade da álgebra $M_2(K)$ é uma conseqüência de um conjunto finito de identidades de grau 4, 5 e 6.*

Prova: Denote a identidade (3.12) por $f_1 = 0$ e transfira os elementos do lado direito da identidade (3.13) para o lado esquerdo e denote o resultado por $f_2 = 0$. Podemos escrever f_1

e f_2 na forma $f_i = \sum_j \beta_{ij}[u_{ij}, v_{ij}]$ $i = 1, 2$, onde u_{ij} e v_{ij} são comutadores e o comprimento de u_{ij} é $\geqslant 2$. Então pelo Lema 4.0.12

$$f_i' = \sum_j \beta_{ij}(u_{ij} \circ [v_{ij}, x_6]) = 0 \quad i = 1,\ 2$$

são identidades para a álgebra $M_2(K)$.

Mostramos anteriormente que, módulo as identidades (4.2), (4.3), (3.12) e (3.13), uma base de identidades da álgebra $M_2(K)$ pode ser escolhida entre as identidades da forma $c = 0$ onde $c = \sum_i \beta_i(u_i \circ [v_i, x_l])$ e os u_i são comutadores de comprimento $\geqslant 2$. Pelo Lema 4.0.12 $\sum_i \beta_i[u_i, v_i] = 0$ é uma identidade de $sl_2(K)$. Mas as identidades de $sl_2(K)$ são conseqüências de f_1 e f_2. Daí existem polinômios de Lie g_j tais que

$$\sum_i \beta_i[u_i, x_i] = \sum_{i,j} \delta_{ij}\phi_{ij},$$

onde $\phi_{ij} = f_i(g_j)$. Seja $\phi_{ij}' = f_i'|_{x_6 = x_l}(g_j)$. Então pelo corolário do Lema 4.0.14 a identidade

$$c\sum_i \beta_i(u_i \circ [x_i, x_l]) = \sum_{i,j} \delta_{ij}\phi_{ij}'$$

é uma conseqüência de (4.1) e (4.2). Por outro lado, $\phi_{ij}' = 0$ é uma conseqüência de $f_1' = 0$ e $f_2' = 0$. Logo $c = 0$ é uma conseqüência de f_1' e f_2'. Portanto, todas as identidades de $M_2(K)$ seguem das identidades

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = 0,\\
&[v_1 \circ v_2, z] = 0,\\
&4[z, x](v_1 \circ v_2) = [z, v_1, v_2, x] + [z, v_2, v_1, x] - [x, v_1, z, v_2] - [x, v_2, z, v_1],\\
&\sum_{\sigma \in S_4} [x_5, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}] = 0,\\
&([y, z])(\operatorname{ad} x)^3 = [(y)(\operatorname{ad} x)^3, z] + [y, (z)(\operatorname{ad} x)^3],\\
&f_i' = \sum_j \beta_{ij}(u_{ij} \circ [v_{ij}, x_6]) = 0 \quad i = 1,\ 2,
\end{aligned}$$

onde v_1 e v_2 são comutadores de comprimento 2 e para alguns u_{ij} e v_{ij}. ■

CAPÍTULO 5

Uma Base Minimal das Identidades de $M_2(K)$

No capítulo anterior provamos que sobre um corpo de característica zero as variedades de álgebras associativas e de Lie, geradas pela álgebra das matrizes de ordem 2, têm bases finitas. No caso associativo existe uma base de sete identidades e para a variedade de álgebras de Lie temos duas identidades que a determinam. É interessante considerar o problema de encontrar uma base minimal de identidades destas variedades. Por exemplo, no caso de álgebras de Lie, Filippov [11] indicou uma base de uma identidade e no caso associativo, Tki [33], mostrou que é suficiente considerar quatro identidades.

O presente capítulo apresenta a base minimal para $M_2(K)$ encontrada por V. Drensky em [6].

Teorema 5.0.17. *As identidades polinomiais da álgebra de matrizes $M_2(K)$ seguem da identidade standard $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e da identidade de Hall $[[x_1, x_2]^2, x_1]$ em duas variáveis.*

Na prova do teorema fazemos o uso da teoria de representações do grupo geral linear para determinarmos à estrutura de módulos dos polinômios próprios. Além disso não usaremos a forma concreta das identidades de Razmyslov mas o fato de que todas as identidades na base são de grau 4, 5 e 6, enquanto no caso de álgebras de Lie, de grau 5.

5.1 Decomposição de $B_m^{(5)}$ e $B_m^{(6)}$

Na Seção 2.4 apresentamos alguns resultados sobre como decompor $B_m^{(n)}$ e achamos esta decomposição para alguns valores de n. Aqui iremos encontrar a decomposição para $B_m^{(5)}$ e $B_m^{(6)}$ que será fundamental para obtermos a base minimal das identidades de $M_2(K)$.

Proposição 5.1.1 ([7], [8]). *A decomposição de $B_m^{(5)}$ é a seguinte:*

$$B_m^{(5)} \cong W_m(4,1) \oplus 2W_m(3,2) \oplus 2W_m(3,1^2) \oplus 2W_m(2^2,1) \oplus W_m(2,1^3).$$

Os vetores de peso máximo correspondentes são:

$$\begin{aligned}
w_{(4,1)}(x_1,x_2) &= [x_2,x_1,x_1,x_1,x_1];\\
w'_{(3,2)}(x_1,x_2) &= [[x_2,x_1,x_1],[x_2,x_1]];\\
w''_{(3,2)}(x_1,x_2) &= [x_2,x_1,x_1]\circ[x_2,x_1] = [[x_1,x_2]^2,x_1];\\
w'_{(3,1^2)}(x_1,x_2) &= \sum_{\pi\in S_3}(-1)^\pi[[x_{\pi(1)},x_1,x_1],[x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}]];\\
w''_{(3,1^2)}(x_1,x_2) &= \sum_{\pi\in S_3}(-1)^\pi[x_{\pi(1)},x_1,x_1]\circ[x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}];\\
w'_{(2^2,1)}(x_1,x_2,x_3) &= \sum_{\pi\in S_3}(-1)^\pi[[x_2,x_1,x_{\pi(1)}],[x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}]];\\
w''_{(2^2,1)}(x_1,x_2,x_3) &= \sum_{\pi\in S_3}(-1)^\pi[x_2,x_1,x_{\pi(1)}]\circ[x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}];\\
w'_{(2,1^3)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \sum_{\pi\in S_4}(-1)^\pi[[x_{\pi(1)},x_1,x_{\pi(2)}],[x_{\pi(3)},x_{\pi(4)}]];\\
w''_{(2,1^3)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \sum_{\pi\in S_4}(-1)^\pi[x_{\pi(1)},x_1,x_{\pi(2)}]\circ[x_{\pi(3)},x_{\pi(4)}],
\end{aligned}$$

onde denotamos por w'_λ e w''_λ duas cópias diferentes de $W_m(\lambda)$ em $B_M^{(5)}$, $\lambda = (3,2)$, $(3,1^2)$, $(2^2,1)$, $(2,1^3)$.

Prova: Pelo Teorema 2.4.4,

$$B_m^{(5)} \cong W_m(4,1) \oplus W_m(2,1) \otimes W_m(1^2) \oplus W_m(1^2) \otimes W_m(2,1)$$

e a decomposição segue da Regra de Young 2.3.13 porque (veja Figura 5.1)

$$W_m(2,1) \otimes W_m(1^2) \cong W_m(3,2) \oplus W_m(3,1^2) \oplus W_m(2^2,1) \oplus W_m(2,1^3).$$

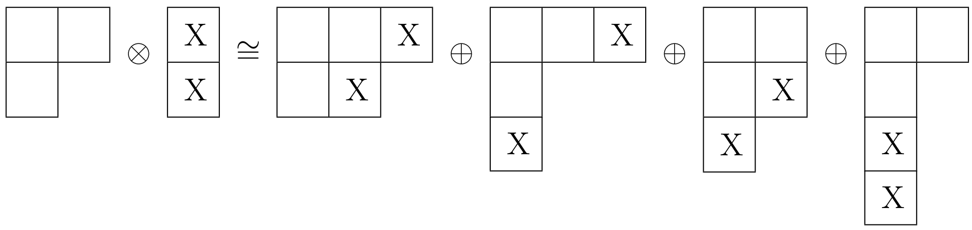

Figura 5.1: $W_m(2,1) \otimes W_m(1^2) \cong W_m(3,2) \oplus W_m(3,1^2) \oplus W_m(2^2,1) \oplus W_m(2,1^3)$.

