CONJUNTOS DE PERÍMETRO FINITO

Ivam Resina

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação da Universidade de Campinas, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campinas - Brasil
1973

A meus pais

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Neste trabalho veremos uma definição de medida (n-1)dimensional da fronteira orientada de um conjunto de Borel contido em um espaço euclideano de dimensão n e demonstraremos algumas das mais importantes propriedades de tal medida.

Os fundamentos desta teoria foram também afirmados por R. Caccioppoli, em geral para a medida (n-h)dimensional. Tais fronteiras não são consideradas como simples conjuntos de pontos mas como conjuntos orientados, para os quais se define não só a medida absoluta mas ainda a medida relativa das projeções sobre um qualquer hiperplano (Ver [1]).

Caccioppoli se propôs a dar uma teoria geral de integração das formas diferenciais e uma extensão completa da fórmula de Green-Stokes. Mas a maneira suscinta com que o autor esquematiza suas próprias hipóteses e deduções tornam o trabalho obscuro.

Os comentários de L.C. Young no Mathematical Reviews (vol.13-nº 9) e (vol.13-nº 10) sugerem a ordem de dificuldade da teoria.

Ao mesmo tempo e independentemente E. De Giorgi alcança os mesmos resultados partindo de um outro ponto de vista e com intenção diferente. Embora o trabalho de De Giorgi não apresente a mesma obscuridade e imprecisões dos trabalhos de Caccioppoli, é de leitura difícil e muitos detalhes são deixados a esclarecer. Minha principal contribuição foi esclarecer e demonstrar vários dos resultados nele contidos.

Faremos antes, um resumo do desenvolvimento histórico do assunto.

É conhecido que, até mesmo no campo das variedades clássicas, o problema de extender teorias de medidas euclideanas, como por exemplo áreas de figuras planas, para dimensões superiores, encontram sérias dificuldades, não só do ponto de vista de formulação desde que considerar figuras como conjunto de pontos pode ser criticado: Sind Elementar Geometrische Figuren Mengen? Elemente der Mathematik, 7, p.25-28 - 1952, como também do ponto de vista "técnico".

Uma definição satisfatória de comprimento de arco foi dada por C. Jordan em seu: Cours D'Analyse, 1884, e uma fórmula de calculá-lo por L. Tonelli, em 1908.

Teorema de Tonelli: Seja C uma curva retificável, i.é: $\ell(C)<\infty$. Então:

$$\ell(C)\geq \int_a^b \left[x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\right]^{1/2} dt$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são absolutamente contínuas.

Isto depende basicamente de resultados prévios de H. Lebesgue: Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives, 1904, dizendo que toda função de variação limitada tem derivada q.s. que é L-integrável, o qual, junto com o fato de que uma curva é retificável se, e somente se, é de variação limitada, dão significado para a integral que aparece no teorema de Tonelli. Isto não é verdade no domínio da integral de Riemann.

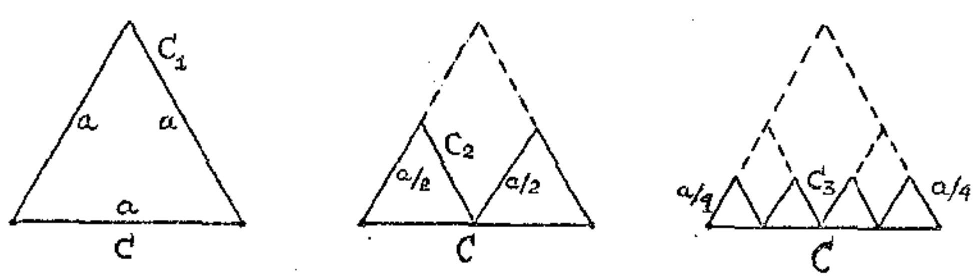
Para extender estes resultados a dimensões superiores encontramos sérias dificuldades. A definição de comprimento de Jordan não se generaliza mesmo para superfícies e neste sentido ficou célebre o exemplo de Schwartz-Peano ([2], p.24).

Uma conveniente definição foi dada na tese de Lebesgue: Integrale, Longueur, Aire, Annali Mat. Pura Appl.,7, 1902,usando um duplo processo de limite: ínfimo de limites inferiores de áreas de superfícies poliedrais inscritas.

Esta idéia comparece nos trabalhos de Caccioppoli e De Giorgi.

No tocante à convergência devemos garantir pelo menos a semi-continuidade para os funcionais envolvidos, por exemplo, a área.

Pedir a continuidade é muito restritivo no sentido de que o comprimento de arco não é contínuo até mesmo para a convergência uniforme de curvas. O exemplo abaixo ilustra esse fato.



Temos que $Cn \xrightarrow{u} C$ mas $\ell(Cn)=2a \quad \forall n$ e $\ell(C)=a$.

Mas o funcional ℓ é semi-contínuo e para os propósitos de cálculo de variações a semi-continuidade é satisfatória.

Existem 3 linhas principais de generalização da idéia de superfície.

Na linha de teoria da medida consideramos a superfície como um conjunto de pontos e tentamos generalizar os aspectos de teoria da medida para os subconjuntos de R^n. Nesta direção é importante a medida de Hausdorff.

Na linha de transformações $T: U \subset R^k \to R^n$ seguimos o modelo de Jordan e Lebesgue. Nesta linha situam-se os trabalhos de L. Tonelli, T. Rado, L. Cesari e outros.

Outra direção é semelhante à teoria das distribuições. Este é essencialmente o ponto de vista de olhar uma variedade generalizada como completamento de uma classe de variedades elementares. As técnicas repousam praticamente em análise funcional e teoria da medida. Esta linha se relaciona com a primeira já mencionada.

Destacam-se, nesta direção a teoria das variedades generalizadas de L. C. Young e intimamente ligados estão os conjuntos de perímetro finito, sobre os quais repousa nossa dissertação.

Estes conjuntos foram introduzidos por E. De Giorgi em [7].

Assim, seja E um conjunto de Borel de R^n e λ um número positivo.

O perímetro de E é definido, no capítulo 1, como:

$$P(E) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} |grad\{ g_\lambda * X_E\}(x)|dx$$

onde $x \in R^n$, dx é a medida de Lebesgue em R^n, $*$ é o produto de convolução usual e como função regularizadora é usada

$$g_\lambda(x) \doteq (\pi\lambda)^{-n/2} \exp(-|x|^2/\lambda)$$

No capítulo 2, vemos uma condição necessária e suficiente para que um conjunto E tenha perímetro finito, ou seja:

O perímetro P(E) é finito se, e somente se, existe uma função vetorial de conjunto Φ definida na classe de todos os borelianos de R^n e com valores em R^n, completamente aditiva e com variação total limitada tal que:

$$\int_E \text{grad } g(x)dx = \int_{R^n} g(x)d\Phi$$

para toda $g(x)$ tal que juntamente com suas derivadas parciais primeiras é contínua em R^n, infinitésima para $|x|\to\infty$ e de ordem não inferior a $|x|^{-(n+1)}$.

Neste caso

$$P(E) = \int_{R^n} d|\Phi|$$

Estes conjuntos tem sido aplicados ao problema de Plateau por E. De Giorgi em [5] e à teoria do potencial por J. Král [12].

Esta teoria relaciona-se com a teoria de Young, como mostrou, entre outros W. H. Fleming [8]. Ver também U. D'Ambrósio [3].

Vemos que, a variação total da função aditiva Φ, que se identifica com a medida $(n-1)$, dimensional segundo Caccioppoli, é, neste trabalho, o perímetro do conjunto E.

No capítulo 3, temos uma analogia com a idéia original ~~de Lebesgue~~, mencionada nesta introdução, ou seja, que o perímetro de um conjunto $E \subset R^n$ $(n\geq 2)$ é o limite inferior dos perímetros dos conjuntos poliedrais que aproximam em média E. Damos também uma demonstração do teorema de semi-continuidade do perímetro, essencial para aplicações desta teoria ao cálculo de variações.

Quero expressar aqui os meus agradecimentos ao Prof. Ubiratan D'Ambrósio, pela orientação e estímulo que me dispensou durante a execução desta tese, aos colegas Benjamin Bordin, Rodney C. Bassanezzi, João F. C. A. Meyer, Otília T. W. Poques e Dicesar L. Fernandez pelas críticas apresentadas.

Agradeço também ao Prof. A. Katsaras pelas sugestões.

Finalmente, ao Seiji Hariki, da U.S.P., vai o meu abraço.

Capítulo 0

Preliminares

Convencionaremos, por simplicidade, que toda vez que neste trabalho falarmos em conjunto contido em um espaço euclideano R^n e de função aí definida, entenderemos sempre conjunto de Borel e função mensurável.

Os conceitos e notações de teoria dos conjuntos aqui empregados, são os de uso corrente na literatura e portanto serão considerados familiares.

Dado o elemento $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ de R^n, definiremos <u>módulo de x</u> e vamos representar por $|x|$ o número real:

$$|x| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]^{1/2}$$

A <u>bola aberta</u> de centro $x_o \in R^n$ e raio $\rho > 0$ será representada por $B(x_o, \rho)$.

Diremos que uma <u>aplicação</u> $f: R^n \to R^m$ é <u>lipschitziana</u> se existir uma constante $M > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y| \text{ para todos } x, y \in R^n$$

Um <u>hiperplano</u> no R^n é um conjunto da forma $\{x: a.x = C\}$ onde $C \in R$ e a é um vetor não nulo. O hiperplano se reduz a um ponto, reta ou plano respectivamente para $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$.

Uma coleção Ω de conjuntos abertos em R^n será chamada uma <u>família substancial</u> se:

(a) Existe uma constante $\beta < \infty$ tal que cada $E \in \Omega$

está contida em uma bola aberta B com m (B) < β m (E), onde m denota a medida de Lebesgue em R^n.

(b) Para todo $x \in R^n$ e $\delta > 0$ existe $E \in \Omega$ cujo diâmetro é menor que δ e $x \in E$.

Lembramos que

$$\text{diam } E = \sup \{|x-y| : x \in E,\ y \in E\}$$

A condição (a) equivale a dizer que os elementos de Ω não podem ser muito longos e finos; se o volume é pequeno, o diâmetro deve ser pequeno.

Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $f: X \to R$ diz-se inferiormente semi-contínua em x_0 (i.s.c.) se para todo $\lambda > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$f(x_0) \leq f(x) + \lambda \text{ para todo } x \text{ em } V$$

Esta definição é equivalente a:

$$f(x_0) \leq \underline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$$

Uma função $f : [a,b] \to R$ é de variação limitada (V.L.) em $[a,b]$ se a sua variação total

$$V(f) = \sup \{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\}$$ é finita; onde o supremo é tomado sobre todas as partições P de $[a,b]$, i.é : $P \in \mathcal{P}[a,b]$

Uma função $f: [a,b] \to R$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ (A.C.) se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para qualquer conjunto finito de sub-intervalos não superpostos (a_i, b_i) de $[a, b]$

satisfazendo:

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \text{ tem-se } \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$$

Toda função absolutamente contínua em $[a, b]$ é contínua e de variação limitada mas a recíproca é falsa ([14] , p. 105)

Se $f(x)$ é de variação limitada em $[a,b]$ então $f(x)$ tem derivada quase-sempre (q.s.) em $[a,b]$ e

$$V_a^b (f) \geq \int_a^b |f'(x)|dx$$

valendo a igualdade se, e somente se, $f(x)$ é absolutamente contínua ([11] , p. 23).

Se $f(x)$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ então:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy \qquad \text{para todo } x \in [a, b]$$

([14] , p. 106)

Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções em $[a, b]$ que converge em cada ponto de $[a, b]$ para uma função f, então:

$$V_a^b (f) \leq \underline{\lim} \; V_a^b (f_n) \qquad ([14] , \text{p. } 101)$$

Dada uma função vetorial $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ definida em $[a,b]$ e com valores no R^n, diremos que $f(x)$ é V.L. ou A.C. em $[a, b]$ se, e somente se, cada componente $f_i(x)$ é V.L. ou A.C. em $[a,b]$.

Dado um conjunto mensurável A de medida positiva e um número real $p \geq 1$ denotaremos por $L^p(A)$ o conjunto de todas as funções reais definidas em A tal que $|f|^p$ é integrável sobre A.

A integral, neste trabalho, é sempre entendida no sentido de Lebesgue.

Convencionaremos também que, toda vez que não houver ambiguidade, substituiremos a medida de Lebesgue em R^n, $d\xi_1 \ldots d\xi_n$ - por $d\xi$.

A p - norma de uma função $f \in L^p(A)$ é o número:

$$\| f \| p = \left(\int_A |f|^p \right)^{1/p}$$

Uma sequência $\{fm\}$ <u>converge em média de ordem</u> p <u>para</u> uma função f se $\| fm-f \| p \to 0$ quando $m \to \infty$.

