Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Álgebras de Banach de Funções Contínuas

por

Kuo Po Ling
Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui**

Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Álgebras de Banach de Funções Contínuas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Kuo Po Ling** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de fevereiro de 2003.

Prof. Dr. **Jorge Tulio Mujica Ascui**.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço.

Prof. Dra. Maria Sueli Marconi Roversi.

Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **IMECC**, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Agradecimentos

O coração de gratidão sempre é dificilmente mostrado totalmente. Porém, neste tempo significativo, não consigo mais contê - lo. Quero muito agradecer

- Ao meu pai Kuo Chin Fu e à minha mãe Kuo Shiu Mei Hsien pelo carinho ilimitado e apoio permanente.
- Ao meu orientador professor Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui pela oportunidade, ensinamento, tolerância e orientação excelente.
- Aos professores Dr. Marco Antonio Teixeira e Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela pela boa recepção no meu período de adaptação aos estudos de Pós - Graduação na UNICAMP.
- Ao Edson meu grande amigo e à sua família.
- A meus colegas de sala, em especial Fernando Santos, Elder, Sônia, Karine e Gilmar.
- À secretaria de Pós - Graduação , em especial a Cidinha, Tânia e Ednaldo.
- À Universidade Estadual de Campinas, e ao Instituto de Matemática, por ter me cultivado academicamente durante o curso do mestrado.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro indispensável.
- À Banca Examinadora pelas correções e sugestões preciosas.
- A Deus.

Ao meu pai Kuo Chin Fu
À minha mãe Kuo Shiu Mei Hsien
Ao meu irmão Kuo Yu Cheng

Resumo

Nosso primeiro objetivo é provar o teorema de Weierstrass sobre a aproximação por polinômios, de funções contínuas definidas em intervalos fechados e com valores reais, e depois o teorema de Stone - Weierstrass, uma forma generalizada do teorema de aproximação de Weierstrass descoberto por Stone, que é um instrumento indispensável na topologia e na análise moderna.

Em seguida, apresentamos as álgebras de Banach, onde estudamos os elementos regulares e singulares, divisores topológicos de zero, o espectro, a fórmula do raio espectral, o radical e a sua semi - simplicidade.

O conjunto $\mathcal{C}^{\star}(X)$ de todas as funções complexas limitadas e contínuas definidas em um espaço topológico X, é a álgebra de Banach mais simples entre as de maior interesse para nós. No desenvolvimento do nosso trabalho, utilizamos o fato que $\mathcal{C}^{\star}(X)$ é também uma $B^{\star}$ - álgebra comutativa. Os últimos resultados principais no nosso trabalho são os seguintes :

(1). O teorema de Gelfand - Neumark, o qual diz que cada $B^{\star}$ - álgebra comutativa A é idêntica à $B^{\star}$ - álgebra comutativa $\mathcal{C}^{\star}(X_A)$, onde X_A é um espaço compacto de Hausdorff construído através da estrutura interna de A.

(2). O teorema de Banach - Stone, o qual afirma que dois espaços compactos de Hausdorff X e Y são homeomorfos se, somente se, as álgebras de funções correspondentes $\mathcal{C}^{\star}(X)$ e $\mathcal{C}^{\star}(Y)$ são isomorfas.

Abstract

Our first aim is to prove the theorem of Weierstrass on the approximation by polynomials of continuous real functions defined on closed intervals and then the Stone - Weierstrass theorem, a generalized form of the Weierstrass approximation theorem discovered by Stone, which is an indispensable tool in topology and modern analysis.

We next present Banach algebras, in which we begin a study of regular and singular elements, topological divisors of zero, the spectrum, the formula for the spectral radius, the radical and semi - simplicity.

The set $\mathcal{C}^\star(X)$ of all bounded continuous complex functions defined on a topological space X is the simplest of the really interesting Banach algebras. The development of this work lead us to establish that $\mathcal{C}^\star(X)$ is also a commutative $B^\star$ - álgebra. The last principal results in our work are the following :

(1). The Gelfand - Neumark theorem, which says that every commutative $B^\star$ - algebra A is essentially identical with the commutative $B^\star$ - álgebra $\mathcal{C}^\star(X_A)$, where X_A is built out of the inner structure of A.

(2). The Banach - Stone theorem, which states that two compact Hausdorff spaces X and Y are homeomorphic if only if their corresponding function algebras $\mathcal{C}^\star(X)$ and $\mathcal{C}^\star(Y)$ are isomorphic.

Conteúdo

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar o teorema de Gelfand - Neumark e o teorema de Banach - Stone.

O teorema de Gelfand - Neumark diz que cada $B^\star-$ álgebra comutativa A é essencialmente idêntica ao conjunto $\mathcal{C}^\star(X_A)$ de todas as funções complexas limitadas e contínuas, definidas em X_A, onde X_A é um espaço compacto de Hausdorff construído através da estrutura interna de A. Na demonstração deste teorema, a aplicação do teorema de Stone - Weierstrass complexo é indispensável, o qual, então, será apresentado e demonstrado no Capítulo 1. Para o estudo de uma $B^\star-$ álgebra comutativa, é necessário ter um conhecimento de álgebras de Banach e as suas involuções, apresentado nos Capítulo 2 e Capítulo 3. Finalmente, aproveitando o estudo realizado nos capítulos precedentes, provamos o teorema de Banach - Stone, no Capítulo 4.

O trabalho se divide, assim, em quatro capítulos. Apresentamos inicialmente, no Capítulo 1, o teorema de aproximação de Weierstrass e depois estenderemos o resultado para um espaço compacto de Hausdorff arbitrário. Dessa maneira, chegamos a estudar e demonstrar os teoremas de Stone - Weierstrass real e complexo. Ao final deste primeiro capítulo, apresentamos também o teorema de Stone - Weierstrass estendido.

Para identificar uma $B^\star-$ álgebra comutativa A com outra $B^\star-$ álgebra comutativa $\mathcal{C}^\star(X_A)$, é essencial encontrar uma aplicação bijetora que preserva toda estrutura assumida em A. Na demonstração deste teorema, a aplicação de Gelfand desempenha este papel importante. No Capítulo 2, além de apresentarmos a definição de álgebras de Banach e alguns exemplos, estudamos principalmente a fórmula do raio espectral e a semi - simplicidade destas álgebras que constituem partes essenciais para desenvolver a aplicação de Gelfand, conservar a norma e a estrutura algébrica de A.

No Capítulo 3, com os resultados obtidos nos Capítulo 1 e Capítulo 2, começamos propriamente a demonstração do teorema de Gelfand - Neumark. Inicialmente, apresentamos a aplicação de Gelfand e demonstramos que o espaço compacto de Hausdorff X_A pode ser construído através da estrutura interna de A. Depois estudaremos as álgebras de Banach auto - adjuntas, que possuem como principal característica o fato da aplicação de Gelfand ser bijetora. Porém, esta estrutura não é ainda suficiente para o nosso propósito. Para suprir esta deficiência apresentamos as involução, as quais possibilitam definir $B^\star-$ álgebra comutativa e tornar a aplicação de Gelfand um $^\star-$ isomorfismo isométrico e sobrejetor.

O objetivo do Capítulo 4 é apresentar o teorema de Banach - Stone, o qual diz que dois espaços compactos de Hausdorff X e Y são homeomorfos se, somente se, as álgebras de funções correspondentes $\mathcal{C}^\star(X)$ e $\mathcal{C}^\star(Y)$ são isomorfas. A parte mais difícil da demonstração deste teorema é identificar um espaço compacto de Hausdorff X com o espaço dos ideais maximais de $\mathcal{C}^\star(X)$, dificuldade esta resolvida no primeiro teorema do referido capítulo.

Capítulo 1

Aproximação

Neste capítulo, nosso trabalho está concentrado no famoso teorema de aproximação de Weierstrass. Primeiramente provamos esse teorema e depois duas formas do teorema de Stone - Weierstrass, que tratam separadamente de funções reais e de complexas. Finalmente, apresentamos o teorema de compactificação de espaços localmente compactos de Hausdorff e voltamos a estender o teorema de Stone - Weierstrass neste contexto.

1.1 O teorema de aproximação de Weierstrass

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes reais, definido em um intervalo fechado $[a, b]$. É claro que tal polinômio é uma função contínua real e que o limite uniforme de qualquer seqüência de tais polinômios é também uma função contínua real. O teorema de aproximação de Weierstrass afirma que o recíproco também é verdadeiro, isto é, qualquer função contínua real definida em $[a, b]$ é o limite uniforme de certa seqüência de polinômios. Esta afirmação é equivalente a dizer que tal função pode ser aproximada uniformemente, pelos polinômios, com qualquer grau de precisão dado.

Teorema 1.1.1 (O teorema de aproximação de Weierstrass). *Seja f uma função real contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio p com coeficientes reais tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$, para todo x em $[a, b]$.*

Demonstração. Consideremos os dois casos seguintes: (1). $a = b$. Se $p(x) = f(a)$ então $|f(x) - p(x)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon$. (2). $a \neq b$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $a < b$. Observamos que

$$x \in [a,b] \Longleftrightarrow x' = \frac{x-a}{b-a} \in [0,1].$$

Então a aplicação contínua h definida por

$$\begin{array}{rcl} h \ : \ [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ x' & \longmapsto & x \ = \ (b-a)x' + \ a \end{array}$$

é uma aplicação bijetora de [0,1] sobre [a,b]. Logo, $g = f \circ h$ é uma função real contínua definida em $[0,1]$ e temos que

$$g(x') = f \circ h(x') = f(x).$$

Se nosso teorema for provado no caso em que $a = 0$ e $b = 1$, então para essa função real contínua g definida em $[0,1]$, existirá um polinômio p' definido em $[0,1]$, tal que, para todo x' em $[0,1]$,

$$|g(x') - p'(x')| < \epsilon.$$

Se expressarmos essa desigualdade em termo de x, obteremos que, para todo x em $[a,b]$,

$$\left| f(x) - p'\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big) \right| < \epsilon.$$

Definindo $p(x) = p'(\frac{x-a}{b-a})$, teremos que, para todo x em $[a,b]$,

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Assim, estará provado este teorema no caso geral. Portando, basta prová-lo supondo $a = 0$ e $b = 1$. Seja n um número natural. O polinômio $B_n(x)$ definido por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

é chamado de polinômio de Bernstein associado a f. Provaremos que existe um polinômio de Bernstein $B_n(x)$ que satisfaz as condições do teorema. Pelo teorema binomial

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1 \tag{1.1}$$

Se diferenciamos (1.1) em relação a x, temos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx) = 0,$$

e multiplicando por $x(1-x)$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}(k-nx) = 0. \tag{1.2}$$

Se diferenciamos (1.2) em relação a x, temos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [-nx^k(1-x)^{n-k} + x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2] = 0. \tag{1.3}$$

Aplicando (1.1) em (1.3), temos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2 = n;$$

e multiplicando por $x(1-x)$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^2 = nx(1-x),$$

e dividindo por n^2 aos dois lados, vem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{1.4}$$

As expressões (1.1) e (1.4) serão instrumentos essenciais para mostrar que $f(x)$ é uniformemente aproximada por $B_n(x)$ quando n for suficientemente grande. Agora nossa demonstração começa realmente. De (1.4), vemos que

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Daí

$$|f(x) - B_n(x)| \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|. \tag{1.5}$$

Como f é uniformemente contínua em $[0,1]$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta \Longrightarrow \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora considerando x fixo e arbitrário, separamos a soma do lado direito de (1.5) em duas partes denotadas por $\sum$ e $\sum'$ de modo que

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \underbrace{\sum \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\sum} + \underbrace{\sum \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\sum'},$$

onde $\sum$ é a soma de todos os termos em que k é tal que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| < \delta$ e $\sum'$ é a soma de todos os termos em que k é tal que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \geq \delta$. Observamos que,em $\sum$, como

$$\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta,$$

então

$$\left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e, assim, usando (1.1) também, temos que

$$\sum < \sum \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo

$$\sum < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Como f é limitada, pois é contínua no compacto $[0,1]$, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x em $[0,1]$. Logo

$$\sum{}' \leq \sum \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (M + M) = 2M \underbrace{\sum \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\sum''},$$

denotada a última soma acima por $\sum''$. Todos os k, em $\sum'$, são tais que $|x - \frac{k}{n}| \geq \delta$, logo $|x - \frac{k}{n}|^2 = (x - \frac{k}{n})^2 \geq \delta^2$. Assim, usando (1.4) também, temos que

$$\delta^2 \sum{}'' \leq \sum \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \leq \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Por isso,

$$\sum{}'' \leq \frac{x(1-x)}{\delta^2 n}.$$

Como o valor máximo de $x(1-x)$ para todo x em $[0,1]$ é $\dfrac{1}{4}$, então

$$\sum{}'' \leq \frac{1}{4\delta^2 n} < \frac{1}{\delta^2 n} < \frac{\epsilon}{4M} \quad \text{quando} \quad n > \frac{4M}{\delta^2 \epsilon}.$$

Portanto

$$\sum{}' \leq 2M \sum{}'' < 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2},$$

$$\sum{}' < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.7}$$

Por (1.6) e (1.7), temos que, para todo x em $[0,1]$,

$$|f(x) - B_n(x)| < \epsilon.$$

Assim, nosso teorema está demonstrado completamente. □

Observamos que o conjunto $\mathcal{C}[a,b]$ de todas as funções contínuas $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é um espaço métrico com relação à distância

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Consequentemente o teorema de aproximação de Weierstrass afirma que os polinômios formam um subespaço denso de $\mathcal{C}[a,b]$.

1.2 Os teoremas de Stone - Weierstrass

Na seção anterior, vimos que os polinômios são densos em $\mathcal{C}[a,b]$, para qualquer intervalo fechado e limitado $[a,b]$. Nosso propósito desta seção é substituir $[a,b]$ por um espaço compacto de Hausdorff X arbitrário e fazer uma afirmação similar sobre $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Uma dificuldade natural é que não tem significado falar de polinômios em X. Porém, este obstáculo vai desaparecer quando identificarmos o conjunto P de todos os polinômios em $[a,b]$ com o conjunto de todas as funções definidas em $[a,b]$ geradas por $\{1,x\}$, onde $1, x$ são as funções definidas por $1(t) = 1$ e $x(t) = t$, para todo t em $[a,b]$. Após essa identificação, podemos considerar P como uma subálgebra de $\mathcal{C}[a,b]$ contendo $\{1,x\}$. Como o fecho de uma subálgebra é também uma subálgebra, temos que $\overline{P}$ é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}[a,b]$ contendo $\{1,x\}$ e que está contida em cada subálgebra fechada que comtem 1 e x. Logo, pelo Teorema de aproximação de Weierstrass, temos que $\mathcal{C}[a,b]$ é igual a qualquer subálgebra fechada que contém $\{1,x\}$. Afirmar que uma subálgebra de $\mathcal{C}[a,b]$ contém $\{1,x\}$ é equivalente a dizer que ela contém uma função constante não nula e separa pontos. Portanto temos uma nova maneira de enunciar o teorema de aproximação de Weierstrass : Se A é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}[a,b]$ que contém uma função constante não nula e separa pontos, então A é igual a $\mathcal{C}[a,b]$.

Para obter um resultado análogo em $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ introduzimos os seguintes conceitos e resultados. Um reticulado L é um conjunto parcialmente ordenado, no qual cada par de elementos tem o supremo e o ínfimo. Se $x, y \in L$, denotamos por $x \vee y$ o supremo de x e y, e por $x \wedge y$ o ínfimo de x e y. Um subreticulado de L é um subconjunto não vazio L_1 de L tal que se $x, y \in L_1$, então $x \vee y, x \wedge y \in L_1$.

$\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é um conjunto parcialmente ordenado sob a relação $\leq$ definida por $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Observamos que $f \vee g, f \wedge g$ são as funções contínuas reais, onde, para todo $x \in X$,

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\};$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Portanto $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é um reticulado. Os teoremas desta seção estão baseados nos dois lemas seguintes :

Lema 1.2.1. *Seja X um espaço compacto de Hausdorff com mais de um ponto. Um subreticulado fechado L de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é igual a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ se satisfaz a seguinte propriedade : se x e y são pontos diferentes de X e a e b são dois números reais quaisquer, então existe uma função f em L tal que $f(x) = a$ e $f(y) = b$.*

Demonstração. Como $L \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é imediato, basta provar que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \subset L$. Dado $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, provaremos que $f \in L$. Como L é fechado, temos $L = \overline{L}$ e, por conseguinte, será suficiente provar que $f \in \overline{L}$. Então, dado $\epsilon > 0$, provaremos que existe uma função $g \in L$ tal que $\| f - g \| < \epsilon$, ou seja, para todo z em X, $| f(z) - g(z) | < \epsilon$. Fixamos x em X arbitrário. Seja $y \in X$ e $y \neq x$. Por hipótese, existe uma função $f_y \in L$ tal que $f_y(x) = f(x)$ e $f_y(y) = f(y)$. Seja

$$G_y = \{z : f_y(z) < f(z) + \epsilon\}.$$

Observamos que G_y é um aberto de X contendo x e y, pois $G_y = (f_y - f)^{-1}(-\infty, \epsilon)$, onde $f_y - f$ é uma função contínua de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ e $(-\infty, \epsilon)$ é um aberto de $\mathbb{R}$ contendo 0. Logo $\{G_y : y \in X \text{ e } y \neq x\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe uma subcobertura finita, ou seja, existem $G_1, G_2, \ldots, G_n$ em $\{G_y : y \in X \text{ e } y \neq x\}$ tais que $X = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$. Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ as funções de L que correspondem a $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Definimos

$$g_x = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n.$$

Como L é reticulado e $f_i \in L$, para todo i em $\{1, 2, \ldots, n\}$, temos que $g_x \in L$. Observamos que, para todo z em X,

$$g_x(z) < f(z) + \epsilon. \tag{1.8}$$

De fato , dado $z \in X$, como $X = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$, obtemos que z está em algum $G_i = \{z : f_i(z) < f(z) + \epsilon\}$, onde $1 \leq i \leq n$. Logo $f_i(z) < f(z) + \epsilon$. Como, pela definição de g_x, $g_x \leq f_i$, temos que $g_x(z) < f(z) + \epsilon$. Agora consideramos o conjunto H_x definido por

$$H_x = \{z : g_x(z) > f(z) - \epsilon\}.$$

Observamos que H_x é um aberto de X contendo x, pois $H_x = (f - g_x)^{-1}(-\infty, \epsilon)$, $f - g_x$ é uma função contínua de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ e $(-\infty, \epsilon)$ é um aberto de $\mathbb{R}$ contendo 0. Logo $\{H_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe uma subcobertura finita, ou seja, existem $H_1, H_2, \cdots, H_m$ em $\{H_x : x \in X\}$ tais que $X = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m$. Sejam $g_1, g_2, \ldots, g_m$ as funções de L que correspondem a $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Definimos

$$g = g_1 \vee g_2 \vee \cdots \vee g_m.$$

Como L é reticulado e $g_i \in L$, para todo i em $\{1, 2, \ldots, m\}$, temos $g \in L$. Observamos que, para todo z em X,

$$g(z) > f(z) - \epsilon. \tag{1.9}$$

De fato , dado z em X, como $X = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m$, obtemos que z está em algum $H_i = \{z : g_i(z) > f(z) - \epsilon\}$, onde $1 \leq i \leq m$. Logo, $g_i(z) > f(z) - \epsilon$. Como, pela definição de g, $g \geq g_i$, temos que $g(z) > f(z) - \epsilon$. É claro que, para todo z em X ,

$$g(z) < f(z) + \epsilon, \tag{1.10}$$

pois, por (1.8), vimos que $g_i(z) < f(z) + \epsilon$, para todo i em $\{1, 2, \ldots, m\}$ e, pela definição de g, $g(z) = max\{g_i(z) : 1 \leq i \leq m\}$. Por (1.9) e (1.10), temos que $f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon$ para todo z em X. □

Lema 1.2.2. *Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Então cada subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é também um subreticulado fechado de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Seja A uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Sejam $f,\ g \in A$, queremos provar que $f \vee g,\ f \wedge g \in A$. Sabemos que

$$f \vee g = \frac{f + g + \mid f - g \mid}{2} \qquad \text{e} \qquad f \wedge g = \frac{f + g - \mid f - g \mid}{2}.$$

Como A é uma álgebra, basta provar que se $f \in A$ então $\mid f \mid \in A$. Por hipótese, sabemos que A é fechada, ou seja, $A = \overline{A}$. Assim, será suficiente provar que $\mid f \mid \in \overline{A}$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, provaremos que existe $g \in A$ tal que $\| \ |f| - g \ \| < \epsilon$, ou seja, $\Big| |f(x)| - g(x) \Big| < \epsilon$ para todo x em X. Como $f \in A \subset C(X, \mathbb{R})$, temos que f é limitada, pois X é compacto. Logo existe $M > 0$ tal que $\mid f(x) \mid \leq M$ para todo x em X. Seja h a função contínua definida para todo t em $[-M, M]$ por

$$h(t) \ = \mid t \mid .$$

Pelo Teorema 1.1.1 (o teorema de aproximação de Weierstrass), sabemos que existe um polimônio p' tal que $|h(t) - p'(t)| = \Big| \ |t| - p'(t) \ \Big| < \ \epsilon/2$ para todo t em $[-M, M]$. Em particular, tomando $t = 0$, temos que $\Big||0| - p'(0)\Big| < \epsilon/2$, ou seja, $\mid p'(0) \mid < \epsilon/2$. Seja $c = p'(0)$, o termo constante de p'. Seja $p(x) = p'(x) - c$, logo temos que p é um polinômio com termo constante nulo. Assim, dado $t \in [-M, M]$, resulta que $\Big| \ |t| - p(t) \ \Big| = \Big| \ |t| - p'(t) + c \ \Big| \leq \Big| \ |t| - p'(t) \ \Big| + |p'(0)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Logo $\Big| \ |t| - p(t) \ \Big| < \epsilon$ para todo t em $[-M, M]$. Como $f(x) \in [-M, M]$ para todo x em X, temos que $\Bigg| |f(x)| - p(f(x)) \Bigg| < \epsilon$. Observamos que

$$\begin{aligned} p\big(f(x)\big) &= 0 + a_1[f(x)] + \cdots + a_n[f(x)]^n \\ &= 0 + (a_1 f)(x) + \cdots + (a_n f^n)(x) \\ &= \Big(a_1 f + \cdots + a_n f^n\Big)(x). \end{aligned}$$

Como $f \in A$ e A é uma álgebra, temos que $a_1 f + \cdots + a_n f^n \in A$. Logo basta tomar $g = a_1 f + \cdots + a_n f^n$. Assim, o nosso lema está demonstrado. $\square$

Teorema 1.2.3 (O teorema de Stone - Weierstrass real). *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e A uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ que separa pontos e contém uma função constante não nula. Então A é igual a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração. (1). Se X possui somente um ponto, então $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ só contém funções constantes. Por hipótese, sabemos que A possui uma função constante não nula f e A é uma álgebra. Logo $\alpha \cdot f \in A$, para todo α em $\mathbb{R}$. Segue que A contém todas as funções constantes, e assim $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. (2). Se X possui mais do que um ponto, então como A é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, pelo lema 1.2.2, temos que A é um subreticulado fechado de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Logo, pelo lema 1.2.1, basta provar que se $x \neq y$ em X e $a, b \in \mathbb{R}$, então existe $f \in A$ tal que $f(x) = a$ e $f(y) = b$. Como A separa pontos, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Definimos f em X por

$$f(z) = a \ \frac{g(z) - g(y)}{g(x) - g(y)} + b \ \frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}$$

para todo z em X. Logo $f \in A$ pois $g \in A$ e A é uma álgebra, $f(x) = a$ e $f(y) = b$. $\square$

Agora estudaremos o caso das funções complexas, ou melhor, as condições que garantam uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ ser igual a $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Primeiramente, veremos um exemplo que mostra que as condições do teorema 1.2.3 não são suficientes para o caso complexo.

Exemplo 1.2.4. *Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, o disco fechado unitário no plano complexo. Seja $B = \{f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C}) \mid f : \mathring{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica$\}$. Então B é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Isto será usado no capítulo 2.*

(1). B é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Dados $f,\ g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, sabemos que $f + g,\ f \cdot g$ e $\alpha \cdot f$ são contínuas em D e são analíticas em $\mathring{D}$. Logo B é uma subálgebra de $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Agora falta provar que B é fechado, ou seja, $B = \overline{B}$. Dado $f \in \overline{B}$, provaremos que $f \in B$. De fato, $f \in \overline{B} \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$, logo será suficiente provar que f seja analítica em $\mathring{D}$. Como $f \in \overline{B}$, existe uma seqüência $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset B$ tal que $f_n \longrightarrow f$. Logo $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre todos os subconjuntos compactos de $\mathring{D}$. Seja T um caminho triangular em $\mathring{D}$, logo T é compacto. Segue - se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em T, logo temos que

$$\int_T f = \lim_{n \to +\infty} \int_T f_n.$$

Como $f_n \in B$ é analítica em $\mathring{D}$ e T é um caminho fechado em $\mathring{D}$, temos que $\int_T f_n = 0$. Portanto $\int_T f = 0$ para qualquer caminho triangular T. Logo, pelo Teorema de Morera, temos que f é analítica em $\mathring{D}$. Assim, temos que $f \in B$. Logo B é fechado.

(2). B separa pontos e contém uma função constante não nula. De fato, B contém a função $f(z) = z$, logo B separa pontos, e é claro que B contém todas as funções constantes.

(3). $B \neq \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Seja f a função complexa definida por $f(z) = \overline{z}$ para todo z em D. É claro que $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Mas, $f \notin B$, pois f não é analítica em $\mathring{D}$. Dado $z_\circ \in \mathring{D}$,

$$\begin{aligned} f'(z_\circ) &= \lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} \\ &= \lim_{z \to z_\circ} \frac{\overline{z} - \overline{z_\circ}}{z - z_\circ} \\ &= \lim_{z \to z_\circ} \frac{\overline{(x + iy)} - \overline{(x_\circ + iy_\circ)}}{(x + iy) - (x_\circ + iy_\circ)} \\ &= \lim_{z \to z_\circ} \frac{(x - x_\circ) + i(y_\circ - y)}{(x - x_\circ) + i(y - y_\circ)}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Fazendo $z \longrightarrow z_\circ$ quando z pertence à reta $Rez = x_\circ$, temos

$$(*) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{(y_\circ - y)i}{(y - y_\circ)i} = -1.$$

Fazendo $z \longrightarrow z_\circ$ quando z pertence à reta $Imz = y_\circ$, segue que

$$(*) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{x - x_\circ}{x - x_\circ} = 1.$$

Portanto $f(z) = \overline{z}$ não é derivável em todo $z \in \mathring{D}$.

Agora lembramos que se f é uma função complexa definida em um espaço topológico X, então sua função conjugada $\overline{f}$ é definida por $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$. Logo podemos definir a parte real $R(f)$ e a parte imaginária $I(f)$ de modo que

$$R(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \qquad \text{e} \qquad I(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i}.$$

Obtemos que $R(f)$ e $I(f)$ são funções reais e $f = R(f) + iI(f)$.

Teorema 1.2.5 (O teorema de Stone - Weierstrass complexo). *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e A uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ que separa pontos, contém uma função constante não nula e contém a função conjugada de cada um de seus membros. Então A é igual a $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar as duas afirmações seguintes:

(1). As funções reais de A formam uma subálgebra fechada B de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

(2). $B = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

(1a). B é subálgebra de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Sejam $f, g \in B$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in X$. Como A é álgebra, é claro que $f + g \in A$ e ainda $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$. Logo $f + g \in B$. $\alpha \cdot f \in A$. E $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \in \mathbb{R}$, logo $\alpha \cdot f \in B$. E $f \cdot g \in A$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}$, logo $f \cdot g \in B$. Portanto B é subálgebra de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. (1b). B é fechada em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Dado $f \in \overline{B}$, provaremos que $f \in B$. Como $f \in \overline{B}$, existe uma seqüência $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset B \subset A$ tal que $f_n \longrightarrow f$. Como A é fechada, é claro que $f \in A$. Agora falta provar que f é uma função real. Seja $x \in X$, temos que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, ou seja, $R(f_n)(x) + iI(f_n)(x) \longrightarrow R(f)(x) + iI(f)(x)$. Logo $R(f_n)(x) \longrightarrow R(f)(x)$ e $I(f_n)(x) \longrightarrow I(f)(x)$. Como $f_n \in B$, temos que $I(f_n)(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $I(f)(x) = 0$ para todo x em X. Logo f é uma função real. Portanto $f \in B$. (2). $B = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. De (1), sabemos que B é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Pelo Teorema 1.2.3, basta provar que B separa pontos e contém uma função constante não nula. (2a). B separa pontos. Dados $x \neq y$ em X, provaremos que existe $g \in B$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Por hipótese, Como A separa pontos, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$, isto é, $R(f)(x) + iI(f)(x) \neq R(f)(y) + iI(f)(y)$, ou seja, $R(f)(x) \neq R(f)(y)$ ou $I(f)(x) \neq I(f)(y)$. Sabemos que

$$R(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \qquad \text{e} \qquad I(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i}.$$

Como A é álgebra e contém a função conjugada de cada uma de sua função, temos que

$$R(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \in A \qquad \text{e} \qquad I(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i} \in A$$

são funções reais. Logo $R(f) \in B$ e $I(f) \in B$. Portanto basta tomar $g = R(f)$ ou $g = I(f)$. (2b). B contém uma função constante não nula. Por hipótese, A contém uma função constante não nula g, logo sua função conjugada $\overline{g}$ é também uma função constante não nula. Como A é uma álgebra, temos que $g \cdot \overline{g} = |g|^2 \in A$ e é uma função real. Logo $g \cdot \overline{g} = |g|^2 \in B$ que é uma função constante não nula pois g e $\overline{g}$ o são. Agora nossa demonstração começa realmente. Como $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ é imediato, basta provar que $\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \subset A$, ou seja, dado $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, provaremos que $f \in A$. Sabemos que $f = R(f) + iI(f)$, onde $R(f),\ I(f) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Pelas afirmações acima , temos que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = B$ e $B \subset A$, logo $R(f),\ I(f) \in A$. Como A é uma álgebra, temos $R(f) + iI(f) \in A$, ou seja, $f \in A$. □

Estas duas versões de Stone - Weierstrass estão entre os resultados mais importantes da análise moderna. Sem os quais teoremas dos últimos capítulos seriam dificilmente demonstrados.

1.3 Espaços localmente compactos de Hausdorff

Nesta seção, nossa atenção está voltada para espaços localmente compactos de Hausdorff. O principal fato sobre tais espaços é que eles podem ser adequadamente mergulhados em espaços compactos de Hausdorff.

Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff com sua topologia τ_X e ∞ um elemento que não está em X. Denotamos por X_∞ o conjunto $X \cup \{\infty\}$, ou seja,

$$X_\infty = X \cup \{\infty\}.$$

Definimos uma topologia τ em X_∞ de modo que seus abertos são os seguintes :

1. U, onde $U \in \tau_X$.

2. $X_\infty \backslash K$, onde K é compacto de X.

