Detecção de descontinuidades e reconstrução de funções a partir de dados espectrais: filtros Splines e métodos iterativos.

Ana Gabriela Martínez

Orientador Prof. Dr. Álvaro Rodolfo De Pierro
DMA - IMECC - UNICAMP
Fevereiro 2006

Detecção de descontinuidades e reconstrução de funções a partir de dados espectrais: filtros Splines e métodos iterativos.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ana Gabriela Martínez** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 8 de Fevereiro de 2006

Orientador: Prof. Dr. Alvaro R. De Pierro

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alvaro R. De Pierro (IMECC-UNICAMP).
Prof. Dr. Andre Nachbin (IMPA).
Prof. Dr. Dan Marchesin (IMPA).
Prof. Dr. Lucio Tunes dos Santos(IMECC-UNICAMP.
Prof. Dr. Hae Yong Kim (EDUSP).

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática Aplicada.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Martínez, Ana Gabriela
M363d Detecção de descontinuidades e reconstrução de funções a partir de dados espectrais: filtros splines e métodos iterativos / Ana Gabriela Martinez -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Álvaro Rodolfo De Pierro

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fourier, Series de. 2. Reconstrução de imagens. 3. Métodos iterativos (Matemática). I. De Pierro, Álvaro Rodolfo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Detection of discontinuities and reconstruction of functions from spectral data: splines filters and iterative methods

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Fourier series. 2. Image reconstruction. 3. Iterative methods (Mathematics)

Área de concentração: Análise Numérica

Titulação: Doutorado em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Lucio Tunes dos Santos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Dan Marchesin (IMPA-RJ)
Prof. Dr. André Nachbin (IMPA-RJ)
Prof. Dr. Hae Yong Kim (EDUSP-USP)

Data da defesa: 08/02/2006

Tese de Doutorado defendida em 08 de fevereiro de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr. (a). ALVARO RODOLFO DE PIERRO

Prof. (a). Dr. (a). LUCIO TUNES DOS SANTOS

Prof. (a). Dr. (a). DAN MARCHESIN

Prof. (a). Dr. (a). ANDRÉ NACHBIN

Prof. (a). Dr. (a). HAE YONG KIM

Agradecimentos

Ao Professor **Alvaro R. De Pierro** , pela orientação e dedicação.

Aos professores e colegas do IMECC, pelo apoio e incentivo.

A CAPES pelo apoio financiero.

RESUMO

A detecção de descontinuidades é um problema que aparece em muitas áreas de aplicação. Exemplos disto são os métodos de Fourier em tomografía computadorizada, inversão em ressonância magnética e as leis de conservação em equações diferenciais. A determinação precisa dos pontos de descontinuidade é essencial para obter convergência exponencial da série de Fourier para funções contínuas por partes e evitar assim os efeitos do conhecido fenômeno de Gibbs. Nos trabalhos de Wei et al. de 1999 e 2004 foram desenvolvidos filtros polinomiais para reconstruir funções a partir de seus coeficientes de Fourier. No trabalho de Wei et al. do 2005 estes filtros foram usados para construir métodos iterativos rápidos para a detecção de descontinuidades. Nesta tese são introduzidos filtros mais gerais baseados em funções splines, que conseguem maior precisão que aqueles apresentados em esses trabalhos e também são apresentados os correspondentes métodos iterativos para as descontinuidades. São obtidas também estimativas para os erros assim como experiências numéricas que validam os algoritmos. Mostra-se também um novo método que apresenta um melhor desempenho que aqueles baseados na série parcial conjugada de Fourier usados nos trabalhos de Gelb e Tadmor.

ABSTRACT

Detecting discontinuities from Fourier coefficients is a problem that arises in several areas of application. Important examples are Fourier methods in Computed Tomography, Nuclear Magnetic Resonance Inversion and Conservation Law Differential Equations. Also, the knowledge of the precise location of the discontinuity points is essential to obtain exponential convergence of the Fourier series for a piecewise continuous function, avoiding the well known Gibbs phenomenon. In the work of Wei et al. (1999, 2004), polynomial filters were developed to reconstruct functions from their Fourier coefficients. In the work of Wei et. al. (2005), these filters were used to develop fast iterative methods for discontinuity detection. In this thesis we introduce more general spline based filters, that achieve higher accuracy than those works, and the corresponding iterative methods for the discontinuities. Estimates for the errors are presented as well as many numerical experiments validating the algorithms. Also, we show that a new and simple method, not using any nonlinear solver, performs better than those based on the conjugate Fourier series as in the work of Gelb and Tadmor.

Conteúdo

1 Introdução **3**

2 Análise de Fourier **7**
2.1 Convergência da Série de Fourier 7
2.2 O Fenômeno de Gibbs 13
2.3 A Transformada Discreta de Fourier 17
2.4 Filtros 20
2.5 Método Linear 23

3 Métodos de Reconstrução **29**
3.1 Breve introdução aos Splines 29
3.1.1 B-Splines 29
3.1.2 Splines Interpolantes 31
3.2 Novos Filtros Baseados em Splines 34
3.2.1 Aproximação de grau zero 35
3.2.2 Aproximação de grau 1 38
3.2.3 Caso Geral: $n \geq 2$ 42

4 Erros de Aproximação **49**
4.1 Erros de Aproximação 49
4.2 Estimativa do erro para a fórmula de grau zero 49
4.2.1 Malha uniforme 49
4.2.2 Malha não uniforme 50
4.3 Estimativas do erro para a fórmula de grau 1 52
4.4 Estimativas do erro para a fórmula de grau 2 54

5 Aproximações Iniciais **58**
5.1 Aproximações iniciais para os pontos de descontinuidade 58
5.2 Experiências Numéricas 65

6 Métodos Iterativos **82**
6.1 Métodos Iterativos de Reconstrução 82
6.1.1 Método de grau zero 82
6.2 Métodos de ordem superior 83
6.2.1 Método de grau 1 83
6.2.2 Método de grau 2 86

7 Experiências Numéricas **90**
7.1 Experiências Numéricas 90

8 Conclusões **109**

9 Apêndice **111**
9.1 Fórmula alternativa de grau 2 111

Capítulo 1

Introdução

A reconstrução dos valores pontuais de uma função contínua por partes, com um alto grau de precisão, a partir de um número finito de seus coeficientes de Fourier, é uma questão muito importante em várias disciplinas. Esta é uma área de grande interesse em Análise Numérica e Computacional. Muitos problemas envolvem dados que são suaves por partes. Representações de Fourier podem ser muito úteis em algumas aplicações tais como soluções aproximadas para PDE's ou compressão de imagens. Entre as primeiras, pode-se citar o caso de movimentos ou fluxo de fluidos que são governados por leis de conservação não lineares. Neste tipo de problema, dados que inicialmente são suaves podem acabar desenvolvendo "shocks"(ondas de choque) que podem ser representadas por descontinuidades em campos de pressão. Em outras situações a propria função a ser reconstruída pode apresentar descontinuidades. Para o caso de imagens, as descontinuidades podem representar bordas que diferenciam objetos ou tecidos.

Na área do diagnóstico médico por imagens e em particular na área da tomografia computarizada, uma imagem tomográfica é obtida a partir de projeções da transformada de Radon. Estas projeções podem-se relacionar com os coeficientes de Fourier distribuídos numa malha polar bidimensional. No lugar de usar para a reconstrução da imagem a tradicional técnica de retro-projeção filtrada ("filtered back projection"), uma posibilidade aberta é aplicar os métodos aqui desenvolvidos, dimensão por dimensão, para poder recuperar a função sem os artefactos e o "blurring"normalmente associados à retro-projeção filtrada.

Recuperar valores pontuais da função a partir dos coeficientes da expansão de Fourier corresponde à possibilidade de recuperar informação local através de informação global. Para funções que são contínuas por partes a presença do *Fenômeno de Gibbs* dificulta esta tarefa.

É um fato conhecido que a qualidade da reconstrução depende da suavidade da função, pois a taxa de decaimento destes coeficientes está diretamente relacionada com o número de derivadas contínuas da função. Assim, para o caso de funções contínuas e com derivada contínua por pedaços, as somas parciais da correspondente série de Fourier convergem uniformemente para a função. Neste caso é possível reconstruir a função a partir de um número finito de coeficientes de Fourier.

No caso de funções que são descontínuas por partes, truncar a série de Fourier resulta na aparição de oscilações espúrias numa vizinhança das singularidades que acabam por reduzir a taxa global de convergência. Isto é conhecido pelo nome de *Fenômeno de Gibbs* e é considerado o motivo principal da grande falha dos métodos espectrais. Este fenômeno não desaparece ao incrementar o número de harmônicos na representação de Fourier. Quando mais termos da série são considerados para fazer a aproximação, consegue-se somente reduzir a região das oscilações, mas a amplitude máxima das mesmas continua constante. Aparece um "overshoot"de quase um 9% da magnitude do salto a ambos os lados da descontinuidade. A região onde isto acontece tem um comprimento menor quando o número de termos considerados na soma cresce, mas como já foi dito, a amplitude desse overshoot permanece constante.

É importante observar que o comportamento oscilatório apresentado pelas somas parciais de Fourier para funções contínuas por partes, é causado pela perda da convergência uniforme da série nos pontos de descontinuidade da função e não devido à natureza oscilatoria das funções bases usadas na expansão. En particular vemos que o *Fenômeno de Gibbs* também é observado quando são consideradas outro tipo de bases ortonormais: polinômios de Legendre, de Chebychev, de Laguerre, etc..

Assim como a existência de descontinuidades se reflete na presença deste fenômeno, então é natural perguntarnos se a partir deste fato é possivel extrair informação sobre a localização dos pontos de descontinuidade.

O tema do presente trabalho é a determinação dos pontos de descontinuidade de funções que apresentam um número finito de singularidades de primeira espécie, a partir de um número finito de coeficientes de Fourier, junto com a localização dos pontos, o desenvolvimento de filtros adequados para reconstruir as funções da forma mais precisa possível.

Ao tentar resolver o problema, alguns autores desenvolveram técnicas com maior ou menor grau de sucesso tendentes a eliminar o *fenômeno de Gibbs* na reconstrução da função. Quase todas estas técnicas precisam conhecer a localização das singularidades da função para depois continuar com o processo de reconstrução, e mesmo assim, os algoritmos desenvolvidos são computacionalmente custosos.

Entre os métodos que não usam informação referente à localização dos pontos, encontram-se aqueles que fazem uso da técnica de filtragem. Estes filtros atuam atenuando as altas freqüências da função acelerando assim a taxa de decaimento dos coeficientes de Fourier. Conseguem desta forma reduzir as oscilações na reconstrução. O baixo grau de precisão que conseguem nas vizinhanças dos pontos singulares, ve-se contraposto à simplicidade do método.

Para o caso dos pontos de descontinuidade já serem conhecidos, Gottlieb et al. [12] desenvolveram um método baseado nos polinômios de Gegenbauer para construir aproximações dos valores pontuais da função. Eles definem uma transformação entre a soma parcial de Fourier (através dos coeficientes) e uma nova expansão da função em termos dos polinômios de Gegenbauer. Eles mostraram que os coeficientes desta nova expansão apresentam um decaimento rápido que acaba acelerando a convergência. Embora esta convergência teórica seja exponencial, o custo computacional é alto demais.

Existem também algoritmos híbridos que combinam o uso de filtros em regiões que não contem singularidades, junto com expansões de Gegenbauer onde os filtros perdem precisão.

É importante salientar que a detecção dos pontos de descontinuidade da função é um fator crucial no bom desempenho de qualquer um dos métodos de reconstrução de alta resolução. Erros na detecção das descontinuidades podem levar a grandes falhas na reconstrução da imagem.

Entre os métodos desenvolvidos para detectar as descontinuidades de uma função encontramos o de *Eckhoff* ([6], [7]). Este autor apresenta um método que fornece aproximações a estes pontos através da resolução de um conjunto de equações algébricas de grau L, onde L corresponde ao número total de descontinuidades e deve ser conhecido *a priori*. Isto complica a implementação do método pois na prática o número de descontinuidades da função em geral não está disponível. O método também calcula aproximações para os saltos da função nesses pontos.

Gelb e *Tadmor* ([8], [9]) usam um enfoque diferente para detectar descontinuidades. Eles introduzem o que denominam de "núcleos de concentração", que correspondem a generalizações da soma conjugada de Fourier, que como se sabe, convergem pontualmente para o suporte singular da função em questão.

No presente trabalho apresentamos varios métodos novos para construir aproximações aos pontos de descontinuidade baseados somente nos coeficientes de Fourier, que mostram um ótimo desempenho na localização destas singularidades e que conseguem diferenciar ou bem separar mesmo aquelas que estão muito próximas mesmo com ruído nos dados. Apresentam-se também diferentes métodos para reconstruir os valores pontuais da função.

O esquema da dissertação é o seguinte: no Capítulo 2 encontram-se alguns resultados básicos da análise de Fourier que inclui uma descrição do fenômeno de Gibbs, da técnica de filtragem e do método linear. No Capítulo 3 apresentam-se alguns resultados gerais sobre as funções "splines"que são utilizados para deduzir a nova familia de "filtros splines" de grau n. Também apresentamos os novos métodos de reconstrução que foram construídos por nos usando esses filtros. No Capítulo 4 nos calculamos as estimativas dos erros de aproximação no espaço de Fourier para cada um dos métodos de reconstrução apresentados no Capítulo anterior. No Capítulo 5 encontra-se o teorema exposto em [19] que é a base do método desenhado para detectar aproximações iniciais às singularidades da função. Nos mostramos numericamente como o método consegue detectar descontinuidades mesmo com ruido nos dados. No Capítulo 6 se apresentam os métodos iterativos construídos para refinar os valores iniciais e, portanto, a qualidade da reconstrução. Finalmente apresentamos no Capítulo 7 experiências numéricas ilustrando as vantagens dos nossos métodos. No apêndice apresenta-se uma nova fórmula de reconstrução de grau 2 que segue a construção daquelas apresentadas no trabalho [20].

Capítulo 2

Análise de Fourier

Nosso problema é a detecção de descontinuidade de uma função suave por partes a partir de um número finito de seus coeficientes de Fourier, e a reconstrução dos valores pontuais da f. Para descrever matematicamente este problema, neste capítulo introdutório apresentam-se resultados gerais sobre a série de Fourier que serão necessários na exposição. Na Seção 2.1 se apresentam resultados relevantes sobre a convergência da série de Fourier. Na Seção 2.2 realiza-se uma breve descrição do Fenômeno de Gibbs. A seguir, na Seção 2.3 se apresenta a transformada discreta de Fourier e algumas de suas propriedades. Na Seção 2.4 se apresenta uma abordagem para resolver o problema através da utilização de filtros, e por último, descreve-se brevemente o método desenvolvido em [8] e [9].

2.1 Convergência da Série de Fourier

A grande descoberta de Fourier sobre a descomposição de quase qualquer sinal periódico numa soma de freqüências fundamentais teve um grande impacto tanto na matemática pura quanto na aplicada. A eficácia desta representação reside principalmente na ortogonalidade de suas funções bases. Elas correspondem às autofunções de um dos mais simples problemas de valores de contorno auto-adjuntos. Ao ter que lidar com somas infinitas no lugar de somas finitas, a questão da convergência tem uma importância fundamental. A continuação apresentam-se alguns resultados da teoria clássica das Séries de Fourier, que serão de utilidade no resto do trabalho. Um estudo exaustivo das séries de Fourier pode-se achar no texto de Zygmund [23].

A expansão em série de Fourier de uma função a valores reais e definida no intervalo $[0,1]$ é dada por:

$$f_\infty(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \; e^{i2\pi kx},$$

onde

$$\hat{f}_k = \int_0^1 f(x) \; e^{-i2\pi kx} dx, \quad k \in \mathbf{Z},$$

corresponde ao $k-$ésimo coeficiente de Fourier da função e é simplesmente o peso que este modo tem na representação de Fourier da função. Esta integral que define os coeficientes existe para qualquer função que seja integrável no sentido de Lebesgue. No que segue, assumiremos que a função $f \in L_2[0,1]$ e é periódica com período 1.

f_∞ representa a expansão formal da função f em termos do sistema ortogonal de Fourier. Deve ser estabelecido em que sentido a série converge, qual é a relação entre a série e a função f, e quão rápido a série converge. Por exemplo, se f for contínua e periódica a série de Fourier de f não necessariamente converge no intervalo $[0,1]$.

Note que a escolha do intervalo $[0,1]$ deve-se somente a uma simples questão de conveniência e a adaptação para qualquer outro intervalo pode ser feita elementarmente através de uma simples mudança de coordenadas.

Definição: Seja f uma função a valores reais definida no intervalo $[0,1]$. Diremos que f é contínua por partes se ela está bem definida e é contínua exceto possivelmente num número finito de pontos e nestes pontos as descontinuidades são de primeira espécie, i.e., se z é um ponto de descontinuidade de f, então existem os limites laterais neste ponto,

$$f(z^-) = \lim_{x\to z^-} f(x), \qquad\qquad f(z^+) = \lim_{x\to z^+} f(x).$$

Estes pontos são chamados de descontinuidade de salto de f e a diferença entre os limites laterais corresponde à magnitude ou amplitude do salto,

$$[f](z) = f(z^+) - f(z^-).$$

Definição: Uma função $f(x)$ a valores reais definida no intervalo $[0,1]$ é C^1 por partes se ela é bem definida, contínua e continuamente diferenciável exceto possivelmente num número finito de pontos e nestes pontos existem os seguintes limites laterais:

$$f(z^-) = \lim_{x \to z^-} f(x), \qquad\qquad f(z^+) = \lim_{x \to z^+} f(x),$$
$$f'(z^-) = \lim_{x \to z^-} f'(x), \qquad\qquad f'(z^+) = \lim_{x \to z^+} f'(x).$$

Lema de Riemann-Lebesgue: Se g é contínua por pedaços no intervalo $[a, b]$ então,

$$\lim_{w \to \infty} \int_a^b g(x)\ e^{iwx}\ dx = 0. \tag{2.1}$$

Demonstração: Para funções que são suficientemente suaves, por exemplo na classe $C^1[a, b]$, o resultado segue-se facilmente usando integração por partes:

$$\textstyle\int_a^b g(x)\ e^{iwx}\ dx = \frac{g(b)e^{iwb} - g(a)e^{iwa}}{iw} - \frac{1}{iw}\int_a^b g'(x)\ e^{iwx}\ dx,$$

logo,

$$|\int_a^b g(x)\ e^{iwx}\ dx| \leq \frac{1}{|w|}\ [\ |g(a)| + |g(b)| + \int_a^b |g'(x)|dx,$$

e considerando $w \to \infty$, obtem-se claramente a convergência para zero. Para $g(x)$ contínua por partes, $\forall \epsilon > 0$ existe um polinômio $p(x)$ tal que

$$\int_a^b |g(x) - p(x)|\ dx \leq \epsilon,$$

então,

$$|\int_a^b g(x)\ e^{iwx}\ dx| \leq \int_a^b |g(x) - p(x)|dx + |\int_a^b p(x)\ e^{iwx}\ dx| \leq \epsilon + |\int_a^b p(x)\ e^{iwx}\ dx|,$$

por ser o lema válido para polinômios , $\lim_{w \to \infty} \int_a^b p(x)\ e^{iwx}\ dx = 0$ e ϵ arbitrario, resulta então que $\lim_{w \to \infty} \int_a^b g(x)\ e^{iwx}\ dx = 0$ $\diamondsuit$.

Intuitivamente, o lema afirma que na medida em que as freqüências w são cada vez mais altas, a velocidade das oscilações cresce e estas tendem a cancelar entre elas.

Se a função f é contínua por partes vemos que seus coeficientes de Fourier estão bem definidos, mas isto não garante a convergência da série. Assim, a primeira questão a ser estabelecida é sob quais hipóteses a série converge para a função f.

Para analisar esta questão é importante introduzir a *série truncada de Fourier*. Esta soma finita é de grande utilidade prática pois fornece um método simples para reconstruir aproximações a valores pontuais da função quando esta é suave e periódica, e equivale à soma parcial da série. Assumindo N par a série truncada de Fourier é dada por,

$$f_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k \; e^{i2\pi kx}.$$

A função $f_N(x)$ é a projeção ortogonal da função f sobre o subespaço gerado pela base trigonométrica $\{e^{i2\pi kx}\}_{k=-N/2}^{N/2}$. A seguir será útil expressar esta soma parcial através de uma integral definida:

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k \; e^{i2\pi kx}, \\ &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} [\int_0^1 f(t) \; e^{i2\pi kt} \; dt \;] \; e^{i2\pi kx}, \\ &= \int_0^1 f(t) \; [\sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{i2\pi k(x-t)}] \; dt, \\ &= \int_0^1 f(t) \; D_{N/2}(x-t) \; dt, \end{aligned}$$

logo,

$$f_N(x) = (f * D_{N/2})(x),$$

onde "$*$"denota a convolução e $D_{N/2}$ é o núcleo de Dirichlet,

$$D_{N/2}(x) = \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}.$$

A função $D_{N/2}$ é a projeção ortogonal da função *delta de Dirac* sobre o espaço de polinômios trigonométricos de grau $\leq N/2$ com produto interno dado por

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Teorema(*Convergência pontual da série de Fourier)*: Se $f(x)$ é uma função C^1 por partes, então a série de Fourier associada à função f converge para $f(x)$ nos pontos de continuidade e para $\dfrac{[f(x^+) + f(x^-)]}{2}$ nos pontos de descontinuidade.

Demonstração: Começaremos utilizando a expressão da soma parcial de Fourier na sua formulação integral,

$$f_N(x) = \int_0^1 f(y)\ D_{N/2}(x-y)\ dy.$$

Logo temos que,

$$f_N(x) = \int_0^1 f(y)\ \frac{\sin(\pi(N+1)(x-y))}{\sin \pi(x-y)}\ dy \quad = \int_0^1 f(x+y)\ \frac{\sin(\pi(N+1)y)}{\sin \pi y}\ dy$$

Portanto para provar o resultado do teorema será suficiente mostrar que,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x+y)\ \frac{\sin(\pi(N+1)y)}{\sin \pi y}\ dy = f(x^-)/2,$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x+y)\ \frac{\sin(\pi(N+1)y)}{\sin \pi y}\ dy = f(x^+)/2.$$

Mostraremos a primeira das igualdades pois a outra resulta de maneira análoga. Observe que,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(\pi(N+1)y)}{\sin \pi y}\ dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{i2\pi k y}\ dy = 1/2. \tag{2.2}$$

Mostrar a primeira igualdade equivale então a provar que,

$$\lim_{N\to\infty}\ 2\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x+y)-f(x^+)}{\sin \pi y}\ \sin(\pi(N+1)y)\ dy = 0.$$

Seja $g(y) = \dfrac{f(x+y)-f(x^+)}{\sin \pi y}$, esta função é contínua por pedaços no intervalo $[0,1/2]$. O único ponto a priori problemático corresponde a $x=0$, mas neste caso usando a hipótese do teorema temos que:

$$\lim_{y\to 0^+} g(y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(x+y)-f(x^+)}{y}\ \frac{y}{\sin \pi y} = \frac{f'(x^+)}{\pi}.$$

Logo será suficiente mostrar que,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} g(y)\ \sin((N+1)\pi y)\ dy = 0,$$

mas isto resulta do Lema de *Riemann-Lebesgue*. Portanto temos que,

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \frac{1}{2}\,[f(x^+) + f(x^-)] \quad \diamondsuit.$$

No comportamento da série é fundamental o grau de "suavidade"da função. A seguir se apresentam sem demonstração alguns resultados ao respeito. As demonstrações podem ser achadas em [23].

Teorema (*Convergência uniforme da série de Fourier)* : Seja f uma função definida sobre o intervalo $[0,1]$, periódica e C^1 por partes. Se f é contínua para todo x e $f(0) = f(1)$, então a série converge uniformemente para f em todo o intervalo.

Critério de Convergência Uniforme: Se os coeficientes de Fourier $\hat{f}_k$ satisfazem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k| < \infty,$$

então a série de Fourier $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k\, e^{i2\pi kx}$ converge uniformemente para uma função contínua f, com $\hat{f}_k$ igual ao coeficiente de Fourier da soma.

O criterio de convergência uniforme precisa que pelo menos os coeficientes de Fourier da função tendam a zero, mas com uma taxa de convergência não muito baixa. Por exemplo, cada termo da série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^{\alpha}}$$

tende a zero para todo $\alpha > 0$, mas a série converge se e somente se $\alpha > 1$.

Uma propriedade muito importante dos coeficientes de Fourier e mais geral que o critério de convergência uniforme, é que quanto mais rápido eles tendem para zero, mais suave a função resulta.

Teorema: Seja $n \geq 0$, se os coeficientes de Fourier satisfazem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^n\, |\hat{f}_k| < \infty,$$

então a série de Fourier converge para uma função periódica que é n vezes continuamente diferenciável, isto é, $f \in C^n[0,1]$.

Um outro resultado importante é que para uma função f analítica e periódica, a série de Fourier converge com taxa exponencial:

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f_N(x) - f(x)| \leq e^{-\alpha N}, \qquad \alpha > 0.$$

No entanto, para funções que apresentam alguma descontinuidade, a taxa de convergência diminui drasticamente,

- Para valores de x distantes de pontos de descontinuidade,

$$|f_N(x) - f(x)| \sim O(\tfrac{1}{N}).$$

- Para valores de x numa vizinhança de um ponto de descontinuidade z,

$$|f_N(x) - f(x)| \sim O(\alpha|[f(z^+) - f(z^-)|).$$

Para funções que apresentam descontinuidade de saltos, é precisamente na soma parcial de Fourier onde surge o *Fenômeno de Gibbs*. Ele reflete a falta de convergência uniforme da série e se manifesta, como se mostra e ilustra na secção seguinte, através de oscilações espurias nas vizinhanças dos pontos de descontinuidade.

2.2 O Fenômeno de Gibbs

O primeiro estudo conhecido sobre este Fenômeno data do ano 1848 e é devido a Henry Wilbraham [22], isto é meio século antes que o famoso físico e matemático Josiah W. Gibbs ([10], [11]) desse uma descrição matemática do Fenômeno que agora leva seu nome. Embora não apresentasse uma prova matemática completa, ele explicou a presença do fenômeno no analisador harmônico de Albert A. Michelson no ano 1898. Foi Bôcher [2], no ano 1906, o primeiro a fornecer essa demonstração. Maiores detalhes sobre as notas históricas que relatam a descoberta do *Fenômeno de Gibbs* podem ser encontradas em [5].

Como foi dito anteriormente, o *Fenômeno de Gibbs* é um reflexo da convergência não uniforme da série de Fourier para funções que apresentam descontinuidade de salto. Para este tipo de funções, a soma parcial de Fourier exibe oscilações perto do ponto singular e este comportamento não pode ser corrigido apenas aumentando o número de termos da soma.

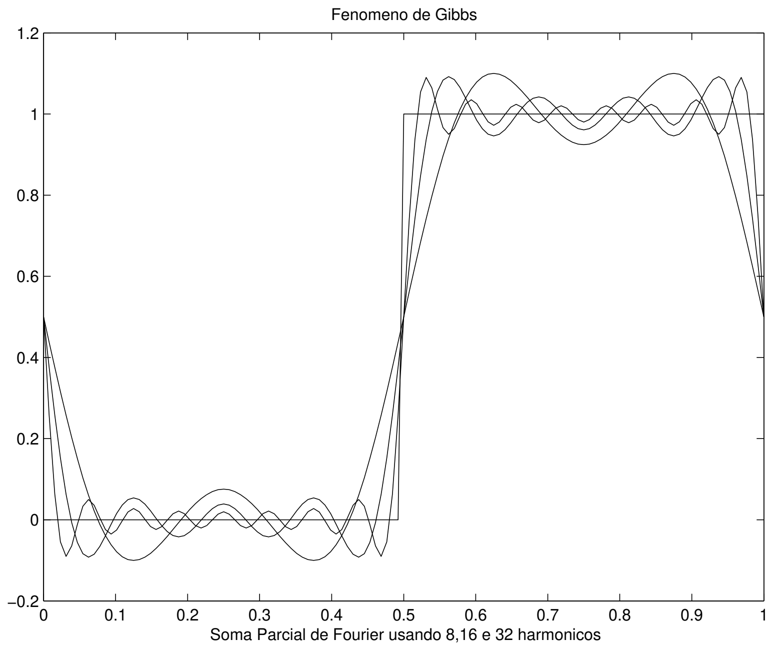


Figura 2.1: Ilustração do Fenômeno de Gibbs

A seguir ilustraremos para uma função em particular, como se manifesta o *Fenômeno de Gibbs*. O exemplo mais simples de uma função contínua por partes é a função "degrau":

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \ \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Na figura (2.1) pode-se observar claramente a presença do *Fenômeno de Gibbs* para as diferentes somas parciais de Fourier consideradas. Longe dos pontos singulares, ainda que lentamente, as somas parciais convergem. No entanto, são claras as oscilações perto desses pontos, neste caso $x = 0$ e $x = 0.5$. É possível notar também que o fenômeno não desaparece ao considerar um número maior de modos de Fourier. Neste caso consegue-se somente reduzir a região onde as oscilações se produzem, mas a amplitude máxima das mesmas continua constante e corresponde aproximadamente a 9% da amplitude do salto em questão. É instrutivo analisar a convergência desta série com mais detalhe.

Para ver isto é preciso usar os coeficientes de Fourier desta função. Eles são dados por: $\hat{f}_0 = \frac{1}{2}$ e

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{-1}{\pi k i} & k \text{ ímpar }, \\ 0 & k \text{ par }. \end{cases}$$

Portanto $\quad f_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k \; e^{i2k\pi x} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N/4} \frac{\sin((2k-1)2\pi x)}{(2k-1)}$.

$$f_N(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N/4} \frac{\sin((2k-1)2\pi x)}{(2k-1)} = \frac{1}{2} - 4 \sum_{k=1}^{N/4} \int_0^x cos(2\pi(2k-1)u)du.$$

Usando a identidade, $\sum_{k=1}^{N/4} \cos(2\pi(2k-1)u) = \frac{\sin(N\pi u)}{2\sin(2\pi u)}$ obtem-se que,

$$S_N(x) = \frac{1}{2} - 2 \sum_{k=1}^{N/4} \int_0^x \frac{\sin(N\pi u)}{\sin(2\pi u)} \; du.$$

O valor máximo desta expressão é atingido para aqueles valores de x que satisfazem $x = x_i = i/N, i \neq 0$, sendo o primeiro destes valores $x_1 = \frac{1}{N}$. Portanto,

$$f_N(\tfrac{1}{N}) = \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{N}} \frac{\sin(N\pi u)}{\sin(\pi u)} \; du \;\sim \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{N}} \frac{\sin(N\pi u)}{\pi u} \; du$$

Fazendo a substituição correspondente na integral e usando o fato que,

$$\frac{1}{\pi} \; Si(\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{sen(y)}{y} \; dy = 0.5895,$$

resulta,

$$S_N(\tfrac{1}{N}) \sim \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{sen(y)}{y} \; dy = \tfrac{1}{2}(1 - 2 \; Si(\pi)) = -0.0895 \; .$$

Isto mostra o dito anteriormente que a máxima amplitude de oscilação na vizinhança do ponto de descontinuidade, corresponde a quase 9% do valor do salto, que no ponto $x = 0$ é igual a -1 . Além do mais estas oscilações se propagam em todo o intervalo reduzindo assim a taxa de convergência em pontos que estão longe das singularidades. Este comportamento não é só válido para a função “degrau”em particular, senão em geral para todas as funções que apresentam descontinuidades de salto.

Para o caso geral em que $f \in L_2[0,1]$ é uma função contínua por partes e z corresponde a uma descontinuidade de salto, temos então que,

$$\lim_{N\to\infty} f_N(z + \frac{2w}{N+1}) = \frac{f(z^+) + f(z^-)}{2} + \frac{f(z^+) - f(z^-)}{\pi} \int_0^w \frac{\sin(s)}{s} ds.$$

Para mostrar isto, começamos escrevendo a soma parcial de Fourier em função do núcleo de Dirichlet,

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k \; e^{i2\pi kx}, \\ &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} \int_0^1 f(t)\; e^{i2\pi k(x-t)}\; dt, \\ &= \int_0^1 f(t)\; \frac{\sin \pi(N+1)(x-t)}{\sin(\pi(x-t))}\; dt. \end{aligned}$$

Para analisar o comportamento da série truncada perto do ponto de descontinuidade consideramos o seguinte,

$$f_N(z+\tfrac{2w}{N+1}) = \int_x^{x-1} f(z+\frac{2w}{N+1}-t)\; \frac{\sin(\pi(N+1)t)}{\sin(\pi t)}\; dt,$$

Como a principal contribuição da integral, para $N \to \infty$, é de uma vizinhança do zero e considerando a extensão periódica da função, é possível reescrever esta expressão da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} f_N(z+\tfrac{2w}{N+1}) &\approx \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(z+\frac{2w}{N+1}-t)\; \frac{\sin(\pi(N+1)t)}{\pi t}\; dt, \\ &\approx \frac{f(z^+)}{\pi} \int_{-\epsilon}^{2w/N+1} \frac{\sin(\pi(N+1)t)}{t} dt + \frac{f(z^-)}{\pi} \int_{2w/N+1}^{\epsilon} \frac{\sin(\pi(N+1)t)}{t} dt, \\ &\approx \frac{f(z^+)}{\pi} \int_{-\epsilon(N+1)/2}^{w} \frac{\sin(s)}{s} ds + \frac{f(z^-)}{\pi} \int_{w}^{\epsilon(N+1)/2} \frac{\sin(s)}{s} ds, \\ &\approx \frac{f(z^+)}{\pi} \int_{-\infty}^{w} \frac{\sin(s)}{s} ds + \frac{f(z^-)}{\pi} \int_{w}^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds, \\ &\approx \frac{f(z^+)}{\pi} [\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin(s)}{s} ds + \int_0^w \frac{\sin(s)}{s} ds] + \frac{f(z^-)}{\pi} [\int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds - \int_0^w \frac{\sin(s)}{s} ds], \\ &= \frac{f(z^+)+f(z^-)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds + \frac{f(z^+)-f(z^-)}{\pi} \int_0^w \frac{\sin(s)}{s} ds, \\ &= \frac{f(z^+)+f(z^-)}{2} + \frac{f(z^+)-f(z^-)}{\pi}\; si(w), \end{aligned}$$

onde $si(x) = \int_0^x \frac{\sin(y)}{y}\; dy.$

Depois de proceder de forma análoga para $x = z - \frac{2w}{N+1}$ obtem-se que,

$$\lim_{N\to\infty} f_N(z+\frac{2w}{N+1}) - f_N(z-\frac{2w}{N+1}) = \frac{2si(w)}{\pi}\; [f(z^+)-f(z^-)].$$

É importante mencionar que o comportamento oscilatório da série truncada de Fourier não tem a ver com a natureza oscilatória das funções bases usadas na expansão. O *Fenômeno de Gibbs* também se apresenta em qualquer outro tipo de expansões ortogonais para funções suaves por partes. É o processo de truncamento que leva a aproximações não uniformes.

2.3 A Transformada Discreta de Fourier

Seja N um inteiro positivo e par. Consideramos a malha definida pelos nós, $x_j = j/N$ para $j = 0, \ldots, N-1$. Definimos $f_j = f(x_j + \delta)$ para $j = 0, \ldots, N-1$, onde $0 \leq \delta < 1/N$.

A Transformada Discreta de Fourier (DFT) da seqüência $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ é dada por,

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \; e^{-i2\pi k x_j}, \;\; -N/2 \leq k \leq N/2 - 1,$$

e a sua transformada inversa (IDFT),

$$f_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{f}_k \; e^{i2\pi k x_j}, \;\; 0 \leq j \leq N-1.$$

A Transformada discreta de Fourier é uma ferramenta fundamental em muitas áreas como processamento digital de sinais, compressão de dados e equações diferenciais parciais.

Observar que tanto o fator de normalização $\frac{1}{N}$ quanto o sinal do exponente são convenções e podem diferir em diferentes áreas. O importante é que o sinal dos expoentes seja oposto e que o produto dos fatores de normalização na DFT e na IDFT seja $\frac{1}{N}$. A normalização $\frac{1}{\sqrt{N}}$ faz com que ambas transformações resultem unitárias. Notar também que os $\tilde{f}_k{}' s$ somente dependem do valor da função nos nós f_j.

A DFT corresponde a uma transformação ortogonal em C^N, entre os N números $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ e os N números complexos $\{\tilde{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2-1}$. Diferentes deduções da fórmula da DFT podem ser encontradas em [4].

A seguinte notação será também usada: $DFT\{f_j\}_k \doteq \tilde{f}_k$ e analogamente, $IDFT\{\tilde{f}_k\}_j \doteq f_j$.

Mostrar que efetivamente a DFT e a IDFT é uma inversa da outra, resulta elementarmente da propriedade fundamental de ortogonalidade discreta da exponencial complexa,

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{i2\pi k x_j}\ e^{-i2\pi k x_l} = N\delta_{j,l}^{N},$$

onde

$$\delta_{j,l}^{N} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j = l \quad \text{ou} \quad j - l = \dot{N}, \\ 0 & \text{caso} \quad \text{contrario.} \end{cases}$$

pois

$$\begin{aligned} IDFT\{DFT\{f_j\}_k\}_l &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{f}_k\ e^{i2\pi k x_j}, \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{i2\pi k(x_l - x_j)}, \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j\ \delta_{j,l}^{N} = f_l. \end{aligned}$$

A propriedade de ortogonalidade discreta da exponêncial complexa também pode ser usada para deduzir uma versão discreta da fórmula de Poisson,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\ e^{-i2\pi k x_j}, \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} [\sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{f}_r\ e^{i2\pi r x_j}]\ e^{-i2\pi k x_j}, \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{f}_r\ [\sum_{j=0}^{N-1} e^{i2\pi r(x_j - x_l)}], \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{f}_r\ \delta_{r,k}^{N}, \\ &= \hat{f}_k + \sum_{s=-\infty, s\neq 0}^{\infty} \hat{f}_{k+sN}. \end{aligned}$$

Uma outra observação interessante é que dados $\{(x_j, f_j)\}_{j=0}^{N-1}$, o polinômio trigonométrico que melhor aproxima esses dados no sentido dos quadrados mínimos corresponde a,

$$P_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k\ e^{i2\pi k x}, \quad \text{onde } a_k = \tilde{f}_k.$$

Ou seja, o erro é minimizado quando os coeficientes do polinômio são dados pela DFT dos $f_j's$. Além do mais, este polinômio é o polinômio trigonométrico interpolante, pois $P_N(x_j) = f_j$.

Computacionalmente, a Transformada Discreta de Fourier pode ser eficientemente implementada através do algoritmo de Cooley e Tuckey, conhecido pelo nome de FFT (*Fast Fourier Transform*). A FFT é de grande importância em muitas aplicações. O número de operações necessárias para calcular a DFT através da FFT é da ordem de $O(Nlog_2(N))$, no lugar das N^2 operações necessárias para o produto matriz/vetor.

Observe também que $\tilde{f}_k$ pode-ser interpretada como uma aproximação a $\hat{f}_k$ usando a regra de integração numérica dos trapézios com subdivisão para aproximar a integral que define aos coeficientes de Fourier.

Note que a DFT pode ser definida para qualquer seqüência de N números complexos.

A seguir se apresentam algumas das propriedades mais relevantes da DFT que serão usadas posteriormente. Para mais propiedades ver [4].

Propriedades da DFT

- *Periodicidade*

  As seqüências definidas pela DFT são $N-$periódicas. Isto significa que,

  $$DFT\{f_j\}_{k+N} = DFT\{f_j\}_k \quad e \quad f_j = IDFT\{\tilde{f}_k\}_j = f_{j+N} \quad \forall j,k \in Z.$$

  Assim a informação completa está contida na primeira metade da seqüência da DFT.

  Isto resulta imediatamente de $\omega_N^{-j(k+N)} = \omega_N^{-jN}$ e $\omega_N^{(j+N)k} = \omega_N^{jN}$, onde $\omega_N = e^{i2\pi/N}$.

- *Linearidade*

  Se f_j e g_j são duas seqüências complexas e α e β dois números complexos, então:

  $$DFT\{\alpha f_j + \beta g_j\}_k = \alpha\ DFT\{f_j\}_k + \beta\ DFT\{g_j\}_k.$$

- *Translação*

  Esta propriedade mostra o efeito produzido por aplicar a DFT sobre uma seqüência transladada $r-$unidades à direita: $DFT\{f_{j-r}\}_k = \omega_N^{rN} DFT\{f_j\}_k$.

  Um caso especial corresponde à translação da seqüência original na metade do período ($N/2$ unidades): $DFT\{f_{j-\frac{N}{2}}\}_k = (-1)^k \; DFT\{f_j\}_k$.

- *Convolução Discreta*

  A DFT do produto de duas seqüências é a convoluão Discreta de suas DFT's, isto é:
  $$DFT\{f_j \; g_j\}_k = \tilde{f}_k * \tilde{g}_k,$$
  onde
  $$\tilde{f}_k * \tilde{g}_k = \sum_{r=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \tilde{f}_r * \tilde{g}_{k-r}.$$

- *Teorema de Parseval*
  $$\sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |\tilde{f}_k|^2.$$

2.4 Filtros

Seja f uma função a valores reais, definida no intervalo $[0,1]$ e suave por partes. Dados um número finito de coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2}$, o problema consiste em detectar as descontinuidades da função para depois, usando esta informação, reconstruir os valores pontuais de f. A precisão da aproximação e a eficiência na implementação são questões de fundamental importância.

O uso de filtros surgiu como um método tendente a acelerar a baixa taxa de convergência que apresenta a série de Fourier truncada perto de pontos de descontinuidade da função. A idéia consiste em modificar os coeficientes de Fourier para suavizar a função aplicando um filtro passa baixa e diminuir assim os efeitos oscilatórios do *Fenômeno de Gibbs*. O processo de filtrar os coeficientes oferece uma bem conhecida solução para as grandes oscilações que se apresentam perto dos pontos de descontinuidade. A outra vantagem desta abordagem é que possui um baixo custo computacional, pois faz uso da FFT inversa para achar aproximações dos valores pontuais da f. Este método não usa informação referente à localização dos pontos de descontinuidade da função.