O conjunto das funções limitadas em A será denotado por $L^\infty(A)$ e neste espaço definiremos a seguinte norma:

$$\|f\|_\infty = \sup \text{ess} \{ |f(x)| ; x \in A \}$$

Uma <u>função de conjunto $\Phi(S)$ é completamente aditiva</u> - se :

$$\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(S_n)$$

para toda sequência $\{S_n\}$ para a qual Φ está definida e tal que - $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Dada a função vetorial de conjunto Φ, completamente' aditiva, definida na classe dos borelianos de R^k e com valores no R^n, i.é.; $\Phi(B) \equiv (\Phi_1(B), \ldots, \Phi_n(B))$ onde Φ_i são funções de conjuntos definidas na mesma classe, sua variação total $|\Phi|$ é a função de conjunto, completamente aditiva, dada por :

$$|\Phi| (B) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\Phi(B_i)| : (B_i) \text{ são partições de Borel de } B \right\}$$

onde por partição de Borel de B se entende uma sequência (B_i) de borelianos do R^k, dois a dois disjuntos, tais que: $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ e $|\Phi(B_i)|$ é o módulo do vetor $\Phi(B_i)$.

Vamos detalhar estas considerações que serão importantes no texto.

Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra num conjunto X.

Uma medida μ (real ou complexa) em $\mathcal{M}$ é uma função em $\mathcal{M}$ tal que :

$$(1) \qquad \mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \quad \text{para toda partição de } E$$

Devemos exigir que a série (1) convirja (não é o caso de medidas positivas onde a série ou converge ou diverge para $+\infty$). Desde que a união de conjuntos E_i não varia se os índices são permutados, então todo rearranjo da série (1) deve também convergir . Assim (1) deve convergir absolutamente.

Definamos a função de conjunto $|\mu|$ em $\mathcal{M}$ por:

$$|\mu|(E) = \sup \{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|\} \quad (E \in \mathcal{M})$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições de E.

Temos que $|\mu|(E) \geqslant |\mu(E)|$

A função de conjunto $|\mu|$ é chamada variação total de μ.

TEOREMA A variação total $|\mu|$ de uma medida complexa μ em $\mathcal{M}$ é uma medida positiva em $\mathcal{M}$. Este teorema mostra que, de fato, $|\mu|$ é uma medida e por esta razão é as vezes chamada de medida de variação total. ([15], teor. 6.2)

O termo "variação total de μ" é também usado para denotar o número $|\mu|(X)$.

Se μ é uma medida positiva, então $|\mu| = \mu$.

TEOREMA Se μ é uma medida complexa em X então $|\mu|(X) < \infty$. ([15], teor. 6.4)

Desde que:

$$|\mu(E)| \leqslant |\mu|(E) \leqslant |\mu|(X)$$

isto implica que toda medida complexa μ numa σ - algebra é limitada e diremos que μ é de variação limitada.

Seja agora μ uma medida real sobre uma σ - álgebra $\mathcal{M}$.

Definamos $|\mu|$ como anteriormente e seja:

$$\mu^+ = 1/2\ (|\mu| + \mu) \quad \text{e} \quad \mu^- = 1/2\ (|\mu| - \mu)$$

Ambas as medidas μ^+ e μ^- são positivas em $\mathcal{M}$ e são limitadas pelo teorema acima.

Ainda mais:

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad , \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

As medidas μ^+ e μ^- são as variações positivas e negativa de μ, respectivamente.

Esta representação de μ como diferença de duas medidas positivas μ^+ e μ^- é conhecida como decomposição de Jordan de μ.

Seja μ uma medida positiva numa σ - álgebra $\mathcal{M}$ e seja λ uma medida arbitrária em $\mathcal{M}$, (real ou complexa). (Lembremos que o termo "medida positiva" inclue $+\infty$ como valor admissível e portanto as medidas positivas não formam uma sub-classe das medidas complexas).

Diremos que λ é absolutamente contínua com respeito a μ e escreveremos:

$$\lambda << \mu$$

se $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$.

TEOREMA Se $\lambda << \mu$ então $|\lambda| << \mu$
([15] p. 121)

TEOREMA Sejam μ e λ medidas numa σ- álgebra $\mathcal{M}$, μ é uma medida positiva e λ é complexa. Então as duas condições abaixo são equivalentes:

(a) $\lambda << \mu$

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\lambda(E)| < \varepsilon$ para todo $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) < \delta$. ([15] teorema 6.11)

TEOREMA Seja μ uma medida positiva em $\mathcal{M}$, $g \in L^1(\mu)$ e

$$\lambda(E) = \int_E g \, d\mu$$

Então $|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu$

([15] teorema 6.13)

Todos estes conceitos poderão ser vistos tambem em [16].

Deste modo, se F é uma função vetorial de conjunto, completamente aditiva, sua variação total será, por conveniência, também representada por:

$$V(f,B) = |F|(B) = \int_B |dF| = \int_B d|F|$$

Capítulo 1

§1 - O operador W_λ

Estabeleceremos que, dados dois operadores T_1 e T_2, indicaremos com $T_1\ T_2f(x)$ à função obtida aplicando a $T_2f(x)$ o operador T_1.

Consideremos agora o espaço euclidiano R^n, cujo ponto genérico indicamos com $x \equiv (x_1,\ldots, x_n)$ e definamos, para cada valor do parâmetro λ, o operador W_λ, da seguinte maneira:

$$(1.1.1) \qquad W\lambda f(x) = \pi^{-n/2}\int_{R^n} e^{-|\xi|^2} f(x+\sqrt{\lambda}\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

onde f é uma função escalar, limitada, definida em R^n.

Da (1.1.1) segue, por uma mudança de variável:

$$W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{\lambda}} f(x+\xi)\, d\xi_1\ldots d\xi_n$$

$$(1.1.2) \qquad = (\pi\lambda)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} f(\xi)\, d\xi_1\ldots d\xi_n$$

O operador W_λ, definido acima, pode ser visto, como o seguinte produto de convolução:

$$W_\lambda f(x) = g_\lambda * f\ (x)$$

onde $g_\lambda(x) = (\pi\lambda)^{-n/2} \exp\ (-|x|^2/\lambda)$

Para cada valor positivo do parâmetro λ a função $g_\lambda: R^n \to R$ tem as seguintes propriedades:

$$(1.1.3) \qquad (a) \int_{R^n} g_\lambda(x)\, dx_1\ldots dx_n = 1$$

isto é: $\| g_\lambda \|_1 = 1$ pois $g_\lambda > 0$.

(1.1.4) (b) $\forall r > 0$ teremos:

$$\int_{|x|>r} g_\lambda(x)\,dx \to 0 \quad \text{para } \lambda \to 0$$

Com efeito:

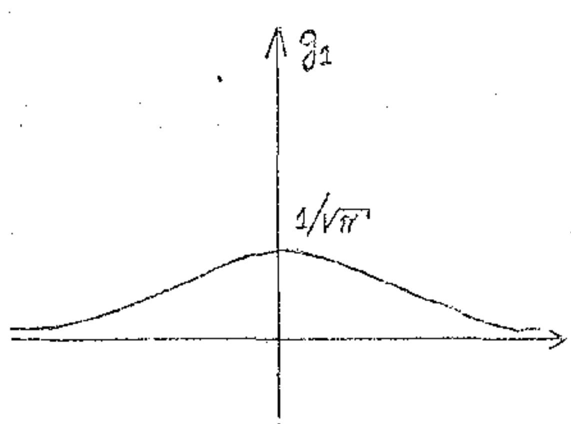
$$\int_{|x|>r} g_\lambda(x)\,dx = \int_{|y|>\frac{r}{\lambda}} g_1(y)\,dy \to 0 \text{ para } \lambda \to 0$$

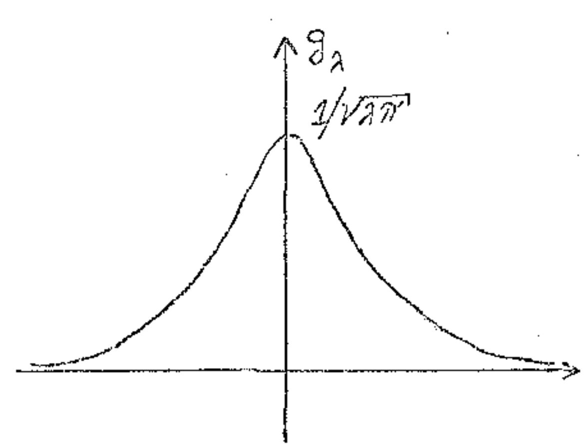
pois $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e a região de integração é o complementar da esfera de raio $\frac{r}{\lambda}$ que tende a ∞ quando λ tende a zero.

O significado destas propriedades é que, ao fazer $\lambda \to 0$, as funções g_λ apresentam um "pico" na origem, sempre mais alto e mais estreito, de modo que resulte:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(x)\,dx = 1 \quad \forall \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \int_{|x|>r} g_\lambda(x)\,dx \to 0 \quad \text{para } \lambda \to 0$$

Uma ilustração no caso n = 1 segue abaixo:





§2 - Proposições relativas ao operador W_λ

Proposição 1

Para cada função limitada $f(x)$ e para cada valor positivo do parâmetro λ, a função $W_\lambda f(x)$ resulta contínua e limitada em todo o espaço R^n, juntamente com todas suas derivadas parciais de qualquer ordem.

Demonstração: Como $f(x)$ é limitada, temos que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in R^n$.

Assim: $$|W_\lambda f(x)| = \left|(\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{\frac{-|\xi|^2}{\lambda}} f(x+\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n\right|$$

$$\leq (\pi\lambda)^{-n/2} M \int_{R^n} e^{\frac{-|\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \ldots d\xi_n = M \quad ,$$

ou seja $W_\lambda f(x)$ é limitada pela mesma constante M.

Provemos agora que $W_\lambda f(x)$ é contínua em R^n. Com efeito, seja $x_o \in R^n$ e consideremos a sequência $\{x_m\}$ convergindo para x_o.

Seja $F(x, \xi) = e^{\frac{-|x-\xi|^2}{\lambda}} f(\xi)$

Como $F(x, \xi)$ é contínua em x_o, então:

$$\lim_{m\to\infty} F(x_m, \xi) = F(x_o, \xi) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Ainda mais: $|F(x, \xi)| \leq M\, e^{\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}$, então pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue teremos:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{R^n} F(x_m, \xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m = \int_{R^n} F(x_o, \xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

ou seja: $\lim_{m\to\infty} W_\lambda f(x_m) = W_\lambda f(x_o)$

Como $\underline{x_o}$ é um ponto qualquer de R^n teremos que $W_\lambda f(x)$ é contínua em R^n.

Para provarmos que as derivadas parciais de $W_\lambda f(x)$ são contínuas e limitadas basta verificarmos que podemos fazer a derivação sob o sinal de integração, pois neste caso teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x_h} W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} 2\frac{(x_h-\xi_h)}{\lambda} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{\lambda}} f(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \qquad (a)$$

ou, mais geralmente:

$$D^\alpha W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} P_\alpha (x_i - \xi_i)\, e^{\frac{-|x-\xi|^2}{\lambda}} f(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \qquad (b)$$

onde $P_\alpha (x_i - \xi_i)$ é um polinômio de ordem $\underline{\alpha}$ em $(x - \xi)$ e

$$D^\alpha W_\lambda f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} W_\lambda f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}\, \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{e} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

As fórmulas (a) e (b) são contínuas e limitadas e a demonstração é análoga ao caso anterior da função $W_\lambda f(x)$.

Vale o seguinte:

<u>Teorema</u> ([17], p. 62) Se h admite uma derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial x}(x,\xi)$, para quase todos os valores de ξ, se $\frac{\partial h}{\partial x}(x,\xi)$ é separadamente contínua em x para quase todos os valores de ξ e majorada, em módulo, por uma $g(\xi) \geq 0$ integrável, então a integral $F(x) = \int_{R^n} h(x,\xi)\, d\xi$ é contínua e derivável e

$$F'(x) = \int_{R^n} \frac{\partial h}{\partial x}(x,\xi)\, d\xi$$

O teorema anterior, nos possibilita a derivação sob o sinal de integração requerida anteriormente. Assim nossa proposição fica completamente demonstrada.

Proposição 2

Se $f(x)$ é contínua e limitada em R^n, com derivadas parciais primeiras contínuas e limitadas teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} W_\lambda f(x) = W_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad j = 1,\ldots,n$$

isto é, o operador W_λ é permutável com o operador $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Demonstração: Como foi visto pelo teorema enunciado na proposição anterior, podemos passar o operador $\frac{\partial}{\partial x_j}$ sob o sinal de integração que comparece no operador.

Dado que $W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{\frac{-|\xi|^2}{\lambda}} f(x+\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$

Teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{\frac{-|\xi|^2}{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x+\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

$$= W_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Proposição 3

Se $f(x)$ é limitada em R^n e λ, μ são dois números positivos, teremos:

$$W_\lambda W_\mu f(x) = W_{\lambda+\mu} f(x)$$

Demonstração: Temos, por definição que:

$$W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} f(\xi)\, d\xi = g_\lambda * f(x)$$

onde $g_\lambda(x) = (\pi\lambda)^{-n/2} \; e^{-\frac{|x|^2}{\lambda}}$.