Provaremos que τ é de fato uma topologia em X_∞ (1). $\phi \in \tau$ pois $\phi \in \tau_X$ e $X_\infty \in \tau$. (2). Provaremos que $V_i \in \tau, i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} V_i \in \tau$. Dado $i \in I$, como $V_i \in \tau$, temos que $V_i \in \tau_X$ ou $V_i = X_\infty \backslash K_i$ para algum compacto K_i de X. Sejam $J_1 = \{i \in I : V_i \in \tau_X\}$ e $J_2 = \{i \in I : V_i = X_\infty \backslash K_i$, onde K_i é compacto de $X\}$. Logo temos que

$$\cup_{i\in I} V_i = \big(\cup_{i\in J_1} V_i\big) \cup \big(\cup_{i\in J_2} V_i\big).$$

Denotamos $U = \cup_{i\in J_1} V_i$. Observamos que $\cup_{i\in J_2} V_i = \cup_{i\in J_2}(X_\infty \backslash K_i) = \cup_{i\in J_2} K_i^c = (\cap_{i\in J_2} K_i)^c = X_\infty \backslash \cap_{i\in J_2} K_i = X_\infty \backslash K$, onde $K = \cap_{i\in J_2} K_i$, que é compacto. Portanto

$$\begin{aligned}
\cup_{i\in I} V_i &= (\cup_{i\in J_1} V_i) \cup (\cup_{i\in J_2} V_i) \\
&= U \cup (X_\infty \backslash K) \\
&= (U \cup X_\infty) \cap (U \cup K^c) \\
&= X_\infty \cap (U^c \cap K)^c \\
&= X_\infty \backslash (K \backslash U) \in \tau,
\end{aligned}$$

pois $K \backslash U$ é compacto. (3). Provaremos que $U, V \in \tau \Longrightarrow U \cap V \in \tau$. (a). Se $U, V \in \tau_X$, então $U \cap V \in \tau_X$. Logo $U \cap V \in \tau$. (b). Se $U = X_\infty \backslash K_1$ e $V = X_\infty \backslash K_2$, onde K_1, K_2 são compactos de X, então $U \cap V = \big(X_\infty \backslash K_1\big) \cap \big(X_\infty \backslash K_2\big) = X_\infty \backslash K_1 \cup K_2 \in \tau$, pois $K_1 \cup K_2$ é compacto. (c). Se $U \in \tau_X$ e $V = X_\infty \backslash K$, então $U \cap V = U \cap (X_\infty \backslash K) = U \cap (X \backslash K) \in \tau_X$, pois $U \in \tau_X$ e $X \backslash K \in \tau_X$, uma vez que K é um fechado de X por ser compacto num espaço de Hausdorff. Logo $U \cap V \in \tau$. Por (1), (2) e (3), obtemos que τ é uma topologia em X_∞.

Agora provaremos que (X, τ_X) é um subespaço topológico de (X_∞, τ), ou seja, $\{U \cap X : U \in \tau\} = \tau_X$. (1). $\tau_X \subset \{U \cap X : U \in \tau\}$. Se $U \in \tau_X$, então $U \in \tau$ e $U = U \cap X$. (2). $\{U \cap X : U \in \tau\} \subset \tau_X$. Dado $V = U \cap X$ com $U \in \tau$, tais que : (a). Se $U \in \tau_X$, então $V = U \cap X = U \in \tau_X$. (b). Se $U = X_\infty \backslash K$, onde K é compacto de X, então $V = U \cap X = (X_\infty \backslash K) \cap X = X \backslash K \in \tau_X$. Por (1) e (2), temos que $\{U \cap X : U \in \tau\} = \tau_X$, ou seja, (X, τ_X) é um subespaço topológico de (X_∞, τ).

Esse espaço topológico (X_∞, τ) tem as seguintes propriedades : **(1)**. X_∞ é compacto. Seja $\{G_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de X_∞. Sejam $i \in I, G_i \in \tau_X$ ou $G_i = X \backslash K$, onde K é subconjunto compacto de X. Como $\{G_i : i \in I\}$ é uma cobertura aberta de X_∞, existe

$G_\circ \in \{G_i : i \in I\}$ tal que $\infty \in G_\circ$. Observamos que, contendo $\infty, G_\circ \notin \tau_X$. Logo

$$G_\circ = X \backslash K_\circ,$$

onde $K_\circ$ é subconjunto compacto de X. Já vimos que (X, τ_X) é subespaço topológico de (X_∞, τ). Por conseguinte, temos que $\{G_i \cap X : i \in I\}$ é uma cobertura aberta de X. Logo $\{G_i \cap K_\circ : i \in I\}$ é uma cobertura aberta de $K_\circ$. Como $K_\circ$ é compacto, possui uma subcobertura finita, ou seja, existem $G_1 \cap K_\circ,\ G_2 \cap K_\circ,\ \ldots,\ G_n \cap K_\circ$ tais que

$$K_\circ = \big(G_1 \cap K_\circ\big) \cup \big(G_2 \cap K_\circ\big) \cup \cdots \cup \big(G_n \cap K_\circ\big).$$

Logo

$$\begin{aligned} X_\infty &= X_\infty \backslash K_\circ \cup K_\circ \\ &= G_\circ \cup K_\circ \\ &= G_\circ \cup \big(G_1 \cap K_\circ\big) \cup \big(G_2 \cap K_\circ\big) \cup \cdots \cup \big(G_n \cap K_\circ\big) \\ &\subset G_\circ \cup \ \cup\{G_i : 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Portanto $\{G_\circ, G_1, \ldots, G_n\}$ é uma subcobertura finita de X_∞. Logo X_∞ é compacto.**(2)**. X_∞ é de Hausdorff. Sejam $x \neq y$ em X_∞. (a). Se $x \in X$ e $y \in X$, como, por hipótese, X é de Hausdorff, existem U, V abertos de X, logo $U, V \in \tau$ com $U \cap V = \phi$ tais que $x \in U$ e $y \in V$. Portanto X_∞ é de Hausdorff. (b). Se $x \in X$ e $y = \infty$, como, por hipótese, X é localmente compacto, existe uma vizinhança G de x cujo fecho $\overline{G}$ é compacto. Logo G e $X_\infty \backslash \overline{G}$ são abertos de X_∞ tais que $G \cap (X_\infty \backslash \overline{G}) = \phi$, $x \in G$ e $\infty \in X_\infty \backslash \overline{G}$. Portando X_∞ é de Hausdorff.

Assim, concluímos que o espaço X_∞ associado ao espaço localmente compacto de Hausdorff X é um espaço compacto de Hausdorff chamado de compatificação de um ponto de X e ∞ é dito o ponto no infinito.

Teorema 1.3.1. *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff, K um subespaço compacto de X e G uma vizinhança de K que não é igual a X. Então existe uma função contínua f de X em $[0,1]$ tal que $f(K) = 1$ e $f(X \backslash G) = 0$.*

Demonstração. Seja X_∞ uma compatificação de um ponto de X. Sendo um espaço compacto de Hausdorff segue que X_∞ é normal, e K e $X_\infty \backslash G$ são fechados disjuntos de X_∞. Então, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $g : X_\infty \longrightarrow [0,1]$ tal que $g(K) = 1$ e $g(X_\infty \backslash G) = 0$. Tomamos $f = g|_X$. Logo f satisfaz as condições do teorema. $\square$

Este teorema 1.3.1 é um instrumento importante na teoria de medida e integração em espaços localmente compactos de Hausdorff.

1.4 O teorema de Stone - Weierstrass estendido

Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Nosso propósito nesta seção é generalizar o teorema de Stone - Weierstrass neste contexto.

Diremos que uma função real ou complexa definida em X se anula no infinito, se dado $\epsilon > 0$, existe um subespaço compacto K de X tal que $|f(x)| < \epsilon$, para todo x em $X \backslash K$. Observamos que se X é compacto, então qualquer função definida em X se anula no infinito.

Denotamos por $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e por $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em X que se anulam no infinito. $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C})$ e $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C})$ são definidos de modo similar. Se $f \in \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ ou $f \in \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C})$, dado $\epsilon > 0$, existe um compacto K de X tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo x em $X \backslash K$ e, além disso, f é limitada em K. Portanto f é limitada em X. Logo $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C})$. Quando X é compacto, pela observação no parágrafo precedente, obtemos que $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C}) = \mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Lema 1.4.1. *$\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C})$ são subálgebras fechadas de $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C})$, respectivamente.*

Demonstração. (1). $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C})$ são fechadas em $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C})$. Primeiramente provaremos que $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ é fechado em $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R})$, ou seja, $\overline{\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})} = \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$. Como $\overline{\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})} \supset \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ é imediato, basta provar que $\overline{\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})} \subset \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$. Se $f \in \overline{\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})}$, dado $\epsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ tal que $\| f - g \| < \epsilon/2$. Logo $|f(x) - g(x)| < \epsilon/2$ para todo x em X. Como g se anula no infinito, existe um compacto K de X tal que $|g(x)| < \epsilon/2$ para todo x em $X \backslash K$. Logo $|f(x)| = |f(x) - g(x) + g(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x)| < \epsilon$ para todo x em $X \backslash K$ e $f \in \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$. De modo análogo, podemos concluir que $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C})$ é fechado em $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C})$. (2). $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C})$ são subálgebras de $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C})$. Primeiramente provaremos que $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ é subálgebra de $\mathcal{C}^\star(X, \mathbb{R})$. Sejam $f, g \in \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. (a).$f + g \in \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$. Dado $\epsilon > 0$, como $f, g \in \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$, existem K_1, K_2 : compactos de X tais que$|f(x)| < \epsilon/2$ para todo x em $X \backslash K_1$ e $|g(x)| < \epsilon/2$ para todo x em $X \backslash K_2$. Tomamos $K = K_1 \cap K_2$: compacto de X. Logo temos que $|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| <$

ϵ para todo x em $X\backslash K$. Portanto $f+g \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. (b). $\alpha \cdot f \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$, $\alpha \neq 0$, pois $\alpha = 0$ é óbvio. Dado $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$, existe K : um subespaço compacto de X tal que $|f(x)| < \epsilon/|\alpha|$ para todo x em $X\backslash K$. Logo $|(\alpha f)(x)| = |\alpha \cdot f(x)| = |\alpha| \cdot |f(x)| < |\alpha| \cdot \epsilon/|\alpha| = \epsilon$. Portanto $\alpha \cdot f \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. (c). $f \cdot g \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. Dado $\epsilon > 0$, como $f, g \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$, existem K_1, K_2 : subespaços compactos de X tais que $|f(x)| < \sqrt{\epsilon}$ para todo x em $X\backslash K_1$, e $|g(x)| < \sqrt{\epsilon}$ para todo x em $X\backslash K_2$. Tomamos $K = K_1 \cap K_2$: um compacto de X. Logo temos que $|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \epsilon$ para todo x em $X\backslash K$. Portanto $f \cdot g \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. Por (a), (b) e (c), e como $\mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$ não é vazio, pois contém a função nula, resulta que $\mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}^\star(X,\mathbb{R})$. De modo similar, podemos obter que $\mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{C})$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}^\star(X,\mathbb{C})$. □

Lema 1.4.2. $\mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$ *coincide com conjunto de todas as restrições a* X *das funções em* $\mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{R})$ *que se anulam em* ∞. *De modo similar,* $\mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{C})$ *é igual ao conjunto de todas as restrições a* X *das funções em* $\mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{C})$ *que se anulam em* ∞.

Demonstração. Primeiramente provaremos o caso de funções reais, ou seja,

$$\{f|_X : f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{R}) \text{ e } f(\infty) = 0\} = \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R}).$$

(1). $\{f|_X : f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{R}) \text{ e } f(\infty) = 0\} \subset \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. Seja $f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{R})$ com $f(\infty) = 0$. Provaremos que $f|_X \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. Como f é contínua em ∞ e $f(\infty) = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe G : um aberto de X_∞ contendo ∞ tal que, para todo x em G,

$$|f(x)| < \epsilon. \tag{1.11}$$

Pela definição da topologia de X_∞, temos que $G = X_\infty\backslash K$, onde K é um subespaço compacto de X. Por (1.11), temos que $|f(x)| < \epsilon$ para todo x em $X_\infty\backslash K$. Logo $\big|f|_X(x)\big| < \epsilon$ para todo x em $X\backslash K$. Portanto $f|_X \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. (2). $\{f|_X : f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{R}) \text{ e } f(\infty) = 0\} \supset \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$. Seja $g \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$, provaremos que existe $f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{R})$ e $f(\infty) = 0$ tal que $g = f|_X$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in X \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$$

Agora, basta provar que $f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty,\mathbb{C})$. Como g é limitada e contínua em X, só falta provar que f é contínua em ∞. De fato, como $g \in \mathcal{C}_\circ(X,\mathbb{R})$, dado $\epsilon > 0$, existe K : subespaço compacto de X tal que $|g(x)| < \epsilon$ para todo x em $X\backslash K$. Logo $|f(x)| < \epsilon$ para todo x em

$X_\infty \backslash K$, onde, pela definição da topologia de X_∞, $X_\infty \backslash K$ é um aberto de X_∞ contendo ∞. Portanto, f é contínua em ∞. Por (1) e (2), temos que

$$\{f|_X : f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{R}) \text{ e } f(\infty) = 0\} = \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R}).$$

De modo similar, obtemos o mesmo resultado no caso de funções complexas, ou seja,

$$\{f|_X : f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{C}) \text{ e } f(\infty) = 0\} = \mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{C}).$$

□

Os lemas acima são a base para demonstrar os dois teoremas seguintes conhecidos como teoremas de Stone - Weierstrass estendidos.

Teorema 1.4.3. *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff e seja A uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$ que separa pontos e que, para cada ponto em X, contém uma função que não se anula nele. Então, A é igual a $\mathcal{C}_\circ(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Seja X_∞ a compatificação de um ponto de X. Pelo lema 1.4.2, podemos estender cada função f em A a uma função $\widetilde{f}$ em $\mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{R})$ de modo que

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$$

Denotamos por $A_\circ$ o conjunto de todas extensões de elementos de A, ou seja,

$$A_\circ = \{f \in \mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{R}) : f|_X \in A \text{ e } f(\infty) = 0\}.$$

A hipótese do teorema implica que $A_\circ$ é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{R})$ que separa pontos. Seja

$$A_1 = \{f + c : f \in A_\circ \text{ e } c \text{ é uma função constante em } \mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{R})\}.$$

Observamos que (a). A_1 é fechado em $\mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{R})$. Seja $f \in \overline{A_1}$, provaremos que $f \in A_1$. Como $f \in \overline{A_1}$, existe uma seqüência $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ em A_1 tal que $f_n \longrightarrow f$. Como $f_n \in A_1$, $f_n = g_n + c_n$, onde $g_n \in A_\circ$ e c_n é uma função constante em $\mathcal{C}^\star(X_\infty, \mathbb{R})$. Então, $g_n + c_n \longrightarrow f$. Logo, $g_n(\infty) + c_n(\infty) \longrightarrow f(\infty)$. Como $g_n(\infty) = 0$, temos que $c_n(\infty) \longrightarrow f(\infty)$. Como c_n é uma função constante, temos que $c_n \longrightarrow f(\infty)$. Agora, observamos que $f - f(\infty) \in \overline{A_\circ}$. De fato, $g_n = (g_n + c_n) - c_n \longrightarrow f - f(\infty)$, e portanto $f - f(\infty) \in \overline{A_\circ}$. Logo, A_1 é fechado em

$\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. (b). A_1 é uma subálgebra de $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in A_1$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Logo, existem $f_{\circ},g_{\circ}\in A_{\circ}$ e $c_{\circ},d_{\circ}$: funções constantes em $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$ tais que $f=f_{\circ}+c_{\circ}$ e $g=g_{\circ}+d_{\circ}$. Provaremos que (i). $f+g\in A_1$. De fato, $f+g=(f_{\circ}+g_{\circ})+(c_{\circ}+d_{\circ})$. Como $A_{\circ}$ é uma álgebra, temos que $f_{\circ}+g_{\circ}\in A_{\circ}$. E é claro que $c_{\circ}+d_{\circ}$ é uma função constante em $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. Logo, $f+g\in A_1$. (ii). $\alpha\cdot f\in A_1$. De fato, $\alpha\cdot f=\alpha(f_{\circ}+c_{\circ})=\alpha f_{\circ}+\alpha c_{\circ}$. Como $A_{\circ}$ é uma álgebra, temos que $\alpha f_{\circ}\in A_{\circ}$. E é claro que $\alpha c_{\circ}$ é uma função constante em $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. Logo, $\alpha\cdot f\in A_1$. (iii). $f\cdot g\in A_1$. De fato, $f\cdot g=(f_{\circ}+c_{\circ})\cdot(g_{\circ}+d_{\circ})=f_{\circ}g_{\circ}+c_{\circ}f_{\circ}+d_{\circ}g_{\circ}+c_{\circ}d_{\circ}$. Como $A_{\circ}$ é uma álgebra, temos que $f_{\circ}g_{\circ}+c_{\circ}f_{\circ}+d_{\circ}g_{\circ}\in A_{\circ}$. E é claro que $c_{\circ}d_{\circ}$ é uma função constante em $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. Logo, $f\cdot g\in A_1$. Por (i), (ii) e (iii), temos que A_1 é uma subálgebra de $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. (c). A_1 separa pontos. Sejam $x\neq y$ em X_{∞}. Como $A_{\circ}$ separa pontos e $A_{\circ}\subset A_1$, existe $f\in A_{\circ}\subset A_1$ tal que $f(x)\neq f(y)$. Logo, A_1 separa pontos. (d). A_1 contém uma função constante não nula. Isto é imediato, pois a função nula pertence a $A_{\circ}$. Por (a), (b), (c) e (d), resulta que A_1 é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(X_{\infty},\mathbb{R})=\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$ que separa pontos e contém uma função constante não nula. Pelo teorema de Stone - Weierstrass, temos que $A_1=\mathcal{C}(X_{\infty},\mathbb{R})=\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. A seguir, observamos que

$$A_{\circ}=\{f\in\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R}):f|_X\in A \text{ e } f(\infty)=0\}=\{f\in\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R}):f(\infty)=0\}.$$

De fato, $A_{\circ}=\{f\in\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R}):f|_X\in A \text{ e } f(\infty)=0\}\subset\{f\in\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R}):f(\infty)=0\}$ é imediato. Basta provar que $A_{\circ}\supset\{f\in\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R}):f(\infty)=0\}$. Seja $f\in\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$ com $f(\infty)=0$. Como já vimos que $A_1=\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$, temos que $f\in A_1$. Logo $f=f_{\circ}+c_{\circ}$, onde $f_{\circ}\in A_{\circ}$ e $c_{\circ}$ é uma função constante em $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$. Então $0=f(\infty)=f_{\circ}(\infty)+c_{\circ}(\infty)$. Logo, $c_{\circ}(\infty)=0$. Assim, obtemos que $c_{\circ}=0$ é a função nula e, então $f=f_{\circ}\in A_{\circ}$. Portanto

$$A_{\circ}=\{f\in\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R}):f(\infty)=0\}.$$

Assim, podemos concluir que A é o conjunto das restrições a X de todas as funções em $\mathcal{C}^{\star}(X_{\infty},\mathbb{R})$ que se anulam em ∞. Pelo Lema 1.4.2, temos que A é igual a $\mathcal{C}_{\circ}(X,\mathbb{R})$. □

Teorema 1.4.4. *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff e seja A uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}_{\circ}(X,\mathbb{C})$ que separa pontos , contém a função conjugada de cada um de seus membros,e que, para cada ponto em X, contém uma função que não se anula nele. Então A é igual a $\mathcal{C}_{\circ}(X,\mathbb{C})$.*

Demonstração. De modo análogo a demonstração do teorema anterior. □

Capítulo 2

Álgebras de Banach

2.1 A definição e alguns exemplos

Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach complexo, que é também uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$, e na qual a multiplicação de anel está relacionada com a norma da seguinte maneira :

(1). $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$;

(2). $\| \mathbf{1} \| = 1$.

Por (1), observamos que, em uma álgebra de Banach qualquer, se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, então $x_n y_n \longrightarrow xy$. De fato, $\| x_n y_n - xy \| = \| x_n(y_n - y) + (x_n - x)y \| \leq \| x_n \| \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \| \longrightarrow 0$, pois $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ é convergente, logo é limitada, então $(\| x_n \|)_{n=1}^{+\infty}$ é limitada, e por hipótese, temos que $\| y_n - y \| \longrightarrow 0$ e $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$.

Uma subálgebra de Banach de uma álgebra de Banach A é uma subálgebra fechada de A que contém $\mathbf{1}$. As subálgebras de Banach de A são subconjuntos de A que são elas mesmas álgebras de Banach com respeito às mesmas operações algébricas, à mesma identidade e à mesma norma.

As álgebras de Banach de maior interesse para nós são descritas nos seguintes exemplos. Elas podem ser classificadas, de modo geral, como álgebras de funções, álgebras de operadores, ou álgebras de grupo, de acordo com a multiplicação definida pontualmente, pela composição ou pela convolução, respectivamente.

Exemplo 2.1.1. *O conjunto $\mathcal{C}^\star(X)$ de todas as funções complexas, contínuas e limitadas, definidas em um espaço topológico X e munido da norma do supremo é uma álgebra de Banach. $\mathcal{C}^\star(X) = \mathcal{C}^\star(X, \mathbb{C})$, pois no capítulo 1, havia funções com valores reais e complexas.*

A partir de capítulo 2, só usa contradomínio complexo.

(1). $\mathcal{C}^\star(X)$ é uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$. (i). $(\mathcal{C}^\star(X),+)$ é um grupo comutativo. Se $f,g \in \mathcal{C}^\star(X)$ definimos $f+g \in \mathcal{C}^\star(X)$ de modo que, para todo $x \in X$,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

Observamos que (i_1). Dados $f,g,h \in \mathcal{C}^\star(X)$, temos que $(f+g)+h = f+(g+h)$ e $f+g = g+f$. (i_2). Existe $\mathbf{0} \in \mathcal{C}^\star(X)$, onde $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in X$, tal que $f+\mathbf{0} = f$ para todo $f \in \mathcal{C}^\star(X)$. (i_3). Para cada $f \in \mathcal{C}^\star(X)$, existe $-f \in \mathcal{C}^\star(X)$, onde $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in X$, tal que $f+(-f) = \mathbf{0}$. Portanto $(\mathcal{C}^\star(X),+)$ é um grupo comutativo. (ii). $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot)$ é um anel com identidade $\mathbf{1}$. Por (i), vimos que $(\mathcal{C}^\star(X),+)$ é um grupo comutativo. Se $f,g \in \mathcal{C}^\star(X)$ definimos $f \cdot g = fg \in \mathcal{C}^\star(X)$ de modo que, para todo $x \in X$,

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Observamos que (ii_1). Sejam $f,g,h \in \mathcal{C}^\star(X), f(gh) = (fg)h; f(g+h) = fg+fh$ e $(f+g)h = fh+gh$. (ii_2). Existe $\mathbf{1} \in \mathcal{C}^\star(X)$, onde $\mathbf{1}(x) = 1$, para todo $x \in X$, tal que $f\mathbf{1} = f$, para todo $f \in \mathcal{C}^\star(X)$. Portanto $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot)$ é um anel com identidade $\mathbf{1}$. (iii). $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot)$ é um espaço vetorial. Por (i), vimos que $(\mathcal{C}^\star(X),+)$ é um grupo comutativo. Se $f \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos $\alpha \cdot f = \alpha f \in \mathcal{C}^\star(X)$ de modo que, para todo $x \in X$,

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Dados $f,g \in \mathcal{C}^\star(X)$, e $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, temos que

$$(iii_1).\quad \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g;$$
$$(iii_2).\quad (\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f;$$
$$(iii_3).\quad (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f);$$
$$(iii_4).\quad 1f = f.$$

Portanto $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot\,)$ é um espaço vetorial. $(iiii)$. $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot,\cdot\,)$ é uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$. Como $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot\,)$ é um anel com identidade $\mathbf{1}$, $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot\,)$ é um espaço vetorial, e dados $f,g \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g),$$

concluímos que $(\mathcal{C}^\star(X),+,\cdot,\cdot\,)$ é uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$.

(2). $(\mathcal{C}^{\star}(X), \| \,.\, \|)$ é um espaço de Banach. Definimos uma norma $\| \,.\, \|$ em $\mathcal{C}^{\star}(X)$ de modo que

$$\| f \| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Provaremos que $\mathcal{C}^{\star}(X)$ é completo em relação à norma. Seja $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}^{\star}(X)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$,

$$\| f_n - f_m \| < \epsilon,$$

isto é,

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in X\} < \epsilon.$$

Logo, para cada $x \in X$ arbitrário, temos que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \tag{2.1}$$

Consequntemente $(f_n(x))_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é completo, temos que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$. Definimos uma função f de X em $\mathbb{C}$ por

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Provaremos que $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge a f em relação à norma e que $f \in \mathcal{C}^{\star}(X)$. Por (2.1), fixando n e fazendo $m \longrightarrow +\infty$, temos que,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \longrightarrow |f_n(x) - f(x)|.$$

Logo podemos concluir que, para todo $n \geq n(\epsilon)$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Como x é arbitrário, temos que, para todo $n \geq n(\epsilon)$,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \epsilon.$$

Isto mostra que $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge a f uniformemente sobre X. Como $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de funções contínuas e limitadas, temos que o seu limite f é contínua e limitada. Logo $f \in \mathcal{C}^{\star}(X)$ e

$$\| f_n - f \| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq n(\epsilon)$. Assim, $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge a f no espaço normado $\mathcal{C}^{\star}(X)$. Portanto $\mathcal{C}^{\star}(X)$ é completo em relação à norma em $\mathcal{C}^{\star}(X)$, ou seja, $(\mathcal{C}^{\star}(X), \| \,.\, \|)$ é um espaço de Banach.

(3). A multiplicação de anel de $\mathcal{C}^\star(X)$ está relacionada com a norma da seguinte maneira : (i). $\| fg \| \leq \| f \| \| g \|$. De fato, seja $x \in X$,

$$\begin{aligned} |(fg)(x)| &= |f(x)g(x)| \\ &= |f(x)||g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)| \\ &= \| f \| \| g \| . \end{aligned}$$

Logo, $\sup_{x \in X} |(fg)(x)| \leq \| f \| \| g \|$, ou seja, $\| fg \| \leq \| f \| \| g \|$. (ii).$\| \mathbf{1} \| = 1$. De fato, isto é imediato, pois $\mathbf{1}(x) = 1$, para todo x em X. Por (1), (2) e (3), concluimos que $\mathcal{C}^\star(X)$ é uma álgebra de Banach.

Exemplo 2.1.2. *Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, o disco fechado unitário no plano complexo. Então $B = \{f \in \mathcal{C}^\star(D) \quad | \quad f : \mathring{D} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{é analítica}\}$ é uma álgebra de Banach, chamada álgebra do disco.*

Pelo Exemplo 2.1.1, $\mathcal{C}^\star(D)$ é uma álgebra de Banach e no Exemplo 1.2.4, vimos que B é uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}^\star(D)$. Logo B é uma álgebra de Banach.

Exemplo 2.1.3. *Seja E um espaço de Banach complexo não trivial. Então o conjunto $\mathcal{B}(E)$ de todos os operadores em E e munido da norma $\| T \| = \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \leq 1\}$, para todo $T \in \mathcal{B}(E)$, é uma álgebra de Banach.*

(1). $\mathcal{B}(E)$ é uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$. (i). $(\mathcal{B}(E), +)$ é um grupo comutativo. Sejam $T, S \in \mathcal{B}(E)$, definimos $T + S \in \mathcal{B}(E)$ de modo que, para todo $x \in E$,

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x).$$

Observamos que (i_1). Dados $T, S, U \in \mathcal{B}(E)$, temos que $(T + S) + U = T + (S + U)$ e $T + S = S + T$. (i_2). Existe $\mathbf{0} \in \mathcal{B}(E)$, onde $\mathbf{0}(x) = 0$, para todo $x \in E$, tal que $T + \mathbf{0} = T$, para todo $T \in \mathcal{B}(E)$. (i_3). Para cada $T \in \mathcal{B}(E)$, existe $-T \in \mathcal{B}(E)$, onde $(-T)(x) = -T(x)$, para todo $x \in E$, tal que $T + (-T) = \mathbf{0}$. Portanto $(\mathcal{B}(E), +)$ é um grupo comutativo. (ii). $(\mathcal{B}(E), +, \circ)$ é um anel com identidade $\mathbf{1}$. Por (i), vimos que $(\mathcal{B}(E), +)$ é um grupo comutativo. Sejam $T, H \in \mathcal{B}(E)$, definimos $T \circ S \in \mathcal{B}(E)$ de modo que, para todo $x \in E$,

$$(T \circ S)(x) = T(S(x)).$$

Observamos que (ii_1). Dados $T, S, U \in \mathcal{B}(E), T \circ (S \circ U) = (T \circ S) \circ U; T \circ (S + U) = T \circ S + T \circ U$ e $(T + S) \circ U = T \circ U + S \circ U$. (ii_2). Existe $\mathbf{1} \in \mathcal{B}(E)$, onde $\mathbf{1}(x) = x$, para todo $x \in E$, tal que $T \circ \mathbf{1} = T$, para todo $T \in \mathcal{B}(E)$. Portanto, $(\mathcal{B}(E), +, \circ)$ é um anel com identidade $\mathbf{1}$. (iii). $(\mathcal{B}(E), +, \cdot)$ é um espaço vetorial. Por (i), vimos que $(\mathcal{B}(E), +)$ é um grupo comutativo. Sejam $T \in \mathcal{B}(E)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos $\alpha \cdot T \in \mathcal{B}(E)$ de modo que, para todo $x \in E$,

$$(\alpha \cdot T)(x) = \alpha T(x).$$

Observamos que, dados $T, S \in \mathcal{B}(E)$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
&(iii_1). \quad \alpha \cdot (T + S) = \alpha \cdot T + \alpha \cdot S;\\
&(iii_2). \quad (\alpha + \beta) \cdot T = \alpha \cdot T + \beta \cdot T;\\
&(iii_3). \quad (\alpha\beta) \cdot T = \alpha \cdot (\beta \cdot T);\\
&(iii_4). \quad 1 \cdot T = T.
\end{aligned}$$

Portanto $(\mathcal{B}(E), +, \cdot)$ é um espaço vetorial. $(iiii)$. $(\mathcal{B}(E), +, \circ, \cdot)$ é uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$. Como $(\mathcal{B}(E), +, \circ)$ é um anel com identidade $\mathbf{1}$, $(\mathcal{B}(E), +, \cdot)$ é um espaço vetorial, e dados T, $S \in \mathcal{B}(E)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\alpha \cdot (T \circ S) = (\alpha \cdot T) \circ S = T \circ (\alpha \cdot S).$$

Portanto, $(\mathcal{B}(E), +, \circ, \cdot)$ é uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$.