No teorema da convergência pontual da Secção 2.1 a hipótese sobre o grau de regularidade da função não pode ser muito mais relaxada. Por exemplo, não é possível esperar este tipo de convergência com a simples condição de continuidade, pois podem construirse exemplos de funções contínuas com séries de Fourier divergentes [23].

A idéia da aplicação de filtros para tentar obter algum tipo de "soma" dos termos da série de Fourier é bem antiga. Já Fejér, no ano 1904, obteve bons resultados neste sentido. Ele considerou um tipo diferente de soma. No lugar da soma direta de Fourier, ele introduz o que hoje é conhecido como a soma $(C, 1)$ de Cèsaro ou a soma parcial média de Fejér da série de Fourier. Com este novo método, no lugar de análisar a convergência da seqüência de somas parciais da série de Fourier, ele estudou o comportamento no limite das médias daquelas somas. Isto é,

$$S_0^{(1)} = f_0,\ S_1^{(1)} = \frac{f_0 + f_1}{2}, \ldots, S_N^{(1)} = \frac{f_0 + f_1 + \ldots + f_N}{N+1}.$$

O resultado que ele obteve é o seguinte teorema enunciado abaixo sem demonstração, ésta pode ser achada em [23]:

Teorema (Fejér): Se a série de Fourier converge no sentido usual, isto é, $\lim\limits_{N\to\infty} f_N = s$, então também é somavel no sentido de Fejér e converge para o mesmo limite. Isto é, $\lim\limits_{N\to\infty} S_N^{(1)} = s$. Porém, o $\lim\limits_{N\to\infty} S_N^{(1)}$ sempre existe, mesmo para o caso em que o $\lim\limits_{N\to\infty} f_N$ não exista.

Uma questão importante a ser observada é que a seqüência das médias $S_n^{(1)}(x)$ é equivalente à introdução de um fator multiplicativo nos coeficientes da série de Fourier,

$$\begin{aligned} S_N^{(1)}(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} f_n(x), \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (N + 1 - 2|k|)\ \hat{f}_k\ e^{i2\pi kx}. \\ &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (1 - \frac{2|k|}{N+1})\ \hat{f}_k\ e^{i2\pi kx}. \end{aligned}$$

Daqui observa-se então que a soma de Cèsaro corresponde a aplicar um fator multiplicativo aos coeficientes de Fourier ou equivalentemente, a filtrar estes coeficientes através de um filtro passa baixa particular. Note-se que este fator multiplicativo,

$(1-\frac{2|k|}{N+1})$, é sempre menor ou igual a 1, o que contribui para a convergência de $S_N^{(1)}$.

Observe-se também que esta nova soma corresponde a suavizar a função original através da convolução com o núcleo de Fejér:

$$S_N^{(1)}(x) = \int_0^1 f(t)\ K_N^{(1)}(t-x)\ dt, \quad \text{onde} \quad K_N^{(1)}(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x),$$

e $D_n(x) = \dfrac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$ é o núcleo de Dirichlet.

Observando que $2(N+1)\ \sin^2(x/2)\ K_N^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{N} \sin(x/2)\sin(k+1/2)x$, e substituindo no somatorio da direita a identidade,

$$\sin(x/2)\sin((k+1/2)x) = \frac{1}{2}[\cos(nx) - \cos(n+1)x],$$

resulta que,

$$\begin{aligned} 2(N+1)\ \sin^2(x/2)\ K_N^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\ [\cos(nx) - \cos(n+1)x] \\ &= \frac{1}{2}\ [1-\cos(N+1)x] \\ &= \frac{1}{2}\sin^2((N+1)x/2). \end{aligned}$$

Logo o núcleo de Fejér é dado pela expressão:

$$K_N^{(1)}(x) = \frac{2}{N+1}\ [\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}]^2.$$

Diferentemente do núcleo de Dirichlet, este núcleo é não negativo.

A generalização da idéia anterior leva a introdução do conceito de "filtro". Um *filtro* é uma função $\sigma(x)$, infinitamente diferenciável, com suporte no intervalo $[-1,1]$ e tal que $\sigma(0) = 1$.

Dados os coeficientes de Fourier de f, estes são pré-multiplicados pelo filtro para gerar uma "nova"série de Fourier que será chamada de "generalizada":

$$f_N^\sigma(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma(\frac{2k}{N})\ \hat{f}_k\ e^{i2k\pi x}.$$

Aquí simplesmente se apresentam os filtros mas conhecidos e usados para o caso da expansão de Fourier.

Os seguintes filtros reais estão entre os mais usados (ver [14], [12]):

(1). Filtro de Fejér

$$\bar{\sigma}_1(\eta) = 1 - |\eta|.$$

(2). Filtro de Lanczos

$$\bar{\sigma}_2(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta = 0 \\ \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta}, & \eta \neq 0, \end{cases}$$

(3). The half sine filter

$$\bar{\sigma}_3(\eta) = \frac{1 + \cos(\pi\eta)}{2}.$$

(4). The sharpened raised cosine filter

$$\bar{\sigma}_4(\eta) = \bar{\sigma}_3(\eta)^4(35 - 84\bar{\sigma}_3(\eta) + 70\bar{\sigma}_3(\eta)^2 - 20\bar{\sigma}_3(\eta)^3).$$

(5). Filtro exponencial de ordem p (para p par)

$$\bar{\sigma}_5(\eta) = e^{-\alpha\eta^p}.$$

(6). Filtro de Vandeven de orden p

$$\bar{\sigma}_6(\eta) = 1 - \frac{(2p-1)!}{(p-1)!^2}\int_0^\eta [t(1-t)]^{p-1}dt.$$

Gráficos destes filtros são mostrados na Figura 2.2. Todos estes filtros conseguem reconstruir com um bom grau de precisão aproximações para os valores pontuais de f em pontos que estão longe dos pontos de descontinuidade, mas não em pontos próximos a estes valores. Isto se deve principalmente a que esta abordagem não usa informação sobre a localização dos pontos singulares, que é fundamental para melhorar a convergência nestas regiões. Este comportamento da técnica de "filtragem"é ilustrado na Figuras 2.3 .

2.5 Método Linear

Este é um método para detectar descontinuidades (ver [8] e [9]) baseado nas propriedades da soma parcial conjugada generalizada de Fourier. Devido à linearidade

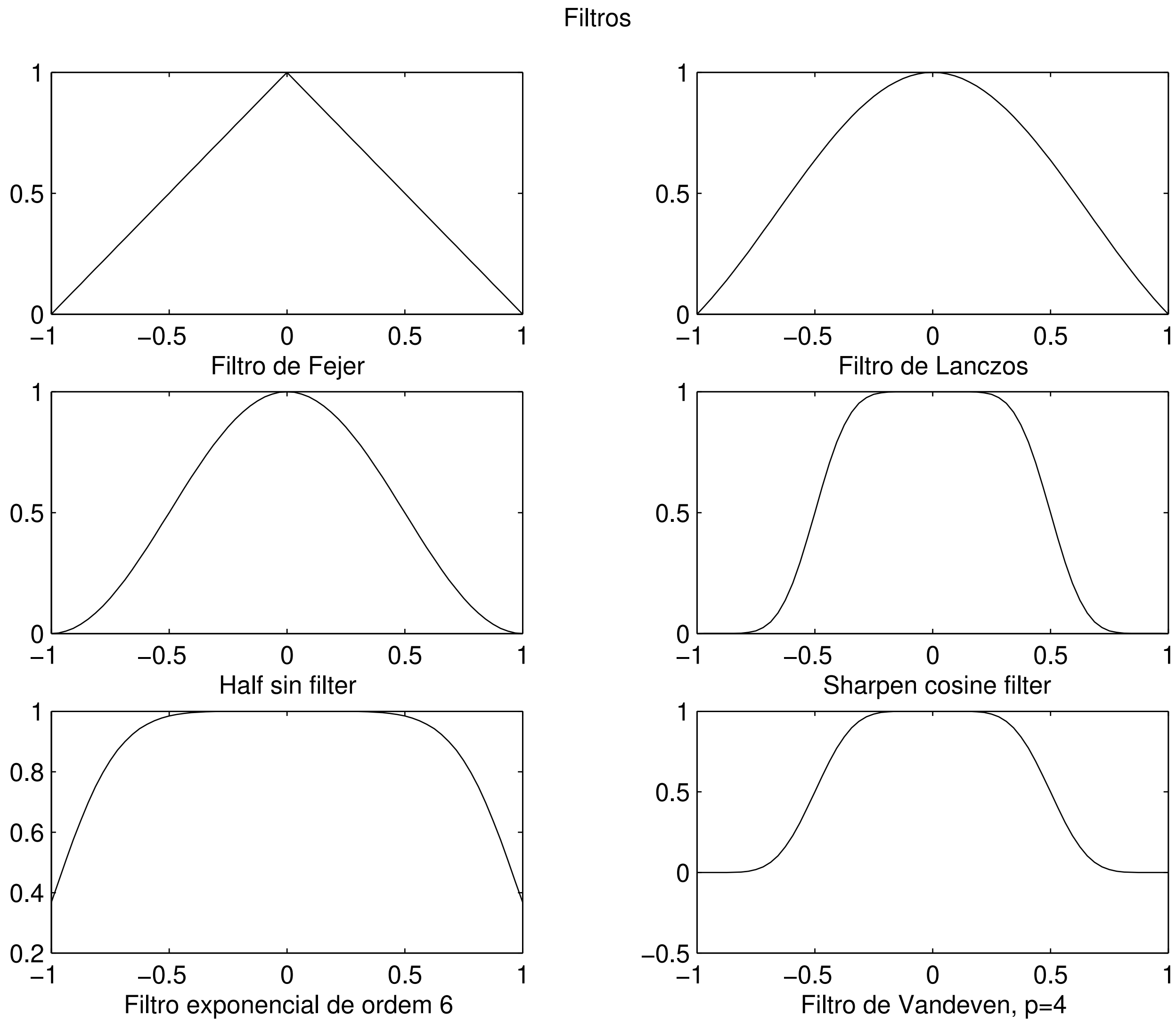


Figura 2.2: Filtros passa baixas conhecidos e usados para suavizar os efeitos oscilatórios do Fênomeno de Gibbs na reconstrução de funções suaves por partes.

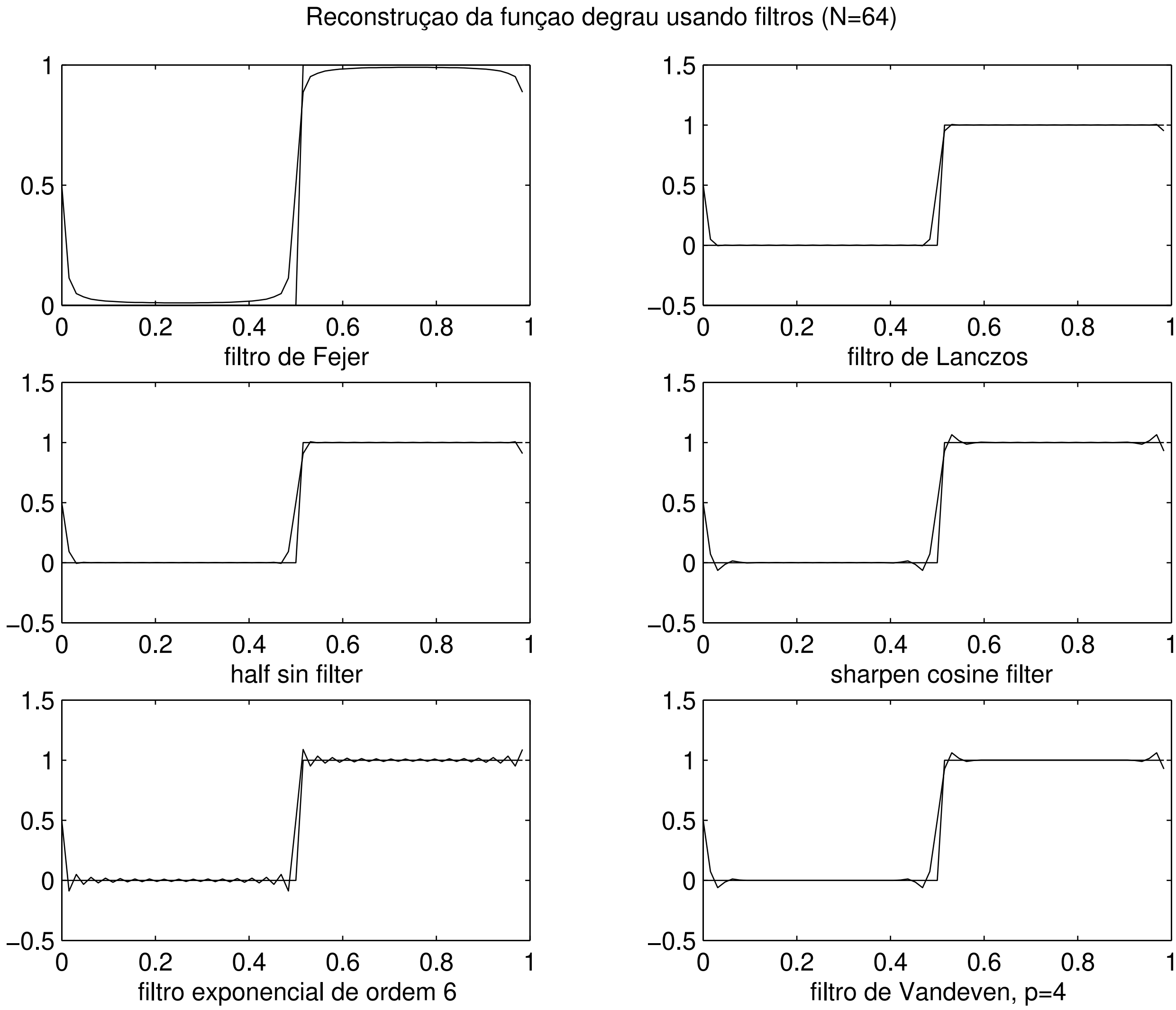


Figura 2.3: Ilustração do efeito de filtragem

desta soma, será chamado por nós de método linear.

Definição: Seja f uma função a valores reais e definida no intervalo $[0,1]$. A soma parcial conjugada de f num ponto x é dada por:

$$\tilde{S_N}[f](x) = i\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2} sinal(k)\ \hat{f}_k\ e^{i2k\pi x}. \tag{2.3}$$

A soma conjugada tem a propriedade de convergir para o suporte singular da f, isto é,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{log(N)} \tilde{S_N}[f](x) = [f](x). \tag{2.4}$$

Assim, isto pode teoricamente ser usado para detectar os pontos de descontinuidade e aproximar também a amplitude do salto associado. Mas o problema que o método apresenta é a baixa taxa de convergência, $O(\frac{1}{log(N)})$, tal como a série de Fourier.

Observe-se que $\tilde{S_N}[f](x) = (f * \tilde{D_N})(x)$, onde $\tilde{D_N}(x) = \sum_{k=1}^{N/2} \sin(2\pi kx)$ e o símbolo " $*$ " denota a convolução. Portanto,

$$f * \tilde{K_N}(x) \to [f](x),$$

onde $\tilde{K_N}(x) = \frac{1}{log(N)}\ \tilde{D_N}(x)$ é chamado de *Núcleo de Dirichlet Conjugado* e $[f](x)$ denota o valor do salto da função f no ponto x.

A convergência para o salto é da ordem de $O(\frac{1}{log(N)})$. Para remediar esta situação os autores introduzem os chamados núcleos de concentração, usando para isto determinados fatores que são chamados fatores de concentração. Estes fatores aceleram a velocidade de convergência para o suporte singular da função e resolvem a priori o problema da baixa taxa de convergência que a série conjugada de Fourier apresenta.

Define-se o núcleo de concentração $K_N^{\sigma}(x) = -\sum_{k=1}^{N/2} \sigma(\frac{2|k|}{N})\ \sin(2\pi kx)$, onde $\sigma(x)$ corresponde ao respectivo fator de concentração. Os fatores de concentração permitidos são aqueles que satisfazem às seguintes condições de admissibilidade:

- $\frac{\sigma(x)}{x} \in C^2[0,1]$.
- $\int_0^1 \frac{\sigma(x)}{x}\ dx = 1$.

Os fatores mais usados são os do tipo polinômial e o exponêncial:

$$\sigma(x) = px^p, \qquad \sigma(x) = cxe^{\frac{1}{\alpha x(x-1)}}, \; c = e^{\frac{-1}{\alpha x(x-1)}}.$$

O método linear consiste então em convoluir a soma truncada de Fourier com este novo núcleo de concentração, pois a convergência para o suporte singular agora é acelerada:

$$|(K_N^\sigma * S_N)(x) - [f](x)| \leq \; C \; \frac{log(N)}{N}.$$

Define-se então a *Soma Parcial Conjugada Generalizada* da função f:

$$\tilde{S_N}^\sigma[f](x) = i\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2} sinal(k) \; \sigma(\frac{2|k|}{N})\hat{f}_k \; e^{i2k\pi x}. \tag{2.5}$$

A principal vantagem do método reside na simplicidade com que ele pode ser implementado. São suficientes $2N$ produtos para a filtragem dos coeficientes e uma FFT inversa. A desvantagem no entanto é que apresenta uma grande sensibilidade ao ruido nos dados, e além do mais, mesmo com coeficientes exatos, ele se limita somente a detectar o intervalo que contem o ponto de descontinuidade da função. Qualquer ponto dentro dele pode ser considerado como uma aproximação para o ponto singular e já foi destacada a importância da localização dos pontos singulares para o bom desempenho dos métodos de reconstrução. Quando a função apresenta mais do que um único ponto de descontinuidade a instabilidade aumenta, pois se eles estiverem muito próximos ou bem o tamanho relativo dos saltos apresentar grandes variações então nem todos os pontos poderiam ser detectados, o que sem dúvida representa uma grande falha.

Banerjee-Geer [1] apresentam um método para detectar descontinuidades a partir de uma abordagem diferente mas que se reduz à aplicação do fator de concentração trigonométrico dado por $\sigma(x) = \frac{4}{1.17898} \; \sin(x/2) \; \frac{sin(\pi \; x/2)}{\pi x}$.

Para tentar melhorar o desempenho do método linear, os autores propõem amplificar a separação de escalas que resulta de (2.5). Especificamente, se $x = z$ corresponde a um ponto de descontinuidade da função então $\tilde{S_N}^\sigma[f](x)$ é amplificada de seguinte forma:

$$[\tilde{S_N}^\sigma[f](x)]^{\,q} \rightarrow \begin{cases} [f](z)^q & \text{se } x = z, \\ O(\frac{1}{N})^q & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Define-se $T(x) = N^{q/2} \; [\tilde{S_N}^\sigma[f](x)]^q$. Então a amplificação de escalas proposta consiste em calcular:

$$T_N(\tilde{S_N}^{\sigma}[f](x)) \ = \begin{cases} \tilde{S_N}^{\sigma}[f](x) & \text{se} \ \ |T(x)| \geq J_{crit}, \\ 0 & \text{se} \ \ |T(x)| < J_{crit}. \end{cases}$$

J_{crit} é um parámetro global da $O(1)$ que indica a amplitude mínima significativa a ser considerada como salto. Com respeito ao parâmetro q não se dispõe de nenhum critério para sua escolha. Em todas as experiências numéricas feitas pelos autores eles dão o valor de $q = 2$, mas consideram que outras pesquisas deveriam ser feitas para tentar estimar este parâmetro, pois não está claro como deveria ser escolhido. Em nossas experiências numéricas (ver Capítulo 5), este valor fixado pelos autores quando testado em outros problemas, não produz resultados satisfatórios. Parece difícil achar um que funcione em geral.

Capítulo 3

Métodos de Reconstrução

Em [19] e [20] foram desenvolvidos filtros baseados em interpolação polinomial de graus 0 e 1 para a aceleração da convergência da série de Fourier. A generalização para grau maior que 1 supõe o desenvolvimento de fórmulas inaceitavelmente complexas (ver o apêndice com o exemplo correspondente ao grau 2). Neste capítulo desenvolvemos filtros de ordem superior usando Splines para resolver este problema. A Seção 3.1 é uma rápida apresentação dos resultados necessários sobre Splines e a Seção 3.2 descreve os novos filtros.

3.1 Breve introdução aos Splines

Apresentam-se aqui alguns resultados básicos referentes às funções Splines, que serão usados posteriormente. A apresentação não pretende ser exaustiva. Informação mais detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em [3].

3.1.1 B-Splines

Os B-Splines são funções simétricas e com forma de sino ("bell-shaped"), construídas a partir da convolução reiterada do pulso retangular, isto é:

$$\beta^n(x) = \beta^0 * ... * \beta^0(x), \qquad n+1-\text{vézes},$$

onde o pulso retangular é dado por:

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \ \ |x| < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

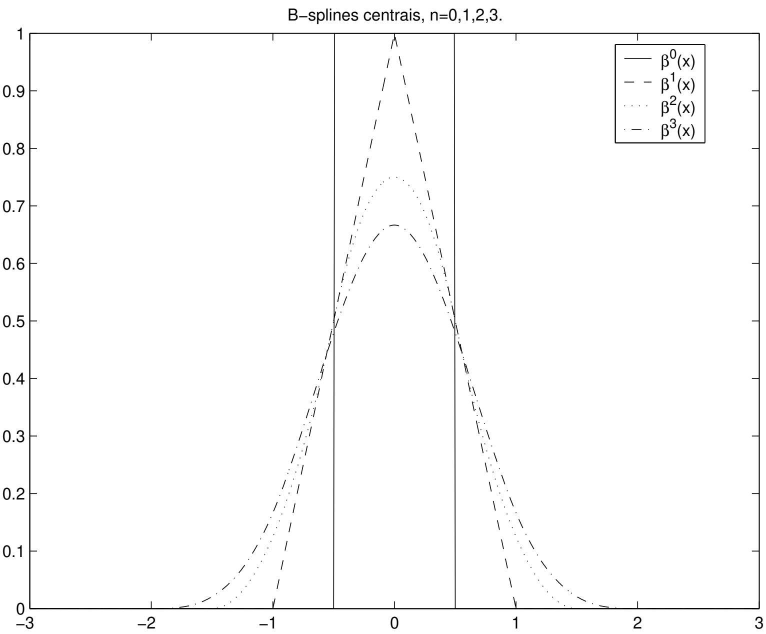


Figura 3.1: B-splines

Estes B-splines simétricos de ordem n, $\{\beta^n(x)\}_{n\in N}$, serão as funções bases usadas na construção das funções splines $s(x)$. Eles também são conhecidos pelo nome de B-splines centrais.

Os B-Splines são muito fáceis de manipular, podem ser derivados ou integrados sem maiores dificuldades. Eles tem suporte compacto e são os splines de suporte mínimo.

Para construí-los explicitamente, a forma mais simples é através da seguinte fórmula,

$$\beta^n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{n!} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ j \end{array} \right) (x + \frac{n+1}{2} - j)^2 \; \mu(x + \frac{n+1}{2} - j),$$

onde

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

A Figura 3.1 mostra os B-Splines $\beta^n(x)$ para $n = 0, 1, 2$ e 3.

A transformada de Fourier dos $\beta^n(x)$ pode ser facilmente calculada usando o teorema da convolução,

$$\beta^n(x) = \beta^0 * ... * \beta^0(x), \quad n+1\text{−vézes} \Rightarrow \ \hat{\beta}^n(w) = (\hat{\beta}^0(w))^{n+1}.$$

Como $\hat{\beta}^0(w) = \dfrac{e^{-iw/2} - e^{iw/2}}{-iw} = \dfrac{\sin(w/2)}{w/2}$, resulta então que $\hat{\beta}^n(w) = (\dfrac{\sin(w/2)}{w/2})^{n+1}$.

3.1.2 Splines Interpolantes

As funções Splines são polinômios por partes unidos de forma "suave"nos pontos denominados de nós ($x_k{}'s$). Um Spline de grau "n" correponde a um polinômio de grau n em cada um dos segmentos determinados pelos nós. Os splines, portanto, constituem um tipo de aproximação polinomial por partes. Na interpolação, as condições de continuidade e diferenciabilidade que são impostas à aproximação permitem determinar os $n+1$ coeficientes de cada polinômio em cada segmento.

Definição: Seja $\{x_i\}$ um conjunto crescente finito ou infinito de números reais, onde $a = \inf(\{x_i\})$ e $b = \sup(\{x_i\})$. Se n é um inteiro ≥ 2, $s(x)$ é uma função spline de ordem n ou grau $n-1$ com nós $\{x_i\}$, se:

(i) $s(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_{n-1}$. Isto é, a restrição de $s(x)$ ao intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ é um polinômio de, no máximo, grau $n-1$.

(ii) $s(x) \in C^{n-2}(a, b)$.

(iii) Se o número de nós é finito e $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b), k = 0, 1, \ldots, n-2$, $s(x)$ é chamado de spline periódico.

Se $g(x)$ é uma função definida no intervalo $[a, b]$, $s(x)$ será seu spline interpolante se satisfaz a condição de interpolação $s(x_i) = g(x_i), \forall i$.

O espaço genérico dos polinômios splines de ordem n será denotado por S_h^n, onde n corresponde ao grau do polinômio em cada segmento e o subíndice h indica o espaçamento existente entre nós . Ou seja,

$$S_h^n = \{s \in L_2(R); s \in C^{n-1}, \ s|_{I_k} \in P_n, k \in Z\},$$

onde $I_k = [x_k, x_k + h)$ se n é ímpar, e $I_k = [x_k - h/2, x_k + h/2)$ se n é par.

Um spline com nós nos inteiros é chamado de *spline cardinal* .

Schoenberg [16] mostrou que os splines são caracterizados de maneira única em termos de sua expansão na base dos B-splines. Para o caso de espaçamento unitário, isto quer dizer,

$$s(x) = \sum_{k \in Z} c(k) \beta^n(x - k).$$

Esta expansão envolve deslocamentos inteiros dos B-splines centrais de grau n, $\beta^n(x)$. A partir desta representação cada $s(x)$ está univocamente determinado pelos seus coeficientes $c(k)$. Isto dá uma estrututa muito conveniente de sinal discreto mesmo que o modelo subjacente seja contínuo. Veremos como determinar os coeficientes $c(k)$ a partir de um conjunto discreto de amostras $s(k)$ de $s(x)$. Será considerado então o problema de aproximar uma função dada através dos polinômios splines usando como critério de aproximação a interpolação, portanto os coeficientes serão determinados de maneira que $s(x)$ passe exatamente pelos pontos prefixados. Observe que para o caso em que sejam usados polinômios splines de grau menor ou igual a 1, a relação entre os $c(k)$ e as amostras do sinal é trivial pois eles resultam iguais, i.e., $c(k) = s(k)$. Isto acontece devido ao fato do β^0 e do β^1 tomarem o valor 1 no nó base e zero nos restantes. Para os splines de grau n, com $n \geq 2$, a situação é bem mais complexa. Este problema pode ser resolvido usando um enfoque matricial através da resolução numérica de um sistema linear de banda diagonal. Mas recentemente, foi desenvolvido um novo método que usa técnicas de filtragem digital [17]. Para definir estas técnicas é preciso introduzir algumas notações. O *núcleo discreto B-spline* é dado por uma seqüência de valores que correspondem a amostras equidistantes do B-spline de grau n, expandido por um fator m, i.e.,

$$b_m^n(k) = \beta^n(k/m)|_{x=k}.$$

Uma vez definido $b_m^n(k)$, denotamos por $B_m^n(z)$ a sua transformada z, logo

$$B_m^n(z) = \sum_{k \in Z} b_m^n(k)\ z^{-k}.$$

A condição de interpolação da aproximação por splines nos inteiros corresponde a,

$$s(x) = \sum_{l \in Z} c(l) \beta^n(x - l).$$

Usando o núcleo discreto B-splines isto pode-se reescrever como,

$$s(k) = (c * b_1^n)(k).$$

Denotamos por "$(b_1^n)^{-1}$" ao operador de convolução inverso definido indiretamente através da sua transformada z,

$$(b_1^n)^{-1} \rightarrow 1/B_1^n(z),$$

ou seja, $(b_1^n)^{-1}$ é aquele cuja transformada z corresponde à inversa de $B_1^n(z)$, logo no z-espaço temos que: $S(z) = C(z)\ B_1^n(z)$, pois a transformada z de uma convolução é igual ao produto das transformadas z individuais. Logo resulta que $C(z) = S(z)\ [\frac{1}{B_1^n(z)}]$. Daqui obtem-se então a seguinte expressão para os coeficientes,

$$c(k) = [s * (b_1^n)^{-1}](k).$$

É importante observar que este algoritmo é estável, mais rápido e fácil de implementar que qualquer outra técnica [17] .

Substituindo esta última expressão em $s(x)$ obtém-se,

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} [s * (b_1^n)^{-1}](k)\ \beta^n(x-k),$$

ou, equivalentemente,

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} s(k)\ \eta^n(x-k),$$

onde $\eta^n(x) = [(b_1^n)^{-1} * \beta^n](x)$, é chamado *spline cardinal* de ordem n. Em *Teoria da Aproximação* , esta função também é conhecida pelo nome de Spline Fundamental de ordem n. Observe que isto dá uma fórmula de interpolação usando splines em termos dos valores funcionais como coeficientes, pois, com exceção da origem, o valor de η^n nos nós restantes é zero.

Um outro fato importante é que as funções base tem o menor suporte possível e portanto o número de termos que contribuem para um dado x é minimizado, o que reduz o custo computacional. Isto torna o algoritmo computacionalmente mais eficiente que a abordagem tradicional que usa a função "*sinc*" como interpolador, pois ela tem uma taxa muito baixa de decaimento, decai como a função $1/|x|$. Isto significa que para calcular uma aproximação de um valor determinado com um erro menor ou igual ao 1%, será preciso considerar 100 termos por meio da interpolação "*sinc*", no entanto com os B-splines precisam-se somente de $n+1$ coeficientes e portanto $n+1$ operações.

Quando a dimensão do problema é maior, a diferença é mais notável e portanto é crucial contar com métodos numéricos eficiêntes. Assim, os B-splines fornecem o melhor método com a menor complexidade.

Os Splines mais usados nas aplicações são os de grau 3, provavelmente devido à propriedade de curvatura mínima que os caracteriza.

3.2 Novos Filtros Baseados em Splines

A seguir consideramos $f(x)$ uma função a valores reais definida no intervalo $[0,1]$. Consideramos também o intervalo $[0,1]$ subdividido em N subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, 1, \ldots, N-1$ e onde $x_i = i/N$, portanto o espaçamento entre nós é $h = 1/N$. Assumimos que:

- f tem no máximo um número finito $L \geq 0$ de pontos de descontinuidade de primeira espécie, $\{z_1, \ldots, z_L\}$.
- Se $Z = \{z_1, \ldots, z_L\}$ denota o conjunto de pontos de descontinuidade, então para cada $x \in [0,1]$ e $x \notin Z$ existem $f'(x), f''(x), f'''(x)$ e saõ limitadas, isto é: $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| < C$, $\sup\limits_{x\notin Z} |f'(x)| < C_1$, $\sup\limits_{x\notin Z} |f''(x)| < C_2$, e $\sup\limits_{x\notin Z} |f'''(x)| < C_3$ para constantes C, C_1, C_2 *e* C_3.
- Se $L \geq 2$ então os pontos devem estar suficientemente separados de forma que $N \min\limits_{r\neq l} d_{q_l,q_r} \gg 1$, onde q_l indica o subíndice do ponto da malha mais próximo a z_l e

$$d_{jl} = \min_{k\in\{-1,0,1\}} ||x_j - x_l - k| - \frac{1}{2N}|.$$

Por uma questão de simplicidade na apresentação vamos supor que f conta com uma única descontinuidade de salto no ponto $x = z \in [0,1]$.

Nosso objetivo é deduzir métodos de reconstrução dos valores pontuais de f usando um número finito de seus coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2-1}$. Isto será feito a través de uma abordagem que faz uso dos B-splines. Eles proporcionam um mecanismo interessante para passar do contínuo ao discreto.

Denotamos por β_h^n o B-spline simétrico de ordem n definido por,

$$\beta_h^n(x) = \frac{1}{h}\beta^n(\frac{x}{h}).$$

Neste caso a correspondente transformada de Fourier é dada por:

$$\hat{\beta_h}^n(w) = [2\ \sin(w\frac{h}{2})/wh]^{n+1}.$$

3.2.1 Aproximação de grau zero

Malha uniforme

Sejam $\eta_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ e $f_i = f(\eta_i)$ para $i = 1, \dots, N-1$. Definimos a aproximação por um polinômio por partes de grau zero para a função f no intervalo $[0,1]$ como,

$$p_f^{(0)}(x) = h \sum_{j=0}^{N-1} f(\eta_j)\ \beta_h^0(x - \eta_j).$$

Logo em cada segmento $[x_i, x_{i+1}]$, o valor do polinômio é constante e igual ao valor da função f no ponto médio do intervalo. Os coeficientes de Fourier deste polinômio por partes são dados por,

$$\begin{aligned}
(\hat{p}_f^{(0)})_k &= h \sum_{j=0}^{N-1} f(\eta_j)\ (\hat{\beta_h}^0)_k\ e^{-i2\pi k(x_j + h/2)}, \\
&= \hat{\beta}^0(kh)\ e^{-i\pi kh}\ h \sum_{j=0}^{N-1} f(\eta_j)\ e^{-i2\pi k x_j}, \\
&= [\frac{\sin(\pi kh)}{\pi kh}]\ e^{-i\pi kh}\ \tilde{f}_k.
\end{aligned}$$

Quando os **pontos de descontinuidade da f coincidem com os nós da malha**, então os valores de $\hat{f}_k$ podem ser aproximados pelos coeficientes de Fourier do polinômio interpolador de grau zero. Assim, denota se g_j à aproximação dos valores exatos da função f temos então que:

$$\hat{f}_k \approx [\frac{\sin(\pi kh)}{\pi kh}]\ e^{-i\pi kh}\ \tilde{g}_k.$$

Portanto aproximações dos valores de f nos pontos η_j podem ser calculados através de uma DFT inversa,

$$g_j = (IDFT)\{[\frac{\pi kh}{\sin(\pi kh)}]\ e^{i\pi kh}\ \hat{f}_k\}_j \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Isto dá a expressão do **filtro de grau zero** para a fórmula de reconstrução,

$$\sigma_k^{(0)} = \begin{cases} \dfrac{\pi kh}{\sin(\pi kh)}\ e^{i\pi kh}, & \text{se } k \neq 0, \\ 1, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Portanto a fórmula de reconstrução de grau zero no espaço de Fourier para pontos de descontinuidade que coincidam com os nós da malha é dada por:

$$\tilde{g}_k = \sigma_k^{(0)}\ \hat{f}_k, \tag{3.1}$$

e assim a reconstrução dos valores pontuais da f é obtida através de uma IFFT.

Malha não uniforme

Quando os **pontos de descontinuidade não coincidem com os nós da malha**, a fórmula deve ser corrigida com um termo que resulta da modificação da malha por uma nova, não uniforme, que inclui o ponto de descontinuidade como nó. Para obter a nova fórmula corrigida, seja $z \notin \{x_0, \ldots, x_N\}$ o ponto de descontinuidade e seja x_{q_z} o ponto da malha uniforme mais próximo de z.

A nova malha não uniforme é obtida pela substituição de x_{q_z} por z, i.e.:

$$\{x_0, \ldots, x_{q_z-1}, z, x_{q_z+1}, \ldots, x_N\}.$$

Nos dois novos subintervalos resultantes (x_{q_z-1}, z) *e* (z, x_{q_z+1}) se define,

$$f_{q_z-1} = f(\frac{x_{q_z-1}+z}{2}) \quad e \quad f_{q_z} = f(\frac{x_{q_z+1}+z}{2}).$$

O novo polinômio por partes de grau zero que aproxima a função na malha não uniforme é dado por:

$$p^{(0)}(x) = h \sum_{j=0}^{N-1} f_j\ \beta_h^{(0)}(x-\eta_j) + (f_{q_z-1} - f_{q_z})\ \chi_{[x_{q_z}, z]},$$

onde $\chi_I(x)$ é a função característica do intervalo I,

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pois,

$$p^{(0)}(x) = h \sum_{j=0}^{N-1} f_j\ \beta_h^{(0)}(x-\eta_j) - hf_{q_z-1}\ \beta_h^{(0)}(x-\eta_{q_z-1}) - hf_{q_z}\ \beta_h^{(0)}(x-\eta_{q_z}) +$$
$$+ f_{q_z-1}\ \chi_{[x_{q_z-1}, z]} + f_{q_z}\ \chi_{[z, x_{q_z+1}]}.$$

Logo no espaço de Fourier resulta,

$$\hat{f}_k \approx \hat{p}_k^{(0)} = \hat{\beta}_{kh}^{(0)}\ e^{-i\pi kh}\ \tilde{f}_k + (f_{q_z-1} - f_{q_z})\ \hat{A}_k^{(0)}(z),$$

onde $\hat{A}_k^{(0)}(z) = (\hat{\chi}_{[x_{q_z}, z]})_k = \int_{x_{q_z}}^{z} e^{-i2\pi kx} dx.$

Como anteriormente denotam-se por g_j os valores pontuais reconstruídos da função f, então a fórmula de reconstrução no espaço de Fourier é dada por:

$$\tilde{g}_k = \sigma_k^{(0)} \ (\hat{f}_k + [g](z) \ \hat{A}_k^{(0)}(z)), \tag{3.2}$$

onde $[g](z) = (g_{q_z} - g_{q_z-1})$ denota a aproximação à amplitude do salto de f no ponto z. Os valores de $\{g_j\}_{j=0}^{N-1}$ são obtidos através de uma DFT inversa:

$$g_j = IDFT\{\sigma_k^{(0)} \ (\hat{f}_k + [g](z) \ \hat{A}_k^{(0)}(z))\}_j,$$

A generalização da fórmula de reconstrução no caso de contar com L pontos de descontinuidade é imediata. Estes L pontos substituem os mais próximos da malha e a expressão correspondente no espaço de Fourier resulta,

$$\tilde{g}_k = \sigma_k^{(0)} \ (\hat{f}_k + \sum_{l=1}^{L} [g](z_l) \ \hat{A}_k^{(0)}(z_l)),$$

Portanto a fórmula de reconstrução para L pontos resulta,

$$g_j = f_j^{(0)} + \sum_{l=1}^{L} [g](z_l) \ a_{j,l}^{(0)}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3.3}$$

onde $f_j^{(0)} = IDFT\{\sigma_k^{(0)} \ \hat{f}_k\}_j$ e $a_{j,l}^{(0)} = IDFT\{\sigma_k^{(0)} \ \hat{A}_k^{(0)}(z_l)\}_j$.

Daqui observa-se que para obter as aproximações dos valores pontuais da função será preciso contar com os $\{z_l\}_{l=1}^{L}$ e com as amplitudes dos saltos, ou bem com aproximações a estes valores. No Capítulo 5 apresentamos um método para calcular aproximações aos pontos de descontinuidade $\{z_l\}_{l=1}^{L}$.

Observe que os $\{[g](z_l)\}_{l=1}^{L}$ podem ser obtidos através da resolução de um sistema linear $L \times L$, pois se em (3.3*) consideramos $j = q_r \ e \ j = q_r - 1$, temos que,

$$g_{q_r} = f_{q_r}^{(0)} + \sum_{l=1}^{L} [g](z_l) \ a_{q_r,l}^{(0)},$$

$$g_{q_r-1} = f_{q_r-1}^{(0)} + \sum_{l=1}^{L} [g](z_l) \ a_{q_r-1,l}^{(0)}.$$

Portanto para $r = 1, 2, \ldots, L$ temos que,

$$[g](z_r) - \sum_{l=1}^{L} (a_{q_r,l}^{(0)} - a_{q_r-1,l}^{(0)}) \ [g](z_l) = f_{q_r}^{(0)} - f_{q_r-1}^{(0)}.$$

Estas L equações definem um sistema linear para as L incógnitas $[g](z_1), \ldots, [g](z_L)$.

O método de reconstrução de grau zero para o caso geral da malha não uniforme pode ser resumido no seguinte algoritmo:

Algoritmo

Dados N coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2}$ e L pontos de descontinuidade $\bar{z} = \{z_1, \ldots, z_L\}$,
Passo 1: Calcular

$$f_j^{(0)} = IFFT_j\{\sigma_k^{(0)}\ \hat{f}_k\},\ para\ j = 0, \ldots, N-1,$$

$$a_{j,l}^{(0)} = IFFT_j\{\sigma_k^{(0)}\ A_k^{(0)}(z_l)\},\ para\ j = 0, \ldots, N-1,\ l = 1, \ldots, L,$$

onde IFFT denota a inversa da transformada rápida de Fourier "Inverse Fast Fourier Transform".

Passo 2: Resolver para $\{\ [g](z_l)\}_{l=1}^{L}$ o sistema linear:

$$[g](z_r) + \sum_{l=1}^{L} (a_{q_r,l}^{(0)} - a_{q_r-1,l)}^{(0)}\ [g](z_l) = f_{q_r}^{(0)} - f_{q_r-1}^{(0)},\ para\ r = 1, \ldots, L.$$

Passo 3: Calcular

$$g_j = f_j^{(0)} + \textstyle\sum_{l=1}^{L}\ [g](z_l)\ a_{j,l}^{(0)},\ para\ j = 0, \ldots, N-1.$$

O custo operacional do algoritmo é baixo pois são necessárias apenas $N(2L+1)$ multiplicações complexas e $L+1$ aplicações da FFT.

Em seguida vamos determinar o filtro de grau 1 com a respectiva fórmula de reconstrução para posteriormente obter a forma geral destes filtros para valores de $n \geq 2$.

3.2.2 Aproximação de grau 1

Sejam $x_j = j/N$, e $f_j^+ = f(x_j^+) = \lim\limits_{x \to x_j^+} f(x)$, $f_j^- = f(x_j^-) = \lim\limits_{x \to x_j^-} f(x)$. Vamos supor determinados os L pontos da malha $\{x_{q_l}\}_{l=1}^{L}$ mais próximos aos L pontos de descontinuidade $\{z_l\}_{l=1}^{L}$.