Assim $W_\lambda\, W_\mu f(x) = g_\lambda *(g_\mu * f)\;(x) = (g_\lambda * g_\mu) * f(x)$

Por outro lado:

$$W_{\lambda+\mu}\, f(x) = \left[\pi(\lambda+\mu)\right]^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda+\mu}} f(\xi)\, d\xi =$$

$$= g_{\lambda+\mu} * f(x)$$

Para chegarmos à identidade desejada, basta então provar que:

$$g_{\lambda+\mu}(x) = g_\lambda * g_\mu(x)$$

Com efeito:

Seja $K(x) = e^{-\pi|x^2|}$ e $K_{\sqrt{\lambda}}(x) = (\pi\lambda)^{-n/2}\, K(x/\sqrt{\lambda\pi}) =$

$$= (\pi\lambda)^{-n/2} \; e^{-\frac{|x|^2}{\lambda}} = g_\lambda(x)$$

Assim: $\hat{K}_{\sqrt{\lambda}}\,(\xi) = (\pi\lambda)^{-n/2}\, \widehat{K(x/\sqrt{\lambda\pi})}\;(\xi)$

Como $\widehat{K(rx)}\;(\xi) = \dfrac{1}{|r|^n}\, \hat{K}\,(\xi/r)$, $\widehat{e^{-\pi|x|^2}}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$

Teremos, fazendo $r = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda\pi}}$:

$$\hat{K}_{\sqrt{\lambda}}(\xi) = (\pi\lambda)^{-n/2}\, (\pi\lambda)^{n/2}\, \hat{K}\,(\sqrt{\lambda\pi}\;\xi) = e^{-\pi^2\lambda|\xi|^2}$$

logo: $\hat{K}_{\sqrt{\lambda}}\,\hat{K}_{\sqrt{\mu}} = e^{-\pi^2(\lambda+u)|\xi|^2} = \hat{K}_{\sqrt{\lambda+\mu}} = \widehat{K_\lambda * K_\mu}$

Como $\hat{f} = \hat{g}$ implica $f = g$, teremos:

$$K_{\sqrt{\lambda}} * K_{\sqrt{\mu}} = K_{\sqrt{\lambda+\mu}}$$

ou seja:

$$g_\lambda * g_\mu = K_{\sqrt{\lambda+\mu}} = \left[\pi(\lambda+u)\right]^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{\lambda+u}} = g_{\lambda+u}$$

Assim, nossa proposição fica demonstrada.

Proposição 4

Seja $f: R^n \to R$, limitada. Então:

(a) $\lim\limits_{\lambda \to 0} W_\lambda f(x) = f(x)$ q.s.

(b) Ainda mais, se $f(x)$ é contínua, a fórmula (a) é verificada uniformemente em cada conjunto fechado e limitado contido em R^n.

Demonstração: Para provarmos a parte (a) vamos utilizar o seguinte teorema ([15], p. 158)

"Seja $f \in L^1(R^n)$ e Ω uma família substancial em R^n. Então:

$$\frac{1}{m(E)} \int_E |f(x) - f(x_0)|\, dx \to 0 \text{ para quase todo } x_0 \in R^n."$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe, em correspondência, um $\delta > 0$, tal que $\frac{1}{m(E)} \int_E |f(x) - f(x_0)|\, dx < \varepsilon$ sempre que $E \in \Omega$, $x_0 \in E$ e diam $(E) < \delta$.

Lema: O teorema acima continua válido se $f \in L^{\infty}(R^n)$ e Ω é a família de hipercubos de R^n.

Demonstração: Com efeito, seja:

$$F_N = \left\{x \in R^n : \| x \| \leq N,\ N \in \mathbb{N}\right\}$$

onde $\| x \| = \max \{|x_i|,\ i = 1, \ldots, n\}$

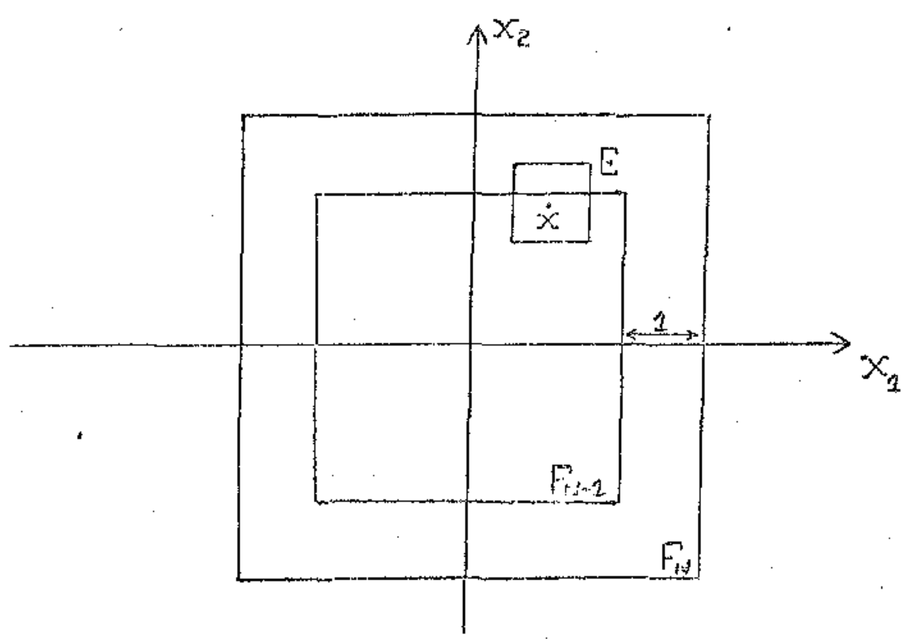
e $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

Assim; $f_N(x) = f\, \chi_{f_N}(x) \in L^1(R^n)$ e então pelo teorema acima temos:

$$\lim_{m(E)\to 0} \frac{1}{m(E)} \int_E |f_N(x) - f_N(\xi)|\, d\xi = 0$$

para quase todo $x \in R^n$.

Se $n = 2$:



Seja $G_N = \{x \in R^n : \lim\limits_{m(E)\to 0} \int_E \frac{1}{m(E)} |f_N(x) - f_N(\xi)|\, d\xi \neq 0\}$

e chamemos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_N$. Temos $m(G) = 0$.

Tomemos $x \notin G$, então $x \notin G_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Como Ω é uma família substancial, em particular aquela constituída dos hipercubos de R^n, temos que existe $E \in \Omega$ com $m(E) < 1$ e $x \in E$. Para $\xi \in E$ temos:

$$f_N(\xi) = f(\xi)$$
$$f_N(x) = f(x) \text{ pois } E \subset F_N \text{ para algum } N.$$

Logo:

$$\lim_{m(E)\to 0} \frac{1}{m(E)} \int_E |f(\xi) - f(x)|\, d\xi =$$

$$= \lim_{m(E)\to 0} \frac{1}{m(E)} \int_E |f_N(\xi) - f_N(x)|\, d\xi = 0 \quad \text{para quase todo } x \in R^n.$$

Vamos agora provar a igualdade (a). Temos que:

$$\left| W_\lambda f(x) - f(x) \right| = \left| (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} \left[f(\xi) - f(x) \right] d\xi \right| \leq$$

$$\leq \pi^{-n/2} \lambda^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |f(\xi) - f(x)|\, d\xi$$

Faremos uso adiante da seguinte propriedade: Como $e^{-|\xi|^2} \in L^1(R^n)$ então dado $\varepsilon > 0$, existe um número M tal que:

$$\pi^{-n/2} \int_{\|x\| \geq M} e^{-|\xi|^2}\, d\xi < \varepsilon$$

Fazendo:

$$|W_\lambda f(x) - f(x)| \leq \pi^{-n/2} \lambda^{-n/2} \int_{\|x-\xi\| < \lambda^{1/2} M} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |f(\xi) - f(x)|\, d\xi \; +$$

$$+ \pi^{-n/2} \lambda^{-n/2} \int_{\|x-\xi\| \geq \lambda^{1/2} M} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |f(\xi) - f(x)| \, d\xi$$

teremos o resultado procurado, pois chamando de

$E = \{ x \in R^n : \|x - \xi\| < \lambda^{1/2} M \}$ resulta:

$m(E) = (2 \lambda^{1/2} M)^n$ e se $\lambda \to 0$ então $m(E) \to 0$

Ainda mais: $\lambda^{n/2} = \dfrac{m(E)}{2^n M^n}$

e como $e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} \leq 1$ a primeira parcela do segundo membro da desigualdade resulta:

$$\pi^{-n/2} \lambda^{-n/2} \int_{\|x-\xi\| < \lambda^{1/2} M} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |f(\xi) - f(x)| \, d\xi \leq$$

$$\leq \pi^{-n/2} \frac{2^n M^n}{m(E)} \int_E |f(\xi) - f(x)| \, d\xi$$

que tende a zero quando λ tende a zero, pelo lema anterior.

Na segunda parcela do segundo membro da desigualdade teremos, por uma mudança de variável:

$$\pi^{-n/2} \lambda^{-n/2} \int_{\|x-\xi\| \geq \lambda^{1/2} M} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |f(\xi) - f(x)| \, d\xi =$$

$$= \pi^{-n/2} \int_{\|\xi\| \geq M} e^{-|\xi|^2} |f(x + \sqrt{\lambda}\, \xi) - f(x)| \, d\xi \leq$$

$$\leq 2 \, \|f\|_\infty \, \pi^{-n/2} \int_{\|\xi\| \geq M} e^{-|\xi|^2} d\xi \leq 2 \, \|f\|_\infty \, \varepsilon$$

Fica assim demonstrada a primeira parte da nossa proposição.

A parte (b) decorre do seguinte:

Como $|W_\lambda f(x) - f(x)| = \pi^{-n/2}\left|\int_{R^n} e^{-|\xi|^2}\left[f(x+\sqrt{\lambda}\,\xi) - f(x)\right] d\xi\right|$

e o integrando acima pertence a $L^1(R^n)$ pois f é limitada, teremos que:

Dado $\varepsilon > 0$, existe um hipercubo K tal que:

$$\left|\int_{R^n - K} e^{-|\xi|^2}\left[f(x+\sqrt{\lambda}\,\xi) - f(x)\right] d\xi\right| < \varepsilon$$

Assim:

$$|W_\lambda f(x) - f(x)| \leq \pi^{-n/2}\left|\int_K e^{-|\xi|^2}\left[f(x+\sqrt{\lambda}\,\xi) - f(x)\right] d\xi + \varepsilon\right.$$

Agora, como $\xi \in K$ então $\sqrt{\lambda}\,\xi \to 0$ quando $\lambda \to 0$ e pela continuidade uniforme de f(x) em L teremos:

$$|W_\lambda f(x) - f(x)| \leq \pi^{-n/2}\, \varepsilon\, m(K) + \varepsilon \quad x \in L$$

ou seja: $\lim_{\lambda \to 0} W_\lambda f(x) = f(x)$ uniformemente em cada conjunto fechado e limitado L.

<u>Proposição 5</u>

Se $f: R^n \to R$ é limitada teremos:

(a) $\int_{R^n} |W_\lambda f(x)|\, dx_1 \ldots dx_n \leq \int_{R^n} |f(x)|\, dx_1 \ldots dx_n$

(b) $\lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} |W_\lambda f(x)|\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{R^n} |f(x)|\, dx_1 \ldots dx_n$

Ainda mais, para cada conjunto limitado L, teremos:

$$\text{(c)} \quad \lim_{\lambda \to 0} \int_L |W_\lambda f(x) - f(x)| \, dx_1 \ldots dx_n = 0$$

Demonstração: A primeira parte desta propriedade decorre de uma simples aplicação do teorema de Fubini (ver [10], p.147, teor. B; [16], p.77, teor. 81)

Com efeito:

$$\int_{R^n} |W_\lambda f(x)| \, dx = \int_{R^n} \left| (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} f(\xi) \, d\xi \right| dx \leq$$

$$\leq (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} \left[\int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |f(\xi)| \, d\xi \right] dx =$$

$$= \int_{R^n} |f(\xi)| \left[(\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dx \right] d\xi =$$

$$= \int_{R^n} |f(\xi)| \left[(\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|\mu|^2}{\lambda}} d\mu \right] d\xi$$

$$= \int_{R^n} |f(\xi)| \, d\xi$$

Fica assim demonstrada a parte (a).

A (b) decorre de (a) e do lema de Fatou (ver [9] - p.192).

Com efeito, temos da primeira parte que:

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} |W_\lambda f(x)| \, dx_1 \ldots dx_n \leq \int_{R^n} |f(x)| \, dx_1 \ldots dx_n$$

Por outro lado, da propriedade 4 decorre:

$$\lim_{\lambda \to 0} |W_\lambda f(x)| = |f(x)| \quad \text{q.s.}$$

e pelo lema de Fatou teremos:

$$\int_{R^n} |f(x)|\, dx \leq \underline{\lim} \int_{R^n} |W_\lambda f(x)| dx$$

Para provarmos a (c) basta notar que:

$|W_\lambda f(x) - f(x)| \leq 2M$ pois estas funções são limitadas pela mesma constante M e como $\lim_{\lambda \to 0} |W_\lambda f(x) - f(x)| = 0$

teremos pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver [9]-p. 195, color. 4)

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_L |W_\lambda f(x) - f(x)|\, dx = 0$$

Observação: Os resultados ora obtidos valem naturalmente se f(x) ao invés de ser uma função escalar é uma função vetorial com um número qualquer de componentes.

Proposição 6

Dada a função escalar $f: R^n \to R$, limitada, então a integral:

$$\int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda f(x)|\, dx_1 \ldots dx_n$$

é uma função não crescente de λ.

