

DEFEITOS TOPOLÓGICOS: TEXTURAS.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Eduardo Guéron e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de novembro de 1996



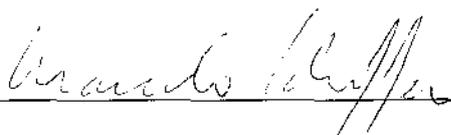
Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor

Orientador

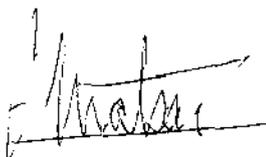
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 28 de novembro de 1996

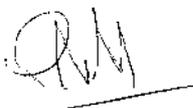
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MARCELO SCHIFFER



Prof (a). Dr (a). GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS



Prof (a). Dr (a). PATRICIO ANIBAL LETELIER SOTOMAYOR

Dedico a

**Suzana, Sabrina
Lélia e Mariana.**

Agradecimentos:

Ao Prof. Patricio A. Letelier Sotomayor pela excelente orientação, pelo respeito ao orientado e pelo profissionalismo.

Ao Prof. Marcelo Schiffer pelos cursos e pela ajuda em geral no esclarecimento de problemas.

Aos professores Fernando Paixão, Paulo Sakanaka, Guillermo González pelas contribuições .

À Ângela (biblioteca do IFGW) e todos os funcionários dessa biblioteca.

À Fátima do departamento de Matemática Aplicada.

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação do IMECC.

A Cordélia, Sérgio, Rodrigo, Isabel, Helena.

A Carmem, Inês.

A Leda, Valquíria e Everardo.

Aos amigos

-Pedro C., Celso, Vitor (Sal), Eduardo S., Harry, Daniela e Marcelo A.

-Cristiane, Cláudia, Patrícia, Pedro, Gisele e Pilar.

-Ed, Joyce, Rossana, Alessandra e Fernanda.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo	4
Abstract	5
1 Defeitos Topológicos	6
1.1 Quebra de Simetria	6
1.2 Paredes de Domínio	9
1.3 Cordas Cósmicas	11
1.4 Monopolos	14
1.5 Texturas	16
2 Textura	19
2.1 Obtenção da Textura	19
2.2 Perturbação da métrica	22
2.3 Análise Newtoniana.	24
2.4 Métrica Induzida pela Textura	33
2.5 Outras Texturas	38
3 Conclusão	41
A Grupos de Homotopia	42
Bibliografia	43

Resumo

Realizamos um estudo sobre defeitos topológicos, estruturas formadas ao longo do processo de quebra de simetria do vácuo. Após um resumo dos modelos mais simples para estes defeitos trabalhamos mais profundamente com textura, um tipo de defeito topológico global que pode ser visualizado como um ponto no espaço-tempo, um evento singular.

Fazemos uma revisão de artigos sobre texturas e incluímos alguns resultados e críticas. Revemos modelos de anisotropia na radiação de fundo causada pela textura e estudamos o uso de uma solução analítica para simular o processo de formação de estruturas de larga escala. Finalmente sugerimos um possível defeito topológico proveniente da quebra de simetria de grupos não abelianos.

Abstract

Topological defects, structures formed during the spontaneous symmetry breaking process are studied. Firstly we make a summary of the simplest models for these defects. Then we look closely the textures, a global topological defect that can be represented as a point in space-time, i.e., an event.

We examine some articles about textures adding some results and criticisms. We make a review of models of textures as seeds to fluctuations in the cosmic background radiation density. The use of analytic solution is study in connection with creation of large scale structures. Finally, we suggest a new topological defect obtained from the symmetry breaking of non-Abelian groups .

Capítulo 1

Defeitos Topológicos

1.1 Quebra de Simetria

Nas teorias modernas de unificação dos campos é de grande importância o processo conhecido como quebra espontânea de simetria [1]. A hipótese é que em alguma época do Universo havia uma simetria no vácuo que não é observada hoje em dia. Com a expansão cosmológica a temperatura foi diminuindo e esta simetria foi se quebrando em sucessivos processos até chegar ao que encontramos hoje no vácuo que é $SU(3) \times U(1)$, o primeiro das interações fortes e o segundo do eletromagnetismo. De todos os possíveis processos de quebra de simetria o que possui maior comprovação experimental é aquele onde se quebra a simetria da força eletrofraca, $SU(2) \times U(1)$, na eletromagnética, $U(1)_{EM}$, e fraca, que não tem simetria definida [2]. A hipótese de que a simetria não observada foi quebrada a medida que a temperatura do universo caiu sugere que de alguma forma deve haver um potencial detentor de uma maior simetria que se quebra espontaneamente. Um modelo simples é dado pela lagrangeana para o campo real ϕ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \\ V(\phi) &= -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Observa-se que esta lagrangeana tem a simetria de reflexão $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(-\phi)$, no entanto de acordo com a física quântica o estado do vácuo, i.e. estado fundamental, deve ser escolhido em torno de um ponto de equilíbrio estável do potencial clássico $V(\phi)$. Para o potencial escrito em (1.1) este

estado corresponde aos possíveis valores médios de ϕ :

$$\langle \phi \rangle_{\pm} = \pm \sqrt{m^2/\lambda}. \quad (1.2)$$

Torna-se evidente que em torno de um dos estados fundamentais se perde a simetria de reflexão desta Lagrangeana.