Usando a função serra, introduzimos para cada z_l uma nova função suave por pedaços com suporte localizado no intervalo (x_{q_l-1}, x_{q_l+1}) que denotamos por $A^1_{z_l}(x)$ e que tem no ponto $x = z_l$ seu único ponto de descontinuidade,

$$A^1_{z_l}(x) = \begin{cases} (x_{q_l-1} - x)/2h, & \text{se } \ x \in [x_{q_l-1}, z_l], \\ (x_{q_l+1} - x)/2h, & \text{se } \ x \in [z_l, x_{q_l+1}], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O valor da amplitude do salto neste ponto é dado por $[A^1_{z_l}](z_l) = A^1_{z_l}(z_l^+) - A^1_{z_l}(z_l^-) = 1$, e o k-ésimo coeficiente de Fourier correspondente é,

$$(\hat{A^1_{z_l}})_k = \frac{e^{-i2\pi k z_l}}{i2\pi k} + \frac{e^{-i2\pi k x_{q_l}}(e^{-i2\pi kh} - e^{i2\pi kh})}{2h(i2\pi k)^2} \quad = \frac{e^{-i2\pi k z_l}}{i2\pi k} + \frac{e^{-i2\pi k x_{q_l}}}{i2\pi k}\ (\frac{\sin(2\pi kh)}{2\pi kh}).$$

Esta função é de grande utilidade pois permite construir de maneira muito simples uma função contínua $h(x)$ associada à função $f(x)$. Isto é,

$$f(x) = h(x) + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ A^1_{z_l}(x).$$

A função $h(x)$ não só é contínua mas é tão regular quanto a f nos intervalos que não contem pontos singulares, isto é $x \in [0,1] - \bigcup_{z\in Z} [x_{q_z-1}, x_{q_z+1}]$. Ela é contínua para todo valor de x pois naqueles pontos em que podería apresentar problemas temos que,

$$h(z_r^+) = f(z_r^+) - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ A^1_{z_l}(z_r^+), \quad h(z_r^-) = f(z_r^-) - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ A^1_{z_l}(z_r^-),$$

portanto para cada um dos z_r,

$$\begin{aligned} [h]\ (z_r) &= [f](z_r) - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ [A^1_{z_l}](z_r), \\ &= [f](z_r) - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ \delta_{l,r}, \\ &= [f](z_r) - [f](z_r) = 0. \end{aligned}$$

Denotamos por $p_h^{n+}(x)$ ao interpolador de spline de grau n da função $h(x)$ nos pontos $(x_j, h^+(x_j))$, onde $h^+(x_j) = f_j^+ - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ A^1_{z_l}(x_j)$.

Observar que para cada l, $h(z_l^+) = h(z_l^-) = \dfrac{[f(z_l^+)(z - x_{q_l-1}) + f(z_l^-)(x_{q_l+1} - z)]}{2h}$.

A representação do polinômio $p_h^{n+}(x)$ na base dos B-splines, para $\mathbf{n = 1}$ corresponde a:

$$p_h^{1+}(x) = h \sum_{j=0}^{N-1} h(x_j)\ \beta_h^1(x - x_j).$$

Substituindo os valores de $h(x_j)$ nesta expressão resulta que,

$$\begin{aligned}
p_h^{1+}(x) &= h \sum_{j=0}^{N-1} (f_j^+ - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ A_{z_l}^1(x_j))\ \beta_h^1(x - x_j), \\
&= h \sum_{j=0}^{N-1} f_j^+\ \beta^1(x - x_j) - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ h \sum_{j=0}^{N-1} A_{z_l}^1(x_j)\ \beta_h^1(x - x_j),
\end{aligned}$$

A primeira parte desta expressão será denotada por $p^1{}_{f^+}(x)$, que corresponde ao spline interpolador de grau 1 nos pontos $(x_j, f^+(x_j))$. Logo o k-ésimo coeficiente de Fourier de $p_h^{1+}(x)$ é dado por,

$$\begin{aligned}
(\hat{p}_h^{1+})_k &= (\hat{p}_{f^+}^1)_k - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l) \sum_{j=0}^{N-1} A_{z_l}^1(x_j)\ \hat{\beta}_{kh}^1\ e^{-i2\pi k x_j} \\
&= h \sum_{j=0}^{N-1} f_j^+ \hat{\beta}_{kh}^1\ e^{-i2\pi k x_j} - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ \hat{\beta}_{kh}^1 h \sum_{j=0}^{N-1} A_{z_l}^1(x_j)\ e^{-i2\pi k x_j} \\
&= \hat{\beta}_{kh}^1\ (\tilde{f}_k^+ - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\tilde{A}_{z_l}^1)_k\ ),
\end{aligned}$$

onde $(\tilde{A}_{z_l}^1)_k$ corresponde à transformada discreta de Fourier da seqüência $\{A_{z_l}^1(x_j)\}_{j=0}^{N-1}$ e $\hat{\beta}_{kh}^1 = (\dfrac{\sin(\pi k/N)}{\pi k/N})^2$.

Por ser $\hat{f}_k = \hat{h}_k + \displaystyle\sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\hat{A}_{z_l}^1)_k$, usando a aproximação para $\hat{h}_k$ dada por $(\hat{p}_h^{1+})_k$, temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k &\approx (\hat{p}_h^1)_k + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\hat{A}_{z_l}^1)_k, \\
&= \hat{\beta}_{kh}^1\ (\tilde{f}_k^+ - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\tilde{A}_{z_l}^1)_k\ ) + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\hat{A}_{z_l}^1)_k, \\
&= \hat{\beta}_{kh}^1\ \tilde{f}_k^+ + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ ((\hat{A}_{z_l}^1)_k - \hat{\beta}_{kh}^1\ (\tilde{A}_{z_l}^1)_k\ ).
\end{aligned}$$

Reescrevendo a última expressão obtida para os coeficientes de Fourier da f temos que,

$$\hat{f}_k \approx \hat{\beta}^1_{kh}\ \tilde{f}^+_k + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ ((\hat{A}^1_{z_l})_k - \hat{\beta}^1_{kh}\ (\tilde{A}^1_{z_l})_k\ ).$$

Isto fornece então um filtro e uma fórmula de reconstrução para os valores pontuais da f. Chamando-se g_j a os valores reconstruídos de $f(x^+_j)$, a fórmula de reconstrução resulta,

$$\tilde{g}_k = \sigma^{(1)}_k\ \hat{f}_k - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\sigma^{(1)}_k\ (\hat{A}^1_{z_l})_k - (\tilde{A}^1_{z_l})_k\ ), \quad k = -N/2, \ldots, 0, \ldots, N/2-1,$$

onde o filtro de grau 1 correspondente é dado por,

$$\sigma^{(1)}_k = 1/\hat{\beta}^1_{kh} = \begin{cases} sinc(kh)^{-2}, & \text{se } k \neq 0, \\ 1, & \text{se } k = 0, \end{cases}$$

e $sinc(x) = \dfrac{\pi x}{\sin(\pi x)}$.

Observe que para implementar o algoritmo de reconstrução, os valores z_l dos pontos de descontinuidade e as amplitudes dos saltos nesses pontos $[f](z_l)$, deverão ser conhecidos. Posteriormente veremos como usar o método apresentado para o caso $n = 0$ para fornecer aproximações iniciais para estes valores de forma eficiente.

Observe também que os valores das magnitudes dos saltos podem ser obtidos a partir da resolução de um sistema linear que resulta da propriedade de N-periodicidade da DFT, pois de $\tilde{g}_k = \tilde{g}_{k+N}$ resulta que,

$$\hat{\beta}^{(1)}_k \hat{\beta}^{(1)}_{k+N} \tilde{g}_k = \hat{\beta}^{(1)}_k \hat{\beta}^{(1)}_{k+N} \tilde{g}_{k+N},$$

e usando a N-periodicidade de $(\tilde{A}^1_{z_l})_k$, resulta o seguinte sistema linear,

$$\sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ [\hat{\beta}^{(1)}_{k+N}\ \hat{A}^{z_l}_k - \hat{\beta}^{(1)}_k\ \hat{A}^{z_l}_{k+N}] = \hat{\beta}^{(1)}_k\ \hat{f}_{k+N} - \hat{\beta}^{(1)}_{k+N}\ \hat{f}_k, \quad k = k_1, \ldots, K_L.$$

Apresenta-se a seguir o algoritmo que define o método de reconstrução para a fórmula obtida no caso $n = 1$.

Algoritmo 3.1:

Sejam N um inteiro par positivo e $x_j = j/N$ os nós da malha equidistante do $[0, 1)$. Dados os L pontos de descontinuidade $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_L)$ da função f e os coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2-1}$ fazer:

Passo 1: Calcular $f_j^{(1)} = IFFT_j(\sigma_k^{(1)}\ \hat{f}_k)$.

Passo 2: Calcular

$$(\hat{A}_{z_l}^1)_k = \frac{e^{-i2\pi k z_l}}{i2\pi k} + e^{-i2\pi k x_{q_l}}\ sinc(2kh),\ k = 0, 1, \ldots, N-1,\ e\ l = 1, 2, \ldots, L.$$

Passo 3: Resolver o seguinte sistema linear $(L \times L)$ para achar os valores das amplitudes dos saltos: $[f](z_1), [f](z_2), \ldots, [f](z_L)$,

$$\sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ [\hat{\beta}_{k+N}^{(1)}\ \hat{A}_k^{z_l} - \hat{\beta}_k^{(1)}\ \hat{A}_{k+N}^{z_l}] = \hat{\beta}_k^{(1)}\ \hat{f}_{k+N} - \hat{\beta}_{k+N}^{(1)}\ \hat{f}_k, \quad k = k_1, \ldots, k_L.$$

Passo 4: Aplicar a fórmula de reconstrução no espaço de Fourier,

$$\tilde{g}_k = \sigma_k^{(1)}\ \hat{f}_k - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\sigma_k^{(1)}\ (\hat{A}_{z_l}^1)_k - (\tilde{A}_{z_l}^1)_k\ ),\ k = -N/2, \ldots, 0, \ldots, N/2.$$

Passo 5: Aplicar a transformada discreta inversa de Fourier,

$$g_j = IFFT_j(\tilde{g}_k).$$

No vetor $\{g_j\}_{j=0}^{N-1}$ encontram-se as aproximações aos valores pontuais da f nos nós da malha. Observar que o custo operacional do algoritmo é muito baixo.

3.2.3 Caso Geral: $n \geq 2$

O caso $n \geq 2$ difere dos anteriores pois, como já foi mostrado anteriormente na Seção 3.1.2, os coeficientes do spline interpolador não correspondem mais aos valores da função a ser interpolada nos pontos da malha. Agora eles são dados através da convolução discreta destes valores com os de um filtro. A seguir então se apresenta a derivação do filtro geral para qualquer valor de n.

Como anteriormente $p_h^n(x)$ será o interpolador de splines de grau n da função $h(x)$ nos pontos (x_j, h_j). Logo,

$$p_h^n(x) = h \sum_{l \in \mathbf{Z}} c(l)\ \beta_h^n(x - x_l),$$

onde $c(l) = [h * (b_1^n)^{-1}](l)$ e $(b_1^n)^{-1}(l)$ é a antitransformada z de $1/B_1^n(z)$. O k-ésimo coeficiente de Fourier deste polinômio é dado por:

$$\begin{aligned}
(\hat{p}_h^n)_k &= h \sum_{l \in \mathbf{Z}} c(l)\ \hat{\beta}_{kh}^n\ e^{-i2\pi k x_l}, \\
&= h\ \hat{\beta}_{kh}^n \sum_l c(l)\ e^{-i2\pi k x_l}, \\
&= h\ \hat{\beta}_{kh}^n \sum_l c(l)\ z_k^{-l}; \qquad z_k = e^{i2\pi k/N} \\
&= h\ \hat{\beta}_{kh}^n\ C(z)|_{z=z_k},
\end{aligned}$$

onde $C(z)$ denota a transformada z da seqüência dos $c(l)$.

Usando que a transformada z de uma convolução é o produto de cada uma das z-transformadas obtem-se que,

$$(\hat{p}_h^n)_k = h\ \hat{\beta}_{kh}^n\ [H(z)\ \frac{1}{B_1^n(z)})]|_{z=z_k},$$

Logo resulta que,

$$(\hat{p}_h^n)_k \approx \frac{\hat{\beta}_{kh}^n}{B_1^n(z_k)}\ \tilde{h_k},$$

pois a transformada z de uma seqüência qualquer, u_n por exemplo, pode ser aproximada por uma transformada discreta de Fourier da seguinte forma,

$$\begin{array}{l}
DFT^{-1}\{U_k\}_n \approx N\ R^n\ u_n \\
u_n \approx \frac{R^n}{N}\ DFT^{-1}\{U_k\}_n.
\end{array}$$

Por ser $(\hat{p}_h^n)_k$ uma aproximação de $\hat{h}_k$ obtém-se ,

$$\hat{h}_k \approx \frac{\hat{\beta}_{kh}^n}{B_1^n(z_k)}\ \tilde{h_k},$$

Temos portanto uma expressão geral dos filtros para o caso $n \geq 2$,

$$\sigma_k^{(n)} = \frac{B_1^n(z_k)}{\hat{\beta}_{kh}^n}. \tag{3.4}$$

Para exemplificar como calcular o $B_1^n(z)$ necessario para determinar o filtro, consideramos $n = 2$ e $n = 3$. Para o caso de $n = 2$ temos que,

$$\beta^2(x) = \begin{cases} -x^2 + 3/4, & \text{se } |x| \leq 1/2, \\ \frac{1}{2}\ (3/2 - |x|)^2, & 1/2 \leq |x| \leq 3/2, \\ 0, & |x| \geq 3/2. \end{cases}$$

Os valores não nulos de $\beta^2(x)$ nos nós são, $\beta^2(0) = 3/4$ e $\beta^2(\pm 1) = 1/8$. Logo a transformada z correspondente é dada por $B_1^2(z) = \frac{1}{8}\ [z + 6 + z^{-1}]$, portanto substituindo z por $e^{-i2\pi k/N}$ obtém-se:

$$B_1^2(z)\ |_{z=e^{-i2\pi k/N}} = \frac{1}{2}\ (1 + cos^2(\frac{\pi k}{N})).$$

O filtro de grau 2 resulta então,

$$\sigma_k^{(2)} = \frac{1}{2}\ (\frac{\pi k h}{\sin(\pi k/N)})^3\ (1 + cos^2(\frac{\pi k}{N})).$$

Para calcular o filtro de grau 3 repetimos o procedimento anterior agora com $\beta^3(x)$,

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |x|^2 + \frac{|x|^3}{2}, & \text{se } |x| \leq 1, \\ \frac{(2-|x|)^3}{6}, & 1 \leq |x| \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

Portanto os valores não nulos nos nós são, $\beta^3(0) = 2/3$ e $\beta^3(\pm 1) = 1/6$. Daqui imediatamente obtém-se que $B_1^3(z) = \frac{1}{6}\ [z + 4 + z^{-1}]$, e resulta então que,

$$B_1^3(z)\ |_{z=e^{-i2\pi k/N}} = \frac{1}{3}\ (1 + 2\ \cos^2(\frac{\pi k}{N})).$$

como $\hat{\beta}_{kh}^{(3)} = (\frac{\sin(\pi k/N)}{\pi k h})^4$ facilmente pode se dar a expressão explícita do $\sigma_k^{(3)}$:

$$\sigma_k^{(3)} = \frac{1}{3}\ (\frac{\pi k h}{\sin(\pi k/N)})^4\ (1 + 2\ \cos^2(\frac{\pi k}{N})).$$

Em geral a expressão da transformada z de $\beta^n(x)$ será dada por,

$$B_1^n(\omega) = [b_1^n(0) + \sum_{k=1}^{[n/2]} 2b_1^n(k)\ \cos(2\pi\omega k)].$$

onde $b_1^n(k)$ são os coeficientes do B-spline de grau n nos inteiros e ω corresponde a uma freqüência qualquer. A forma geral dos filtros de grau n resulta então,

$$\sigma_k^{(n)} = (\hat{\beta}_{kh}^{(n)})^{-1}\ [b_1^n(0) + \sum_{k=1}^{[n/2]} 2b_1^n(k)\ cos(2\pi\omega k)].$$

A fim de estabelecer a fórmula de reconstrução para o caso n=2, vamos supor conhecidas as L descontinuidades de salto da função e da derivada, $z_1, \ldots, z_L$, como também as amplitudes do saltos correspondentes. Procedendo de forma análoga à seção anterior, sabemos que neste caso é possível escrever a f na seguinte forma:

$$f(x) = h(x) + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ A^1_{z_l}(x) + [f'](z_l)\ A^2_{z_l}(x),$$

onde $A^1_{z_l}(x)$ corresponde à função definida anteriormente no método de ordem 1 e $A^2_{z_l}(x)$ é definida por:

$$A^2_{z_l}(x) = \begin{cases} \frac{x(x-x_{q_l-1})(z-x_{q_l+1})}{2hz} & \text{se } x_{q_l-1} < x < z \ , \\ \frac{x(x-x_{q_l+1})(z-x_{q_l-1})}{2hz} & \text{se } z < x < x_{q_l+1} \ , \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe-se que esta função satisfaz $A^2_{z_l}(x_{q_l-1}) = A^2_{z_l}(x_{q_l+1}) = 0$, $[A^2_{z_l}](z) = 0$ e $[A^{2'}_{z_l}](z) = A^{2'}_{z_l}(z^+) - A^{2'}_{z_l}(z^-) = \dfrac{(z-x_{q_l-1})(2z-x_{q_l+1})}{2hz} - \dfrac{(z-x_{q_l+1})(2z-x_{q_l-1})}{2hz} = 1.$

As propriedades desta função auxiliar junto com a anteriormente definida $A^1_{z_l}(x)$ fazem com que $h(x)$ resulte uma função contínua e e tal que $[h'](z_r) = 0$ pois

$$\begin{aligned} [h](z_r) &= [f](z_r) - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ [A^1_{z_l}](z_r) + [f'](z_l)\ [A^2_{z_l}](z_r), \\ &= [f](z_r) - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ \delta_{lr} = 0. \end{aligned}$$

Nos subintervalos que não contém pontos de descontinuidade, isto é no $[0,1] - \bigcup_l [x_{q_l-1}, x_{q_l+1}]$ a função h é tão regular quanto a f. Observe também que $[h'](z_r) = 0$.

Usando para a função $h(x)$ a aproximação dada pelo spline de grau 2 no espaço de Fourier temos,:

$$\hat{h}_k \approx (\hat{p}^2_h)_k = \tau^{(2)}_k\ \tilde{h}_k, \quad \tau^{(2)}_k = 1/\sigma^{(2)}_k.$$

Assim usando esta aproximação para o caso $n = 2$ temos que,

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k &= \hat{h}_k + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\hat{A}^1_{z_l})_k + [f'](z_l)\ (\hat{A}^2_{z_l})_k,\\
&\approx \tau_k^{(2)}\ \tilde{h}_k + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\hat{A}^1_{z_l})_k + [f'](z_l)\ (\hat{A}^2_{z_l})_k,\\
&= \tau_k^{(2)}\ h \sum_{j=0}^{N-1} (f_j^+ - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ A^1_{z_l}(x_j)\ + [f'](z_l)\ \ A^2_{z_l}(x_j)\ )\ e^{-i2\pi k x_j} +\\
&+ \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\hat{A}^1_{z_l})_k + [f'](z_l)\ (\hat{A}^2_{z_l})_k,\\
&= \tau_k^{(2)}\ [\tilde{f}_k^+ - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\tilde{A}^1_{z_l})_k + [f'](z_l)\ (\tilde{A}^2_{z_l})_k] + \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\hat{A}^1_{z_l})_k + [f'](z_l)\ (\hat{A}^2_{z_l})_k,
\end{aligned}$$

resulta então,

$$\hat{f}_k \approx \tau_k^{(2)}\ \tilde{f}_k^+ - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)\ (\tau_k^{(2)}\ (\tilde{A}^1_{z_l})_k - (\hat{A}^1_{z_l})_k) + [f'](z_l)\ (\tau_k^{(2)}\ (\tilde{A}^2_{z_l})_k - (\hat{A}^2_{z_l})_k). \quad (3.5)$$

Isto determina a fórmula de reconstrução de grau 2 correspondente:

$$\tilde{g}_k^+ = \sigma_k^{(2)}\ \hat{f}_k - \sum_{l=1}^{L} [g](z_l)\ (\sigma_k^{(2)}\ (\hat{A}^1_{z_l})_k - (\tilde{A}^1_{z_l})_k\ ) + \ [g'](z_l)\ (\sigma_k^{(2)}\ (\hat{A}^2_{z_l})_k - (\tilde{A}^2_{z_l})_k\ ) \quad (3.6)$$

onde, assim como anteriormente, os $\{g_j^+\}_{j=0}^{N-1}$ são as aproximações calculadas pelo método para os valores de $f(x_j^+)$ para $j = 0, 1, \ldots, N-1$, e que resultam de aplicar uma transformada discreta de Fourier inversa na última expressão.

Procedendo de maneira análoga ao caso $n = 1$, isto é, usando a N-periodicidade da DFT constrói-se um sistema linear que uma vez resolvido fornece aproximações para as amplitudes dos saltos nos pontos singulares. Portanto de $\tilde{g}_{k+N}^+ = \tilde{g}_k^+$ resulta que

$$\begin{aligned}
\sigma_{k+N}^{(2)}\ \hat{f}_{k+N} - \sigma_k^{(2)}\ \hat{f}_k \quad &= \quad \sum_{l=1}^{L} (\ \sigma_{k+N}^{(2)}\ \hat{A}^1_{k+N,z_l} - \sigma_k^{(2)}\ \hat{A}^1_{k,z_l}\ )\ [g](z_l) +\\
&\quad +(\ \sigma_{k+N}^{(2)}\ \hat{A}^2_{k+N,z_l} - \sigma_k^{(2)}\ \hat{A}^2_{k,z_l}\ )\ [g'](z_l), \qquad (3.7)\\
&\quad k = k_1, \ldots, k_{2L}.
\end{aligned}$$

Apresenta-se a seguir o algoritmo correspondente ao método de grau 2 .

Algoritmo 3.2:

Dados os coeficientes de Fourier $\{\hat{f}\}_{k=-N/2-L}^{N/2-1+L}$ e os L pontos de descontinuidade da função e da sua derivada, $\bar{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_L)$, fazer:

Passo 1: Calcular $f_j^{(2)} = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)} \hat{f}_k)$,

$$a_{jl}^{(1)}(z_l) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)} \hat{A}_{k,z_l}^1 - \tilde{A}_{k,z_l}^1),$$

$$a_{jl}^{(2)}(z_l) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)} \hat{A}_{k,z_l}^2 - \tilde{A}_{k,z_l}^2).$$

Passo 2: Achar as aproximações aos saltos $[g](z_l)$ e $[g'](z_l)$ através da resolução do sistema linear (3.7).

Passo 3: Calcular as aproximações aos valores pontuais da f usando a fórmula de reconstrução,

$$g_j = f_j^{(2)} - \sum_{l=1}^{L} [g](z_l)\ a_{jl}^{(1)}(z_l) + [g'](z_l)\ a_{jl}^{(2)}(z_l).$$

Observação: Em todos os exemplos considerados os pontos de descontinuidade da derivada coincidem com os da função original, pois estamos supondo que a função é suave por partes. Aproximações dos pontos de descontinuidade da derivada primeira da função são obtidas usando o mesmo algoritmo que determina as aproximações as descontinuidades da f, mas com os coeficientes de Fourier modificados da seguinte forma: $\widehat{df}_k = ik\pi \hat{f}_k + \sum_{l=1}^{L_1} [f](z_l) e^{-ik\pi z_l}$ para $k \neq 0$, e $\widehat{df}_0 = -\sum_{l=1}^{L_1} [f](z_l)$.

Neste Capítulo foram introduzidas as funções “splines”e algumas de suas propriedades básicas. Usando os B-splines como ferramentas, nos desenvolvimos uma nova familia de filtros de ordem n. Junto com estes filtros nos deduzimos fórmulas de reconstrução até grau 2 que mostram um bom desempenho. Observa-se que para iniciar os algoritmos definidos por estas fórmulas de reconstrução, é preciso conhecer as singularidades da função. Por este motivo no Capítulo 5 deriva-se um método de baixo custo computacional para calcular aproximações iniciais para os pontos de descontinuidade da função usando exclusivamente como dados um número N de coeficientes de Fourier.

No Capítulo seguinte nos calculamos as estimativas dos erros de reconstrução no espaço de Fourier para cada uma das fórmulas de reconstrução deduzidas no presente Capítulo.

Capítulo 4

Erros de Aproximação

4.1 Erros de Aproximação

No capítulo anterior apresentaram-se diferentes métodos de reconstrução dos valores discretos da função f a partir de um número finito de coeficientes de Fourier. Em cada caso, tanto para a malha uniforme quanto para a não uniforme, foram deduzidas fórmulas de reconstrução da função a partir das aproximações polinomiais segmentarias. No presente capítulo, a fim de completar o desenvolvido no anterior, estimam-se os erros de aproximação no espaço de Fourier para cada um dos métodos de reconstrução já apresentados no Capítulo anterior. Para estabelecer a ordem do erro de aproximação, analisa-se em cada caso a diferença dada por $\hat{e}_k^{(n)} = \hat{f}_k - \hat{p}_{f,k}^{(n)}$.

4.2 Estimativa do erro para a fórmula de grau zero

Nesta Seção se apresentam as estimativas para o erro de aproximação da fórmula de reconstrução de grau zero no espaço de Fourier. Considera-se, para maior simplicidade na exposição que a função possui um único ponto de descontinuidade. Diferencia-se o caso em que este ponto coincide com algum ponto da malha daquele em que isto não acontece. As hipóteses sobre a regularidade da função f continuam as mesmas.

4.2.1 Malha uniforme

Teorema: Sejam $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ os nós da malha uniforme do intervalo $[0,1]$ dados por $x_j = j/N$. Denota-se por $f_j = f(\eta_j)$, onde $\eta_j = (x_j + x_{j+1})/2$. O erro de aproximação no espaço de Fourier dado pelo método de grau zero para pontos de descontinuidade que coincidem com pontos da malha $\tilde{g}_k = \sigma_k^{(0)}\ \hat{f}_k$, é da ordem $O(1/N)$, isto é, $|\hat{e}_k^{(0)}| = |\hat{f}_k - \hat{p}_k^{(0)}| \leq K/N$, onde K é uma constante.

Demonstração: O erro no espaço de Fourier é dado por, $\hat{e}_k^{(0)} = \hat{f}_k - \hat{p}_k^{(0)}$, onde

$$p^{(0)}(x) = h \sum_{j=0}^{N-1} f_j \ \beta_h^0(x - \eta_j).$$

Portanto nesta aproximação para $x \in (x_j, x_{j+1})$, $e(x) = f(x) - f(\eta_j)$, logo tem-se que,

$$\hat{e}_k^{(0)} = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (f(x) - f_j) \ e^{-i2\pi kx} \ dx.$$

Para cada $x \in (x_j, x_{j+1})$ existe $\xi_x \in (x, \eta_j)$ tal que,

$$f(x) = f(\eta_j) + f'(\xi_x)(x - \eta_j),$$

logo $\hat{e}_k^{(0)} = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(\xi_x)(x - \eta_j) \ e^{-i2\pi kx} \ dx.$

$$|\hat{e}_k^{(0)}| = \sum_{j=0}^{N-1} \sup_{x \in [0,1]-Z} |f'(\xi_x)| \int_{x_j}^{x_{j+1}} |x - \eta_j| \ dx \leq \frac{1}{4} C_1 N h^2.$$

Assim temos então que neste caso o erro é da ordem de $O(1/N)$,

$$|\hat{e}_k^{(0)}| \leq \frac{1}{4} C_1 h \quad \diamondsuit.$$

Observação 1: Notar que para funções que são constantes por partes e contínuas dentro de cada subintervalo, obtém-se $\hat{e}_k^{(0)} = 0$, pois neste caso $C_1 = 0$.

Observação 2: Para funções lineares com suporte em $[0, 1]$ também vale que $\hat{e}_k^{(0)} = 0$ sendo possível então com este método reconstruir de forma exata os valores discretos f_j. Isto acontece pois se $f(x) = ax+b$, então $\hat{e}_k^{(0)} = a \ D_k \ \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi kj/N} = 0$, onde $D_k = [\ \frac{cos(\pi kh)}{-2\pi kiN} + \frac{sen(\pi kh)}{2(\pi k)^2}\ ]e^{-i\pi kh}$.

4.2.2 Malha não uniforme

Vamos supor que o ponto de descontinuidade não coincide com nenhum nó da malha. Seja x_{q_z} o ponto da malha mais próximo de z.

Teorema: Para a fórmula de reconstrução de grau zero com malha não uniforme dada por $\tilde{g}_k = \sigma_k^{(0)} \ (\hat{f}_k + [g](z)\hat{A}_k^{(0)}(z))$ obtém-se que o erro de aproximação é da ordem $O(1/N)$.

Demonstração: Para estabelecer a ordem do erro neste caso deve ser considerada a expressão para $p^{(0)}(x)$ dada por:

$$p^{(0)}(x) = h \sum_{j=0, j\neq q_z, q_z-1}^{N-1} f_j \ \beta_h^0(x-\eta_j) + f_{q_z-1}\chi_{[x_{q_z-1},z]} + f_{q_z}\chi_{[z,x_{q_z+1}]},$$

e portanto,

$$\hat{e}_k^{(0)} = \sum_{j=0, j\neq q_z, q_z-1}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\ f(x)-f_j) \ e^{-i2\pi kx} \ dx + \int_{x_{q_z-1}}^{z} (f(x)-f_{q_z-1}) \ e^{-i2\pi kx} \ dx$$
$$+ \int_{z}^{x_{q_z+1}} (f(x)-f_{q_z+1}) \ e^{-i2\pi kx} \ dx.$$

Usando novamente a expansão linear de f temos que,

para $x \in (x_j, x_{j+1})$, e $j \neq q_z, q_z-1$,

$$f(x) = f_j + f'(\xi_1^x) \ (x-\eta_j), \quad \xi_1^x \in (x, \eta_j).$$

Para $x \in (x_{q_z-1}, z)$,

$$f(x) = f(\eta_{q_z-1}) + f'(\xi_2^x) \ (x-\eta_{q_z-1}), \quad \xi_2^x \in (x_{q_z-1}, x), \quad \eta_{q_z-1} = (x_{q_z-1}+z)/2.$$

Para $x \in (z, x_{q_z+1})$,

$$f(x) = f(\eta_{q_z}) + f'(\xi_3^x) \ (x-\eta_{q_z}), \quad \xi_3^x \in (x, \eta_{q_z}), \quad \eta_{q_z} = (z+x_{q_z+1})/2.$$

Portanto, usando a estimativa obtida anteriormente para o caso dos subintervalos (x_j, x_{j+1}) que não contém pontos de descontinuidade, resulta que,

$$|\hat{e}_k^{(0)}| \ \leq \frac{1}{4}(N-2)C_1h^2 + C_1 \ [\int_{x_{q_z-1}}^{z} |x-\eta_{q_z-1}| \ dx + \int_{z}^{x_{q_z+1}} |x-\eta_{q_z}| \ dx].$$
$$\leq \frac{1}{4}(N-2)C_1h^2 + \frac{C_1}{4} \ ((\frac{3h}{2})^2 + (\frac{h}{2})^2) \leq \frac{5C_1}{16}h.$$

Assim obtém-se o esperado, $|\hat{e}_k^{(0)}| \ \leq Kh$ com K constante $\quad \diamondsuit$.

4.3 Estimativas do erro para a fórmula de grau 1

O objetivo é mostrar que a ordem do erro de aproximação da fórmula de reconstrução de grau 1 no espaço de Fourier é 2. Aqui também assumimos que a f é tão regular quanto for preciso nos pontos de continuidade.

Teorema: Para a fórmula de reconstrução de grau 1 dada por $\tilde{g}_k = \sigma_k^{(1)}\ \hat{f}_k - [f](z)\ (\sigma_k^{(1)}\ (\hat{A}_z^1)_k - (\tilde{A}_z^1)_k)$ obtém-se um erro no domínio da freqüência da ordem $O(1/N^2)$.

Demonstração : Deve-se estimar $\hat{e}_k^{(1)} = \hat{f}_k - (\hat{p}_f^1)_k$. Porquanto $f(x) = h(x) + [f](z)A_z^1(x)$ temos que,

$$\begin{aligned} \hat{e}_k^{(1)} &= \hat{f}_k - (\hat{p}_f^1)_k, \\ &= \hat{h}_k + [f](z)(\hat{A}_z^1)_k - [(\hat{p}_h^1)_k + [f](z)(\hat{A}_z^1)_k] \end{aligned}$$

Portanto será preciso considerar $\hat{e}_k^{(1)} = \hat{h}_k - (\hat{p}_h^1)_k$.

Sabemos que $p_h^1(x)$ é o interpolador de spline da função contínua $h(x)$. Segundo o visto no capítulo anterior sabemos que ele é dado por:

$$p_h^1(x) = h \sum_{j=0}^{N-1} h(x_j)\ \beta_h^1(x - x_j).$$

Temos então que,

$$\begin{aligned} \hat{e}_k^{(1)} &= \int_0^1 \ (h(x) - h\sum_{j=0}^{N-1} h(x_j)\ \beta_h^1(x - x_j))\ e^{-i2\pi kx}\ dx, \\ &= \sum_{s=0}^{N-1}\ \int_{x_s}^{x_{s+1}} [h(x) - L_s(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx. \end{aligned}$$

Onde $L_s(x) = h\ (\ h(x_s)\ \beta_h^1(x - x_s) + h(x_{s+1})\ \beta_h^1(x - x_{s+1})\ )$ corresponde ao interpolador linear de $h(x)$ nos pontos x_s, x_{s+1}. Portanto, naqueles subintervalos onde está definida $h''(x)$, isto é, para todo $x \in (x_s, x_{s+1}),\ s \neq q_z - 1, q_z$ temos que,

$$h(x) - L_s(x) = \tfrac{1}{2}h''(\zeta_x)\ (x - x_s)(x_{s+1}), \qquad \zeta_x \in (x_s, x_{s+1}).$$

Logo,

$$|\int_{x_s}^{x_{s+1}}\ [h(x) - L_s(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx| \leq \tfrac{C_2}{2} \int_{x_s}^{x_{s+1}}\ (x_s - x)(x - x_{s+1})dx \leq \tfrac{C_2}{12}\ h^3.$$

Porquanto $N-2$ desses subintervalos contribuiem na fórmula do erro, temos que,

$$|\sum_{s=0, s\neq q_z, q_z-1}^{N-1} \int_{x_s}^{x_{s+1}} [h(x) - L_s(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx| \leq \frac{C_2}{2}\ (N-2)h^3 \approx \frac{C_2}{12}\ h^2.$$

Resta estimar a diferença anterior para $x \in (x_{q_z}, z) \bigcup (z, x_{q_z+1})$. Vamos supor que $z \in (x_{q_z}, x_{q_z+1})$. Neste caso, também vale que $| \int_{x_{q_z-1}}^{x_{q_z}} [h(x) - L_{q_z-1}(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx| \leq \frac{C_2}{12}\ h^3$.

No subintervalo (x_{q_z}, x_{q_z+1}) deve-se considerar:

$$d_1 + d_2 = \int_{x_{q_z}}^{z} [h(x) - L_{q_z}(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx + \int_{z}^{x_{q_z+1}} [h(x) - L_{q_z}(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx.$$

Para $x \in [x_{q_z}, z)$, resulta então que,

$$h(x) - L_{q_z}(x) = h\ [\ (h(x) - h(x_{q_z})\ )\ \beta_h^1(x - x_{q_z}) + (h(x) - h(x_{q_z+1})\ )\ \beta_h^1(x - x_{q_z+1})\ ].$$

Usando a expansão de Taylor de primeira ordem em cada subintervalo onde existe $h'(x)$ temos que,

$$\begin{aligned} h(x) &= h(z) + h'(\zeta_1)\ (x - z), \quad x \in (x_{q_z}, z),\ \zeta_1 \in (x, z) \\ h(x_{q_z+1}) &= h(z) + h'(\zeta_2)\ (x_{q_z+1} - z), \quad \zeta_2 \in (z, x_{q_z+1}). \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação anterior resulta,

$$\begin{aligned} h(x) - L_{q_z}(x) = \frac{1}{h}\ [\ & h'(\zeta)(x - x_{q_z})(x_{q_z+1} - x) - h'(\zeta_1)(x - z)(x - x_{q_z}) + \\ & + h'(\zeta_2)(x - x_{q_z})(x_{q_z+1} - z)\ ]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |d_1| &= |\int_{x_{q_z}}^{z} [h(x) - L_{q_z}(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx| \\ &\leq \frac{C_1}{h} \int_{x_{q_z}}^{z} (x - x_{q_z})(x_{q_z+1} - x) + (z - x)(x - x_{q_z}) + (x - x_{q_z})(x_{q_z+1} - z)\ dx \leq \frac{13}{48} C_1 h^2. \end{aligned}$$

A estimativa para d_2 resulta quase de maneira análoga. Deve-se estimar então, $d_2 = \int_z^{x_{q_z+1}} [h(x) - L_{q_z}(x)]\ e^{-i2\pi kx}\ dx$. Seja $x \in (z, x_{q_z+1})$ temos que,

$$h(x) - L_{q_z}(x) = \frac{1}{h}\ [(h(x) - h(x_{q_z}))(x_{q_z+1} - x) + (h(x) - h(x_{q_z+1}))(x - x_{q_z})].$$

Usando a expansão de Taylor de primeira ordem para a função h temos que para $x \in (z, x_{q_z+1})$ é válido que:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x_{q_z+1}) + h'(\theta_1)(x - x_{q_z+1}), \quad \theta_1 \in (x, x_{q_z+1}), \\ h(x) &= h(z) + h'(\theta_2)(x - z), \quad \theta_2 \in (z, x). \end{aligned}$$

Também é possível escrever $h(x_{q_z})$ em termos de sua aproximação de primeira ordem baseada no ponto z,

$$h(x_{q_z}) = h(z) + h'(\theta_3)(x_{q_z} - z), \quad \theta_3 \in (x_{q_z}, z).$$

Fazendo as substituições correspondentes resulta que

$$h(x) - L_{q_z}(x) = \frac{(x_{q_z+1} - x)}{h} \; [(h'(\theta_1)(x - x_{q_z}) + h'(\theta_2)(x - z) - h'(\theta_3)(x_{q_z} - z)].$$

Depois de calcular as integrais, obtém-se que $|d_2| \leq \frac{3}{4}\; C_1\; h^2$.
Temos então que,

$$\begin{aligned} |\hat{e}_k^{(1)}| &\leq | \sum_{s=0, s\neq q_z, q_z-1}^{N-1} \int_{x_s}^{x_{s+1}} [h(x) - L_s(x)]\; e^{-i2\pi kx}\; dx| + |d_1| + |d_2|, \\ &\leq \frac{C_2}{12}\; h^2 + \frac{13}{48} C_1 h^2 + \frac{3}{4}\; C_1\; h^2 \leq (\frac{C_2}{12} \; + \frac{49}{48} C_1)\; h^2 \quad \diamondsuit. \end{aligned}$$

4.4 Estimativas do erro para a fórmula de grau 2

Como no caso anterior, será preciso estimar

$$\hat{e}_k^{(2)} = \hat{f}_k - (\hat{p}_f^2)_k = \hat{h}_k - (\hat{p}_h^2)_k,$$

onde $p_h^2(x)$ corresponde ao interpolador de spline de grau 2 da função contínua $h(x)$. Portanto,

$$\hat{e}_k^{(2)} = \int_0^1 \; (h(x) - p_h^{(2)}(x)) e^{-i2\pi kx}\; dx.$$

Por ser a aproximação dada pelo $p_h^{(2)}(x)$ uma aproximação de tipo segmentaria, considera-se a diferença $d_2(x) = h(x) - p_h^{(2)}(x)$, em cada um dos subintervalos $[x_j, x_{j+1}]$, para $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Naqueles subintervalos que não possuem pontos de descontinuidade, é possível supor que a função h é suficientemente regular e que portanto é valida a estimativa dada para o erro de aproximação do interpolador de splines de grau 2:

$$\max_{x \in (x_j, x_{j+1}) / j \neq q_z, q_z - 1} |d(x)| \leq K\; C_3 h^3,$$

onde K é uma constante e $C_3 = \sup_{x \in (x_j, x_{j+1})/j \neq q_z, q_z-1} |f^{(3)}(x)|$.