Demonstração: Com efeito, dados dois números positivos λ e μ teremos, pelas proposições 1, 2 e 3:

$$\text{grad } W_{\lambda+\mu} f(x) = \text{grad } W_\mu\, W_\lambda\, f(x) =$$

$$= W_\mu \text{ grad } W_\lambda f(x)$$

e então, da proposição 5, resulta:

$$\int_{R^n} |\text{grad } W_{\mu+\lambda} f(x)| \, dx \leq \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda f(x)| \, dx$$

Daremos agora duas definições básicas:

Definição 1: Para cada função $f: R^n \to R$, limitada, seja:

$$\mathfrak{J}\left[f(x)\right] = \lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda f(x)| \, dx$$

Decorre da proposição 6 que este limite existe, finito ou infinito.

Definição 2: Dado um conjunto $E \subset R^n$, $(n \geq 2)$, definimos o perímetro do conjunto E do seguinte modo:

$$P(E) = \mathfrak{J}\left[\chi_E(x)\right] = \lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda \chi_E(x)| dx$$

onde com $\chi_E(x)$ indicamos a função característica do conjunto E.

CAPÍTULO 2

§ 1. Função de Gauss - Green

Diremos que a função de conjunto $F^{(\lambda)}(B)$, dependente de um parâmetro λ, completamente aditiva, converge fracamente para a função $F(B)$ quando λ tende a λ_o se a relação:

$$\lim_{\lambda \to o} \int_{R^n} g(x)\, d\, F^{(\lambda)} = \int_{R^n} g(x)\, dF$$

é satisfeita para toda $g(x)$ contínua em R^n e infinitésima para $|x| \to \infty$

Teorema : Dada uma sequência de funções escalares de conjuntos $\{\mu_n(B)\}$ definidas para cada $B \subset R^n$, completamente aditiva, positiva e equilimitada então existe uma função aditiva de conjunto μ (B), positiva e limitada e uma subsequência

$\{\mu_{n_k}(B)\}$ tal que:

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{n_k}(B) = \mu(B)$$

para todo conjunto B sobre cuja fronteira $\mu(B) = 0$.

Demonstração: ([13], p. 221)

Deste teorema se deduz facilmente que:

Corolário : Dada uma sequência de funções vetoriais de conjunto $\{F_n(B)\}$, definidas para cada conjunto $B \subset R^n$, completamente aditiva e de variação total equilimitada então existe uma subsequência que converge fracamente.

Com efeito, seja $F_n(B)$ a n - ésima função vetorial da nossa sequência. Cada componente de $F_n(B)$ é igual à diferença de duas funções escalares de conjuntos definidos para cada $B \subset R^n$, completamente aditivas, positivas e equilimitadas pela variação total de $F_n(B)$ (que também é uma função completamente aditiva e positiva); i.é.; dada:

$$F_n : R^N \to R^N$$
$$F_n(B) \equiv (F_n^1(B), \ldots, F_n^N(B))$$

teremos:

$$F_n^k(B) = f_n^k(B) - g_n^k(B) \qquad k = 1, \ldots, N$$

onde as sequências $\{f_n^k(B)\}$ e $\{g_n^k(B)\}$ $k = 1, \ldots, N$ estão nas condições do teorema de Vallé - Poussin, logo existem funções aditivas de conjuntos $f^k(B)$ e $g^k(B)$, $k = 1, \ldots, N$, positivas e limitadas e subsequências convergentes tal que:

$$\lim_{h\to\infty} F_{n_h}^k(B) = f^k(B) \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$\lim_{h\to\infty} g_{n_h}^k(B) = g^k(B) \qquad k = 1, \ldots, N$$

Ou seja:

$$\lim_{h\to\infty} F_{n_h}^k(B) = f^k(B) - g^k(B) \qquad k = 1, \ldots, N$$

ou, na notação vetorial:

$$\lim_{h\to\infty} F_{n_h}(B) = F(B) = \left[f^1(B)-g^1(B), \ldots, f^N(B)-g^N(B) \right]$$

ou ([13], p. 222) para toda $g(x)$ contínua em R^n e infinitésima para $|x| \to \infty$ teremos:

$$\lim_{h\to\infty} \int_{R^n} g(x)\, dF_{n_h} = \int_{R^n} g(x)\, dF \qquad \square$$

TEOREMA 1

Dada uma função $f: R^n \to R$, limitada e se $\mathcal{T}[f(x)] < \infty$ então existe uma e somente uma função vetorial de conjunto $F(B) = (F_1(B), \ldots, F_n(B))$ tal que:

(a) $F(B)$ é definida para cada conjunto $B \subset R^n$, completamente aditiva e de variação total limitada.

(b) Para cada função $g(x)$ que seja, juntamente com suas derivadas parciais primeiras, contínua em R^n, infinitésima para $|x| \to \infty$, de ordem não inferior a $|x|^{-(n+1)}$ resulta:

$$\int_{R^n} f(x) \text{ grad } g(x) dx_1 \ldots dx_n = \int_{R^n} g(x) dF$$

Demonstração: Consideremos a sequência $\{\lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$ e $\lim \lambda_n = 0$ e a sequência de funções vetoriais de conjunto $\{F^{(n)}(B)\}$ definidas por :

$$F^{(h)}(B) = -\int_B \text{grad } W_{\lambda_h} f(x) dx_1 \ldots dx_n \tag{2,1.1}$$

$$(h = 1, 2, \ldots)$$

A sequência $\{F^{(n)}(B)\}$ tem variação total equilimitada, pois pela proposição 6:

$$V(F^{(h)}, B) = \int_B |dF^{(h)}| = \int_B |\text{grad } W_\lambda f(x)| dx \leq \tag{2.1.2}$$

$$\leq \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda f(x)| dx \leq \lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda f(x)| dx =$$

$$= \mathcal{T}[f(x)] < \infty$$

Assim, pelo corolário anterior a sequência $\{F^{(n)}(B)\}$ admite uma subsequência que converge fracamente para a função completamente aditiva $F(B)$, ou seja:

existe $\overset{\nu_1}{F}(B), \ldots, \overset{\nu_n}{F}(B), \ldots$

tal que: (2.1.3) $$\lim_{h\to\infty} \int_{R^n} g(x)\,d\overset{\nu_h}{F} = \int_{R^n} g(x)\,dF$$

para toda $g(x)$ contínua em R^n e infinitésima para $|x| \to \infty$.

Temos ainda: (2.1.4) $$\int_{R^n} |dF| \leqslant \lim_{h\to\infty} \inf \int_{R^n} |d\overset{\nu_h}{F}|$$

([18], p. 183, teor. 3)

e como pelo resultado acima:

$$\int_{R^n} |dF^{(h)}| \leqslant \mathcal{T}[f(x)]$$

segue que :

$$\int_{R^n} |dF| \leqslant \mathcal{T}[f(x)]$$

Fica então demonstrada a primeira parte do nosso teorema.

Tomemos agora $g(x)$ tal que, juntamente com suas derivadas parciais primeiras, seja continua em R^n, infinitésima para $|x| \to \infty$, de ordem não inferior a $|x|^{-(n+1)}$. Nestas condições, a função $g(x)$ assim como suas derivadas parciais primeiras, resultam integráveis.

Com efeito:

$$g(x) = \frac{|x|^{n+1} g(x)}{|x|^{n+1}} \quad \text{e como} \lim_{|x|\to\infty} |x|^{n+1} g(x) = 0$$

resulta que $|x|^{n+1} g(x) \leqslant M$. Logo :

$$g(x) \leqslant \frac{M}{|x|^{n+1}} \in L^1(R^n - B(0,1)) \quad ([17], \text{ p. } 40)$$

Como $g(x)$ é contínua então $g \in L^1(R^n)$.

Analogamente demonstra-se que $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in L^1(R^n)$

$i = 1, \ldots, n.$

Pelas proposições 1 e 4 temos que as funções $W_\lambda f(x)$ são equilimitadas e que $\lim_{\lambda \to 0} W_\lambda f(x) = f(x)$ .q.s.

Agora, pelo lema anterior $|\text{grad } g(x)| \in L^1(R^n)$ e como $\lim_{h\to\infty} \lambda_{\nu_h} = 0$, teremos, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue:

$$(2.1.5) \quad \lim_{h\to\infty} \int_{R^n} (W_{\lambda_{\nu_h}} f(x)) \text{ grad } g(x)\, dx = \int_{R^n} f(x) \text{ grad } g(x)\, dx$$

Como $g(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, obtemos, mediante integração por partes e pela (2.1.1):

$$(2.1.6) \quad \int_{R^n} (W_\lambda f(x)) \text{ grad } g(x)\, dx = -\int_{R^n} g(x) \text{ grad } W_{\lambda_{\nu_h}} f(x)\, dx = \int_{R^n} g(x)\, dF^{\nu_h}$$

Das fórmulas (2.1.3), (2.1.5) e (2.1.6) obtemos :

$$\int_{R^n} f(x) \text{ grad } g(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{R^n} g(x)\, dF$$

e o teorema está demonstrado.

A função vetorial F é chamada em [8] de gradiente generalizado de f.

Recordando a definição de perímetro de um conjunto se encontra, como caso particular do teorema 1 o seguinte :

COROLÁRIO 1

Dado um conjunto $E \subset R^n$, se o seu perímetro P(E) é finito então existe uma função vetorial de conjunto $\Phi(B) = (\Phi_1(B), \ldots, \Phi_n(B))$ tal que :

(a) $\Phi(B)$ é definida para cada $B \subset R^n$, completamente aditiva e de variação total limitada.

(b) Para cada função g(x) tal que seja, juntamente com suas derivadas parciais primeiras, contínua em R^n, infinitésima para $|x| \to \infty$ e de ordem - não inferior a $|x|^{-(n+1)}$, resulta :

$$\int_E \text{grad } g(x)\, dx = \int_{R^n} \chi_E(x) \text{ grad } g(x)\, dx = \int_{R^n} g(x)\, d\Phi$$

Demonstração- $P(E) = \mathcal{T}[\chi_E(x)] < \infty$ então basta aplicar o teorema 1.

Observação 1 : A fórmula anterior é num certo sentido uma generalização da fórmula de Green clássica. Por esta razão , tal função é chamada em [6] de função de Gauss-Green relativa ao conjunto $E \subset R^n$.

Uma recíproca do teorema 1 e apresentada e completada no que segue:

TEOREMA 2 Dada uma função limitada f(x), se existe uma função vetorial F(B) satisfazendo as condições (a) e (b) do teorema 1 então $\mathcal{T}[f(x)]$ é finito e temos

$$\mathcal{T}[f(x)] = \int_{R^n} /dF/$$

Demonstração : Temos que $\text{grad}_x\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} = -\text{grad}_\xi\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}$, onde com grad_x e grad_ξ estamos indicando respectivamente o gradiente em relação às variáveis $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

Pela condição (b) do teorema 1 e pela definição do operador W_λ teremos fazendo uso da proposição 2:

$$(2.1.7) \quad |\text{grad } W_\lambda\, f(\xi)| = (\pi\lambda)^{-n/2} \left| \int_{R^n} (\text{grad}_\xi\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}) f(x)dx \right| =$$

$$= (\pi\lambda)^{-n/2} \left| \int_{R^n} (\text{grad}_x\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} f(x) dx_1 \ldots dx_n \right| =$$

$$= (\pi\lambda)^{-n/2} \left| \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dF \right| \leq$$

$$\leq (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |dF|$$

Da fórmula (2.1.7) e do teorema de Fubini segue:

$$(2.1.8) \quad \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda f(\xi)| d\xi_1 \ldots d\xi_n \leq (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} d\xi \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} |dF| =$$

$$= (\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} |dF| \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \int_{R^n} |dF|$$

E portanto pela definição de $\mathfrak{J}[f(x)]$ e da proposição 6 resulta:

$$\mathfrak{J}[f(x)] \leq \int_{R^n} |dF|$$

Logo $\mathfrak{J}[f(x)]$ é finito e portanto pela fórmula (2.1.2) temos: $\int_{R^n} |dF| \leq \mathfrak{J}[f(x)]$

Assim o teorema fica demonstrado.

Como caso particular deste teorema temos:

<u>Corolário 2</u> Dado um conjunto $E \subset R^n$, se existe -

uma função $\Phi(B)$ satisfazendo as condições (a) e (b) do corolário 1 então o perímetro de E é finito e temos:

$$P(E) = \int_{R^n} |d\Phi|$$

Observação : A fórmula anterior coincide com a definição de área absoluta da fronteira orientada do conjunto E segundo Caccioppoli, ainda segundo Caccioppoli é a medida (n-1) dimensional da fronteira orientada de E. ([1]).

§2 - O perímetro do conjunto E

Podemos agrupar os corolários 1 e 2 no seguinte resultado :

"A condição necessária e suficiente para que $P(E)$ seja finito é que exista uma função vetorial de conjunto $\Phi(B)$, com valores no R^n, completamente aditiva e de variação total limitada, definida na classe dos borelianos do R^n, tal que:

$$(a) \quad \int_E \text{grad } g(x)\, dx = \int_{R^n} g(x)\, d\Phi$$

para toda $g(x)$ que seja, juntamente com suas derivadas parciais primeiras, contínua em R^n, infinitésima para $|x| \to \infty$ de ordem não inferior a $|x|^{-(n+1)}$

Ainda mais:

$$P(E) = \int_{R^n} d|\Phi|$$

A condição (a) pode exprimir-se dizendo que a função Φ é o gradiente no sentido da teoria das distribuições, da função característica de E.