O tensor de energia momento canônico para o campo escalar ϕ é dado por

$$T_{\mu}^{\nu} = \partial_{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi - \mathcal{L}g_{\mu}^{\nu}. \quad (1.3)$$

Tomando um valor constante para $\phi = \pm\sqrt{m^2/\lambda}$ a densidade de energia do vácuo fica:

$$\langle T_0^0 \rangle = \rho_v = -\frac{m^4}{4\lambda}. \quad (1.4)$$

Devemos exigir que a energia do vácuo seja menor do que qualquer outra energia fundamental encontrada na natureza, uma boa escolha, portanto, é se anular. Para tanto se acrescenta à lagrangeana anterior o termo m^4/λ deste modo um modelo mais aceitável tem a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2. \quad (1.5)$$

A forma deste novo potencial é semelhante à equação (1.1), no entanto há que se estudar com mais cuidado os mínimos, ou seja, os pontos de equilíbrio estável. Podemos fazer uma análise qualitativa da simetria do potencial aumentando a temperatura de modo a chegarmos em uma alta temperatura aceitável como sendo a do universo primordial. Consideremos o Universo primordial como uma sopa de plasma, usando uma aproximação para alta temperatura [4], o potencial tem a forma:

$$V_T(\phi) = V(\phi) + \frac{a}{2}T^2\phi^2, \quad (1.6)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial dado em (1.5) e a é uma constante dimensional que depende do parâmetro λ e do acoplamento de Yukawa. Deste modo em $\langle \phi \rangle = 0$ a segunda derivada do potencial vale $aT^2 - \lambda\eta^2$, conseqüentemente para $T > \eta(\frac{\lambda}{a})^{(1/2)}$ este é um ponto de equilíbrio estável e a massa do bóson físico correspondente a este campo é $m_T^2 = \frac{1}{2}(aT^2 - \lambda\eta^2)$. A partir do valor crítico $T_c = \eta(\frac{\lambda}{a})^{(1/2)}$ se quebra a simetria pois o ponto $\langle \phi \rangle = 0$ não é mais mínimo local.

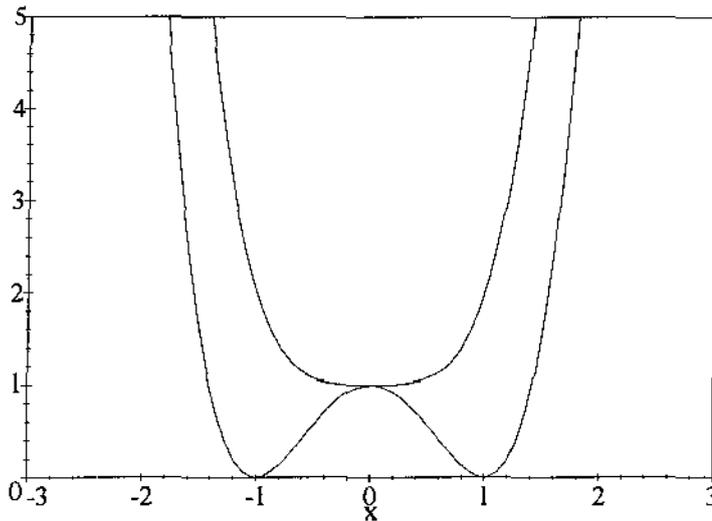


Figura 1.1: Esquema qualitativo da quebra de simetria de um campo escalar simples.

A quebra espontânea de simetria no entanto não ocorre suavemente como foi descrito aqui, defeitos topológicos surgem durante esse processo. Estes podem ser paredes, cordas, monopolos ou texturas determinados de acordo com o grupo de simetria do potencial, relacionado, neste caso, com o número de campos escalares que constituem o multipletto ϕ^a . Podemos justificar a necessidade do aparecimento dos defeitos no fato de que deve haver somente um mínimo no potencial que corresponda ao ponto de vácuo, porém o potencial de (1.5) possui dois no caso que ϕ é um singleto, onde a lagrangeana tem uma simetria discreta e um anel, uma superfície ou algum conjunto de mínimos no caso de ϕ ser um multipletto e a lagrangeana tem uma simetria contínua que é quebrada.

O defeito é, na realidade, uma região de falso vácuo distribuída em torno do ponto que correspondia ao mínimo do potencial quando $T > T_c$, ($\phi = 0$). A sua estabilidade é garantida por uma carga topológica que se conserva. A quebra de simetria em si é feita através de condições de contorno ou vínculos que alteram a simetria do campo. O termo falso vácuo é usado pois o tensor de energia-momento do defeito não é nulo porém ele é a solução estável localizada em torno do ponto de vácuo que minimizava a lagrangeana antes quando a temperatura era maior do que a crítica.

Genericamente se imagina que a lagrangeana tem uma simetria maior e esta é decomposta em subgrupos onde ocorre a quebra de simetria, fisicamente podemos imaginar que o campo de ϕ é constituído de uma superposição não linear de campos de bósons, cada qual pertencendo a um determinado grupo de simetria, esquematicamente teríamos

$$SU(5) \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times U(1). \quad (1.7)$$

1.2 Paredes de Domínio

O mais simples dos defeitos é a parede de domínio (domain wall), este pode acontecer quando ϕ é um campo escalar simples e há inicialmente simetria de reflexão do potencial, ou seja, se cria a parede quando a simetria Z_2 é quebrada, ou ainda, alguma outra simetria discreta.