Então, temos que,

$$
\begin{aligned}
|\hat{e}_k^{(2)}| &= | \sum_{j=0, j\neq q_z, q_z-1}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} d(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx + \int_{x_{q_z-1}}^{x_{q_z+1}} d(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx|, \\
&\leq (N-2)KC_3h^4 + | \int_{x_{q_z-1}}^{x_{q_z+1}} d(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx|.
\end{aligned}
$$

Resta então limitar a segunda parte desta expressão. Para isto vamos supor que o ponto $z \in (x_{q_z}, x_{q_z+1})$, portanto ainda é possível supor regularidade da função para o subintervalo (x_{q_z-1}, x_{q_z}) e assim obter que,

$$
| \int_{x_{q_z-1}}^{x_{q_z+1}} d(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx| \leq KC_3h^4 + | \int_{x_{q_z}}^{x_{q_z+1}} d(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx|.
$$

Para $x \in (x_{q_z}, x_{q_z+1})$ a aproximação dada pelo splines de ordem 2 pode-se escrever como $p_h^2(x) = L_{q_z}(x) + (x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})\ M_q$, onde $L_{q_z}(x)$ corresponde à aproximação linear da função $h(x)$ no intervalo (x_{q_z}, x_{q_z+1}) usada na Seção anterior e $M_q = [x_{q_z+1}, x_{q_z}, x]h$ é a diferença dividida de segunda ordem da função $h(x)$,

$$
M_q = \frac{1}{(x - x_{q_z})} [\frac{p_h^2(x) - h(x_{q_z})}{(x - x_{q_z})} - \frac{h(x_{q_z}) - h(x_{q_z+1})}{(x_{q_z} - x_{q_z+1})}].
$$

O spline $p_h^2(x) \in C^1[0,1]$ portanto da condição de continuidade da derivada primeira no ponto $x = x_{q_z}$ resulta que,

$$
L'_{q_z-1}(x) + 2(x - \frac{(x_{q_z-1} + x_{q_z})}{2})\ M_{q-1} = L'_{q_z}(x) + 2(x - \frac{(x_{q_z+1} + x_{q_z})}{2})\ M_q.
$$

Daqui obtém-se que,

$$
hM_{q-1} + (x - x_{q_z})M_q = \frac{h(x_{q_z+1}) - 2h(x_{q_z}) + h(x_{q_z-1})}{h^2}(x - x_{q_z}) + (x_{q_z+1} - x)M_{q-1},
$$

portanto,

$$
M_q = \frac{h(x_{q_z+1}) - 2h(x_{q_z}) + h(x_{q_z-1})}{h^2} - M_{q-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 h = & \frac{1}{h^2}\{(h(x_{q_z+1}) - h(z)) + (h(z) - h(x_{q_z})) + (h(x_{q_z-1}) - h(x_{q_z}))\}, \\
= & \frac{1}{h^2}\{h'(z^+)(x_{q_z+1} - z) + h''(z^+)(x_{q_z+1} - z)^2/2 + h'''(\xi_1)(x_{q_z+1} - z)^3/6 \\
& -(h'(z^-)(x_{q_z} - z) + h''(z^-)(x_{q_z} - z)^2/2 + h'''(\xi_2)(x_{q_z} - z)^3/6) \\
& -(h\ h'(x_{q_z}) - h''(x_{q_z})\ h^2/2 + h'''(\xi_3)\ h^3/6)\}, \\
= & \frac{1}{h^2}\{(x_{q_z+1} - z)\ [h'](z) + h\ (h'(z^-) - h'(x_{q_z})) + \frac{1}{2}(h''(z^+)(x_{q_z+1} - z)^2 - \\
& -h''(z^-)(x_{q_z} - z)^2 + h''(x_{q_z})\ h^2) + \frac{1}{6}(h'''(\xi_1)(x_{q_z+1} - z)^3 - h'''(\xi_2)(x_{q_z} - z)^3 - h'''(\xi_3)\ h^3)\}, \\
= & \frac{1}{h^2}\{(x_{q_z+1} - z)\ [h'](z) + h\ (h''(z^-)(x_{q_z} - z) + h'''(\xi_4)(x_{q_z} - z)^2/2) + \\
& +\frac{1}{2}(h''(z^+)(x_{q_z+1} - z)^2 - h''(z^-)(x_{q_z} - z)^2 + h''(x_{q_z})\ h^2) + \frac{1}{6}(h'''(\xi_1)(x_{q_z+1} - z)^3 - \\
& -h'''(\xi_2)(x_{q_z} - z)^3 - h'''(\xi_3)\ h^3)\},
\end{aligned}
$$

onde foram usadas as seguintes expressões ,

$$
\begin{aligned}
& h(x_{q_z+1}) = h(z) + h'(z^+)(x_{q_z+1} - z) + h''(z^+)(x_{q_z+1} - z)^2/2 + h'''(\xi_1)(x_{q_z+1} - z)^3/6; \\
& h(x_{q_z}) = h(z) + h'(z^-)(x_{q_z} - z) + h''(z^-)(x_{q_z} - z)^2/2 + h'''(\xi_2)(x_{q_z} - z)^3/6); \\
& h(x_{q_z-1}) = h(x_{q_z}) - h\ h'(x_{q_z}) + h''(x_{q_z})\ h^2/2 + h'''(\xi_3)\ h^3/6; \\
& \text{onde } \xi_1 \in (z, x_{q_z+1}),\ \xi_2 \in (x_{q_z}, z) \text{ e } \xi_3 \in (x_{q_z}, x).
\end{aligned}
$$

Supondo que $[h'](z) = 0$ temos que, $|\Delta^2 h| \leq 2C_2 + hC_3$ portanto $|M_q| \leq 3C_2 + hC_3$.

Considerando agora valores de x no subintervalo $[x_{q_z}, z)$, estimaremos a diferença $d_2(x) = h(x) - p_h^2(x)$:

$$d_2(x) = h(x) - L_{q_z}(x) - (x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})\ M_q.$$

No subintervalo $[x_{q_z}, z), h(x)$ é suficientemente regular, portanto as seguintes igualdades são válidas:

$$
\begin{aligned}
& h(x) = h(z) + h'(z^-)(x - z) + h''(\theta_1)(x - z)^2/2;\ \theta_1 \in (x, z) \\
& h(x_{q_z+1}) = h(z) + h'(z^+)(x_{q_z+1} - z) + h''(\theta_2)(x_{q_z+1} - z)^2/2;\ \theta_2 \in (z, x_{q_z+1}) \\
& h(x) = h(x_{q_z}) + h'(x_{q_z})(x - x_{q_z}) + h''(\theta_3)(x - x_{q_z})^2/2;\ \theta_3 \in (x_{q_z}, x).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
h(x) - L_{q_z}(x) &= \frac{1}{h}[(h(x) - h(x_{q_z+1}))(x - x_{q_z}) + (h(x) - h(x_{q_z}))(x - x_{q_z+1}),\\
&= \frac{1}{h}[(x - x_{q_z})(h'(z^-)(x - z) - h'(z^+)(x_{q_z+1} - z) + h''(\theta_1)(x - z)^2/2-\\
&-h''(\theta_2)(x_{q_z+1} - z)^2/2) + (x - x_{q_z+1})(h'(x_{q_z})(x - x_{q_z}) + h''(\theta_3)(x - x_{q_z})^2/2)],\\
&= \frac{1}{h}[(x - x_{q_z})(x_{q_z+1} - z)\ (h'(z^-) - h'(z^+)) + (h'(z^-) - h'(x_{q_z}))(x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})+\\
&+\frac{(x - x_{q_z})}{2}[h''(\theta_1)(x - z)^2 - h''(\theta_2)(x_{q_z+1} - z)^2 - h''(\theta_3)(x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})]],\\
&= \frac{1}{h}[(x - x_{q_z})(x_{q_z+1} - z)\ [h'](z) + h''(\theta_4)(x_{q_z} - z)(x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})+\\
&+\frac{(x - x_{q_z})}{2}[h''(\theta_1)(x - z)^2 - h''(\theta_2)(x_{q_z+1} - z)^2 - h''(\theta_3)(x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})]],
\end{aligned}
$$

pois $h'(x_{q_z}) = h'(z^-)+h''(\theta_4)(x-x_{q_z})$; $\theta_4 \in (x_{q_z}, z)$. Substituindo a expressão obtida para $h(x) - L_{q_z}(x)$ em $d_2(x)$ resulta,

$$
\begin{aligned}
d_2(x) &= \frac{1}{h}[(x - x_{q_z})(x_{q_z+1} - z)\ [h'](z) + h''(\theta_4)(x_{q_z} - z)(x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})+\\
&+\frac{(x - x_{q_z})}{2}[h''(\theta_1)(x - z)^2 - h''(\theta_2)(x_{q_z+1} - z)^2 - h''(\theta_3)(x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})]\ ]-\\
&-(x - x_{q_z})(x - x_{q_z+1})\ M_q.
\end{aligned}
$$

Temos então que,

$$
\begin{aligned}
|d_2(x)| &\leq h\ [h'](z) + h^2(h''(\theta_4) + \frac{1}{2}(h''(\theta_1) + h''(\theta_2) + h''(\theta_3)\ ) + h^2\ M_q,\\
&\leq h\ [h'](z) + \frac{5}{2}\ C_2h^2 + h^2(3C_2 + hC_3) = \frac{11}{2}\ C_2h^2 + h^3C_3.
\end{aligned}
$$

Logo a contribuição de $d_2(x)$ para o erro espectral neste subintervalo é da ordem de $O(h^3)$,

$$
|\int_{x_{q_z}}^{z}\ d_2(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx\ | \leq \frac{11}{4}\ C_2h^3 + O(h^4).
$$

Analogamente obtém-se que $|\int_{z}^{x_{q_z+1}}\ d_2(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx\ | \leq R\ C_2h^3$.

Para o caso em que o ponto de descontinuidade $z \in [x_{q_z-1}, x_{q_z}]$, usando L_{q_z-1} no lugar de L_{q_z}, e procedendo de maneira análoga obtém-se uma estimativa similar. Logo, a estimativa do erro de aproximação no espaço da freqüência para o método de reconstrução de grau 2 é da ordem de h^3:

$$
|\hat{e}_k^{(2)}| \leq (N-1)KC_3h^4 + \tfrac{11}{4}\ C_2h^3 + RC_2h^3 + O(h^4) \approx (KC_3 + C_2(\tfrac{11}{4} + R))h^3.\diamondsuit
$$

Similarmente, para as fórmulas que resultam de filtros de grau superior r, obtém-se erros de aproximação da ordem de h^{r+1}.

Capítulo 5

Aproximações Iniciais

Neste capítulo descreve-se o método para calcular aproximações iniciais aos pontos de descontinuidade de funções com singularidade de primeira espécie. Na Seção 5.1 apresenta-se o teorema exposto no trabalho [19] e que é a base do método. Na Seção 5.2 mostra-se o desempenho do método para dados espectrais exatos e dados espectrais com ruido aleatório. Comparações são feitas com o método linear de detecção descrito na Seção 2.5 do Capítulo 2.

5.1 Aproximações iniciais para os pontos de descontinuidade

Nas diferentes fórmulas de reconstrução já apresentadas resulta claro que é preciso conhecer a localização dos pontos de descontinuidade da função f, $\{z_1, \cdots, z_L\}$ para poder dar início aos respectivos algoritmos. Nesta seção será derivada a expressão matemática que permite determinar aproximações precisas para estes pontos com um baixo custo computacional. A idéia neste caso consiste em aproveitar a presença do Fenômeno de Gibbs na fórmula de reconstrução de grau zero para o caso em que algum dos pontos de descontinuidade não coincida com os nós da malha uniforme. Nossa descoberta foi entender a capacidade do ponto inicial proposto no Teorema 1 (ver [20]) de melhorar substancialmente os resultados do método linear (ver seção 5.2).

Teorema 1: Seja f uma função que satisfaz as hipóteses anteriores. Seja N um número par e suponhamos conhecidos os N coeficientes de Fourier de f, $\hat{f}_k$ para $k = -N/2, \cdots, N/2-1$. Define-se o conjunto de nós $x_l = l/N$ para $l = 0,\ 1, \cdots, N-1$ e $f_j = f(\eta_j)$ com $\eta_j = x_j + \frac{1}{2N}$. Suponhamos que $N \gg L$ e $Z \equiv \{z_1, \cdots, z_L\} \not\subset$

$\{x_0,\ x_1, \cdots, x_{N-1}\}$. Sejam g_j, para $j = 0, \cdots, N-1$, as aproximações para os valores pontuais da função obtidos através da fórmula de reconstrução de grau zero:

$$\tilde{g}_k = \sigma_k^{(0)} \hat{f}_k. \tag{5.1}$$

Define-se $\alpha_l = N(z_l - x_{q_l})$ para $l = 1, \cdots, L$. Então, para j próximo a algum q_r, $r = 1, \cdots, L$, temos que:

$$g_j - g_{j-1} = (f(z_r^+) - f(z_r^-)) \frac{(-1)^{j-q_r-1} \sin(\pi\alpha_r)}{\pi(j - q_r - \alpha_r)} + O(\frac{1}{N}). \tag{5.2}$$

No entanto para j longe dos q_r, é válido que:

$$g_j - g_{j-1} = O(\tfrac{1}{N}).$$

Demonstração: Será preciso começar estimando a diferença $g_j - f_j$ em termos da magnitude dos saltos da função nos pontos de descontinuidade.

Se $z_l \in (x_{q_l}, \eta_{q_l})$ é possível, usando a expansão de primeira ordem, expressar a $f(x)$ como:
para $x \in (x_{q_l}, z_l)$

$$f(x) = f(z_l^-) + f'(\xi_1)(x - z_l), \xi_1 \in (x_{q_l}, z_l),$$

para $x \in (z_l, x_{q_l+1})$,

$$f(x) = f(z_l^+) + f'(\xi_2)(x - z),\ \xi_2 \in (z_l, x_{q_l+1}),$$

Em particular tem-se que,

$$f_{q_l} = f(\eta_{q_l}) \equiv f(\tfrac{x_{q_l} + x_{q_l+1}}{2}) = f(z_l^+) + f'(\theta_2)(\eta_{q_l} - z_l),\ \theta_2 \in (z_l, x_{q_l+1}).$$

Usando o Teorema 1 de [19], observa-se que a contribuição para a estimação do erro de aproximação $g_j - f_j$, de todos aqueles subintervalos que não contém pontos de descontinuidades é muito pequena, mais precisamente da ordem de $O(\frac{1}{N^2}(C_1 d_j^{-1} + C_2 \ln(N)))$. Portanto só será necessário estudar o que acontece naqueles subintervalos que contém pontos de descontinuidade da função. Assim temos que,

$$g_j - f_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)} e^{i2k\pi x_j} \sum_{l=1}^{L} \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l+1}} e^{-i2k\pi x}(f(x) - f(\eta_{q_l}))dx + O(\frac{1}{N^2}(C_1 d_j^{-1} + C_2 \ln(N)))$$

Usando a expansão de primeira ordem para f obtém se que,

$$g_j - f_j = \sum_{l=1}^{L}(f(z_l^+) - f(z_l^-)) \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)} \int_z^{x_{q_l}} e^{i2k\pi(x_j - x)}dx + A,$$

Agora aplicando o Lema 1 de [19]. pode-se estimar para $x \in (x_{q_l}, x_{q_l+1})$,

$$|\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)} e^{i2k\pi(x_j-x)}| \leq \begin{cases} \frac{\pi}{2}N, & \text{para } j = q_l, \\ 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2|\eta_j - x|}, & \text{para } j \neq q_l, \end{cases}$$

onde A satisfaz,

$$|A| \leq C_1 \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l+1}} (|(x - z)| + |(\eta_{l_0} - x)|)| \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)} e^{i2k\pi(x_j-x)}|dx + O(\frac{1}{N^2}(C_1 d_j^{-1} + C_2 \ln(N)))$$
$$|A| \leq O(\frac{1}{N^2}(C_1 \sum_l d_{jl}^{-1} + C_2 \ln(N))).$$

Logo,

$$g_j - f_j = \sum_{l=1}^{L}(f(z_l^+) - f(z_l^-)) \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)} \int_z^{x_{q_l}} e^{i2k\pi(x_j-x)}dx + O(\frac{1}{N^2}(C_1 \sum_l d_{jl}^{-1} + C_2 \ln(N))),$$

Até agora foi suposto que $z_l \in (x_{q_l}, \eta_{q_l})$, mas é preciso observar que tudo o anterior continúa sendo válido para $z_l \in (\eta_{q_l-1}, x_{q_l})$. Em geral, quando x_{q_l} para $l = 1, \cdots, L$, é o ponto mais próximo a z_l e denotando por $\alpha_l = N(z_l - x_{q_l})$ e $r_j = (g_j - f_j) - (g_{j-1} - f_{j-1})$, temos que,

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{l=1}^{L}(f(z_l^+) - f(z_l^-)) \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sigma_k^{(0)}(1 - e^{i2k\pi/N}) \int_{z_l}^{x_{q_l}} e^{-i2k\pi x}dx + O(\frac{1}{N^2}(C_2 \ln(N) + \frac{C_1}{d_{jl}})) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L}(f(z_l^+) - f(z_l^-)) \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (e^{i2k\pi(x_j - z_l)} - e^{i2k\pi(x_j - x_{q_l})}) + O(\frac{1}{N^2}(C_2 \ln(N) + \frac{C_1}{d_{jl}})) \end{aligned}$$

Usando que $\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{ikx} = \frac{sin(Nx/2)}{sin(x/2)} e^{-ix/2}$ obtém-se,

$$r_j = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L}(f(z_l^+) - f(z_l^-))[\frac{(-1)^{j-q_l-1}\sin(\pi\alpha_l)}{\sin\frac{\pi(j-q_l-\alpha_l)}{N}} e^{\frac{-i\pi(j-q_l-\alpha_l)}{N}} - N\delta_{j,q_l}] + O(\frac{1}{N^2}(C_2 \ln(N) + \frac{C_1}{d_{jl}})).$$

Assim, da expressão anterior pode se observar que porquanto $f_j - f_{j-1} = O(\frac{1}{N})$ para os subíndices j que estão longe dos q_l, temos que:

$$g_j - g_{j-1} = f_j - f_{j-1} + r_j = O(\tfrac{1}{N}).$$

Estamos agora em condições de expressar a variação entre valores consecutivos da função em termo das amplitudes dos saltos nos pontos de descontinuidade.

Para $j = q_r$, $f_{q_r} - f_{q_r-1} = f(z_r^+) - f(z_r^-) + O(\frac{1}{N})$, então:

$$g_{q_r} - g_{q_r-1} = f_{q_r} - f_{q_r-1} + \frac{1}{N}(f(z_r^+) - f(z_r^-))[\frac{-\sin(\pi\alpha_r)}{\sin\frac{\pi(-\alpha_r)}{N}} e^{\frac{i\pi\alpha_r}{N}} - N] + O(\frac{1}{N})$$
$$= (f(z_r^+) - f(z_r^-))\frac{\sin(\pi\alpha_r)}{\pi\alpha_r} + O(\frac{1}{N}).$$

Se $j \neq q_r$ mas $|j - q_r|$ corresponde a um inteiro muito pequeno, $f_j - f_{j-1} = O(\frac{1}{N})$ e neste caso temos que,

$$g_j - g_{j-1} = f_j - f_{j-1} + \frac{1}{N}(f(z_r^+) - f(z_r^-))\frac{(-1)^{j-q_r-1}\sin(\pi\alpha_r)}{\sin\frac{\pi(j-q_r-\alpha_r)}{N}} e^{\frac{-i\pi(j-q_r-\alpha_r)}{N}} + O(\frac{1}{N})$$
$$= (f(z_r^+) - f(z_r^-))\frac{(-1)^{j-q_r-1}\sin(\pi\alpha_r)}{\pi(j - q_r - \alpha_r)} + O(\frac{1}{N}).$$

Assim obtém-se a equação Eq. (5.2) $\diamondsuit$.

Corolário: Com as mesmas hipóteses do **Teorema 1** e denotando por

$$\gamma_r^{(1)} \equiv \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - g_{q_r-1}} \qquad \gamma_r^{(2)} \equiv \frac{g_{q_r-1} - g_{q_r-2}}{g_{q_r} - g_{q_r-1}}. \tag{5.3}$$

é possível aproximar os pontos de descontinuidade z_r através da seguinte expressão:

$$z_r = x_{q_r} + \frac{\gamma_r^{(1)}}{N(1+\gamma_r^{(1)})} + O(\frac{1}{N^2}) \qquad \text{ou} \qquad z_r = x_{q_r} - \frac{\gamma_r^{(2)}}{N(1+\gamma_r^{(2)})} + O(\frac{1}{N^2}). \tag{5.4}$$

Demonstração: A prova segue-se elementarmente do Teorema 1, pois usando este resultado para o caso particular de $j = q_r + 1$,

$$g_{q_r+1} - g_{q_r} = (f(z_r^+) - f(z_r^-))\frac{\sin(\pi\alpha_r)}{\pi(1-\alpha_r)} + O(\frac{1}{N}),$$

e para $j = q_r - 1$,

$$g_{q_r-1} - g_{q_r-2} = -(f(z_r^+) - f(z_r^-))\frac{\sin(\pi\alpha_r)}{\pi(1+\alpha_r)} + O(\frac{1}{N}).$$

Fazendo o quociente entre estas expresões obtem-se que,

$$\gamma_r^{(1)} \equiv \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - g_{q_r-1}} = \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} + O(\frac{1}{N}), \tag{5.5}$$

portanto $\alpha_r = \dfrac{\gamma_r^{(1)}}{1-\gamma_r^{(1)}} + O(\dfrac{1}{N}) = N(z_r - x_{qr})$, logo $\quad z_r = x_{q_r} + \dfrac{\gamma_r^{(1)}}{N(1+\gamma_r^{(1)})} +$ $O(\dfrac{1}{N^2})$.

A expressão para $\gamma^{(2)}$ resulta de forma análoga $\Diamond$.

Algumas considerações sobre a determinação dos x_{qr}

A partir da definição de α_r, $0 \leq |\alpha_r| \leq 1/2$, consideram-se dois casos:

(i). $|\alpha_r| = O(\frac{1}{N})$. (ii). $|\alpha_r| \gg \frac{1}{N}$.

No primeiro caso q_r pode ser facilmente determinado pois como $\dfrac{\sin(\pi\alpha_r)}{\pi\alpha_r} \approx 1$, obtém-se que,

$$\begin{aligned} g_{q_r} - g_{q_r-1} &= f(z_r^+) - f(z_r^-) + O(\frac{1}{N}), \\ g_{q_j} - g_{q_j-1} &= O(\frac{1}{N}), \qquad \text{para } j \neq q_r \end{aligned}$$

e então $\gamma_r^{(1)} = O(\frac{1}{N})$.

No segundo caso temos que:

$$|g_{q_r+s} - g_{q_r+s-1}| = |f(z_r^+) - f(z_r^-)| \, |\frac{\sin(\pi\alpha_r)}{\pi(\alpha_r+s)}| + O(\frac{1}{N}), \; for \; s = -1, 0, 1.$$

Como $|\alpha_r| \leq |\alpha_r + s|$, a maior dessas diferença corresponde a $|g_{q_r} - g_{q_r-1}|$, mas as restantes não são mais da ordem de $O(\frac{1}{N})$. Observar que:

$$\begin{aligned} &(g_j - g_{j-1})(g_{j+1} - g_j) < 0, \; j \neq q_r - 1, \; q_r, \; (g_{q_r+1} - g_{q_r})(g_{q_r-1} - g_{q_r-2}) < 0, \\ &(g_{q_r} - g_{q_r-1})(g_{q_r+1} - g_{q_r}) > 0 \text{ or } (g_{q_r} - g_{q_r-1})(g_{q_r-1} - g_{q_r-2}) > 0. \end{aligned}$$

Das observações anteriores é possível determinar q_r e z_r através de $\gamma_r^{(1)}$ e de $\gamma_r^{(2)}$. Temos três casos possíveis.

(1). Se $|g_{q_r} - g_{q_r-1}| \sim |g_{q_r+1} - g_{q_r}|$, então $\gamma_r^{(1)} \sim 1$ e $\gamma_r^{(2)} \sim -1/3$.

(2). Se $|g_{q_r} - g_{q_r-1}| \sim |g_{q_r-1} - g_{q_r-2}|$, então $\gamma_r^{(2)} \sim 1$ e $\gamma_r^{(1)} \sim -1/3$.

(3). $|g_{q_r} - g_{q_r-1}|$ é o único maior valor na vizinhança de $j = q_r$. Então $|\gamma_r^{(1)}| < 1$ e $|\gamma_r^{(2)}| < 1$.

Destes três casos é possível determinar de maneira única o subíndice q_r, para depois, através de $\gamma_r^{(1)}$ e da definição de α_r, estimar sem dificuldade o ponto de descontinuidade z_r na Eq. (5.4).

Portanto, é possível através da fórmula de reconstrução de grau zero, determinar uma aproximação para os pontos de descontinuidade. O erro de aproximação segundo o Corolário é da ordem de $O(\frac{1}{N^2})$.

Os passos anteriores encontram-se no seguinte algoritmo.

Algoritmo: pontos iniciais

Dados os N coeficientes de Fourier $\{\hat{f}_k\}_{k=-N/2}^{N/2}$,

Passo 1: Calcular $g_j = IFFT(\sigma_k^{(0)} \hat{f}_k)$ para $j = 1, 2, \ldots, N$.

Passo 2: Calcular $dif(j) = |g_{q_j} - g_{q_j - 1}|$ para $j = 2, 3, \ldots, N$, $dif(1) = |g_1 - g_{q_N}|$ para determinar o ponto da malha $\{x_{q_r}\}_{r=1}^{M}$ mais próximo ao ponto de descontinuidade, filtrando os da $O(\frac{1}{N})$ e tomando o máximo entre os restantes.

Passo 3: Calcular para cada $r = 1, \ldots, M$ a aproximação,

$$\gamma^{(1)}(r) = \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - g_{q_r-1}}.$$

Passo 4: Se $\alpha_r = \gamma^{(1)}(r)/(1 - \gamma^{(1)}(r)) < 0.5$ calcular a aproximação inicial para o ponto de descontinuidade z_r dada por

$$w_r = x_{q_r} + \frac{\gamma_r^{(1)}}{N(1 + \gamma_r^{(1)})}.$$

Observação 1.: O número M de pontos de descontinuidade detectados pelo algoritmo poderia eventualmente ser maior do que L, que corresponde ao número exato deles, dependendo do valor mínimo prefixado para aceitar a variação nos g_j como salto. É importante destacar que em todos os exemplos testados o mínimo valor usado para considerar que um ponto está associado a uma descontinuidade de salto foi estabelecido a partir dos dados do problema e corresponde a $\frac{N}{2}\hat{f}_{N/2}$.

É claro que $M > L$ não representa um problema no momento de aplicar os algoritmos de reconstrução. O problema surge quando algum ponto não consegue ser detectado. Um outro parâmetro a ser determinado na implementação do algoritmo, é aquele que indica a separação mínima permitida entre pontos de descontinuidades. É claro que estes dois parâmetros devem ser estabelecidos para qualquer método que tiver como objetivo localizar singularidades a partir de dados de Fourier. Nos testes realizados, pontos de descontinuidade distantes um do outro em menos que $3\Delta x$ não serão detectados.

Observação 2.: É interessante comparar este método para detectar aproximações iniciais aos pontos de descontinuidade com o método das somas parciais conjugadas proposto por Gelb e Tadmor [8]. Na verdade, a diferença entre os valores pontuais consecutivos das aproximações dadas pelo método de grau zero para os valores e-xatos da função, isto é, $g_j - g_{j-1}$, está relacionada com a soma parcial conjugada generalizada, $\tilde{S}^{\theta}_{N/2}(f)(x) = i\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2} sinal(k)\ \theta(\frac{2|k|}{N})\ \hat{f}_k\ e^{2i\pi kx}$, na seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_j - g_{j-1} &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (e^{2i\pi kx_j} - e^{2i\pi kx_{j-1}})\ \sigma^{(0)}_k \hat{f}_k \\ &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \frac{i2\pi k}{N}\ \hat{f}_k\ e^{2i\pi kx_j} \\ &= i\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} sinal(k)\ \theta(\frac{2|k|}{N})\ \hat{f}_k\ e^{2i\pi kx_j}. \end{aligned}$$

Logo, daqui é possível observar que a diferença, $g_j - g_{j-1}$, que é usada para determinar o ponto da malha uniforme mais próximo ao ponto de descontinuidade z_r, corresponde à soma parcial conjugada generalizada da função f, com fator de atenuação polinomial de grau 1, i.e.,: $\theta(x) = x$. Mas diferentemente do método linear, é importante notar que o resultado do corolário 1 permite refinar este valor através da fórmula (5.4). Além do mais, o método aqui desenvolvido conta com a grande vantagem de poder detectar o número exato de pontos de descontinuidade, o que nem sempre acontece quando é usado o método das somas parciais conjugadas, mesmo com a amplificação de escalas apresentada na Seção 2.5 do Capítulo 2.

Observação 3: É possível reescrever as aproximações iniciais dadas por (5.4) em termos das somas parciais conjugadas generalizadas. Como, $g_j - g_{j-1} = \tilde{S}^{\theta}_{N/2}(f)(x_j) - \hat{f}_{N/2}\ (-1)^j$, temos que:

$$\gamma^{(1)}(r) = \frac{g_{q_r+1} - g_{q_r}}{g_{q_r} - g_{q_r-1}} = \frac{\tilde{S}^{\theta}_{N/2}(f)(x_{q_r+1}) - \hat{f}_{N/2}\ (-1)^{q_r+1}}{\tilde{S}^{\theta}_{N/2}(f)(x_{q_r}) - \hat{f}_{N/2}\ (-1)^{q_r}},$$

Daqui resulta então que,

$$w_r = x_{q_r} + \frac{1}{N}\; real\; [\; \frac{\tilde{S}^{\theta}_{N/2}(f)(x_{q_r+1}) - i\pi \hat{f}_{N/2}(-1)^{q_r+1}}{\tilde{S}^{\theta}_{N/2}(f)(x_{q_r+1}) + \tilde{S}^{\theta}_{N/2}(f)(x_{q_r})}\;].$$

Esta expressão também pode ser usada em geral com outros fatores de atenuação na soma parcial conjugada generalizada (exponencial, trigonométrico, etc.), mas como é de se esperar funciona melhor com $\theta(x) = x$.

5.2 Experiências Numéricas

Foram implementados nosso algoritmo de detecção de descontinuidades junto com o algoritmo dado pelo método linear com a amplificação de escalas proposta por Gelb e Tadmor já apresentado na Seção 2.5 do Capítulo 2. As funções consideradas são as seguintes:

Exemplo 1.

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 0.1), \\ 1, & x \in (0.1, 0.2), \\ 0.5, & x \in (0.2, 0.51), \\ 1.5, & x \in (0.51, 0.8), \\ 0, & x \in (0.8, 0.92), \\ 2, & x \in (0.92, 1], \end{cases}$$

$\bar{z} = (0; 0.1; 0.2; 0.51; 0.8; 0.92)$, $\qquad$ $[f_1](\bar{z}) = (-2; 1; -.5; 1; -1.5; 2)$.

Exemplo 2.

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 0.1), \\ -2x, & x \in (0.1, 0.2), \\ 3x, & x \in (0.2, 0.25), \\ -4x, & x \in (0.25, 0.6), \\ 5x, & x \in (0.6, 0.85), \\ -6x, & x \in (0.85, 1], \end{cases}$$

$\bar{z} = (0.1; 0.2; 0.25; 0.6; 0.85; 1)$, $\qquad$ $[f_2](\bar{z}) = (-0.3; 1; -1.75; 5.4; -9.35; 6)$.

Exemplo 3.

$$f_3(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & x \in [0, 0.48), \\ x^2, & x \in (0.48, 0.74), \\ x - 0.75, & x \in (0.74, 1] \end{cases}$$

$\bar{z} = (0.48; 0.74; 1)$, $\quad [f_3](\bar{z}) = (0.1676; -0.5576; 0.75)$.

Exemplo 4.

$$f_4(x) = \begin{cases} 0.1\ e^{5x}, & x \in [0, 0.29), \\ 0, & x \in (0.29, 0.33), \\ 3, & x \in (0.33, 0.87), \\ -1, & x \in (0.87, 0.92), \\ 0, & x \in (0.92, 1], \end{cases}$$

$\bar{z} = (0.29; 0.33; 0.87; 0.92; 1)$, $\quad [f_4](\bar{z}) = (-0.4263; 3; -4; 1; 0.1)$.

Exemplo 5.

$$f_5(x) = \begin{cases} 0.4, & x \in [0, 0.27), \\ 0, & x \in (0.27, 0.31), \\ 25\ (x - 0.6)^2, & x \in (0.31, 0.6), \\ 3x, & x \in (0.6, 0.951), \\ 0, & x \in (0.951, 1], \end{cases}$$

$\bar{z} = (0.27; 0.31; 0.6; 0.951; 1)$, $\quad [f_5](\bar{z}) = (-0.4; 2.1025; 1.8; -2.853; 0.4)$.

Estas funções apresentam um suficiente número de descontinuidades localizadas em pontos que nem sempre coincidem com os nós da malha, fato que deve ser contemplado.

Observando as figuras expostas no final do capítulo é possível apreciar o comportamento dos dois métodos para detectar descontinuidades. Em ambos os casos foram usadas as mesmas tolerâncias para o mínimo valor da amplitude a ser considerada como salto. Na maioria das vezes ambos métodos conseguem detectar todas as descontinuidades, mas em outras, como no caso das funções f_4 e f_5 o método linear já com a amplificação de escala não consegue detectar algumas delas. *Observar que nosso método consegue detectar, no caso de dados espectrais exatos, todas as descontinuidades em todos os casos.* Nosso método apresenta um melhor desempenho para calcular tanto o valor das aproximações aos pontos de descontinuidade da função quanto as amplitudes dos saltos naqueles pontos.

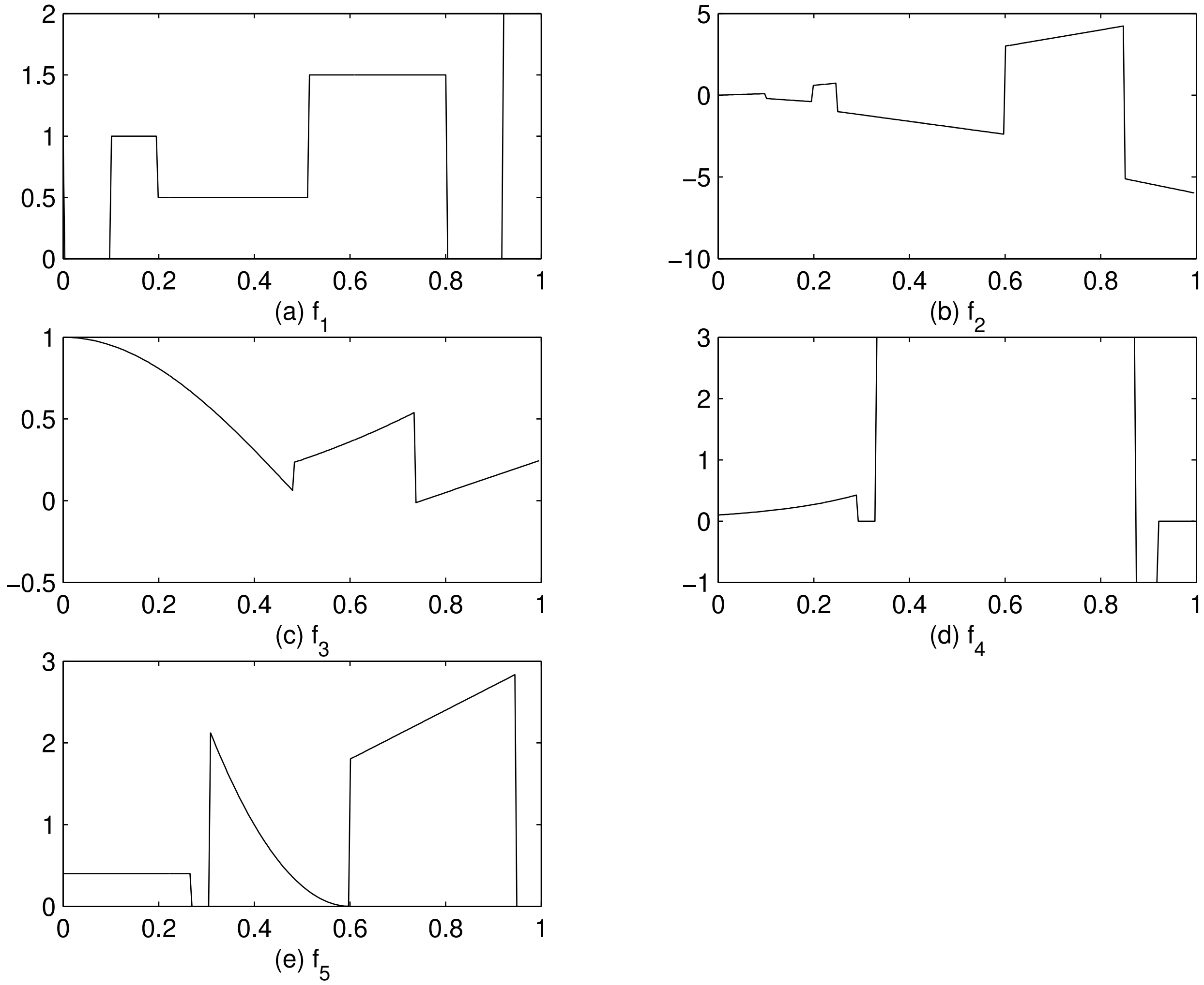


Figura 5.1: Funções teste.

Para os pontos de descontinuidade, as experiências numéricas confirmam que o erro de aproximação é efetivamente da ordem de $O(1/N^2)$. Observa-se também uma outra desvantagem do *método linear: ele fornece um número muito maior de pontos de descontinuidade*. Considerar estes pontos como tais resulta num tempo maior de execução em todos os algoritmos destinados a reconstruir a função, especialmente no caso do método que usa os polinômios de Gegenbauer pois este método consiste em aplicar um filtro naqueles subintervalos que não contém pontos singulares e fazer uma aproximação em termos destes polinômios nos subintervalos restantes (alto custo computacional).

Nosso algoritmo de detecção de descontinuidades junto com o algoritmo dado pelo método linear com amplificação de escalas já incorporado, foram aplicados usando como dados um número N de coeficientes de Fourier de cada uma das funções anteriormente definidas. Afim de poder avaliar quantitativamente o desempenho destes algoritmos, calcularam-se os erros de aproximação obtidos para a determinação dos pontos de descontinuidade e das amplitudes dos saltos em cada caso. A notação é a seguinte: $Epi(f)$ é a norma 2 da diferença entre os valores exatos dos pontos de discontinuidade da função f e as aproximações efetivamente calculadas usando nosso método, $Esi(f)$ corresponde ao erro de aproximação no cálculo das amplitudes dos saltos. $Epl(f)$ e $Esl(f)$ denotam os erros obtidos usando o método linear com amplificação de escalas para os pontos e para as amplitudes respectivamente.

É muito importante observar que este tipo de erro não pode ser medido apriori para o método linear pois em todos os casos o número de pontos detectados é bem maior que o exato, e o que é pior, em alguns casos algumas descontinuidades não são detectadas, portanto afim de fazer algum tipo de comparação para o caso das tres primeiras funções, foram escolhidos entre todos os pontos detectados pelo método linear, aqueles mas próximos às descontinuidades exatas calculados por este método. Obviamente esta escolha de pontos não faz sentido num problema real onde os valores exatos são desconhecidos. Para as funções f_4 e f_5 não é possível fazer a comparação entre os valores exatos e os calculados pelo método linear pois não todas as singularidades foram detectadadas. Feitas estas considerações, os erros de aproximação correspondentes às funções anteriormente definidas são:

$$Epi(f_1) = 5.2446e - 004 \qquad Esi(f_1) = 0.1405$$

$$Epl(f_1) = 0.0055 \qquad Esl(f_1) = 0.4274$$

$$Epi(f_2) = 5.5302e - 004 \qquad Esi(f_2) = 0.3364$$

$Epl(f_2) = 0.0054$ $\qquad$ $Esl(f_2) = 0.8728$

$Epi(f_3) = 4.8322e - 004$ $\qquad$ $Esi(f_3) = 0.0515$

$Epl(f_3) = 0.0071$ $\qquad$ $Esl(f_3) = 0.3871$

$Epi(f_4) = 0.0036$ $\qquad$ $Esi(f_4) = 0.3757$

$Epi(f_5) = 0.0028$ $\qquad$ $Esi(f_5) = 0.2515$

Em todos os casos em que algum tipo de comparação pode ser estabelecida, isto é, para f_1, f_2 e f_3, o desempenho do nosso método é superior ao do método linear, tanto na detecção das descontinuidades quanto nas aproximações das amplitudes dos saltos. Mais detalhes podem se observados nas tabelas seguintes. Estas correspondem às aproximações para os pontos e para as amplitudes dos saltos calculadas pelos dois algoritmos para as funções anteriores. Posteriormente exibem-se os gráficos que permitem comparar visualmente o desempenho de nosso método para detectar pontos de descontinuidade a partir de um número finito de coeficientes de Fourier, com o método linear, já com a amplificação de escalas proposta por Gelb e Tadmor.

Os dois métodos de detecção de descontinuidade também foram testados adicionando ruido aleatorio nos dados espectrais. As figuras 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11 ilustram este fato. As percentagens referem-se à média do ruído com respecto à média dos coeficientes. *Observa-se que o desempenho de nosso método é significativamente melhor. Para quase todos os exemplos testados é possível afirmar que o "método linear"não consegue dar nenhuma informação sobre a localização dos pontos quando os dados são perturbados com ruido aleatorio, no entanto nosso método é robusto.* Isto também pode ser observado nas figuras. Em todos os casos o número de pontos detectados que não correspondem a pontos de descontinuidade da função original é mínimo. Somente para as funções f_4 e f_5 um ponto de descontinuidade em cada caso não consegue ser localizado, isto é devido a que a amplitude do salto nesses pontos é muito pequena em relação aos outros pontos.

Pontos de Desc. Exatos	0	0.1000	0.2000	0.5100	0.8000	0.9200
Aprox. pontos Mét. Inicial	0.0003	0.1003	0.1998	0.5099	0.7999	0.9198
Aprox. pontos. Mét. Linear	0	0.1016	0.2031	0.5078	0.7969	0.9219
Amplitude Exata do salto	-2.0000	1.0000	-0.5000	1.0000	-1.5000	2.0000
Aprox. amplitude Mét. Inicial	-2.0043	1.0175	-0.4527	0.9519	-1.4148	2.0872
Aprox. amplitude Mét. Linear	-1.9236	0.9009	-0.3841	0.8914	-1.1523	1.8556

Tabela 5.1: Tabela comparativa que mostra as aproximações para os pontos de descontinuidades e as amplitudes dos saltos usando o Método Linear e o Método Inicial para a função f_1.