(2). $(\mathcal{B}(E), \| \, . \, \|)$ é um espaço de Banach. Definimos uma norma $\| \, . \, \|$ em $\mathcal{B}(E)$ de modo que

$$\| T \| = \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \leq 1\}.$$

Provaremos que $\mathcal{B}(E)$ é completo em relação à norma. Seja $(T_n)_{n=1}^{+\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}(E)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$,

$$\| T_n - T_m \| < \epsilon. \tag{2.2}$$

Logo, para cada $x \in E$ arbitrário, temos que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$,

$$\| T_n(x) - T_m(x) \| = \| (T_n - T_m)(x) \| \leq \| T_n - T_m \| \| x \| < \epsilon \| x \| .$$

Logo observamos que $(T_n(x))_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em E. Como E é completo, temos que $\lim_{n \to +\infty} T_n(x) \in E$. Definimos uma função T de E em E de modo que, para todo $x \in E$

$$T(x) = \lim_{n \to +\infty} T_n(x).$$

Provaremos que (a).T é linear. De fato, para todo $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} T(x + \alpha y) &= \lim_{n \to +\infty} T_n(x + \alpha y) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (T_n(x) + \alpha T_n(y)) \\ &= \lim_{n \to +\infty} T_n(x) + \alpha \lim_{n \to +\infty} T_n(y) \\ &= T(x) + \alpha T(y). \end{aligned}$$

(b).T é contínua em E. Por (2.2), temos que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$,

$$\| T_m - T_n \| < \epsilon.$$

Logo, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$, temos que

$$| \| T_m \| - \| T_n \| | < \| T_m - T_n \| < \epsilon.$$

Logo, obtemos que $(\| T_n \|)_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, temo que $(\| T_n \|)_{n=1}^{+\infty}$ converge a um número real. Logo $(\| T_n \|)_{n=1}^{+\infty}$ é limitada, então $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n \| < +\infty$. Observamos que, para todo $x \in E$,

$$\| T(x) \| = \| \lim_{n \to +\infty} T_n(x) \| = \lim_{n \to +\infty} \| T_n(x) \| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n(x) \|$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\| T_n \| \| x \|) = (\sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n \|) \| x \| .$$

Logo, T é contínua em E. (c). $(T_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge a T em relação à norma em $\mathcal{B}(E)$. Por (2.2), temos que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$,

$$\| T_n - T_m \| < \epsilon.$$

Agora, com n fixado, fazendo $m \longrightarrow +\infty$, temos que

$$|T_n(x) - T_m(x)| \longrightarrow |T_n(x) - T(x)|.$$

Logo, para todo $n \geq n(\epsilon)$ e todo $x \in E$ com $\| x \| \leq 1$, temos que

$$|T_n(x) - T(x)| \leq \epsilon.$$

Logo, para todo $n \geq n(\epsilon)$,

$$\| T_n - T \| \leq \epsilon.$$

O que mostra que $(T_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge a T em relação à norma em $\mathcal{B}(E)$. Portanto, por (a), (b), e (c), obtemos que $T \in \mathcal{B}(E)$ e $T_n \longrightarrow T$ em relação à norma em $\mathcal{B}(E)$. Logo, $\mathcal{B}(E)$ é um espaço de Banach.

(3). A multiplicação $\circ$ de $\mathcal{B}(E)$ está relacionada com a norma da seguinte maneira: (i). $\| T \circ S \| \leq \| T \| \| S \|$. De fato,

$$\begin{aligned} \| T \circ S \| &= \sup\{\| (T \circ S)(x) \| : \| x \| \leq 1\} \\ &= \sup\{\| T(S(x)) \| : \| x \| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\| T \| \| S(x) \| : \| x \| \leq 1\} \\ &= \| T \| \sup\{\| S(x) \| : \| x \| \leq 1\} \\ &= \| T \| \| S \| . \end{aligned}$$

(ii).$\| \mathbf{1} \| = 1$, Sabemos que $\mathbf{1}(x) = x$, para todo x em E. De fato,

$$\begin{aligned} \| \mathbf{1} \| &= \sup\{\| \mathbf{1}(x) \| : \| x \| \leq 1\} \\ &= \sup\{\| x \| : \| x \| \leq 1\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por (1), (2) e (3), concluímos que $\mathcal{B}(E)$ é uma álgebra de Banach.

Exemplo 2.1.4. *Seja H um espaço de Hilbert não trivial. Então, o conjunto $\mathcal{B}(H)$ munido da norma $\| T \| = \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \leq 1\}$, para todo $T \in \mathcal{B}(H)$, é uma álgebra de Banach.*

De fato, isto é um caso especial do Exemplo 2.1.3.

Definição 2.1.5. *Uma subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ é dita auto - adjunta se ela contém o adjunto de cada um de seus membros. Uma subálgebra de Banach de $\mathcal{B}(H)$ que é auto - adjunta é chamada de $C^\star$ - álgebra . Uma $C^\star$ - álgebra que é fechada na topologia fraca de operadores é chamada de $W^\star$ - álgebra.*

Observação 2.1.6. *A topologia fraca de operadores em $\mathcal{B}(H)$ é a topologia fraca gerada por todas as funções de forma $T \longrightarrow (Tx, y)$, isto é, essa topologia é a mais fraca tal que todas* *essas funções são contínuas. Observamos que*

$$\begin{aligned} |(Tx,y)-(T_\circ x,y)| &= |(T-T_\circ)x,y)| \\ &\leq \|\,(T-T_\circ)x\,\|\|\,y\,\| \\ &= \|\,T-T_\circ\,\|\|\,x\,\|\|\,y\,\|\,. \end{aligned}$$

Portanto, todas as funções $T \longrightarrow (Tx,y)$ são contínuas em $\mathcal{B}(H)$ em relação à norma. Logo essa topologia é mais fraca do que a topologia da norma usual, e seus conjuntos fechados são também fechados na topologia da norma usual. É claro que uma $C^\star$ - álgebra é uma subálgebra fechada de $\mathcal{B}(H)$. Se ela é fechada também na topologia fraca de operadores, então é chamada de $W^\star$ - álgebra.

Exemplo 2.1.7. *Seja $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um grupo finito. Então, o conjunto $L_1(G)$ de todas as funções complexas definidas em G e munido da norma $\|\,f\,\| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|$ para todo $f \in L_1(G)$ é uma álgebra Banach chamada álgebra de grupo.*

(1). $L_1(G)$ é uma álgebra com identidade $\mathbf{1}$. (i). $(L_1(G),+)$ é um grupo comutativo. Sejam $f,g \in L_1(G)$, definimos $f+g \in L_1(G)$ de modo que, para todo $x \in G$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Observamos que (i_1). Dados $f,g,h \in L_1(G)$, temos que $(f+g)+h = f+(g+h)$ e $f+g = g+f$. (i_2). Existe $\mathbf{0} \in L_1(G)$, onde $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in G$, tal que $f+\mathbf{0} = f$ para todo $f \in L_1(G)$. (i_3). Para cada $f \in L_1(G)$, existe $-f \in L_1(G)$, onde $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in G$, tal que $f+(-f) = \mathbf{0}$. Portanto $(L_1(G),+)$ é um grupo comutativo. (ii). $(L_1(G),+,\cdot)$ é um espaço vetorial. Por (i), vimos que $(L_1(G),+)$ é um grupo comutativo. Sejam $f \in L_1(G)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos $\alpha \cdot f = \alpha f \in L_1(G)$ de modo que, para todo $x \in G$,

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Observamos que, dados $f,g \in L_1(G)$, e $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} &(ii_1). \quad \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g; \\ &(ii_2). \quad (\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f; \\ &(ii_3). \quad (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f); \\ &(ii_4). \quad 1f = f. \end{aligned}$$

Portanto $(L_1(G),+,)$ é um espaço vetorial. (iii). $(L_1(G),+,*)$ é um anel com identidade. Por (i), vimos que $(L_1(G),+)$ é um grupo comutativo. Agora definiremos uma multiplicação $*$ em $L_1(G)$. Temos que

$$\delta_i(x_j)=\begin{cases}1, & \text{se } i=j\\ 0, & \text{se } i\neq j.\end{cases}$$

é uma função em $L_1(G)$, onde $1\leq i,j\leq n$. Dado $f\in L_1(G)$, seja α_j o valor de f em x_j, $1\leq j\leq n$, isto é ,

$$\alpha_j=f(x_j),$$

observamos que

$$f=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\delta_j,$$

pois, para todo $x_k\in G$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\delta_j)(x_k) &= \alpha_1\delta_1(x_k)+\ldots+\alpha_k\delta_1(x_k)+\ldots+\alpha_n\delta_1(x_k)\\ &= \alpha_1 0+\ldots+\alpha_k 1+\ldots+\alpha_n 0\\ &= \alpha_k\\ &= f(x_k).\end{aligned}$$

Como cada função f em $L_1(G)$ é a soma de essas n funções δ_j com $1\leq j\leq n$, para definir uma multiplicação $*$ em $L_1(G)$, basta defini-la nestas n funções. Então, aproveitando também a operação definida no grupo G, definiremos $*$ de seguinte modo. Fixamos $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Como G é um grupo, temos que $x_ix_j=x_k$, onde $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Assim, obtemos que $(i,j)\longrightarrow k$ é uma aplicação sobrejetora de $\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n\}$ sobre $\{1,2,\ldots,n\}$. Logo definimos $*$ em $L_1(G)$ de modo que

$$\delta_i*\delta_j=\delta_{(i,j)}=\delta_k.$$

Então, dados $f, g \in L_1(G)$, onde $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i$ e $g = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_j$, temos que

$$\begin{aligned}
f * g &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i * \sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \; \delta_i * \delta_j \\
&= \big(\sum_{(i,j)=1} \alpha_i \beta_j \big) \delta_1 + \big(\sum_{(i,j)=2} \alpha_i \beta_j \big) \delta_2 + \cdots + \big(\sum_{(i,j)=n} \alpha_i \beta_j \big) \delta_n \\
&= \sum_{w=1}^{n} \gamma_w \delta_w,
\end{aligned}$$

onde,

$$\gamma_w = \sum_{(i,j)=w} \alpha_i \beta_j,$$

ou seja,

$$\gamma_w = \sum_{x_i x_j = x_w} \alpha_i \beta_j.$$

$f * g$ é dita a convolução de f e g. Seja $x_k \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
f * g(x_k) &= \sum_{w=1}^{n} \gamma_w \delta_w(x_k) \\
&= \gamma_1 \delta_1(x_k) + \ldots + \gamma_k \delta_k(x_k) + \ldots + \gamma_n \delta_n(x_k) \\
&= \gamma_1 0 + \ldots + \gamma_k 1 + \ldots + \gamma_n 0 \\
&= \gamma_k \\
&= \sum_{(i,j)=k} \alpha_i \beta_j \\
&= \sum_{(i,j)=k} f(x_i) g(x_j) \\
&= \sum_{x_i x_j = x_k} f(x_i) g(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_k x_j^{-1}) g(x_j).
\end{aligned}$$

Agora observamos que (iii_1). $(f * g) * h = f * (g * h)$ para todos $f, g, h \in L_1(G)$. De fato, seja $x_k \in G$,

$$\begin{aligned}
[(f*g)*h](x_k) &= \sum_{x_ix_j=x_k} (f*g)(x_i)h(x_j)\\
&= \sum_{x_ix_j=x_k} \Big[\sum_{x_tx_s=x_i} f(x_t)g(x_s)\Big]h(x_j)\\
&= \sum_{x_ix_j=x_k}\sum_{x_tx_s=x_i} f(x_t)g(x_s)h(x_j);
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[f*(g*h)](x_k) &= \sum_{x_tx_i=x_k} f(x_t)(g*h)(x_i)\\
&= \sum_{x_tx_i=x_k} f(x_t)\Big[\sum_{x_sx_j=x_i} g(x_s)h(x_j)\Big]\\
&= \sum_{x_tx_i=x_k}\sum_{x_sx_j=x_i} f(x_t)g(x_s)h(x_j).
\end{aligned}$$

Portanto, $(f*g)*h = f*(g*h)$. (iii_2). $f*(g+h) = f*g+f*h$ e $(f+g)*h = f*h+g*h$ para todos $f, g, h \in L_1(G)$. De fato,

$$\begin{aligned}
f*(g+h) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_i\Big)*\Big(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_j + \sum_{j=1}^{n}\mu_j\delta_j\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_i * \Big[\sum_{j=1}^{n}(\beta_j+\mu_j)\delta_j\Big]\\
&= \sum_{w=1}^{n}\gamma_w\delta_w,
\end{aligned}$$

onde,

$$\gamma_w = \sum_{(i,j)=w} \alpha_i(\beta_j+\mu_j)$$

$$= \sum_{(i,j)=w}\alpha_i\beta_j + \sum_{(i,j)=w}\alpha_i\mu_j.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
f*h+g*h &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_i\Big)*\Big(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_j\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_i\Big)*\Big(\sum_{j=1}^{n}\mu_j\delta_j\Big)\\
&= \sum_{w=1}^{n}\Big(\sum_{(i,j)=w}\alpha_i\beta_j\Big)\delta_w+\sum_{w=1}^{n}\Big(\sum_{(i,j)=w}\alpha_i\mu_j\Big)\delta_w\\
&= \sum_{w=1}^{n}\Big(\sum_{(i,j)=w}\alpha_i\beta_j+\sum_{(i,j)=w}\alpha_i\mu_j\Big)\delta_w\\
&= \sum_{w=1}^{n}\gamma_w\delta_w.
\end{aligned}$$

Portanto, $f*(g+h)=f*g+f*h$. De modo similar, temos que $(f+g)*h=f*h+g*h$.
(iii_3). $L_1(G)$ tem a identidade sob a multiplicação $*$. Como $G=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ é um grupo finito. Seja x_1 a identidade do grupo G, ou seja $x_1x_j=x_jx_1=x_j$, para todo $x_j\in G$. Provaremos que δ_1 é a identidade de $L_1(G)$ sob a multiplicação $*$, ou seja, provaremos que, para todo $f\in L_1(G)$,

$$f*\delta_1=\delta_1*f=f.$$

De fato, seja $x_k\in G$, lembrando que x_1 é a identidade de G, temos que

$$\begin{aligned}
(f*\delta_1)(x_k) &= \sum_{x_sx_j=x_k} f(x_s)\delta_1(x_j)\\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_kx_j^{-1})\delta_1(x_j)\\
&= f(x_kx_1^{-1})\delta_1(x_1)+f(x_kx_2^{-1})\delta_1(x_2)+\cdots+f(x_kx_n^{-1})\delta_1(x_n)\\
&= f(x_kx_1^{-1})1+f(x_kx_2^{-1})0+\cdots+f(x_kx_n^{-1})0\\
&= f(x_kx_1^{-1})\\
&= f(x_kx_1)\\
&= f(x_k).
\end{aligned}$$

Logo, $f * \delta_1 = f$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}(\delta_1 * f)(x_k) &= \sum_{x_s x_t = x_k} \delta_1(x_s) f(x_t)\\ &= \sum_{s=1}^{n} \delta_1(x_s) f(x_s^{-1} x_k)\\ &= \delta_1(x_1) f(x_1^{-1} x_k) + \delta_1(x_2) f(x_2^{-1} x_k) + \cdots + \delta_1(x_n) f(x_n^{-1} x_k)\\ &= 1 f(x_1^{-1} x_k) + 0 f(x_2^{-1} x_k) + \cdots + 0 f(x_n^{-1} x_k)\\ &= f(x_1^{-1} x_k)\\ &= f(x_1 x_k)\\ &= f(x_k).\end{aligned}$$

Logo $\delta_1 * f = f$. Assim, resulta que x_1 é a identidade do grupo $G \Longrightarrow \delta_1$ é a identidade de $L_1(G)$ sob a multiplicação $*$. Portanto, temos que $(L_1(G), +, *)$ é um anel com identidade. $(iiii)$.$(L_1(G), +, *, \cdot)$ é uma álgebra com identidade. Como $(L_1(G), +, *)$ é um anel com identidade, $(L_1(G), +, \cdot)$ é um espaço vetorial, e temos que, dados $f, g \in L_1(G)$ e $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\mu \cdot (f * g) = (\mu \cdot f) * g = f * (\mu \cdot g),$$

ou seja,

$$\mu(f * g) = (\mu f) * g = f * (\mu g),$$

De fato, seja $x_k \in G$,

$$\begin{aligned}\mu(f * g)(x_k) &= \mu\Big[\sum_{j=1}^{n} f(x_k x_j^{-1}) g(x_j)\Big]\\ &= \sum_{j=1}^{n} \mu f(x_k x_j^{-1}) g(x_j)\\ &= [(\mu f) * g](x_k).\end{aligned}$$

Logo, $\mu(f * g) = (\mu f) * g$. De modo similar, temos que $\mu(f * g) = f * (\mu g)$. Portanto $\mu(f * g) = (\mu f) * g = f * (\mu g)$. Logo $(L_1(G), +, *, \cdot)$ é uma álgebra com identidade.

(2). $(L_1(G), \| \,.\, \|)$ é um espaço de Banach.

Definimos uma norma $\| \,.\, \|$ em $L_1(G)$ de modo que

$$\| f \| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|.$$

Provaremos que $L_1(G)$ é completo em relação à norma. Seja $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $L_1(G)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k, m \geq n(\epsilon)$, toms que

$$\| f_k - f_m \| < \frac{\epsilon}{n},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} |f_k(x_i) - f_m(x_i)| < \frac{\epsilon}{n}.$$

Logo, para todos $k, m \geq n(\epsilon)$, toms que,

$$|f_k(x_i) - f_m(x_i)| < \frac{\epsilon}{n}. \tag{2.3}$$

Logo observamos que $(f_k(x_i))_{k=1}^{+\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é completo, temos que $\lim_{k\to+\infty} f_k(x_i) \in \mathbb{C}$. Definimos uma função f de G em $\mathbb{C}$ de modo que, para todo $x_i \in G$,

$$f(x_i) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x_i).$$

É claro que $f \in L_1(G)$. Provaremos que $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ converge a f em relação à norma. Por (2.3), com k fixado, fazendo $m \longrightarrow +\infty$, temos que,

$$|f_k(x_i) - f_m(x_i)| \longrightarrow |f_k(x_i) - f(x_i)|.$$

Logo podemos concluir que, para todo $k \geq n(\epsilon)$,

$$|f_k(x_i) - f(x_i)| \leq \frac{\epsilon}{n},$$

ou seja, para todo $k \geq n(\epsilon)$,

$$\sum_{i=1}^{n} |f_k(x_i) - f(x_i)| \leq \epsilon.$$

Logo, para todo $k \geq n(\epsilon)$,

$$\| f_k - f \| \leq \epsilon.$$

O que mostra que $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ converge a f em relação à norma em $L_1(G)$. Portanto $L_1(G)$ é completo em relação à norma , ou seja, $(L_1(G), \| \,.\, \|)$ é um espaço de Banach.

(3). A multiplicação $*$ de $L_1(G)$ está relacionada com a norma da seguinte maneira: (i). $\| f * g \| \leq \| f \| \| g \|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\| f * g \| &= \sum_{k=1}^{n} |(f * g)(x_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} f(x_k x_j^{-1}) g(x_j)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |f(x_k x_j^{-1})||g(x_j)| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k x_j^{-1})||g(x_j)| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |g(x_j| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k x_j^{-1})| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |g(x_j)| \| f \| \\
&= \| f \| \sum_{j=1}^{n} |g(x_j)| \\
&= \| f \| \| g \| .
\end{aligned}$$

(ii).$|\mathbf{1}| = 1$. Como já vimos que se x_1 é a identidade do grupo G, então δ_1 é a identidade de $L_1(G)$ sob $*$. Assim, $\mathbf{1} = \delta_1$. Então

$$\| \mathbf{1} \| = \| \delta_1 \| = \sum_{j=1}^{n} |\delta_1(x_j)| = 1.$$

Por (1), (2) e (3), concluímos que $L_1(G)$ é uma álgebra de Banach.

Exemplo 2.1.8. *Seja $G = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ o grupo aditivo dos inteiros. A sua álgebra de grupo $L_1(G)$ é o conjunto de todas as funções complexas f definidas em G tais que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|$ converge. A norma é definida por*

$$\| f \| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|,$$

e a convolução de f e g é dada por

$$(f * g)(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(n-m) g(m).$$

Há muitos exemplos de álgebras de Banach além dos descritos acima. Nossa atenção a partir daqui vai ser concentrada em $\mathcal{C}^{\star}(X)$, mas a teoria geral que desenvolveremos é sempre aplicável a todas.

2.2 Elementos regulares e singulares

Seja A uma álgebra de Banach. Um elemento $x \in A$ é dito regular se existe $x^{-1} \in A$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Se x não é regular, então é dito singular. Denotamos o conjunto de elementos regulares de A por G e o seu complementar, o conjunto de elementos singulares de A, por S. É claro que G contém $\mathbf{1}$ e é um grupo, e S contém $\mathbf{0}$. Alguns resultados importantes dependem dos caráteres de G e S. Seguindo as notações acima, estudaremos os teoremas seguintes:

Teorema 2.2.1. *Cada elemento x de A tal que $\| x - \mathbf{1} \| < 1$ é regular e o seu inverso é dado pela fórmula $x^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{1} - x)^n$.*

Demonstração. Seja $r = \| x - \mathbf{1} \|$. Logo $r < 1$. Temos que, pela propriedade da álgebra de Banach A,

$$\| (\mathbf{1} - x)^n \| \leq \| \mathbf{1} - x \|^n = r^n.$$

Como $0 \leq r < 1$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ converge. Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} \| (\mathbf{1} - x)^n \|$ converge, isto é, a série das reduzidas da seqüência $(\| (\mathbf{1} - x)^n \|)_{n=1}^{+\infty}$ converge. Assim, $(S_n)_{n=1}^{+\infty}$ é convergente, onde $S_n = \| (\mathbf{1} - x)^1 \| + \| (\mathbf{1} - x)^2 \| + \ldots + \| (\mathbf{1} - x)^n \|$. Logo, $(S_n)_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$,

$$|S_n - S_m| < \epsilon,$$

isto é,

$$| \| (\mathbf{1} - x)^{m+1} \| + \| (\mathbf{1} - x)^{m+2} \| + \ldots + \| (\mathbf{1} - x)^n \| | < \epsilon,$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \| (\mathbf{1} - x)^k \| < \epsilon. \tag{2.4}$$

Observamos que $(W_k)_{k=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em A, onde $W_k = (\mathbf{1} - x)^1 + (\mathbf{1} - x)^2 + \ldots + (\mathbf{1} - x)^k$. De fato, por (2.4), dado $\epsilon > 0$, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$, temos que

$$\| W_n - W_m \| = \| \sum_{k=m+1}^{n} (\mathbf{1} - x)^k \| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| (\mathbf{1} - x)^k \| < \epsilon.$$

Como A é completo, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} W_k &= \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}(\mathbf{1}-x)^n\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{1}-x)^n \in A.\end{aligned}$$

Definimos um elemento y em A de modo que

$$y = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{1}-x)^n.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}y - xy &= (\mathbf{1}-x)y\\ &= (\mathbf{1}-x)[\mathbf{1}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{1}-x)^n]\\ &= (\mathbf{1}-x) + (\mathbf{1}-x)\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{1}-x)^n\\ &= (\mathbf{1}-x) + \sum_{n=2}^{+\infty}(\mathbf{1}-x)^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{1}-x)^n\\ &= y - \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Logo $xy = \mathbf{1}$. De modo similar, temos que $yx = \mathbf{1}$. Portanto, x é um elemento regular de A e o seu inverso $x^{-1} = y = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{1}-x)^n$. □

Teorema 2.2.2. *G é um conjunto aberto, e S é um conjunto fechado.*

Demonstração. Seja $x_\circ \in G$. Provaremos que existe $r > 0$ tal que se $\| x - x_\circ \| < r$, então $x \in G$. Como $x_\circ \in G$, existe $x_\circ^{-1} \in G$ tal que $x_\circ x_\circ^{-1} = x_\circ^{-1}x_\circ = \mathbf{1}$. Tomamos $r = \frac{1}{\|x_\circ^{-1}\|}$. Observamos que, se $\| x - x_\circ \| < r$, então

$$\| x_\circ^{-1}x - \mathbf{1} \| = \| x_\circ^{-1}(x - x_\circ) \| \leq \| x_\circ^{-1} \| \| x - x_\circ \| < 1.$$

Pelo Teorema 2.2.1, temos que $x_\circ^{-1}x \in G$. Como $x_\circ \in G$ e G é um grupo, obtemos

$$x = x_\circ(x_\circ^{-1}x) \in G.$$

Portanto G é um conjunto aberto em A. Logo, S é um conjunto fechado em A. □

Teorema 2.2.3. *A aplicação $x \longrightarrow x^{-1}$ de G em G é contínua, e é portanto um homeomorfismo de G sobre G.*

Demonstração. Sejam $x_\circ \in G$ e $x \in G, x \neq x_\circ$ tais que

$$\| x - x_\circ \| < \frac{1}{2 \| x_\circ^{-1} \|}.$$

Logo,

$$\| x_\circ^{-1} x - \mathbf{1} \| = \| x_\circ^{-1}(x - x_\circ) \| \leq \| x_\circ^{-1} \| \| x - x_\circ \| < \frac{1}{2}.$$

Pelo Teorema 2.2.1, $x_\circ^{-1} x \in G$ e $x^{-1} x_\circ = (x_\circ^{-1} x)^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{1} - x_\circ^{-1} x)^n$. Concluímos que

$$\begin{aligned}
\| x^{-1} - x_\circ^{-1} \| &= \| (x^{-1} x_\circ - \mathbf{1}) x_\circ^{-1} \| \\
&\leq \| x_\circ^{-1} \| \| x^{-1} x_\circ - \mathbf{1} \| \\
&= \| x_\circ^{-1} \| \| \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{1} - x_\circ^{-1} x)^n \| \\
&\leq \| x_\circ^{-1} \| \sum_{n=1}^{+\infty} \| \mathbf{1} - x_\circ^{-1} x \|^n \\
&= \| x_\circ^{-1} \| \| \mathbf{1} - x_\circ^{-1} x \| \sum_{n=0}^{+\infty} \| \mathbf{1} - x_\circ^{-1} x \|^n \\
&= \frac{\| x_\circ^{-1} \| \| \mathbf{1} - x_\circ^{-1} x \|}{1 - \| \mathbf{1} - x_\circ^{-1} x \|} \\
&< 2 \| x_\circ^{-1} \| \| \mathbf{1} - x_\circ^{-1} x \| \\
&\leq 2 \| x_\circ^{-1} \|^2 \| x - x_\circ \| .
\end{aligned}$$

Assim, a aplicação $x \longrightarrow x^{-1}$ de G em G é contínua. Logo, aplicando x^{-1} nesta aplicação, temos que a aplicação, $x^{-1} \longrightarrow x$ de G em G é contínua, e a aplicação $x \longrightarrow x^{-1}$, é claramente bijetora. Portanto $x \longrightarrow x^{-1}$ é um homeomorfismo de G sobre G. $\square$

Um elemento regular x em A pode tornar - se singular numa subálgebra de Banach A' de A. Por outro lado, um elemento singular em A pode tornar -se regular numa álgebra A'' que contém A como subálgebra. Na próxima seção, estudaremos certos elementos em A que são singulares e mantem - se singulares com respeito à toda ampliação possível de A.

2.3 Divisores topológicos de zero

Um elemento z em uma álgebra de Banach A é chamado divisor topológico de zero, se existe uma seqüência $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$ em A tal que $\| z_n \|= 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $zz_n \longrightarrow \mathbf{0}$ ou $z_n z \longrightarrow \mathbf{0}$. Denotamos por Z o conjunto de todos os divisores topológicos de zero. Seguindo as notações da seção anterior, veremos os teoremas seguintes :

Teorema 2.3.1. *Z é um subconjunto de S.*

Demonstração. Seja z um elemento de Z e seja $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$ uma seqüência em A tal que $\| z_n \|= 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e (sem perda de generalidade) $zz_n \longrightarrow \mathbf{0}$. Provaremos que $z \in S$. Suponhamos, por absurdo, que $z \notin S$. Logo $z \in G$ e existe $z^{-1} \in G$ tal que $zz^{-1} = z^{-1}z = \mathbf{1}$. Pela continuidade da multiplicação da álgebra de Banach A, temos que $z^{-1}(zz_n) \longrightarrow z^{-1}\mathbf{0}$. Logo $z_n \longrightarrow \mathbf{0}$, o que contradiz $\| z_n \| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $z \in S$. $\square$

Teorema 2.3.2. *A fronteira de S é um subconjunto de Z.*

Demonstração. Seja $z \in \partial S$. Provaremos que existe uma seqüência $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$ em A tal que $\| z_n \|= 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $zz_n \longrightarrow \mathbf{0}$ ou $z_n z \longrightarrow \mathbf{0}$. Como $z \in \partial S$, temos que $z \in \overline{S} \cap \overline{S^c}$. Pelo Teorema 2.2.2, sabemos que S é fechado. Logo $z \in S \cap \overline{S^c}$, ou seja, $z \in S \cap \overline{G}$. Então, existe uma seqüência $(r_n)_{n=1}^{+\infty}$ em G tal que

$$r_n \longrightarrow z.$$

Observamos que $(r_n^{-1})_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência ilimitada, pois se $(r_n^{-1})_{n=1}^{+\infty}$ fosse limitada, teriamos que $r_n^{-1}z - \mathbf{1} = r_n^{-1}(z - r_n) \longrightarrow \mathbf{0}$. Logo, existiria $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n(\epsilon)$, $\| r_n^{-1}z - \mathbf{1} \| < 1$. Pelo Teorema 2.2.1, $r_n^{-1}z$ seria um elemento regular. Como $r_n \in G$, teriamos que $z = r_n(r_n^{-1}z) \in G$, absurdo. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$\| r_n^{-1} \| \longrightarrow +\infty.$$

Agora definimos uma seqüência $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$ em A por

$$z_n = \frac{r_n^{-1}}{\| r_n^{-1} \|}.$$

É claro que $\| z_n \|= 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que

$$zz_n = \frac{zr_n^{-1}}{\| r_n^{-1} \|} = \frac{\mathbf{1} + (z - r_n)r_n^{-1}}{\| r_n^{-1} \|} = \frac{\mathbf{1}}{\| r_n^{-1} \|} + (z - r_n)z_n \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Logo, $z \in Z$. $\square$

Suponhamos que A seja uma subálgebra de Banach de uma álgebra de Banach A'. Se um elemento é um divisor topológico de zero em A, então, pela definição, ele é também um divisor topológico de zero em A' sendo pelo Teorema 2.3.1, singular em A'. Portanto podemos concluir que os divisores topológicos de zero em A são os elementos singulares que são permanentemente singulares em respeito à toda ampliação possível de A. E pelo Teorema 2.3.2, sabemos que, apesar de que, numa ampliação de A, S pode perder seus elementos, mas ∂S nunca perde.

2.4 O espectro

Sejam A uma álgebra de Banach e $x \in A$. Definimos o espectro de x, denotado por $\sigma(x)$, como o seguinte subconjunto do plano complexo:

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda\mathbf{1} \text{ é singular }\}.$$

Para indicar que o espectro de x depende também de A, denotamos $\sigma_A(x)$.