Considerando que a parede se encontra no plano xy , ou seja a solução não depende destas coordenadas, podemos definir um funcional de energia positivo e finito associado à lagrangeana dada em (1.5)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\frac{1}{2} [(\partial_z \phi)^2 + (\partial_t \phi)^2] + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2 \right]. \quad (1.8)$$

A condição de que este funcional seja finito implica na anulação das derivadas do campo no infinito além de ϕ tender assintoticamente aos mínimos do potencial (não necessariamente o mesmo). Isto posto definimos a corrente k^μ e a carga Q para este potencial

$$k^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (1.9)$$

$$Q = \sqrt{\lambda}/m \int_{-\infty}^{\infty} dx k^0, \quad (1.10)$$

para este caso facilmente verificamos que Q se conserva pois

$$Q = \phi|_{\infty} - \phi|_{-\infty}, \quad \frac{dQ}{dt} = \dot{\phi}|_{\infty} - \dot{\phi}|_{-\infty} = 0 \quad (\text{por hipótese}).$$

Podemos notar também que a solução trivial, $\phi = \pm\eta$, tem carga topológica nula queremos, no entanto, uma solução estável topologicamente que não pode ser deformada na trivial pois desta forma estaríamos escolhendo arbitrariamente o ponto de vácuo. A equação proveniente de (1.8) é

$$\square\phi + \lambda\phi(\phi^2 - \eta^2) = 0, \quad (1.11)$$

vinculando-a à condição

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \phi_0(z) = \pm\eta, \quad (1.12)$$

temos uma solução com carga topológica não nula que, portanto, pertence a outro setor topológico. De certa forma o que estamos fazendo é separar os dois pontos de mínimo por uma parede que será a região de falso vácuo. A solução estática é

$$\phi_0(z) = \eta \tanh(z/\delta) \quad (1.13)$$

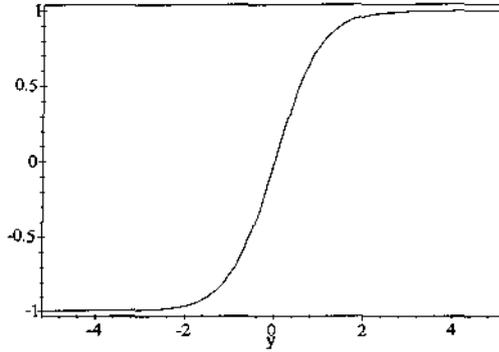


Figura 1.2: Solução tipo kink para uma parede.

onde $\delta = (\lambda^{-1/2}\eta^{-1})$ se interpreta como a largura da parede. No limite para η muito grande o gráfico do potencial em função de z nos mostra que os dois mínimos são separados por uma função que tende a uma delta de Dirac em $z = 0$. O Tensor de energia-momento para o campo dado por (1.13) é

$$T_{\nu}^{\mu} = \lambda\eta^4[\cosh(z/\delta)]^{-4}\text{diag}(1, 1, 1, 0), \quad (1.14)$$

que nos mostra que a densidade newtoniana associada [5], $\rho_{newt} = \rho + p_x + p_y + p_z$, é negativa, ou seja o efeito da parede sobre uma partícula de teste é repulsivo.

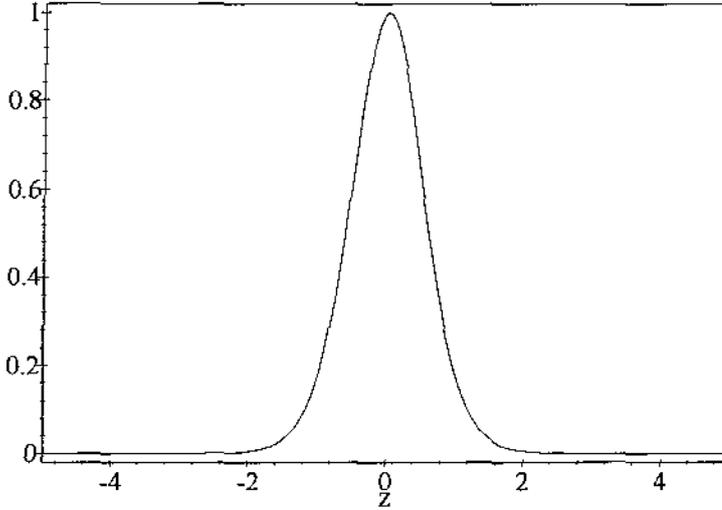


Figura 1.3: Representação da parede. O gráfico mostra que ela está localizada no centro do potencial.

1.3 Cordas Cóslicas

Quando a lagrangeana tem simetria abeliana $U(1)$ [6] e esta se quebra aparece o defeito topológico chamado de corda cósmica. A lagrangeana usada neste caso tem a forma inicial semelhante a dada em (1.5) no entanto a simetria do campo nos leva à definição de um campo escalar complexo de modo que a lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - \frac{\lambda}{4} (\Phi \Phi^* - \eta^2)^2. \quad (1.15)$$

O exemplo mais simples de corda é a global, obtida considerando a simetria global $U(1)$. A lagrangeana (1.15) é invariante pela transformação global

$$\Phi \rightarrow e^{i\theta} \Phi. \quad (1.16)$$

A corda será escrita da forma:

$$\Phi = v(\rho) e^{iN\theta}, \quad (1.17)$$

neste caso o mecanismo de quebra de simetria gera bósons de Goldstone [7] e a simulação numérica da evolução deste tipo de corda mostra que a energia destes não são compatíveis com a escala de GUT (Grand Unified Theory), que determina a faixa de temperatura do Universo na época de quebra de simetria.