O elemento

$$s_{(4,1)} = s_2(x_1,x_2)x_1^3 = [x_1,x_2]x_1^3$$

é um vetor de peso máximo de $(K\langle V_m\rangle)^{(5)}$ associado ao módulo $W(4,1)$, de acordo com o Teorema 2.3.6. Definamos um homomorfismo de GL_m-módulos $\phi : (K\langle V_m\rangle)^{(5)} \to B_m^{(5)}$ por

$$\phi(x_{i_1}\dots x_{i_5}) = [x_{i_1},\dots,x_{i_5}].$$

Temos que

$$\phi(s_{(4,1)}) = w_{(4,1)} = -2[x_2,x_1,x_1,x_1,x_1] \neq 0$$

está em $B_m^{(5)}$. Assim $W_m(4,1) \subset B_m^{(5)}$.

Para $\lambda = (3,2)$ definimos um homomorfismo de GL_m-módulos $\phi_j : (K\langle V_m\rangle)^{(5)} \to B_m^{(5)}$, $j = 1,\ 2$ por

$$\phi_1(x_{i_1},\dots,x_{i_5}) = [x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}][x_{i_4},x_{i_5}]$$

$$\phi_2(x_{i_1},\dots,x_{i_5}) = [x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5}].$$

Agora

$$s_{(3,2)} = s_2(x_1,x_2)^2x_1$$

e

$$\phi_1(s_{(3,2)}) = 4[x_2,x_1,x_1][x_2,x_1]$$

$$\phi_2(s_{(3,2)}) = 4[x_2, x_1][x_2, x_1, x_1]$$

que são linearmente independentes. Assim $w'_{(3,2)} = \dfrac{(\phi_1 - \phi_2)(s_{(3,2)})}{4} = [[x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1]]$ e $w''_{(3,2)} = \dfrac{(\phi_1 + \phi_2)(s_{(3,2)})}{4} = [x_2, x_1, x_1] \circ [x_2, x_1]$ são vetores de peso máximo linearmente independentes, uma vez que $\phi_1(s_{(3,2)})$ e $\phi_2(s_{(3,2)})$ pertencem à base de B_m no Teorema 2.4.1 (i).

Para $\lambda = (3, 1^2)$ temos que

$$s_{(3,1^2)} = s_3(x_1, x_2, x_3)x_1^2$$

e daí $w'_\lambda = (\phi_1 + \phi_2)(s_{(3,1^2)})$ e $w''_\lambda = (\phi_1 - \phi_2)(s_{(3,1^2)})$.

Os outros casos seguem de modo análogo. Assim, os polinômios dados são vetores de peso máximo linearmente independentes, isto é, geram GL_m-módulos isomorfos, no entanto diferentes. ■

Proposição 5.1.2 ([8]). *A decomposição de $B_m^{(6)}$ é a seguinte:*

$$\begin{aligned} B_m^{(6)} &\cong W_m(5,1) \oplus 3W_m(4,2) \oplus 3W_m(4,1^2) \oplus 2W_m(3^2) \oplus 6W_m(3,2,1) \\ &\oplus 4W_m(3,1^3) \oplus 2W_m(2^3) \oplus 4W_m(2^2,1^2) \oplus 2W_m(2,1^4) \oplus W_m(1^6) \end{aligned}$$

As dimensões dos S_6-módulos correspondentes e seus vetores de peso máximo são dados a seguir. Além disso, escrevemos a multiplicidade k_λ de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}$. Denotamos por $w_\lambda^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k_\lambda$ um sistema linearmente independente de vetores de peso máximo correspondendo aos GL_m-módulos isomorfos.

$\lambda = (5, 1)$, $\dim M(\lambda) = 5$, $k_\lambda = 1$:

$$w_\lambda(x_1, x_2) = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1];$$

$\lambda = (4, 2)$, $\dim M(\lambda) = 9$, $k_\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} w_\lambda^{(1)}(x_1, x_2) &= [[x_2, x_1, x_1, x_1], [x_2, x_1]], \\ w_\lambda^{(2)}(x_1, x_2) &= [x_2, x_1][x_2, x_1, x_1, x_1], \\ w_\lambda^{(3)}(x_1, x_2) &= [x_2, x_1, x_1][x_2, x_1, x_1]; \end{aligned}$$

$\lambda = (4, 1^2),\ \dim M(\lambda) = 10,\ k_\lambda = 3:$

$$w_\lambda^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_1, x_1, x_1], [x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}]],$$
$$w_\lambda^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_1, x_{\pi(2)}], [x_{\pi(3)}, x_1, x_1]],$$
$$w_\lambda^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)}, x_1, x_1, x_1];$$

$\lambda = (3^2),\ \dim M(\lambda) = 5,\ k_\lambda = 2:$

$$w_\lambda^{(1)}(x_1, x_2) = \sum_{\pi \in S_2} (-1)^\pi [[x_2, x_1, x_{\pi(1)}], [x_2, x_1, x_{\pi(2)}]],$$
$$w_\lambda^{(2)}(x_1, x_2) = [x_2, x_1][x_2, x_1][x_2, x_1];$$

$\lambda = (3, 2, 1),\ \dim M(\lambda) = 16,\ k_\lambda = 6:$

$$w_\lambda^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [[x_2, x_1, x_1, x_{\pi(1)}], [x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}]],$$
$$w_\lambda^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_1], [x_2, x_1], [x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}]],$$
$$w_\lambda^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_1, x_{\pi(2)}], [x_2, x_1, x_{\pi(3)}]],$$
$$w_\lambda^{(4)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][x_2, x_1, x_1, x_{\pi(3)}],$$
$$w_\lambda^{(5)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_1][[x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}], [x_2, x_1]],$$
$$w_\lambda^{(6)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [x_2, x_1, x_{\pi(1)}][x_{\pi(2)}, x_1, x_{\pi(3)}];$$

$\lambda = (3, 1^3),\ \dim M(\lambda) = 10,\ k_\lambda = 4:$

$$w_\lambda^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_1, x_1, x_{\pi(2)}], [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}]],$$
$$w_\lambda^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)}, x_1, x_1, x_{\pi(4)}],$$
$$w_\lambda^{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][[x_{\pi(3)}, x_1], [x_{\pi(4)}, x_1]],$$
$$w_\lambda^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_1, x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)}, x_1, x_{\pi(4)}];$$

$\lambda = (2^3),\ \dim M(\lambda) = 5,\ k_\lambda = 2:$

$$w_\lambda^{(1)}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\pi,\rho\in S_3} (-1)^\pi(-1)^\rho [x_{\pi(1)},x_{\pi(2)}][[x_{\rho(1)},x_{\rho(2)}],[x_{\pi(3)},x_{\rho(3)}]],$$
$$w_\lambda^{(2)}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\pi,\rho\in S_3} (-1)^\pi(-1)^\rho [x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},x_{\rho(1)}][x_{\rho(2)},x_{\pi(3)},x_{\rho(3)}];$$

$\lambda = (2^2,1^2),\ \dim M(\lambda) = 9,\ k_\lambda = 4:$

$$w_\lambda^{(1)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)},x_{\pi(2)}],[x_2,x_1],[x_{\pi(3)},x_{\pi(4)}]],$$
$$w_\lambda^{(2)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{\pi\in S_4}\sum_{\rho\in S_2} (-1)^\pi(-1)^\rho [[x_{\pi(1)},x_{\rho(1)},x_{\pi(2)}],[x_{\pi(3)},x_{\rho(2)},x_{\pi(4)}]],$$
$$w_\lambda^{(3)} = [x_2,x_1]s_4(x_1,x_2,x_3,x_4),$$
$$w_\lambda^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)},x_{\pi(2)}][[x_{\pi(3)},x_{\pi(4)}],[x_2,x_1]];$$

$\lambda = (2,1^4),\ \dim M(\lambda) = 5,\ k_\lambda = 2:$

$$w_\lambda^{(1)}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \sum_{\pi\in S_5} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)},x_1],[x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}],[x_{\pi(4)},x_{\pi(5)}]],$$
$$w_\lambda^{(2)}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \sum_{\pi\in S_5} (-1)^\pi [x_{\pi(1)},x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)},x_{\pi(4)}][x_{\pi(5)},x_1];$$

$\lambda = (1^6),\ \dim M(\lambda) = 1,\ k_\lambda = 1:$

$$w_\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = s_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6).$$