TEOREMA 3

Dado um conjunto $E \subset R^n$, tendo perímetro finito, seja $\Phi(B)$ a função que satisfaz as hipóteses (a) e (b) do corolário 1. Então para cada conjunto L sobre cuja fronteira seja nula a variação total da função $\Phi(B)$ temos:

$$\Phi(L) = -\lim_{\lambda \to 0} \int_L \operatorname{grad} W_\lambda X_E(x)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Demonstração

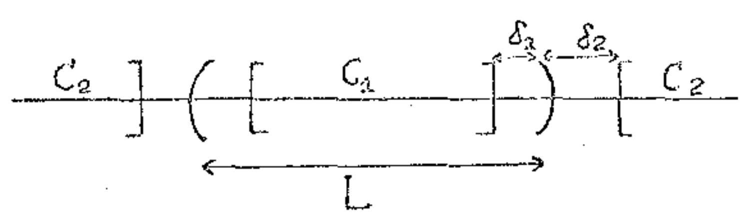
Como a variação total da função $\Phi(B)$ é nula sobre a fronteira de L, temos

$$(2.2.1) \quad \int_{\partial L} |d\Phi| = 0$$

Como $\Phi(B)$ tem variação total limitada e vale a (2.2.1), então dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar dois conjuntos limitados e fechados C_1, C_2, não tendo pontos comuns com ∂L, tal que:

$$(2.2.2) \quad C_1 \subset L, \quad \int_L |d\Phi| - \int_{C_1} |d\Phi| < \varepsilon$$

$$(2.2.2') \quad C_2 \subset (R^n - L), \quad \int_{R^n - L} |d\Phi| - \int_{C_2} |d\Phi| < \varepsilon$$



Seja $\delta_1 = d\,(C_1, \partial L)$ e $\delta_2 = d\,(C_2, \partial L)$ e seja $\Gamma = B\,(0,\delta)$ onde $\delta = \min\,\{\delta_1, \delta_2\}$:

Pelas propriedades (1.1.3) e (1.1.4) segue que dado $\varepsilon > 0$, existe λ_ε tal que para $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$ temos:

$$(2.2.3) \quad (\pi\lambda)^{-n/2} \int_\Gamma e^{-\frac{|\xi|^2}{\lambda}}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n > 1 - \varepsilon$$

Temos ainda que para todo $x_1 \in C_1$ resulta $B(x_1,\delta) \subset L$

e $$(\pi\lambda)^{-n/2} \int_{B(x_1,\delta)} e^{-\frac{|x_1-\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \dots d\xi_n > 1-\varepsilon \quad 0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$$

ou seja:

para todo $x \in C_1$ e $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$ temos $(\pi\lambda)^{-n/2} \int_{C_1} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi > 1-\varepsilon$

e com maior razão:

$$(2.2.4) \quad 1 > (\pi\lambda)^{-n/2} \int_L e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \dots d\xi_n > 1-\varepsilon \ , \ x \in C_1$$

$$0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$$

e então :

$$(2.2.4') \quad (\pi\lambda)^{-n/2} \int_L e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi_1 \dots d\xi_n < \varepsilon \qquad x \in C_2$$

$$0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$$

pois para todo $x \in C_2$ temos $B(x_2, \delta) \subset (R^n - L)$.

Da (2.2.4) temos que:

$$-\varepsilon < (\pi\lambda)^{-n/2} \int_L e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi - 1 < 0 < \varepsilon$$

ou seja $$\left| (\pi\lambda)^{-n/2} \int_L e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi - 1 \right| < \varepsilon$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por

$\left| \int_{C_1} d\Phi \right|$ e pelo teorema de Fubini, teremos:

$$(2.2.5)\quad \left|(\pi\lambda)^{-n/2}\int_L d\xi\int_{C_1} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}\,d\Phi-\int_{C_1} d\Phi\right| < \varepsilon\int_{C_1}|d\Phi| \leq$$

$$\leq \varepsilon\int_{R^n}|d\Phi| = \varepsilon\, P(E)$$

Analogamente, da (2.2.4') segue que:

$$(2.2.5')\quad \left|(\pi\lambda)^{-n/2}\int_L d\xi\int_{C_2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}}\,d\Phi\right| < \varepsilon\int_{C_2}|d\Phi| \leq$$

$$\leq \varepsilon\int_{R^n}|d\Phi| = \varepsilon\, P(E)$$

Agora $L = C_1 \cup (L-C_1)$ e assim $\int_L |d\Phi| = \int_{C_1}|d\Phi| + \int_{L-C_1}|d\Phi|$

ou seja $\int_L |d\Phi| - \int_{C_1}|d\Phi| = \int_{L-C_1}|d\Phi| < \varepsilon$ pela (2.2.2)

Segue então que:

$$(2.2.6)\quad \left|\int_L d\Phi - \int_{C_1} d\Phi\right| = \left|\int_{L-C_1} d\Phi\right| \leq \int_{L-C_1}|d\Phi| < \varepsilon$$

Analogamente, como $(R^n-L) = C_2 \cup \left[R^n - (L \cup C_2)\right]$ segue pela (2.2.2')que:

$$\int_{R^n-L}|d\Phi| - \int_{C_2}|d\Phi| = \int_{R^n-(L\cup C_2)}|d\Phi| < \varepsilon$$

e como $(R^n - C_1 - C_2) = (L - C_1) \cup (R^n - L - C_2)$

teremos:

$$(2.2.7)\quad \int_{R^n-C_1-C_2}|d\Phi| < 2\varepsilon$$

Desta fórmula e do teorema de Fubini obtemos :

$$(2.2.8)\quad \left|(\pi\lambda)^{-n/2}\int_L d\xi \int_{R^n - C_1 - C_2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi\right| = \left|(\pi\lambda)^{-n/2}\int_L e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi \int_{R^n - C_1 - C_2} d\Phi\right| <$$

$$< \left|(\pi\lambda)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\xi \int_{R^n - C_1 - C_2} d\Phi\right| = \left|\int_{R^n - C_1 - C_2} d\Phi\right| \leqslant \int_{R^n - C_1 - C_2} |d\Phi| < 2\varepsilon$$

Observando que $R^n = C_1 \cup C_2 \cup (R^n - C_1 - C_2)$ e das fórmulas (2.2.5), (2.2.5'), (2.2.6) e (2.2.8) concluimos que, para

$0 < \lambda < \lambda\varepsilon$:

$$(2.2.9)\quad \left|\int_L d\Phi - (\pi\lambda)^{-n/2}\int_L d\xi_1 \ldots d\xi_n \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi\right| < \varepsilon(2P(E)+3)$$

Como $W_\lambda X_E(\xi) = (\pi\lambda)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} X_E(x) \; dx_1 \ldots dx_n =$

$$= (\pi\lambda)^{-n/2}\int_E e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dx_1 \ldots dx_n \; .$$

e como $\Phi(E)$ satisfaz a condição (b) do corolário 1 teremos:

$$\operatorname{grad} W_\lambda X_E(\xi) = \operatorname{grad}_\xi \left[(\pi\lambda)^{-n/2}\int_E e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dx_1 \ldots dx_n\right] =$$

$$= (\pi\lambda)^{-n/2}\int_E \operatorname{grad}_\xi e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= -(\pi\lambda)^{-n/2}\int_E \operatorname{grad}_x e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= -(\pi\lambda)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}} d\Phi$$

Das fórmulas (2.2.9) e (2.2.10) vemos que, para $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$ teremos:

$$\left| \Phi(L) + \int_L \operatorname{grad} W_\lambda X_E \ (x) \ dx_1 \ \ldots \ dx_n \right| =$$

$$= \left| \int_L d\Phi + \int_L \operatorname{grad} W_\lambda X_E \ (\xi) \ d\xi_1 \ \ldots \ d\xi_n \right| <$$

$$< \varepsilon \left[2 \ P(E) + 3 \right]$$

Como ε é arbitrário, nosso teorema está demonstrado.

§ 3 - Uma propriedade isoperimétrica

O espaço euclideano R^n, pode sempre ser considerado como produto de 2 espaços R^p e R^{n-p}. Indicaremos com $y = (y_1, \ldots, y_p)$ um ponto genérico de R^p e com $z = (z_1, \ldots, z_{n-p})$ um ponto genérico de R^{n-p}, com (y, z) o ponto de R^n de coordenadas :

$$(y_1, \ \ldots, \ y_p, \ z_1, \ \ldots, \ z_{n-p}).$$

Dado um conjunto $E^y \subset R^p$ e um conjunto $E^z \subset R^{n-p}$, indicaremos com $E^y \times E^z$ o produto dos conjuntos E^y e E^z, isto é . : $\{(y,z) : y \in E^y \text{ e } z \in E^z\}$.

De maneira análoga à definição do operador W_λ, podemos definir o operador W_λ^y pondo, para cada função $f(x) = f(y, z)$ definida e limitada em R^n e para cada valor positivo do parâmetro λ:

$$(2.3.1) \quad W_\lambda^y \ f(x) = W_\lambda^y \ f(y,z) = \pi^{-p/2} \int_{R^p} e^{-|\eta|^2} f(y+\sqrt{\lambda}\,\eta, \ z) \ d\eta_1 \ldots d\eta_p$$

Para cada função $g(x) = g(y,z)$ que seja derivável com respeito às variáveis $y_1, \ldots, y_p$, indicaremos com $\operatorname{grad}_y \ g(y, z)$

o vetor de componentes $\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_p}\right)$

Observemos que todas as propriedades do operador W_λ vistas no § 2, capítulo 1, se estendem ao operador W_λ^y.

Podemos por isso, analogamente ao funcional $\mathcal{J}[f(x)]$, definir $\mathcal{J}_y\,[f(y,z)]$ da seguinte maneira :

$$(2.3.2)\quad \mathcal{J}_y\,[f(y,z)] = \lim_{\lambda\to 0}\int_{R^p} |\mathrm{grad}_y\ W_\lambda^y\ f(y,z)|\ dy_1 \ldots dy_p$$

De fato, por um raciocínio totalmente análogo ao usado na proposição 6 e definição subsequente, prova-se que este limite existe.

Demonstraremos agora a desigualdade:

$$(2.3.3)\quad \mathcal{J}[f(x)] = \mathcal{J}[f(y,z)] \geq \int_{R^{n-p}} \mathcal{J}_y\,[f(y,z)]\,dz_1 \ldots dz_{n-p}$$

Com efeito, pela proposição 5 e para cada par de números reais positivos $\underline{\lambda}$ e $\underline{\mu}$ teremos :

$$(2.3.4)\quad \begin{aligned} &\int_{R^n} |\ W_\lambda\ \mathrm{grad}_y\ W_\mu^y f(y,z)|\ dy_1 \ldots dy_p\, dz_1 \ldots dz_{n-p} = \\ &= \int_{R^n} |\ W_\mu^y\ \mathrm{grad}_y\ W_\lambda\ f(y,z)\,|dy_1 \ldots dy_p\, dz_1 \ldots dz_{n-p} \leq \\ &\leq \int_{R^n} |\mathrm{grad}_y\ W_\lambda\ f(y,z)|\ dy_1 \ldots dy_p\, dz_1 \ldots dz_{n-p} \leq \\ &\leq \int_{R^n} |\mathrm{grad}\ W_\lambda\ f(x)|\ dx_1 \ldots dx_n \leq \mathcal{J}[f(x)] \end{aligned}$$

Da relação (2.3.4), passando ao limite para $\lambda \to 0$, encontramos, pela proposição 5 :

$$\int_{R^{n-p}} dz_1 \ldots dz_{n-p} \int_{R^p} |\text{grad } W_\mu^y f(y,z)| \, dy_1 \ldots dy_p \leq \mathcal{T}[f(x)] \tag{2.3.5}$$

Da fórmula (2.3.2) e passando ao limite sob sinal de integração na (2.3.5) teremos o resultado desejado.

<u>Lema</u> : Dada uma função $\varphi(x)$ tal que $\varphi(x) = 0$ ou $\varphi(x) = 1$ para todo x em R^n $(n \geq 1)$ então vale uma das duas relações :

$$\left(\int_{R^n} \varphi(x) \, dx_1 \ldots dx_n \right)^{n-1} \leq \left(\mathcal{T}[\varphi(x)] \right)^n$$

$$\left(\int_{R^n} (1-\varphi(x)) \, dx_1 \ldots dx_n \right)^{n-1} \leq \left(\mathcal{T}[\varphi(x)] \right)^n \tag{2.3.6}$$

Demonstração : "indução sobre n"

Vamos atribuir o valor 1 ao símbolo ∞^0 e o valor 0 ao símbolo o^0.

(a) Provemos que a fórmula (2.3.6) vale para n = 1.

Se $\int_R \varphi(x) \, dx = 0$ ou $\int_R (1-\varphi(x)) \, dx = 0$ então certamente uma das relações (2.3.6.) é verificada pois $\mathcal{T}[\varphi(x)] \geq 0$.