Observação 2.4.1. *$\sigma(x)$ é fechado em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. A função g_x de $\sigma(x)$ em A definida por $g_x(\lambda) = x - \lambda\mathbf{1}$ é contínua, pois $\| (x - \lambda\mathbf{1}) - (x - \lambda_\circ\mathbf{1}) \| = \| (\lambda_\circ - \lambda)\mathbf{1} \| = |\lambda_\circ - \lambda|$. Como, pelo Teorema 2.2.2, S é fechado em A, temos que $\sigma(x) = g_x^{-1}(S)$ é fechado em $\mathbb{C}$. □

Observação 2.4.2. *$\sigma(x)$ é subconjunto do disco fechado $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \| x \|\}$.*

Demonstração. Dado $\lambda \in \sigma(x)$, suponhamos, por absurdo, que $|\lambda| > \| x \|$. Então, $\| \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}) \| < 1$. Logo, pelo Teorema 2.2.1, $\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}$ é regular, e então $x - \lambda\mathbf{1}$ é regular, o que é impossível. □

O conjunto resolvente de x, denotado por $\rho(x)$, é o complementar de $\sigma(x)$ em $\mathbb{C}$. Pelas observações acima, sabemos que $\rho(x)$ é um subconjunto aberto do plano complexo que contém $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \| x \|\}$.

Definição 2.4.3. *O resolvente de x é a função definida de $\rho(x)$ em A por*

$$x(\lambda) = (x - \lambda\mathbf{1})^{-1}.$$

Observação 2.4.4. *O resolvente de x é uma função contínua em $\rho(x)$.*

Demonstração. Temos que

$$x(\lambda) = g \circ h(\lambda),$$

onde h é a função de $\rho(x)$ em G definida por

$$h(\lambda) = x - \lambda\mathbf{1},$$

e g é uma função de G em A definida por

$$g(x) = x^{-1}.$$

Pela demonstração da Observação 2.4.1, sabemos que h é contínua em $\rho(x)$, e pelo Teorema 2.2.3, obtemos que g é contínua em G. Portanto, $x = g \circ h$ é contínua em $\rho(x)$. $\square$

Observação 2.4.5. *Quando* $|\lambda| \longrightarrow +\infty$, *temos que* $x(\lambda) \longrightarrow \mathbf{0}$.

Demonstração. Temos que

$$x(\lambda) = (x - \lambda\mathbf{1})^{-1} = \frac{1}{\lambda}(\frac{x}{\lambda} - \mathbf{1})^{-1}.$$

Quando $|\lambda| \longrightarrow +\infty$, temos que $\frac{1}{\lambda} \longrightarrow 0$, e $\frac{x}{\lambda} - \mathbf{1} \longrightarrow -\mathbf{1}$. Como, pelo Teorema 2.2.3, $g(x) = x^{-1}$ é uma função contínua em G, temos que $g(\frac{x}{\lambda} - \mathbf{1}) \longrightarrow g(-\mathbf{1})$. Logo, $(\frac{x}{\lambda} - \mathbf{1})^{-1} \longrightarrow -\mathbf{1}$. Assim, $\frac{1}{\lambda}(\frac{x}{\lambda} - \mathbf{1})^{-1} \longrightarrow \mathbf{0}$, ou seja, $x(\lambda) \longrightarrow \mathbf{0}$. $\square$

Agora observamos que

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= x(\lambda)(x - \mu\mathbf{1})x(\mu) \\ &= x(\lambda)(x - \lambda\mathbf{1} + \lambda\mathbf{1} - \mu\mathbf{1})x(\mu) \\ &= [\mathbf{1} + (\lambda - \mu)x(\lambda)]x(\mu) \\ &= x(\mu) + (\lambda - \mu)x(\lambda)x(\mu). \end{aligned}$$

Logo

$$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda - \mu)x(\lambda)x(\mu).$$

A equação acima é chamado a equação resolvente.

Teorema 2.4.6. $\sigma(x)$ *não é vazio.*

Demonstração. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ linear e contínua, isto é, um funcional arbitrário em A'. Como f é linear, pela equação resolvente, temos que

$$f(x(\lambda) - x(\mu)) = f((\lambda - \mu)x(\lambda)x(\mu)),$$

$$f(x(\lambda)) - f(x(\mu)) = (\lambda - \mu)f(x(\lambda)x(\mu)).$$

Definimos $h(\lambda) = f(x(\lambda))$. Então temos que

$$\frac{h(\lambda) - h(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x(\lambda)x(\mu)).$$

Logo

$$\begin{aligned} h'(\mu) &= \lim_{\lambda \longrightarrow \mu} f(x(\lambda)x(\mu)) \\ &= f(\lim_{\lambda \longrightarrow \mu} x(\lambda)x(\mu)) \\ &= f(x(\mu)^2). \end{aligned}$$

Pela Observação 2.4.3, temos que f e x são funções contínuas. Logo a função derivada h' é contínua em $\rho(x)$. Observamos que, para todo $\lambda \in \rho(x)$,

$$0 \leq |h(\lambda)| = |f(x(\lambda))| \leq \parallel f \parallel \parallel x(\lambda) \parallel .$$

Logo

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} 0 \leq \lim_{|\lambda| \to +\infty} |h(\lambda)| \leq \parallel f \parallel \lim_{|\lambda| \to +\infty} \parallel x(\lambda) \parallel .$$

Pela Observação 2.4.4, temos que $\lim_{|\lambda| \to +\infty} |h(\lambda)| = 0$. Assim, obtemos que, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que, para todo $|\lambda| > R$,

$$|h(\lambda)| < \epsilon.$$

Por outro lado existe $m > 0$ tal que, para todo $|\lambda| \leq R$,

$$|h(\lambda)| < m,$$

pois h é contínua e $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R\}$ é compacto. Portanto, para todo $\lambda \in \rho(x)$,

$$|h(x)| < \max\{\epsilon, m\}.$$

Logo h é limitada em $\rho(x)$. Suponhamos por absurdo que $\sigma(x)$ é vazio. Logo $\rho(x) = \mathbb{C}$ e concluímos que $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa e limitada em $\mathbb{C}$. Pelo teorema de Liouville, temos que h é constante. Como já vimos que $\lim_{|\lambda|\to+\infty}|h(\lambda)|=0$, temos que $h=f\circ x$ é a função nula. Logo, resulta que, para $f\in A'$ arbitrário, $f(x(\lambda))=0$ para todo $\lambda\in\mathbb{C}$. Lembramos um teorema de Hahn - Banach : Se N é um espaço normado e $x_\circ$ é um vetor não nulo em N, então existe um funcional f em N' tal que $f(x_\circ)=\| x_\circ \|$ e $\| f \|=1$. Seja $\lambda\in\mathbb{C}=\rho(x)$, temos que $x(\lambda)\neq\mathbf{0}$, pois $x(\lambda)$ é um elemento regular em A. Pelo teorema enunciado acima, temos que existe $f\in A'$ tal que $f(x(\lambda))=\| x(\lambda) \|\neq 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\sigma(x)$ não é vazio. □

Definição 2.4.7. *Uma álgebra de divisão é uma álgebra com identidade, na qual qualquer elemento não nulo é regular.*

Teorema 2.4.8. *Se A é uma álgebra de Banach que é também uma álgebra de divisão, então A é igual ao conjunto de todos os múltiplos escalares da identidade.*

Demonstração. Provaremos que $A=\{\lambda\mathbf{1}:\lambda\in\mathbb{C}\}$. Como $A\supset\{\lambda\mathbf{1}:\lambda\in\mathbb{C}\}$ é imediato, basta provar que $A\subset\{\lambda\mathbf{1}:\lambda\in\mathbb{C}\}$. Dado $x\in A$. Suponhamos que, para todo $\lambda\in\mathbb{C}$, $x\neq\lambda\mathbf{1}$. Logo $x-\lambda\mathbf{1}\neq\mathbf{0}$. Como A é uma álgebra de divisão, temos que $x-\lambda\mathbf{1}$ é regular. Logo, $\rho(x)=\mathbb{C}$, ou seja, $\sigma(x)$ é vazio, o que contradiz o Teorema 2.4.6. Portanto existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $x=\lambda\mathbf{1}$. Logo $A=\{\lambda\mathbf{1}:\lambda\in\mathbb{C}\}$. □

Observação 2.4.9. *Uma álgebra de Banach A que é também uma álgebra de divisão é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja T a função de A em $\mathbb{C}$ definida por $T(\lambda\mathbf{1})=\lambda$. Então T é bijetora, é isomorfismo e $|T(\lambda\mathbf{1})|=|\lambda|=|\lambda|\,\|\mathbf{1}\|=\|\lambda\mathbf{1}\|$. Resulta que uma álgebra de Banach que é uma álgebra de divisão coincide com o plano complexo $\mathbb{C}$. □

Teorema 2.4.10. *Se $\mathbf{0}$ é o único divisor topológico de zero em uma álgebra de Banach A então $A=\mathbb{C}$.*

Demonstração. Provaremos que A é uma álgebra de divisão. Seja $x\in A$. Como o plano complexo $\mathbb{C}$ é um espaço topológico conexo, os únicos subconjuntos abertos e fechados são ϕ e $\mathbb{C}$. Pela Observação 2.4.2, $\sigma(x)=\overset{\circ}{\sigma}(x)\cup\partial\sigma(x)$ é um subconjunto do disco fechado $\{z:|z|\leq\| x \|\}$, logo $\sigma(x)\neq\mathbb{C}$. Além disso, $\sigma(x)$ não é vazio e é fechado. Portanto, existe $\lambda\in\partial\sigma(x)=\overline{\sigma(x)}\cap\overline{\rho(x)}=\sigma(x)\cap\overline{\rho(x)}$. Como $\lambda\in\sigma(x)$, então $x-\lambda\mathbf{1}\in S$. Como $\lambda\in\overline{\rho(x)}$, existe uma seqüência $(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$ em $\rho(x)$ tal que $\lambda_n\longrightarrow\lambda$. Sendo a função $g:\rho(x)\longrightarrow G$

definida por $g(x) = x - \lambda\mathbf{1}$ contínua, temos que $g(\lambda_n) \longrightarrow g(\lambda)$. Logo, $x - \lambda_n\mathbf{1} \longrightarrow x - \lambda\mathbf{1}$. Como $(x - \lambda_n\mathbf{1})_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência em G, temos que o limite $x - \lambda\mathbf{1} \in \overline{G}$. Resulta que $x - \lambda\mathbf{1} \in S \cap \overline{G} = \overline{S} \cap \overline{G} = \partial S$. Portanto

$$\lambda \in \partial\sigma(x) \Longrightarrow x - \lambda\mathbf{1} \in \partial S. \tag{2.5}$$

Logo, pelo Teorema 2.3.2, $x - \lambda\mathbf{1}$ é um divisor topológico de zero. Por hipótese, temos que $x - \lambda\mathbf{1} = \mathbf{0}$, ou seja, $x = \lambda\mathbf{1}$. Logo, se $x \neq \mathbf{0}$ então x é regular. Portanto A é uma álgebra de divisão. Pela Observação 2.4.9, $A = \mathbb{C}$. $\square$

Teorema 2.4.11. *Seja A uma álgebra de Banach. Se a norma em A satisfaz a inequação $\| xy \| \geq k \| x \| \| y \|$ para alguma constante positiva k, e todos os $x, y \in A$, então $A = \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja Z o conjunto de todos os divisores topológicos de zero em A. Se $z \in Z$, existe uma seqüência $(r_n)_{n=1}^{+\infty}$ em A tal que $\| r_n \| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e (sem perda de generalidade) $zr_n \longrightarrow \mathbf{0}$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\| zr_n \| < \epsilon$. Por hipótese, existe $k > 0$ tal que $k \| z \| \| r_n \| \leq \| zr_n \| < \epsilon$. Logo $k \| z \| = \| kz \| < \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, temos que $kz = \mathbf{0}$. Logo, $z = \mathbf{0}$. Portanto $\mathbf{0}$ é o único divisor topológico de zero. Pelo teorema anterior, temos que $A = \mathbb{C}$. $\square$

Teorema 2.4.12. *Se A é uma subálgebra de Banach de uma álgebra de Banach A', então os espectros de um elemento x em A, com respeito a A e A', verificam seguintes relacões: (1). $\sigma_{A'}(x) \subset \sigma_A(x)$; (2). $\partial\sigma_A(x) \subset \partial\sigma_{A'}(x)$.*

Demonstração. Sejam S_A e $S_{A'}$ os conjuntos de todos os elementos singulares em A e A', e Z_A e $Z_{A'}$ os conjuntos de todos os divisores topológicos de zero em A e A'. Provaremos que (1). $\sigma_{A'}(x) \subset \sigma_A(x)$. Se $x - \lambda\mathbf{1}$ é singular em A', então $x - \lambda\mathbf{1}$ é singular em A. Logo $\lambda \in \sigma_{A'}(x) \Longrightarrow \lambda \in \sigma_A(x)$. Portanto $\sigma_{A'}(x) \subset \sigma_A(x)$. (2). $\partial\sigma_A(x) \subset \partial\sigma_{A'}(x)$. Seja $\lambda \in \partial\sigma_A(x)$. Provaremo que $\lambda \in \partial\sigma_{A'}(x) = \overline{\sigma_{A'}(x)} \cap \overline{\rho_{A'}(x)} = \sigma_{A'}(x) \cap \overline{\rho_{A'}(x)}$. Primeiramente provaremos que $\lambda \in \sigma_{A'}(x)$. Como $\lambda \in \partial\sigma_A(x)$, por (2.5), temos que $x - \lambda\mathbf{1} \in \partial S_A$. Logo, Pelo Teorema 2.3.2, $x - \lambda\mathbf{1} \in Z_A$. Então $x - \lambda\mathbf{1} \in Z_{A'}$. Pelo Teorema 2.3.1, $x - \lambda\mathbf{1} \in S_{A'}$. Logo $\lambda \in \sigma_{A'}(x)$. Agora falta provar $\lambda \in \overline{\rho_{A'}(x)}$. De fato, como $\lambda \in \partial\sigma_A(x) = \sigma_A(x) \cap \overline{\rho_A(x)}$ e $\overline{\rho_A(x)} \subset \overline{\rho_{A'}(x)}$, pois, por(1), temos que $(\sigma_{A'}(x))^c \supset (\sigma_A(x))^c$. Logo temos que $\lambda \in \overline{\rho_{A'}(x)}$. Portanto $\lambda \in \sigma_{A'}(x) \cap \overline{\rho_{A'}(x)} = \partial\sigma_{A'}(x)$. Logo $\partial\sigma_A(x) \subset \partial\sigma_{A'}(x)$. $\square$

O teorema anterior afirma que, em geral, o espectro de um elemento encolhe quando a álgebra de Banach que contém este elemento amplia. Porém, durante a ampliação da álgebra de Banach, a fronteira do espectro deste elemento nunca perde os seus membros. Veremos um exemplo deste fenômeno.

Exemplo : Sejam $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, o disco unitário fechado no plano complexo e $B = \{f \in \mathcal{C}^\star(D) \quad | \quad f : \mathring{D} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{é analítica}\}$ a álgebra do disco. Se $f \in B$, pelo teorema do módulo máximo,

$$\max\{|f(z)| : z \in D\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}.$$

Como f é limitada, o seu valor máximo é igual ao supremo, e temos

$$\sup\{|f(z)| : z \in D\} = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D\}.$$

Sendo a norma em $\mathcal{C}^\star(D)$ definida por $\| f \|= \sup\{|f(z)| : z \in D\}$, como B é subálgebra de Banach de $\mathcal{C}^\star(D)$, resulta que

$$\| f \|= \sup\{|f(z)| : z \in D\} = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D\}.$$

Assim, podemos identificar B com o conjunto de todas as restrições de $f \in B$ a ∂D, denotado por A. Sabemos que $\mathcal{C}^\star(\partial D)$, denotado por A', é uma álgebra de Banach que contém A. Seja $f \in A$ definida por $f(z) = z$, para todo $z \in \partial D$. Provaremos que (a). $\sigma_A(f) = D$ e (b). $\sigma_{A'}(f) = \partial D$. (a_1). $\sigma_A(f) \supset D$. Dado $\lambda \in D$, provaremos que $\lambda \in \sigma_A(f)$, ou seja, $f - \lambda\mathbf{1}$ é singular em A. Suponhamos por absurdo que $f - \lambda\mathbf{1}$ é regular em A. Como $(f - \lambda\mathbf{1})(z) = z - \lambda$, para todo $z \in \partial D$, temos que $g = G|_{\partial D}(z) = \frac{1}{z-\lambda}$, para todo $z \in \partial D$, é o seu inverso. Logo $G \in \mathcal{C}^\star(D)$, onde, $G(z) = \frac{1}{z-\lambda}$, para todo $z \in D$. Logo, $\lambda \notin D$, absurdo! (a_2).$\sigma_A(f) \subset D$. Seja $\lambda \in \sigma_A(f)$. Provaremos que $\lambda \in D$. Suponhamos por absurdo que $\lambda \notin D$. Como $\lambda \in \sigma_A(f)$, então $f - \lambda\mathbf{1}$ é singular em A. Mas, $f - \lambda\mathbf{1}$ tem o seu inverso $g \in A$, onde $g(z) = \frac{1}{z-\lambda}$, para todo $z \in \partial D$, absurdo! Portanto, $\sigma_A(f) \subset D$. (b_1). $\sigma_{A'}(f) \subset \partial D$. Seja $\lambda \in \sigma_{A'}(f)$. Provaremos que $\lambda \in \partial D$. Como $\lambda \in \sigma_{A'}(f)$, então $f - \lambda\mathbf{1}$ é singular em A', onde $f - \lambda\mathbf{1}(z) = z - \lambda$ para todo $z \in \partial D$. Logo $g \notin A'$, onde $g(z) = \frac{1}{z-\lambda}$, para todo $z \in \partial D$. Portanto, $\lambda \in \partial D$. (b_2). $\partial D \subset \sigma_{A'}(f)$. Seja $\lambda \in \partial D$. Provaremos que $\lambda \in \sigma_{A'}(f)$, ou seja, $f - \lambda\mathbf{1}$ é singular em A', onde $(f - \lambda\mathbf{1})(z) = z - \lambda$, para todo $z \in \partial D$. Como $\lambda \in \partial D$, g não é contínua em ∂D, onde $g(z) = \frac{1}{z-\lambda}$ para todo $z \in \partial D$, logo $g \notin A'$. Portanto $f - \lambda\mathbf{1}$ é singular em A', ou seja, $\lambda \in \sigma_{A'}(f)$.

Resulta que quando A amplia a A', temos que D, o espectro de f, encolhe para ∂D, conservado a sua fronteira.

2.5 A fórmula do raio espectral

Sejam A uma álgebra de Banach e $x \in A$. O raio espectral de x, denotado por $r(x)$, é definido por

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\}.$$

A fórmula do raio espectral é dada no Teorema 2.5.3 abaixo, e o nosso propósito nesta seção é prová - la. Primeiramente estudaremos o lema seguinte :

Lema 2.5.1. $\sigma(x^n) = \sigma(x)^n$.

Demonstração. Sejam λ um número complexo não nulo e $p(z) = z^n - \lambda$ um polinômio com coeficientes complexos. Pelo teorema fundamental da álgebra, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que $z^n - \lambda = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)$. Observamos que o conjunto P de todos os polinômios em $\mathbb{C}$ pode ser identificado como o conjunto de todas as funções geradas por $\{\mathbf{1}, x\}$, Portanto temos que

$$x^n - \lambda\mathbf{1} = (x - \lambda_1\mathbf{1})(x - \lambda_2\mathbf{1})\cdots(x - \lambda_n\mathbf{1}).$$

Vamos provar primeiramente que :

$$x^n - \lambda\mathbf{1} \text{ é singular} \Longleftrightarrow x - \lambda_i\mathbf{1} \text{ é singular, para pelo menos um } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Primeiramente provaremos que $x^n - \lambda\mathbf{1}$ é singular $\Longrightarrow x - \lambda_i\mathbf{1}$ é singular, para pelo menos um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Suponhamos, por absurdo, que $x - \lambda_i\mathbf{1}$ fosse regular para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Então existiria $y_i \in A$ tal que $y_i(x - \lambda_i\mathbf{1}) = (x - \lambda_i\mathbf{1})y_i = \mathbf{1}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim, $(x^n - \lambda\mathbf{1})y_n y_{n-1}\cdots y_1 = y_n y_{n-1}\cdots y_1(x^n - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Logo $x^n - \lambda\mathbf{1}$ não seria singular, o que é absurdo! Agora provaremos que, para pelo menos um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}, x - \lambda_i\mathbf{1}$ é singular $\Longrightarrow x^n - \lambda\mathbf{1}$ é singular. Sabemos que $x^n - \lambda\mathbf{1} = (x - \lambda_i\mathbf{1})w$, onde $w \in A$. Se $y \in A$ arbitrário, então $(x^n - \lambda\mathbf{1})y = (x - \lambda_i\mathbf{1})wy$. Como $x - \lambda_i\mathbf{1}$ é singular, temos que $(x - \lambda_i\mathbf{1})wy \neq \mathbf{1}$. Logo resulta que $(x^n - \lambda\mathbf{1})y \neq \mathbf{1}$ para todo $y \in A$, ou seja, $x^n - \lambda\mathbf{1}$ é singular.

Agora, usando a afirmação acima, começa realmente a demonstração do lema. Primeiramente provaremos que $\sigma(x^n) \subset \sigma(x)^n$. Seja $\lambda \in \sigma(x^n)$. Logo $x^n - \lambda\mathbf{1}$ é singular. Pela afirmação acima, $x - \lambda_i\mathbf{1}$ é singular, para pelo menos um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo $\lambda_i \in \sigma(x), \lambda_i^n \in \sigma(x)^n$, ou seja, $\lambda = \lambda_i^n \in \sigma(x)^n$. Portanto $\sigma(x^n) \subset \sigma(x)^n$. Agora provaremos que $\sigma(x)^n \subset \sigma(x^n)$. Se $\lambda \in \sigma(x)$, então $x - \lambda\mathbf{1}$ é singular e $\lambda^n \in \sigma(x)^n$. Pela afirmação acima, temos que $x^n - \lambda^n\mathbf{1}$ é singular. Logo $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Portanto $\sigma(x)^n \subset \sigma(x^n)$. □

Observação 2.5.2. $r(x)^n = r(x^n)$.

Demonstração. Primeiramente provaremos que

$$\big(\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\big)^n = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

(1). $\big(\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\big)^n \leq \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\}$. Seja $\alpha = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\}$. Logo, para todo $\lambda \in \sigma(x)$, temos que $|\lambda|^n \leq \alpha, |\lambda| \leq \alpha^{\frac{1}{n}}$. Logo $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \leq \alpha^{\frac{1}{n}}$. Portanto, $\big(\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\big)^n \leq \alpha = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\}$. (2). $\sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\} \leq \big(\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\big)^n$. Seja $\beta = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. Logo, para todo $\lambda \in \sigma(x)$, temos que $|\lambda| \leq \beta, |\lambda|^n \leq \beta^n$. Logo temos que $\sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\} \leq \beta^n = \big(\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\big)^n$. De (1) e (2), temos que $\big(\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\big)^n = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\}$. Agora, lembrando que $\sigma(x)^n = \sigma(x^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
(r(x))^n &= \big(\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}\big)^n \\
&= \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(x)\} \\
&= \sup\{|\lambda|^n : \lambda^n \in \sigma(x)^n\} \\
&= \sup\{|\lambda^n| : \lambda^n \in \sigma(x^n)\} \\
&= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(x^n)\} \\
&= r(x^n).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5.3. $r(x) = \lim_{n\to+\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$.

Demonstração. Pela Observação 2.4.2, $\sigma(x) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \| x \|\}$. Logo, temos que $r(x^n) \leq \| x^n \|$. Pela observação acima, obtemos que $(r(x))^n \leq \| x^n \|, r(x) \leq \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$. Agora, para completar a demonstração, basta provar que se a é um número real tal que $r(x) < a$, então $\| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção de um número finito de n. De fato, provado isto, teremos que , dado $a = r(x) + \frac{\epsilon}{2}$, onde $\frac{\epsilon}{2} > 0$, então $| \| x^n \|^{\frac{1}{n}} - r(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção de um número finito de n. Logo $r(x) = \lim_{n\to+\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$. Como $\sigma(x) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \| x \|\}$, temos que se $|\lambda| > \| x \|$ então $\lambda \in \rho(x)$ e $x - \lambda\mathbf{1}$ é regular. Observamos que $|\lambda| > \| x \|$, ou seja, $\| \frac{x}{\lambda} \| < 1$, então $\| \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}) \| < 1$. Pelo

Teorema 2.2.1, temos que $\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}$ é regular, e

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda})^{-1} &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}))^n \\ &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{x}{\lambda})^n \\ &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}. \end{aligned}$$

Considerando o resolvente de x, obtemos que

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= (x - \lambda\mathbf{1})^{-1} \\ &= \lambda^{-1}(\frac{x}{\lambda} - \mathbf{1})^{-1} \\ &= -\lambda^{-1}(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda})^{-1} \\ &= -\lambda^{-1}\big[\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}\big]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Seja $f \in A'$ um funcional arbitrário. Então, por (2.6), temos que, para todo $|\lambda| > \| x \|$,

$$\begin{aligned} f(x(\lambda)) &= -\lambda^{-1}\big[f(\mathbf{1}) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(\frac{x^n}{\lambda^n})\big] \\ &= -\lambda^{-1}\big[f(\mathbf{1}) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)\lambda^{-n}\big]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Onde $f(x(\lambda))$ é uma função analítica na regiâo $|\lambda| > r(x)$, pois $|\lambda| > r(x) \Longrightarrow \lambda \in \rho(x)$, e (2.7) é a sua expressão de Laurent. Seja α um número real arbitrário tal que $r(x) < a < \alpha$. Então $\sum_{n=1}^{+\infty} f(\frac{x^n}{\alpha^n})$ converge. Logo $(f(\frac{x^n}{\alpha^n}))_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência limitada. Como $f \in A'$ é arbitrário, aplicando o teorema de limitação uniforme, temos que $(\frac{x^n}{\alpha^n})_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência limitada, isto é, existe $K > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\| \frac{x^n}{\alpha^n} \| \leq K,$$

$$\| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leq K^{\frac{1}{n}}\alpha.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} K^{\frac{1}{n}} = 1$, e $\alpha < a$, temos que $K^{\frac{1}{n}}\alpha \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Portanto $\| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção de um número finito de n. Logo a demonstração está completa. □

A aplicação desta fórmula do raio espectral aparecerá no próximo capítulo.

2.6 Radical e semi - simplicidade

Nesta seção, estudaremos a semi - simplicidade de uma álgebra de Banach A. Para isso, é necessário o conceito de radical de A, o qual baseia - se numa análise detalhada dos ideais de A. Lembramos que um ideal I em A é definido pelas seguintes propriedades :

(1). I é um subespaço vetorial de A.

(2). $i \in I \Longrightarrow xi \in I$, para todo $x \in A$.

(3). $i \in I \Longrightarrow ix \in I$, para todo $x \in A$.

Se I satisfaz as condições (1) e (2) [ou as condições (1) e (3)], é chamado de um ideal esquerdo (ou um ideal direito). Assim, um ideal é dito também um ideal bilateral. É claro que, quando A é comutativa, ideal esquerdo, ideal direito e ideal bilateral (ideal) coincidem. Agora, dizemos que x é regular esquerdo se existe $y \in A$ tal que $yx = \mathbf{1}$; se x não é regular esquerdo, é chamado de singular esquerdo. Elementos regulares direitos e singulares direitos são definidos de modo similar. Se $x \in A$ é regular esquerdo e também regular direito, então existem $y, z \in A$ tais que $yx = \mathbf{1}$ e $xz = \mathbf{1}$, logo

$$y = y\mathbf{1} = y(xz) = (yx)z = \mathbf{1}z = z.$$

O que mostra que x é regular e $x^{-1} = y = z$.

Um ideal esquerdo (direito) maximal é definido de modo similar ao ideal maximal, ou seja, um ideal esquerdo (direito) maximal é um ideal esquerdo (direito) próprio que não está contido em outro ideal esquerdo (direito) próprio. Uma aplicação do lema de Zorn mostra que um ideal esquerdo (direito) próprio qualquer está sempre mergulhado em um ideal esquerdo (direito) maximal. Como o ideal zero $\{\mathbf{0}\}$ é um ideal esquerdo (direito) próprio, então o conjunto de todos os ideais esquerdos (direitos) maximais em A não é vazio. Agora definimos o radical R de A como a interseção de todos os ideais esquerdos maximais em A, denotado por $\cap MLI$, isto é, $R = \cap MLI$.

Observação 2.6.1. *O radical R de A é um ideal esquerdo próprio.*

Demonstração. Pela definição do radical R de A, temos que $R = \cap_{i \in I} M_i$, onde M_i é ideal esquerdo maximal. De fato, temos que (1). R é um subespaço vetorial de A. Dados $x, y \in R$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, provaremos que $x + \alpha y \in R$. Como $x, y \in R$, então $x, y \in M_i$, para todo $i \in I$. Como M_i é ideal esquerdo maximal, e portanto é espaço vetorial, temos que $x + \alpha y \in M_i$ para todo $i \in I$. Assim $x + \alpha y \in \cap_{i \in I} M_i = R$. (2). R é um ideal esquerdo. Como já vimos que R é um subespaço vetorial de A, basta provar que $r \in R \Longrightarrow xr \in R$ para todo $x \in A$.

Como $r \in R = \cap_{i \in I} M_i$, temos que $r \in M_i$ para todo $i \in I$. Como M_i é um ideal esquerdo, então $xr \in M_i$ para todo $x \in A$. Logo $xr \in \cap_{i \in I} M_i = R$. (3). R é um ideal próprio. Como $\mathbf{1} \notin M_i$, para todo $i \in I$, então, $\mathbf{1} \notin \cap_{i \in I} M_i = R$. Logo R é um ideal próprio. Por (1), (2) e (3), temos que R é um ideal esquerdo próprio. □

De modo similar, temos a seguinte observação :

Observação 2.6.2. *Seja $\cap MRI$ a interseção de todos os ideais direitos maximais, então $\cap MRI$ é um ideal direito próprio.*

Os seguintes lemas mostrarão que, na verdade, $\cap MLI = \cap MRI$.