Prova: Pelo Teorema 2.4.4

$$\begin{aligned} B_m^{(6)} &\cong W_m(5,1)\oplus W_m(3,1)\otimes W_m(1^2)\oplus W_m(2,1)\otimes W_m(2,1)\\ &\oplus W_m(1^2)\otimes W_m(3,1)\oplus W_m(1^2)\otimes W_m(1^2)\otimes W_m(1^2).\end{aligned}$$

Aplicando as Regras de Young 2.3.13 e Littlewood-Richardson 2.3.11, calculamos (ver Figura 5.2 para o quadrado tensorial de $W_m(2,1)$)

$$\begin{aligned} W_m(3,1)\otimes W_m(1^2) &\cong W_m(1^2)\otimes W_m(3,1)\\ &\cong W_m(4,2)\oplus W_m(4,1^2)\oplus W_m(3,2,1)\oplus W_m(3,1^3);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_m(1^2)\otimes W_m(1^2)\otimes W_m(1^2) &\cong (W_m(2^2)\oplus W_m(2,1^2)\oplus W_m(1^4))\otimes W_m(1^2)\\
&\cong (W_m(3^2)\oplus W_m(3,2,1)\oplus W_m(2^2,1^2))\\
&\oplus (W_m(3,2,1)\oplus W_m(3,1^3)\oplus W_m(2^3)\oplus W_m(2^2,1^2)\\
&\oplus W_m(2,1^4))\oplus (W_m(2^2,1^2)\oplus W_m(2,1^4)\oplus W_m(1^6))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_m(2,1)\otimes W_m(2,1) &\cong W_m(4,2)\oplus W_m(4,1^2)\oplus W_m(3^2)\\
&\oplus 2W_m(3,2,1)\oplus W_m(3,1^3)\oplus W_m(2^3)\oplus W_m(2^2,1^2),
\end{aligned}$$

e assim temos a decomposição de $B_m^{(6)}$. Agora fixemos λ. Os polinômios dados na afirmação

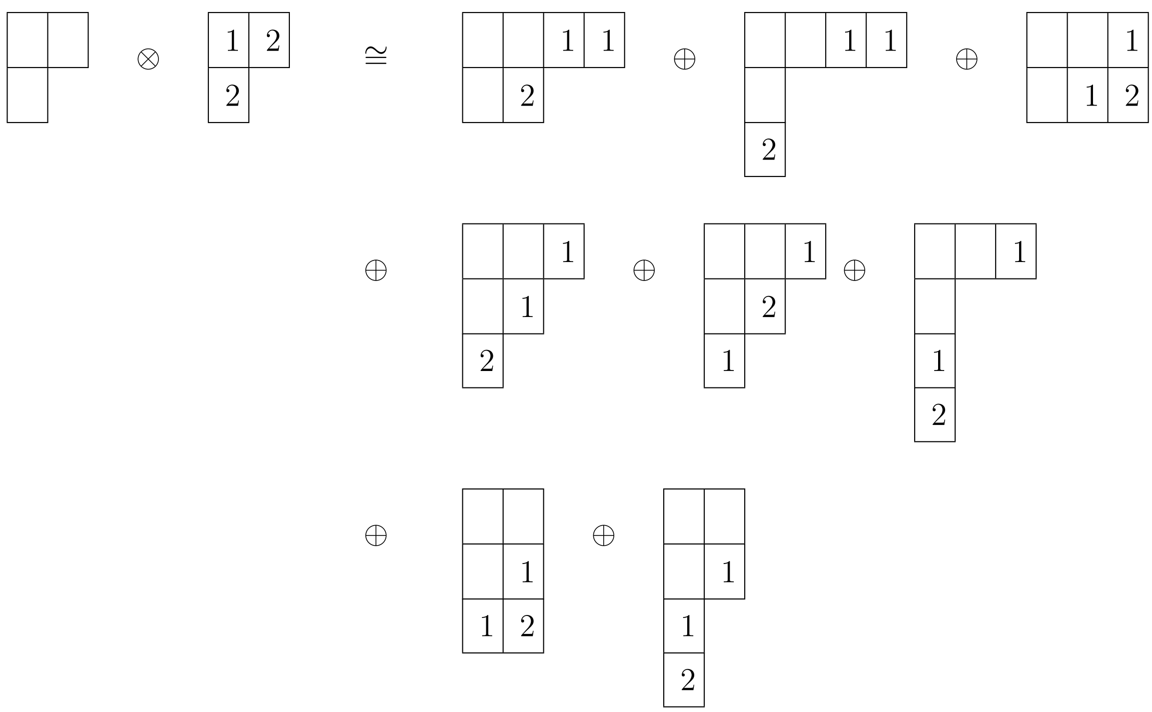

Figura 5.2: Decomposição de $W_m(2,1)\otimes W_m(2,1)$.

da proposição são imagens de polinômios da forma (2.7) e daí são vetores de peso máximo. Seu número é igual à multiplicidade k_λ de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}$. Desde que todos estes vetores de peso máximo estão em $B_m^{(6)}$, é suficiente mostrar que eles são linearmente independentes. Mostremos a independência linear em dois casos típicos. Os outros casos são verificados de modo análogo. Ao invés de estabelecermos a independência linear para todo w_λ^i, $i = 1, \ldots, k_\lambda$, dividiremos o problemas em várias partes e mostraremos a independência linear em grupos. Usaremos várias vezes o Lema 1.5.20 e o Teorema 2.4.1 (ii). Se u_p e u_q são dois comutadores e $\deg u_p < \deg u_q$, assumiremos que $u_p < u_q$, e se $\deg u_p = \deg u_q$, ordenaremos u_p e u_q do modo mais conveniente.

Caso $\lambda = (3, 2, 1)$. Os elementos $w_\lambda^{(1)}$, $w_\lambda^{(2)}$, $w_\lambda^{(3)}$ pertencem à álgebra de Lie livre, isto é, eles são combinações lineares de comutadores de comprimento 6; $w_\lambda^{(4)}$ e $w_\lambda^{(5)}$ são combinações lineares de comutadores $u_p u_q$, $\deg u_p = 2$, $\deg u_q = 4$. Finalmente, pelo Teorema 2.4.1 (ii), os comutadores

$$[x_2, x_1, x_1] < [x_3, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_2] < [x_3, x_1, x_1]$$

são linearmente independentes e

$$\begin{aligned} w_\lambda^{(6)} &= [x_2, x_1, x_2][x_3, x_1, x_1] - [x_2, x_1, x_1][x_3, x_1, x_2] \\ &\quad + [x_2, x_1, x_1][x_2, x_1, x_3] - [x_2, x_1, x_3][x_2, x_1, x_1] \\ &= [x_2, x_1, x_2][x_3, x_1, x_1] - [x_2, x_1, x_1][x_3, x_1, x_2] + [[x_2, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_3]]. \end{aligned}$$

Portanto pelo Lema 1.5.20, como $w_\lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ e $w_\lambda^{(j)}$, $j = 4, 5$ têm comprimentos diferentes eles são linearmente independentes, logo é suficiente mostrar que cada conjunto de polinômios $\{w_\lambda^{(1)}, w_\lambda^{(2)}, w_\lambda^{(3)}\}$, $\{w_\lambda^{(4)}, w_\lambda^{(5)}\}$ é linearmente independente. Reescrevemos $w_\lambda^{(1)}$, $w_\lambda^{(2)}$, $w_\lambda^{(3)}$ usando a base no Teorema 2.4.1 (ii). Então: $w_\lambda^{(1)}$ é expresso pelo produto de comutadores $u_p u_q$ e $u_q u_p$, $\deg u_p = 2$, $\deg u_q = 4$; $w_\lambda^{(2)}$ é expresso por $u_p u_q u_r$, $\deg u_p = \deg u_q = \deg u_r = 2$; $w_\lambda^{(3)}$ é expresso por $u_p u_q$, $\deg u_p = \deg u_q = 3$, ou seja, é suficiente mostrar que $w_\lambda^{(1)}$, $w_\lambda^{(2)}$, $w_\lambda^{(3)}$ são não nulos. Temos que: o produto $[x_2, x_1, x_1, x_1][x_3, x_2]$ participa com coeficiente -2 em $w_\lambda^{(1)}$; $[x_3, x_1][x_2, x_1][x_2, x_1]$ com coeficiente -2 em $w_\lambda^{(2)}$; $[x_3, x_1, x_1][x_2, x_1, x_2]$ participa com coeficiente 1 em $w_\lambda^{(3)}$, assim $w_\lambda^{(1)}$, $w_\lambda^{(2)}$, $w_\lambda^{(3)}$ são não nulos. De modo semelhante, $w_\lambda^{(4)}$ é expresso por $u_p u_q$, onde $\deg u_p = 2$, $\deg u_q = 4$; $w_\lambda^{(5)}$ é expresso por $u_p u_q u_r$, $\deg u_p = \deg u_q = \deg u_r = 2$ e $w_\lambda^{(4)}$, $w_\lambda^{(5)}$ são não nulos.