Suponhamos então que :

$$\int_R \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, dx \neq 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} (1-\varphi(x)) \, dx \neq 0 \tag{2.3.7}$$

então $\varphi(x)$ não é quase sempre igual a 1, nem quase sempre nula e pela proposição 4 existem pontos $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ tal que :

$$(2.3.8) \qquad \lim_{\lambda\to 0} W_\lambda \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) = 0 \quad e \quad \lim_{\lambda\to 0} W_\lambda \varphi(\bar{\bar{x}}) = \varphi(\bar{\bar{x}}) = 1$$

Da relação (2.3.8) segue que :

$$\mathfrak{T}[\varphi(x)] = \lim_{\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d}{dx} W_\lambda \varphi(x)\right| dx \geq \lim_{\lambda > 0} \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} \frac{d}{dx} W_\lambda \varphi(x) dx \right|$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \left| W_\lambda \varphi(\bar{\bar{x}}) - W_\lambda \varphi(\bar{x}) \right| = 1$$

Assim fica provado o caso n = 1.

Suponhamos agora que vale uma das relações (2.3.6) para n=m e provaremos que vale para n = m + 1.

Escreveremos $R^{m+1} = R^m \times R$ e indicaremos com $y = (y_1, \ldots, y_m)$ um ponto genérico de R^m e com z um ponto genérico de R.

Seja agora : $\varphi(x) = \varphi(y,z)$ tal que

$\varphi(x) = 0$ ou $\varphi(x) = 1$ para todo $\underline{x}$ de R^{m+1} e sejam E_1, E_2 e E_3 conjuntos do espaço R^m assim definidos :

$$(2.3.9) \qquad \begin{aligned} &\int_R \varphi(y,z)\, dz \neq 0 \quad e \quad \int_R (1-\varphi(y,z))\, dz \neq 0 \quad se \quad y \in E_1 \\ &\int_R \varphi(y,z)\, dz = 0 \quad se \quad y \in E_2 \\ &\int_R (1-\varphi(y,z))\, dz = 0 \quad se \quad y \in E_3 \end{aligned}$$

Obviamente $R^m = E_1 + E_2 + E_3$.

Como $\varphi(x) = \varphi(y,z)$ toma somente os valores $\underline{0}$ ou 1 então pela relação (2.3.9) teremos :

$$\varphi(x) = \varphi(y,z) = 0 \qquad \text{quase sempre em } E_2 \times R$$

$$\varphi(x) = \varphi(y,z) = 1 \qquad \text{quase sempre em } E_3 \times R$$

pois para toda função positiva tal que sua integral é igual a zero, então a função é nula quase sempre.

Seja $\mu = \min \{ m(E_2), m(E_3) \}$

Então para quase todos os valores de z, teremos :

$$(2.3.10) \qquad \int_{R^m} \varphi(y,z)\, dy_1 \ldots dy_m \geq \int_{E_3} \varphi(y,z)\, dy_1 \ldots dy_m =$$

$$= \int_{E_3} dy_1 \ldots dy_m = m(E_3) \geq \mu$$

Analogamente :

$$(2.3.10') \qquad \int_{R^m} (1-\varphi(y,z))\, dy_1 \ldots dy_m \geq$$

$$\geq \int_{E_2} (1-\varphi(y,z))dy_1 \ldots dy_m \geq \mu$$

Pela hipótese da indução, da relação (2.3.10) e da definição de $\mathcal{T}y\left[\varphi(y,z)\right]$ teremos:

$$\mathcal{T}y\left[\varphi(y,z)\right] = \lim_{\lambda\to 0} \int_{R^m} |\operatorname{grad}_y W_\lambda^y \varphi(y,z)|\, dy_1 \ldots dy_m$$

$$(2.3.11) \qquad = \lim_{\lambda\to 0} \int_{R^m} |\operatorname{grad} W_\lambda \overline{\varphi}(y)|\, dy_1 \ldots dy_m$$

$$= \mathcal{T}\left[\overline{\varphi}(y)\right] \geq \left[\int_{R^m} \overline{\varphi}(y)\, dy_1 \ldots dy_m\right]^{\frac{m-1}{m}} =$$

$$= \left[\int_{R^m} \varphi(y,z)\, dy_1 \ldots dy_m\right]^{\frac{m-1}{m}} \geq \mu^{\left(\frac{m-1}{m}\right)}$$

para quase todo z.

Por outro lado, da relação (2.3.3) teremos :

$$(2.3.12) \qquad \mathcal{T}[\varphi(x)] = \mathcal{T}[\varphi(y,z)] \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}y\,[\varphi(y,z)]\, dz$$

Assim, se $\mu \neq 0$, isto é.: $m(E_1) \neq 0$ e $m(E_2) \neq 0$ resulta das relações (2.3.11) e (2.3.12) que $\mathcal{T}[\varphi(x)] = \infty$ e a relação (2.3.6) fica demonstrada.

Tomemos agora $y \in E_1$ e como uma das relações (2.3.6) vale para $n = 1$ e tendo presente a (2.3.9) teremos :

$$(2.3.13) \quad \mathcal{T}_z[\varphi(y,z)] = \lim_{\lambda\to 0} \int_R |\operatorname{grad}_z W_\lambda^z\, \varphi\,(y,z)|\, dz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \int_R |\operatorname{grad} W_\lambda\, \bar{\varphi}\,(z)|\, dz =$$

$$= \mathcal{T}[\bar{\varphi}(z)] \geq \left(\int_R \bar{\varphi}(z)\, dz \right)^0 = 1$$

pois pela (2.3.9) $\int_R \bar{\varphi}(z)\, dz = \int_R \varphi(y,z)\, dz \neq 0$

Das relações (2.3.13) e (2.3.3) temos :

$$(2.3.14) \quad \mathcal{T}[\varphi(x)] \geq \int_{R^m} \mathcal{T}z\,[\varphi(y,z)]\, dy_1 \ldots dy_m \geq \int_{E_1} dy_1 \ldots dy_m = m(E_1)$$

e portanto se $m\,(E_1) = \infty$ a relação (2.3.6) fica demonstrada.

Consideremos agora o caso em que $m(E_1)$ é finita e $m(E_2) = 0$.

Assim $m(E_3) = \infty$ e como $\varphi(x) = 1$ q.s. em $E_3 \times R$ teremos, para quase todos os valores de z :

$$(2.3.15) \qquad \int_{R^m} \varphi(y,z)\, dy_1 \ldots dy_m \geq \int_{E_3} \varphi(y,z)\, dy_1 \ldots dy_m = m(E_3) = \infty$$

Pela hipótese da indução, teremos, dada a (2.3.15):

$$\left(\int_{R^m}(1-\varphi(y,z))\,dy_1 \ldots dy_m\right)^{m-1} \leq \left(\mathfrak{J}_y\left[\varphi(y,z)\right]\right)^m \tag{2.3.16}$$

para quase todos os valores de z.

Por outro lado, como $m(E_2) = 0$ e quase sempre em $E_3 \times R$ temos $\varphi(y,z) = 1$ resulta, para quase todos os valores de z :

$$\int_{R^m}(1-\varphi(y,z))\,dy_1 \ldots dy_m = \int_{E_1}(1-\varphi(y,z))\,dy_1 \ldots dy_m \leq m(E_1) \tag{2.3.17}$$

Da (2.3.14), (2.3.16) e (2.3.17) temos :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_y\left[\varphi(y,z)\right] &\geq \left(\int_{R^m}(1-\varphi(y,z))\,dy_1 \ldots dy_m\right)^{(1-1/m)} \geq \\ &\geq (mE_1)^{-\frac{1}{m}}\int_{R^m}(1-\varphi(y,z))\,dy_1 \ldots dy_m \geq \\ &\geq \left(\mathfrak{J}\left[\varphi(x)\right]\right)^{-\frac{1}{m}}\int_{R^m}(1-\varphi(y,z))\,dy_1 \ldots dy_m \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Da (2.3.18) e (2.3.12) temos :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}\left[\varphi(x)\right] &\geq \int_R \mathfrak{J}_y\left[\varphi(y,z)\right]\,dz \geq \\ &\geq \left(\mathfrak{J}\left[\varphi(x)\right]\right)^{-\frac{1}{m}}\int_R dz \int_{R^m}(1-\varphi(y,z))\,dy_1 \ldots dy_m \\ &= \left(\mathfrak{J}\left[\varphi(x)\right]\right)^{-1/m}\int_{R^{m+1}}(1-\varphi(x))\,dx_1 \ldots dx_{m+1} \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

e então :

$$\left(\mathfrak{J}\left[\varphi(x)\right]\right)^{m+1} \geq \left(\int_{R^{m+1}}(1-\varphi(x))\,dx_1 \ldots dx_{m+1}\right)^m$$

e assim fica provada a (2.3.6) no caso em que $m(E_1) < \infty$ e $m(E_2) = 0$.

Finalmente, se $m(E_1) < \infty$ e $m(E_3) = 0$ (o que acarreta $m(E_2) = \infty$) chegaremos por um raciocínio totalmente análogo, a primeira das relações (2.3.6), ou seja

$$(\mathcal{J}[\varphi(x)])^{m+1} \geq \left(\int_{R^{m+1}} \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_{m+1}\right)^m$$

Veremos agora uma propriedade isoperimétrica mediante a qual a medida de um conjunto é limitada pelo seu perímetro, ou mais precisamente, é menor ou igual à potência (n/n-1)-ésima do próprio perímetro.

Teorema 4

Dado um conjunto $E \subset R^n$ $(n \geq 2)$ vale sempre uma das duas desigualdades :

$$\begin{cases} [m(E)]^{n-1} \leq [P(E)]^n \\ [m(R^n - E)]^{n-1} \leq [P(E)]^n \end{cases}$$

Demonstração: decorre imediatamente do lema anterior aplicado à função: $X_E(x)$.

Capítulo 3

§1 - Semi-continuidade inferior do perímetro

Seja Σ o espaço de todos os borelianos contidos em R^n e consideremos a seguinte função:

$$d: \Sigma \times \Sigma \to R$$

dada por $$d(E_1, E_2) = m(E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2)$$

Vamos provar que d é uma métrica.

Com efeito:

(a) $d(E_1, E_2) = m(E_1 \Delta E_2) \geq 0$

onde $E_1 \Delta E_2 = E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2$ é chamada a diferença simétrica entre os conjuntos E_1 e E_2.

(b) $d(E_1, E_2) = 0 \Leftrightarrow m(E_1 \Delta E_2) = 0 \Leftrightarrow E_1 = E_2$ e neste ponto estamos identificando os conjuntos que diferem por um conjunto de medida zero.

(c) $d(E_1, E_2) = m(E_1 \Delta E_2) = m(E_2 \Delta E_1) = d(E_2, E_1)$. Para concluirmos que d̲ é uma métrica em Σ resta então provar que:

(d) $d(E_1, E_3) \leq d(E_1, E_2) + d(E_2, E_3)$ ou equivalentemente:

$m(E_1 \Delta E_3) \leq m(E_1 \Delta E_2) + m(E_2 \Delta E_3)$

Para isso, basta provar que:

$(E_1 \Delta E_3) \subset (E_1 \Delta E_2) \cup (E_2 \Delta E_3)$

e o resultado decorre da aditividade de m̲.

Devemos então provar que:

$$(E_1 - E_3) \cup (E_3 - E_1) \subset (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1) \cup (E_2 - E_3) \cup (E_3 - E_2)$$

Vamos provar que:

(d.1) $(E_1 - E_3) \subset (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_3)$

(d.2) $(E_3 - E_1) \subset (E_3 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$

Com efeito:

Seja $x \in (E_1 - E_3)$ então $x \in E_1$ e $x \notin E_3$ então duas possibilidades podem ocorrer:

$x \in E_1$ e $x \notin E_3$ e $x \notin E_2$ então $x \in (E_1 - E_2)$ ou

$x \in E_1$ e $x \notin E_3$ e $x \in E_2$ então $x \in (E_2 - E_3)$

logo a (d.1) fica demonstrada.

A (d.2) demonstra-se de maneira análoga.

Seja Σ o espaço métrico assim obtido e convencionaremos que toda vez falarmos em limite de conjuntos contidos em R^n entenderemos sempre tais conjuntos como pertencentes ao espaço Σ.

Dada a sequência $E_1, E_2, \ldots$ convergente para um conjunto E, isto é; $m(E \Delta E_n) \to 0$, indicaremos com $\Phi(B)$ a eventual função aditiva de conjunto verificando as condições (a) e (b) do corolário 1 e indicaremos com $\Phi^n(B)$ a função análoga relativa aos conjuntos E_n.

<u>Teorema 5</u>

Dada uma sequência de conjuntos $\{E_n\}$ convergente para um conjunto E então:

$$\underline{\lim}\, P(E_n) \geq P(E)$$

Ainda mais, se $|P(E_n)| \leq M$, a sequência $\{\phi^n(B)\}$ converge fracamente para $\phi(B)$.