A alternativa é se trabalhar com simetria local. Pressupondo a simetria $U(1)$ a lagrangeana acima deveria ser invariante pela transformação dependente da posição

$$\Phi \rightarrow e^{i\theta(x)}\Phi. \quad (1.18)$$

A parte que possui o módulo quadrado de Φ claramente é invariante sob essa transformação contudo, como a função θ depende de x , a parte que possui a derivada de Φ não é invariante pois se transforma como

$$\partial^\mu \Phi \rightarrow e^{-i\theta} \partial^\mu \Phi - i(\partial^\mu \theta) e^{-i\theta} \Phi. \quad (1.19)$$

O que se faz é adicionar ao sistema o campo vetorial A^μ que obedece:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta, \quad (1.20)$$

onde e é uma constante. Deste modo o termo $(\partial^\mu + ieA^\mu)\Phi$, que é uma derivada covariante do campo Φ , se transforma como

$$(\partial^\mu + ieA^\mu)\Phi \rightarrow e^{-i\theta}(\partial^\mu + ieA^\mu)\Phi. \quad (1.21)$$

A introdução do campo A^μ na lagrangeana nos obriga a acrescentar a derivada de A^μ , definindo

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.22)$$

ficamos com a seguinte forma para a lagrangeana com simetria local $U(1)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi^*(\partial^\mu + ieA^\mu)\Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi\Phi^* - \eta^2)^2. \quad (1.23)$$

Claramente podemos ver que tal expressão tem a simetria local do grupo abeliano $U(1)$ e é interessante observar que esta é a forma da lagrangeana de interação do campo vetorial eletromagnético A^μ com um campo escalar de spin zero Φ . Esta simetria, $U(1)_{EM}$, é encontrada atualmente no vácuo para o eletromagnetismo após a diminuição temperatura do universo ao longo de

sua evolução mas neste caso em que trabalhamos A^μ não é necessariamente o campo vetorial do eletromagnetismo.

Como Φ é uma campo complexo podemos escrevê-lo em função de dois campos escalares reais

$$\Phi = (\phi + i\phi_1)/\sqrt{2}. \quad (1.24)$$

De modo análogo ao explicado anteriormente a simetria desta lagrangeana tende a se quebrar a medida que a temperatura do Universo diminui. O ponto de mínimo estável do potencial $V(\Phi)$ era $\langle \Phi \rangle = 0$ e passa a ser um círculo de mínimos localizado no plano complexo definido por ϕ e ϕ_1 , $\langle \Phi \rangle = \eta e^{i\theta(x)}$, onde a fase θ pode depender da posição.

O estado fundamental, no entanto, deve ser único. Podemos imaginar um caminho fechado. O valor que se acrescenta ao ângulo θ quando completamos o percurso, $\Delta\theta$, deve ser um múltiplo de 2π . Todavia, para deformarmos esta trajetória de modo a contraírmolos o anel de mínimos em um único ponto, cria-se uma deformação no caminho fechado através de um déficit em $\Delta\theta$. Este tipo de recurso pode ser visualizado como a "transformação" do disco plano, que contém o anel, em um cone e os caminhos fechados tendem ao vértice deste. Por isso este tipo de deformação gera o que se chama de singularidade cônica. A linha transversal ao plano de Φ é, portanto, uma representação assintótica da região de falso vácuo chamada de corda cósmica.

A solução a grandes distâncias para este tipo de corda é

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \eta e^{iN\theta}, \\ A^\mu &\approx -ie^{-1}\partial_\mu[\ln(\Phi/\eta)], \end{aligned} \quad (1.25)$$

e a métrica aproximada para este tipo de corda tem a forma¹:

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 - (1 - 4G\mu)r^2 d\theta^2. \quad (1.26)$$

O déficit do ângulo é mostrado na componente $g_{\theta\theta}$ da métrica e μ é a densidade linear da corda.

O *winding number* (número de voltas) N que aparece nas soluções (1.17, 1.25) significa quantas vezes esta solução cobre o espaço e é de vital importância pois ele garante a estabilidade topológica da solução uma vez que a solução exata está localizada no máximo do potencial.

Genericamente o *winding number* é definido de forma análoga a carga topológica como uma quantidade que se conserva. Para uma solução axialmente simétrica

¹ Consideramos nesta solução e em todo o restante da dissertação $c = 1$.

$$\Phi = \nu(\rho)e^{f(\theta)}, \quad (1.27)$$

ele se escreve da forma

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_1 f'(\theta) d\theta. \quad (1.28)$$

No caso da corda fica interessante perceber que no processo de quebra de simetria a corda quebra o grupo $U(1)$ no grupo de simetria discreta Z_n , onde este mesmo N é o *winding number* da corda.

A corda é, por enquanto, o defeito topológico com mais interesse no processo de formação de estruturas. Estuda-se a evolução temporal de várias cordas e todos os processos dinâmicos envolvidos, com isso se chega a tipos bem mais complexos de cordas como *loops* e malhas de cordas que não são descritos ao longo da tese mas, sem dúvida, corda cósmica é o defeito topológico que mais despertou interesse no contexto de cosmologia.

1.4 Monopolos

O primeiro grupo não abeliano (não comutativo) na sequência é $SU(2)$, portanto o campo escalar a ser considerado é um duplete complexo. Através de condições que se impoem a este campo quebramos a simetria da lagrangeana similar a dada em (1.5) e obtemos um defeito topológico de simetria esférica, o monopolo.

A forma mais simples do monopolo é feita usando simetria $SO(3)$ na lagrangeana, parametrizando o campo como um tripleto real, o que pode ser feito porque a álgebra de $SU(2)$ é isomórfica a $SO(3)$. A solução estática mais simples é obtida considerando Φ com módulo constante

$$\Phi \cdot \Phi = 1.$$

Podemos obter soluções com este vínculo mas jamais teremos soluções não triviais tipo sólitons. Sólitons neste caso são soluções localizadas, energia finita mas não nula, que nos extremos anulam o funcional de energia.