Lema 2.6.3. *Se r é um elemento de R, então $\mathbf{1} - r$ é regular esquerdo.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\mathbf{1} - r$ é singular esquerdo. Seja

$$L = A(\mathbf{1} - r) = \{x - xr : x \in A\}.$$

Dados $x - xr, y - yr \in L$, onde $x, y \in A$, e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que (1). L é um subespaço vetorial de A. De fato, temos que $(x - xr) + (y - yr) = (x + y) - (x + y)r \in L$, e $\alpha(x - xr) = \alpha x - \alpha xr \in L$, pois como $x, y \in A$ e A é uma álgebra, então $x + y, \alpha x \in A$. (2). L é um ideal esquerdo. Vimos já que L é um subespaço vetorial. Dado $z \in A$, temos que $z(x - xr) = zx - zxr \in L$, pois como $x \in A$ e A é uma álgebra, então $zx \in A$. Portanto L é um ideal esquerdo. (3). L é um ideal esquerdo próprio. Como $\mathbf{1} - r$ é singular esquerdo, então , para todo $y \in A$, temos que $y(\mathbf{1} - r) \neq \mathbf{1}$. Logo $y - yr \neq \mathbf{1}$ para todo $y \in A$. Então $\mathbf{1} \notin L$. (4). L contém $\mathbf{1} - r$. Isto é imediato, pois $\mathbf{1} \in A$. Por (1), (2), (3) e (4), concluímos que L é um ideal esquerdo próprio que contém $\mathbf{1} - r$. Pelo lema do Zorn, existe M : um ideal esquerdo maximal em A tal que $L \subset M$. Logo

$$\mathbf{1} - r \in M. \tag{2.8}$$

Como, por hipótese, $r \in R = \cap_{i \in I} M_i$, onde M_i é um ideal esquerdo maximal em A, temos que $r \in M_i$ para todo $i \in I$. Em particular,

$$r \in M. \tag{2.9}$$

Logo, por (2.8) e (2.9), temos que $\mathbf{1} = (\mathbf{1} - r) + r \in M$, absurdo! Portanto resulta que

$$r \in R \Longrightarrow \mathbf{1} - r \text{ é regular esquerdo.}$$

□

Lema 2.6.4. *Se r é um elemento de R, então $\mathbf{1}-r$ é regular.*

Demonstração. O Lema 2.6.3 já provou que $\mathbf{1}-r$ é regular esquerdo. Então existe $s \in A$ tal que $s(\mathbf{1}-r)=\mathbf{1}$. Logo s é regular direito, e $s-sr=\mathbf{1}$. Logo

$$s=\mathbf{1}+sr=\mathbf{1}-(-s)r.$$

Como $r \in R$ e R é um ideal esquerdo, temos que $(-s)r \in R$. Pelo Lema 2.6.3, obtemos que $\mathbf{1}-(-s)r$ é regular esquerdo, ou seja, s é regular esquerdo. Resulta que s é regular com o seu inverso $\mathbf{1}-r$. Logo $\mathbf{1}-r$ é regular. □

Lema 2.6.5. *Se r é um elemento de R, então $\mathbf{1}-xr$ é regular para todo $x \in A$.*

Demonstração. Como $r \in R$ e R é um ideal esquerdo, temos que, para todo $x \in A$, $xr \in R$. Pelo Lema 2.6.4, obtemos que $\mathbf{1}-xr$ é regular para todo $x \in A$. □

Lema 2.6.6. *Se r é um elemento com a propriedade de que $\mathbf{1}-xr$ é regular para todo $x \in A$, então r pertence a R.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $r \notin R$. Então existe M : um ideal esquerdo maximal tal que $r \notin M$. Seja

$$M+Ar=\{m+xr : m \in M \text{ e } x \in A\}.$$

Observamos que dados $m_1+x_1r, m_2+x_2r \in M+Ar$, onde $m_1, m_2 \in M$ e $x_1, x_2 \in A$, e $\alpha \in \mathbb{C}$,(1). $M+Ar$ é um subespaço vetorial. De fato, $(m_1+x_1r)+(m_2+x_2r) = (m_1+m_2)+(x_1+x_2)r \in M+Ar$, pois $m_1+m_2 \in M$ e $x_1+x_2 \in A$. Além disso, $\alpha(m_1+x_1r)=\alpha m_1+\alpha x_1 r \in M+Ar$, pois $\alpha m_1 \in M$ e $\alpha x_1 \in A$. (2). $M+Ar$ é um ideal esquerdo. Como já vimos que $M+Ar$ é um espaço vetorial, e temos que, para todo $y \in A, y(m_1+x_1r)=ym_1+yx_1r \in M+Ar$, pois $ym_1 \in M$ e $yx_1 \in A$, concluímos que $M+Ar$ é um ideal esquerdo. (3). $M+Ar$ contém M e r. Isto é imediato, pois $\mathbf{0} \in A$, logo $M+\mathbf{0}=M \subset M+Ar$. Como $\mathbf{0} \in M$ e $\mathbf{1} \in A$, temos que $\mathbf{0}+\mathbf{1}r=r \in M+Ar$. Por (1), (2) e (3), resulta que $M+Ar$ é um ideal esquerdo que contém M e r. Como M é um ideal esquerdo maximal e $M \subset M+Ar$, temos que $M+Ar=A$. Como $\mathbf{1} \in A$, existe $m \in M$ e $x \in A$ tal que $m+x=\mathbf{1}$. Logo $m=\mathbf{1}-xr$. Por hipótese, sabemos que $\mathbf{1}-xr$ é regular, ou seja, $m \in M$ é regular, absurdo! Pois é impossível obter um elemento regular em um ideal próprio. Portanto $r \in R$. □

Pela definição do radical R de A, temos que

$$R = \cap MLI.$$

Pelo lema 2.6.5 e lema 2.6.6, temos que

$$R = \{r : \mathbf{1} - xr \text{ é regular para todo } x \in A\}.$$

Logo, resulta que

$$\cap MLI = \{r : \mathbf{1} - xr \text{ é regular para todo } x \in A\}. \tag{2.10}$$

Se definimos o radical R' de A de modo que $R' = \cap MRI$, e aplicamos todos os lemas acima aos ideais direitos maximais, temos que

$$\cap MRI = \{r : \mathbf{1} - rx \text{ é regular para todo } x \in A\}. \tag{2.11}$$

Agora, provaremos que os conjuntos $\cap MLI$ e $\cap MRI$ são iguais. Por simetria, basta provar o seguinte lema :

Lema 2.6.7. *Se $\mathbf{1} - xr$ é regular, então $\mathbf{1} - rx$ também é regular.*

Demonstração. Como $\mathbf{1} - xr$ é regular, existe $s = (\mathbf{1} - xr)^{-1} \in A$ tal que $(\mathbf{1} - xr)s = s(\mathbf{1} - xr) = \mathbf{1}$. Logo

$$-\mathbf{1} + (\mathbf{1} - xr)s = \mathbf{0},$$

$$r[-\mathbf{1} + (\mathbf{1} - xr)s]x = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{1} + r[-\mathbf{1} + (\mathbf{1} - xr)s]x = \mathbf{1},$$

$$\mathbf{1} - rx + rsx - rxrsx = \mathbf{1},$$

$$(\mathbf{1} - rx) + (\mathbf{1} - rx)rsx = \mathbf{1},$$

$$(\mathbf{1} - rx)(\mathbf{1} + rsx) = \mathbf{1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1} + rsx)(\mathbf{1} - rx) &= \mathbf{1} - rx + rsx - rsxrx \\
&= \mathbf{1} + r(-\mathbf{1} + s - sxr)x \\
&= \mathbf{1} + r[-\mathbf{1} + \underbrace{s(\mathbf{1} - xr)}_{=\mathbf{1}}]x \\
&= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Resulta que

$$(\mathbf{1} - rx)(\mathbf{1} + rsx) = (\mathbf{1} + rsx)(\mathbf{1} - rx) = \mathbf{1}.$$

Logo $\mathbf{1} - rx$ é regular. □

Concluímos que, apesar de que, pela definição, $R = \cap MLI$, de fato, $\cap MLI$ e $\cap MRI$ são o mesmo conjunto. Resumimos todos os resultados no

Teorema 2.6.8. *O radical R de A é igual a cada um de quatro conjuntos em (2.10) e (2.11), e portanto é um ideal bilateral próprio.*

Definição 2.6.9. *Uma álgebra de Banach A é dita semi - simples, se o seu radical é igual ao ideal zero $\{\mathbf{0}\}$, isto é, se $x \in A$ e $x \neq \mathbf{0}$, então existe M : um ideal esquerdo maximal tal que $x \notin M$.*

Observação 2.6.10. *Se I é um ideal qualquer (esquerdo, direito ou bilateral), então $\overline{I}$ é um ideal do mesmo tipo (esquerdo, direito ou bilateral).*

Demonstração. Provaremos que se I é um ideal esquerdo, então $\overline{I}$ é um ideal esquerdo. Os outros dois casos podem ser provados de modo similar. (1). $\overline{I}$ é um subespaço vetorial. Dados $i, j \in \overline{I}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, provaremos que $i + j \in \overline{I}$ e $\alpha i \in \overline{I}$. Como $i, j \in \overline{I}$, existem seqüências $(i_n)_{n=1}^{+\infty}$ e $(j_n)_{n=1}^{+\infty}$ em I tais que $i_n \longrightarrow i$ e $j_n \longrightarrow j$. Como I é um ideal esquerdo e $i_n, j_n \in I$, temos que $i_n + j_n, \alpha i_n \in I$. Logo existem seqüências $(i_n + j_n)_{n=1}^{+\infty}$ e $(\alpha i_n)_{n=1}^{+\infty}$ em I tais que $i_n + j_n \longrightarrow i + j$ e $\alpha i_n \longrightarrow \alpha i$. Logo temos que $i + j, \alpha i \in \overline{I}$. (2). $\overline{I}$ é um ideal esquerdo. Já vimos que $\overline{I}$ é um subespaço vetorial. Basta provar que $i \in \overline{I} \Longrightarrow xi \in \overline{I}$ para todo $x \in A$. Como $i \in \overline{I}$, existe uma seqüência $(i_n)_{n=1}^{+\infty}$ tal que $i_n \longrightarrow i$. Logo, dado $x \in A$, temos que $xi_n \longrightarrow xi$. Como I é um ideal esquerdo e $i_n \in I$, temos que $xi_n \in I$. Assim, existe uma seqüência $(xi_n)_{n=1}^{+\infty}$ em I tal que $xi_n \longrightarrow xi$. Logo $xi \in \overline{I}$. Por (1) e (2), resulta que se I é um ideal esquerdo, então $\overline{I}$ é um ideal esquerdo. □

Observação 2.6.11. *Se I é um ideal próprio, então $\overline{I}$ é um ideal próprio.*

Demonstração. Como I é um ideal próprio, temos que $\overline{I}$ é um ideal e $I \subset S$, onde S é o conjunto de todos os elementos singulares. Logo, $\overline{I} \subset \overline{S} = S$. Portanto, $\mathbf{1} \notin \overline{I}$. Logo, $\overline{I}$ é um ideal próprio. □

Teorema 2.6.12. *Cada ideal esquerdo maximal em A é fechado.*

Demonstração. Seja L um ideal esquerdo maximal em A. Suponhamos por absurdo que L não é fechado. Logo, $L \subsetneqq \overline{L}$. Pelas observações 2.6.10 e 2.6.11, temos que $\overline{L}$ é um ideal esquerdo próprio, o que contradiz a maximalidade de L. Logo, L é fechado. $\square$

Teorema 2.6.13. *O radical R de A é um ideal bilateral próprio fechado.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.6.8, temos que o radical R de A é um ideal bilateral próprio. Basta provar que R é fechado. Como $R = \cap_{i\in I} M_i$, onde cada M_i é um ideal esquerdo maximal em A. Pelo teorema 2.6.12, temos que M_i é fechado para todo $i \in I$. Logo temos que $\cap_{i\in I} M_i = R$ é fechado. $\square$

Teorema 2.6.14. *Se I é um ideal bilateral próprio fechado de A, então a álgebra quociente A/I munida da norma $\| x + I \| = \inf\{\| x + i \| : i \in I\}$ é uma álgebra de Banach.*

Demonstração. (1). A/I é uma álgebra com identidade. (i). A/I é um grupo comutativo. Dados $x + I, y + I \in A/I$, definimos $(x + I) + (y + I) \in A/I$ de modo que,

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I.$$

Observamos que (i_1). Dados $x+I, y+I, z+I \in A/I$ temos que $[(x+I)+(y+I)]+(z+I) = (x + I) + [(y + I) + (z + I)]$ e $(x + I) + (y + I) = (y + I) + (x + I)$. (i_2). Existe $\mathbf{0} + I \in A/I$, onde $\mathbf{0}$ é o elemento zero de A, tal que $(x + I) + (\mathbf{0} + I) = x + I$ para todo $(x + I) \in A/I$. (i_3). Para cada $x + I \in A/I$, existe $-x + I \in A/I$, tal que $(x + I) + (-x + I) = \mathbf{0} + I$. Portanto A/I é um grupo comutativo. (ii). A/I é um anel com identidade . Por (i), vimos que A/I é um grupo comutativo. Dados $x + I, y + I \in A/I$, definimos $(x + I)(y + I) \in A/I$ de modo que

$$(x + I)(y + I) = xy + I.$$

Observamos que (ii_1). Dados $x + I, y + I, z + I \in A/I$, temos que $(x + I)[(y + I)(z + I)] = (x + I)[(y + I)(z + I)]; (x + I)[(y + I) + (z + I)] = (x + I)(y + I) + (x + I)(z + I)$ e $[(x + I) + (y + I)](z + I) = (x + I)(z + I) + (y + I)(z + I)$. (ii_2). Existe $\mathbf{1} + I \in A/I$, onde $\mathbf{1}$ é identidade de A, tal que $(x + I)(\mathbf{1} + I) = (\mathbf{1} + I)(x + I) = x + I$ para todo $x + I \in A/I$. Portanto A/I é um anel com identidade $\mathbf{1}$. (iii). A/I é um espaço vetorial. Por (i), vimos que A/I é um grupo comutativo. Dados $x + I \in A/I$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos $\alpha(x + I) \in A/I$ de modo que

$$\alpha(x + I) = \alpha x + I.$$

Observamos que, dados $x+I, y+I \in A/I$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos que

$$(iii_1).\quad \alpha[(x+I)+(y+I)] = \alpha(x+I)+\alpha(y+I);$$
$$(iii_2).\quad (\alpha+\beta)(x+I) = \alpha(x+I)+\beta(x+I);$$
$$(iii_3).\quad (\alpha\beta)(x+I) = \alpha[\beta(x+I)];$$
$$(iii_4).\quad 1(x+I) = x+I.$$

Portanto A/I é um espaço vetorial. $(iiii)$. A/I é uma álgebra com identidade. Como A/I é um anel com identidade, e também é um espaço vetorial, e dados $x+I, y+I \in A/I$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\alpha[(x+I)(y+I)] = [\alpha(x+I)](y+I) = (x+I)[\alpha(y+I)].$$

Concluímos que A/I é uma álgebra com identidade. (2). $(A/I, \|\ .\ \|)$ é um espaço de Banach. Definimos uma norma $\|\ .\ \|$ em A/I de modo que

$$\| x+I \| = \inf\{\| x+i \| : i \in I\}.$$

Provaremos que a norma acima está bem definida. (a). $\| x+I \| \geq 0$ é imediato. (b). Provaremos que $\| x+I \| = 0 \Longrightarrow x+I = \mathbf{0}+I$. Como $\| x+I \| = 0$, isto é, $\inf\{\| x+i \| : i \in I\} = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\frac{1}{n} > 0$, $\frac{1}{n}$ não é uma cota inferior do conjunto $\{\| x+i \| : i \in I\}$. Logo existe $x+i_n \in x+I$ tal que $\| x+i_n \| < \frac{1}{n}$. Portanto, existe uma seqüência $(\| x+i_n \|)_{n=1}^{+\infty}$ em $\mathbb{R}$ tal que $\| x+i_n \| \longrightarrow 0$. Logo $-i_n \longrightarrow x$. Como $(-i_n)_{n=1}^{+\infty}$ é uma seqüência em I, temos que $x \in \overline{I}$. Por hipótese, temos que I é fechado. Logo $x \in \overline{I} = I$. Assim, $x+I = I = \mathbf{0}+I$. (c). Provaremos que $\| (x+I)+(y+I) \| \leq \| x+I \| + \| y+I \|$ para todo $x+I, y+I \in A/I$. Dado $\epsilon > 0$, logo $\inf\{\| x+i \| : i \in I\} = \| x+I \| < \| x+I \| + \frac{\epsilon}{2}$. Assim, existe $i_x \in I$ tal que $\| x+i_x \| < \| x+I \| + \frac{\epsilon}{2}$. De modo similar, temos que existe $i_y \in I$ tal que $\| y+i_y \| < \| y+I \| + \frac{\epsilon}{2}$. Logo $\| (x+I)+(y+I) \| = \| (x+y)+I \| = \inf\{\| x+y+i \| : i \in I\} = \inf\{\| x+y+i+i' \| : i, i' \in I\} \leq \| x+y+i_x+i_y \| \leq \| x+i_x \| + \| y+i_y \| < \| x+I \| + \| y+I \| + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que $\| (x+I)+(y+I) \| \leq \| x+I \| + \| y+I \|$. (d). Provaremos que $\| \alpha(x+I) \| = |\alpha| \, \| x+I \|$ para todo $x+I \in A/I$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. (i). Se $\alpha = 0$, é claro que $\| \alpha(x+I) \| = |\alpha| \, \| x+I \| = 0$. (ii). Se $\alpha \neq 0$, $\| \alpha(x+I) \| = \| \alpha x+I \| = \inf\{\| \alpha x+i \| : i \in I\} = \inf\{\| \alpha(x+i/\alpha \| : i \in I\} = \inf\{|\alpha| \, \| x+i/\alpha \| : i \in I\} = |\alpha| \inf\{\| x+i' \| : i' \in I\} = |\alpha| \, \| x+I \|$. Por (a), (b), (c) e (d), resulta que a norma $\|\ .\ \|$ está bem definida. Agora provaremos que A/I é completo em relação à norma. Primeiramente lembramos que uma seqüência de Cauchy é convergente $\Longleftrightarrow$ ela tem uma subseqüência convergente. Seja $(x_n + I)_{n=1}^{+\infty}$ uma seqüência de Cauchy em A/I. Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $n, m \geq n(k)$,

$$\| (x_m + I) - (x_n + I) \| < \frac{1}{2^k}.$$

Podemos tomar $(n_k)_{k=1}^{+\infty}$ estritamente crescente tal que

$$\| (x_{n_k} + I) - (x_{n_{k+1}} + I) \| < \frac{1}{2^k}.$$

Provaremos que $(x_{n_k} + I)_{k=1}^{+\infty}$ é uma subseqüência convergente. Para facilitar a notação, denotamos $x_{n_k} = x_k$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $\| (x_k + I) - (x_{k+1} + I) \| < \frac{1}{2^k}$. Em particular, tomando $k = 1$, temos que $\| (x_1+I)-(x_2+I) \| < \frac{1}{2}$, ou seja, $\inf\{\| (x_1-x_2)+i \| : i \in I\} = \inf\{\| x_1 - x_2 + i - i' \| : i, i' \in I\} = \inf\{\| (x_1 + i) - (x_2 + i') \| : i, i' \in I\} < \frac{1}{2}$. Logo, existe $i_1, i_2 \in I$ tal que $\| (x_1 + i_1) - (x_2 + i_2) \| < \frac{1}{2}$. Denotamos $x_1 + i_1 = y_1$ e $x_2 + i_2 = y_2$. Logo $\| y_1 - y_2 \| < \frac{1}{2}$. De modo similar, temos que $\| y_k - y_{k+1} \| < \frac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora provaremos que $(y_k)_{k=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em A. Dado $\epsilon > 0$, suponhamos $m < n$. Então temos que

$$\begin{aligned}
\| y_m - y_n \| &= \| (y_m - y_{m+1}) + (y_{m+1} - y_{m+2}) + \cdots + (y_{n-1} - y_n) \| \\
&\leq \| y_m - y_{m+1} \| + \| y_{m+1} - y_{m+2} \| + \cdots + \| y_{n-1} - y_n \| \\
&< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{\frac{1}{2^m}(1 - \frac{1}{2^{n-m}})}{1 - \frac{1}{2}} \\
&< \frac{1}{2^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $m - 1 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{1}{2^{m-1}}$. Então, para todos $n, m > m - 1$, temos que $\| y_m - y_n \| < \frac{1}{2^{m-1}} < \epsilon$. Logo $(y_k)_{k=1}^{+\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em A. Como A é completa, temos que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} y_k = y \in A$. Observamos que $\| (x_k + I) - (y + I) \| = \inf\{\| (x_k + i) - (y + i') \| : i, i' \in I\} \leq \| (x_k + i_k) - (y + \mathbf{0}) \| = \| y_k - y \| \longrightarrow 0$. Logo temos que $x_k + I \longrightarrow y + I$. Portanto $(x_k + I)_{k=1}^{+\infty}$ é uma subseqüência convergente. Logo a seqüência de Cauchy original em A/I é convergente, ou seja, A/I é completo em relação à norma dada. Concluímos que $(A/I, \| \,.\, \|)$ é um espaço de Banach. (3). A multiplicação de anel de A/I está relacionada com a norma da seguinte maneira : (i). $\| (x+I)(y+I) \| \leq \| x+I \| \| y+I \|$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\| (x+I)(y+I) \| &= \| xy+I \| \\
&= \inf\{\| xy+i \| : i \in I\} \\
&\leq \inf\{\| (x+i_1)(y+i_2) \| : i_1, i_2 \in I\} \\
&\leq \inf\{\| x+i_1 \| \| y+i_2 \| : i_1, i_2 \in I\} \\
&= [\inf\{\| x+i_1 \| : i_1 \in I\}][\inf\{\| x+i_2 \| : i_2 \in I\}] \\
&= \| x+I \| \| y+I \| .
\end{aligned}$$

(ii). $\| \mathbf{1}+I \| = \inf\{\| \mathbf{1}+i \| : i \in I\} \leq \| \mathbf{1} \| = 1$. Logo $\| \mathbf{1}+I \| \leq 1$. Por outro lado, usando (i) acima, temos que $\| \mathbf{1}+I \| = \| (\mathbf{1}+I)^2 \| \leq \| \mathbf{1}+I \|^2$. Logo $1 \leq \| \mathbf{1}+I \|$. Portanto $\| x+I \| = 1$. Por (1), (2) e (3), concluímos que A/I é uma álgebra de Banach. □

Teorema 2.6.15. *A/R é uma álgebra de Banach semi - simples.*

Demonstração. Como o radical R é um ideal bilateral próprio fechado, pelo teorema anterior, sabemos que A/R é uma álgebra de Banach. Basta provar que A/R é semi - simples. Sabemos que a aplicação $x \longrightarrow x+R$ de A sobre A/R é um homomorfismo sobrejetor. Veremos que M é um ideal esquerdo maximal de $A \Longleftrightarrow \{x+R : x \in M\}$ é um ideal esquerdo maximal de A/R. Primeiramente provaremos que M é um ideal esquerdo maximal de $A \Longrightarrow \{x+R : x \in M\}$ é um ideal esquerdo maximal de A/R. (1). $\{x+R : x \in M\}$ é um ideal esquerdo. Dados $x+R, y+R \in \{x+R : x \in M\}, \alpha \in \mathbb{C}$ e $z+R \in A$, temos que $(x+R)+(y+R) = (x+y)+R \in \{x+R : x \in M\}, \alpha(x+R) = \alpha x \in \{x+R : x \in M\}$, e $(z+R)(x+R) = zx+R$, pois $x, y \in M$ e M é um ideal esquerdo de A. Logo temos que $x+y \in M, \alpha x \in M$ e $zx \in M$. (2). $\{x+R : x \in M\}$ é um ideal próprio. Como M é um ideal próprio, temos que $\mathbf{1} \notin M$. Logo $\mathbf{1}+R \notin \{x+R : x \in M\}$. Então $\{x+R : x \in M\}$ é um ideal próprio. (3). $\{x+R : x \in M\}$ é um ideal esquerdo maximal. Suponhamos por absurdo que $\{x+R : x \in M\}$ não é um ideal esquerdo maximal. Logo existe $J = \{x+R : x \in I\}$: um ideal esquerdo maximal de A/R tal que $\{x+R : x \in M\} \subsetneqq J \subsetneqq A/I$. É imediato que I é um ideal esquerdo próprio que contém M, o que contradiz a maximalidade de M. Agora, por outro lado, provaremos que $\{x+R : x \in M\}$ é um ideal esquerdo maximal de $A/I \Longrightarrow M$ é um ideal esquerdo maximal de A. (1). M é um ideal esquerdo. Dados $x, y \in M, \alpha \in \mathbb{C}$ e $z \in A$, temos que $(x+R)+(y+R) = (x+y)+R \in \{x+R : x \in M\}, \alpha(x+R) = \alpha x+R \in \{x+R : x \in M\}$ e $(z+R)(x+R) = zx+R \in \{x+R : x \in M\}$. Logo $x+y, \alpha x$ e $zx \in M$. (2). M é um ideal próprio. Como $\{x + R : x \in M\}$ é um ideal esquerdo maximal de A/I, temos que $\mathbf{1} + M \notin \{x + R : x \in M\}$. Logo $\mathbf{1} \notin M$. (3).M é um ideal esquerdo maximal. Suponhamos por absurdo que M não é maximal. Então existe I : um ideal esquerdo maximal de A tal que $M \subsetneqq I \subsetneqq A$. Logo é imediato que $\{x + R : x \in I\}$ é um ideal próprio de A/I que contém $\{x + R : x \in M\}$, o que contradiz a maximalidade de $\{x + R : x \in M\}$. Portanto M é um ideal esquerdo maximal de A. Então concluímos que $\{x + R : x \in M\}$ é um ideal esquerdo maximal de $A/I \Longleftrightarrow M$ é um ideal esquerdo maximal de A. Seja $(M_i)_{i\in I}$ a classe de todos os ideais esquerdos maximais de A. Pelo resultado acima, temos que $(\{x + R : x \in M_i\})_{i\in I}$ é a classe de todos os ideais esquerdos maximais de A/I. Provaremos que $\cap_{i\in I}\{x + R : x \in M_i\} = \{\mathbf{0} + R\}$. Como $\cap_{i\in I}\{x + R : x \in M_i\} \supset \{\mathbf{0} + R\}$ é imediato, basta provar que $\cap_{i\in I}\{x+R : x \in M_i\} \subset \{\mathbf{0}+R\}$. Dado $a+R \in \{x+R : x \in M_i\}$ para todo $i \in I$, provaremos que $a + R = \mathbf{0} + R = R$, ou seja, $a \in R$. Como $a + R \in \{x + R : x \in M_i\}$ para todo $i \in I$, $a \in M_i$ para todo $i \in I$, isto é, $a \in \cap_{i\in I}M_i = R$. Portanto resulta que $\cap_{i\in I}\{x + R : x \in M_i\} = \{\mathbf{0} + R\}$ é o ideal zero de A/I, ou seja, A/I é uma álgebra de Banach semi - simples. $\square$

No próximo capítulo, estudaremos álgebras de Banach comutativas, nas quais os ideais são sempre bilaterais e o radical é simplesmente a intersecção de ideais maximais.

Capítulo 3

Álgebras de Banach comutativas

O conjunto $\mathcal{C}^\star(X)$ de todas as funções complexas contínuas e limitadas, definidas em um espaço topológico X, é a álgebra de Banach mais simples entre aquelas de maior interesse para nós. Nosso propósito neste capítulo, é provar o famoso teorema de Gelfand - Neumark, o qual diz que cada álgebra de Banach A de certo tipo é essencialmente idêntica a $\mathcal{C}^\star(X_A)$, onde X_A é um espaço compacto de Hausdorff construído através da estrutura interna de A.

3.1 A aplicação de Gelfand

Seja A uma álgebra de Banach comutativa arbitrária.

Teorema 3.1.1. *Se M é um ideal maximal em A então a álgebra de Banach A/M é uma álgebra de divisão, e portanto é igual a álgebra de Banach $\mathbb{C}$ dos números complexos. O homomorfismo natural $x \longrightarrow x + M$ de A sobre $A/M = \mathbb{C}$ associa cada elemento $x \in A$ um número complexo $x(M)$ definido por $x(M) = x + M$, e a aplicação $x \longrightarrow x(M)$ tem as seguintes propriedades :*
(1). $(x + y)(M) = x(M) + y(M)$;
(2). $(\alpha x)(M) = \alpha x(M)$;
(3). $(xy)(M) = x(M)y(M)$;
(4). $x(M) = 0 \Longleftrightarrow x \in M$;
(5). $\mathbf{1}(M) = 1$;
(6). $|x(M)| \leq\| x \|$.

Demonstração. Como A é comutativa, temos que M é um ideal bilateral próprio fechado. Pelo Teorema 2.6.14, A/M é uma álgebra de Banach. Como M é um ideal maximal, temos que A/M é um corpo. Então A/M é uma álgebra de divisão. Portanto, pelo Teorema 2.4.8, A/M é igual ao conjunto de todos os múltiplos escalares da identidade, ou seja, dado $x + M \in A/M$, onde $x \in A$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x + M = \lambda(\mathbf{1} + M)$; Consequentemente usando o isomorfismo isométrico de A/M sobre $\mathbb{C}$ definido por $x + M = \lambda(\mathbf{1} + M) \longrightarrow \lambda$, temos que $A/M = \mathbb{C}$. Logo identificamos $x+M = \lambda$. Do homomorfismo natural $x \longrightarrow x+M$ de A sobre A/M e do isomorfismo isométrico $x + M = \lambda(\mathbf{1} + M) \longrightarrow \lambda$ de A/M sobre $\mathbb{C}$, resulta que a aplicação $x \longrightarrow x(M)$ de A sobre $\mathbb{C}$ definida por $x(M) = x + M$ tem as seguintes propriedade : (1). $(x + y) + M = (x + M) + (y + M) = x(M) + y(M)$; (2). $(\alpha x)(M) = \alpha x + M = \alpha(x + M) = \alpha x(M)$; (3). $(xy)(M) = xy + M = (x + M)(y + M) = x(M)y(M)$; (4). $x(M) = 0 \Longleftrightarrow x + M = 0(\mathbf{1} + M) = \mathbf{0} + M \Longleftrightarrow x - \mathbf{0} = x \in M$; (5). $\mathbf{1}(M) = \mathbf{1} + M = 1(\mathbf{1} + M)$. Logo $\mathbf{1}(M) = 1$; (6). $|x(M)| =\| x + M \|= \inf\{\| x + m \|: m \in M\} \leq\| x + \mathbf{0} \|=\| x \|$. □

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de todos os ideais maximais de A. Dado $x \in A$, denotamos por $\widehat{x}$ a função definida em $\mathcal{M}$ por $\widehat{x}(M) = x(M)$, e por $\widehat{A} = \{\widehat{x} : x \in A\}$. Munindo $\mathcal{M}$ da topologia fraca gerada por todas as $\widehat{x}$, este espaço topológico $\mathcal{M}$ é dito o espaço dos ideais maximais, e a aplicação $x \longrightarrow \widehat{x}$ de A sobre $\widehat{A}$ é dita a aplicação de Gelfand.

Teorema 3.1.2. *A aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um homomorfismo de norma - decrescente (e portanto é contínua) de A em $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$ com as seguintes propriedades :*
(1). A imagem $\widehat{A}$ de A é uma subálgebra de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$ que separa pontos de $\mathcal{M}$ e contém a identidade de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$.
(2). O radical R de A é igual ao conjunto de todos os elementos x tais que $\widehat{x} = 0$, e portanto $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo $\Longleftrightarrow$ A é semi - simples.
(3). Um elemento x em A é regular $\Longleftrightarrow x \notin M$ para todo $M \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow x(M) \neq 0$ para todo $M \in \mathcal{M}$.
(4). Se x é um elemento de A, então o espectro de x é igual à imagem da função $\widehat{x}$, e o raio espectral de x é igual à norma de $\widehat{x}$, isto é, $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M})$, e $r(x) =\| \widehat{x} \|$.