Caso $\lambda = (2^2, 1^2)$. É suficiente mostrar que $w_\lambda^{(1)}$, $w_\lambda^{(2)}$ são elementos de Lie da forma

$$\begin{aligned} w_\lambda^{(1)} &= \sum a_i [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}] \\ w_\lambda^{(2)} &= \sum a_i [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}], \end{aligned}$$

$w_\lambda^{(4)}$ é não nulo da forma

$$w_\lambda^{(4)} = \sum a_i[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}, x_{i_7}],$$

e $w_\lambda^{(3)}$ é congruente a um elemento

$$\sum a_i[x_2, x_1][x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}],$$
$$[x_2, x_1] \leqslant [x_{i_3}, x_{i_4}] < [x_{i_5}, x_{i_6}],$$

módulo o espaço vetorial gerado pelos produtos

$$[x_{j_1}, x_{j_2}][[x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}]].$$

Isto segue diretamente de alguns cálculos onde para $w_\lambda^{(2)}$, por exemplo, $[x_3, x_1, x_1][x_4, x_2, x_2]$ participa com coeficiente -2. ■

A descrição da álgebra de Lie livre L_m como GL_m-módulos foi dada por Thrall [32], que também encontrou a decomposição de $L_m^{(n)}$ para $n \leqslant 10$.

Proposição 5.1.3. *(Thrall [32]) A decomposição da componente homogênea $L_m^{(n)}$ de grau $\leqslant 6$ da álgebra de Lie livre L_m é a seguinte:*

$$\begin{aligned}
&L_m^{(1)} \cong W_m(1),\ L_m^{(2)} \cong W_m(1^2),\ L_m^{(3)} \cong W_m(2,1),\\
&L_m^{(4)} \cong W_m(3,1) \oplus W_m(2,1^2),\\
&L_m^{(5)} \cong W_m(4,1) \oplus W_m(3,2) \oplus W_m(3,1^2) \oplus W_m(2^2,1) \oplus W_m(2,1^3),\\
&L_m^{(6)} \cong W_m(5,1) \oplus W_m(4,2) \oplus 2W_m(4,1^2) \oplus W_m(3^2)\\
&\qquad \oplus 3W_m(3,2,1) \oplus W_m(3,1^3) \oplus 2W_m(2^2,1^2) \oplus W_m(2,1^4).
\end{aligned}$$

Para nossas considerações também precisaremos dos vetores de peso máximo dos GL_m-módulos irredutíveis de $L_m^{(n)}$ para n pequeno.

Corolário 5.1.4. *Os seguintes polinômios formam um sistema maximal linearmente independente de vetores de peso máximo de $W_m(\lambda) \subset L_m^{(n)}$, $\lambda \vdash n$, $n \leqslant 6$:*
Para $n = 1$: $w_{(1)}(x_1) = x_1$.

Para $n = 2, 3, 4$ os vetores de peso máximo são dados no Exemplo 2.4.5.

Para $n = 5$ os vetores de peso máximo são esses na Proposição 5.1.1:

$$w_{(4,1)},\ w_\lambda^{'},\ \lambda = (3,2),\ (3,1^2),\ (2^2,1),\ (2,1^3).$$

Para $n = 6$ os vetores de peso máximo são esses na Proposição 5.1.2:

$$\begin{aligned}
\lambda &= (5,1)\ :\ w_\lambda;\\
\lambda &= (4,2)\ :\ w_\lambda^{(1)};\\
\lambda &= (4,1^2)\ :\ w_\lambda^{(1)}, w_\lambda^{(2)};\\
\lambda &= (3^2)\ :\ w_\lambda^{(1)};\\
\lambda &= (3,2,1)\ :\ w_\lambda^{(1)}, w_\lambda^{(2)}, w_\lambda^{(3)};\\
\lambda &= (3,1^3)\ :\ w_\lambda^{(1)};\\
\lambda &= (2^2,1^2)\ :\ w_\lambda^{(1)}, w_\lambda^{(2)};\\
\lambda &= (2,1^4)\ :\ w_\lambda^{(1)}.
\end{aligned}$$

Prova: O Exemplo 2.4.5 e as Proposições 5.1.1 e 5.1.2 garantem que os polinômios considerados $w_\lambda^{(i)}$ são elementos de Lie e são vetores de peso máximo linearmente independentes. Portanto, para n fixado, eles geram um GL_m-submódulo $W^{(n)}$ de $L_m^{(n)}$ e a multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $W^{(n)}$ para um $\lambda \vdash n$ fixo é igual ao número de polinômios $w_\lambda^{(i)}$ em $W^{(n)}$. Desde que este número coincide com a multiplicidade dada na Proposição 5.1.3 e pela inclusão $W^{(n)} \subseteq L_m^{(n)}$, obtemos que $W^{(n)} = L_m^{(n)}$. ■

5.2 Base Minimal

O seguinte resultado segue direto do Teorema de Razmyslov, tendo em mente que todas identidades polinomiais de $M_2(K)$ são conseqüências das identidades próprias e que $M_2(K)$ não satisfaz nenhuma identidade de grau $\leqslant 3$.

Observação 5.2.1. Aqui $\mathfrak{M}_2$ denota a variedade determinada por $M_2(K)$.

Proposição 5.2.2. *(i) Seja $\mathfrak{W}$ a variedade de álgebras associativas definida pelas identidades polinomiais próprias de grau $\geqslant 4$ e tais que os GL_m-módulos $B_m^{(n)} \cap T(\mathfrak{M}_2)$ e $B_m^{(n)} \cap T(\mathfrak{W})$ coincidem para $n = 4, 5, 6$. Então $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{W}$.*

(ii) Seja $\mathfrak{V}$ uma variedade de álgebras de Lie definida pelas identidades polinomiais de grau $\geqslant 5$ e com as mesmas identidades polinomiais de grau 5 de $sl_2(K)$. Então $\mathfrak{V} = var\, sl_2(K)$.

Agora damos mais uma base das identidades polinomiais de $sl_2(K)$ que consiste de vetores de peso máximo de GL_m-módulos não isomorfos de grau 5 e portanto, em um certo sentido, é minimal.

Corolário 5.2.3. *Os polinômios de Lie*

$$w_{(3,1^2)}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\pi\in S_3}(-1)^{\pi}[[x_{\pi(1)},x_1,x_1],[x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}]];$$
$$w_{(2,1^3)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{\pi\in S_4}(-1)^{\pi}[[x_{\pi(1)},x_1,x_{\pi(2)}],[x_{\pi(3)},x_{\pi(4)}]],$$

formam uma base das identidades da álgebra de Lie $sl_2(K)$.

Prova: Usamos a decomposição de Thrall da componente homogênea de grau 5 da álgebra de Lie livre dada na Proposição 5.1.3:

$$L_m^{(5)} \cong W_m(4,1)\oplus W_m(3,2)\oplus W_m(3,1^2)\oplus W_m(2^2,1)\oplus W_m(2,1^3). \tag{5.1}$$

Se $T(sl_2(K))$ é o T-ideal da álgebra de Lie livre L da álgebra $sl_2(K)$, então como GL_m-módulos,

$$L_m^{(5)} \cong (L_m^{(5)}/(L_m^{(5)}\cap T(sl_2(K))))\oplus(L_m^{(5)}\cap T(sl_2(K))). \tag{5.2}$$

Aplicando para $n=5$ a descrição de $L_m^{(n)}/(L_m^{(n)}\cap T(sl_2(K)))$ no Corolário 2.4.8, obtemos que

$$(L_m^{(5)}/(L_m^{(5)}\cap T(sl_2(K)))) \cong W_m(4,1)\oplus W_m(3,2)\oplus W_m(2^2,1). \tag{5.3}$$

Comparando as decomposições (5.1) e (5.3) obtemos de (5.2) que

$$L_m^{(5)}\cap T(sl_2(K)) \cong W_m(3,1^2)\oplus W_m(2,1^3).$$

Agora é suficiente fazer a observação que as multiplicidades de $W_m(3,1^2)$ e $W_m(2,1^3)$ em $L_m^{(5)}$ são iguais a 1, isto é, estes GL_m-módulos são gerados por qualquer vetor de peso máximo $w_{(3,1^2)}$ e $w_{(2,1^3)}$ na álgebra de Lie livre L_m e aplicar o Corolário 5.1.4 que dá a lista dos vetores de peso máximo de grau pequeno em L_m. ■

Observação 5.2.4. A álgebra de Lie livre L está contida na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. Assim as conseqüência de "Lie"de uma identidade $f \in L$ podem ser obtidas por operações em L como um espaço vetorial (cujas operações também estão em $K\langle X\rangle$) e por operações de comutadores que também pode ser expressa em termos de operações de $K\langle X\rangle$. Logo, toda identidade polinomial de $M_2(K)$ que está contida em L segue num sentido "associativo"das identidades no Corolário 5.2.3.