A afirmação acima é consequência direta do teorema virial de Derrick [8] que é resumido a seguir:

Seja o funcional de energia estático definido no espaço de dimensão D

$$\begin{aligned}
W[\phi] &\equiv \int d^D x \left[\frac{1}{2} \nabla_i \phi \cdot \nabla_i \phi + U(\phi(\mathbf{x})) \right], \\
&\equiv \int d^D x [V_1[\phi] + V_2[\phi]].
\end{aligned}$$

Encontrando uma solução estática $\phi_1(x)$ que minimiza o funcional W podemos definir a família de um parâmetro

$$\phi_\lambda(x) = \lambda \phi_1(x).$$

Daí chega-se que

$$W[\phi_\lambda] = \lambda^{2-D} V_1[\phi_1] + \lambda^{-D} V_2[\phi_1],$$

como ϕ_1 é um extremo a variação de W com respeito a λ deve ser zero em $\lambda = 1$, nos levando ao resultado abaixo

$$(2 - D)V_1[\phi_1] = DV_2[\phi_1]. \quad (1.29)$$

Por (1.29) vemos que quando D é maior que 2 a única solução possível é um campo ϕ que anule $V_1[\phi]$ e $V_2[\phi]$ já que ambos são positivos definidos. Como este resultado vale em todo espaço concluímos que não há soluções não triviais, sólitons.

Em virtude do resultado acima, a alternativa é trabalhar com um campo de spin não nulo. A forma mais simples é escrever a lagrangeana para um campo de spin-1, em particular campos de gauge. Assim como é feito para as cordas locais (1.23), que têm simetria $U(1)$, acopla-se tal campo à lagrangeana que passa a ter simetria local $SU(2)$.

Diferentemente da teoria $U(1)$, o grupo de simetria $SU(2)$ não é abeliano e portanto a álgebra do espaço interno não é comutativa. O campo de gauge não é simplesmente um campo vetorial como na teoria $U(1)$, ele passa a ter índice interno que varia de acordo com o número de geradores do grupo, neste caso três.

Quando afirmamos que a lagrangeana tem simetria local $SU(2)$ equivale dizer que ela é invariante pelas transformações abaixo:

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow [U(\mathbf{x}, t)]_{ab} \phi(\mathbf{x}, t), \quad (1.30)$$

e

$$(L^a A_\mu^a)_{bc} \rightarrow U_{bd} [L^a A_\mu^a + (i/g) I \partial_\mu]_{de} (U^{-1})_{ec}, \quad (1.31)$$

onde

$$[U(\mathbf{x}, t)]_{bc} = [\exp\{-iL^a \theta^a(\mathbf{x}, t)\}]_{bc}, \quad (1.32)$$

é um membro do grupo $SU(2)$, sendo que nessa representação de matrizes 3×3 $(L^a)_{bc} = i\varepsilon_{abc}$.

Deste modo a densidade de lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{8} \lambda (\phi^a \phi^a - \sigma^2)^2, \quad (1.33)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ D_\mu \phi^a &= \partial_\mu \phi^a - e\varepsilon_{abc} A_\mu^b \phi^c. \end{aligned}$$

Nesta configuração obtemos uma solução esfericamente simétrica não deformável e quando $r \rightarrow \infty$ tende a

$$\begin{aligned} \phi^a(r, t) &\rightarrow \sigma \hat{\mathbf{r}}, \\ A_\mu^a(r, t) &\rightarrow \varepsilon_{\mu ab} \hat{\mathbf{r}}_b / er. \end{aligned}$$

A simetria $SU(2)$ nos permite associar um campo magnético à solução acima também no limite a longas distâncias

$$B_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a = \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}^a}{er^2}.$$

1.5 Texturas

A quebra de simetria do grupo $SU(2)$ em $SU(1)^2$ sugere o aparecimento de texturas. No caso dos monopolos $SU(2)$ é quebrado no grupo $U(1)$

²O grupo $SU(1)$ equivale simplesmente ao número 1, ou seja, não há nenhum grau de liberdade.

Considera-se, inicialmente, a representação bi-dimensional do grupo $SU(2)$ [9] onde cada elemento do grupo é uma matriz 2×2 unitária com entrada complexa, $UU^\dagger = I$. Através das matrizes abaixo³.

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

se constrói um campo escalar Φ de modo que a lagrangeana é invariante pela transformação $\mathcal{L}(\Phi) = \mathcal{L}(U\Phi U^\dagger)$. O campo Φ é completamente definido por um conjunto de campos reais ϕ^a

$$\Phi = \sum_{a=0}^3 \phi_a \cdot s_a, \quad (1.35)$$

de modo que podemos trabalhar com um quadripleto real ϕ . No caso da textura a condição $\Phi^\dagger \cdot \Phi = \eta^2 I$ é equivalente a

$$\phi^a \phi^a = \eta^2. \quad (1.36)$$

Quando se está interessado apenas nos campos escalares, i.é, não usando campos de gauge é usual trabalhar com a textura numa lagrangeana com simetria maior, $SO(4)$, e se parametriza o campo escalar como um quadripleto real que quebra a simetria desta lagrangeana através da condição (1.36). Esta representa, na realidade, uma aproximação como a da solução de cordas dada em (1.25).

O grupo $SU(2)$ é isomórfico a S^3 . Isto pode ser verificado através da parametriza-

ção dos elementos do grupo na soma de números reais que multiplicam as matrizes dadas em (1.34), a condição de unitariedade do grupo leva à equação de uma 3-esfera assim como a textura. Deste modo temos que qualquer outro defeito topológico com dimensão maior não poderia ser obtido da quebra de simetria $SU(2) \rightarrow SU(1)$.