Demonstração. Denotamos por $g : A \longrightarrow \mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$ a aplicação de Gelfand definida por $g(x) = \widehat{x}$. Pela definição da topologia de $\mathcal{M}$, temos que $\widehat{x}$ é contínua. Além disso, pelo Teorema 3.1.1, item (6), $|\widehat{x}(M)| = |x(M)| \leq\| x \|$ para todo $M \in \mathcal{M}$, implica que $\widehat{x}$ é limitada. Portanto $\widehat{x} \in \mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$, ou seja, a aplicação de Gelfand g está bem definida.

Agora, observamos que (a). $g(x+y) = \widehat{x+y}, g(x) = \widehat{x}$ e $g(y) = \widehat{y}$. Dado $M \in \mathcal{M}$, temos que $\widehat{x+y}(M) = (x+y)(M) = x(M) + y(M) = \widehat{x}(M) + \widehat{y}(M) = (\widehat{x} + \widehat{y})(M)$. Logo $\widehat{x+y} = \widehat{x} + \widehat{y}$, ou seja, $g(x+y) = g(x) + g(y)$. (b). $g(\alpha x) = \widehat{\alpha x}$, e $\alpha g(x) = \alpha \widehat{x}$. Dado $M \in \mathcal{M}$, temos que $\widehat{\alpha x}(M) = (\alpha x)(M) = \alpha x(M) = \alpha \widehat{x}(M)$. Logo $\widehat{\alpha x} = \alpha \widehat{x}$, ou seja, $g(\alpha x) = \alpha g(x)$. (c). $g(xy) = \widehat{xy}, g(x) = \widehat{x}$ e $g(y) = \widehat{y}$. Dado $M \in \mathcal{M}$, temos que $\widehat{xy}(M) = xy(M) = x(M)y(M) = \widehat{x}(M)\widehat{y}(M) = (\widehat{x}\widehat{y})(M)$. Logo $\widehat{xy} = \widehat{x}\widehat{y}$, ou seja, $g(xy) = g(x)g(y)$. (d). Como já vimos que $|\widehat{x}(M)| = |x(M)| \leq \| x \|$ para todo $M \in \mathcal{M}$, temos que $\| g(x) \| = \| \widehat{x} \| = \sup\{|\widehat{x}(M)| : M \in \mathcal{M}\} \leq \| x \|$ para todo $x \in A$. Portanto, já que g é linear, temos que g é contínua. Por (a), (b), (c) e (d), resulta que a aplicação de Gelfand $g : x \longrightarrow \widehat{x}$ é um homomorfismo de norma - decrescente de A em $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$, e tem as seguintes propriedades : (1).(1.a). $\widehat{A}$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. Dados $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{A}$, com $x, y \in A$, e $\alpha \in \mathbb{C}$, provaremos que $\widehat{x} + \widehat{y} \in \widehat{A}, \alpha\widehat{x} \in \widehat{A}$ e $\widehat{x}\widehat{y} \in \widehat{A}$. De fato, isto é imediato, pois já vimos que $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x+y}, \alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ e $\widehat{x}\widehat{y} = \widehat{xy}$; e $x + y \in A, \alpha x \in A$ e $xy \in A$, pois A é uma álgebra. (1.b). $\widehat{A}$ separa pontos de $\mathcal{M}$. Dados $M_1 \neq M_2$, provaremos que existe $x \in A$ tal que $\widehat{x}(M_1) \neq \widehat{x}(M_2)$. Como $M_1 \neq M_2$, então existe $x \in A$ tal que $x \in M_1$, mas $x \notin M_2$. Logo, pelo Teorema 3.1.1, item (4), temos que $0 = \widehat{x}(M_1) \neq \widehat{x}(M_2) \neq 0$. (1.c). $\widehat{A}$ contém a identidade de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. Provaremos que existe $x \in A$ tal que $\widehat{x}(M) = 1$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Pelo Teorema 3.1.1, item (5), temos que $\widehat{\mathbf{1}}(M) = \mathbf{1}(M) = 1$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Logo, $\widehat{\mathbf{1}} \in \widehat{A}$ é a identidade de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. (2). O radical $R = \{x \in A : \widehat{x} = 0\}$, e $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo $\Longleftrightarrow$ A é semi - simples. (2.a). $R = \{x \in A : \widehat{x} = 0\}$. De fato, $x \in A, \widehat{x} = 0 \Longleftrightarrow \widehat{x}(M) = 0$ para todo $M \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow x(M) = 0$ para todo $M \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow x \in M$ para todo $M \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow x \in \cap_{M \in \mathcal{M}} M = R$. (2.b). $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo $\Longleftrightarrow$ A é semi - simples. Primeiramente provaremos que $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo $\Longrightarrow$ A é semi - simples. Sabemos que $\widehat{\mathbf{0}} = 0$, pois, para todo $M \in \mathcal{M}, \mathbf{0} \in M$, e portanto $\mathbf{0}(M) = \widehat{\mathbf{0}}(M) = 0$. Por hipótese, $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo. Logo $x \longrightarrow \widehat{x}$ é injetora. Então, $\widehat{x} = \widehat{\mathbf{0}} \Longrightarrow x = \mathbf{0}$, resulta que $\mathbf{0}$ é o único elemento que está no conjunto $\{x \in A, \widehat{x} = 0\} = R$. Logo $R = \{\mathbf{0}\}$: o ideal zero. Obtemos que A é semi - simples. Agora, provaremos que A é semi - simples $\Longrightarrow x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo. Por hipótese, temos que $R = \{\mathbf{0}\}$. Como já sabemos que $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um homomorfismo, basta provar que $x \longrightarrow \widehat{x}$ é injetora. Observamos que $\widehat{x} = \widehat{y} \Longrightarrow \widehat{x} - \widehat{y} = 0 \Longrightarrow \widehat{x-y} = 0 \Longrightarrow x - y \in \{x \in A : \widehat{x} = 0\} = R = \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow x - y = \mathbf{0} \Longrightarrow x = y$. Logo $x \longrightarrow \widehat{x}$ é injetora. (3).$x \in A$ é regular $\Longleftrightarrow x \notin M$ para todo $M \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \widehat{x}(M) \neq 0$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Primeiramente provaremos que $x \notin M$ para todo $M \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \widehat{x}(M) \neq 0$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Isto é imediato, pois, pelo

Teorema 3.1.1, item (4), temos que $\widehat{x}(M) = x(M) = 0 \Longleftrightarrow x \in M$. Agora, provaremos que $x \in A$ é regular $\Longleftrightarrow x \notin M$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Primeiramente provaremos que $x \in A$ é regular $\Longrightarrow x \notin M$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Como $x \in A$ é regular, existe $y \in A$ tal que $xy = \mathbf{1}$. É imediato que $x \notin M$ para todo $M \in \mathcal{M}$, pois $\mathbf{1} \notin M$. Agora provaremos que $x \notin M$ para todo $M \in \mathcal{M} \Longrightarrow x$ é regular. Basta provar que x é singular $\Longrightarrow$ existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $x \in M$. Afirmamos que $Ax = \{yx : y \in A\}$ é um ideal próprio que contém x, pois dados $y_1, y_2 \in A, \alpha \in \mathbb{C}$ e $z \in A$, temos que $y_1x + y_2x = (y_1 + y_2)x \in Ax; \alpha(y_1)x = (\alpha y_1)x \in Ax, z(y_1x) = (zy_1)x \in Ax, \mathbf{1}x = x \in Ax$ e $\mathbf{1} \notin Ax$, pois x é singular. Logo existe M : um ideal maximal de A tal que $x \in Ax \subset M$. (4). Se $x \in A$, então $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M})$, e $r(x) = \| \widehat{x} \|$. (4.a). Se $x \in A$, então $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M})$. De fato, $\lambda \in \sigma(x) \Longleftrightarrow x - \lambda\mathbf{1}$ é singular $\Longleftrightarrow$ existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $x - \lambda\mathbf{1} \in M \Longleftrightarrow (x - \lambda\mathbf{1})(M) = \widehat{x - \lambda\mathbf{1}}(M) = 0 \Longleftrightarrow (\widehat{x} - \lambda\widehat{\mathbf{1}})(M) = \widehat{x}(M) - \lambda\widehat{\mathbf{1}}(M) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \widehat{x}(M) \Longleftrightarrow \lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M})$. (4.b). Se $x \in A$, então $r(x) = \| \widehat{x} \|$. Pela definição, temos que $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. Como já vimos que $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M})$, temos que $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \sup\{|\widehat{x}(M)| : M \in \mathcal{M}\} = \| \widehat{x} \|$. $\square$

Definição 3.1.3. *Um funcional multiplicativo em A é um funcional não nulo que pertence ao conjunto A' dos funcionais em A e satisfaz a condição adicional $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in A$.*

Observação 3.1.4. *Se $M \in \mathcal{M}$ então $f_M : A \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $f_M(x) = x(M)$ é um funcional multiplicativo.*

Demonstração. (a). f_M é linear. Dados $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $f_M(x + y) = (x + y)(M) = x(M) + y(M) = f_M(x) + f_M(y)$ e $f_M(\alpha x) = (\alpha x)(M) = \alpha x(M) = \alpha f_M(x)$. (b). f_M é contínua. De fato, pelo Teorema 3.1.1, item (6), temos que $|f_M(x) - f_M(y)| = |x(M) - y(M)| = |(x - y)(M)| \leq \| x - y \|$. (c). $f_M(xy) = f_M(x)f_M(y)$. De fato, $f_M(xy) = xy(M) = x(M)y(M) = f_M(x)f_M(y)$. (d). f_M não é funcional nulo. Como $M \in \mathcal{M}$ é um ideal próprio, existe $x \in A \backslash M$. Logo, pelo Teorema 3.1.1, item (4), temos que $f_M(x) = x(M) \neq 0$. Por (a), (b), (c) e (d), concluímos que f_M é um funcional multiplicativo. $\square$

Lema 3.1.5. *Se f_1 e f_2 são funcionais multiplicativos em A que têm o mesmo núcleo M, então $f_1 = f_2$.*

Demonstração. Provaremos que $f_1 = \alpha f_2$, e depois $\alpha = 1$. Como $M \subsetneqq A$, pois f_1 e f_2 não são nulos, existe $x_\circ \in A \backslash M$. Logo $f_2(x_\circ) \neq 0$. Dado $x \in A$. Se $\beta = \frac{f_2(x)}{f_2(x_\circ)}$, temos que

$f_2(x-\beta x_\circ)=0$. Logo $x-\beta x_\circ \in M$. Então existe $m\in M$ tal que $x=\beta x_\circ+m$. Observamos que $f_1(x)=f_1(\beta x_\circ+m)=\beta f_1(x_\circ)+f_1(m)=\beta f_1(x_\circ)+0=\beta f_1(x_\circ)=\frac{f_2(x)}{f_2(x_\circ)}f_1(x_\circ)=\frac{f_1(x_\circ)}{f_2(x_\circ)}f_2(x)$. Logo, $f_1=\alpha f_2$, com $\alpha=\frac{f_1(x_\circ)}{f_2(x_\circ)}$. Agora, provaremos que $\alpha=1$. Se $x\in A\backslash M$, temos que $\alpha[f_2(x)]^2=\alpha f_2(x^2)=f_1(x^2)=[f_1(x)]^2=[\alpha f_2(x)]^2=\alpha^2[f_2(x)]^2$. Logo $\alpha=\alpha^2$. Então $\alpha(\alpha-1)=0$. Obtemos que $\alpha=0$ ou $\alpha=1$. Como $f_1=\alpha f_2$ não é um funcional nulo, segue que $\alpha=1$. □

Teorema 3.1.6. *$M\longrightarrow f_M$ é uma aplicação bijetora do conjunto de todos os ideais maximais de $\mathcal{M}$ sobre o conjunto de todos os funcionais multiplicativos.*

Demonstração. (i). Provaremos que a aplicação $M\longrightarrow f_M$ é injetora. Sejam $M_1\neq M_2$. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $x\in M_1$, mas $x\notin M_2$. Pelo Teorema 3.1.1, item (4), temos que $x(M_1)=0$ e $x(M_2)\neq 0$. Logo $f_{M_1}(x)=x(M_1)\neq x(M_2)=f_{M_2}(x)$. Então $f_{M_1}\neq f_{M_2}$. (ii). Provaremos agora que a aplicação é sobrejetora. Dado $f\in A'$, seja $M=\{x\in A: f(x)=0\}$ o núcleo de f. Afirmamos que M é um ideal maximal em A. De fato, (a).M é um ideal. Dados $x,y\in M,\alpha\in\mathbb{C}$, e $z\in A$, temos que $f(x+y)=f(x)+f(y)=0+0=0; f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha\cdot 0=0$; e $f(zx)=f(z)f(x)=f(z)0=0$. Logo $x+y,\alpha x, zx\in M$. (b). M é um ideal próprio. De fato, como f não é funcional nulo, existe $x\in A\backslash M$ tal que $f(x)\neq 0$. Logo $M\neq A$. (c). M é um ideal maximal. Suponhamos, por absurdo, que M não é um ideal maximal. Então existe I : um ideal maximal em A tal que $M\underset{\neq}{\subsetneq} I\underset{\neq}{\subsetneq} A$. Logo $f(I)$ é um ideal não trivial em $\mathbb{C}$. (c_1). $f(I)$ é um ideal. Dados $f(x),f(y)\in f(I)$, com $x,y\in I$, e $\beta\in\mathbb{C}$, temos que $f(x)+f(y)=f(x+y)\in f(I)$, pois $x+y\in I$, e $\beta f(x)=f(\beta x)\in f(I)$, pois $\beta x\in I$. (c_2). $f(I)\neq\{\mathbf{0}\}$, pois se $f(I)=\{\mathbf{0}\}$, então $I=M$ é uma contradição. (c_3). $f(I)\neq\mathbb{C}$. Como I é um ideal próprio, existe $x\in A\backslash I$. Afirmamos que $f(x)\notin f(I)$. Suponhamos, por absurdo, que $f(x)\in f(I)$. Logo $f(x)=f(y)$ para algum $y\in I$. Então $f(x-y)=0$. Logo $x-y\in M$, e temos que $x=(x-y)+y\in I$, o que é absurdo! Portanto, $f(I)$ é um ideal não trivial em $\mathbb{C}$. Lembramos que se R é um anel comutativo com identidade, então R é um corpo $\Longleftrightarrow$ R não tem ideal não trivial. Logo temos que $\mathbb{C}$ não é um corpo, absurdo! Portanto M é um ideal maximal em A, ou seja, $M\in\mathcal{M}$. Assim, pela Observação 3.1.4, temos que f_M é um funcional multiplicativo. Observamos que f_M e f têm o mesmo núcleo, ou seja, $\{x\in A: f_M(x)=0\}=M$, pois, pelo Teorema 3.1.1, item (4), temos que $f_M(x)=x(M)=0\Longleftrightarrow x\in M$. Resulta que f e f_M são funcionais multiplicativos que têm o mesmo núcleo. Pelo lema anterior, temos que $f_M=f$.
□

Observação 3.1.7. $\| f_M \| = 1$, *para todo* $M \in \mathcal{M}$.

Demonstração. De fato, $|f_M(x)| = |x(M)| \leq \| x \|$ para todo $x \in A$. Logo, $\| f_M \| \leq 1$. Por outro lado, $|f_M(x)| \leq \| f_M \| \| x \|$ para todo $x \in A$. Em particular, tomando $x = \mathbf{1}$, temos que $1 = |\mathbf{1}(M)| = |f_M(\mathbf{1})| \leq \| f_M \| \| \mathbf{1} \| = \| f_M \|$. Logo $1 \leq \| f_M \|$. □

Como a aplicação $M \longrightarrow f_M$ é bijetora, podemos identificar o conjunto $\mathcal{M}$ com o conjunto de todos os funcionais multiplicativos, ou seja, $M = f_M$. Logo, podemos considerar $\mathcal{M}$ como um subconjunto de A', ou seja, $\mathcal{M} = \{f \in A' : f$ é um funcional multiplicativo$\} = \{f_M \in A' : M \in \mathcal{M}\}$.

Lembramos que $S^\star = \{f \in A' : \| f \| \leq 1\}$, a bola fechada unitária de A', é um espaço compacto de Hausdorff com respeito à topologia fraca estrela, ou seja, a topologia mais fraca tal que cada F_x, com $x \in A$, é contínuo, onde o funcional $F_x : S^\star \longrightarrow \mathbb{C}$, é definido por $F_x(f) = f(x)$. Como $\| f_M \| = 1$, para todo $f_M \in \mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M}$ é subconjunto de $S^\star$.

Observação 3.1.8. *A topologia induzida em* $\mathcal{M}$ *pela topologia fraca estrela em* $S^\star$ *coincide com a topologia fraca gerada por todas as* $\widehat{x}$, *com* $x \in A$.

Demonstração. Primeiramente lembramos que, dado X, um conjunto munido da topologia fraca gerada por uma família de funções $f_i : X \longrightarrow X_i (i \in I)$, e dado $Y \subset X$, então a topologia induzida em Y coincide com a topologia fraca gerada pela família das restrições $f_i|_Y : Y \longrightarrow X_i (i \in I)$. Como em $S^\star$ colocamos a topologia fraca gerada por todos os funcionais $F_x : S^\star \longrightarrow \mathbb{C}$, basta provar que $F_x|_\mathcal{M} = \widehat{x}$. De fato, dado $f_M \in \mathcal{M}$,

$$F_x|_\mathcal{M}(f_M) = f_M(x) = x(M) = \widehat{x}(M).$$

Como já identificamos $M = f_M$, obtemos que $F_x|_\mathcal{M} = \widehat{x}$. □

Portanto, podemos considerar que o espaço topológico $\mathcal{M}$ munido da topologia fraca gerada por todas as $\widehat{x}$ é também um subespaço topológico de $S^\star$, o qual é um espaço compacto de Hausdorff. Logo temos que $\mathcal{M}$ é um espaço de Hausdorff.

Teorema 3.1.9. *O espaço dos ideais maximais* $\mathcal{M}$ *é um espaço compacto de Hausdorff.*

Demonstração. Como já vimos que $\mathcal{M}$ é um espaço de Hausdorff, basta provar que $\mathcal{M}$ é um subconjunto fechado de $S^\star$. Seja X o subespaço de $S^\star$ definido por

$$X = \cap_{x,y \in A}\{f : f \in S^\star \text{ e } f(xy) - f(x)f(y) = 0\}.$$

É imediato que $X = \mathcal{M} \cup \{f_\circ\}$, onde $f_\circ$ é o funcional nulo. Observamos que

$$\begin{aligned} X &= \cap_{x,y\in A}\{f : f \in S^\star \text{ e } f(xy) - f(x)f(y) = 0\} \\ &= \cap_{x,y\in A}\{f : f \in S^\star \text{ e } F_{xy}(f) - F_x(f)F_y(f) = 0\} \\ &= \cap_{x,y\in A}\{f : f \in S^\star \text{ e } (F_{xy} - F_xF_y)(f) = 0\} \\ &= \cap_{x,y\in A}(F_{xy} - F_xF_y)^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

Como $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{C}$ e $F_{xy} - F_xF_y$ é contínua em $S^\star$, temos que X é fechado em $S^\star$. Sabemos que $F_{\mathbf{1}}$ é contínua em $X = \mathcal{M} \cup \{f_\circ\}$. Observamos que $F_{\mathbf{1}}(f_M) = f_M(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(M) = 1$ para todo $f_M \in \mathcal{M}$, e $F_{\mathbf{1}}(f_\circ) = f_\circ(\mathbf{1}) = 0$. Logo, como $\{1\}$ é fechado em $\mathbb{C}$, temos que $\mathcal{M} = F_{\mathbf{1}}^{-1}(\{1\})$ é fechado em X. Então $\mathcal{M} = X \cap F$, onde F é um subconjunto fechado em $S^\star$. Como já vimos que X é fechado em $S^\star$, temos que $\mathcal{M}$ é fechado em $S^\star$. Como $S^\star$ é um espaço compacto, temos que $\mathcal{M}$ é um espaço compacto. Portanto resulta que $\mathcal{M}$ é um espaço compacto de Hausdorff. $\square$

O resultado dos Teoremas 3.1.2 e 3.1.9 constitui o teorema chamado de *representação de Gelfand*. Essencialmente, este teorema nos diz que cada álgebra de Banach comutativa semi - simples é isomorfa à uma álgebra de funções complexas contínuas em um espaço compacto de Hausdorff adequado. Em geral, a aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ não preserva as normas, e além disso, $\widehat{A} \neq \mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. Na próxima seção, removeremos estas deficiências.

3.2 Aplicação da fórmula do raio espectral

Continuamos nosso estudo de uma álgebra de Banach comutativa arbitrária A, e da aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ de A sobre a subálgebra $\widehat{A}$ de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. O primeiro teorema nesta seção nos oferece uma maneira simples de preservar as normas.

Teorema 3.2.1. *As seguintes condições são equivalentes :*
(1). $\| x^2 \| = \| x \|^2$ *para todo* $x \in A$.
(2). $r(x) = \| x \|$ *para todo* $x \in A$.
(3). $\| \widehat{x} \| = \| x \|$ *para todo* $x \in A$.

Demonstração. Provaremos que (1) $\Longrightarrow$ (2). Dado $x \in A$ afirmamos que $\| x^{2^k} \| = \| x \|^{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por indução, (i). Quando $k = 1$, por (1), temos que $\| x^2 \| = \| x \|^2$. (ii). Suponhamos que, para $k = n$, $\| x^{2^n} \| = \| x \|^{2^n}$. Provaremos que $\| x^{2^{n+1}} \| = \| x \|^{2^{n+1}}$.

De fato $\| x^{2^{n+1}} \| = \| x^{2\cdot 2^n} \| = \| (x^2)^{2^n} \| = \| x^2 \|^{2^n} = [(\| x \|)^2]^{2^n} = \| x \|^{2^{n+1}}$. Lembrando a fórmula do raio espectral $r(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$ e usando o resultado acima, temos que

$$r(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \| x^{2^n} \|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (\| x \|^{2^n})^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \| x \| = \| x \| .$$

A seguir, provaremos que (2) $\Longrightarrow$ (1). Pela Observação 2.5.2, temos que $r(x)^n = r(x^n)$. Em particular, tomando $n = 2$, temos que $r(x)^2 = r(x^2)$. Por (2), resulta que $\| x \|^2 = r(x)^2 = r(x^2) = \| x^2 \|$. Agora provaremos que (2) $\Longrightarrow$ (3). Pelo Teorema 3.1.2, temos que $\| \widehat{x} \| = r(x)$. Por (2), temos que $r(x) = \| x \|$. Logo $\| \widehat{x} \| = \| x \|$. Agora, falta provar (3) $\Longrightarrow$ (2). Pelo Teorema 3.1.2, temos que $\| \widehat{x} \| = r(x)$. Por (3), temos que $\| \widehat{x} \| = \| x \|$. Logo $r(x) = \| x \|$. $\square$

Agora, elaboraremos uma maneira para garantir que o fecho de $\widehat{A}$ é igual a $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$, ou seja, $\overline{\widehat{A}} = \mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$.

Definição 3.2.2. *A é dita auto - adjunta se, para cada $x \in A$, existe $y \in A$ tal que $\widehat{y}(M) = \overline{\widehat{x}(M)}$, para todo $M \in \mathcal{M}$, onde $\overline{\widehat{x}(M)}$ é a função conjugada de $\widehat{x}(M)$.*

Teorema 3.2.3. *Se A é auto - adjunta, então $\widehat{A}$ é denso em $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$.*

Demonstração. Como $\mathcal{M}$ é um espaço compacto de Hausdorff, pelo Teorema 1.2.5 (o teorema de Stone - Weierstrass complexo), basta provar que (1). $\overline{\widehat{A}}$ é uma subálgebra (claramente fechada) de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$; (2). $\overline{\widehat{A}}$ separa pontos de $\mathcal{M}$ e contém uma função constante não nula; (3). $\overline{\widehat{A}}$ contém a função conjugada de cada um de seus membros. Primeiramente provaremos (1). Sejam $f, g \in \overline{\widehat{A}}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Observamos que (i). como $f, g \in \overline{\widehat{A}}$, existem $(\widehat{x_n})_{n=1}^{+\infty}, (\widehat{y_n})_{n=1}^{+\infty} \subset \widehat{A}$, com $x_n, y_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $\widehat{x_n} \longrightarrow f$ e $\widehat{y_n} \longrightarrow g$. Logo $\widehat{x_n} + \widehat{y_n} \longrightarrow f + g$, pois $\| (f+g) - (\widehat{x_n} + \widehat{y_n}) \| = (\| (f - \widehat{x_n}) + (g - \widehat{y_n}) \| \leq \| f - \widehat{x_n} \| + \| g - \widehat{y_n} \| \longrightarrow 0$. Como já vimos que $\widehat{x_n} + \widehat{y_n} = \widehat{x_n + y_n} \in \widehat{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que existe $(\widehat{x_n + y_n})_{n=1}^{+\infty} \subset \widehat{A}$ tal que $(\widehat{x_n + y_n}) \longrightarrow f + g$. Logo $f + g \in \overline{\widehat{A}}$. (ii). $\alpha\widehat{x_n} \longrightarrow \alpha f$, pois $\| \alpha f - \alpha\widehat{x_n} \| = |\alpha| \| f - \widehat{x_n} \| \longrightarrow 0$. Como já vimos que $\alpha\widehat{x_n} = \widehat{\alpha x_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que existe $(\widehat{\alpha x_n})_{n=1}^{+\infty} \subset \widehat{A}$ tal que $\widehat{\alpha x_n} \longrightarrow \alpha f$. Logo $\alpha f \in \overline{\widehat{A}}$. (iii). $\widehat{x_n}\widehat{y_n} \longrightarrow fg$, pois $\| fg - \widehat{x_n}\widehat{y_n} \| = \| f(g - \widehat{y_n}) + (f - \widehat{x_n})\widehat{y_n} \| \leq \| f \| \| g - \widehat{y_n} \| + \| f - \widehat{x_n} \| \| \widehat{y_n} \| \longrightarrow 0$, pois $(\| \widehat{y_n} \|)_{n=1}^{+\infty}$ é limitada. Como já vimos que $\widehat{x_n}\widehat{y_n} = \widehat{x_n y_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que existe $(\widehat{x_n y_n})_{n=1}^{+\infty} \subset \widehat{A}$ tal que $\widehat{x_n y_n} \longrightarrow fg$. Logo $fg \in \overline{\widehat{A}}$. Por (i), (ii), e (iii), resulta que $\overline{\widehat{A}}$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. (2). é imediato pois, pelo Teorema 3.1.2, temos que $\widehat{A} \subset \overline{\widehat{A}}$ separa pontos de $\mathcal{M}$ e contém a identidade de $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$, que é claramente uma função constante não nula. Agora provaremos (3). Seja $f \in \overline{\widehat{A}}$. Existe $(\widehat{x_n})_{n=1}^{+\infty} \subset \widehat{A}$, com $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\widehat{x_n} \longrightarrow f$. Logo $\overline{\widehat{x_n}} \longrightarrow \overline{f}$, pois $\| \overline{f} - \overline{\widehat{x_n}} \| = \sup\{|(\overline{f} - \overline{\widehat{x_n}})(M)| : M \in \mathcal{M}\} = \sup\{|\overline{f}(M) - \overline{\widehat{x_n}}(M)| : M \in \mathcal{M}\} = \sup\{|\overline{f(M)} - \overline{\widehat{x_n}(M)}| : M \in \mathcal{M}\} = \sup\{|\overline{f(M) - \widehat{x_n}(M)}| : M \in \mathcal{M}\} = \sup\{|f(M) - \widehat{x_n}(M)| : M \in \mathcal{M}\} = \| f - \widehat{x_n} \| \longrightarrow 0$. Como, por hipótese, A é auto - adjunta, para cada $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in A$ tal que $\widehat{y_n}(M) = \overline{\widehat{x_n}(M)} = \overline{\widehat{x_n}}(M)$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Portanto resulta que $\widehat{y_n} \in \widehat{A}$ e $\widehat{y_n} = \overline{\widehat{x_n}} \longrightarrow \overline{f}$. Logo $\overline{f} \in \overline{\widehat{A}}$. $\square$

Com os resultados obtidos no dois teoremas acima, temos que

Teorema 3.2.4. *Se A é auto - adjunta e $\| x^2 \| = \| x \|^2$, para todo $x \in A$, então a aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo isométrico de A sobre $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$.*

Demonstração. (a). A aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ é isométrica. Por hipótese, temos que $\| x^2 \| = \| x \|^2$ para todo $x \in A$. Logo, pelo Teorema 3.2.1, temos que $\| \widehat{x} \| = \| x \|$ para todo $x \in A$. (b). A aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ é isomorfismo. Pelo Teorema 3.1.2, temos que $x \longrightarrow \widehat{x}$ é isomorfismo $\Longleftrightarrow$ A é semi - simples, ou seja, $R = \{\mathbf{0}\}$. Suponhamos, por absurdo, que existe $x \in R$ e $x \neq \mathbf{0}$. Logo $\| x \| > 0$. Mas, $\| x \| = \| \widehat{x} \| = \sup\{|\widehat{x}(M)| : M \in \mathcal{M}\} = \sup\{|x(M)| : M \in \mathcal{M}\} = 0$, pois $x \in R = \cap_{M \in \mathcal{M}} M$ e $x \in M \Longleftrightarrow x(M) = 0$. O que é uma contradição. (c). A aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ é sobrejetora, ou seja, $\widehat{A} = \mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. Pelo Teorema 3.2.3, temos que $\overline{\widehat{A}} = \mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. Basta provar que $\widehat{A}$ é fechado em $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$, isto é $\overline{\widehat{A}} = \widehat{A}$. Dado $f \in \overline{\widehat{A}}$, existe uma seqüência $(\widehat{x_n})_{n=1}^{+\infty} \subset \widehat{A}$, com $x_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\widehat{x_n} \longrightarrow f$. Primeiramente provaremos que existe $x \in A$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como $(\widehat{x_n})_{n=1}^{+\infty} \subset \widehat{A}$, com $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é uma seqüência convergente, logo é de Cauchy. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n(\epsilon)$, $\| \widehat{x_n} - \widehat{x_m} \| < \epsilon$. Logo $\| \widehat{x_n} - \widehat{x_m} \| = \| \widehat{x_n - x_m} \| = \| x_n - x_m \| < \epsilon$. Assim, obtemos que $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset A$ é uma seqüência de Cauchy. Como A é completo, temos que existe $x \in A$ tal que $x_n \longrightarrow x$. A seguir provaremos que $f = \widehat{x}$. De fato, $\| f - \widehat{x} \| = \| f - \widehat{x_n} + \widehat{x_n} - \widehat{x} \| \leq \| f - \widehat{x_n} \| + \| \widehat{x_n} - \widehat{x} \| = \| f - \widehat{x_n} \| + \| \widehat{x_n - x} \| = \| f - \widehat{x_n} \| + \| x_n - x \| \longrightarrow 0$. Resulta que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \| f - \widehat{x} \| = 0$. Logo, $\| f - \widehat{x} \| = 0$, ou seja, $f = \widehat{x}$. Portanto $f \in \widehat{A}$. Por (a), (b) e (c), concluímos que a aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um isomorfismo isométrico de A sobre $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. $\square$

Neste teorema a simplicidade da álgebra de Banach comutativa A não provem da sua estrutura interna. Na próxima seção consertaremos esta insatisfação e, ao mesmo tempo, elaboraremos uma conexão íntima com álgebras de operadores, às quais o resultado final deste capítulo será aplicado.