Observação 5.2.5. Uma vez que $F_m(\mathrm{var}\, sl_2(K))$ está mergulhada em $F_m(\mathfrak{M}_2)$, temos pela Observação 5.2.4 e o Lema 5.2.8 o isomorfismo de álgebras de Lie

$$F_m(\mathrm{var}\, sl_2(K)) \cong L_m/(L_m \cap T(\mathfrak{W})).$$

Lema 5.2.6. *Seja U um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e sejam $w_\lambda \in W_m(\lambda) \subset B_m$ um vetor de peso máximo, $\lambda \vdash n$. Com o objetivo de mostrar que w_λ pertence a U, podemos assumir que todos os vetores de peso máximo $w_\mu \in B_m$, $\mu \vdash n$, $\mu \neq \lambda$, pertencem a U e trabalhar somente com os módulos isomorfos a $W_m(\lambda)$.*

Prova: Usamos a redutibilidade completa do GL_m-módulo $B_m^{(n)}$. Se

$$B_m^{(n)}/(B_m^{(n)} \cap U) \cong kW_m(\lambda) + \sum_{\substack{\mu\vdash n\\ \mu\neq\lambda}} k_\mu W_m(\lambda),$$

então para o T-ideal U', gerado por U e por todos os $W_m(\mu) \subset B_m^{(n)}$, $\mu \neq \lambda$, temos

$$B_m^{(n)}/(B_m^{(n)} \cap U') \cong kW_m(\lambda).$$

Portanto o vetor de peso máximo w_λ pertence a U se, e somente se, ele pertence a U'. ■

Até o fim desde capítulo denotaremos por $\mathfrak{W}$ a variedade de álgebras associativas definidas pelas identidades polinomiais

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{5.4}$$

$$[[x_1, x_2]^2, x_1]. \tag{5.5}$$

Ambas as identidades verificam-se para $M_2(K)$, isto é, $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{W}$. Usaremos a representação de s_4 na forma

$$\begin{aligned} s_4 &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\pi\in S_4\\ \pi(1)=1}} [x_1, x_{\pi(2)}] \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] \\ &= [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3] \end{aligned}$$

Lema 5.2.7. *O GL_m-módulo W de $B_m^{(5)}$ gerado por todos $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] \circ [x_{i_4}, x_{i_5}]$ tem decomposição*

$$W \cong W(3,2) \oplus W(3,1^2) \oplus W(2^2,1) \oplus W(2,1^3).$$

Prova: Os vetores de peso máximo w''_λ, $\lambda = (3,2)$, $(3,1^2)$, $(2^2,1)$, $(2,1^3)$ na Proposição 5.1.1 pertencem a W e geram GL_m-módulos irredutíveis dois a dois não isomorfos. Logo a soma direta de $W(3,2)$, $W(3,1^2)$, $W(2^2,1)$ e $W(2,1^3)$ está contida em W. Agora temos que $B_m^{(5)}/W \cong L_m^{(5)}$. Por outro lado, comparando as multiplicidades das componentes irredutíveis de $L_m^{(5)}$ na Proposição 5.1.3 com as das componentes que aparecem em

$$B_m^{(5)}/(W(3,2) \oplus W(3,1^2) \oplus W(2^2,1) \oplus W(2,1^3))$$

obtemos que

$$L_m^{(5)} \cong B_m^{(5)}/W \cong B_m^{(5)}/(W(3,2) \oplus W(3,1^2) \oplus W(2^2,1) \oplus W(2,1^3)),$$

isto é, W não tem nenhuma outra componente irredutível. ■

Lema 5.2.8. *(i) As identidades polinomiais de Lie de $M_2(K)$ seguem da identidade standard (5.4).*

(ii) As identidades polinomiais de grau 5 de $M_2(K)$ seguem de (5.4) e (5.5).

Prova: A identidade standard (5.4) é a única identidade de grau $\leqslant 4$ de $M_2(K)$ e $L^{(5)} \subset B^{(5)}$. O polinômio (5.5) é um vetor de peso máximo de um GL_m-módulo $W_m(3,2)$ que não participa na decomposição de $L^{(5)} \cap T(M_2(K))$. Portanto, é suficiente mostrar que todas as identidades polinomiais próprias de grau 5 de $M_2(K)$ são satisfeitas também em $\mathfrak{W}$. Comparando a decomposição de $B_m^{(5)}$ na Proposição 5.1.1

$$B_m^{(5)} \cong W_m(4,1) \oplus 2W_m(3,2) \oplus 2W_m(3,1^2) \oplus 2W_m(2^2,1) \oplus 2W_m(2,1^3)$$

com a decomposição de $B_m^{(5)}(\mathfrak{M}_2)$

$$B_m^{(5)}(\mathfrak{M}_2) \cong W_m(4,1) \oplus W_m(3,2) \oplus W_m(3,1^2) \oplus W_m(2^2,1)$$

no Teorema 2.4.7, temos que mostrar que

$$B_m^{(5)} \cap T(\mathfrak{W}) = B_m^{(5)} \cap T(\mathfrak{M}_2) \cong W_m(3,2) \oplus W_m(3,1^2) \oplus W_m(2^2,1) \oplus 2W_m(2,1^3).$$

Para este propósito verificaremos que os vetores de peso máximo

$$w''_{(3,2)}, w'_{(3,1^2)}, w''_{(2^2,1)}, w'_{(2,1^3)}, w''_{(2,1^3)}$$

na Proposição 5.1.1 estão contidos em $T(\mathfrak{W})$. Faremos todos os cálculos na álgebra relativamente livre $F_m(\mathfrak{W})$.

Caso $\lambda = (3,2)$. O polinômio $w''_{(3,2)}$ coincide com a expressão em (5.5) e portanto se anula em $F_m(\mathfrak{W})$.

Caso $\lambda = (3,1^2)$. Substituímos em (5.5):

$$\begin{aligned}
0 &= s_4(x_1^2, x_1, x_2, x_3) = [x_1^2, x_2] \circ [x_3, x_1] + [x_1^2, x_3] \circ [x_1, x_2] \\
&= (x_1 \circ [x_1, x_2]) \circ [x_3, x_1] + (x_1 \circ [x_1, x_3]) \circ [x_1, x_2] \\
&= x_1([x_1, x_2][x_3, x_1] + [x_1, x_3][x_1, x_2]) + ([x_3, x_1][x_1, x_2] + [x_1, x_2][x_1, x_3])x_1 \\
&= [[x_1, x_2], [x_1, x_3], x_1] = \frac{1}{2} w''_{(3,1^2)}.
\end{aligned}$$

Caso $\lambda = (2^2,1)$. Substituímos em (5.4):

$$0 = s_4([x_1, x_2], x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{\pi \in S_3} [x_1, x_2, x_{\pi(1)}] \circ [x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}] = \frac{1}{2} w''_{(2^2,1)}.$$

Caso $\lambda = (2,1^3)$. Usamos (5.4):

$$\begin{aligned}
0 &= [s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1] = \left[\frac{1}{4} \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}] \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}], x_1\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\pi \in S_4} [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_1] \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] = w''_{(3,2)}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 5.2.7, o GL_m-módulo gerado por $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] \circ [x_{i_4}, x_{i_5}]$ contém somente um submódulo $W_m(2,1^3)$ que também está contido em $T(\mathfrak{W})$. Aplicando o Lema 5.2.6, trabalhamos módulo a identidade $[x_1, x_2, x_3] \circ [x_4, x_5] = 0$ e usando a notação de congruência, mostraremos que

$$w'_{(2,1^3)} \equiv 2 \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_1, x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] \equiv 0.$$