A textura é representada naturalmente por um campo escalar com quatro componentes reais, esta característica a torna um defeito topológico peculiar pois a dimensão do espaço interno é a mesma do espaço-tempo, fazendo com que este seja um defeito topológico de dimensão zero, cuja representação é um ponto no espaço-tempo, um evento singular.

³As matrizes s_1, s_2, s_3 são obtidas multiplicando por i as matrizes de Pauli.

Uma das primeiras soluções para textura é obtida por Davis [10] que parametriza o campo ϕ como

$$\phi = \eta (\cos \chi, \sin \chi \cos \varphi \sin \theta, \sin \chi \sin \varphi \sin \theta, \sin \chi \cos \theta),$$

e introduz (1.36) na ação usando multiplicador de lagrange de modo a ter a forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - \eta^2)^2 + \alpha (\phi^a \phi^a - \eta^2) \right). \quad (1.37)$$

A minimização desta ação e a especificação dos ângulos θ , φ e χ nos levam aos possíveis tipos de textura. Davis trabalha usando a métrica para o Universo com curvatura positiva e estuda o comportamento da textura. Outros autores reformulam esta idéia e definem condições sobre o comportamento da carga topológica da textura. O estudo mais detalhado será feito nos próximos capítulos.

É interessante classificar os defeitos topológicos através de três características básicas: a dimensão do seu comportamento assintótico (pontos, linhas, etc.), a menor simetria que quando quebrada origina tal defeito e, finalmente, uma classificação homotópica do defeito. Esta classificação homotópica é, na realidade, o que caracteriza mais rigorosamente o defeito. Durante o processo de quebra de simetria quando a temperatura ainda não atingiu o ponto crítico a solução que caracteriza o vácuo é trivial, o mínimo do funcional de energia definido. Quando a temperatura ultrapassa esse valor a solução natural é a chamada de falso vácuo e temos uma variedade M que caracteriza o defeito topológico. A classificação homotópica⁴ deste defeito se faz verificando o grupo de homotopia de M que é isomórfico a Z . Quando dizemos, portanto, que a classificação homotópica de um defeito é $\pi_1(M)$ dizemos que $\pi_1(M) \approx Z$.

No espaço-tempo quadridimensional podemos fazer um esquema dos defeitos topológicos classificados pelos critérios acima [7]:

paredes	Z	dim=3	$\pi_0(M)$
cordas	$U(1)$	dim=2	$\pi_1(M)$
monopolos	$SU(2)$	dim=1	$\pi_2(M)$
texturas	$SU(2)$	dim=0	$\pi_3(M)$

⁴Uma noção de homotopia é apresentada no apêndice A.

Capítulo 2

Textura

2.1 Obtenção da Textura

Através da minimização da ação escrita em (1.37) chegamos à equação de movimento da textura

$$\square\Phi^a = -\frac{\nabla^\mu\Phi^b\nabla_\mu\Phi_b}{\eta^2}\Phi^a. \quad (2.1)$$

Para se resolver a equação acima parametrizamos Φ^a como uma 3-esfera no espaço-tempo na forma

$$\Phi^a = \eta(\cos\chi, \sin\chi\sin\theta\cos\varphi, \sin\chi\sin\theta\sin\varphi, \sin\chi\cos\theta), \quad (2.2)$$

de modo que uma possível solução é identificar φ e θ com os ângulos usualmente definidos em coordenadas esféricas e o ângulo χ sendo função de r e t ¹. Deste modo descrever a evolução deste tipo de textura se reduz a solucionar uma equação de movimento para $\chi(r, t)$, trabalharemos, pois, com um campo escalar simples.

Conseqüentemente quando ignoramos o efeito de curvatura da textura, trabalhando com a métrica de Minkowski, chegamos à equação para $\chi(r, t)$

$$\tilde{\chi} - \chi'' - \frac{2}{r}\chi' = -\frac{\sin 2\chi}{r^2}, \quad (2.3)$$

onde a linha denota derivada em relação a r e o ponto em relação a t .

¹Devemos ressaltar que fazendo isso estamos limitando o conjunto de soluções.

A solução proposta por Turok [11] deve ser do tipo auto-similar [12], tal que por uma transformação de similaridade em t podemos mapear regiões com diferentes valores de r . Portanto para resolver (2.3) procuramos uma variável de similaridade através dos geradores da equação diferencial parcial. Usamos, dentro do ambiente do programa de computação algébrica REDUCE, o pacote SPDE (Symmetries in Partial Differential Equations) [13], encontramos os geradores diferenciais da equação e, a partir deles, definimos que as possíveis variáveis de similaridade são r , que nos leva a algo como um monopolo estático e $u = r/t$ que é a que nos interessa. Usando esta última variável (2.3) toma a forma abaixo

$$\chi'' + \frac{2}{u}\chi' = \frac{\sin 2\chi}{u^2(1-u^2)}, \quad (2.4)$$

onde a linha denota derivada em relação a u .

Apenas com a definição desta variável podemos deduzir algumas propriedades da solução auto-similar da textura.

O tensor de energia-momento tem a forma

$$(T_{\nu}^{\mu}) = \frac{\eta^2(\chi')^2}{2t^2} \begin{pmatrix} 1 + u^2 + F^2 & 2u & 0 & 0 \\ -2u & -1 - u^2 + F^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

onde $F^2 = \frac{2 \sin^2 \chi}{u^2(\chi')^2}$.