3.3 Involuções em álgebras de Banach

Uma álgebra de Banach A é chamada de $^\star-$ álgebra de Banach se ela tem uma involução, isto é, se existe uma aplicação $x \longrightarrow x^\star$ de A em A com as seguintes propriedades:

(1). $(x+y)^\star = x^\star + y^\star$;

(2). $(\alpha x)^\star = \overline{\alpha} x^\star$;

(3). $(xy)^\star = y^\star x^\star$;

(4). $x^{\star\star} = x$.

Observação 3.3.1. *A involução $x \longrightarrow x^\star$ é bijetora, $\mathbf{0}^\star = \mathbf{0}$ e $\mathbf{1}^\star = \mathbf{1}$.*

Demonstração. (a). A involução $x \longrightarrow x^\star$ é bijetora. (a_1). A involução $x \longrightarrow x^\star$ é injetora. Se $x \neq y$, provaremos que $x^\star \neq y^\star$. Suponhamos por absurdo que existe $x, y \in A$ tais que $x \neq y$ e $x^\star = y^\star$. Logo $x^{\star\star} = y^{\star\star}$. Pela propriedade da involução, item (4), temos que $x = y$, o que é uma contradição. (a_2). A involução $x \longrightarrow x^\star$ é sobrejetora. De fato, dado $x \in A$, existe $x^\star \in A$ tal que $(x^\star)^\star = x^{\star\star} = x$. (b). $\mathbf{0}^\star = \mathbf{0}$ e $\mathbf{1}^\star = \mathbf{1}$. De fato, $\mathbf{0}+x^\star = x^\star = (\mathbf{0}+x)^\star = \mathbf{0}^\star + x^\star$. Logo $\mathbf{0}^\star = \mathbf{0}$. Por outro lado, $\mathbf{1}^\star = \mathbf{1}\mathbf{1}^\star = \mathbf{1}^{\star\star}\mathbf{1}^\star = (\mathbf{1}\mathbf{1}^\star)^\star = (\mathbf{1}^\star)^\star = \mathbf{1}^{\star\star} = \mathbf{1}$. Logo $\mathbf{1}^\star = \mathbf{1}$. $\square$

Definição 3.3.2. *Seja A uma $^\star-$ álgebra de Banach*

(1). O elemento $x^\star$ é chamado de adjunto de x.

(2). Uma subálgebra B de A é dita auto - adjunta se $x^\star \in B$, para cada $x \in B$.

(3). Se A' é também uma $^\star-$ álgebra de Banach e f é um isomorfismo de A sobre A', então f é chamado de $^\star-$ isomorfismo se ele conserva a involução, isto é, $f(x^\star) = f(x)^\star$.

Naturalmente, queremos que a involução em uma $^\star-$ álgebra de Banach esteja relacionada com a norma. Se vale a propriedade $\| x^\star \| = \| x \|$, para cada $x \in A$, então a involução é contínua. De fato, se $x_n \longrightarrow x$, então

$$\| x_n^\star - x^\star \| = \| (x_n - x)^\star \| = \| x_n - x \|,$$

e dai segue que $x_n^\star \longrightarrow x^\star$.

Definição 3.3.3. *Uma $^\star-$ álgebra de Banach que tem a propriedade $\| x^\star x \| = \| x \|^2$ é chamada de $B^\star-$ álgebra.*

Observação 3.3.4. *Se A é uma $B^\star-$ álgebra, então $\| x \| = \| x^\star \|$ e $\| x^\star x \| = \| x^\star \| \| x \|$, para todo $x \in A$.*

Dado $x \in A$, temos que $\| x^2 \| = \| x^\star x \| \leq \| x^\star \| \| x \|$. Logo $\| x \| \leq \| x^\star \|$, para todo $x \in A$. Em particular, tomando $x^\star \in A$, temos que $\| x^\star \| \leq \| x^{\star\star} \| = \| x \|$. Portanto $\| x \| = \| x^\star \|$ e, por conseguinte, temos que $\| x^\star x \| = \| x \|^2 = \| x \| \| x \| = \| x^\star \| \| x \|$.

Algumas álgebras de Banach descritas na seção 2.1 são também $^\star-$ álgebras de Banach com respeito às involuções naturais.

Exemplo 3.3.5. *Se X é um espaço topológico então $\mathcal{C}^\star(X)$ é uma $B^\star-$ álgebra comutativa com a involução definida por $f^\star(x) = \overline{f(x)}$.*

(1). $\mathcal{C}^\star(X)$ é comutativa, ou seja, $fg = gf$ para todo $f, g \in \mathcal{C}^\star(X)$. Dado $x \in X$, temos que

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x).$$

Logo $\mathcal{C}^\star(X)$ é comutativa. (2). $f \longrightarrow f^\star$ é uma involução. Dado $x \in X$, temos que

$$(f+g)^\star(x) = \overline{(f+g)(x)} = \overline{f(x)+g(x)} = \overline{f(x)} + \overline{g(x)} = f^\star(x) + g^\star(x) = (f^\star + g^\star)(x).$$

Logo $(f+g)^\star = f^\star + g^\star$. Analogamente, dado $x \in X$, temos que

$$(\alpha f)^\star(x) = \overline{(\alpha f)(x)} = \overline{\alpha f(x)} = \overline{\alpha}\,\overline{f(x)} = \overline{\alpha} f^\star(x) = (\overline{\alpha} f^\star)(x).$$

Logo $(\alpha f)^\star = \overline{\alpha} f^\star$. Dado $x \in X$, temos que

$$(fg)^\star(x) = \overline{(fg)(x)} = \overline{f(x)g(x)} = \overline{f(x)}\ \overline{g(x)} = f^\star(x)g^\star(x) = g^\star(x)f^\star(x) = (g^\star f^\star)(x).$$

Logo $(fg)^\star = g^\star f^\star$. Dado $x \in X$, temos que

$$f^{\star\star}(x) = \overline{f^\star(x)} = \overline{\overline{f(x)}} = f(x).$$

Logo $f^{\star\star} = f$. (3). $\| f \|^2 = \| f^\star f \|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\| f^\star f \| &= \sup\{|(f^\star f)(x)| : x \in X\} \\
&= \sup\{|f^\star(x) f(x)| : x \in X\} \\
&= \sup\{|\overline{f(x)} f(x)| : x \in X\} \\
&= \sup\{|f(x)|^2 : x \in X\} \\
&= (\sup\{|f(x)| : x \in X\})^2 \\
&= \| f \|^2 .
\end{aligned}$$

Por (1), (2) e (3), temos que $\mathcal{C}^\star(X)$ é uma $B^\star-$ álgebra comutativa.

Observação 3.3.6. *A álgebra do disco, com a aplicação definida por* $f^\star(z) = \overline{f(z)}$*, não é uma* $^\star-$ *álgebra de Banach. Seja* f *definida por* $f(z) = z$ *que pertence à álgebra do disco. Pela demonstrção do exemplo 1.2.4, sabemos que* $f^\star(z) = \overline{f(z)} = \overline{z}$ *não é analítica em* $\mathring{D}$ *e portanto não pertence à álgebra do disco.*

Exemplo 3.3.7. *Se* H *é um espaço de Hilbert não trivial então* $\mathcal{B}(H)$ *é uma* $B^\star-$ *álgebra. A operação de adjuntos* $T \longrightarrow T^\star$ *serve como involução.*

Provamos que a operação de adjuntos $T \longrightarrow T^\star$ é uma involução e $\| T^\star T \| = \| T \|^2$. (1). $T \longrightarrow T^\star$ é uma involução. (1_a). $(T_1 + T_2)^\star = T_1^\star + T_2^\star$. Sabemos que $(Tx, y) = (x, T^\star y)$ para todo $x, y \in H$. Então temos que

$$\begin{aligned}
(x, (T_1 + T_2)^\star y) &= ((T_1 + T_2)x, y) \\
&= (T_1 x + T_2 x, y) \\
&= (T_1 x, y) + (T_2 x, y) \\
&= (x, T_1^\star y) + (x, T_2^\star y) \\
&= (x, T_1^\star y + T_2^\star y) \\
&= (x, (T_1^\star + T_2^\star) y).
\end{aligned}$$

Assim, para cada $y \in H$, temos que $(x, (T_1 + T_2)^\star y - (T_1^\star + T_2^\star) y) = 0$ para todo $x \in H$. Como 0 é o único elemento que é ortogonal a todos os elementos, temos que $(T_1 + T_2)^\star y = (T_1^\star + T_2^\star) y$ para todo $y \in H$. Logo $(T_1 + T_2)^\star = T_1^\star + T_2^\star$. (1_b). $(\alpha T)^\star = \overline{\alpha} T^\star$. De fato,

$$\begin{aligned}
(x, (\alpha T)^\star y) &= ((\alpha T)x, y) \\
&= (\alpha (Tx), y) \\
&= \alpha (Tx, y) \\
&= \alpha (x, T^\star y) \\
&= (x, (\overline{\alpha} T^\star) y).
\end{aligned}$$

Logo, pelo mesmo processo acima, temos que $(\alpha T)^\star = \overline{\alpha} T^\star$. (1_c). $(T_1 T_2)^\star = T_2^\star T_1^\star$. De fato,

$$\begin{aligned}
(x, (T_1 T_2)^\star y) &= ((T_1 T_2)x, y) \\
&= (T_1 (T_2 x), y) \\
&= (T_2 x, T_1^\star y) \\
&= (x, T_2^\star (T_1^\star y)) \\
&= (x, (T_2^\star T_1^\star) y).
\end{aligned}$$

Logo $(T_1T_2)^\star = T_2^\star T_1^\star$. (1_d). $T^{\star\star} = T$. De fato,

$$\begin{aligned}(x, T^{\star\star}y) &= (x, (T^\star)^\star y)\\ &= (T^\star x, y)\\ &= \overline{(y, T^\star x)}\\ &= \overline{(Ty, x)}\\ &= (x, Ty).\end{aligned}$$

Logo $T^{\star\star} = T$. (2). $\| T^\star T \| = \| T \|^2$. Em primeiro lugar, provaremos que $\| T \| = \| T^\star \|$. temos que

$$\begin{aligned}\| T^\star y \|^2 &= (T^\star y, T^\star y)\\ &= (TT^\star y, y)\\ &\leq \| TT^\star y \| \| y \|\\ &\leq \| T \| \| T^\star y \| \| y \| .\end{aligned}$$

Então $\| T^\star y \| \leq \| T \| \| y \|$ para todo $y \in H$. Logo $\| T^\star \| \leq \| T \|$ para todo $T \in \mathcal{B}(H)$. Em particular, tomando $T^\star \in \mathcal{B}(H)$, temos que $\| T \| = \| (T^\star)^\star \| = \| T^{\star\star} \| \leq \| T^\star \|$. Portanto $\| T \| = \| T^\star \|$. Agora, provaremos que $\| T^\star T \| = \| T \|^2$. Temos que

$$\| T^\star T \| \leq \| T^\star \| \| T \| = \| T \| \| T \| = \| T \|^2 .$$

Por outro lado, temos que $\| Tx \|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^\star(Tx)) = (x, (T^\star T)x) \leq \| x \| \| (T^\star T)x \| \leq \| T^\star T \| \| x \|^2$. Então $\| Tx \|^2 \leq \| T^\star T \| \| x \|^2, \| Tx \| \leq \sqrt{\| T^\star T \|} \| x \|$. Logo $\| T \| \leq \sqrt{\| T^\star T \|}$, ou seja, $\| T \|^2 \leq \| T^\star T \|$. Portanto temos que $\| T^\star T \| = \| T \|^2$. Por (1) e (2), temos que $\mathcal{B}(H)$ é uma $B^\star-$ álgebra.

Exemplo 3.3.8. *Toda $C^\star-$ álgebra de $\mathbf{B}(H)$ é também uma $B^\star-$ álgebra. Lembramos que uma $C^\star-$ álgebra (Definição 2.1.5) é uma subálgebra de Banach auto - adjunta de $\mathcal{B}(H)$.*

Isto é imediato, pois $T \longrightarrow T^\star$ é uma involução, pelo Exemplo 3.3.7.

Exemplo 3.3.9. *A álgebra do grupo $L_1(G)$ do grupo finito G é uma $^\star-$ álgebra de Banach com a involução definida por $f^\star(x_i) = \overline{f(x_i^{-1})}$ e $\| f^\star \| = \| f \|$.*

(1). $f \longrightarrow f^\star$ é uma involução. (1_a). $(f+g)^\star = f^\star + g^\star$. Dado $x_i \in G$, temos que

$$(f+g)^\star(x_i) = \overline{(f+g)(x_i^{-1})} = \overline{f(x_i^{-1}) + g(x_i^{-1})} = \overline{f(x_i^{-1})} + \overline{g(x_i^{-1})} = f^\star(x_i) + g^\star(x_i) = (f^\star + g^\star)(x_i).$$

Logo $(f+g)^\star = f^\star + g^\star$. (1_b). $(\alpha f)^\star = \overline{\alpha} f^\star$. Dado $x_i \in G$, temos que

$$(\alpha f)^\star(x_i) = \overline{(\alpha f)(x_i^{-1})} = \overline{\alpha f(x_i^{-1})} = \overline{\alpha}\,\overline{f(x_i^{-1})} = \overline{\alpha} f^\star(x_i) = (\overline{\alpha} f^\star)(x_i).$$

Logo $(\alpha f)^\star = \overline{\alpha} f^\star$. (1_c). $(fg)^\star = g^\star f^\star$. Dado $x_i \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
(fg)^\star(x_i) &= \overline{(fg)(x_i^{-1})} \\
&= \overline{\sum_{j=1}^{n} f(x_i^{-1}x_j^{-1})g(x_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{f(x_i^{-1}x_j^{-1})g(x_j)};
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(g^\star f^\star)(x_i) &= \sum_{j=1}^{n} g^\star(x_i x_j^{-1}) f^\star(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{g(x_i x_j^{-1})^{-1}}\ \overline{f(x_j^{-1})} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{g(x_j x_i^{-1}) f(x_j^{-1})} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{f(x_j^{-1}) g(x_j x_i^{-1})} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{f(x_i^{-1} x_i x_j^{-1}) g(x_j x_i^{-1})} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{f(x_i^{-1}(\underbrace{x_j x_i^{-1}}_{x_k})^{-1}) g(\underbrace{x_j x_i^{-1}}_{x_k})} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{f(x_i^{-1} x_k^{-1}) g(x_k)}.
\end{aligned}$$

Logo $(fg)^\star = g^\star f^\star$. (1_d). $f^{\star\star} = f$. Dado $x_i \in G$, temos que

$$f^{\star\star}(x_i) = \overline{f^\star(x_i^{-1})} = \overline{\overline{f((x_i^{-1})^{-1})}} = f(x_i).$$

Logo $f^{\star\star} = f$. (2). $\| f \| = \| f^{\star} \|$. De fato,

$$\begin{aligned} \| f \| &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |f(x_j^{-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |\overline{f(x_j^{-1})}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |f^{\star}(x_j)| \\ &= \| f^{\star} \| . \end{aligned}$$

Por (1) e (2), temos que $L_1(G)$ é uma $\star-$ álgebra com a propriedade $\| f \| = \| f^{\star} \|$.

Definição 3.3.10. *Seja A uma $\star-$ álgebra de Banach*

(1). x é dito auto - adjunto se $x = x^{\star}$.

(2). x é dito normal se $xx^{\star} = x^{\star}x$.

(3). x é chamado de projeção se $x^2 = x$.

Teorema 3.3.11. *Se x é um elemento normal em uma $B^{\star}-$ álgebra, então $\| x^2 \| = \| x \|^2$.*

Demonstração. Temos que

$$\| x^2 \| = \| xx \| \leq \| x \| \| x \| = \| x \|^2 .$$

Por outro lado, temos que

$$\| x^{\star} \|^2 \| x \|^2 = (\| x^{\star} \| \| x \|)^2 = \| x^{\star}x \|^2 = \| (x^{\star}x)^{\star}x^{\star}x \| = \| x^{\star}xx^{\star}x \| =$$

$$\| x^{\star}x^{\star}xx \| = \| (x^{\star})^2x^2 \| = \| (x^2)^{\star}x^2 \| = \| (x^{\star})^2 \| \| x^2 \| \leq \| x^{\star} \|^2 \| x^2 \| .$$

Logo temos que $\| x \|^2 \leq \| x^2 \|$. Portanto $\| x^2 \| = \| x \|^2$. □

O Teorema 3.3.11, mostra que existe uma conexão íntima entre $B^{\star}-$ álgebras e álgebra de operadores em espaço de Hilbert.

3.4 O teorema de Gelfand - Neumark

Nesta seção, apresentaremos o teorema de Gelfand - Neumark que é a forma final do Teorema 3.2.4.

Teorema 3.4.1. *Se A é uma $B^\star-$ álgebra comutativa então a aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ é um $^\star-$ isomorfismo isométrico de A sobre a $B^\star-$ álgebra comutativa $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$.*

Demonstração. Pelo Exemplo 3.3.5, sabemos que $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$ é uma $B^\star-$ álgebra comutativa com a involução natural definida por $f^\star(M) = \overline{f(M)}$, para todo $M \in \mathcal{M}$. Como, por hipótese, A é uma $B^\star-$ álgebra comutativa, existe uma involução $x \longrightarrow x^\star$ de A sobre A. Como A é comutativa, segue que $xx^\star = x^\star x$, para todo $x \in A$. Logo cada $x \in A$ é normal. Pelo Teorema 3.3.11, temos que $\| x^2 \| = \| x \|^2$, para todo $x \in A$. Agora, provaremos que A é auto - adjunta. Dado $x \in A$, provaremos que existe $y \in A$ tal que $\widehat{y}(M) = \overline{\widehat{x}(M)}$, para todo $M \in \mathcal{M}$. Tomamos $y = x^\star$, e agora, falta provar que $\widehat{x^\star}(M) = \overline{\widehat{x}(M)}$, para todo $M \in \mathcal{M}$. Se isso for provado, além de que A será auto - adjunta, a aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$ conservará a involução. De fato, denotamos por g a aplicação de Gelfand $x \longrightarrow \widehat{x}$. Lembrando que, em $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$, a involução natural é definida por $f^\star(M) = \overline{f(M)}$, para todo $M \in \mathcal{M}$. Dado $M \in \mathcal{M}$, temos que

$$g(x)^\star(M) = (\widehat{x})^\star(M) = \overline{\widehat{x}(M)} = \widehat{x^\star}(M) = g(x^\star)(M).$$

Logo $g(x)^\star = g(x^\star)$. Pelo Teorema 3.2.4, isto implicará que a aplicação de Gelfand é um $^\star-$ isomorfismo isométrico de A sobre $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$. Portanto, para completar a demonstração do teorema, basta provar que $\widehat{x^\star}(M) = \overline{\widehat{x}(M)}$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Primeiramente, provaremos que se x é auto - adjunto, ou seja, $x = x^\star$, então $\widehat{x}(M)$ é real para todo $M \in \mathcal{M}$. Suponhamos por absurdo que existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $\widehat{x}(M) = \alpha + i\beta$, com $\beta \neq 0$. Seja

$$y = \frac{x - \alpha\mathbf{1}}{\beta}.$$

Afirmamos que

$$M^\star = \{m^\star : m \in M\}$$

é um ideal maximal em A, ou seja, $M^\star \in \mathcal{M}$. Temos que

$$y^\star = (\frac{x - \alpha\mathbf{1}}{\beta})^\star = (\overline{\frac{1}{\beta}})(x^\star - \overline{\alpha}\mathbf{1}^\star) = \frac{1}{\beta}(x - \alpha\mathbf{1}) = y.$$

Logo y é outo - adjunto, e

$$\widehat{y}(M) = (\widehat{\frac{x-\alpha\mathbf{1}}{\beta}})(M) = \frac{1}{\beta}[\widehat{x}(M) - \alpha\widehat{\mathbf{1}}(M)] = \frac{1}{\beta}(\alpha + i\beta - \alpha) = i.$$

Logo $\widehat{y}(M) = i$. Observamos que

$$\widehat{y}(M) - i = 0 \Longrightarrow \widehat{y}(M) - i\widehat{\mathbf{1}}(M) = 0 \Longrightarrow (\widehat{y - i\mathbf{1}})(M) = 0 \Longrightarrow (y - i\mathbf{1})(M) = 0.$$

Pelo Teorema 3.1.1, item(4), temos que $y - i\mathbf{1} \in M$. Logo $(y - i\mathbf{1})^\star \in M^\star$, e $(y - i\mathbf{1})^\star(M^\star) = 0$. Logo

$$(y - i\mathbf{1})^\star(M^\star) = (y^\star + i\mathbf{1})(M^\star) = (y + i\mathbf{1})(M^\star) = 0.$$

Observamos que

$$(y + i\mathbf{1})(M^\star) = (\widehat{y + i\mathbf{1}})(M^\star) = (\widehat{y} + i\widehat{\mathbf{1}})(M^\star) = \widehat{y}(M^\star) + i = 0.$$

Logo $\widehat{y}(M^\star) = -i$. Seja $K > 0$ um número positivo. Temos que

$$(\widehat{y - iK\mathbf{1}})(M^\star) = (\widehat{y} - iK\widehat{\mathbf{1}})(M^\star) = \widehat{y}(M^\star) - iK = i - iK = -i(\mathbf{1} + K).$$

Logo

$$|(\widehat{y - iK\mathbf{1}})(M^\star)| = |-i(1 + K)| = \sqrt{(1 + K)^2} = 1 + K. \tag{3.1}$$

Pelo Teorema 3.1.1, item (6), temos que

$$|(\widehat{y - iK\mathbf{1}})(M^\star)| = |(y - iK\mathbf{1})(M^\star)| \leq \| y - iK\mathbf{1} \| . \tag{3.2}$$

Por (3.1) e (3.2), temos que

$$1 + K \leq \| y - iK\mathbf{1} \| . \tag{3.3}$$

De modo similar, temos que $(\widehat{y + iK\mathbf{1}})(M^\star) = i(1 + K)$, e

$$1 + K \leq \| y + iK\mathbf{1} \| . \tag{3.4}$$

Por (3.3) e (3.4), temos que

$$\begin{aligned}
(1 + K)^2 &\leq \| y - iK\mathbf{1} \| \| y + iK\mathbf{1} \| \\
&= \| (y + iK\mathbf{1})^\star \| \| y + iK\mathbf{1} \| \\
&= \| (y + iK\mathbf{1})^\star (y + iK\mathbf{1}) \| \\
&= \| (y - iK\mathbf{1})(y + iK\mathbf{1}) \| \\
&= \| y^2 + K^2\mathbf{1} \| \\
&\leq \| y^2 \| + K^2.
\end{aligned}$$

Logo $1 + 2K \leq\| y^2 \|$, absurdo!, pois K é arbitrário. Portanto, $\widehat{x}(M)$ é real para todo $M \in \mathcal{M}$. Agora, provaremos que, para todo $M \in \mathcal{M}$, $\widehat{x^\star}(M) = \overline{\widehat{x}(M)}$. Sejam $y = (x + x^\star)/2$ e $z = (x - x^\star)/(2i)$. Temos que

$$y^\star = (\frac{x + x^\star}{2})^\star = \frac{1}{2}(x^\star + x^{\star\star}) = \frac{1}{2}(x + x^\star) = y.$$

Logo y é auto - adjunto. De modo similar, temos que $z^\star = z$, ou seja, z é auto - adjunto. Observamos que $x = y + iz$. Logo $x^\star = (y + iz)^\star = y^\star - iz^\star = y - iz$. Seja $M \in \mathcal{M}$, temos que

$$\widehat{x^\star}(M) = \widehat{y - iz}(M) = \widehat{y}(M) - i\widehat{z}(M) = \overline{\widehat{y}(M)} - i\overline{\widehat{z}(M)} = \overline{\widehat{y}(M) + i\widehat{z}(M)} = \overline{\widehat{y + iz}(M)} = \overline{\widehat{x}(M)}.$$

Finalmente, provaremos a afirmação : $M^\star = \{m^\star : m \in M\}$ é um ideal maximal em A, ou seja, $M^\star \in \mathcal{M}$. (1). $M^\star$ é um ideal em A. Sejam $m_1^\star, m_2^\star \in M^\star$ com $m_1, m_2 \in M, \alpha \in \mathbb{C}$ e $y \in A$. Observamos que (i). $m_1^\star + m_2^\star = (m_1 + m_2)^\star \in M^\star$; (ii). $\alpha m_1^\star = (\overline{\alpha} m_1)^\star \in M^\star$; (iii). $y m_1^\star = y^{\star\star} m_1^\star = (m_1 y^\star)^\star \in M^\star$. Logo $M^\star$ é um ideal. (2). $M^\star$ é um ideal próprio em A. De fato, como $\mathbf{1} \notin M$, temos que $\mathbf{1} = \mathbf{1}^\star \notin M^\star$. Logo $M^\star$ é um ideal próprio em A. (3). $M^\star$ é um ideal maximal em A. Suponhamos por absurdo que $M^\star$ não é maximal. Existe J : um ideal maximal em A tal que $M^\star \subsetneqq J \subsetneqq A$. Logo existe $y \in J$ mas $y \notin M^\star$. Como $y = (y^\star)^\star$, temos que $y^\star \notin M$. Afirmamos que

$$M + y^\star A = \{m + y^\star x : m \in M, x \in A\}$$

é um ideal próprio que contém M e $y^\star$. Se essa afirmação for provada, teremos que $M \subsetneqq M + y^\star A$. O que contradiz a maximalidade de M. Portanto $M^\star$ é um ideal maximal em A. (3_a). $M + y^\star A$ é um ideal em A. Sejam $m_1 + y^\star x_1, m_2 + y^\star x_2 \in M + y^\star A$ com $m_1, m_2 \in M$ e $x_1, x_2 \in A; \alpha \in \mathbb{C}$ e $z \in A$. Temos que (i). $(m_1 + y^\star x_1) + (m_2 + y^\star x_2) = (m_1 + m_2) + y^\star(x_1 + x_2) \in M + y^\star A$. (ii). $\alpha(m_1 + y^\star x_1) = \alpha m_1 + y^\star \alpha x_1 \in M + y^\star A$. (iii). $z(m_1 + y^\star x_1) = z m_1 + y^\star z x_1 \in M + y^\star A$. Logo $M + y^\star A$ é um ideal em A. (3_b). $M + y^\star A$ é um ideal próprio em A. Suponhamos por absurdo que $M + y^\star A$ não é próprio, então existe $m \in M$ e $x \in A$ tal que $m + y^\star x = \mathbf{1}$. Logo $(m + y^\star x)^\star = \mathbf{1}^\star = \mathbf{1}$, $m^\star + x^\star y = \mathbf{1}$. Assim, $x^\star y = \mathbf{1} - m^\star$. Como $y \in J$, e J é um ideal, temos que $x^\star y \in J$, ou seja, $\mathbf{1} - m^\star \in J$. Como $m \in M$, temos que $m^\star \in M^\star \subsetneqq J$. Logo $m^\star \in J$. Portanto $(\mathbf{1} - m^\star) + m^\star \in J$, isto é, $\mathbf{1} \in J$, absurdo! (3_c). $M + y^\star A$ contém M e $y^\star$. Isto é imediato. Como $\mathbf{0} \in A$, temos que $M \subset M + y^\star A$. Como $\mathbf{0} \in M$ e $\mathbf{1} \in A$, temos que $y^\star = \mathbf{0} + y^\star \mathbf{1} \in M + y^\star A$. $\square$

Já sabemos que se X é um espaço compacto de Hausdorff então $\mathcal{C}^{\star}(X)$ é uma $B^{\star}-$ álgebra comutativa. O teorema demonstrado acima, que é chamado de *teorema de representação de Gelfand - Neumark*, nos diz que uma $B^{\star}-$ álgebra comutativa é abstratamente idêntica a $\mathcal{C}^{\star}(X)$, onde X é um espaço compacto de Hausdorff adequado.

Capítulo 4

Algumas álgebras de Banach comutativas especiais

4.1 Ideais em $\mathcal{C}^\star(X)$ e o teorema de Banach - Stone

Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e a $B^\star-$ álgebra comutativa $\mathcal{C}^\star(X)$. Se $\mathcal{M}$ é o espaço dos ideais maximais em $\mathcal{C}^\star(X)$, então o objetivo desta seção é mostrar que $\mathcal{M}$ pode ser identificado com X e que a aplicação de Gelfand é a aplicação identidade de $\mathcal{C}^\star(X)$. Primeiramente observamos que a cada $x \in X$ corresponde o ideal próprio M_x em $\mathcal{C}^\star(X)$ definido por

$$M_x = \{f \in \mathcal{C}^\star(X) : f(x) = 0\}.$$

Observamos que **(1)**. M_x é um ideal em $\mathcal{C}^\star(X)$. Dados $f, g \in M_x, \alpha \in \mathbb{C}$ e $h \in \mathcal{C}^\star(X)$, temos que (i). $f + g \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$. Logo $f + g \in M_x$. (ii). $\alpha f \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$. Logo $\alpha f \in M_x$. (iii). $h \cdot f \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $(h \cdot f)(x) = h(x)f(x) = h(x)0 = 0$. Logo $h \cdot f \in M_x$. **(2)**. M_x é um ideal próprio em $\mathcal{C}^\star(X)$. Seja I_n a identidade de $\mathcal{C}^\star(X)$, ou seja, $I_n(y) = 1$ para todo $y \in X$. Então $I_n(x) = 1 \neq 0$. Logo $I_n \notin M_x$, e M_x é um ideal próprio em $\mathcal{C}^\star(X)$. **(3)**. M_x é um ideal maximal em $\mathcal{C}^\star(X)$. Suponhamos, por absurdo, que M_x não é maximal em $\mathcal{C}^\star(X)$. Então existe $J \subset \mathcal{C}^\star(X)$: um ideal maximal tal que $M_x \subsetneqq J \subsetneqq \mathcal{C}^\star(X)$. Logo existe $f \in J$, mas $f \notin M_x$, ou seja, $f(x) \neq 0$. Denotamos $f(x)$ por β, isto é, $\beta = f(x)$. Logo $f - \beta I_n \in M_x$, pois $(f - \beta I_n)(x) = f(x) - \beta I_n(x) = \beta - \beta 1 = 0$. Como $M_x \subset J$, então $f - \beta I_n \in J$. Como $f \in J$ e J é um ideal maximal, temos que $-f \in J$. Logo $(f - \beta I_n) + (-f) \in J$, isto é, $-\beta I_n \in J$. Como J é um ideal, temos que $(1/-\beta)(-\beta I_n) \in J$. Logo $I_n \in J$, absurdo! Por (1), (2) e

(3), resulta que M_x é realmente um ideal maximal em $\mathcal{C}^{\star}(X)$, ou seja, $M_x \in \mathcal{M}$.