Faremos substituições em (5.4), usando a igualdade

$$[u \circ v, w] = 2u[v, w] + 2v[u, w] + [u, w, v] + [v, w, u] \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
0 &= 2s_4(x_1 \circ u, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\substack{\pi \in S_4 \\ \pi(1)=1}} (-1)^\pi [x_1 \circ u, x_{\pi(2)}] \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] \\
&= \sum_{\substack{\pi \in S_4 \\ \pi(1)=1}} (-1)^\pi (2x_1[u, x_{\pi(2)}] + 2u[x_1, x_{\pi(2)}] + [x_1, x_{\pi(2)}, u] + [u, x_{\pi(2)}, x_1]) \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] \\
&\equiv 2 \sum_{\substack{\pi \in S_4 \\ \pi(1)=1}} (-1)^\pi (u[x_1, x_{\pi(2)}] \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] + x_1[u, x_{\pi(2)}] \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] \\
&\quad + [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}, x_1][u, x_{\pi(2)}] + [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}, u] \circ [x_1, x_{\pi(2)}]) \\
&= 2 \sum_{\substack{\pi \in S_4 \\ \pi(1)=1}} (-1)^\pi ([x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}, u][x_1, x_{\pi(2)}] + [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}, x_1][u, x_{\pi(2)}])
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$0 = 2\sum_{i=1}^{4} s_4(x_1, \ldots, x_i \circ u, \ldots, x_4) \equiv 2 \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}, u][x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}]$$

e daí

$$0 \equiv \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, u][x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}] \equiv \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, u, x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}].$$

Logo $w'_{(2,1^3)} \equiv 0$. ■

Lema 5.2.9. *Sejam W_i, $i = 1, 2, 3, 4$ os GL_m-submódulos de $B_m^{(6)}$ gerados respectivamente, pelos vetores de peso máximo da Proposição 5.1.2:*

$$\begin{aligned}
W_1 &: w^{(2)}_{(3^2)}, w^{(3)}_{(2^2,1^2)}, w_{(1^6)}; \\
W_2 &: w^{(2)}_{(4,2)}, w^{(3)}_{(4,1^2)}, w^{(4)}_{(3,2,1)}, w^{(2)}_{(3,1^3)}; \\
W_3 &: w^{(5)}_{(3,2,1)}, w^{(3)}_{(3,1^3)}, w^{(1)}_{(2^3)}, w^{(4)}_{(2^2,1^2)}, w^{(2)}_{(2,1^4)}; \\
W_4 &: w^{(3)}_{(4,2)}, w^{(6)}_{(3,2,1)}, w^{(4)}_{(3,1^3)}, w^{(2)}_{(2^3)}.
\end{aligned}$$

Então, módulo os elementos de Lie de grau 6 em B_m:
o GL_m-módulo gerado por todos $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}][x_{i_5}, x_{i_6}]$ coincide com $W_1 + W_3$;
o GL_m-módulo gerado por todos $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}]$ coincide com $W_2 + W_3$;
o GL_m-módulo gerado por todos $[x_{i_1}, x_{i_2}][[x_{i_3}, x_{i_4}], [x_{i_5}, x_{i_6}]]$ coincide com W_3;
o GL_m-módulo gerado por todos $[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}]$ coincide com W_4.

Prova: Segue da Proposição 5.1.2 que

$$\begin{aligned} W_m(1^2)\otimes W_m(1^2)\otimes W_m(1^2) &\cong W_m(3^2)\oplus 2W_m(3,2,1)\oplus W_m(3,1^3)\\ &\quad \oplus W_m(2^3)\oplus 3W_m(2^2,1^2)\oplus 2W_m(2,1^4)\oplus W_m(1^6)\end{aligned}$$

Denotemos por W_0 o GL_m-módulo gerado por

$$[x_{i_1},x_{i_2}][x_{i_3},x_{i_4}][x_{i_5},x_{i_6}].$$

Pela Proposição 2.4.3, ele é isomorfo ao produto tensorial $W_m(1^2)\otimes W_m(1^2)\otimes W_m(1^2)$ e da lista de vetores de peso máximo na Proposição 5.1.2 vemos que W_0 é gerado pelos elementos de Lie

$$w^{(2)}_{(3,2,1)}, w^{(1)}_{(2^2,1^2)}, w^{(1)}_{(2,1^4)}$$

e os elementos de W_1 e W_3

$$w^{(2)}_{(3^2)}, w^{(2)}_{(2^2,1^2)}, w_{(1^6)},$$
$$w^{(5)}_{(3,2,1)}, w^{(3)}_{(3,1^3)}, w^{(1)}_{(2^3)}, w^{(4)}_{(2^2,1^2)}, w^{(2)}_{(2,1^4)},$$

porque todos estes vetores de peso máximo estão em W_0, são linearmente independentes e seu número é igual ao número de componentes irredutíveis de $W_m(1^2)\otimes W_m(1^2)\otimes W_m(1^2)$. Portanto, módulo os elementos de Lie, W_0 coincide com W_1+W_3.

Agora, seja W_0 o GL_m-módulo gerado por

$$[x_{i_1},x_{i_2}][[x_{i_3},x_{i_4}],[x_{i_5},x_{i_6}]].$$

Fixemos uma base dos espaços vetoriais W' e W'' gerados, respectivamente, pelos elementos de Lie $[x_{i_1},x_{i_2}]$ e $[[x_{i_3},x_{i_4}],[x_{i_5},x_{i_6}]]$. Definamos uma ordem na união das bases assumindo que os comutadores de comprimento 4 são maiores que os de comprimento 2. Pelo Lema 1.5.20 obtemos que os espaços vetoriais graduados W' e W'' são isomorfos. Os GL_m-módulos isomorfos como espaços vetoriais graduados, possuem a mesma série de Hilbert e portanto são isomorfos como GL_m-módulos. Pelo Exemplo 2.4.5 (ii) e (iv), os seguintes isomorfismos verificam-se

$$\begin{aligned} W_0 &\cong W'\otimes W''\cong W_m(1^2)\otimes W_m(2,1^2)\cong W_m(3,2,1)\oplus W_m(3,1^3)\oplus W_m(2^3)\\ &\quad \oplus W_m(2^2,1^2)\oplus W_m(2,1^4)\cong W_3\end{aligned}$$

Desde que todos vetores de peso máximo gerando W_3 estão em W_0, obtemos que $W_3 = W_0$.

A afirmação para $W_2 + W_3$ é estabelecida analogamente. Usamos $W' = L_m^{(2)}$, $W_m'' = L_m^{(4)}$, o isomorfismo $L_m^{(4)} \cong W_m(3,1) \oplus W_m(2,1^2)$, a Regra de Littlewood-Richardson 2.3.11 e a lista de vetores de peso máximo na Proposição 5.1.2.

Finalmente, para o GL_m-módulo W_0 gerado por

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}]$$

calculamos

$$\begin{aligned} W_0 \quad &\cong \quad W_m(2,1) \otimes W_m(2,1) \cong W_m(4,2) \oplus W_m(4,1^2) \oplus W_m(3^2) \\ &\oplus 2W_m(3,2,1) \oplus W_m(3,1^3) \oplus W_m(2^3) \oplus W_m(2^2,1^2). \end{aligned}$$

Os submódulos irredutíveis são gerados pelos elementos de Lie

$$w_{(4,1^2)}^{(1)}, w_{(3^2)}^{(1)}, w_{(3,2,1)}^{(3)}, w_{(2^2,1^2)}^{(2)}$$

e os elementos de W_4

$$w_{(4,2)}^{(3)}, w_{(3,2,1)}^{(6)}, w_{(3,1^3)}^{(4)}, w_{(2^3)}^{(2)}.$$

Novamente obtemos que W_0 coincide com W_4 módulo os elementos de Lie de grau 6. ■

Lema 5.2.10. *As identidades de grau seis de $M_2(K)$ seguem de (5.4) e (5.5).*

Prova: Usando as identidades (5.4) e (5.5), nós "colaremos juntos"as cópias isomorfas dos GL_m-módulos $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}$ até deixarmos somente um módulo $W_m(\lambda)$ para cada

$$\lambda = (5,1), (4,2), (4,1^2), (3^2), (3,2,1), (2^3).$$

Pelo isomorfismo no Corolário 2.4.8

$$F_m^{(6)}(\text{var}\, sl_2(K)) \cong W_m(5,1) \oplus W_m(4,1^2) \oplus W_m(3^2) \oplus W_m(3,2,1).$$

Usaremos a Observação 5.2.5 e para $\lambda = (5,1)$, $(4,1^2)$, (3^2), $(3,2,1)$ colaremos os vetores de peso máximo na Proposição 5.1.2 aos elementos de Lie. Para $\lambda = (4,2)$ e $\lambda = (2^3)$ nós colaremos os vetores de peso máximo um ao outro. No caso onde o diagrama de Young tem mais de três linhas, mostraremos que os vetores de peso máximo são iguais a 0 em $F_m(\mathfrak{W})$. Como na prova do Lema 5.2.8, trabalharemos na álgebra relativamente livre $F_m(\mathfrak{W})$. Usaremos a notação de congruência quando trabalharmos módulo os elementos de Lie de grau 6 ou módulo algum dos GL_m-módulos no Lema 5.2.9. Consideraremos consecutivamente todos os casos.