<u>Demonstração</u>: Como $\lim_{n\to\infty} E_n = E \Longleftrightarrow m(E_n \Delta E) \to 0$ teremos dado que $(E - E_n)$ e $(E_n - E)$ são conjuntos disjuntos:

$$m(E_n \Delta E) = \int_{R^n} \chi_{E\Delta E_n}(x)\, dx = \int_{R^n} \chi_{(E-E_n)\cup(E_n-E)}(x)\, dx =$$

$$= \int_{R^n} \chi_{E-E_n}(x)\, dx + \int_{R^n} \chi_{E_n-E}(x)\, dx \to 0$$

Agora:

$$\int_{R^n} |\chi_E(x) - \chi_{E_n}(x)|\, dx = \int_{R^n} (\chi_{E-E_n}(x) + \chi_{E_n-E}(x))\, dx$$

então:

$$(3.1.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{R^n} |\chi_E(x) - \chi_{E_n}(x)|\, dx = 0$$

isto é: $\chi_{E_n}(x)$ tende em média de ordem 1 para $\chi_E(x)$. Ainda mais:

$$(3.1.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{grad} W_\lambda \chi_{E_n}(x) = \operatorname{grad} W_\lambda \chi_E(x)$$

para cada $x \in R^n$ e para cada valor do parâmetro λ.

Com efeito, pela definição do operador W_λ temos:

$$|\operatorname{grad} W_\lambda \chi_{E_n}(x) - \operatorname{grad} W_\lambda \chi_E(x)| =$$

$$= \left| \operatorname{grad} \left[(\pi\lambda)^{-n/2} \int_{R^n} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{\lambda}} \left[\chi_{E_n}(\xi) - \chi_E(\xi)\right] d\xi\right]\right|$$

Como $\left(\chi_{E_n}(\xi) - \chi_E(\xi)\right) \to 0$ então derivando sob sinal de integração com relação ao parâmetro x e pelo teorema da Convergência de Lebesgue concluimos que cada componente do vetor gradiente acima converge para zero e portanto a relação (3.1.2) fica demonstrada.

Da relação (3.1.2), lema de Fatou e da proposição 6 e definição subsequente concluimos que:

$$(3.1.3) \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} P(En) \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda \chi_{E_n}(x)| \, dx_1 \ldots dx_n \geq$$

$$\geq \int_{R^n} \underline{\lim}_{n\to\infty} |\text{grad } W_\lambda \chi_{E_n}(x)| \, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{R^n} |\text{grad } W_\lambda \chi_E(x)| \, dx_1 \ldots dx_n$$ para cada valor positivo do parâmetro λ

Da relação (3.1.3) passando ao limite quando λ tende a zero obtemos:

$$(3.1.4) \quad \underline{\lim} \; P(En) \geq P(E)$$

e a primeira parte do nosso teorema fica demonstrada.

Da relação (3.1.4) concluimos que se $P(En) \leq M$ então $P(E)$ é finito.

Considerando:

$$\mu = \sup \{P(En) : n = 1,2,\ldots\}$$

teremos pelo Corolário 2:

$$(3.1.5) \quad \int_{R^n} |d\phi| \leq \mu \, , \quad \int_{R^n} |d\phi^n| \leq \mu \qquad n = 1,2,\ldots$$

Seja $g: R^n \to R$ contínua e infinitésima para $|x| \to \infty$. Então dado $\varepsilon > 0$

existe $g_\varepsilon(x): R^n \to R$ tal que juntamente com suas derivadas parciais primeiras é contínua em R^n, infinitésima para $|x| \to \infty$, de ordem não inferior a $|x|^{-(n+1)}$ tal que:

$$(3.1.6) \quad |g(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

Pela relação (3.1.1) e pelo Corolário 1 temos:

$$(3.1.7) \quad \lim_{n \to \infty} \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi^n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{R^n} \chi_{E_n}(x)\ \mathrm{grad}\ g_\varepsilon(x)\ dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{R^n} \chi_E(x)\ \mathrm{grad}\ g_\varepsilon(x)\ dx_1 \ldots dx_n = \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi$$

Das relações (3.1.5), (3.1.6) e (3.1.7) concluimos que:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{R^n} g(x)\ d\Phi^n - \int_{R^n} g(x)\ d\Phi \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \int_{R^n} g(x)\ d\Phi^n - \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi^n + \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi^n - \int_{R^n} g(x)\ d\Phi \right| \leq$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \int_{R^n} |g(x) - g_\varepsilon(x)|\ |d\Phi^n| + \lim_{n \to \infty} \left| \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi^n - \int_{R^n} g(x)\ d\Phi \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\mu + \lim_{n \to \infty} \left| \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi^n - \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi + \int_{R^n} g_\varepsilon(x)\ d\Phi - \int_{R^n} g(x)\ d\Phi \right| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\mu$$

Como ε é arbitrário segue que:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{R^n} g(x)\ d\Phi^n - \int_{R^n} g(x)\ d\Phi \right| = 0 \qquad \square$$

Observação: Para a semi-continuidade inferior do perímetro não exigimos o fato de $P(E)$ ser finito. Se em adição, tivermos que $P(E_n) \leq M$ e consequentemente $P(E)$ é finito, então segue a convergência fraca de $\Phi_n(B)$ para $\Phi(B)$.

§2 - Aproximação de conjuntos por poliedros

Um domínio poliedral ou conjunto poliedral de R^n é um conjunto π que seja a aderência de um aberto e cuja fronteira, $F_r\pi$, esteja contida na união de um número finito de hiperplanos.

Em particular se o espaço R^n se reduz ao R^2 ou R^3 o domínio poliedral será respectivamente o polígono ou o poliedro.

Tais conjuntos serão importantes como elementos de aproximação de conjuntos de perímetro finito.

Seja $\{\pi_n\}$ uma sequência de domínios poliedrais que aproximam em média um conjunto $E \subset R^n$, isto é: $m\,(\pi_n \,\Delta\, E)$ converge para zero. Então, pelo teorema 5 teremos:

$$(3.2.1) \quad \underline{\lim}\, P(\pi_n) \geq P(E)$$

Teorema 6

Dado um conjunto $E \subset R^n$ $(n \geq 2)$ então $P(E)$ é igual ao limite inferior dos perímetros dos domínios poliedrais que aproximam em média E, isto é:

$$(3.2.2) \quad \underline{\lim}\, P(\pi_n) = P(E)$$

Demonstração: Se $P(E) = +\infty$ então da (3.2.1) segue imediatamente nossa tese.

Suponhamos então que $P(E)$ é finito. Então pelo teorema 4, ou $m(E)$ é finita ou $m(R^n - E)$ é finita.

Suponhamos $m(E) < \infty$.

Então $\chi_E(x)$ é integrável e portanto pela proposição 4 e pelo teorema da convergência de Lebesgue teremos:

$$(3.2.3) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} |W_\lambda \chi_E(x) - \chi_E(x)| \, dx_1 \ldots dx_n = 0$$

Então dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um número positivo λ_ε tal que para $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$ teremos:

$$(3.2.4) \qquad \int_{R^n} |W_\lambda \chi_E(x) - \chi_E(x)| \, dx_1 \ldots dx_n \leq \varepsilon$$

Pela proposição 1, resulta limitada em R^n a função $|\text{grad } W_\lambda \chi_E(x)|$, isto é:

(3.2.5) $\quad |\text{grad } W_\lambda \chi_E(x)| \leq M$ para todo x de R^n. Dado um número positivo $\eta < \frac{1}{4}$ consideremos o conjunto:

$$L = \{x \in R^n : W_\lambda \chi_E(x) \geq \eta\}$$

Vamos provar que L é limitado.

Para todo x em L, tomemos a bola aberta $B(x, \bar{\rho})$ onde $\bar{\rho} = \eta/2M$.

Assim $L \subset \bigcup_{x \in L} B(x, \bar{\rho})$ e por comodidade chamaremos $\bigcup_{x \in L} B(x, \bar{\rho}) = I_{\bar{\rho}}(L)$.

Agora, para todo $\underline{x}$ pertencente a $I_{\bar{\rho}}(L)$ teremos:

(a) Se x pertence a L então $W_\lambda \chi_E(x) \geq \eta$ ou

(b) Se x pertence a $(I_{\bar{\rho}}(L) - L)$ então:

como $W_\lambda \chi_E : R^n \to R$ e aplicando o teorema do valor médio ao segmento $[\bar{x}, x]$ contido em $I_{\bar{\rho}}(L)$ teremos:

$$W_\lambda \chi_E(x) - W_\lambda \chi_E(\bar{x}) = \text{grad } W_\lambda \chi_E(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

onde $\xi \in (\bar{x}, x)$

Pela desigualdade de Cauchy - Schwartz:

$$|W_\lambda \chi_E(x) - W_\lambda \chi_E(\bar{x})| \leq |\text{grad } W_\lambda \chi_E(\xi)| \quad |x - \bar{x}|$$

ou ainda $$-|\text{grad } W_\lambda \chi_E(\xi)| \; |x - \bar{x}| \leq W_\lambda \chi_E(x) - W_\lambda \chi_E(\bar{x})$$

Da relação 2.4.5 concluimos que:

$$W_\lambda \chi_E(x) - W_\lambda \chi_E(\bar{x}) \geq - M \bar{\rho}$$

$W_\lambda \chi_E(x) \geq W_\lambda \chi_E(\bar{x}) - M \bar{\rho}$ e como $\bar{x}$ pertence a L teremos:

$$W_\lambda \chi_E(x) \geq \eta - M \bar{\rho} = \eta - \frac{M\eta}{2M} = \eta/2$$

Assim, de (a) e (b) concluimos que para todo $\underline{x}$ em $I_{\bar{\rho}}(L)$ temos $W_\lambda \chi_E(x) \geq \eta/2$ e teremos:

$$\int_{R^n} |W_\lambda \chi_E(x)| \; dx_1 \ldots dx_n \geq \int_{I_{\bar{\rho}}(L)} |W_\lambda \chi_E(x)| \; dx_1 \ldots dx_n \geq \eta/2 \; m \left[I_{\bar{\rho}}(L) \right]$$

Como $\chi_E(x)$ é integrável e pela proposição 5 teremos:

$$\int_{R^n} |W_\lambda \chi_E(x)| \; dx < \infty$$

e então $m \left[I_{\bar{\rho}}(L) \right] < \infty$

logo L é limitado.

Como $\chi_E(x)$ é integrável e L é limitado então existe $\alpha > 0$, arbitrariamente grande e o hipercubo

(3.2.6) $T_\alpha = \{x \in R^n : |x_h| \leq \alpha \; h = 1,2,\dots n\}$ tal que:

$$(3.2.7) \qquad \int_{R^n - T_\alpha} \chi_E(x)\, dx < \varepsilon \quad e \quad W_\lambda \chi_E(x) < \eta \quad x \in (R^n - T_\alpha)$$

Seja agora $\Gamma_1 \subset R^{n+1}$ uma hipersuperfície regular dada por:

$$\Gamma_1 = \{(x_1,\dots,x_n,y) \in R^{n+1}: y = W_\lambda \chi_E(x),\ x \in T_\alpha\}$$

A função $W_\lambda \chi_E(x)$ é contínua em R^n juntamente com suas derivadas parciais primeiras e portanto é possível aproximar a hipersuperfície Γ_1 por uma hipersuperfície Γ_2 dada por ([17]- p.326).

$$\Gamma_2 = \{(x_1,\dots,x_n,y) \in R^{n+1}: y = g(x),\ x \in T_\alpha\}$$

tal que:

$\Gamma_2 \subset \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ onde H_i são hiperplanos e $g: T_\alpha \to R$ é contínua e satisfaz:

$$(3.2.8) \qquad 0 < |g(x) - W_\lambda \chi_E(x)| < \eta$$

$$(3.2.9) \qquad \int_{T_\alpha} |g(x) - W_\lambda \chi_E(x)|\, dx_1 \dots dx_n < \varepsilon$$

$$(3.2.10) \qquad \int_{T_\alpha} |\operatorname{grad} g(x)|\, dx_1 \dots dx_n \leq$$

$$\leq \int_{T_\alpha} |\operatorname{grad} W_\lambda \chi_E(x)|\, dx_1 \dots dx_n \leq \int_{R^n} |\operatorname{grad} W_\lambda \chi_E(x)|\, dx + \eta$$

$$\leq P(E) + \eta$$

Seja agora $D \subset R^{n+1}$ definido por:

$$D = \{(x_1,\dots,x_n,y): 0 \leq y \leq g(x),\ x \in T_\alpha\}$$

D é um domínio poliedral pois $\Gamma_2 \subset \bigcup_{i=1}^{r} H_i$.

Das relações (3.2.7) e (3.2.8) temos:

$g(x) < 2\eta$ para todo x em $F_r T_\alpha$.

Assim, para cada número real $\theta \geq 2\eta$, o hiperplano $y = \theta$ encontra a fronteira de D somente em pontos que pertencem a Γ_2.

Indicamos com $\rho(\theta)$ a medida $(n - 1)$ dimensional (entendida no sentido usual) da secção de Γ_2 com o plano $y = \theta$ e chamaremos de Γ_2^* a porção de Γ_2 que está contida no semi-espaço $y \geq 2\eta$.

Como Γ_2^* está contida na união de um número finito de hiperplanos (pois $\Gamma_2^* \subset \Gamma_2$) teremos:

$$(3.2.11) \qquad \int_{\Gamma_2^*} \nu y \, d\sigma = \int_{2\eta}^{\infty} \rho(\theta) \, d\theta$$

onde $d\sigma$ é elemento de medida n- dimensional sobre Γ_2^* e νy é o comprimento da projeção ortogonal do vetor unitário normal a Γ_2 sobre o hiperplano $y = \theta$.