Quando o diagonalizamos obtemos

$$(T_{\nu}^{\mu}) = \frac{\eta^2(\chi')^2}{2t^2} \begin{pmatrix} |1 - u^2| + F^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|1 - u^2| + F^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - u^2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

O auto-vetor, não normalizado, correspondente ao auto-valor $|1 - u^2| + F^2$ é

$$\xi^{\mu} = \begin{cases} (-u, 1, 0, 0) & u > 1 \\ (-1, u, 0, 0) & u < 1 \end{cases}, \quad (2.7)$$

a norma $\xi^\mu \xi_\mu$ é positiva nos dois casos o que, na assinatura usada, equivale a caracterizar ξ^μ como vetor tipo tempo. A ordem dos auto-valores dado em (2.6), portanto, é determinada visto que T_0^0 no tensor diagonalizado deve ser o valor próprio associado ao auto-vetor tipo tempo. Podemos calcular a densidade newtoniana, ρ_{Newt} , dentro e fora do cone de luz do ponto central, chegando a:

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{dentro do cone} \\ \frac{8\eta^2(r^2-t^2)}{(r^2+t^2)^2} > 0 & \text{fora do cone} \end{cases} \quad (2.8)$$

Caracterizando, assim, um potencial gravitacional newtoniano atrativo na região externa ao cone de luz e sem efeito newtoniano dentro do cone, qualquer que seja a solução de (2.4).

Turok propõe para solucionar (2.4) que o campo parametrizado em (2.2) seja tal que, quando $r, t \rightarrow -\infty$ tenha a forma $\Phi = (-1, 0, 0, 0)$ e em $r, t \rightarrow +\infty$ é $\Phi = (1, 0, 0, 0)$, o que significa que o campo muito antes do colapso da textura está apontando para o polo sul da 3-esfera e muito depois ele terá sofrido uma reflexão de modo que apontará para o polo norte.

Além disto ele propõe que em $t = 0$ se acrescenta π ao campo χ o que caracteriza um nó da solução. Em termos de carga topológica mostraremos mais adiante que a solução muda de setor topológico neste instante diminuindo sua carga de 1 para 0 dizemos por isso que esta é uma textura *unwinding*.

As condições transferidas para χ nos levam a solução abaixo:

$$\chi(r, t) = \begin{cases} 2 \arctan(-r/t), & t < 0 \\ 2 \arctan(r/t) + \pi, & t > r > 0 \\ 2 \arctan(t/r) + \pi, & r > t > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Substituindo esta solução em (2.6) o tensor de tensões diagonalizado fica:

para $r < |t|$

$$(T_\nu^\mu) = \frac{2\eta^2}{(r^2+t^2)^2} \begin{pmatrix} 3t^2 - r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 - r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 - r^2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

para $r > |t|$

$$(T_{\nu}^{\mu}) = \frac{2\eta^2}{(r^2 + t^2)^2} \begin{pmatrix} t^2 + r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3t^2 - r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 - r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 - r^2 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Um dos aspectos a se ressaltar desta solução é a singularidade encontrada apenas no ponto $r = t = 0$ no tensor de energia-momento o que caracteriza bem a idéia de textura como um evento.

A carga topológica Q para esta solução é definida pela integral abaixo

$$Q = \frac{1}{2\pi^2} \iiint \sin^2 \chi(r, t_0) \sin^2 \theta dr d\theta d\varphi, \quad (2.12)$$

a integração é feita em todo o espaço e se considera a parte estática de χ fixando um instante t_0 . Com a solução (2.9) a carga é

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi} (\chi(r \rightarrow \infty) - \chi(r \rightarrow 0)), \\ &= \begin{cases} 1, & \text{para } t_0 < 0 \\ 0, & \text{para } t_0 > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2 Perturbação da métrica

A partir da solução (2.9) o próximo interesse é verificar as possíveis contribuições das texturas na formação de estruturas de larga escala como flutuações na densidade da radiação de fundo. Uma aproximação analítica é feita por Turok e Spergel [14] onde escrevem a métrica perturbada pela textura modo que:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

Usando o tensor de energia-momento não diagonalizado que tem a forma

$$\begin{aligned} T_{00} &= 2\eta^2 \frac{r^2 + 3t^2}{(r^2 + t^2)^2}, \\ T_{0i} &= -4x^i \eta^2 \frac{t}{(r^2 + t^2)^2}, \\ T_{ij} &= 2\delta_{ij} \eta^2 \frac{r^2 - t^2}{(r^2 + t^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

define-se as componentes do tensor $h_{\mu\nu}$ dado em (2.14). A parte espacial da métrica perturbada pode ser escrita, após uma transformação de coordenadas, como

$$dr^2 + r^2\left(1 - \frac{4}{3}\epsilon\right)d\Omega^2,$$

que é um espaço chato menos um ângulo sólido proporcional ao parâmetro da textura $\epsilon = 16\pi G\eta^2$. Este "déficit" de ângulo sólido caracteriza uma singularidade tipo nó, de forma análoga o déficit do ângulo polar caracteriza a singularidade cônica no caso de cordas cósmicas.