Pontos de Desc. Exatos	0.1000	0.2000	0.2500	0.6000	0.8500	1.0000
Aprox. pontos Mét. Inicial	0.1002	0.2001	0.2505	0.6000	0.8501	0.9999
Aprox. pontos. Mét. Linear	0.1016	0.1953	0.2500	0.6016	0.8516	1.0000
Amplitude Exata do salto	-0.3000	1.0000	-1.7500	5.4000	-9.3500	6.0000
Aprox. amplitude Mét. Inicial	-0.3592	0.9864	-1.7130	5.6507	-9.5484	5.9232
Aprox. amplitude Mét. Linear	-0.3078	0.4556	-1.6783	5.1100	-8.7381	6.0420

Tabela 5.2: Tabela comparativa que mostra as aproximações para os pontos de descontinuidades e as amplitudes dos saltos usando o Método Linear e o Método Inicial para a função f_2.

Pontos de Desc. Exatos	0.4800	0.7400	1.0000
Aprox. pontos Mét. Inicial	0.4804	0.7397	1.0000
Aprox. pontos. Mét. Linear	0.4844	0.7344	1.0000
Amplitude Exata do salto	0.1676	-0.5576	0.7500
Aprox. amplitude Mét. Inicial	0.1235	-0.5340	0.7622
Aprox. amplitude Mét. Linear	0.0970	-0.1770	0.7569

Tabela 5.3: Tabela comparativa que mostra as aproximações para os pontos de descontinuidades e as amplitudes dos saltos usando o Método Linear e o Método Inicial para a função f_3.

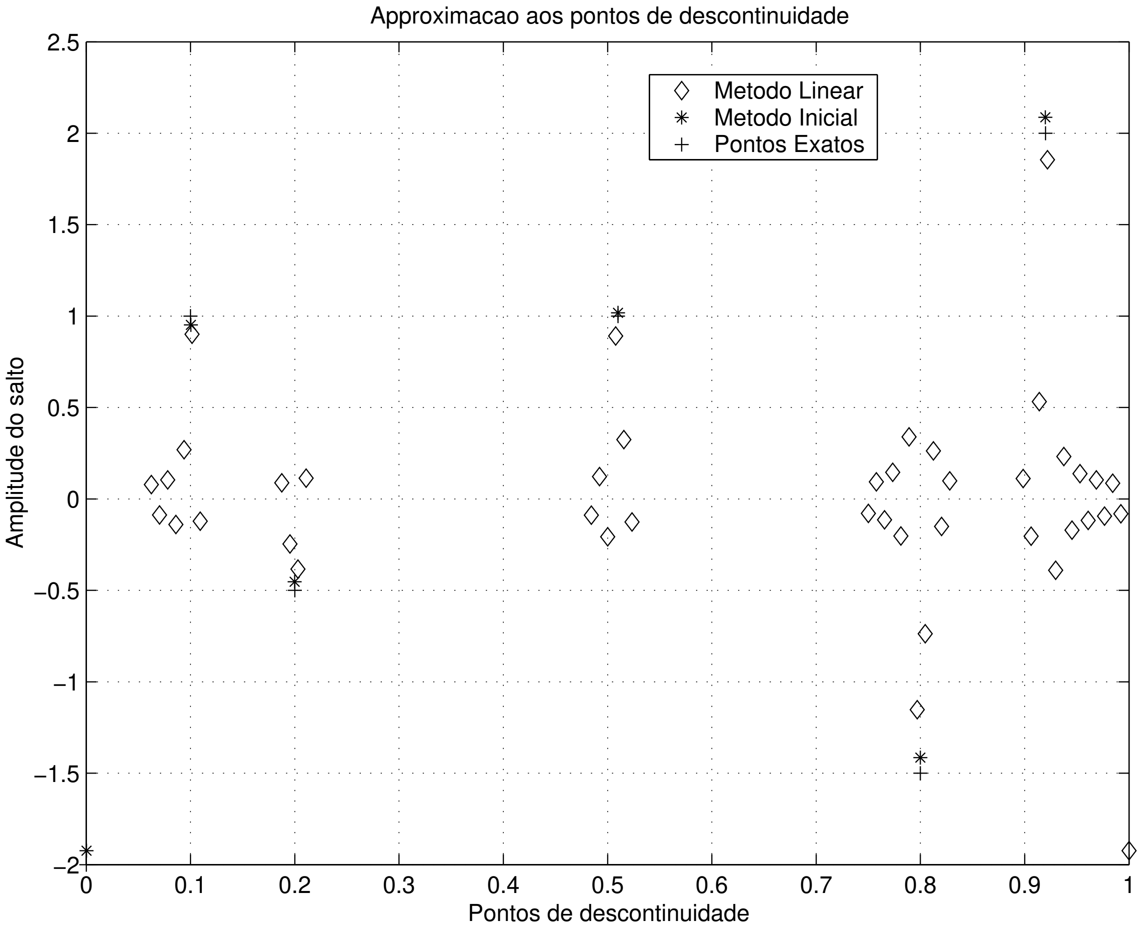


Figura 5.2: Gráfico comparativo das aproximações dos pontos de descontinuidade e das amplitudes dos saltos usando o "Método Linear"e o "Método Inicial"para a função f_1 . Observe-se o o grande número de pontos fictícios detectado pelo método Linear.

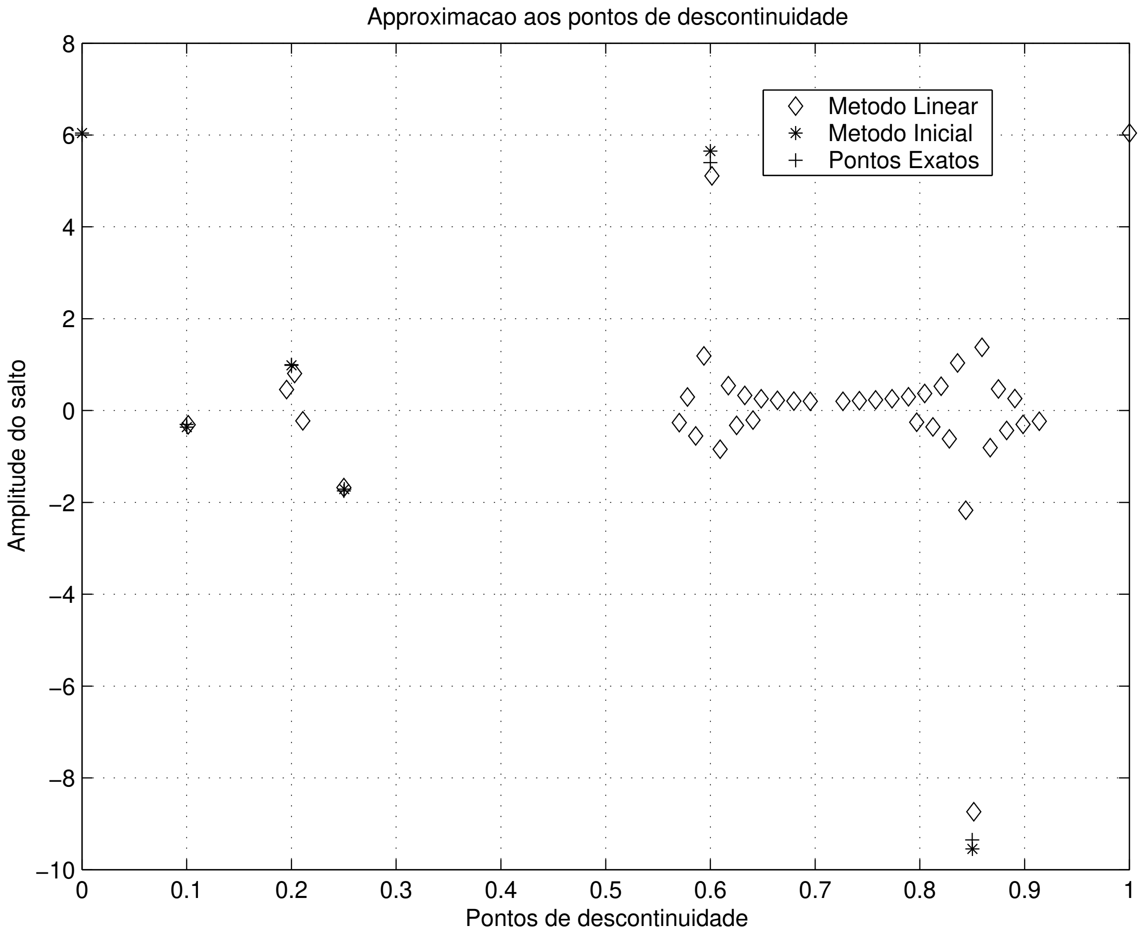


Figura 5.3: Gráfico comparativo das aproximações dos pontos de descontinuidade e das amplitudes dos saltos usando o "Método Linear"e o "Método Inicial"para a função f_2 . Observe-se o o grande número de pontos fictícios detectado pelo método Linear.

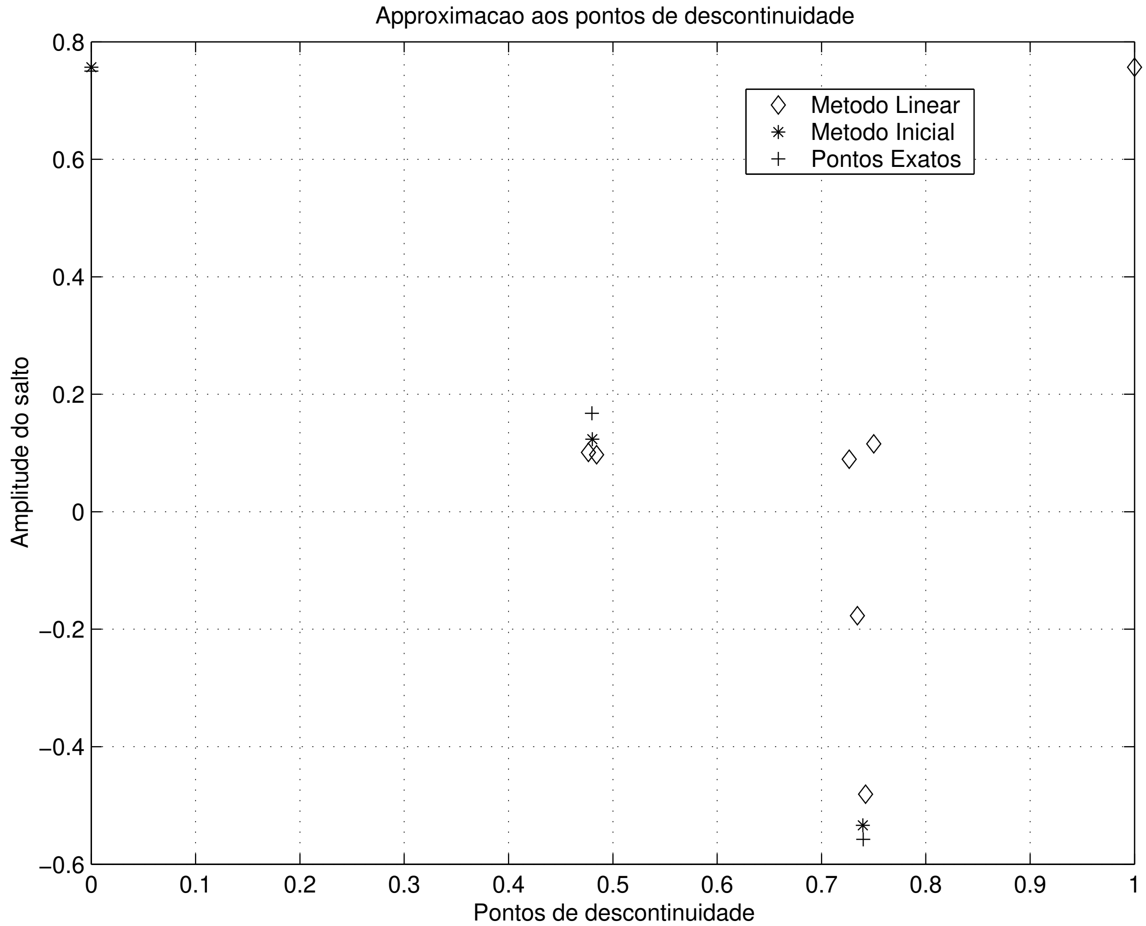


Figura 5.4: Gráfico comparativo das aproximações dos pontos de descontinuidade e das amplitudes dos saltos usando o "Método Linear"e o "Método Inicial"para a função f_3 .

Pontos de Desc. Exatos	0.2900	0.3300	0.8700	0.9200	1.0000
Aprox. pontos. Mét. Inicial	0.2874	0.3300	0.8701	0.9215	0.0020
Aprox. pontos. Mét. Linear	0.2969	0.3281	0.8672	0.9531	
Amplitude Exata do salto	-0.4263	3.0000	-4.0000	1.0000	0.1000
Aprox. amplitude Mét. Inicial	-0.6953	3.0907	-3.9149	0.7691	0.1045
Aprox. amplitude Mét. Linear	0.0911	2.7110	-3.1704	-2.5255	

Tabela 5.4: Tabela comparativa que mostra as aproximações para os pontos de descontinuidades e as amplitudes dos saltos usando o Método Linear e o Método Inicial para a função f_4.

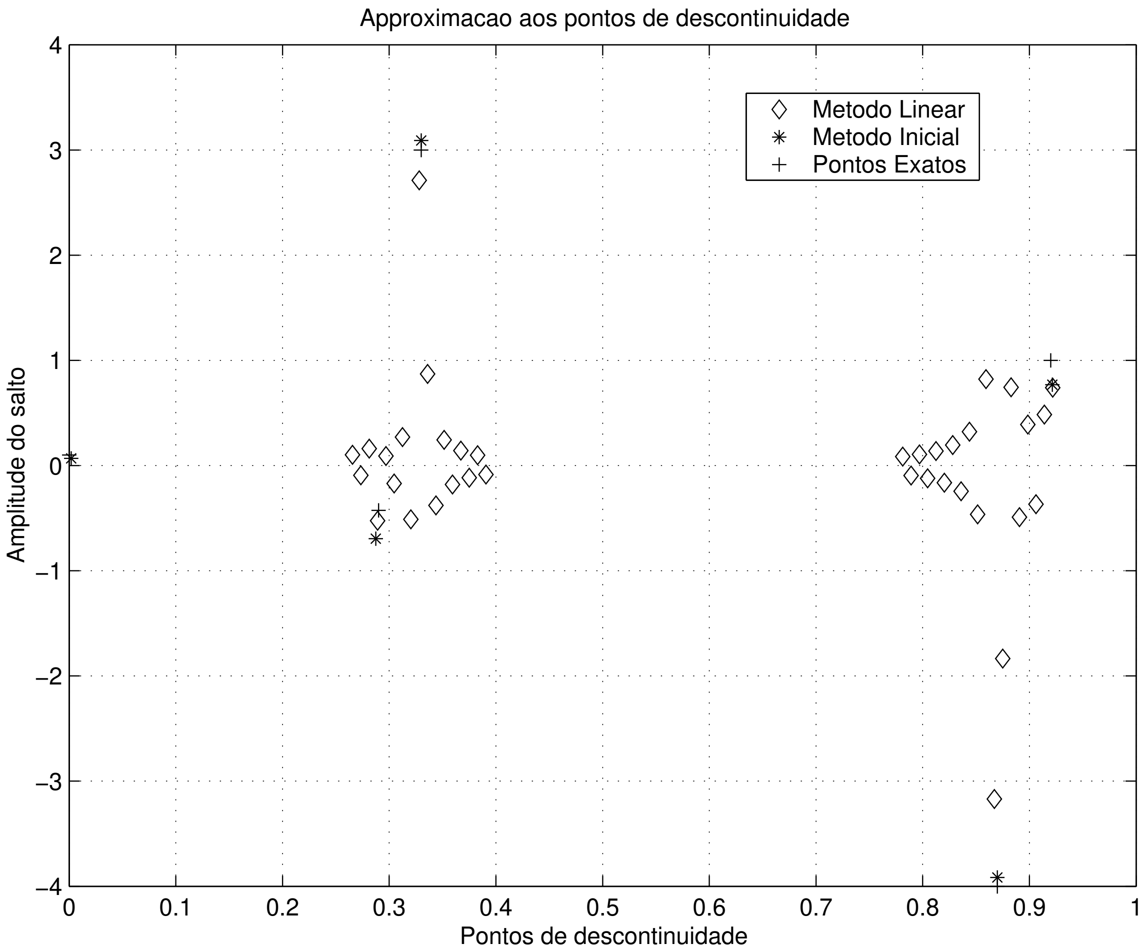


Figura 5.5: Gráfico comparativo das aproximações dos pontos de descontinuidade e das amplitudes dos saltos usando o "Método Linear"e o "Método Inicial"para a função f_4 . Observe-se o o grande número de pontos fictícios detectado pelo método Linear.

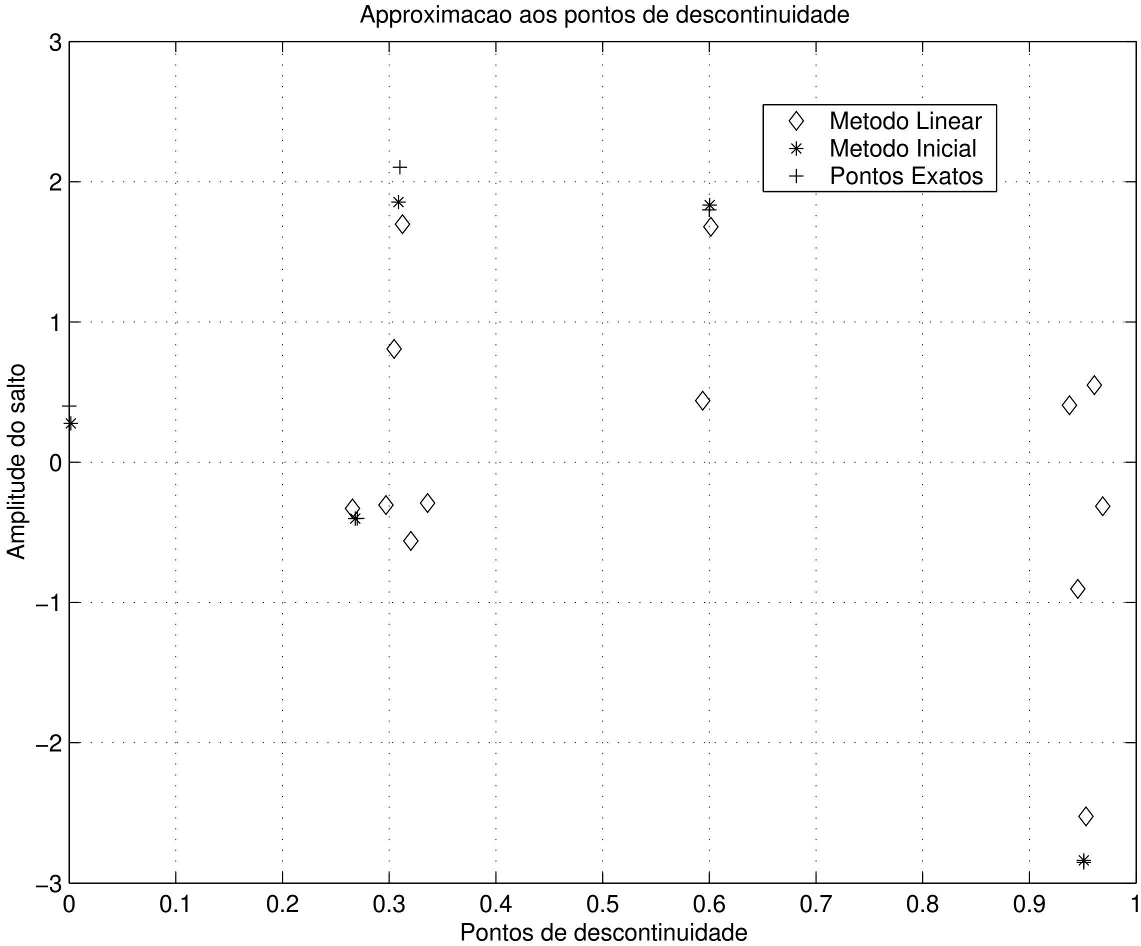


Figura 5.6: Gráfico comparativo das aproximações dos pontos de descontinuidade e das amplitudes dos saltos usando o "Método Linear"e o "Método Inicial"para a função f_5.

Pontos de Desc. Exatos	0.2700	0.3100	0.6000	0.9510	1.0000
Aprox. pontos. Mét. Inicial	0.2682	0.3086	0.6003	0.9509	0.0016
Aprox. pontos. Mét. Linear		0.2656	0.3047	0.5938	0.9531
Amplitude Exata do salto	-0.4000	2.1025	1.8000	-2.8530	0.4000
Aprox. amplitude Mét. Inicial	-0.4018	1.8545	1.8335	-2.8393	0.4204
Aprox. amplitude Mét. Linear		-0.3295	0.8082	0.4383	-2.5255

Tabela 5.5: Tabela comparativa que mostra as aproximações para os pontos de descontinuidades e as amplitudes dos saltos usando o Método Linear e o Método Inicial para a função f_5.

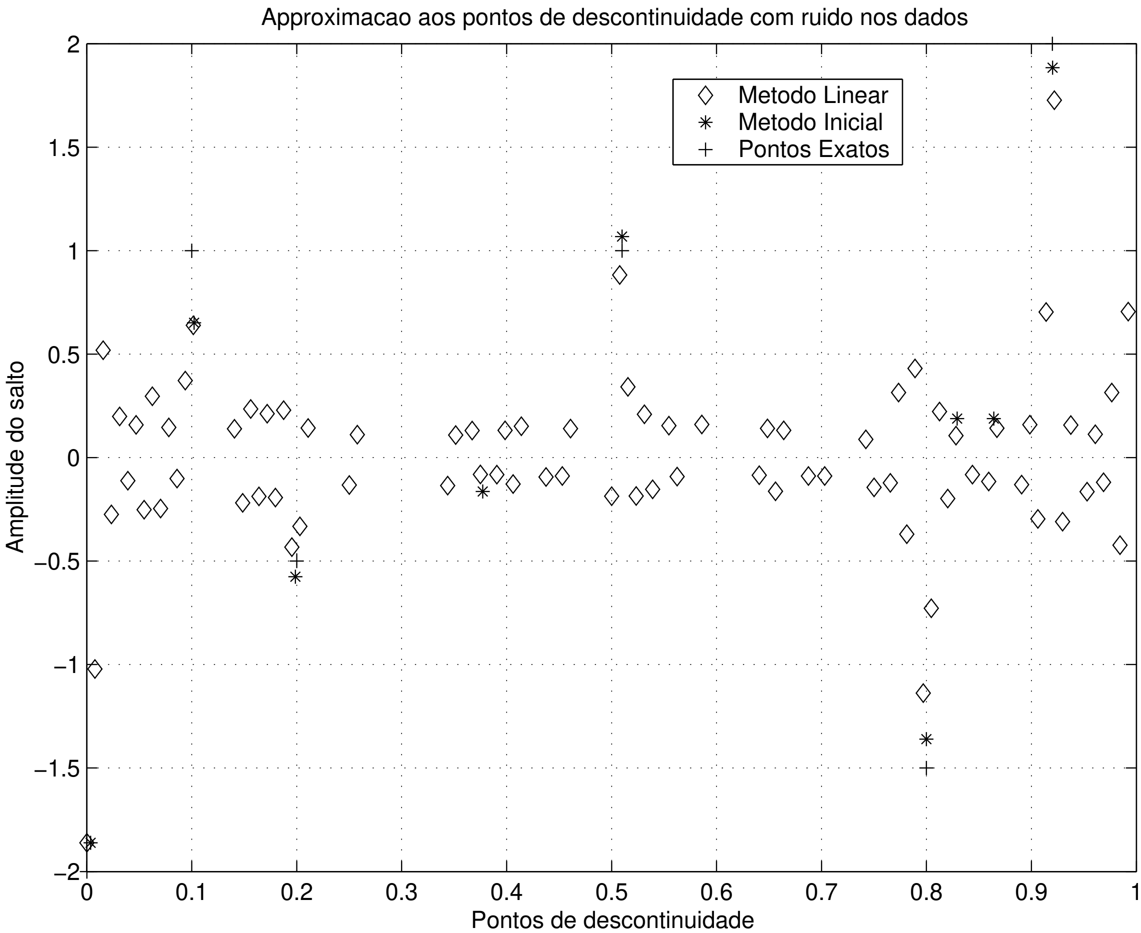


Figura 5.7: Aproximação inicial aos pontos de descontinuidade da função f_1 com 24.4% de ruido aleatorio nos dados. Observe-se a quantidade de pontos singulares fictícios detectados por o "Método Linear", isto significa que não consegue detectar pontos de descontinuidade na presença de ruído nos dados.

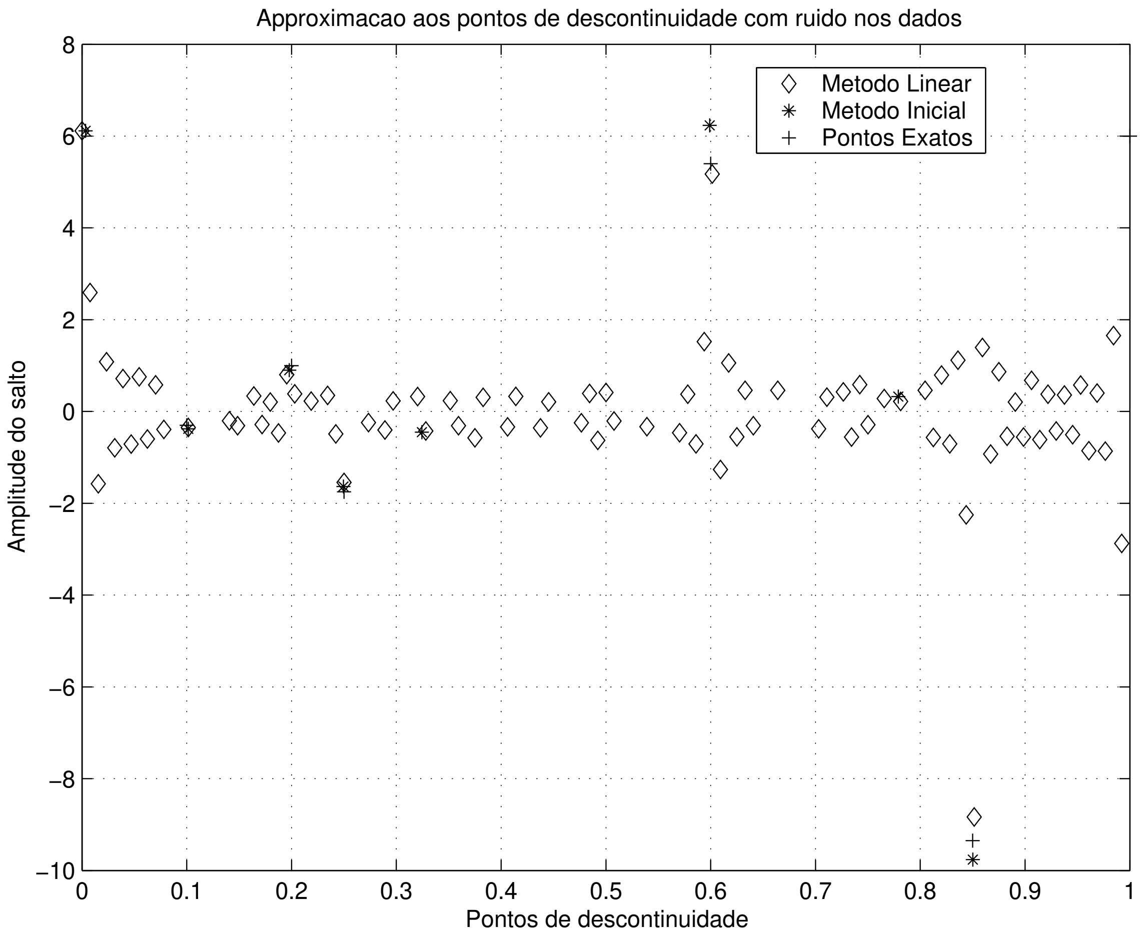


Figura 5.8: Aproximação inicial aos pontos de descontinuidade da função f_2 com 22.5% de ruido aleatorio nos dados. Observe-se a quantidade de pontos singulares fictícios detectados por o "Método Linear".

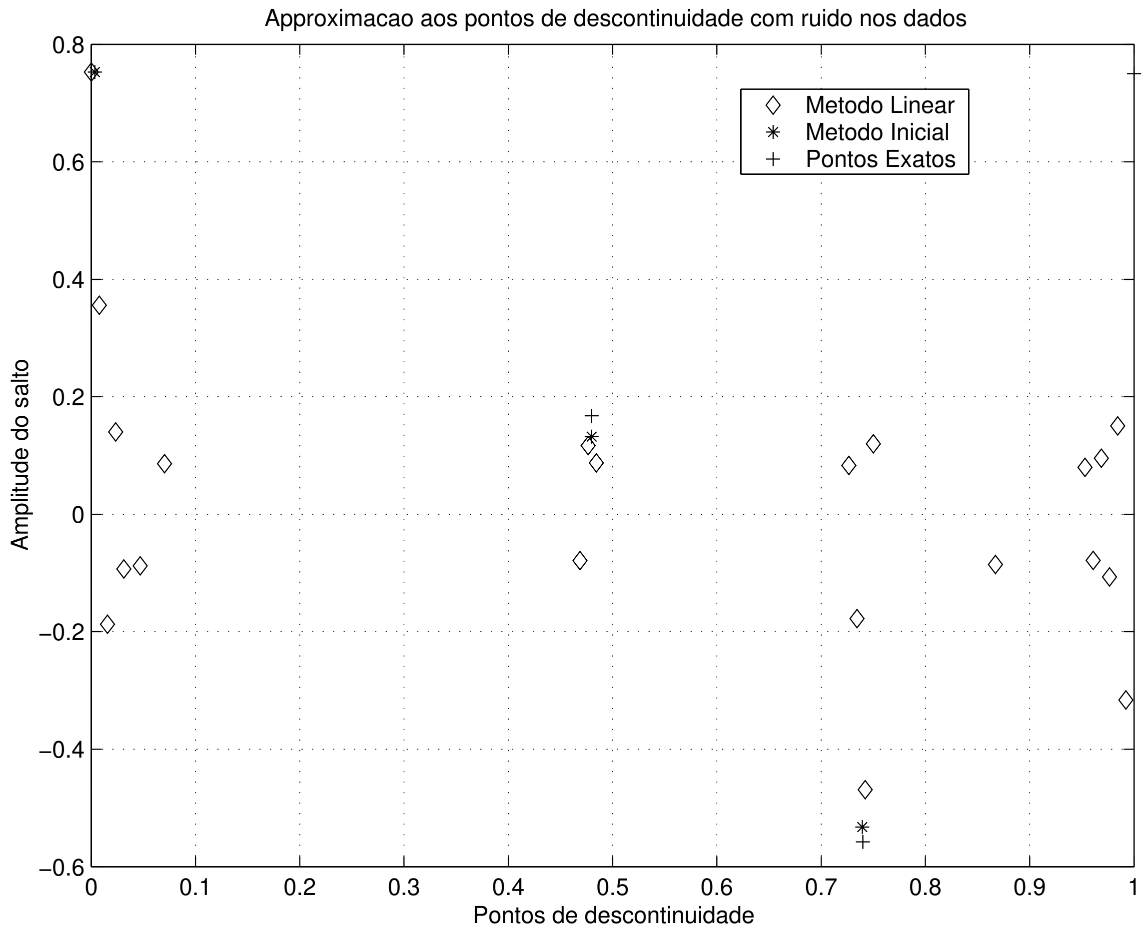


Figura 5.9: Aproximação inicial aos pontos de descontinuidade da função f_3 com 21% de ruido aleatorio nos dados.

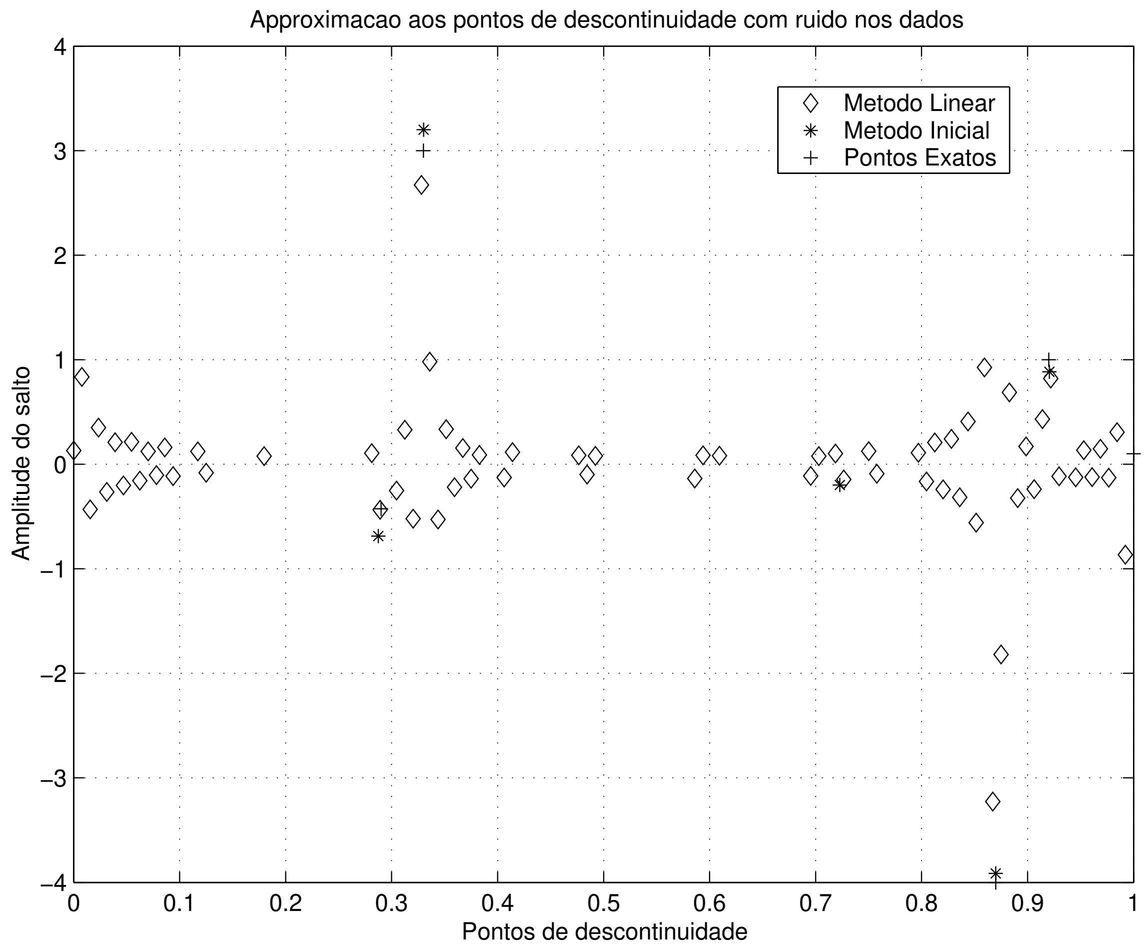


Figura 5.10: Aproximação inicial aos pontos de descontinuidade da função f_4 com 11.4% de ruido aleatorio nos dados.

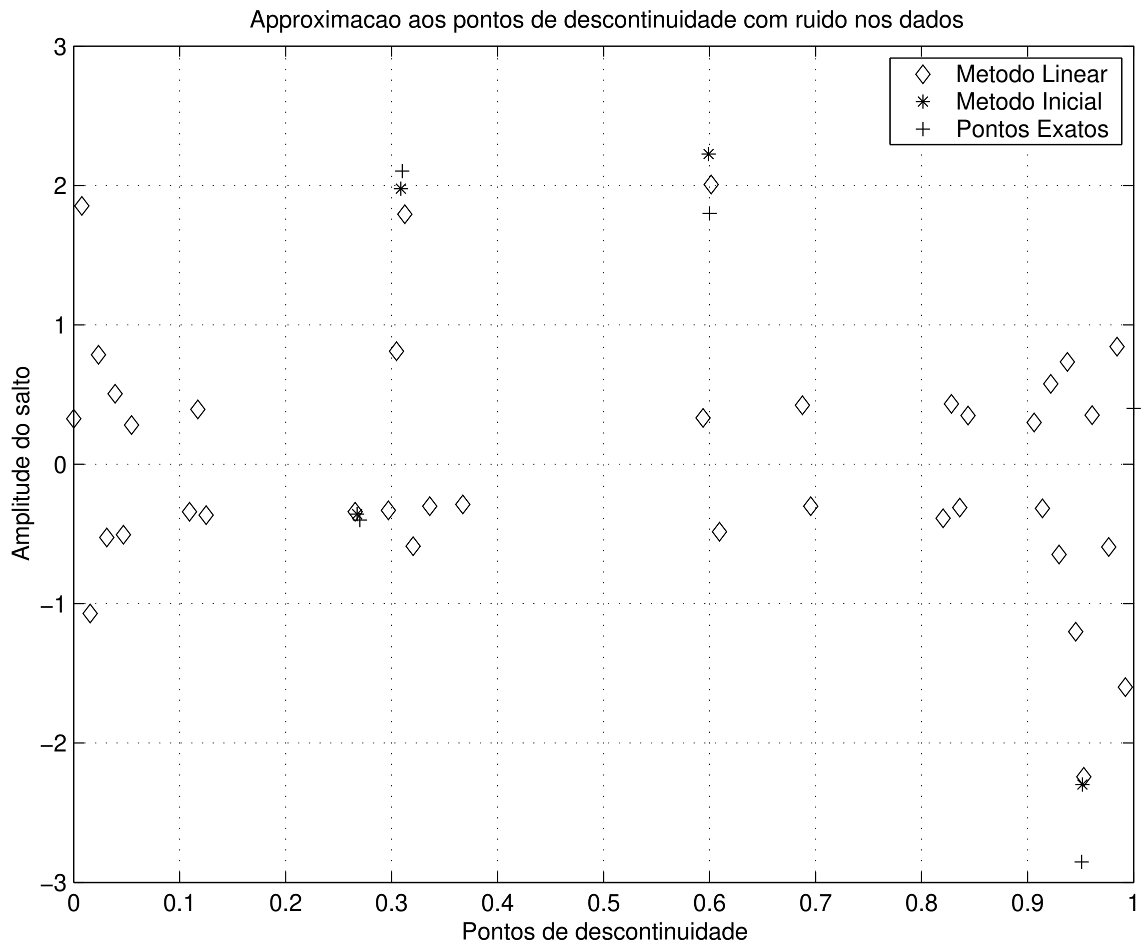


Figura 5.11: Aproximação inicial aos pontos de descontinuidade da função f_5 com 28.2% de ruido aleatorio nos dados.

Capítulo 6

Métodos Iterativos

6.1 Métodos Iterativos de Reconstrução

O objetivo deste capítulo é desenvolver métodos iterativos que melhorem tanto as aproximações iniciais obtidas anteriormente para os pontos de descontinuidade da função, quanto os valores pontuais reconstruídos.

6.1.1 Método de grau zero

A modo de introdução e para clarificar o desenvolvido nas seções seguintes, apresenta-se o método iterativo de grau zero, exposto já em [20]. Sejam $\bar{w} = \{{w_l}^{(m)}\}_{l=1}^{L}$ aproximações aos pontos de descontinuidade da função $f(x)$ dados por $\bar{z} = \{z_l\}_{l=1}^{L}$. Continua-se denotando por x_{q_l} o ponto da malha uniforme mais próximo a z_l, para $l = 1, \dots, L$.

Sejam $\{{g_0}^{(m)}, {g_1}^{(m)}, \dots, {g_{N-1}}^{(m)}\}$ os valores discretos reconstruídos da função usando a fórmula de grau zero, mas com ${w_l}^{(m)}$ no lugar de z_l, isto é:

$$\tilde{g}_k^{(m)} = \sigma_k^{(0)} \ (\hat{f}_k + \sum_{l=1}^{L} [g_l^{(m)}] \ A_k^{(0)}(w_l^{(m)})),$$

onde $[g_l^{(m)}] = {g_{q_l}}^{(m)} - {g_{q_{l-1}}}^{(m)}$ corresponde à aproximação ao salto.
Define-se ,

$$G0(w_1^{(m)}, \dots, w_L^{(m)}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0, j\neq q_l}^{N-1} \left(\ g_j^{(m)} - g_{j-1}^{(m)} \ \right)^2.$$

Observe-se que esta é uma função diferenciável com respeito a $\bar{w}^{(m)}$.

No Teorema 2 do trabalho [19] mostra-se que para $w_l \neq z_l$, para algum l, na diferença de ordem 1 dos valores reconstruidos g_j, é ainda possível observar a presença do Fenômeno de Gibbs, sendo que as oscilações, como é de se esperar, dependem da distância existente entre w_l *e* z_l. Mostra-se além do mais que quando $w_l \rightarrow z_l$, $\forall l$, então $|{g_j}^{(m)} - f_j| \rightarrow O(\frac{1}{N^2}(ln(N) + {d_j}^{-1})$. Assim é possível melhorar as aproximações obtidas para os pontos singulares através de um processo iterativo baseado na função $G0(\bar{w})$, pois isto garante que ela é monótona decrescente quando $\bar{w}^{(m)} \rightarrow \bar{z}$. Logo a seqüência de aproximações ${w_l}^{(m)}$ é gerada na seguinte forma: $\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)} + y$ onde o vetor y é solução de $\nabla^2\ G0y = -\nabla G0$, onde $\nabla^2\ G0$ corresponde à matriz Hessiana de $G0$ e $\nabla G0$ ao gradiente da função $G0$.

Assim as atualizações das aproximações resultam então de minimizar as somas dos quadrados das diferenças de ordem 1 dos $\{{g_j}^{(m)}\}$, usando para isto o método de Newton puro, isto é, sem busca linear. O processo iterativo é continuado até a diferença entre dois iterados consecutivos ser menor que uma tolerância prefixada.

6.2 Métodos de ordem superior

Deduzir as correspondentes expressões assintóticas para as diferenças dos valores reconstruidos para o caso dos métodos de ordem superior, resulta em formulações complicadas demais, mas nestes casos também é razoável esperar comportamentos similares ao do caso anterior, usando agora as diferenças de ordem 2 para o método de grau 1 e de ordem 3 para o método de grau 2.