Podemos definir uma aplicação $x \longrightarrow M_x$ de X em $\mathcal{M}$. Primeiramente provaremos que a aplicação $x \longrightarrow M_x$ de X em $\mathcal{M}$ é injetora. Sejam $x \neq y$. Por hipótese, X é um espaço compacto de Hausdorff, logo é normal e T_1. Assim, $\{x\}$ e $\{y\}$ são dois fechados disjuntos de X. Pelo lema de Urysohn, existe $f : X \longrightarrow [0, 1]$ contínua, tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Logo $f \in M_x$, mas $f \notin M_y$. Portanto $M_x \neq M_y$. A seguir provaremos que a aplicação $x \longrightarrow M_x$ é sobrejetora. Dado $M \in \mathcal{M}$, provaremos que existe $x \in X$ tal que $M_x = M$. Como M e M_x são ideais maximais em $\mathcal{C}^{\star}(X)$, temos que $M \subset M_x \Longleftrightarrow M = M_x$. Assim, basta provar que existe $x \in X$ tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in M$. Suponhamos, por absurdo, que, para cada $x \in X$, existe $f \in M$ tal que $f(x) \neq 0$. Como f é contínua, existe uma vizinhança U_x de x em X tal que $f(y) \neq 0$ para todo $y \in U_x$. Logo $\{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe uma subcobertura finita, ou seja, existem $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \{U_x : x \in X\}$ tais que $X = U_1 \cup U_2, \cdots \cup U_n$. Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{M}$ que correspondem a $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Definimos

$$g = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \overline{f_i} = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2.$$

Como M é um ideal e $f_i \in M$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que $g \in M$. Observamos que $g(x) > 0$ para todo $x \in X$. De fato, para cada $x \in X$, existe U_i, onde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $x \in U_i$. Logo $f_i(x) \neq 0$ e $|f_i(x)|^2 > 0$. Portanto $g(x) = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| > 0$. Assim, podemos tomar uma aplicação h definida por $h(x) = 1/g(x)$ para todo $x \in X$. Como g é contínua e limitada e X é compacto, h é contínua e limitada, ou seja, $h \in \mathcal{C}^{\star}(X)$ e $h \cdot g = g \cdot h = I_n$. Como $g \in M$ e M é um ideal maximal, temos que $h \cdot g \in M$. Logo $I_n \in M$, absurdo! Portanto a aplicação $x \longrightarrow M_x$ é sobrejetora de X sobre $\mathcal{M}$. Logo podemos identificar X com $\mathcal{M}$, ou seja, $x = M_x$. Agora, dado $x \in X$, provaremos que $f(M_x) = f(x)$. Pela demonstração do Teorema 3.1.1, temos o diagrama a seguir :

$$\begin{array}{rcl}
C^{\star}(X) \longrightarrow & C^{\star}(X)/M_x & \longrightarrow \mathbb{C} \\
f \longmapsto & f + M_x & \\
 & \shortparallel & \\
 & \lambda(I_n + M_x) & \longmapsto \lambda = f(M_x).
\end{array}$$

Então, para provar $f(M_x) = f(x)$, basta provar que $f(x) = \lambda$. Pelo diagrama acima, temos que $f + M_x = \lambda(I_n + M_x)$. Então existem $g, h \in M_x$ tais que $f + g = \lambda(I_n + h)$.

Então $(f+g)(x) = [\lambda(I_n + h)](x), f(x) + g(x) = \lambda[I_n(x) + h(x)]$. Logo $f(x) = \lambda$, pois $g(x) = h(x) = 0$ e $I_n(x) = 1$. Portanto temos que $f(M_x) = f(x)$. Pela definição de $\widehat{f}$, temos que $\widehat{f}(M_x) = f(M_x)$. Então resulta que $\widehat{f}(M_x) = f(x)$. Como já identificamos X com $\mathcal{M}$ através da aplicação bijetora $x \longrightarrow M_x$, temos que $\widehat{f} = f$. Além disso, como, pelo Teorema 3.4.1, a aplicação de Gelfand $f \longrightarrow \widehat{f}$ é bijetora de $\mathcal{C}^\star(X)$ sobre $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M})$, temos que $\mathcal{C}^\star(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\star(X)$. Agora provaremos que a topologia em X coincide com a topologia gerada por todos os $f \in \mathcal{C}^\star(X)$. Sejam τ a topologia de X e τ_w a topologia fraca gerada por todos os $f \in \mathcal{C}^\star(X)$. Provaremos que $\tau = \tau_w$. Como $\tau_w \subset \tau$ vale sempre, basta provar $\tau \subset \tau_w$. Seja $U \in \tau$ e seja $x \in U$, logo $x \notin X \backslash U$ que é fechado. Como X é completamente regular, pois, por hipótese, é espaço compacto de Hausdorff, existe $f : X \longrightarrow [0,1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $F(X \backslash U) = \{1\}$. Seja $V_x = \{y \in X : f(y) < 1\} = f^{-1}[0,1) \in \tau_w$. De fato, $[0,1] = [0,1] \times [0,0]$ é um subespaço topológico de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $[0,1) = [0,1) \times [0,0]$ é um aberto de $[0,1]$, pois $(-1,1) \times (-2,2)$ é um aberto de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $[0,1) = [0,1) \times [0,0] = (-1,1) \cap [0,1] \times (-2,2) \cap [0,0] = (-1,1) \times (-2,2) \cap [0,1] \times [0,0]$. Como $f : X \longrightarrow [0,1]$ é contínua, temos que $f^{-1}[0,1) \in \tau_w$. Logo $x \in V_x = f^{-1}[0,1) \subset U$, pois $f(x) = 0 < 1$; e se existe $y \in V_x$ mas $y \notin U$, então $y \in X \backslash U$. Logo $f(y) = 1$ é uma contradição. Como, para cada $x \in U$, existe $V_x \in \tau_w$ tal que $x \in V_x \subset U$. Logo $U = \cup_{x \in U} V_x \in \tau_w$. Logo $\tau \subset \tau_w$. Portanto a topologia em X coincide com a topologia gerada por todos os $f \in \mathcal{C}^\star(X)$. Como, na seção 3.1, sabemos que em $\mathcal{M}$ colocamos a topologia fraca gerada por todos os $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\star(M)$, e agora temos que $f = \widehat{f}$, e a aplicação de Gelfand $f \longrightarrow \widehat{f}$ é bijetora, podemos considerar que X e $\mathcal{M}$ são dois espaços topológicos coincidentes. Resumimos todos os resultados no seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. *Seja X um espaço compacto de Hausdorff e $\mathcal{M}$ o espaço dos ideais maximais na $B^\star-$ álgebra comutativa $\mathcal{C}^\star(X)$. Então, cada $x \in X$ corresponde ao ideal maximal M_x definido por $M_x = \{f \in \mathcal{C}^\star(X) : f(x) = 0\}$, e $x \longrightarrow M_x$ é uma aplicação bijetora de X sobre $\mathcal{M}$. Se essa aplicação é usada para identificar $\mathcal{M}$ com X, então $\mathcal{M}$ e X são espaços topológicos coincidentes, $\mathcal{C}^\star(M)$ e $\mathcal{C}^\star(X)$ são coincidentes, e a aplicação de Gelfand $f \longrightarrow \widehat{f}$ é a aplicação identidade de $\mathcal{C}^\star(X)$.*

A idéia principal deste teorema é que ideais maximais em $\mathcal{C}^\star(X)$ correspondem, de modo natural, a pontos de X. Agora, estendemos essa idéia para obter uma caracterização similar de ideais próprios fechados em $\mathcal{C}^\star(X)$. Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e

F um conjunto fechado não vazio de X. Definimos

$$I(F) = \{f \in \mathcal{C}^\star(X) \text{ e } f(F) = 0\}.$$

Observamos que (1). $I(F)$ é um ideal em $\mathcal{C}^\star(X)$. Dados $f, g \in I(F), \alpha \in \mathbb{C}$ e $h \in \mathcal{C}^\star(X)$. Temos que, dado $x \in F$, (i). $f + g \in \mathcal{C}^\star(X)$, e $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$. Então $(f+g)(F) = 0$. Logo $f + g \in I(F)$. (ii). $\alpha f \in \mathcal{C}^\star(X)$, e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$. então $(\alpha f)(F) = 0$. Logo $\alpha f \in I(F)$. (iii). $h \cdot f \in \mathcal{C}^\star(X)$, e $(h \cdot f)(x) = h(x)f(x) = h(x)0 = 0$. Então $(h \cdot f)(F) = 0$. Logo $h \cdot f \in I(F)$. Portanto $I(F)$ é um ideal em $\mathcal{C}^\star(X)$. (2). $I(F)$ é um ideal próprio. Seja I_n a identidade de $\mathcal{C}^\star(X)$, logo $I_n(F) = \{1\} \neq \{0\}$. Portanto $I_n \notin I(F)$, e então $I(F)$ é um ideal próprio. (3). $I(F)$ é fechado de $\mathcal{C}^\star(X)$. Provaremos que $\overline{I(F)} = I(F)$. Dado $f \in \overline{I(F)}$, provaremos que $f \in I(F)$. Como $f \in \overline{I(F)}$, existe uma seqüência $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset I(F)$ tal que $f_n \longrightarrow f$. Seja $x \in F$, temos que $0 = f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Então $f(x) = 0$. Logo $f \in I(F)$. Por (1), (2) e (3), resulta que $I(F)$ é um ideal próprio fechado em $\mathcal{C}^\star(X)$. Podemos definir uma aplicação $F \longrightarrow I(F)$ da classe de todos os fechados não vazios de X no conjunto de todos os ideais próprios fechados em $\mathcal{C}^\star(X)$. Provaremos que a aplicação $F \longrightarrow I(F)$ é injetora. Dados $F_1 \neq F_2$, sem perda de generalidade, podemos supor que existe $x \in F_1$ com $x \notin F_2$. Por hipótese, X é um espaço compacto de Hausdorff e portanto é completamente regular. Então existe $f : X \longrightarrow [0,1]$ contínua tal que $f(F_2) = \{0\}$ e $f(x) = 1$. Logo $f \in I(F_2)$ e $f \notin I(F_1)$. Então $I(F_1) \neq I(F_2)$. Agora, provaremos que a aplicação $F \longrightarrow I(F)$ é sobrejetora. Seja I um ideal próprio fechado em $\mathcal{C}^\star(X)$. Se $I = \{\mathbf{0} : \text{ a função nula }\}$ o ideal zero, tomamos que $F = X$, logo $I(F) = I(X) = \{f \in \mathcal{C}^\star(X) : f(X) = \{0\}\} = \{\mathbf{0} : \text{ a função nula }\} = I$. Se I não é o ideal zero, definimos

$$F = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

Provaremos que F é um subconjunto fechado não vazio de X. De fato, $F = \cap_{f \in I}\{x \in X : f(x) = 0\} = \cap_{f \in I} f^{-1}(\{0\})$. Como $\{0\}$ é fechado de $\mathbb{C}$ temos que F é fechado de X. Como I é um ideal próprio, existe M_x : um ideal maximal de $\mathcal{C}^\star(X)$ tal que $I \subset M_x := \{f \in \mathcal{C}^\star(X) : f(x) = 0\}$. Então $f(x) = 0$ para todo $f \in I$. Portanto $x \in F$. Logo $F \neq \phi$. Agora, provaremos que $I(F) = I$. Como $I \subset I(F)$ é imediato, pois dado $f \in I$, $f(x) = 0$ para todo $x \in F$, logo $f \in I(F)$, basta provar que $I(F) \subset I$. Seja $f \in I(F)$. Como $I(F)$ e I são ideais, ambos contém $\mathbf{0}$: a função nula. Portanto, suponhamos $f \neq \mathbf{0}$. Primeiramente provaremos que se f se anula em um aberto G de X que contém F, então $f \in I$. Como G é aberto de X, então $G' = X \backslash G$ é fechado de X. Logo G' é compacto, pois X é compacto. Como $f \neq \mathbf{0}$

e $f(G) = \{0\}$, temos que $G \neq X$. Logo $G' \neq \phi$. Dado $x \in G' = X \backslash G$, temos que $x \notin F$. Logo existe $g \in I$ tal que $g(x) \neq 0$. Como g é contínua, existe U_x: uma vizinhança de x tal que $g(y) \neq 0$ para todo $y \in U_x$. Logo $U_x \cap G'$ é um aberto de G' contendo x. Então temos que $\{U_x \cap G' : x \in G'\}$ é uma cobertura aberta de G'. Como G' é compacto, existe uma subcobertura finita, ou seja, existem $U_1 \cap G', U_2 \cap G', \ldots, U_n \cap G' \in \{U_x \cap G' : x \in G'\}$ tais que $G' = \cup_{i=1}^{n} \{U_i \cap G'\}$. Sejam $g_1, g_2, \ldots, g_n \in I$ que correspondem a $U_1 \cap G', U_2 \cap G', \ldots, U_n \cap G'$. Definimos

$$g_\circ = \sum_{i=1}^{n} g_i \overline{g_i} = \sum_{i=1}^{n} |g_i|^2.$$

Como $g_i \in I$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e I é um ideal, temos que $g_\circ \in I$; e para todo $x \in G'$, $g_\circ(x) > 0$. Então podemos tomar uma aplicação $h_\circ : G' \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_\circ(x) = 1/g_\circ(x)$ para todo $x \in G'$. Logo $h_\circ$ é limitada, pois é contínua num compacto G'. Então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $h_\circ : G' \longrightarrow [a, b]$ é contínua. Como X é normal, pois X é um espaço compacto de Hausdorff, G' é fechado de X, e $h_\circ : G' \longrightarrow [a, b]$ é contínua, pelo teorema de extensão de Tietze, $h_\circ$ pode ser estendido a uma função contínua $h : X \longrightarrow [a, b]$. Logo $h \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $g_\circ \cdot h \in I$, pois $g_\circ \in I$ e I é um ideal. Observamos que $f = f(g_\circ \cdot h)$. De fato, se $x \in G'$, temos que $f(g_\circ \cdot h)(x) = f(x)(g_\circ \cdot h)(x) = f(x) g_\circ(x) 1 \backslash g_\circ(x) = f(x)$. Se $x \in X \backslash G' = G$, temos que $f(g_\circ \cdot h)(x) = 0(g_\circ \cdot h)(x) = 0 = f(x)$. Como $g_\circ \cdot h \in I$, e I é ideal, temos que $f(g_\circ \cdot h) \in I$, ou seja, $f \in I$. Agora, voltamos ao caso geral, provaremos se $f \in I(F), f \neq \mathbf{0}$, então $f \in I$. Dado $\epsilon > 0$. Sejam $K = \{x : |f(x)| \leq \epsilon/2\}$, e $L = \{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$. Observamos que K e L são dois fechados disjuntos de X. De fato, é claro que K e L são disjuntos. Como $K = |f|^{-1}[0, \epsilon/2]$ e $L = |f|^{-1}[\epsilon, +\infty)$; e $[0, \epsilon/2]$ e $[\epsilon, +\infty)$ são fechados de $\mathbb{R}$, temos que K e L são fechados de X. É imediato que $K \neq \phi$, pois $f(F) = \{0\}$. Como $f \neq \mathbf{0}$, existe $x \in X$ tal que $|f(x)| > 0$. Logo $L \neq \phi$ se ϵ for suficientemente pequeno. Então escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que K e L são dois fechados disjuntos não vazios de X. Como X é normal, pois é um espaço compacto de Hausdorff, temos que, pelo lema de Uryshon, existe $g : X \longrightarrow [0, 1]$ contínua tal que $g(K) = \{0\}$ e $g(L) = \{1\}$. Definimos $h = f \cdot g$. Observamos que

$$\| f - h \| = \| f - f \cdot g \| = \| f(1 - g) \| \leq \epsilon.$$

De fato, $\| f - h \| = \sup\{|(f - h)(x)| : x \in X\} = \sup\{|f(1 - g)|(x) : x \in X\}$. Se $x \in K$, então $|f(1 - g)|(x) = |f(x)(1 - 0)| = |f(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$. Se $x \in L$, então $|f(1 - g)|(x) = |f(x)(1 - 1)| = 0 < \epsilon$. Se $x \in X \backslash K \cup L$, então $|f(1 - g)|(x) = |f(x)(1 - g(x))| \leq |f(x)| < \epsilon$. Portanto $\| f - h \| \leq \epsilon$. Seja $G = \{x \in X : |f(x)| < \epsilon/3\}$. Observamos que (1). G é aberto de X que contém F. De fato, $G = |f|^{-1}[0, \epsilon/3)$ e $|f| : X \longrightarrow [0, +\infty)$ é contínua. Como $[0, \epsilon/3) = (-\epsilon/3, \epsilon/3) \cap [0, +\infty)$ é aberto de $[0, +\infty)$, temos que G é aberto de X. Se $x \in F$, então $f(x) = 0$, e $|f(x)| = 0 < \epsilon/3$, logo $x \in G$. Portanto $F \subset G$. (2). h se anula em G. De fato, para todo $x \in G$, $h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = f(x)0 = 0$. Por (1) e (2), resulta que h se anula em um aberto G de X que contém F. Logo $h \in I$. Portanto, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $h \in I$ tal que $\| f - h \| \leq \epsilon$. Logo $f \in \overline{I}$. Como I é fechado, temos que $f \in I$. Portanto a aplicação $F \longrightarrow I(F)$ é bijetora. Resumimos todos os resultados no

Teorema 4.1.2. *Seja X um espaço compacto de Hausdorff. A cada subconjunto fechado não vazio F de X, corresponde um ideal próprio fechado $I(F)$ em $\mathcal{C}^\star(X)$ definido por $I(F) = \{f \in \mathcal{C}^\star(X) : f(F) = \{0\}\}$ e $F \longrightarrow I(F)$ é uma aplicação bijetora da classe de todos os fechados não vazios de X sobre o conjunto de todos os ideais próprios fechados em $\mathcal{C}^\star(X)$.*

Obtemos como conseqüência deste Teorema 4.1.2 o seguinte resultado.

Teorema 4.1.3. *Se X é um espaço compacto de Hausdorff, então cada ideal fechado em $\mathcal{C}^\star(X)$ é a interseção de ideais maximais que o contém.*

Demonstração. Seja I um ideal fechado em $\mathcal{C}^\star(X)$. Provaremos que $I = \cap\{M : M \in \mathcal{M} \text{ e } I \subset M\}$. Se $I = \mathcal{C}^\star(X)$, então $\{M : M \in \mathcal{M} \text{ e } I \subset M\} = \phi$, e é claro que $\cap\phi = \mathcal{C}^\star(X) = I$. Se I é um ideal próprio fechado em $\mathcal{C}^\star(X)$, pelo Teorema 4.1.2, existe F, um subconjunto fechado não vazio de X, tal que $I = I(F)$. É imediato que $I \subset \cap\{M : M \in \mathcal{M} \text{ e } I \subset M\}$. Então basta provar que $I \supset \cap\{M : M \in \mathcal{M} \text{ e } I \subset M\}$. Suponhamos, por absurdo, que existe $g \in \mathcal{C}^\star(X)$ tal que $g \in \cap\{M : M \in \mathcal{M} \text{ e } I \subset M\}$, mas $g \notin I = I(F)$. Logo existe $x \in F$ tal que $g(x) \neq 0$. Observamos que o ideal maximal $M_x = \{f : f \in \mathcal{C}^\star(X) \text{ e } f(x) = 0\}$ contém I. Então $g \in M_x$ e $\therefore g(x) = 0$, o que é uma contradição. $\square$

Pelo Teorema 4.1.1, podemos identificar um espaço compacto de Hausdorff X com o espaço $\mathcal{M}$ dos ideais maximais de $\mathcal{C}^\star(X)$. Como ideais maximais em $\mathcal{C}^\star(X)$ são objetos de natureza puramente algébrica, segue que X é totalmente determinado, tanto como conjunto quanto como espaço topológico, pela estrutura algébrica de $\mathcal{C}^\star(X)$. A partir desta observação, temos o teorema seguinte.

Teorema 4.1.4 (O teorema de Banach - Stone). *Dois espaços compactos de Hausdorff X e Y são homeomorfos $\Longleftrightarrow$ as álgebras $\mathcal{C}^\star(X)$ e $\mathcal{C}^\star(Y)$ são isomorfas.*

Demonstração. Primeiramente provaremos que se dois espaços compactos de Hausdorff X e Y são homeomorfos então as álgebras $\mathcal{C}^\star(X)$ e $\mathcal{C}^\star(Y)$ são isomorfas. Consideramos o homeomorfismo $H : X \longrightarrow Y$. Se $f \in \mathcal{C}^\star(X)$ então $f \circ H^{-1} \in \mathcal{C}^\star(Y)$. De fato, $f \circ H^{-1}$ é contínua, pois f e H^{-1} são contínuas, e $f \circ H^{-1}$ é limitada, pois f é limitada. Definimos $T : \mathcal{C}^\star(X) \longrightarrow \mathcal{C}^\star(Y)$ por $T(f) = f \circ H^{-1}$. Observamos que (1). T é injetora. Dados $f_1 \neq f_2$ provaremos que $T(f_1) \neq T(f_2)$. Como $f_1 \neq f_2$, existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$. Como H é bijetora, existe o único $y \in Y$ tal que $H^{-1}(y) = x$. Logo $f_1(H^{-1}(y)) \neq f_2(H^{-1}(y))$, isto é, $(f_1 \circ H^{-1})(y) \neq (f_2 \circ H^{-1})(y)$. Logo $f_1 \circ H^{-1} \neq f_2 \circ H^{-1}$, ou seja, $T(f_1) \neq T(f_2)$. (2). T é sobrejetora. Dado $g \in \mathcal{C}^\star(Y)$, provaremos que existe $f \in \mathcal{C}^\star(X)$ tal que $T(f) = g$, ou seja, $f \circ H^{-1} = g$. De fato, basta tomar $f = g \circ H$. Logo $f \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $f \circ H^{-1} = g$. (3). T é um homomorfismo. Dados $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\star(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que (3_a). $T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$. Dado $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned}
[T(f_1 + f_2)](y) &= [(f_1 + f_2) \circ H^{-1}](y) \\
&= (f_1 + f_2)(H^{-1}(y)) \\
&= f_1(H^{-1}(y)) + f_2(H^{-1}(y)) \\
&= (f_1 \circ H^{-1})(y) + (f_2 \circ H^{-1})(y) \\
&= [(f_1 \circ H^{-1}) + (f_2 \circ H^{-1})](y) \\
&= [T(f_1) + T(f_2)](y).
\end{aligned}$$

Logo $T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$. (3_b). $T(\alpha f_1) = \alpha T(f_1)$. De fato, dado $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned}
[T(\alpha f_1)](y) &= (\alpha f_1 \circ H^{-1})(y) \\
&= (\alpha f_1)(H^{-1}(y)) \\
&= \alpha f_1(H^{-1}(y)) \\
&= \alpha(f_1 \circ H^{-1})(y) \\
&= \alpha T(f_1)(y).
\end{aligned}$$

Logo $T(\alpha f_1) = \alpha T(f_1)$. (3_c). $T(f_1 f_2) = T(f_1)T(f_2)$. Dado $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned}
[T(f_1 f_2)](y) &= [(f_1 f_2) \circ H^{-1}](y) \\
&= (f_1 f_2)(H^{-1}(y)) \\
&= f_1(H^{-1}(y)) f_2(H^{-1}(y)) \\
&= (f_1 \circ H^{-1})(y)(f_2 \circ H^{-1})(y) \\
&= [(f_1 \circ H^{-1})(f_2 \circ H^{-1})](y) \\
&= [T(f_1)T(f_2)](y).
\end{aligned}$$

Logo $T(f_1 f_2) = T(f_1)T(f_2)$. Por (1), (2) e (3), resulta que T é um isomorfismo sobrejetor, e $\therefore$ $\mathcal{C}^\star(X)$ e $\mathcal{C}^\star(Y)$ são isomorfas. A seguir provaremos que se as álgebras $\mathcal{C}^\star(X)$ e $\mathcal{C}^\star(Y)$ são isomorfas estão os espaços compactos de Hausdorff X e Y são homeomorfos. Sejam $\mathcal{M}_X$ e $\mathcal{M}_Y$ os espaços dos ideais maximais de $\mathcal{C}^\star(X)$ e $\mathcal{C}^\star(Y)$, respectivamente. Como $\mathcal{C}^\star(X)$ e $\mathcal{C}^\star(Y)$ são isomorfas, existe $T : \mathcal{C}^\star(X) \longrightarrow \mathcal{C}^\star(Y)$ um isomorfismo sobrejetor. Assim, se $M_x \in \mathcal{M}_X$ então $T(M_x) \in \mathcal{M}_Y$. Provaremos que a aplicação $M_x \longrightarrow T(M_x)$ de $\mathcal{M}_X$ em $\mathcal{M}_Y$ é bijetora. (a). A aplicação $M_x \longrightarrow T(M_x)$ é injetora. Dados $M_{x_1} \neq M_{x_2}$, provaremos que $T(M_{x_1}) \neq T(M_{x_2})$. Suponhamos, por absurdo, que $T(M_{x_1}) = T(M_{x_2})$. Como T é bijetora, temos que $T^{-1}[T(M_{x_1})] = T^{-1}[T(M_{x_2})]$. Logo $M_{x_1} = M_{x_2}$, o que é uma contradição. (b). A aplicação $M_x \longrightarrow T(M_x)$ é sobrejetora. Dado $M_y \in \mathcal{M}_Y$, provaremos que existe $M_x \in \mathcal{M}_X$ tal que $T(M_x) = M_y$. De fato, basta tomar $M_x = T^{-1}(M_y)$. Logo $M_x \in \mathcal{M}_X$ e $T(M_x) = M_y$. Por (a) e (b), temos que a aplicação $M_x \longrightarrow T(M_x)$ é bijetora. Pelo Teorema 4.1.1, sabemos que existe $y \in Y$ tal que $T(M_x) = M_y$. Vejamos o diagrama embaixo :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \longrightarrow & \mathcal{M}_X & \longrightarrow & \mathcal{M}_Y & \longrightarrow & Y \\
x & \longmapsto & M_x & \longmapsto & T(M_x) & & \\
 & & & & \shortparallel & & \\
 & & & & M_y & \longmapsto & y.
\end{array}$$

Como, pelo Teorema 4.1.1, temos que as aplicações $x \longrightarrow M_x$ e $M_y \longrightarrow y$ são bijetoras, resulta que $x \longrightarrow y$ é uma aplicação bijetora de X sobre Y. Logo podemos identificar X com Y, ou seja, $X \cong Y$. Então, dado $x \in X$, lembrando que a aplicação $x \longrightarrow M_x \longrightarrow T(M_x) = M_y \longrightarrow y$ é bijetora e o diagrama do Teorema 4.1.1, consideramos o diagrama a seguir :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{C}^\star(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\star(X)/M_x & \longrightarrow & & \mathbb{C} & & \longleftarrow & \mathcal{C}^\star(Y)/M_y & \longleftarrow & \mathcal{C}^\star(Y) \\
f & \longrightarrow & f + M_x & & & & & & T(f) + M_y & \longleftarrow & T(f) \\
& & \shortparallel & & & & & & \shortparallel & & \\
& & \alpha(I_x + M_x) & \longrightarrow & \alpha & & \beta & \longleftarrow & \beta(I_y + M_y) & & \\
& & & & \shortparallel & & \shortparallel & & & & \\
& & & & f(x) & & T(f)(y) & & & &
\end{array}$$

Provaremos que $f(x) = T(f)(y)$. Pelo diagrama acima, basta provar que $\alpha = T(f)(y)$. Como $f + M_x = \alpha(I_x + M_x)$, temos que $T(f + M_x) = T[\alpha(I_x + M_x)]$. Como T é um isomorfismo, temos que $T(f) + T(M_x) = \alpha[T(I_x) + T(M_x)]$. Logo $T(f) + M_y = \alpha(I_y + M_y)$, e existem $g_1, g_2 \in M_y$ tal que $T(f) + g_1 = \alpha(I_y + g_2)$. Logo $(T(f) + g_1)(y) = \alpha[(I_y + g_2)(y)], T(f)(y) + g_1(y) = \alpha[I_y(y) + g_2(y)]$. Logo $T(f)(y) = \alpha$, pois $g_1(y) = g_2(y) = 0$, e $I_y(y) = 1$. Portanto resulta que $f(x) = T(f)(y)$. Como já identificamos X com Y, resulta que $f = T(f)$. Sabemos que, pela demonstração do Teorema 4.1.1, a topologia de X coincide com a topologia fraca gerada por todas as $f \in \mathcal{C}^\star(X)$, e a topologia de Y coincide com a topologia fraca gerada por todas as $T(f) \in \mathcal{C}^\star(Y)$. Como $f = T(f)$ e, por hipótese, a aplicação $f \longrightarrow T(f)$ é bijetora, temos que X e Y são dois espaços topológicos coincidentes. Como a aplicação $x \longrightarrow y$ é bijetora de X sobre Y, e X e Y são dois espaços topológicos coincidentes, segue que $x \longrightarrow y$ é um homeomorfismo de X sobre Y, ou seja, X e Y são homeomorfos. $\square$

Notas Históricas

Nossa apresentação tem seguido o livro de G. F. Simmons[9]. A seguir indicamos as origens dos resultados apresentados aqui.

Capítulo 1

O teorema de aproximação de Weierstrass(Teorema 1.1.1) foi provado em 1885 por Weierstrass[10]. O teorema de Stone - Weierstrass(Teorema 1.2.3) foi provado primeiramente por M. H. Stone[7]. Veja Também Stone[8].

Capítulo 2

A Observação 2.4.9 foi publicada(sem demonstração) por Mazur[5].

Capítulo 3

$\star-$ álgebras de Banach, tanto comutativas quanto não comutativas, foram discutidas primeiramente, sob certas hipóteses especiais, por Gelfand e Neumark[3]. Em particular, eles obtiveram o teorema de Gelfand - Neumark(Teorema 3.4.1).

Capítulo 4

O primeiro resultado relativo ao Teorema 4.1.4 foi dado por Banach[1. p.170]. Ele provou que, quando X e Y são espaços métricos compactos, uma isometria entre $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$ implica um homeomorfismo entre X e Y. Stone[7] generalizou este resultado para o caso de espaços compactos arbitrários. O teorema 4.1.4, cujas hipóteses não envolvem métricas nos anéis, foi dado por Gelfand e Kolmogoroff[4], a demonstração apresentada no texto é deles. Este teorema é proveniente dos resultados mencionados acima, dados por Banach e Stone, e do fato que isomorfismo implica isometria.

Bibliografia

[1] S. Banach,*Théorie des opérations linéaires*, Warsaw,(1932).

[2] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer - Verlag, New York, (1973).

[3] I. Gelfand and M. Neumark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operadors in Hilbert space*, Mat. Sb., vol. 12 (54) (1943), 197 - 213.

[4] I. Gelfand and A. Kolmogoroff, *On ring of continuous functions on topological spaces* , Dokl. Akad. Nauk SSSR 22 (1939), 11 - 15.

[5] S. Mazur, *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 207 (1938), 1025.

[6] L. A. Medeiros, *Introdução às Funções Complexas*, McGraw - Hill do Brasil, (1972).

[7] M. H. Stone, *Application of the Theory of Boolean Rings to General Topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, (1937) 375 - 481 [Z 17, p. 135].

[8] M. H. Stone, *The Generalized Weierstrass Approximation Theorem*, Math. Mag. **21**, (1948) 167 - 184, 237 - 254 [MR 10, p. 255].

[9] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw - Hill, New York, (1963).

[10] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente*, S. B. Deutsch AKad. Wiss. Berlin KL. Math. Tech. (1885), 633 - 639, 789 - 805.