Caso $\lambda = (5,1)$. Uma vez que a multiplicidade de $W_m(5,1)$ em $B_m^{(6)}$ é a mesma que a multiplicidade em $B_m(\mathfrak{M}_2)$ e igual a 1, não existe nada há provar.

Caso $\lambda = (4,2)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 2. Na identidade de Lie de grau 5 $[[x_2,x_1],[x_3,x_1],x_1] = 0$, para a qual já mostramos que segue da identidade (5.5), trocamos x_3 com $x_1 \circ x_2$ e obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= [[x_2,x_1],[x_1 \circ x_2,x_1],x_1] = [[x_2,x_1],x_1 \circ [x_2,x_1],x_1] = [[x_2,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1],x_1] \\ &= [x_2,x_1,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1] + 2[x_2,x_1,x_1]^2 \equiv 2(w_\lambda^{(2)} + w_\lambda^{(3)}) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da equação (5.6) e a congruência é tomada módulo os elementos de Lie de grau 6. Deste modo colamos os dois GL_m-módulos isomorfos $W_m(\lambda)$.

Caso $\lambda = (4,1^2)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 1. Em $[[x_2,x_1],[x_3,x_1],x_1] = 0$ trocamos x_2 com $x_1 \circ x_2$:

$$\begin{aligned} 0 &= [[x_1 \circ x_2,x_1],[x_3,x_1],x_1] = [x_1 \circ [x_2,x_1],[x_3,x_1],x_1] \\ &= [-[x_3,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1] + x_1 \circ [[x_2,x_1],[x_3,x_1]],x_1] \\ &= -[x_3,x_1,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1] - [x_3,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1,x_1] + x_1 \circ [[x_2,x_1],[x_3,x_1],x_1] \\ &= -[x_3,x_1,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1] - [x_3,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1,x_1] \end{aligned}$$

Tomando a soma anti-simétrica em x_2 e x_3 teremos que a soma de produtos dos dois comutadores de comprimento 3 se anulam:

$$\begin{aligned} 0 &= -[x_2,x_1,x_1,x_1] \circ [x_3,x_1] + [x_3,x_1,x_1,x_1] \circ [x_2,x_1] \\ &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [x_{\pi(1)},x_{\pi(2)}] \circ [x_{\pi(3)},x_1,x_1,x_1] \equiv 2w_\lambda^{(3)}. \end{aligned}$$

Caso $\lambda = (3^2)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 1 e temos que colar $w_\lambda^{(2)}$ aos elementos de Lie. Pelo Lema 5.2.9, o módulo $W_m(3^2)$ não aparece na decomposição do GL_m-módulo gerado por

$$[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}], [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}][x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6}]$$

e pelo Lema 5.2.6 podemos trabalhar módulo os elementos de Lie e as identidades

$$[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5, x_6] = [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6] = 0.$$

Linearizaremos com respeito à x_2 a identidade (5.5) obtendo:

$$[x_2, x_1, x_1] \circ [x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_1] \circ [x_2, x_1] = 0.$$

Trocando x_2 por x_2^2 e x_3 por x_2, calculamos

$$\begin{aligned} 0 &= [x_2^2, x_1, x_1] \circ [x_2, x_1] + [x_2, x_1, x_1] \circ [x_2^2, x_1] = (2[x_2, x_1]^2 + [x_2, x_1, x_1] \circ x_2) \circ [x_2, x_1] \\ &\quad + [x_2, x_1, x_1] \circ (x_2 \circ [x_2, x_1]) \equiv 4[x_2, x_1]^3 = 4w_\lambda^{(2)} \end{aligned}$$

e deste modo colamos $w_\lambda^{(2)}$ aos elementos de Lie.

Caso $\lambda = (3, 2, 1)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 3 e temos que colar $w_\lambda^{(4)}$, $w_\lambda^{(5)}$ e $w_\lambda^{(6)}$ aos elementos de Lie. Primeiro, substituímos em s_4:

$$0 = s_4([x_2, x_1, x_1], x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{\pi \in S_3} [x_2, x_1, x_1, x_{\pi(1)}] \circ [x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}] \equiv w_\lambda^{(4)}.$$

Desde que a identidade de Hall $[[x_1, x_2]^2, x_3] = 0$ é de grau 5, pelo Lema 5.2.8 ela verifica-se em $\mathfrak{W}$. Substituímos x_3 por $[x_3, x_1]$ e obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= [[x_2, x_1]^2, [x_3, x_1]] = [x_2, x_1] \circ [[x_2, x_1], [x_3, x_1]] \equiv -2[x_2, x_1][[x_3, x_1], [x_2, x_1]] \\ &= -\sum_{\pi \in S_3} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_1][[x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}], [x_2, x_1]] = -w_\lambda^{(5)}, \end{aligned}$$

onde a congruência é módulo os elementos de Lie de grau 6. Aqui usamos que os únicos somandos não nulos de $w_\lambda^{(5)}$ são aqueles para os quais $\pi(1) \neq 1$ e $\{\pi(2), \pi(3)\} \neq \{1, 2\}$, isto é, $\pi(1) = 2$, $\{\pi(2), \pi(3)\} = \{1, 3\}$. Agora podemos trabalhar módulo a identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] = 0$. Usando a identidade de grau 5 em $M_2(K)$

$$\frac{1}{2}(w''_{(2,1^3)} - w'_{(2,1^3)}) = \sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)}, x_1, x_{\pi(4)}] = 0$$

trocamos x_4 com $[x_1,\ x_2]$ e obtemos

$$0 \equiv -2 \sum_{\pi\in S_3} (-1)^\pi [x_2, x_1, x_{\pi(1)}][x_{\pi(2)}, x_1, x_{\pi(3)}] = -2w_\lambda^{(6)}$$

o que completa o caso $\lambda = (3, 2, 1)$.

Caso $\lambda = (3, 1^3)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 3 e temos que colar $w_\lambda^{(2)}$, $w_\lambda^{(3)}$, $w_\lambda^{(4)}$ a elementos de Lie. Primeiro, substituímos x_5 por x_1^2 na identidade de grau 5

$$\sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_5], [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}]] = 0,$$

que se verifica em $M_2(K)$ porque é um polinômio de Lie, é anti-simétrico em quatro variáveis e $\dim sl_2(K) = 3$. (Pode-se mostrar que esta identidade é equivalente a $w'_{(2,1^3)} = 0$.)

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_1^2], [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}]] \\
&= \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_1] \circ x_1, [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}]] \\
&= \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_1], [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}]] \circ x_1 \\
&\quad - \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_1] \circ [x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}], x_1] \equiv -8w_\lambda^{(4)}.
\end{aligned}$$

Agora podemos trabalhar módulo a identidade $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6] = 0$. Tomamos a soma alternada em $\pi \in S_4$, $\pi(1) = 1$,

$$0 = s_4(x_1, x_2, [x_3, x_1], [x_4, x_1]) \equiv 2[x_1, x_2] \circ [[x_3, x_1], [x_4, x_1]] \equiv 4[x_1, x_2][[x_3, x_1], [x_4, x_1]]$$

e obtemos $w_\lambda^{(3)} \equiv 0$. Trabalhando também módulo $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0$, comutamos com x_1 a identidade de grau cinco

$$0 = \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][[x_{\pi(3)}, x_1], x_{\pi(4)}]$$

obtendo

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][[x_{\pi(3)}, x_1], x_{\pi(4)}], x_1] \\
&\equiv \sum_{\pi\in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][x_{\pi(3)}, x_1, x_1, x_{\pi(4)}] \\
&= w_\lambda^{(2)}
\end{aligned}$$

Caso $\lambda = (2^3)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 2 e $W_m(\lambda)$ não participa em $L_m^{(6)}$. Temos que colar juntos $w_\lambda^{(1)}$ e $w_\lambda^{(2)}$. Mostraremos que, módulo os elementos de Lie e a identidade $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6] = 0$, o vetor de peso máximo é igual a 0, isto é, é colado com $w_\lambda^{(2)}$. Substituímos em s_4:

$$0 = s_4(x_1, x_2, [x_3, x_4], [x_5, x_6]) \equiv [x_1, x_2] \circ [[x_3, x_4], [x_5, x_6]] \equiv 2[x_1, x_2][[x_3, x_4], [x_5, x_6]],$$

e então $w_\lambda^{(1)} = 0$.