6.2.1 Método de grau 1

Os valores reconstruidos pelo método no domínio da feqüência são dados por,

$$\tilde{g_k} = \sigma_k^{(1)} \hat{f}_k - \sum_{l=1}^{L} [f](z_l)(\sigma_k^{(1)} \hat{A}^1_{k,z_l} - \tilde{A}^1_{k,z_l}),$$

mas se contamos com $\bar{w}^{(m)}$ no lugar de $\bar{z}^{(m)}$ teremos,

$$\tilde{g}_k^{(m)} = \sigma_k^{(1)} \hat{f}_k - \sum_{l=1}^{L} [g](w_l)(\sigma_k^{(1)} \hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^1_{k,w_l^{(m)}}),$$

onde $[g](w_l) = g_{q_l}^{(m)+} - g_{q_l}^{(m)-}$ será denotado por $x_l^{(0)}$, e como já foi mostrado no capítulo 4 é obtido através da resolução do seguinte sistema linear,

$$\sigma_k^{(1)}\ \hat{f}_k - \sigma_{k+N}^{(1)}\ \hat{f}_{k+N} = \sum_{l=1}^{L} (\sigma_k^{(1)}\ \hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}} - \sigma_{k+N}^{(1)}\ \hat{A}^1_{k+N,w_l^{(m)}})\ x_l^{(0)}, \quad k = k_1, \dots, k_L. \tag{6.1}$$

Portanto, uma vez determinados os $x_l^{(0)}$, as aproximações aos valores pontuais de f podem-se expressar como:

$$g_j = f_j^{(1)} - \sum_{l=1}^{L} x_l^{(0)} a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)}),$$

onde $f_j^{(1)} = IFFT_j\ (\sigma_k^{(1)} \hat{f}_k)$, e $a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)}) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(1)} \hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^1_{k,w_l^{(m)}})$.

Neste caso a função objetivo a ser definida e minimizada corresponde a:

$$H0(w_1^{(m)}, \ldots, w_L^{(m)}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0, j \neq q_l+1, q_l, q_l-1}^{N-2} (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)})^2.$$

$H0(\bar{w}^{(m)})$ é também uma função monótona decrescente que converge para zero quando $\bar{w}^{(m)} \to \bar{z}$ com uma taxa da ordem $O(\frac{ln(N)^2}{N^3})$.

De maneira análoga à seção anterior, a seqüência de aproximações ${w_l}^{(m)}$ é gerada na seguinte forma: $\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)} + y$ onde y é solução do sistema linear $\nabla^2\ H0y = -\nabla H0$, e como anteriormente $\nabla^2\ H0$ corresponde à matríz Hessiana de $H0$ e $\nabla H0$ ao gradiente de $H0$. O cálculo do gradiente e da Hessiana é imediato,

$$H0(w_1^{(m}, \ldots, w_L^{(m)}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq q_l, q_l-1}^{N-2} (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)})^2.$$

$$H1(p) = \sum_{j=1, j \neq q_l, q_l-1}^{N-2} (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)})\ \frac{\partial}{\partial w_p}\ (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}).$$

$$H2(p,s) = \sum_{j=1, j \neq q_l, q_l-1}^{N-2} [\ (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)})\ \frac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p} (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial w_p}\ (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)})\ \frac{\partial}{\partial w_s}\ (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)})\ ],$$

mas é preciso determinar os valores de,

$$\frac{\partial}{\partial w_p}\ (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}),\ e\ de\ \ \frac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p} (g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}).$$

Para calcular as derivadas de primeira ordem considera-se,

$$g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)} = f_{j+1}^{(1)} - 2f_j^{(1)} + f_{j-1}^{(1)} - \sum_{l=1}^{L} [\ a_{j+1,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) - 2a_{j,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) + a_{j-1,l}^{(1)}(w_l^{(m)})]\ x_l^{(0)}$$

Derivando esta expressão obtemos que,

$$\frac{\partial}{\partial w_p}(g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}) = -[\ a_{j+1,p}{}^{(1)'}(w_p{}^{(m)}) - 2a_{j,p}{}^{(1)'}(w_p{}^{(m)}) + a_{j-1,p}{}^{(1)'}(w_p{}^{(m)})]\ x_p^{(0)} -$$
$$-\sum_{l=1}^{L}[\ a_{j+1,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) - 2a_{j,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) + a_{j-1,l}^{(1)}(w_l^{(m)})]\ x_l{}^{(1,p)},$$

onde $x_l{}^{(1,p)} = \dfrac{\partial x_l^{(0)}}{\partial w_p} = \dfrac{\partial}{\partial w_p}(g_{q_l}^{(m)+} - g_{q_l}^{(m)-})$ $l, p = 1, \ldots, L$ resultam de resolver o sistema obtido ao derivar a equação (6.1):

$$\sum_{l=1}^{L} d_k^{(1)}(w_l^{(m)})\ x_l{}^{(1,p)} = -d_k^{(1)'}(w_l^{(m)})\ x_p^{(0)}, \quad k = k_1, \ldots, k_L, \tag{6.2}$$

onde $d_k^{(1)}(w_l^{(m)})$ é dado por $d_k^{(1)}(w_l^{(m)}) = \sigma_k^{(1)}\ \hat{A}_{k,w_l^{(m)}} - \sigma_{k+N}^{(1)}\ \hat{A}_{k+N,w_l^{(m)}}$.

Para calcular as derivadas de segunda ordem será preciso determinar $x_l^{(2,p,s)} = \dfrac{\partial x_l{}^{(1,p)}}{\partial w_s} = \dfrac{\partial^2 x_l^{(0)}}{\partial w_s \partial w_p}$, através do sistema que resulta ao derivar (6.2) com respeito a w_s:,

$$\sum_{l=1}^{L} d_k^{(1)}(w_l^{(m)})\ x_l{}^{(2,p,s)} = -d_k^{(1)'}(w_s^{(m)})\ x_s^{(1,p)} - \delta_{p,s} d_k^{(1)''}(w_p^{(m)})\ x_p^{(0)}, \quad k = k_1, \ldots, k_L, \tag{6.3}$$

Uma vez determinados estes valores obtém-se,

$$\frac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p}(g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}) = -\delta_{p,s} c2''_{j,p}(w_p^{(m)}) x_p^{(0)} - \sum_{l=1}^{L}\ c2_{j,l}(w_l^{(m)}) x_l{}^{(2,p,s)} + c2'_{j,s}(w_s^{(m)}) x_s{}^{(1,p)},$$

onde, $c2_{j,l}(w_l^{(m)}) = [\ a_{j+1,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) - 2a_{j,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) + a_{j-1,l}^{(1)}(w_l^{(m)})]$.

No algoritmo seguinte descreve-se o correspondente método iterativo.

Algoritmo

Dados $\hat{f}_k$ e $\bar{w}^{(m)} = (w_1^{(m)}, w_2^{(m)}, \ldots, w_L^{(m)})$ uma aproximação dos pontos de descontinuidade da função f , fazer:

Passo 1: Achar $x_l^{(0)}$ através da resolução do sistema linear (6.1).

Passo 2: Calcular $f_j^{(1)} = IFFT_j\ (\sigma_k^{(1)} \hat{f}_k)$, e

$$a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)}) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(1)} \hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^1_{k,w_l^{(m)}}),$$

para obter,

$$g_j^{(m)} = f_j^{(1)} - \textstyle\sum_{l=1}^{L}\ x_l^{(0)} a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)}).$$

Passo 3: Calcular $d_k^{(1)}(w_l^{(m)})$, $d_k^{(1)'}(w_l^{(m)})$, $d_k^{(1)''}(w_l^{(m)})$ para obter $x_l^{(1,p)}$ e $x_l^{(2,p,s)}$ através da resolução dos sistemas lineares (6.2) e (6.3) respectivamente. Determinar:

$$\frac{\partial}{\partial w_p}(g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}) = -c2'_{j,p}(w_p^{(m)})\ x_p^{(0)} - \sum_{l=1}^{L} c2_{j,l}(w_l^{(m)})\ x_l{}^{(1,p)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p}(g_{j+1}^{(m)} - 2g_j^{(m)} + g_{j-1}^{(m)}) = -\delta_{p,s} c2''_{j,p}(w_p^{(m)}) x_p^{(0)} - \sum_{l=1}^{L}\ c2_{j,l}(w_l^{(m)}) x_l{}^{(2,p,s)} + c2'_{j,s}(w_s^{(m)}) x_s{}^{(1,p)},$$

com $c2_{j,l}(w_l^{(m)}) = [\ a_{j+1,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) - 2a_{j,l}^{(1)}(w_l^{(m)}) + a_{j-1,l}^{(1)}(w_l^{(m)})]$.

Com estes valores determinar $\nabla H0(p)$ e $\nabla^2 H0(p,s)$, $p, s = 1, 2, \ldots, L$.

Passo 4: Resolver o sistema linear $\nabla^2 H0\ y = -\nabla H0$. Se $|y| > tol$, definir $\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)} + y$ e voltar ao **passo 2**, em caso contrário finalizar com $\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)}$.

6.2.2 Método de grau 2

Segundo o que foi desenvolvido na Seção 3.2.3, os valores reconstruídos pelo método de grau 2 no domínio da feqüência são dados por

$$\tilde{g}_k = \sigma_k^{(2)} \hat{f}_k - \sum_{l=1}^{L}\ [f](z_l)(\sigma_k^{(2)} \hat{A}^2_{k,z_l} - \tilde{A}^2_{k,z_l}) + [f'](z_l)(\sigma_k^{(2)} \hat{A}^1_{k,z_l} - \tilde{A}^1_{k,z_l}),$$

mas se contamos com $\bar{w}^{(m)}$ no lugar de $\bar{z}^{(m)}$ teremos então,

$$\tilde{g}_k^{(m)} = \sigma_k^{(2)} \hat{f}_k - \sum_{l=1}^{L}\ [g](w_l)(\sigma_k^{(2)} \hat{A}^2_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^2_{k,w_l^{(m)}}) + [g'](w_l)(\sigma_k^{(2)} \hat{A}^1_{k,z_l} - \tilde{A}^1_{k,z_l}),$$

onde $[g](w_l) = g_{q_l}^{(m)+} - g_{q_l}^{(m)-}$ e $[g'](w_l) = g'^{(m)+}_{q_l} - g'^{(m)-}_{q_l}$ serão denotados por $x_l^{(0)}$, e $y_l^{(0)}$, respectivamente. Estes $2L$ valores podem ser obtidos através da resolução do seguinte sistema linear,

$$\sigma^{(2)}_{k+N}\ \hat{f}_{k+N} - \sigma^{(2)}_{k}\ \hat{f}_{k} \;=\; \sum_{l=1}^{L} (\ \sigma^{(2)}_{k+N}\ \hat{A}^2_{k+N,w_l^{(m)}} - \sigma^{(2)}_{k}\ \hat{A}^2_{k,w_l^{(m)}}\ )\ x_l^{(0)} + \qquad (6.4)$$
$$+(\ \sigma^{(2)}_{k+N}\ \hat{A}^1_{k+N,w_l^{(m)}} - \sigma^{(2)}_{k}\ \hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}}\ )\ y_l^{(0)}, \quad k = k_1, \ldots, k_{2L}.$$

Portanto,

$$g_j = f_j^{(2)} - \sum_{l=1}^{L}\ x_l^{(0)} a_{jl}^{(2)}(w_l^{(m)}) + y_l^{(0)} a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)}),$$

onde $f_j^{(2)} = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)}\hat{f}_k)$, $a_{jl}^{(2)}(w_l^{(m)}) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)}\hat{A}^2_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^2_{k,w_l^{(m)}})$, e $a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)}) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)}\hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^1_{k,w_l^{(m)}})$. Notar que $f_j^{(2)}$ é independente de $w_l^{(m)}$.

A função objetivo a ser minimizada neste caso corresponde a:

$$J0(w_1^{(m)}, \ldots, w_L^{(m)}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0, j\neq q_l+1, q_l, q_l-1, q_l-2}^{N-3} (g_{j+2}^{(m)} - 3g_{j+1}^{(m)} + 3g_j^{(m)} - g_{j-1}^{(m)})^2,$$

e as sucessivas atualizações dos $\bar{w}^{(m)}$ são dadas por: $\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)} + y$, sendo y solução do sistema linear $\nabla^2 J0\ y = -\nabla J0$.

Uma vez determinados os valores de $x_l^{(1,p)} = \dfrac{\partial}{\partial w_p}(g_{q_l}^{(m)+} - g_{q_l}^{(m)-})$ e de $y_l^{(1,p)} = \dfrac{\partial}{\partial w_p}(g_{q_l}^{'(m)+} - g_{q_l}^{'(m)-})$ através da resolução do sistema linear que resulta de derivar o anterior , isto é,

$$\sum_{l=1}^{L}\ d_k^{(2)}(w_l^{(m)})\ x_l^{(1,p)} + e_k^{(2)}(w_l^{(m)})\ y_l^{(1,p)} = -d_k^{(2)'}(w_p^{(m)})\ x_p^{(0)} - e_k^{(2)'}(w_p^{(m)})\ y_p^{(0)},$$
$$k = k_1, \ldots, k_{2L}, \quad p = 1, 2, \ldots, L, \qquad (6.5)$$

onde $d_k^{(2)}(w_l^{(m)}) = (\ \sigma^{(2)}_{k+N}\ \hat{A}^2_{k+N,w_l^{(m)}} - \sigma^{(2)}_{k}\ \hat{A}^2_{k,w_l^{(m)}}\ )$, $e_k^{(2)}(w_l^{(m)}) = (\ \sigma^{(2)}_{k+N}\ \hat{A}^1_{k+N,w_l^{(m)}} - \sigma^{(2)}_{k}\ \hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}}\ )$.

Logo é possível calcular $\dfrac{\partial}{\partial w_p}(g_{j+2}^{(m)} - 3g_{j+1}^{(m)} + 3g_j^{(m)} - g_{j-1}^{(m)})$ e $\dfrac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p}(g_{j+2}^{(m)} - 3g_{j+1}^{(m)} + 3g_j^{(m)} - g_{j-1}^{(m)})$, pois

$$\frac{\partial}{\partial w_p}(g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} + 3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1}) = -(\ p'_{j,p}(w^{(m)}_p)\ x^{(0)}_p + q_{j,p}(w^{(m)}_p)\ y^{(0)}_p\ ) -$$
$$-\sum_{l=1}^{L} p_{j,l}(w^{(m)}_l)x^{(1,p)}_l + q_{j,l}(w^{(m)}_l)\ y^{(1,p)}_l, \tag{6.6}$$

onde $p_{j,l}(w^{(m)}_l) = a^{(2)}_{j+2}(w^{(m)}_l) - 3a^{(2)}_{j+1}(w^{(m)}_l) + 3a^{(2)}_{j}(w^{(m)}_l) - a^{(2)}_{j-1}(w^{(m)}_l)$,

$q_{j,l}(w^{(m)}_l) = a^{(1)}_{j+2}(w^{(m)}_l) - 3a^{(1)}_{j+1}(w^{(m)}_l) + 3a^{(1)}_{j}(w^{(m)}_l) - a^{(1)}_{j-1}(w^{(m)}_l)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p}(g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} + 3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1}) = -\delta_{p,s}(\ p''_{j,p}(w^{(m)}_p)\ x^{(0)}_p + q''_{j,p}(w^{(m)}_p)\ y^{(0)}_p\ ) -$$
$$-\sum_{l=1}^{L} p_{j,l}(w^{(m)}_l)x^{(2,p,s)}_l + q_{j,l}(w^{(m)}_l)\ y^{(2,p,s)}_l + p'_{j,s}(w^{(m)}_s)x^{(1,p)}_s + q'_{j,s}(w^{(m)}_s)\ y^{(1,p)}_s, \tag{6.7}$$

onde $x^{(2,p,s)}_l = \dfrac{\partial^2 x^{(0)}_l}{\partial w_p w_s}$ e de $y^{(2,p,s)}_l = \dfrac{\partial^2 y^{(0)}_l}{\partial w_p w_s}$ são obtidos resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\sum_{l=1}^{L}\ d^{(2)}_k(w^{(m)}_l)\ x^{(2,p,s)}_l + e^{(2)}_k(w^{(m)}_l)\ y^{(2,p,s)}_l = -(d^{(2)'}_k(w^{(m)}_s)\ x^{(1,p)}_s + e^{(2)'}_k(w^{(m)}_s)\ y^{(1,p)}_s) -$$
$$-\delta_{p,s}(\ d^{(2)''}_k(w^{(m)}_p)\ x^{(0)}_p + e^{(2)''}_k(w^{(m)}_p)\ y^{(0)}_p), \tag{6.8}$$
$$k = k_1, \ldots, k_{2L}, \quad p, s = 1, 2, \ldots, L,$$

e com eles obtém-se o gradiente e a matriz hessiana, pois:

$$\nabla J0(p) = \sum_{j=0, j\neq q_l+1, q_l, q_l-1, q_l-2}^{N-3} (g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} + 3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1})\frac{\partial}{\partial w_p}(g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} + 3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1}),$$

$$\nabla^2 J0(p,s) = \sum_{j=0, j\neq q_l+1, q_l, q_l-1, q_l-2}^{N-3} (g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} + 3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1})\frac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p}(g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} +$$
$$+3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1}) + \frac{\partial}{\partial w_p}(g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} + 3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1})\frac{\partial}{\partial w_s}(g^{(m)}_{j+2} - 3g^{(m)}_{j+1} + 3g^{(m)}_{j} - g^{(m)}_{j-1}).$$

O algoritmo correspondente ao método iterativo de grau 2 é similar ao anterior.

Algoritmo

Dados $\hat{f}_k$ e $\bar{w}^{(m)} = (w_1^{(m)}, w_2^{(m)}, \ldots, w_L^{(m)})$ uma aproximação aos pontos de descontinuidade da função, fazer:

Passo 1: Achar $x_l^{(0)}$ e $y_l^{(0)}$ através da resolução do sistema linear (6.4).

Passo 2: Calcular $f_j^{(1)} = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)} \hat{f}_k)$,

$$a_{jl}^{(2)}(w_l^{(m)}) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)} \hat{A}^2_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^2_{k,w_l^{(m)}}),$$

$$a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)}) = IFFT_j\ (\sigma_k^{(2)} \hat{A}^1_{k,w_l^{(m)}} - \tilde{A}^1_{k,w_l^{(m)}}),$$

para obter, $g_j^{(m)} = f_j^{(2)} - \sum_{l=1}^{L}\ x_l^{(0)} a_{jl}^{(2)}(w_l^{(m)}) + y_l^{(0)} a_{jl}^{(1)}(w_l^{(m)})$.

Passo 3: Calcular $d_k^{(2)}(w_l^{(m)}),\ d_k^{(2)'}(w_l^{(m)}),\ d_k^{(2)''}(w_l^{(m)}), e_k^{(2)}(w_l^{(m)}),\ e_k^{(2)'}(w_l^{(m)}),\ e_k^{(2)''}(w_l^{(m)})$ para obter $x_l^{(1,p)}, y_l^{(1,p)}, x_l^{(2,p,s)}$ e $y_l^{(2,p,s)}$ através da resolução dos sistemas lineares (6.5) e (6.8) respectivamente. Determinar:

$$\frac{\partial}{\partial w_p}(g_{j+2}^{(m)} - 3g_{j+1}^{(m)} + 3g_j^{(m)} - g_{j-1}^{(m)}), \qquad \frac{\partial^2}{\partial w_s \partial w_p}(g_{j+2}^{(m)} - 3g_{j+1}^{(m)} + 3g_j^{(m)} - g_{j-1}^{(m)}),$$

através das equações (6.6) e (6.7) respectivamente. Com estes valores calcular $\nabla J0(p)$ e $\nabla^2 J0(p,s),\ p,s = 1,2,\ldots,L$.

Passo 4: Resolver o sistema linear $\nabla^2 J0\ y = -\nabla J0$. Se $|y| > tol$, definir $\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)} + y$ e voltar ao **Passo 2**, em caso contrário finalizar com $\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)}$.

Neste Capítulo desenvolvimos métodos iterativos baseados em cada um dos novos métodos de reconstrução deduzidos no Capítulo 3. Estes métodos iterativos tem a particularidade de melhorar as aproximações dos pontos de descontinuidade, das amplitudes dos saltos e portanto de construir aproximações de alta qualidade para os valores pontuais da função f. As experiências numéricas validando estas afirmações encontram-se no Capítulo seguinte.

Capítulo 7

Experiências Numéricas

7.1 Experiências Numéricas

Neste capítulo apresentam-se os resultados numéricos obtidos através da implementação dos algoritmos de reconstrução definidos nos capítulos anteriores afim de avaliar seu desempenho. Todas as rotinas foram programadas em MATLAB. Os métodos iterativos de grau 1 e 2 do capítulo 6 foram testados para uma grande variedade de funções. Em ambos os casos os métodos foram inicializados usando como aproximação das descontinuidades os pontos iniciais obtidos do algoritmo apresentado no capítulo 5.

Para ilustrar o comportamento destes métodos iterativos será suficiente mostrar o desempenho de cada um deles para as funções consideradas no capítulo 5, isto é, $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ e $f_5(x)$.

Como pode ser observado na Figura 7.1, f_1 corresponde a uma função que é constante por partes, f_2 é linear por partes, f_5 é quadrática por partes e por último f_3 *e* f_4 representam funções gerais. f_3 é composta por uma parte trigonométrica e uma outra polinômial, e f_4 tem uma parte exponencial e o resto constante por partes.

Nas Figuras 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 e 7.6 mostram-se para cada função os gráficos da função exata, da função reconstruída usando os algoritmos correspondentes aos métodos iterativos de grau 1 e grau 2 já definidos no capítulo 6. Também mostra-se o logaritmo na base 10 do erro pontual de reconstrução para cada um desses algoritmos .

Nas Figuras observa-se a maior precisão obtida através do método iterativo de

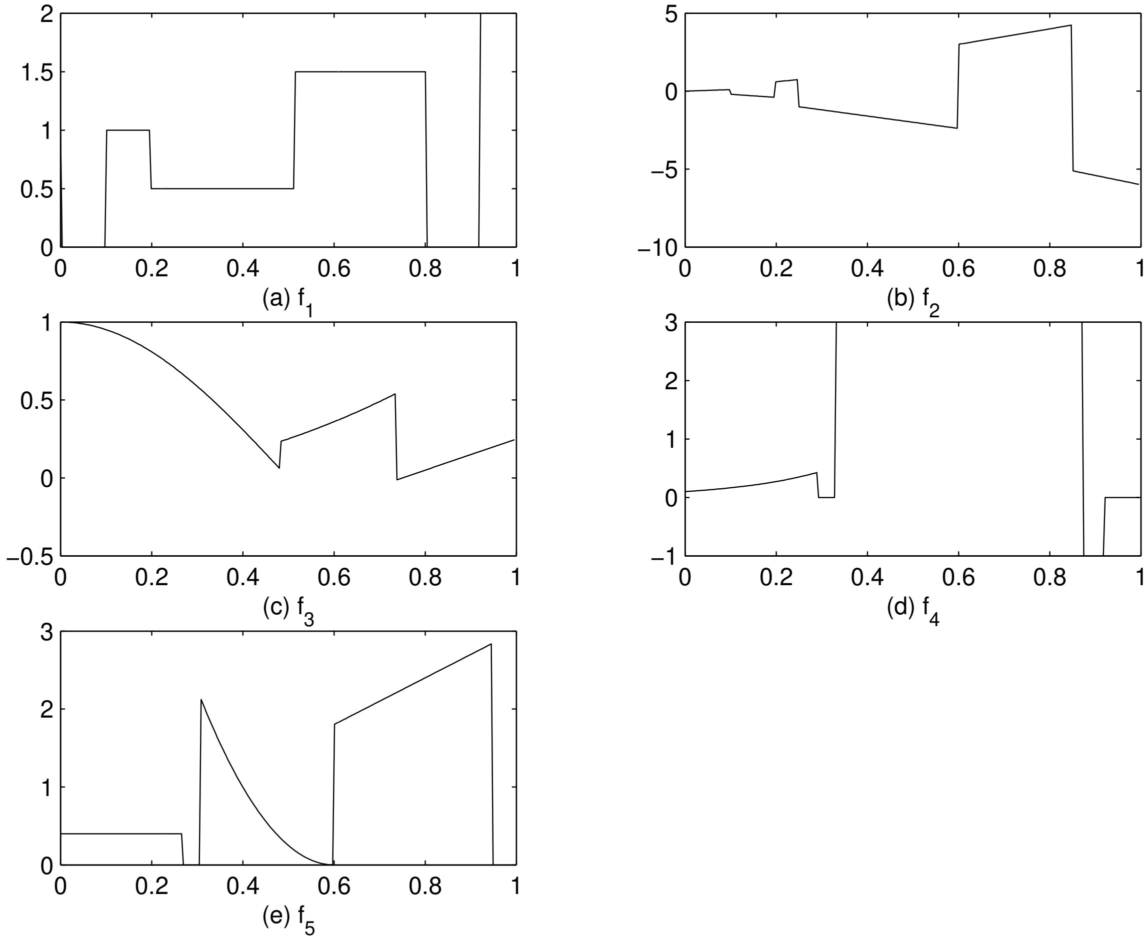


Figura 7.1: Funções teste a serem reconstruídas.

reconstrução de grau 2. Em todos os experimentos o valor de N é 128.

Para o caso da função constante por partes e da função linear por partes, a precisão obtida pelo método iterativo de grau 2 é a precisão da máquina. Isto evidentemente resulta das estimativas do erro apresentada no capítulo 4, pois nestes casos tanto C_2 quanto C_3 são nulos e portanto a fórmula de reconstrução é exata.

Em todos os casos são feitas as respectivas comparações com os filtros já conhecidos e apresentados no capítulo 2: $\tilde{\sigma}_j$, para $j = 1, \ldots, 6$. Para cada uma destas janelas, e para todas as funções consideradas são graficados para uma melhor visualização as reconstruções usando estes filtros e o logaritmo na base 10 do erro de aproximação pontual sobre os nós da malha, ver Figuras 7.7–7.16.

As experiências numéricas correspondentes ao método de grau zero não estão colocadas pois neste caso ele coincide com o método apresentado já no trabalho [19].

Nos gráficos exibidos para ambos os métodos observa-se claramente como as oscilações de Gibbs perto dos pontos de descontinuidade são reduzidas substancialmente e portanto a qualidade da reconstrução é superior. Por ser a reconstrução de alta qualidade nos gráficos não se percebe quase diferença entre a função reconstruída e a função exata.

Nota-se que o desempenho dos métodos é sempre melhor quando o número de descontinuidades é pequeno.

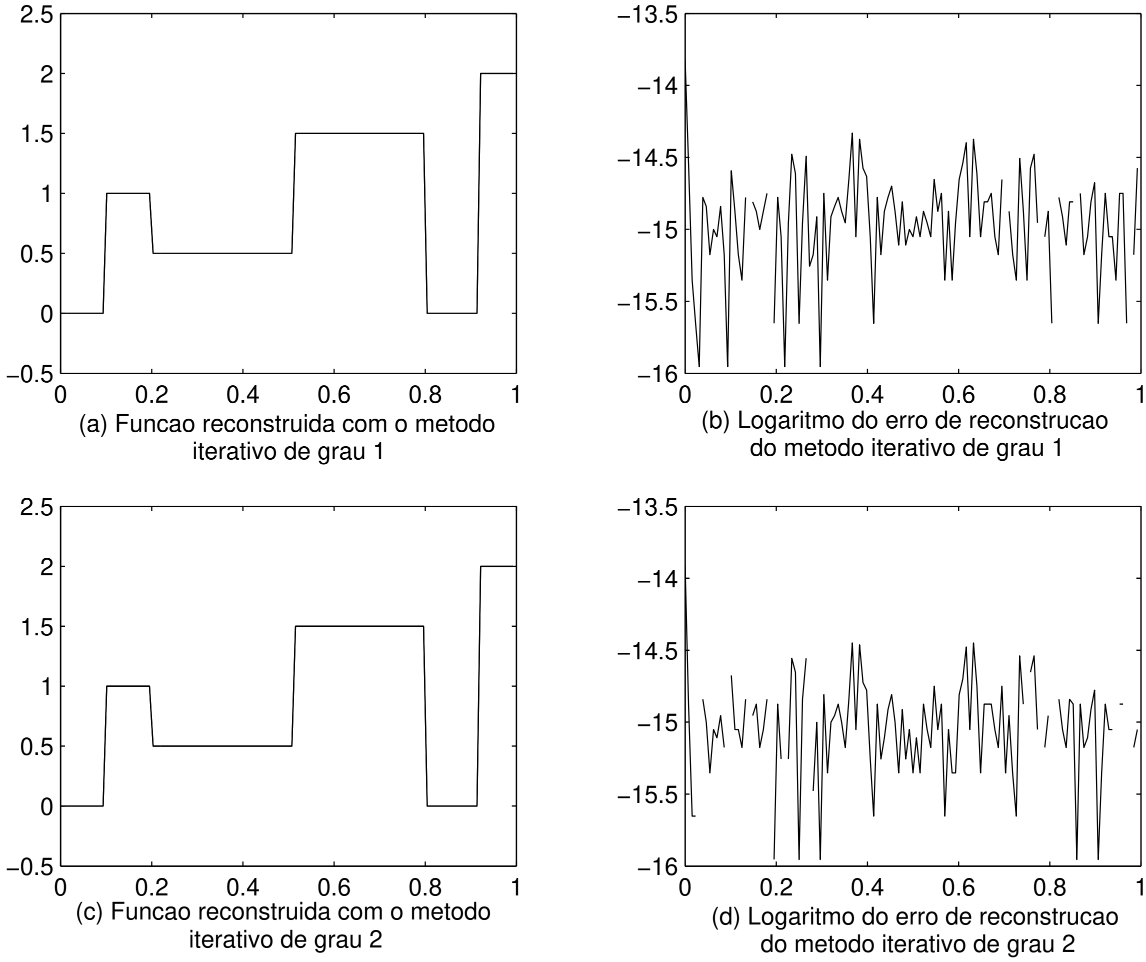
As Tabelas 7.1 e 7.2 mostram os erros quadráticos medios da reconstrução, isto é : se g_j corresponde ao valor reconstruído pelo método, então $e = \sqrt{\frac{1}{N}\ \sum_{j=0}^{N-1}\ (f_j - g_j)^2}$. O erro quadrático médio foi calculado para cada um dos filtros já conhecidos e para nossos métodos iterativos de ordem 1 e de ordem 2 para duas discretizações diferentes da malha, $N = 64$ e $N = 128$. Estes valores foram obtidos usando como dados os coeficientes de Fourier das funções sem adicionar ruído.

Método	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
Filtro (a)	0.2035	1.0640	0.0453	0.3913	0.2760
Filtro (b)	0.1882	1.0710	0.0405	0.3923	0.2617
Filtro (c)	0.1944	1.0489	0.0421	0.3902	0.2679
Filtro (d)	0.1974	1.0584	0.0426	0.3946	0.2684
Filtro (e)	0.1909	1.2353	0.0458	0.4397	0.2674
Filtro (f)	0.1967	1.0571	0.0424	0.3943	0.2681
Met. It. grau 1	1.5436e-015	0.0045	0.0012	6.4606e-004	0.0026
Met. It. grau 2	1.2106e-015	9.6747e-016	7.4778e-006	2.5428e-004	1.3400e-004

Tabela 7.1: Erro quadrático medio $\sqrt{\frac{1}{N}\ \sum_{j=0}^{N-1}\ (f_j - g_j)^2}$, e onde os g_j correspondem aos valores pontuais da função reconstruida usando N=64.

Método	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
Filtro (a)	0.1739	0.5280	0.0293	0.1902	0.1562
Filtro (b)	0.1652	0.4729	0.0259	0.1606	0.1342
Filtro (c)	0.1681	0.5029	0.0273	0.1804	0.1482
Filtro (d)	0.1692	0.5060	0.0278	0.1823	0.1498
Filtro (e)	0.1736	0.4323	0.0297	0.1048	0.0979
Filtro (f)	0.1690	0.5050	0.0277	0.1818	0.1494
Met. It. grau 1	2.0953e-015	0.0012	4.5207e-004	9.9866e-005	0.0014
Met. It. grau 2	1.6735e-015	9.1940e-016	1.3601e-006	4.4345e-005	6.9564e-006

Tabela 7.2: Erro quadrático medio $\sqrt{\frac{1}{N}\ \sum_{j=0}^{N-1}\ (f_j - g_j)^2}$, e onde os g_j correspondem aos valores pontuais da função reconstruida usando N=128.



(a) Funcao reconstruida com o metodo iterativo de grau 1

(b) Logaritmo do erro de reconstrucao do metodo iterativo de grau 1

(c) Funcao reconstruida com o metodo iterativo de grau 2

(d) Logaritmo do erro de reconstrucao do metodo iterativo de grau 2

Figura 7.2: Gráficos da (a) função exata f_1 e da função reconstruída usando o método iterativo de grau 1, (b) logaritmo na base 10 do erro pontual de reconstrução do método iterativo de grau 1, (c) função exata e função reconstruída usando o método iterativo de grau 2, (d) logaritmo na base 10 do erro de reconstrução do método iterativo de grau 2.

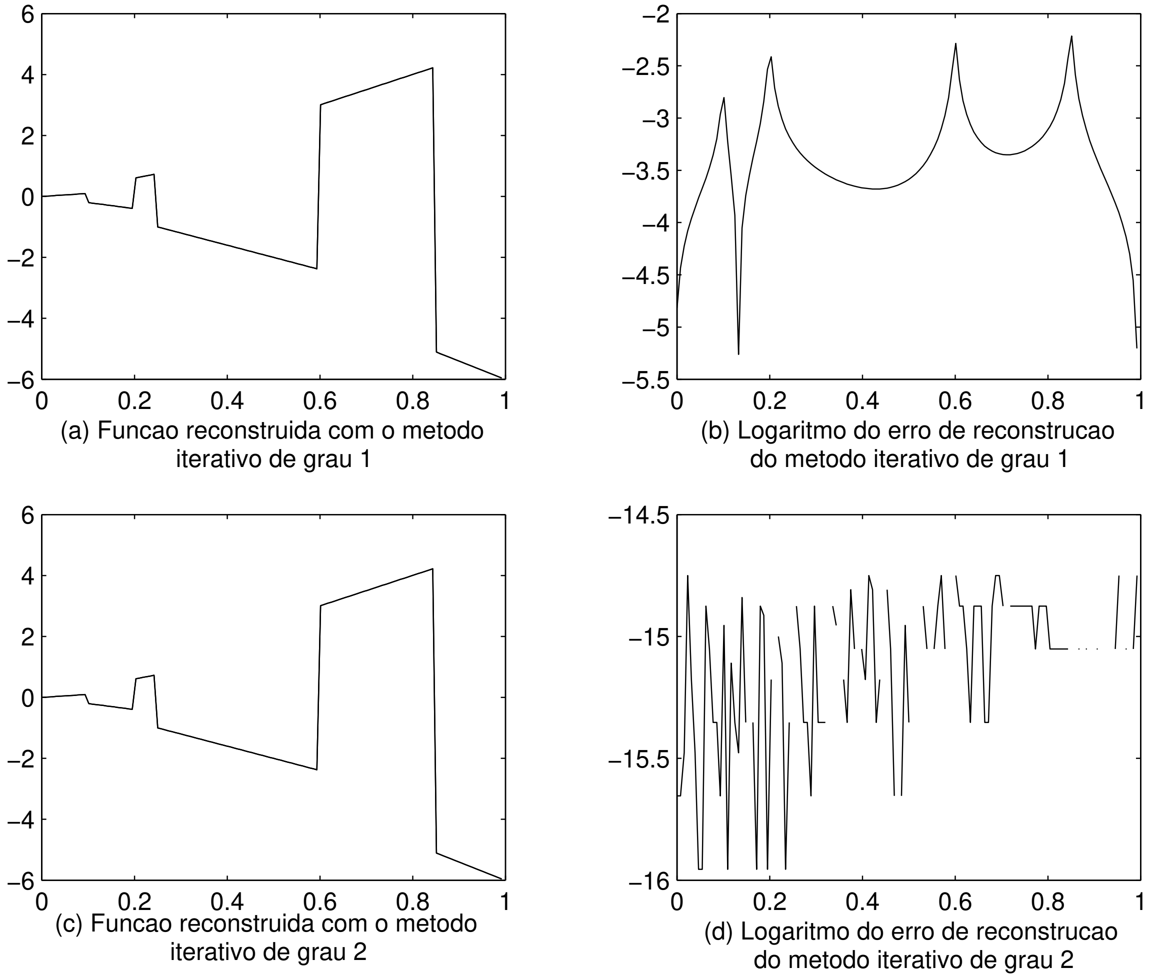
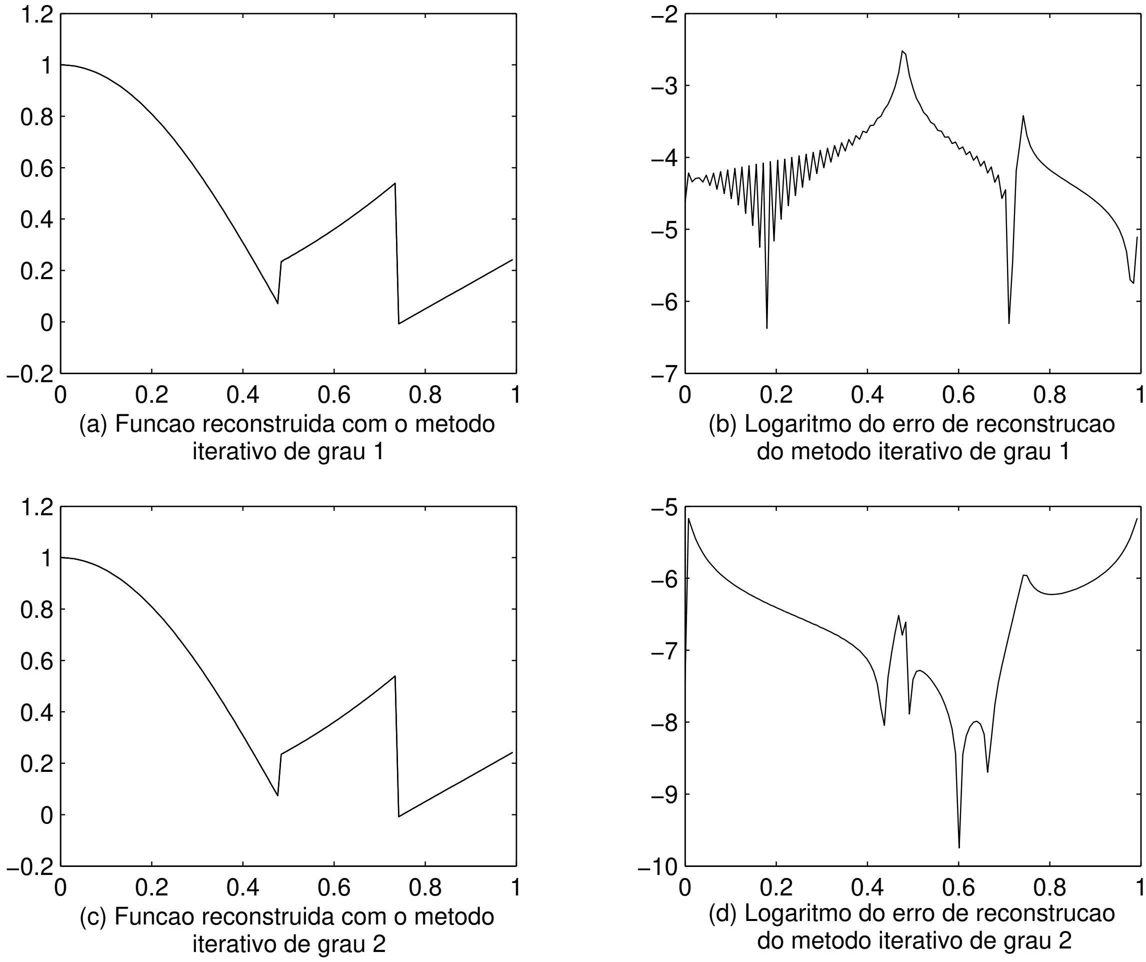


Figura 7.3: Gráficos da (a) função exata f_2 e da função reconstruída usando o método iterativo de grau 1, (b) logaritmo na base 10 do erro pontual de reconstrução do método iterativo de grau 1, (c) função exata e função reconstruída usando o método iterativo de grau 2, (d) logaritmo na base 10 do erro de reconstrução do método iterativo de grau 2.



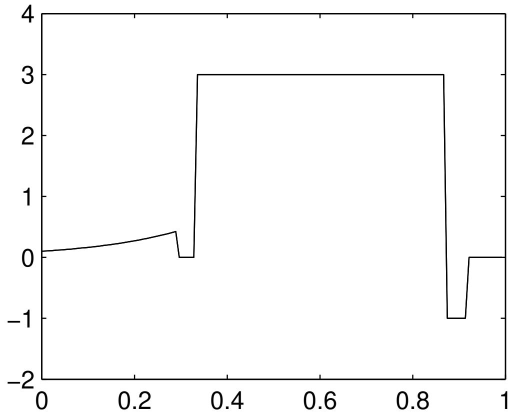
(a) Funcao reconstruida com o metodo iterativo de grau 1

(b) Logaritmo do erro de reconstrucao do metodo iterativo de grau 1

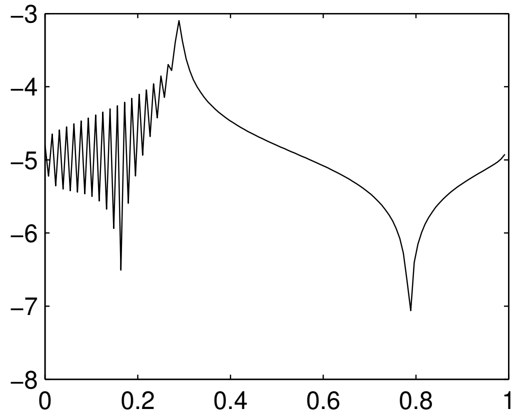
(c) Funcao reconstruida com o metodo iterativo de grau 2

(d) Logaritmo do erro de reconstrucao do metodo iterativo de grau 2

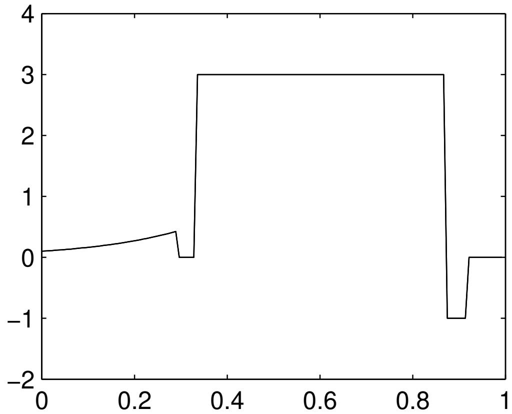
Figura 7.4: Gráficos da (a) função exata f_3 e da função reconstruída usando o método iterativo de grau 1, (b) logaritmo na base 10 do erro pontual de reconstrução do método iterativo de grau 1, (c) função exata e função reconstruída usando o método iterativo de grau 2, (d) logaritmo na base 10 do erro de reconstrução do método iterativo de grau 2.