Como $\Gamma_2 = \{(x, y) : y = g(x), \ x \in T_\alpha\}$ temos:

$$(3.2.12) \qquad \int_{\Gamma_2^*} \nu y \, d\sigma \leq \int_{\Gamma_2^*} \nu y \, d\sigma = \int_{T_\alpha} |\mathrm{grad}\ g(x)| \, dx_1 \ldots dx_n$$

Das relações (3.2.10), (3.2.11) e (3.2.12) teremos:

$$\int_{2\eta}^{\infty} \rho(\theta) \, d\theta < P(E) + \eta$$

e com maior razão:

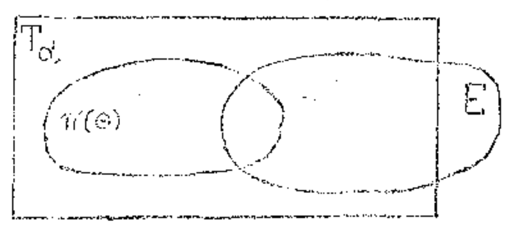
$$(3.2.13) \qquad \int_{2\eta}^{1-\eta} \rho(\theta) \, d\theta < P(E) + \eta$$

Consideremos agora, para cada valor de θ, a secção do domínio D com o hiperplano $y = \theta$ que indicaremos por $\pi(\theta)$; se identificarmos o hiperplano $y = \theta$ com o espaço R^n, ou seja:

$(x_1,\dots,x_n, \theta) \equiv (x_1,\dots,x_n)$ teremos que para quase todos os valores de θ, o conjunto $\pi(\theta)$, se não for vasio, é um domínio poliedral de R^n.

Temos evidentemente:

$$(3.2.14) \qquad \begin{cases} g(x) \geq \theta & \text{se } x \in \pi(\theta) \\ g(x) < \theta & \text{se } x \in (T_\alpha - \pi(\theta)) \end{cases}$$



Como para $\theta \geq 2\eta$ o hiperplano $y = \theta$ encontra a fronteira de D somente em pontos de Γ_2, para quase todos os valores de θ tal que $2\eta \leq \theta \leq 1-\eta$ (valor que preenche um intervalo, sendo por hipótese $\eta < 1/4$) teremos:

$$P\left[\pi(\theta)\right] = \rho(\theta)$$

Aplicando o teorema da média na relação (3.2.13) temos:

$$P(E) + \eta > \rho(\bar{\theta})\left[(1-\eta) - 2\eta\right] = \rho(\bar{\theta})\left[1-3\eta\right]$$

logo

$$(3.2.15) \qquad P\left[\pi(\bar{\theta})\right] = \rho(\bar{\theta}) < \frac{P(E) + \eta}{1 - 3\eta}$$

sendo $\pi(\bar{\theta})$ um domínio poliedral de R^n.

Por outro lado, pela (3.2.14) teremos:

$$(3.2.16) \qquad \begin{cases} g(x) - \chi_E(x) \geq \overline{\theta} > 2\eta & \text{se } x \in \left[\pi(\theta) - E \cap \pi(\theta)\right] \\ \chi_E(x) - g(x) \geq 1 - \theta > \eta & \text{se } x \in \left[E \cap T_\alpha - E \cap \pi(\overline{\theta})\right] \end{cases}$$

Das relações (3.2.4) e (3.2.9) teremos:

$$(3.2.17) \qquad \int_{T_\alpha} |g(x) - \chi_E(x)|\, dx_1 \ldots dx_n \leq$$

$$\leq \int_{T_\alpha} |g(x) - W_\lambda \chi_E(x)|\, dx_1 \ldots dx_n + \int_{T_\alpha} |W_\lambda \chi_E(x) - \chi_E(x)|\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Portanto, pelas relações (3.2.16) e (3.2.17) teremos chamando de B o conjunto $(E \cap T_\alpha + \pi(\overline{\theta}) - E \cap \pi(\overline{\theta})) \subset T_\alpha$

$$2\varepsilon > \int_{T_\alpha} |g(x) - \chi_E(x)|\, dx > \int_B |g(x) - \chi_E(x)|\, dx >$$

$$> \int_B \eta\, dx_1 \ldots dx_n = \eta\, m \left[E \cap T_\alpha + \pi(\overline{\theta}) - E \cap \pi(\overline{\theta})\right]$$

donde teremos:

$$(3.2.18) \qquad m \left[E \cap T_\alpha + \pi(\overline{\theta}) - E \cap \pi(\overline{\theta})\right] < \frac{2\varepsilon}{\eta}$$

Sendo, pela (3.2.7) $m\,(E - T_\alpha \cap E) < \varepsilon$ teremos:

$$(3.2.19) \qquad m \left[E \cup \pi(\overline{\theta}) - E \cap \pi(\overline{\theta})\right] =$$

$$= m\left[(E \cap T\alpha + \pi(\overline{\theta}) - E \cap \pi(\overline{\theta})) \cup (E - T\alpha \cap E)\right] \leq 2\ \varepsilon/\eta + \varepsilon$$

ou seja:

$$\pi(\overline{\theta}) \to E$$

Como ε e η são arbitrários, das relações (3.2. 15) e (3.2.19) teremos:

$$(3.2.20) \qquad \underline{\lim}\ P(\pi_n) \leq P(E)$$

e recordando a (3.2.1) o nosso teorema fica demonstrado.

Observação: Dos teoremas 2 e 6 se vê imediatamente que a nossa definição de perímetro de um conjunto é equivalente à definição dada por Caccioppoli da medida (n-1) dimensional da fronteira orientada do próprio conjunto.

De fato, para que um conjunto $E \subset R^n$ seja aproximável, em média, mediante domínios poliedrais cuja fronteira tem medida (n-1) dimensional equilimitada é necessário e suficiente que seu perímetro seja finito.

Neste caso, seu perímetro P(E) é igual à variação total em R^n da função $\Phi(B)$ que satisfaz as condições (a) e (b) do Corolário 1, esta variação coincide, por sua vez, com a medida (n-1)dimensional segundo Caccioppoli da fronteira orientada de E.

§3 - Medida das projeções sobre os hiperplanos

Analogamente ao perímetro P(E) de um conjunto $E \subset R^n$, podemos considerar as projeções do perímetro P(E) sobre os hiperplanos coordenados, que indicaremos por:

$P_1(E), \ldots, P_n(E)$ e serão definidos por

$$P_h(E) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{R^n} \left| \frac{\partial}{\partial x_h} W_\lambda \chi_E(x) \right| dx_1 \ldots dx_n \qquad h = 1, \ldots, n \tag{3.3.1}$$

A existência do limite (3.3.1) se prova de maneira totalmente analoga à usada para provar a existência do limite empregado na definição subsequente à proposição 6.

Vale evidentemente a relação:

$$\sum_{h=1}^{n} P_h(E) \geq P(E) \tag{3.3.2}$$

enquanto, para cada valor do índice h, resulta:

$$P(E) \geq P_h(E) \tag{3.3.3}$$

Subsistem os seguintes teoremas:

Teorema 7

Dado um conjunto $E \subset R^n$, se para um certo valor do índice h é finito $P_h(E)$, então existe uma função de conjunto $\Phi_h(B)$ satisfazendo às seguintes condições:

(a) $\Phi_h(B)$ é definida para cada $B \subset R^n$, completamente aditiva e de variação total limitada.

(b) Para cada função $g(x)$ tal que juntamente com suas derivadas parciais primeiras é contínua em R^n, infinitésima para $|x| \to \infty$ e de ordem não inferior a $|x|^{-(n+1)}$ resulta:

$$\int_E \frac{\partial g}{\partial x_h} dx_1 \ldots dx_n = \int_{R^n} g(x)\, d\Phi_h \tag{3.3.4}$$

Teorema 8

Dado um conjunto $E \subset R^n$, se existe uma função $\Phi_h(B)$ satisfazendo as condições (a) e (b) do teorema 7 então $P_h(E)$ é finito e teremos:

$$P_h(E) = \int_{R^n} |d\Phi_h| \tag{3.3.5}$$

Teorema 9

Dado um conjunto $E \subset R^n$ tal que para um certo valor do índice $\underline{h}$ resulta finito $P_h(E)$ e seja $\Phi_h(B)$ a função de conjunto satisfazendo as condições (a) e (b) do teorema 7. Então para cada conjunto L sobre cuja fronteira seja nula a variação total da função $\Phi_h(B)$ temos:

$$\Phi_h(L) = -\lim_{\lambda \to 0} \int_L \frac{\partial}{\partial x_h} W_\lambda \chi_E(x)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{3.3.6}$$

Dada a sequência de conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ convergente para um conjunto E, para cada valor do índice $\underline{h}$ definamos a função de conjunto $\Phi_h(B)$ como no teorema 7 e indiquemos por $\Phi_h^{(n)}(B)$ a análoga função para o conjunto E_n.

Subsiste ainda:

Teorema 10

Dada uma sucessão de conjuntos

$E_1, \ldots, E_n, \ldots$

convergente para um conjunto E, teremos:

$$\underline{\lim}\, P_h(E_n) \geq P_h(E) \tag{3.3.7}$$

Ainda mais, se para um certo valor do índice h é limitada a sequência $P_h(E_1),\ldots, P_h(E_n),\ldots$ então a sequência $\phi_h^{(1)}(B)$, $\ldots, \phi_h^{(n)}(B),\ldots$ converge fracamente para $\phi(B)$.

A demonstração destes teoremas é exatamente análoga à dos corol. 1 e 2, teor. 3 e 5, bastando substituir o gradiente pela derivada parcial com respeito a x_h.

Observação: Da relação (3.3.2) e dos teoremas 6 e 10 se deduz imediatamente um resultado (enunciado por Caccioppoli como simples afirmação) que, seguindo as notações usadas neste trabalho, pode ser enunciado do seguinte modo:

"Dado um conjunto $E \subset R^n$, se para cada valor do índice h é possível construir uma sequência de domínios poliedrais $\pi_1^h,\ldots, \pi_n^h,\ldots$ convergente em média para um conjunto E, tal que são equilimitadas as quantidades

$$P_h(\pi_1^h),\ldots, P_h(\pi_n^h),\ldots$$

então $P(E)$ é finito e portanto o conjunto E pode ser aproximado em média mediante uma sequência de domínios poliedrais $\pi_1,\ldots, \pi_n,\ldots$ tendo perímetros $P(\pi_1),\ldots, P(\pi_n),\ldots$ equilimitados.

BIBLIOGRAFIA

(1) CACCIOPPOLI, R. Misura e integrazioni sugli insiemi dimensionalmente orientati Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, 12 (8) : 3-11, p. 137 - 147, 1952.

(2) CESARI, Lamberto, Surface area - New Jersey, Princeton, 1956. 595 p.

(3) D'AMBROSIO, Ubiratan, Semicontinuity theorems for multiple integrals. Sep. Anais da Academia Brasileira de Ciências, Rio de Janeiro, 38 (2) : 245 - 248, 1966.

(4) D'AMBROSIO, Ubiratan, Superfícies generalizadas e conjuntos de perímetro finito, São Carlos, Esc. de Eng. de São Carlos USP, 1963, Tese (dout. em Mat.) - Esc. de Eng. de São Carlos USP.

(5) DE GIORGI, E. Frontiere orientate di misura minima Seminario della Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961.

(6) DE GIORGI, E. Nuovi teoremi relativi alle misure (r - 1) dimensionali in uno spazio ad r - dimensioni. Richerche di Matematica, 4, 1955.

(7) DE GIORGI, E. Su una teoria generale della misura (r - 1) dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Annali di Matematica, 36, 1954 (Serie 4).

(8) FLEMING, W.H. Functions with generalized gradient and generalized surfaces. Annali di Matematica Pura e Applicata, 44 (4) : 93-104, 1957.

(9) FLEMING, W.H. Functions of several variables. Reading, Addison-Wesley /1965/337 p.

(10) HALMOS, P.R. Measure theory. New York, Van Nostrand /1950/304 p.

(11) HARIKI, Seiji. Sobre curvas generalizadas. São Paulo, Inst. Mat. USP 1973, Tese (Título de Mestre) - Inst. Mat. USP.

(12) KRAL, J. The Fredholm method in potencial theory. Transactions of the American Mathematical Society, Providence, 125 (3) : 511 - 547 1966.

(13) LA VALLEE POUSSIN, C. de Convergence des suites de fonctions d' ensemble. Annales de L'Institute H. Poincaré, 2 : 221 - 224,1932.

(14) ROYDEN, L.H. Real analysis. 2a. ed. New York, McMillan /1968/349 p.

(15) RUDIN, Walter. Real and complex analysis. Ljubljana, Mladinska Knjiga, /c 1970/412 p.

(16) SAKS, S. Theory of the integral. 2a. ed. New York, Dover 1964/ 340 p.

(17) SCHWARTZ, Laurent. Méthodes matématiques pour les sciences physiques 2a. ed. Paris, Herman, 1965 - 392 p.

(18) VARADARADJAN, V.S. Measures on topological spaces. American Mathematical Society: Translactions, 48 : 161 - 228 (Serie 2).