Caso $\lambda = (2^2, 1^2)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 2 e temos que colar $w_\lambda^{(3)}$ e $w_\lambda^{(4)}$ a elementos de Lie. Primeiro em $\mathfrak{W}$ temos

$$w_\lambda^{(3)} = [x_2, x_1]s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= [s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [x_2, x_1]] = \frac{1}{4}\sum_{\pi\in S_4}(-1)^\pi[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}] \circ [[x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}], [x_2, x_1]] \\ &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\pi\in S_4}(-1)^\pi[x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}][[x_{\pi(3)}, x_{\pi(4)}], [x_2, x_1]] \equiv \frac{1}{2}w_\lambda^{(4)}. \end{aligned}$$

Caso $\lambda = (2, 1^4)$. A multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em $B_m^{(6)}/L_m^{(6)}$ é igual a 1 e $w_\lambda^{(2)}$ é igual a 0 em $\mathfrak{W}$.

Caso $\lambda = (1^6)$. O único GL_m-módulo $W_m(\lambda)$ de $B_m^{(6)}$ é gerado pelo polinômio standard s_6 que é obviamente igual a 0 em $\mathfrak{W}$. Deste modo analisamos todos os casos e a prova está completa. ■

Teorema 5.2.11. *As identidades polinomiais da álgebra de matrizes $M_2(K)$ seguem da identidade standard $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e da identidade de Hall $[[x_1, x_2]^2, x_1]$ em duas variáveis.*

Prova: Pela Proposição 5.2.2 (i) é suficiente mostrar que a variedade $\mathfrak{W}$ definida pelas duas identidades satisfaz

$$B_m^{(n)} \cap T(\mathfrak{W}) = B_m^{(n)} \cap T(\mathrm{var}\, M_2(K)),\ n = 5,\ 6.$$

Isto já foi mostrado nos Lemas 5.2.9 e 5.2.10. Isto completa a prova do teorema. ■

Observação 5.2.12. 1. A base das identidades das matrizes 2×2 dada no Teorema 5.0.17 é minimal porque a identidade $[[x_1, x_2]^2, x_1]$ não segue da identidade standard. Uma vez que s_4 é anti-simétrico, não podemos obter como conseqüência um polinômio homogêneo não nulo de grau 3 com respeito à x_1 e de grau 2 com respeito à x_2.

2. Vasilovskii provou que, veja [34], se K é infinito e $\operatorname{char} K \neq 2$ então as identidades de $sl_2(K)$ são conseqüências da identidade de Filippov $[y, z, [t, x], x] + [y, x, [z, x], t] = 0$.

3. A base de $M_2(K)$ é mínima na situação acima, quando $\operatorname{char} K > 3$. Se $\operatorname{char} K = 3$ então precisamos de mais uma identidade de grau 6 para gerar as identidades de $M_2(K)$, ver para mais detalhes [20] e [4]. Aqui somente observamos que os métodos utilizados em [34] e [20] utilizam teoria de invariantes, e portanto decidimos não incluí-los nesta dissertação.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463 (1950).

[2] YU. A. Bahturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Scienc Press BV, Utrecht, First English Edition, (1987).

[3] A. Berele, *Homogeneous polynomial identities*, Israel J. Math. **42**, 258–272 (1982).

[4] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53–67 (2004).

[5] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics: A Series of Text and Monographs, Vol XI, Interscience Publishers (1962).

[6] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0* (Russian), Algebra i Logika **20**, 282–290 (1981). Translation: Algebra and Logic **20**, 188–194 (1981).

[7] V. Drensky, *Representations of symmetric group and varieties of linear algebras* (Russian), Mat. Sb. **115**, 98–115 (1981). Translation: Mat. Sb. Volume **43**, Number 1, 85–101 (1982).

[8] V. Drensky, *Lattices of varieties of associative algebras* (Russian), Serdica **8**, 20–31 (1982).

[9] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, (1999).

[10] V. Drensky, A. Kasparin, *Polynomial identities of eight degree for* 3×3 *matrices*, Annuaire de I'Univ. de Sofia, Fac. de Math. et Meca., Livre 1, Math. **77**, 175–195 (1983).

[11] V. T. Filippov, *Varieties Of Maltsev algebras*, Algebra i Logika, **20**, No. 3, 300–314 (1981). Translation: Algebra and Logic **20**, 200–210 (1981).

[12] A. T. Galvão, *PI-Álgebras*, Universidade Estadual de Campinas-Unicamp, (2003).

[13] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Mathematical surveys and monographs , No. **122**, Providence, American Mathematical Society, (2005).

[14] I. N. Herstein, *Topics in algebra*, John Wiley and Soons, 2nd edition (1975).

[15] G. D. James, *Representations of general linear groups*, Lecture Notes Series, **94**, London Mathematical Society, Cambridge University Press, (1984).

[16] A. R. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs, **87**, American Mathematical Society, Providence, RI, (1991).

[17] A. Kerber, *Representation of permutation groups I*, Lecture Notes in Mathematics **240**, Springer-Verlag (1970).

[18] P. Kochloukov, *Weak polynomial identities for the matrix algebra of order two*, Journal of Algebra **188**, 610–625 (1997).

[19] P. Kochloukov, *Finitely based ideals of weak polynomial identities*, Communications in Algebra **26**, 3335–3359 (1998).

[20] P. Kochloukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra **241**, 410–434 (2001).

[21] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181**, 429–438 (1973).

[22] J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Blaisdell Publishing Company, (1966).

[23] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials* , Oxford Univ. Press (Clarendon), Oxford, 1979, Second Edition, (1995).

[24] A. I. Malcev, *On algebras defined by identities* (Russian), Mat. Sb. **26**, 19–23 (1950).

[25] Yu. N. Maltsev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices* (Russian), Algebra i Logika 10, 393–400 (1971), Translation: Algebra and Logic **10**, 242–247 (1971).

[26] Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representation*, Translation of Mathematical Monographs, AMS, **138**, (1989).

[27] A. Regev, *On the codimensions of matrix algebras*, "Algebra-Some Current Trends (Varna, 1986)", Lect. Notes in Math. **1352**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 162–172 (1988).

[28] J-P. Serre, *Linear representation of finite groups* Graduate texts in mathematics, **42** Translation of Représentations linéares des groupes finis, 2 ed. Springer (1977).

[29] A. I. Shirshov, *On bases of free Lie algebras* (Russian), Algebra i Logika **1**, 14–19 (1962). Translation: Algebra and Logic **1**, 575–581 (1962).

[30] P. N. Siderov, *A basis for the identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field* (Russian), Pliska Stud. Math. Bulg. **2**, 143–152 (1981).

[31] W. Specht, *Gesetze in ringen*, Mathematische Zeitschrift, **52**, 557–589 (1950).

[32] R. M. Thrall, *On simmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 371–388 (1942).

[33] B. T. Tki, *On the basis of identities of the matrix algebras of second order over a field of characteristic 0*, Serdica **7**, 187–194 (1981).

[34] S. Yu. Vasilovskii, *A basis of the identities os the simple three dimensional Lie algebra over an infinite field*, Algebra i Logika **28**, No. 5 (1989), 534–554; English translation; Algebra and Logic **28** (1989).

[35] M. R. Vaughan-Lie, *Varieties of Lie algebras*, D. Phil. Thesis, Oxford (1970).

[36] H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946, New Edition (1997).

[37] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Translated from the Russian by Harry F. Smith. Pure and Applied Mathematics, **104**. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London (1982).