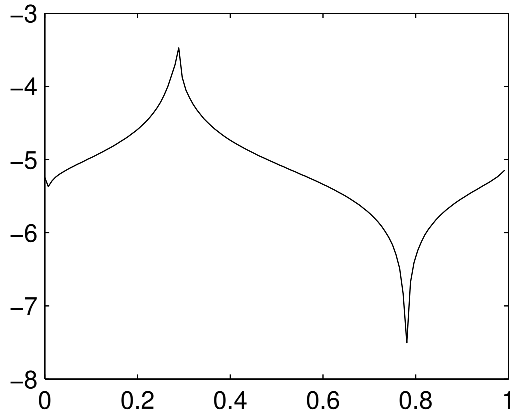
(a) Funcao reconstruida com o metodo iterativo de grau 1



(b) Logaritmo do erro de reconstrucao do metodo iterativo de grau 1



(c) Funcao reconstruida com o metodo iterativo de grau 2



(d) Logaritmo do erro de reconstrucao do metodo iterativo de grau 2

Figura 7.5: Gráficos da (a) função exata f_4 e da função reconstruída usando o método iterativo de grau 1, (b) logaritmo na base 10 do erro pontual de reconstrução do método iterativo de grau 1, (c) função exata e função reconstruída usando o método iterativo de grau 2, (d) logaritmo na base 10 do erro de reconstrução do método iterativo de grau 2.

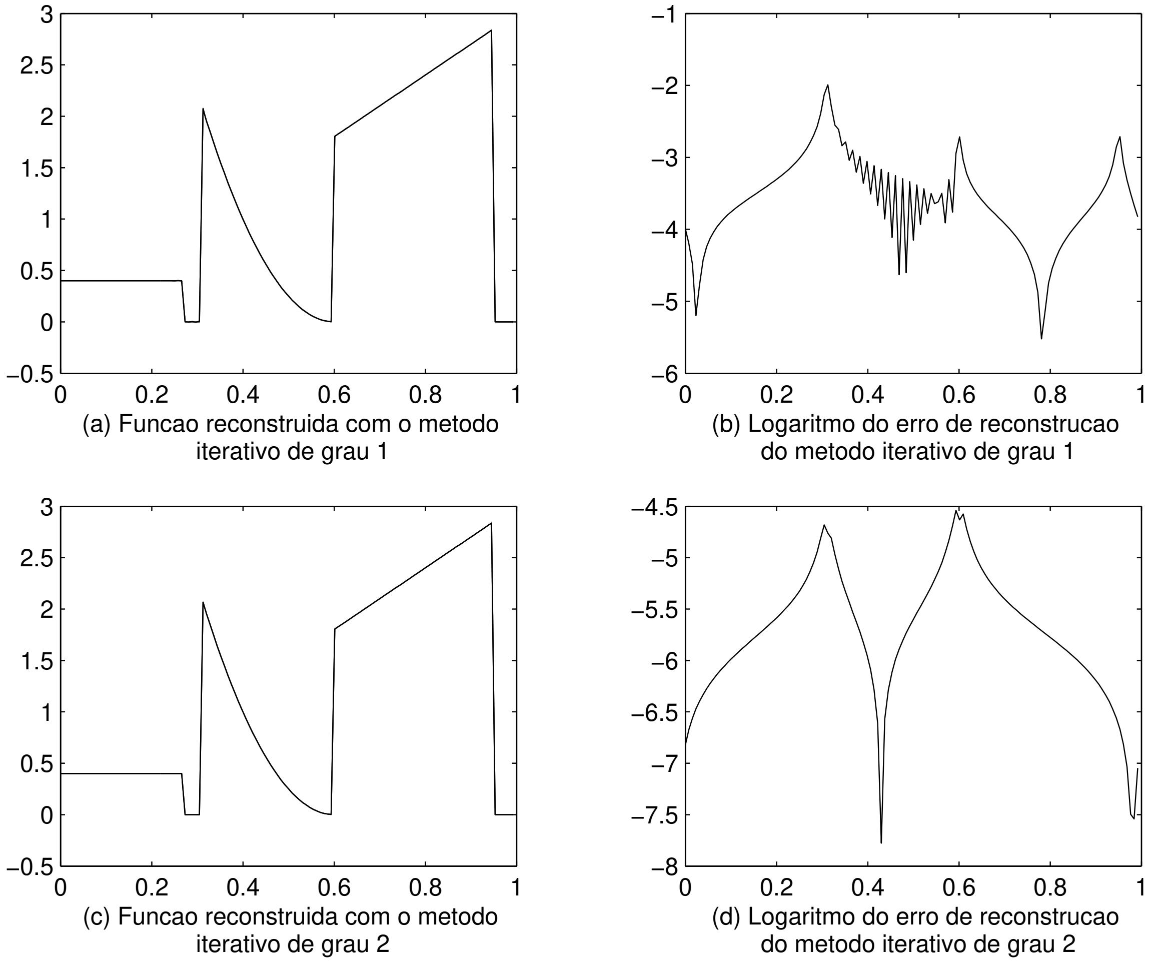


Figura 7.6: Gráficos da (a) função exata f_5 e da função reconstruída usando o método iterativo de grau 1, (b) logaritmo na base 10 do erro pontual de reconstrução do método iterativo de grau 1, (c) função exata e função reconstruída usando o método iterativo de grau 2, (d) logaritmo na base 10 do erro de reconstrução do método iterativo de grau 2.

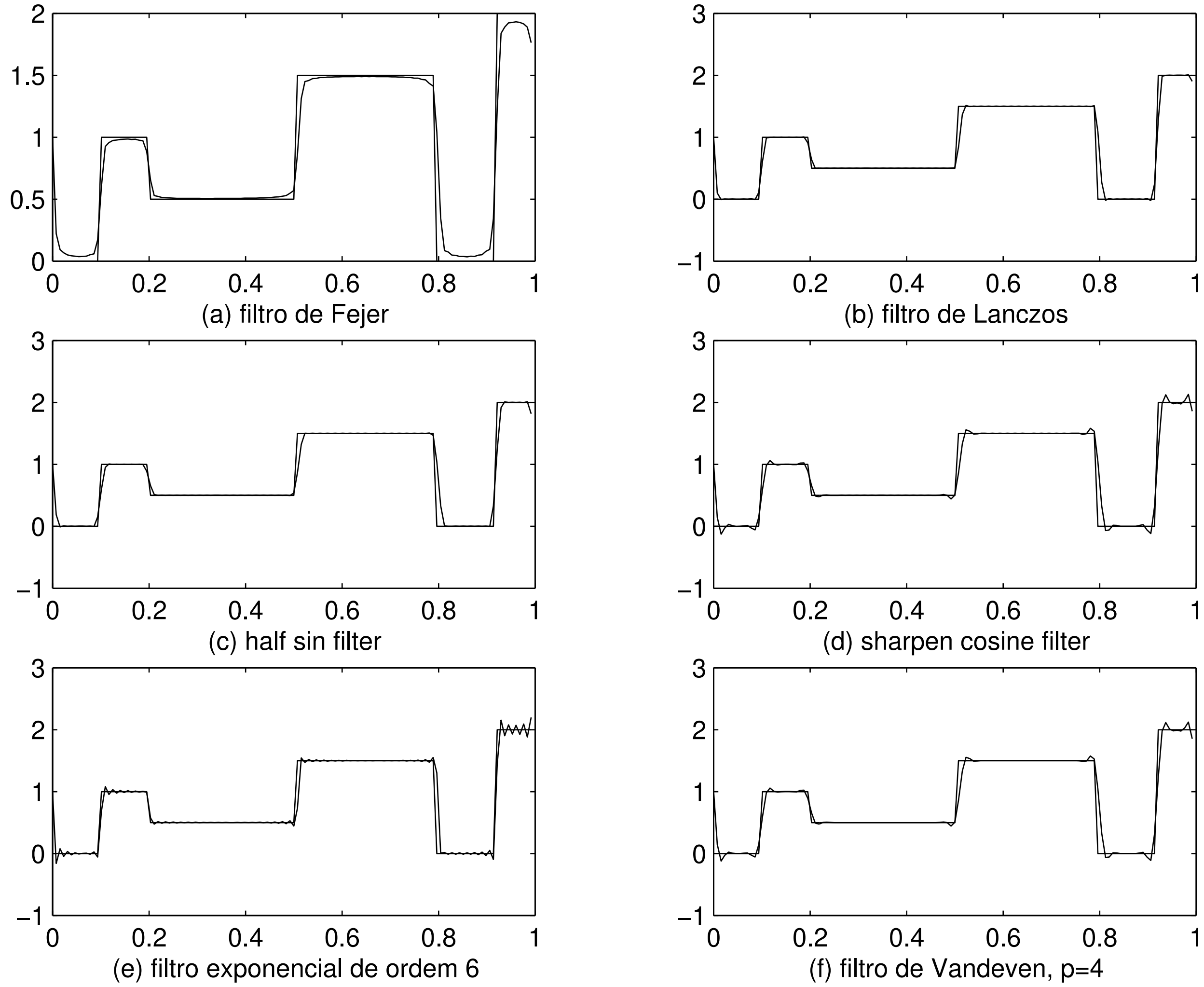


Figura 7.7: Reconstrução dos valores pontuais da função f_1 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

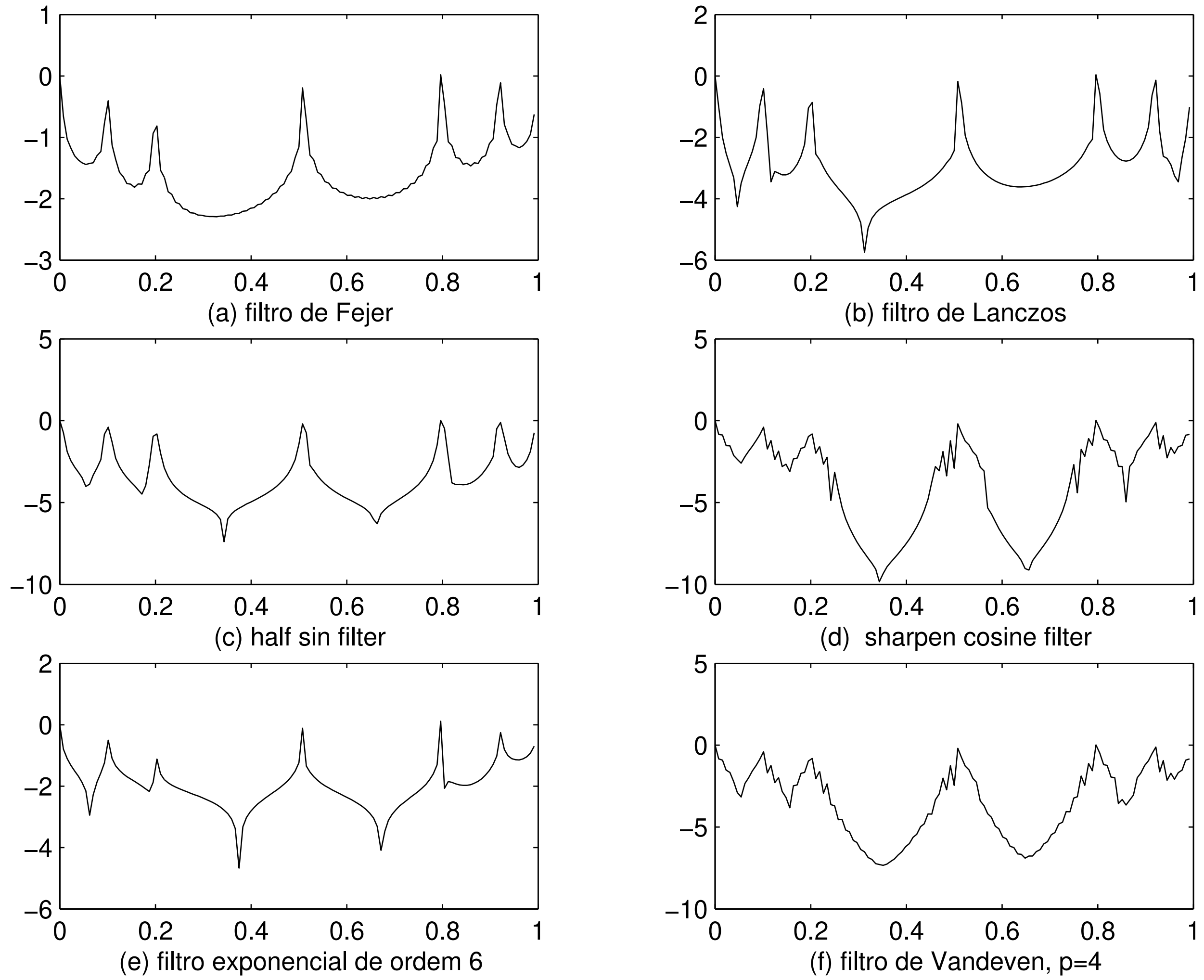


Figura 7.8: Logaritmo na base 10 do erro de reconstrução para f_1 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

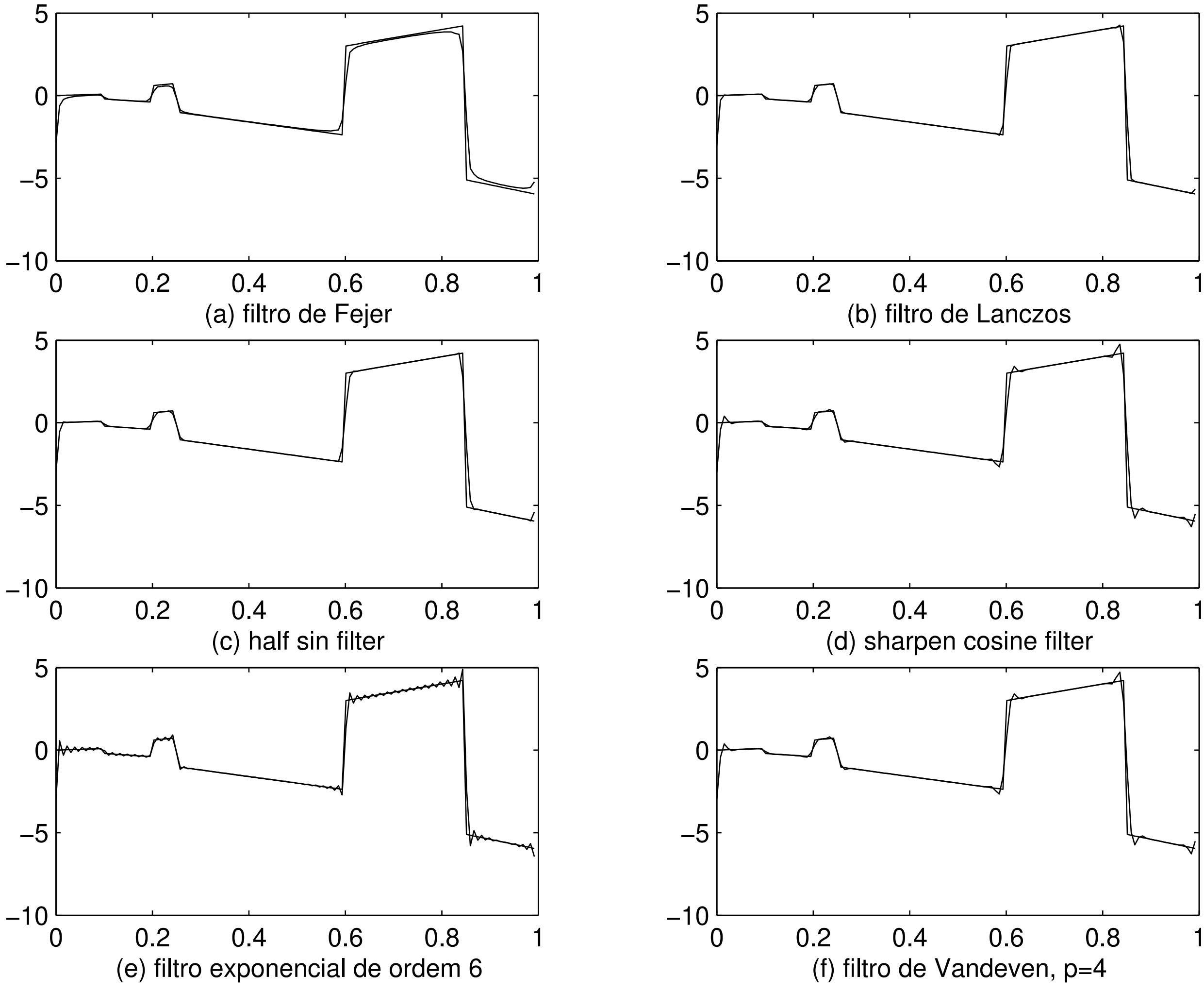


Figura 7.9: Reconstrução dos valores pontuais da função f_2 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

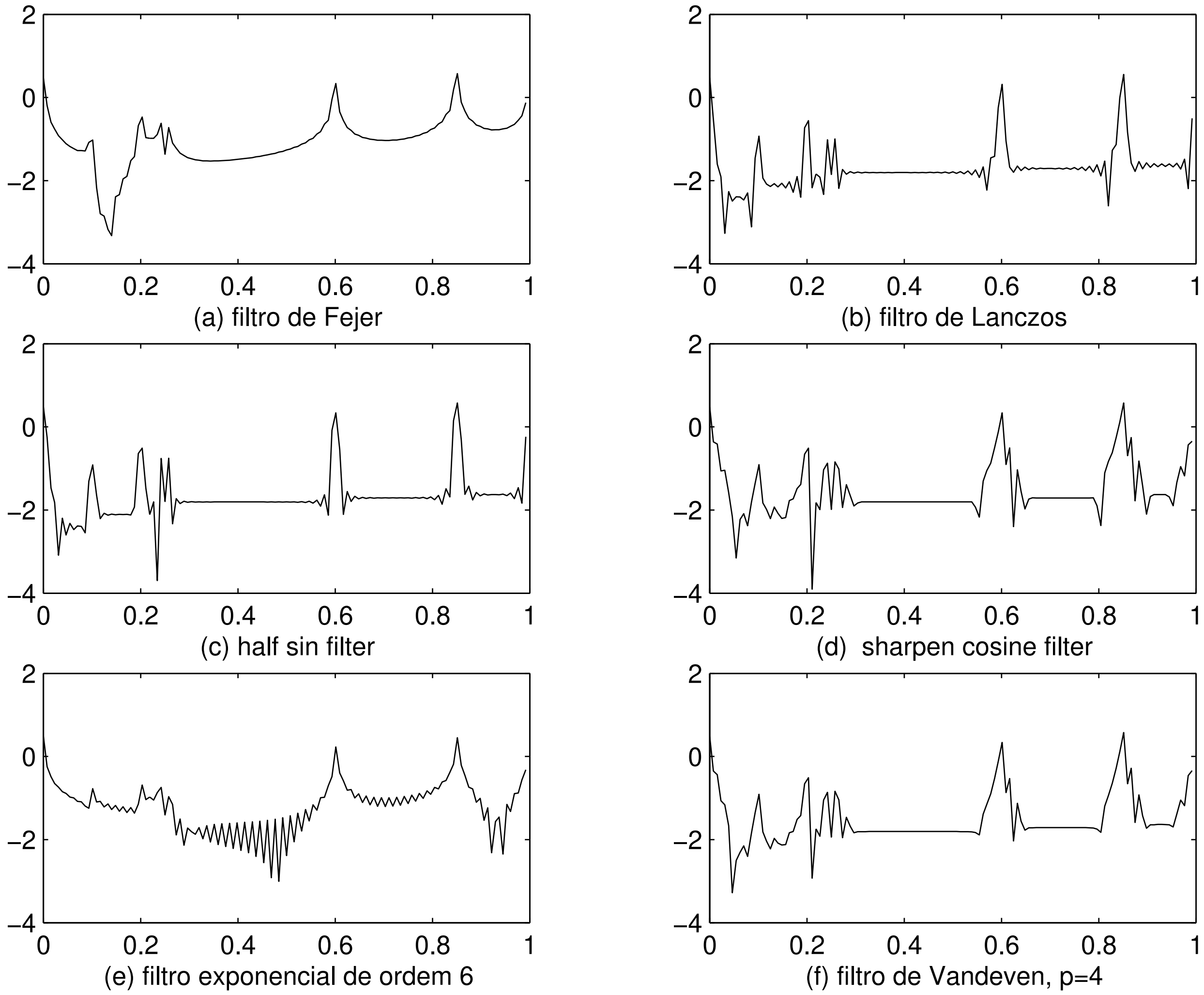


Figura 7.10: Logaritmo na base 10 do erro de reconstrução para f_2 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

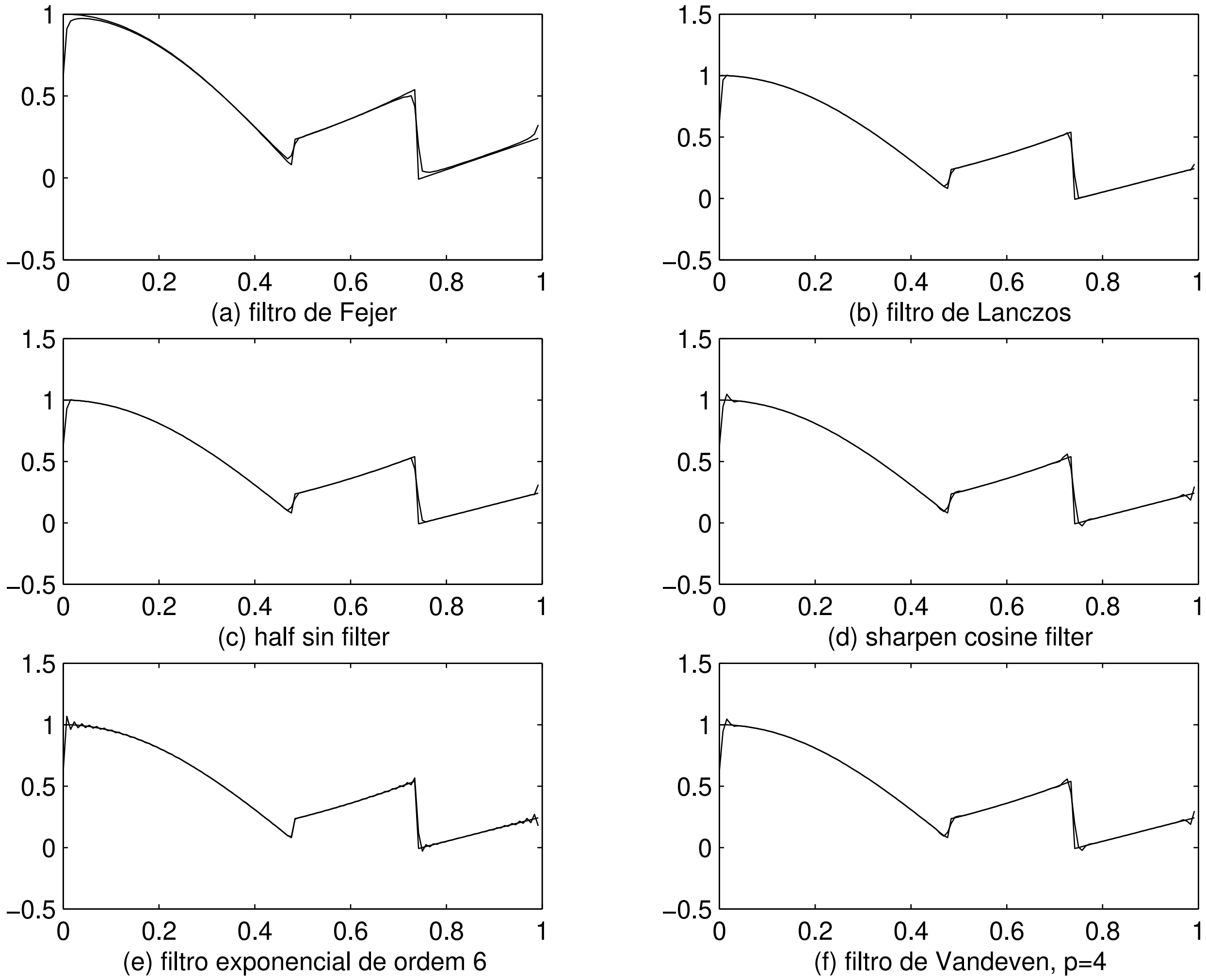


Figura 7.11: Reconstrução dos valores pontuais da função f_3 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

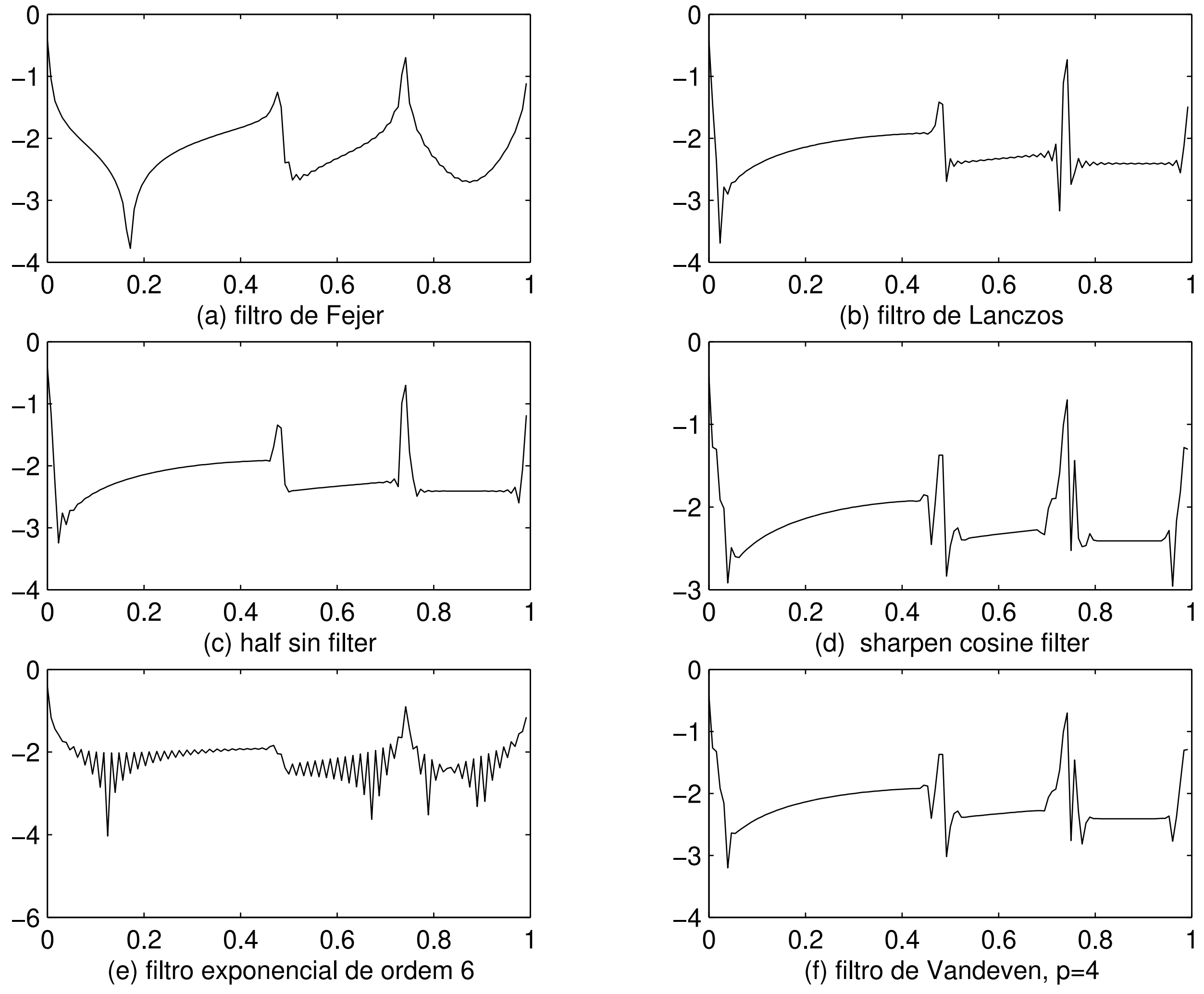


Figura 7.12: Logaritmo na base 10 do erro de reconstrução para f_3 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

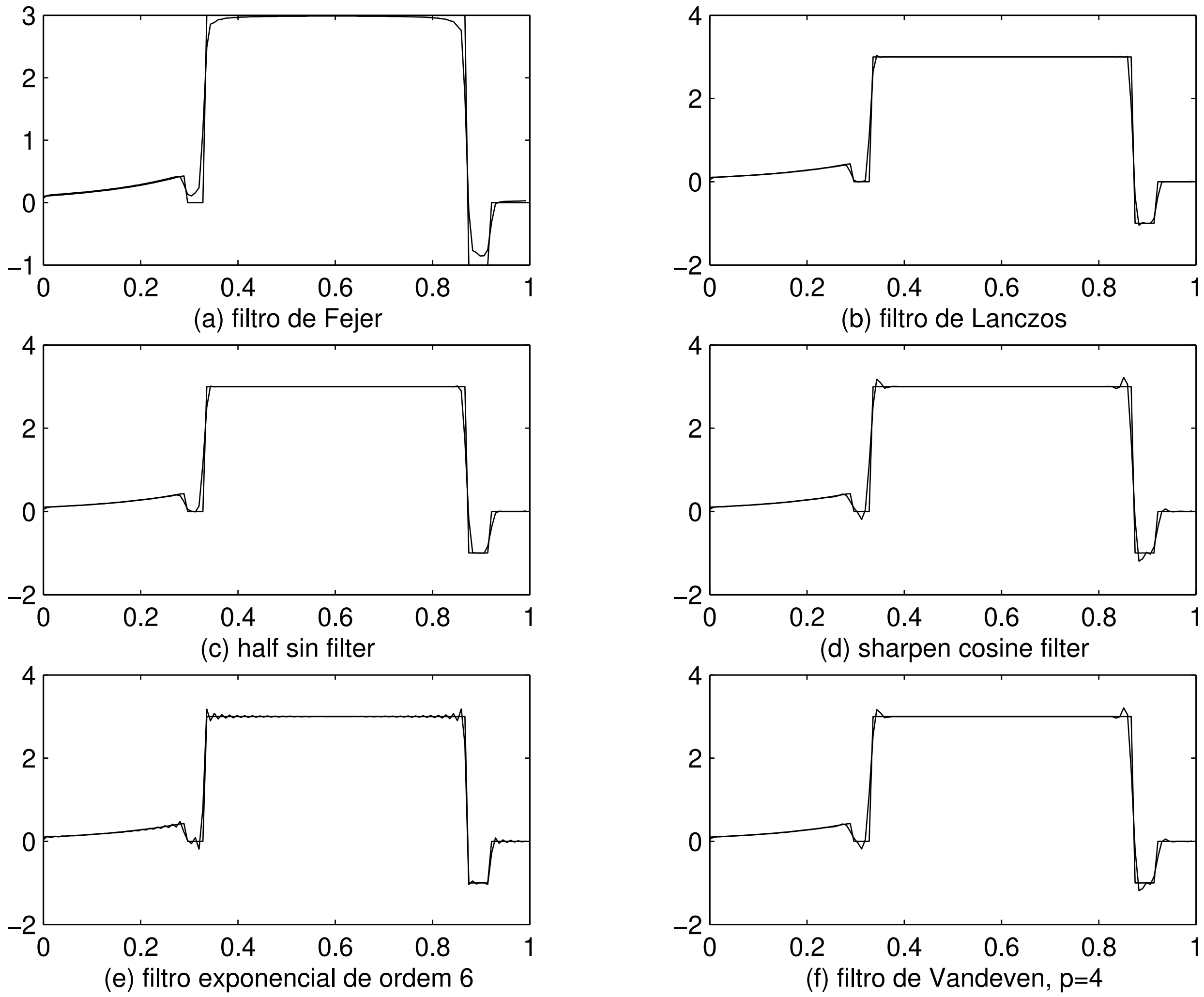


Figura 7.13: Reconstrução dos valores pontuais da função f_4 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

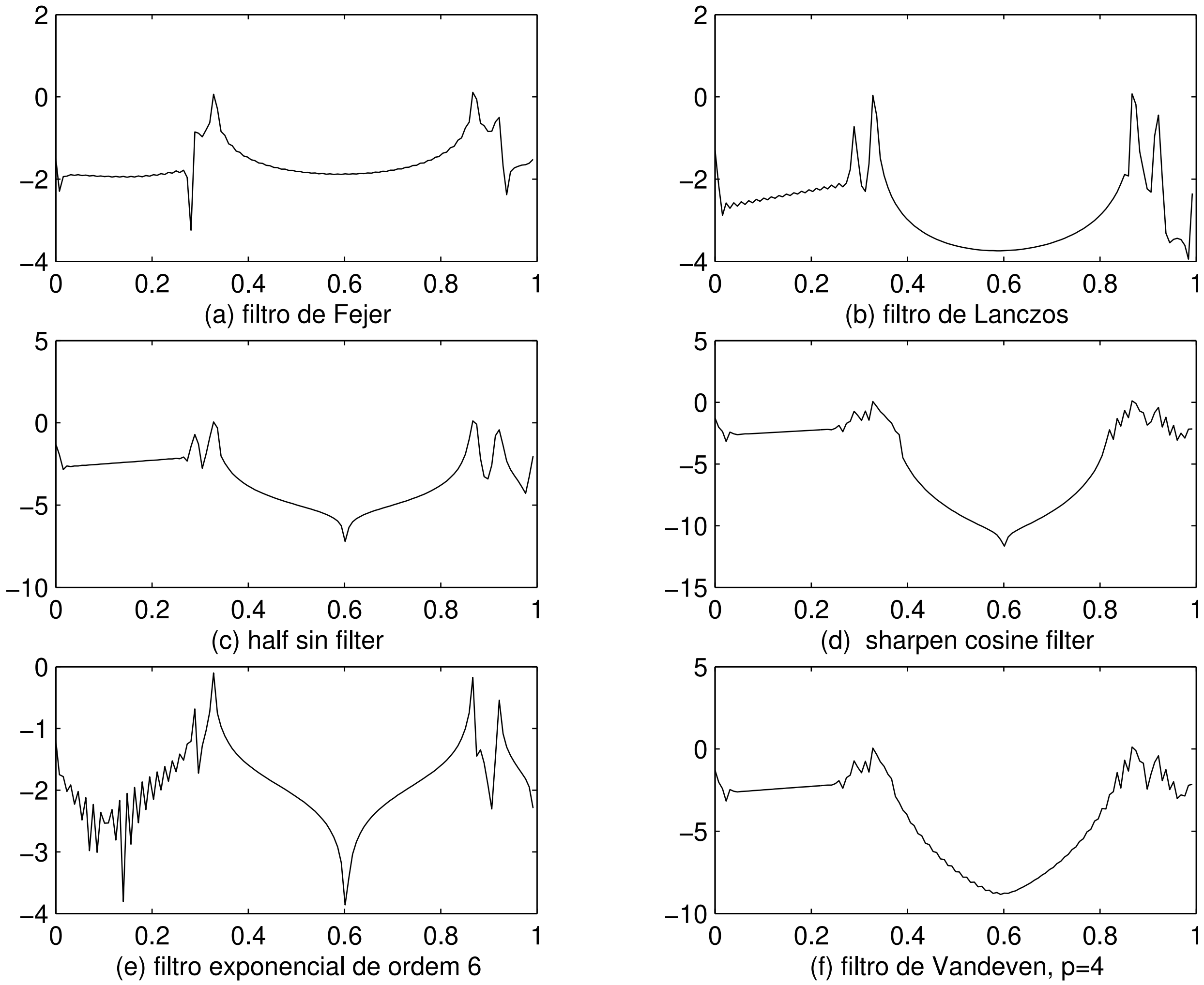


Figura 7.14: Logaritmo na base 10 do erro de reconstrução para f_4 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

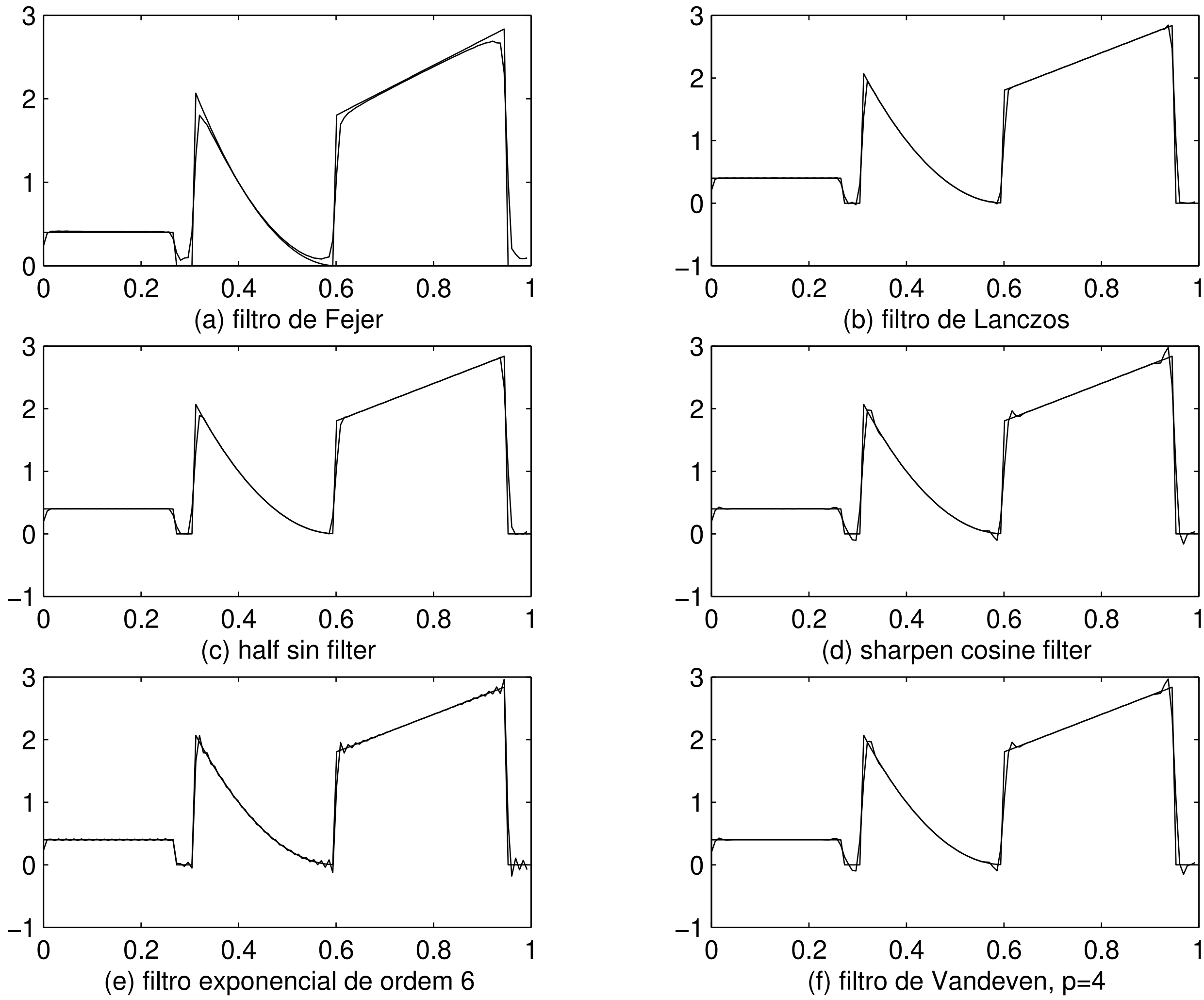


Figura 7.15: Reconstrução dos valores pontuais da função f_5 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

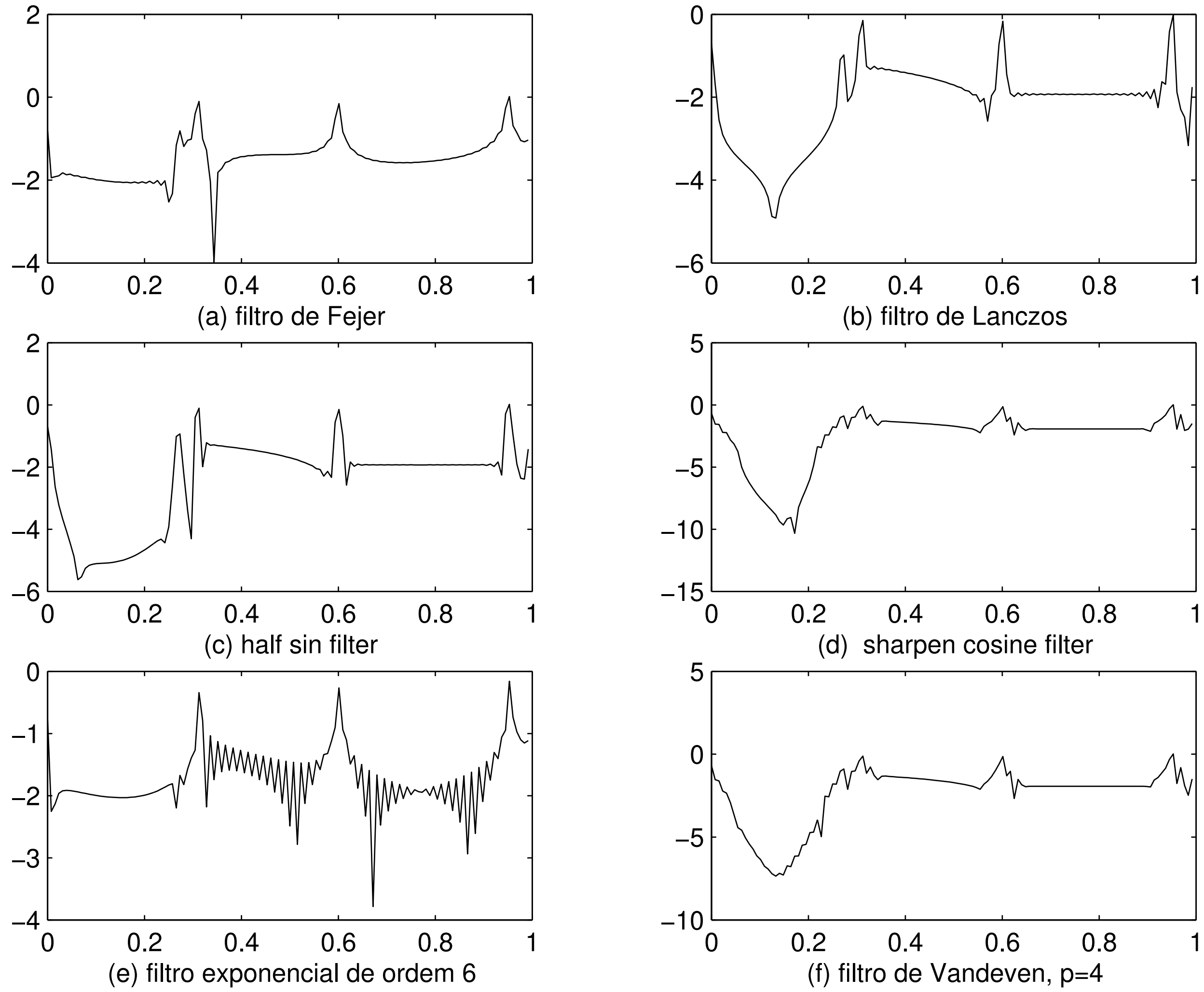


Figura 7.16: Logaritmo na base 10 do erro de reconstrução para f_5 usando os filtros (1)–(6) para N=128.

Capítulo 8

Conclusões

O tema da tese é a determinação dos pontos de descontinuidade de funções que apresentam um número finito de singularidades de primeira espécie, a partir de um número finito de coeficientes de Fourier, junto com a localização dos pontos, o desenvolvimento de filtros adequados para reconstruir as funções da forma mais precisa possível evitando assim o efeito oscilatório conhecido como "Fenômeno de Gibbs".

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados básicos da Teoria Clássica de Fourier, uma descrição do "Fenômeno de Gibbs"e alguns filtros já conhecidos usados para reconstruir funções suaves por partes. Apresentamos também o método desenvolvido em [8] para detectar pontos de descontinuidades a partir de dados espectrais discretos. No Capítulo 3 deduzimos uma nova familia de filtros chamados por nos de "Filtros Splines". Baseados nestes filtros construimos métodos de reconstrução de grau 0,1 e 2 que permitem aproximar de maneira precissa os valores pontuais da função f sobre uma malha discreta usando como dados um número finito de coeficientes de Fourier. No Capítulo 4 calculamos estimativas para os erros de reconstrução no espaço de Fourier para cada um dos novos métodos de reconstrução com filtros splines. No Capítulo 5 apresentamos um novo e simples método de detecção de pontos de descontinuidades baseado no trabalho [19]. Foram realizadas múltiplas experiências numéricas que mostram o excelente desempenho do nosso método chamado por nos de "Método Inicial". Este método consegue detectar todas as descontinuidades das funções consideradas, o que é essencial para o bom funcionamento dos métodos de reconstrução. Em todos os casos o nosso método consegue resultados bem mas precissos que o "Método Linear". Observamos também que a quantidade de singularidades ficticias detectadas por o "Método Linear"e muito grande, o que não acontece com o "Método Inicial". O método também foi testado para o caso de dados espectrais perturbados com ruído aleatorio. Neste caso nosso método detecta quase todas as singularidades no entanto que o "Método Linear"não consegue detectar nenhuma delas.

No Capítulo 6 desenvolvimos métodos iterativos que refinam os valores aproximados dos pontos de descontinuidades sa função e os valores pontuais reconstruídos. No Capítulo 7 encontram-se as experiências numéricas que validam os novos algoritmos de reconstrução apresentados. Realizamos comparações numéricas com os métodos de reconstrução que usam os filtros já conhecidos apresentados na Seção 2.4. Estas experiências numéricas mostram a superioridade dos nossos métodos de reconstrução. Finalmente, no Apêndice encontra-se uma fórmula alternativa de grau 2 deduzida por nos seguindo as idéias do trabalho [20]. Ela é exata para polinômios de grau 2 por partes, mas a complexidade da implementação desta fórmula de reconstrução nos levou a desenvolver os "filtros Splines", que além de sua simplicidade mostraram ser muito eficientes e precisos.

Capítulo 9

Apêndice

9.1 Fórmula alternativa de grau 2

Neste apêndice apresenta-se uma fórmula de reconstrução de grau 2 que foi deduzida por nos seguindo as ideias do trabalho desenvolvido em [20] e [21]. Esta fórmula de reconstrução é exata para polinômios de grau 2 por partes independentemente dos pontos de descontinuidades coincidirem ou não com os nós da malha. Um dos problema deste enfoque resulta da impossibilidade de definir neste caso um filtro que seja dado por uma única expressão, já que ele consiste de dois partes. Além do mais, as expressões que definem os termos corretores tornam-se muito complexas para sua implementação. Por esta razão na nossa tese foi desenvolvida uma nova familia de filtros, chamados por nos "filtros splines", Com estes filtros deduzimos novas fórmulas de reconstrução que além de ter mostrado um ótimo desempenho são simples de ser implementadas.

Formula de reconstrução para o interpolador polinomial por partes de grau 2: caso geral não uniforme.

Aqui continuaremos usando a notação introduzida em [20]. Seja f uma função suave por partes definida no intervalo $[0,1]$. Vamos supor que f apresenta L descontinuidades de salto nos pontos $z_1, z_2, \ldots, z_L$ pertencentes ao intervalo $[0,1]$. Dado $N = 2q,\ q \in \mathbf{N}$, constroi-se uma malha dada por nós $x_j = j/N$, para $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Denotamos por x_{q_l} o ponto da malha mais próximo a z_l. Agrupamos estes pontos da seguinte maneira: os primeiros L_1 correspondem a aqueles que tem subíndices q_l pares, entanto que os restantes $L_2 = L - L_1$ serão aqueles que apresentem subíndices q_l ímpares . Chamaremos $f_{q_l}^{+} = \lim\limits_{\delta \to 0^+} f(x_{q_l}+\delta), f_{q_l}^{-} = \lim\limits_{\delta \to 0^+} f(x_{q_l}-\delta)$ para $l = 0, 1, \ldots, L$

e $f_j = f_j^+ = f_j^- = f(x_j)$ nos restantes pontos da malha.

Definimos no domínio da função f os seguintes polinômios por partes de grau menor ou igual a 2 associados à malha:

(a) $p_2^+(x)$ é o o polinômio interpolador contínuo de grau 2 por partes de $\{f_j^+\}$ tal que $p_2^+(x) = p_{2,j}^+(x)$ se $x \in [x_{2j}, x_{2j+2}]$, e onde $p_{2,j}^+(x)$ corresponde ao polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola a seqüência dos $\{f_j^+\}$ nos pontos (x_{2j}, f_{2j}) , $(x_{2j+1}, f_{2j+1}), (x_{2j+2}, f_{2j+2})$ e que portanto é dado por:

$$p_{2,j}^+(x) = f_{2j}^+ \; l_{2,2j}(x) + f_{2j+1}^+ \; l_{2,2j+1}(x) + f_{2j+2}^+ \; l_{2,2j+2}(x),$$

onde $l_{2,2j+s}(x)$ é o polinômio de Lagrange de grau 2 tal que $l_{2,2j+s}(x_{2j+r}) = \delta_{s,r}$ para $r, s = 0, 1, 2$.

(b) Para $l = 1, 2, \ldots, L$ definimos:

$p_2^{(l-2)-}(x)$ corresponde ao polinômio de grau menor ou igual a 2 que passa pelos pontos $(x_{q_l-2}, f_{q_l-2}), (x_{q_l-1}, f_{q_l-1}), (z_l, f_{q_l}^-)$.

$p_2^{(l-)}(x)$ corresponde ao polinômio de grau menor ou igual a 2 que passa pelos pontos $(z_l, f_{q_l}^+), (x_{q_l+1}, f_{q_l+1}), (x_{q_l+2}, f_{q_l+2})$.

Construção do interpolador polinomial por partes de grau 2 na malha não uniforme.

Seja $P_2(x)$ o polinômio por partes que aproxima f definido por:

$P_2(x) = p_2^+(x)|_{[x_{2j}, x_{2j+2}]}$, para $j = 0, 1, \ldots, N-1$, $2j \neq q_l-2, q_l$, $l = 1, 2, \ldots, L_1$

e para $2j \neq q_l - 1$, com $l = L_1 + 1, 2, \ldots, L$.

Para $l = 1, 2, \ldots, L_1$,

$$P_2(x) = p_2^{(l-2)-}(x) \text{ se } x \in [x_{q_l-2}, z_l], \qquad P_2(x) = p_2^{l+}(x) \text{ se } x \in [z_l, x_{q_l+2}].$$

Para $l = L_1 + 1, \ldots, L$,

$$P_2(x) = p_2^{(l-2)-}(x) \text{ se } x \in [x_{q_l-1}, z_l), \qquad P_2(x) = p_2^{l+}(x) \text{ se } x \in (z_l, x_{q_l+1}].$$

Cálculo do Filtro de ordem 2

Para poder calcular as aproximações aos coeficientes de Fourier da f dados por $(\hat{P}_2)_k$, é preciso determinar os coeficientes de Fourier do interpolador polinomial por partes da seqüência das $\{f_j^+\}_{j=0}^{N-1}$, dados por:

$$(\widehat{p_2^+})_k = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (\widehat{p_{2,j}^+})_k$$

onde $p_{2,j}^+(x) = f_{2j}\ l_{2,0}(x) + f_{2j+1}\ l_{2,1}(x) + f_{2j+2}\ l_{2,2}(x)$, onde $l_{2,j}(x)$ corresponde ao polinômio de Lagrange de grau 2 : $l_{2,s}(x_{2j+r}) = \delta_{s,r}$, para $s, r = 0, 1, 2$. Para o caso de pontos igualmente espaçados, denotaremos por h ao espaçamento entre eles. Seja também $\lambda_{i,k} = \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} l_{2,i}(x)\ e^{-i2\pi kx}\ dx$. Calculando a integral correspondente obtém-se que,

$$\begin{aligned}
\lambda_{0,k} &= \frac{1}{2h^2}\ \{(\frac{h}{(2\pi k)^2} - \frac{2i}{(2\pi k)^3})\ e^{-i2\pi k x_{2j+2}} - (\frac{-3h}{(2\pi k)^2} + \frac{2h^2 i}{2\pi k} - \frac{2i}{(2\pi k)^3})\ e^{-i2\pi k x_{2j}}\},\\
&= \frac{e^{-i2\pi k x_{2j}}}{2h^2}\ \{(\frac{h}{(2\pi k)^2} - \frac{2i}{(2\pi k)^3})\ e^{-i4\pi kh} + (\frac{3h}{(2\pi k)^2} - \frac{2h^2 i}{2\pi k} + \frac{2i}{(2\pi k)^3})\},\\
&= \frac{1}{2h^2}\ (a_{k,h}\ e^{-i4\pi kh} + b_{k,h})\ e^{-i2\pi k x_{2j}},
\end{aligned}$$

onde $a_{k,h} = \dfrac{h}{(2\pi k)^2} - \dfrac{2i}{(2\pi k)^3}$ e $b_{k,h} = \dfrac{3h}{(2\pi k)^2} - \dfrac{2h^2 i}{2\pi k} + \dfrac{2i}{(2\pi k)^3}$.

Para o caso de $\lambda_{1,k}$, integrando por partes obtém-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,k} &= \frac{-1}{2h^2}\ \{(\frac{2h}{(2\pi k)^2} - \frac{2i}{(2\pi k)^3})\ e^{-i2\pi kh} + (\frac{2h}{(2\pi k)^2} + \frac{2i}{(2\pi k)^3})\ e^{i2\pi kh}\}\ e^{-i2\pi k x_{2j+1}},\\
&= \frac{-1}{2h^2}\ Re(c_{k,h}\ e^{-i2\pi kh})\ e^{-i2\pi k x_{2j+1}},
\end{aligned}$$

onde $c_{k,h} = (\dfrac{2h}{(2\pi k)^2} - \dfrac{2i}{(2\pi k)^3})$.

Integrando por partes $\lambda_{2,k}$,

$$\lambda_{2,k} = \frac{1}{2h^2}\ (\bar{b}_{k,h} + \bar{a}_{k,h}\ e^{-i4\pi kh})\ e^{-i2\pi k x_{2j+2}},$$

onde $a_{k,h}$ e $b_{k,h}$ são definidos como anteriormente e a barra denota a operação de conjugação.

Com estes valores já determinados pode-se calcular o k-ésimo coeficiente de Fourier de $p^+_{2,j}(x)$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{(p^+_{2,j})}_k &= f_{2j}\ \lambda_{0,k} + f_{2j+1}\ \lambda_{1,k} + f_{2j+2}\ \lambda_{2,k},\\
&= \frac{f_{2j}}{2h^2}\ (a_{k,h}\ e^{-i4\pi kh} + b_{k,h})\ e^{-i2\pi k x_{2j}} - \frac{f_{2j+1}}{2h^2}\ Re(c_{k,h}\ e^{-i2\pi kh}) e^{-i2\pi k x_{2j+1}} +\\
&+ \frac{f_{2j+2}}{2h^2}\ (\bar{b}_{k,h} + \bar{a}_{k,h}\ e^{-i4\pi kh})\ e^{-i2\pi k x_{2j+2}},\\
&= \frac{1}{2h^2}\ \{d_{k,h}\ f_{2j}\ \ e^{-i2\pi k x_{2j}} - 2Re(c_{k,h}\ e^{-i2\pi kh})\ f_{2j+1}\ e^{-i2\pi k x_{2j+1}} + \bar{d}_{k,h}\ f_{2j+2}\ \ e^{-i2\pi k x_{2j+2}}\},
\end{aligned}
$$

onde $d_{k,h} = a_{k,h}\ e^{-i4\pi kh} + b_{k,h}$.

É possível agora determinar $\widehat{(p^+_2)}_k$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{(p^+_2)}_k &= \sum_{j=0}^{N/2-1}\ \widehat{(p^+_{2,j})}_k\\
&= \frac{1}{2h^2}\ \{d_{k,h} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j}\ \ e^{-i2\pi k x_{2j}} - 2Re(c_{k,h}\ e^{-i2\pi kh}) \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1}\ e^{-i2\pi k x_{2j+1}} +\\
&+ \bar{d}_{k,h} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+2}\ \ e^{-i2\pi k x_{2j+2}}\},\\
&= \frac{Re(d_{k,h})}{h^2} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j}\ \ e^{-i2\pi k x_{2j}} - 2\frac{Re(c_{k,h}\ e^{-i2\pi kh})}{h^2} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1}\ e^{-i2\pi k x_{2j+1}},\\
&= \frac{Re(d_{k,h})}{h^2} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j}\ \ e^{-i2\pi k x_{2j}} - 2\frac{Re(c_{k,h}\ e^{-i2\pi kh})}{h^2}\ e^{-i2\pi kh} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1}\ e^{-i2\pi k x_{2j}},\\
&= \tilde{\tau}^1_{k,h}\ DFT_{N/2}(f^+_p) + \tilde{\tau}^2_{k,h}\ e^{-i2\pi kh}\ DFT_{N/2}(f^+_i),
\end{aligned}
$$

onde $DFT_{N/2}(f^+_p)$ e $DFT_{N/2}(f^+_i)$ correspondem às transformadas discreta de Fourier das coordenadas pares e ímpares da seqüência das $\{f^+_j\}_j$, isto é: $f^+_p = (f^+_0, f^+_2, \ldots, f^+_{N/2-2})$ e $f^+_i = (f^+_1, f^+_3, \ldots, f^+_{N/2-1})$. As expressões para $\tilde{\tau}^1_{k,h}$ e $\tilde{\tau}^2_{k,h}$ são dadas por

$$
\tilde{\tau}^1_{k,h} = \tilde{\tau}^2_{k,h} \frac{1}{2h^3}\ \{\frac{3h}{(2\pi k)^2} + \frac{h}{(2\pi k)^2}\ \cos(4\pi kh) - \frac{2}{(2\pi k)^3}\ \sin(4\pi kh)\},
$$

$$
\tilde{\tau}^2_{k,h} = \tilde{\tau}^2_{k,h} - \frac{1}{2h^3}\ \{\frac{2h}{(2\pi k)^2}\ \cos(2\pi kh) - \frac{2}{(2\pi k)^3}\ \sin(2\pi kh)\}.
$$

É fácil ver que $DFT_{N/2}(f^+_p) = \tilde{f}^+_k + \tilde{f}^+_{k+N/2}$ e $DFT_{N/2}(f^+_i) = e^{i2\pi kh}\ (\tilde{f}^+_k - \tilde{f}^+_{k+N/2})$, portanto temos que,

$$\widehat{(p_2^+)}_k = \tau^1_{k,h}\ \tilde{f}^+_k + \tau^2_{k,h}\ \tilde{f}^+_{k+N/2},$$

com $\tau^1_{k,h} = \tilde{\tau}^1_{k,h} + \tilde{\tau}^2_{k,h}$ e $\tau^2_{k,h} = \tilde{\tau}^1_{k,h} - \tilde{\tau}^2_{k,h}$.

Aproximação a $\hat{f}_k$ usando o interpolador $P_2(x)$.

Caso geral: Pontos de descontinuidade que não coincidem com os nós da malha.

(a) Vamos supor que todas as descontinuidades se apresentam em pontos z_l tais que x_{q_l} tem subíndices pares, isto é, que $L_1 = L$.

$$\begin{aligned}
(\hat{P}_2)_k &= \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} P_2(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx,\\
&= \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p^+_{2,j}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx - \sum_{l=1}^{L_1} [\ \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l+2}} p^+_{2,q_l-2}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx +\\
&+ \int_{x_{q_l-2}}^{x_{q_l}} p^+_{2,q_l}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ ] + \sum_{l=1}^{L_1} [\ \int_{x_{q_l}}^{z_l} p_2^{(l-2)-}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx + \int_{z_l}^{x_{q_l+2}} p_2^{l+}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ ],\\
&= \hat{(p_2^+)}_k + \sum_{l=1}^{L_1} [\ \int_{x_{q_l-2}}^{x_{q_l}} (\ p_2^{(l-2)-}(x) - p^+_{2,q_l-2}(x)\ )\ e^{-2\pi i k x}\ dx +\\
&+ \int_{x_{q_l}}^{z_l} (\ p_2^{(l-2)-}(x) - p^+_{2,q_l}(x)\ )\ e^{-2\pi i k x}\ dx + \int_{z_l}^{x_{q_l+2}} (p_2^{l+}(x) - p^+_{2,q_l}(x))\ e^{-2\pi i k x}\ dx\ ].
\end{aligned}$$

Seja $dif^p_{k,l}$ à expressão que aparece sob a somatória, temos que:

$$\begin{aligned}
dif^p_{k,l} &= f_{q_l-2}\ [\int_{x_{q_l-2}}^{z_l} l^{l-2,z_l}_{2,q_l-2}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx - \int_{x_{q_l-2}}^{x_{q_l}} l^{l-2}_{2,q_l-2}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx\ ]+\\
&+ f_{q_l-1}\ [\int_{x_{q_l-1}}^{z_l} l^{l-2,z_l}_{2,q_l-1}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx - \int_{x_{q_l-2}}^{x_{q_l}} l^{l-2}_{2,q_l-1}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx\ ]+\\
&+ f_{q_l}\ [\int_{x_{q_l-2}}^{z_l} l^{l-2,z_l}_{2,q_l}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx\ ]+\\
&+ f_{q_l+1}\ [\int_{z_l}^{x_{q_l+2}} l^{l,z_l}_{2,q_l+1}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx - \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l+2}} l^{l}_{2,q_l+1}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx\ ]+\\
&+ f_{q_l+2}\ [\int_{z_l}^{x_{q_l+2}} l^{l,z_l}_{2,q_l+2}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx - \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l+2}} l^{l}_{2,q_l+2}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx\ ]+\\
&+ f^+_{q_l}\ [\int_{z_l}^{x_{q_l+2}} l^{l,z_l}_{2,q_l}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx - \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l+2}} l^{l}_{2,q_l}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx - \int_{x_{q_l-2}}^{x_{q_l}} l^{l-2}_{2,q_l}(x)\ e^{-2\pi i k x}\ dx\ ].
\end{aligned}$$

É possível reescrever esta expressão na forma:

$$dif^p_{k,l} = (f_{q_l-2} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,-2}_k(z_l) + (f_{q_l-1} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,-1}_k(z_l) + (f^-_{q_l} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,0}_k(z_l) +$$
$$+ (f_{q_l+1} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,1}_k(z_l) + (f_{q_l+2} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,2}_k(z_l),$$

onde

$$\Delta^{2,\pm 2}_k = \pm[\ \int_{z_l}^{x_{q_l\pm 2}} \frac{(x-x_{q_l\pm 1})\ (x-z_l)}{(x_{q_l\pm 2}-x_{q_l\pm 1})\ (x_{q_l\pm 2}-z_l)}\ e^{-2\pi ikx}\ dx - \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l\pm 2}} \frac{(x-x_{q_l\pm 1})\ (x-x_{q_l})}{(x_{q_l\pm 2}-x_{q_l\pm 1})\ (x_{q_l\pm 2}-x_{q_l})}\ e^{-2\pi ikx}\ dx\ ],$$

$$\Delta^{2,\pm 1}_k = \pm[\ \int_{z_l}^{x_{q_l\pm 2}} \frac{(x-x_{q_l\pm 2})\ (x-z_l)}{(x_{q_l\pm 1}-x_{q_l\pm 2})\ (x_{q_l\pm 1}-z_l)}\ e^{-2\pi ikx}\ dx - \int_{x_{q_l}}^{x_{q_l\pm 2}} \frac{(x-x_{q_l\pm 2})\ (x-x_{q_l})}{(x_{q_l\pm 1}-x_{q_l\pm 2})\ (x_{q_l\pm 1}-x_{q_l})}\ e^{-2\pi ikx}\ dx\ ],$$

$$\Delta^{2,0}_k = \int_{x_{q_l-2}}^{z_l} \frac{(x-x_{q_l-2})\ (x-x_{q_l-1})}{(z_l-x_{q_l-2})(z_l-x_{q_l-1})}\ e^{-2\pi ikx}\ dx.$$

Observar que o fator que acompanha $f^+_{q_l}$ é zero.

(b) Caso $l = L_1+1,\ldots,L$.

Neste caso a fórmula para $(\hat{P}_2)_k$ é a seguinte:

$$(\hat{P}_2)_k = \sum_{j=0}^{N/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p^+_{2,j}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx - \sum_{l=L_1+1}^{L} [\ \int_{x_{q_l-1}}^{x_{q_l+1}} p^+_{2,q_l-2}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx +$$
$$+ \int_{x_{q_l-2}}^{x_{q_l}} p^+_{2,q_l}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ ] + \sum_{l=L_1+1}^{L} [\ \int_{x_{q_l-1}}^{z_l} p_2^{(l-2)-}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx + \int_{z_l}^{x_{q_l+1}} p_2^{l+}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ ],$$
$$= \hat{p}_{2k} + \sum_{l=1}^{L_1} [\ \int_{x_{q_l-2}}^{x_{q_l}} (\ p_2^{(l-2)-}(x) - p^+_{2,q_l-2}(x)\ )\ e^{-2\pi ikx}\ dx +$$
$$+ \int_{x_{q_l}}^{z_l} (\ p_2^{(l-2)-}(x) - p^+_{2,q_l}(x)\ )\ e^{-2\pi ikx}\ dx + \int_{z_l}^{x_{q_l+2}} (p_2^{l+}(x) - p^+_{2,q_l}(x))\ e^{-2\pi ikx}\ dx\ ].$$

Seja $dif^i_{k,h} = \int_{x_{q_l-1}}^{z_l} (\ p_2^{(l-2)-}(x) - p^+_{2,q_l-1}(x)\ )\ e^{-2\pi ikx}\ dx + \int_{z_l}^{x_{q_l+1}} (\ p_2^{l+}(x) - p^+_{2,q_l-1}(x)\ )\ e^{-2\pi ikx}\ dx.$

Analogamente ao caso anterior expressamos isto como:

$$
\begin{aligned}
dif^i_{k,h} = & f_{q_l-2}\ [\int_{x_{q_l-1}}^{z_l}\ l^{l-2,z_l}_{2,q_l-2}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx]+\\
& +f_{q_l-1}\ [\int_{x_{q_l-1}}^{z_l}\ l^{l-2,z_l}_{2,q_l-1}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx - \int_{x_{q_l-1}}^{x_{q_l+1}}\ l^{l-1}_{2,q_l-1}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx\ ]+\\
& +f^-_{q_l}\ [\int_{x_{q_l-1}}^{z_l}\ l^{l-2,z_l}_{2,z_l}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx\ ]+\\
& +f_{q_l+1}\ [\int_{z_l}^{x_{q_l+1}}\ l^{l,z_l}_{2,q_l+1}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx - \int_{x_{q_l-1}}^{x_{q_l+1}}\ l^{l-1}_{2,q_l+1}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx\ ]+\\
& +f_{q_l+2}\ [\int_{z_l}^{x_{q_l+1}}\ l^{l,z_l}_{2,q_l+2}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx]+\\
& +f^+_{q_l}\ [\int_{z_l}^{x_{q_l+1}}\ l^{l,z_l}_{2,z_l}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx - \int_{x_{q_l-1}}^{x_{q_l+1}}\ l^{l-1}_{2,q_l}(x)\ e^{-2\pi ikx}\ dx].
\end{aligned}
$$

Equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
dif^i_{k,l} = & (f_{q_l-2} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,-2}_k(z_l) + (f_{q_l-1} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,-1}_k(z_l) + (f^-_{q_l} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,0}_k(z_l)+\\
& +(f_{q_l+1} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,1}_k(z_l) + (f_{q_l+2} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,2}_k(z_l),
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\bar{\Delta}^{2,\pm 2}_k = \pm\ \int_{z_l}^{x_{q_l\pm 1}}\ \frac{(x-x_{q_l\pm 1})\ (x-z_l)}{(x_{q_l\pm 2}-x_{q_l\pm 1})\ (x_{q_l\pm 2}-z_l)}\ e^{-2\pi ikx}\ dx,
$$

$$
\bar{\Delta}^{2,\pm 1}_k = \pm[\ \int_{z_l}^{x_{q_l\pm 1}}\ \frac{(x-x_{q_l\pm 2})\ (x-z_l)}{(x_{q_l\pm 1}-x_{q_l\pm 2})\ (x_{q_l\pm 1}-z_l)}\ e^{-2\pi ikx}\ dx - \int_{x_{q_l-1}}^{x_{q_l+1}}\ \frac{(x-x_{q_l\mp 1})\ (x-x_{q_l})}{(x_{q_l\pm 1}-x_{q_l\mp 1})\ (x_{q_l\pm 1}-x_{q_l})}\ e^{-2\pi ikx}\ dx\ ],
$$

$$
\bar{\Delta}^{2,0}_k = \int_{x_{q_l-1}}^{z_l}\ \frac{(x-x_{q_l-2})\ (x-x_{q_l-1})}{(z_l-x_{q_l-2})(z_l-x_{q_l-1})}\ e^{-2\pi ikx}\ dx.
$$

Considerando agora as duas situações descritas anteriormente temos que,

$$
\begin{aligned}
(\hat{P}_2)_k = & (\hat{p_2^+})_k + \sum_{l=1}^{L_1}(f_{q_l-2} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,-2}_k(z_l) + (f_{q_l-1} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,-1}_k(z_l)+\\
& +(f^-_{q_l} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,0}_k(z_l) + (f_{q_l+1} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,1}_k(z_l) + (f_{q_l+2} - f^+_{q_l})\ \Delta^{2,2}_k(z_l)+\\
& + \sum_{l=L_1+1}^{L}\ (f_{q_l-2} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,-2}_k(z_l) + \quad +(f_{q_l-1} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,-1}_k(z_l)+\\
& +(f^-_{q_l} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,0}_k(z_l) + (f_{q_l+1} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,1}_k(z_l) + (f_{q_l+2} - f^+_{q_l})\ \bar{\Delta}^{2,2}_k(z_l),
\end{aligned}
$$

Porquanto

$$
(\hat{p_2^+})_k = \tau^{(1)}_{k,l}\ \tilde{f}_k + \tau^{(2)}_{k,l}\ \tilde{f}_{N/2+k},
$$

onde $\tau^{(1)}_{k,h} = \tilde{\tau}^{(1)}_{k,h} + \tilde{\tau}^{(2)}_{k,h}, \qquad \tau^{(2)}_{k,h} = \tilde{\tau}^{(1)}_{k,h} - \tilde{\tau}^{(2)}_{k,h}$ com

$$\tilde{\tau}^{(1)}_{k,l} = \frac{1}{2h^3}\ \{\frac{3h}{(2\pi k)^2} + \frac{h}{(2\pi k)^2}\ \cos(4\pi kh) - \frac{2}{(2\pi k)^3}\sin(4\pi kh)\},$$

$$\tilde{\tau}^{(2)}_{k,l} = -\frac{1}{2h^3}\ \{\frac{2h}{(2\pi k)^2}\ \cos(2\pi kh) - \frac{2}{(2\pi k)^3}\sin(2\pi kh)\},$$

resulta então que

$$\hat{P}_{2k} = \tau^{(1)}_{k,h}\ \tilde{f}_k + \tau^{(2)}_{k,h}\ \tilde{f}_{N/2+k} + \sum_{l=1}^{L_1} dif^p_{k,l} + \sum_{l=L_1+1}^{L} dif^i_{k,l}.$$

Esta última expressão mostra o filtro de grau 2 junto com a correção determinada pelas descontinuidades da função.

Fórmula de reconstrução de grau 2.

Considerando na expressão anterior os coeficientes de Fourier para as freqüências $k \pm N/2$, e usando a N-periodicidade da transformada discreta de Fourier obtém-se que,

$$\tau^{(1)}_{k+rN/2,h}(\hat{P}_2)_k - \tau^{(2)}_{k,h}(\hat{P}_2)_{k+rN/2} = [\tau^{(1)}_{k+rN/2,h}\tau^{(1)}_{k,h} - \tau^{(2)}_{k,h}\tau^{(2)}_{k+rN/2,h}]\ \tilde{f}^+_k +$$
$$+\sum_{l=1}^{L_1}\ [\tau^{(1)}_{k+rN/2,h}dif^p_{k,l} - \tau^{(2)}_{k,h}dif^p_{k+rN/2,l}] + \sum_{l=L_1+1}^{L}\ [\tau^{(1)}_{k+rN/2,h}dif^i_{k,l} - \tau^{(2)}_{k,h}dif^i_{k+rN/2,l}].$$

Denotamos por g_j as aproximações para os valores de f^+_j. Porquanto $P_2(x)$ é o interpolador por partes da função descontinua f, da última equação obtemos a seguinte fórmula de reconstrução no espaço de Fourier,

$$\tilde{g}_k = (\tau^s_{k,h})^{-1}[\tau^{(1)}_{k+rN/2,h}\ \hat{f}_k - \tau^{(2)}_{k,h}\ \hat{f}_{k+rN/2}] - \sum_{l=1}^{L_1}\ (\tau^s_{k,h})^{-1}[\tau^{(1)}_{k+rN/2,h}dif^p_{k,l} - \tau^{(2)}_{k,h}dif^p_{k+rN/2,l}] -$$
$$- \sum_{l=L_1+1}^{L}\ (\tau^s_{k,h})^{-1}[\tau^{(1)}_{k+rN/2,h}dif^i_{k,l} - \tau^{(2)}_{k,h}dif^i_{k+rN/2,l}],$$

onde $\tau^s_{k,h} = \tau^{(1)}_{k+rN/2,h}\tau^{(1)}_{k,h} - \tau^{(2)}_{k,h}\tau^{(2)}_{k+rN/2,h} = \dfrac{s}{2(2\pi)^s}\ [\dfrac{\sin(2\pi kh)}{kh\ (k+sN/2)h}]^3.$

Observar que na fórmula de reconstrução apresentada temos $5L$ incógnitas que serão determinadas através da resolução de um sistema linear.

A notação é a seguinte:

Sejam $\gamma^s_{k,h} = \tau^s_{k,h}\ \tau^{(2)}_{k,h}$, para $s = \pm 1$ e $\gamma^0_{k,h} = \tau^1_{k,h}\tau^{(1)}_{k+N/2,h} - \tau^{-1}_{k,h}\tau^{(1)}_{k-N/2,h}$.

$\sigma^{(1)}_{k,h} = (\tau^s_{k,h})^{-1}\ \tau^{(1)}_{k+sN/2,h}$ e $\sigma^{(2)}_{k,h} = (\tau^s_{k,h})^{-1}\ \tau^{(2)}_{k,h}$, com $s = -1$,

$f^0_j = IFFT_j(\sigma^{(1)}_{k,h}\ \hat{f}_k - \sigma^{(2)}_{k,h}\ \hat{f}_{k-N/2})$, para $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Sejam para $l = 1, \ldots, L_1$, $x^l_j = f_{q_l+j} - f^+_{q_l}$, para $j = \pm 1, \pm 2$ e $x^l_0 = f^-_{q_l} - f^+_{q_l}$,

$d_{k,l,j} = \gamma^{-1}_{k,h}\Delta^{2,j}_{k-N/2}(z_l) + \gamma^0_{k,h}\Delta^{2,j}_k(z_l) - \gamma^1_{k,h}\Delta^{2,j}_{k+N/2}(z_l)$,

$R^s_{k,j}(z_l) = (\tau^s_{k,h})^{-1}\ [\tau^{(1)}_{k+sN/2,h}\ \Delta^{2,j}_k(z_l) - \tau^2_{k,h}\Delta^{2,j}_{k+sN/2}(z_l)\ ]$, $s = \pm 1$.

$S_{j,m}(z_l) = ifft_j\ (R^1_{k,m}(z_l))$ $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

Sejam para $l = L_1+1, \ldots, L$, $y^l_j = f_{q_l+j} - f^+_{q_l}$, para $j = \pm 1, \pm 2$ e $y^l_0 = f^-_{q_l} - f^+_{q_l}$,

$\bar{d}_{k,l,j} = \gamma^{-1}_{k,h}\bar{\Delta}^{2,j}_{k-N/2}(z_l) + \gamma^0_{k,h}\bar{\Delta}^{2,j}_k(z_l) - \gamma^1_{k,h}\bar{\Delta}^{2,j}_{k+N/2}(z_l)$,

$\bar{R}^s_{k,j}(z_l) = (\tau^s_{k,h})^{-1}\ [\tau^{(1)}_{k+sN/2,h}\ \bar{\Delta}^{2,j}_k(z_l) - \tau^2_{k,h}\bar{\Delta}^{2,j}_{k+sN/2}(z_l)\ ]$, $s = \pm 1$.

$\bar{S}_{j,m}(z_l) = ifft_j\ (\bar{R}^1_{k,m}(z_l))$ $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

O sistema linear a ser resolvido é:

$$\sum_{m=-2}^{2} \Big(\sum_{l=1}^{L_1} x^l_m\ d_{k,l,m}(z_l) + \sum_{l=L_1+1}^{L} y^l_m\ \bar{d}_{k,l,m}(z_l)\ \Big) = \sum_{s=-1}^{1} \gamma^s_{k,h}\ \hat{f}_{k+sN/2}.$$

As restantes $4L$ equações resultam de:

$$g_{q_r+i} - g_{q_r} = f^0_{q_r+i} - f^0_{q_r} - \sum_{m=-2}^{2}\sum_{l=1}^{L_1} x^l_m\ (S_{q_r+i,m}(z_l) - S_{q_r,m}(z_l)) +$$
$$+ \sum_{l=L_1+1}^{L} y^l_m\ (\bar{S}_{q_r+i,m}(z_l) - \bar{S}_{q_r,m}(z_l)),$$

para $r = 1, 2, \ldots, L$, $i = \pm 1, \pm 2$.

Com os valores de x^l_m, e y^l_m, $m = 0, \pm 1, \pm 2$, e $l = 1, \ldots, L$ determinados, calculam-se as aproximações pontuais para os valores discretos de f através da expressão:

$$g_j = f_j^0 - \sum_{m=-2}^{2} \left(\sum_{l=1}^{L_1} x_j^l \; S_{j,m}^s(z_l) + \sum_{l=L_1+1}^{L} y_j^l \; \bar{S}_{j,m}^s(z_l) \right),$$

para $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Interpolador Uniforme

Observar que o caso mais simples em que os pontos de descontinuidade coincidem com os nós da malha esta incluído neste caso mas geral e resulta de substituir nas fórmulas z_l por x_{q_l}.

Quando os pontos de descontinuidade coincidem com os nós da malha, alguns termos na fórmula de reconstrução resultam reduzidos, pois neste caso temos que:

$$dif_{k,l}^p = (f_{q_l}^- - f_{q_l}^+) \; \Delta_k^{2,0}(x_{q_l}), \quad l = 1, 2, \ldots, L_1,$$
$$dif_{k,l}^i = (f_{q_l+2} - f_{q_l}^+) \; \bar{\Delta}_k^{2,-2}(x_{q_l}) + \ldots + (f_{q_l+2} - f_{q_l}^+) \; \bar{\Delta}_k^{2,2}(x_{q_l}), \quad l = L_1 + 1, \ldots, L.$$

Neste caso o tamanho do sistema linear a ser resolvido para poder aplicar a fórmula de reconstrução é menor: $(5L - 4L_1) \times (5L - 4L_1)$.

Bibliografia

[1] N. S. Banerjee and J. Geer. Exponentially accurate approximations to periodic lipschitz functions based on fourier series partial sums *Journal of Scientific Computing*, Vol 13, Issue 4, 1998.

[2] M. Bôcher. Introduction to the theory of Fourier's series. *Ann. of Math.*, (2) 7 (1905-1906), 81.

[3] C. de Boor. A practical guide to splines. *New York: Springer-Verlag*, 1978.

[4] W. L. Briggs and V. E. Henson. The DFT, An owner's manual for the Discrete Fourier Transform. *SIAM, Philadelphia*, 1995.

[5] H. S. Carslaw. A historical note on Gibbs's phenomenon in Fourier's series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31 (1925), 420.

[6] K. S. Eckhoff. Accurate Reconstructions of functions of finite regularity from truncated series expansions. *Math. Comp.*, 64, 671-690 (1995).

[7] K. S. Eckhoff. On a high order numerical method for functions with singularities. *Math. Comp.*, 67, 1063-1087 (1998).

[8] A. Gelb and E. Tadmor. Detection of edges in spectral data. *Appl. and Comp. Harm. Anal.*, 7, 101-135 (1999).

[9] A. Gelb and E. Tadmor. Detection of edges in spectral data II. Nonlinear enhancement. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38, 1389-1408 (2000).

[10] J. W. Gibbs. *Letter in Nature*, 59 (1898-1899), 200.

[11] J. W. Gibbs. *Letter in Nature*, 59 (1898-1899), 606.

[12] D. Gottlieb, C.-W. Shu, A. Solomonoff and H. Vandeven. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from Fourier partial sum of nonperiodic analytic functions. *J. Comp. Appl. Math.*, 43 (1992), 81.

[13] D. Gottlieb, B. Gustafsson, and P. Forssen. On the direct Fourier method for computer tomography. *IEEE Transactions of Medical Imaging*, 19, 223-233 (2000).

[14] M. Y. Hussaini, D. A. Copriva, M. D. Salas and T. A. Zhang. Spectral methods for the Euler equations: Fourier methods and shock-capturing. *ICASE Report*, No. 85 - 38, 1985.

[15] A. A. Michelson and S. W. Stratton. A new harmonic analyzer. *Philosophical Magazine*, (5), 45 (1898), 85.

[16] I. J. Schoenberg. Cardinal Spline Interpolation. *CBMS-NSF Series in Appied Math.*, No 12, SIAM, Philadelphia, 1973.

[17] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden. B-spline signal aproximations filter design and asymptotic equivalence with shannon's sampling theorem. *IEEE Trans. Information Theory*, vol 38,n 1, pp. 95-103(1992).

[18] D. H. Vandeven. Family of spectral filters for discontinuous problem. *J. Sci. Comp.*, 6, 159-192 (1991).

[19] M. Wei, A. R. De Pierro and J. Yin. Error estimates for two filters based on polynomial interpolation for recovering a function from its Fourier coefficients. *Numerical Algorithms*, 35, 205-232, (2004).

[20] M. Wei, A.R. De Pierro and J. Yin. Iterative methods based on polynomial interpolation filters to detect discontinuities and recover point values from Fourier data. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53, 1, 136-146. January 2005.

[21] M. Wei, A.R. De Pierro and J. Yin. Reconstruction of a compactly supported function from the discrete sampling of its Fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 47, No 12, 3356-3364, 1999.

[22] H. Wilbraham. On certain periodic function. *Cambridge and Dublin Math. J.*, (3) 198, 1848.

[23] A. Zygmund. Trigonometric Series. *Cambridge University Press*, 1959.