Através do cálculo de Wolfe-Sach [15] os autores descrevem a variação da energia δE de um fóton após passar pelo cone de luz de uma textura. Seja $\bar{x}^\mu = n^\mu \lambda$ a trajetória não perturbada do fóton com momento $\bar{p}^\mu = En^\mu$, E = energia, λ é um parâmetro afim e n^μ um vetor nulo com $n^0 = 1$. Perturbando a trajetória do fóton o seu momentum passa a ser $p^\mu = \bar{p}^\mu + \delta p^\mu$. Deste modo, calculando a métrica de (2.14), definimos os símbolos de Christoffel para campo fraco, conseqüentemente temos a seguinte equação de geodésica para a variação do momento do fóton

$$\left. \frac{\delta p^0}{\bar{p}^0} \right|_{\lambda_i}^{\lambda_f} = \frac{1}{2} \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} h_{\mu\nu,0} n^\mu n^\nu d\lambda + (h_{0\mu} n^\mu)_i^f. \quad (2.16)$$

A partir de (2.16) podemos chegar à variação da energia considerando que o fóton foi emitido por uma partícula massiva e absorvida por outra a uma distância muito grande, o resultado para a textura obtido por Turok e Spergel é

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\epsilon\pi}{2} \frac{t_0}{(2R^2 + t_0^2)^{1/2}}, \quad (2.17)$$

onde t_0 é o instante em que o fóton cruza o cone de luz da textura em relação ao tempo definido como $t = 0$ quando ela colapsa, ou seja, t_0 é negativo se o fóton cruza o cone de luz antes do colapso e positivo se cruza depois. Observando (2.17) conclui-se que há um aumento da energia do fóton quando $t_0 > 0$ e um decréscimo quando $t_0 < 0$, a partir disto esperamos encontrar na radiação de fundo discos de inhomogeneidade com desvio para o azul ou para o vermelho, com os parâmetros observacionais como raio e intensidade determinados a partir de η , que determina ϵ_0 , e de t_0 .

O recente artigo de Phillips[16] contesta os resultados obtidos por Turok pois a hipótese usada por este último é que a anisotropia da radiação de

fundo é dominada por defeitos mais energéticos e mais isolados. Porém, resultados numéricos em uma simulação completa da teoria² indicam que o contribuição dominante é de defeitos menos energéticos e mais numerosos, basicamente se conclui que a incidência de texturas *unwinding* é pequena em relação às outras e sua contribuição para gerar flutuações na radiação de fundo pode ser desprezada, mesmo considerando o fato de as primeiras serem mais energéticas devido ao processo de mudança de carga que ocorre na origem temporal.

Por tudo que foi dito concluímos a solução exata obtida por Turok não pode ser usada para calcular o efeito total da textura na radiação de fundo observada hoje em dia.

2.3 Análise Newtoniana.

Quando trabalhamos com partículas de massa gravitacional não nula podemos usar vários métodos para se estudar suas órbitas em torno de um corpo massivo qualquer. Antes de qualquer tentativa, no entanto, podemos sempre fazer uma análise newtoniana. Em termos de perturbação, a gravitação newtoniana seria o termo de ordem zero da teoria de Einstein. A equação da gravitação newtoniana, equação de Poisson, é escrita em função dos auto valores λ_i do tensor de energia momento³ do corpo massivo [3].

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G(\lambda_t - \lambda_x - \lambda_y - \lambda_z).$$

De acordo com resultados obtidos em [16] os eventos de textura *unwinding* são proporcionalmente raros e energéticos. Apesar disto é interessante a previsão aproximada do efeito causado por uma textura tipo nó porque pode nos dar uma idéia de pelo menos uma parte da formação de estruturas em um cenário de todos os tipos de textura e, pelo fato de esta textura ser mais energética e rara, podemos ter regiões de maior concentração de massa no Universo devido a um evento deste tipo.

²A solução analítica é obtida dentro da métrica de Minkowski. As simulações a que nos referimos consideram a métrica do Universo em expansão e efeitos decorrentes da quebra de simetria do grupo SU(2) em 1.

³Este resultado gera algumas confusões na literatura, como por exemplo o artigo de Nötzold [17]. É necessário se diagonalizar o tensor de energia momento para se calcular a massa gravitacional de um corpo, pois esta massa só é definida em função dos auto valores que são interpretados como densidade de energia (λ_t) e pressões principais ($-\lambda_x, -\lambda_y, -\lambda_z$). A assinatura usada é (+ - - -)

Independente da solução encontrada por Turok et al podemos fazer, inicialmente, uma explanação qualitativa do efeito da textura sobre uma massa de prova localizada nas suas proximidades, considerando que χ depende apenas da variável de similaridade r/t . Isto significa que a previsão independe das condições iniciais usadas, ou seja, não definimos se a textura é *unwinding* ou não. A única restrição é que estamos trabalhando com soluções auto-similares.

Considerando as equações (2.8) vemos que o efeito gravitacional newtoniano só é sentido quando a partícula se encontra fora da região definida por $r > |t|$. Esquemáticamente podemos imaginar que no momento do colapso da textura um *flash* de luz é emitido em $r = 0$ e a partícula é atraída para a origem até ser atingida pela luz, a partir deste instante ela não sofre mais atração gravitacional e os efeitos que a massa de prova sofre são puramente relativísticos.

A interessante consequência deste efeito é que a força atrai com mais intensidade um corpo mais próximo da origem do que um mais distante entretanto o mais distante fica mais tempo sob ação da força atrativa já que demora mais tempo para ser atingido pelo cone de luz da textura⁴, isto dá uma certa uniformidade a esta força quando comparamos com um potencial central newtoniano típico.

No cálculo sobre perturbações da radiação de fundo explicado na seção anterior é usada a solução de Turok para mostrar que há um desvio para o vermelho quando o fóton cruza o cone de luz antes do colapso da textura e para o azul quando cruza depois. O esquema da figura 2.1 mostra que esse resultado independe da solução auto-similar.

Em Cálculos acerca de formação de estruturas, Nötzold [17], Barriola e Vachaspati [18] cometem erros por não analisarem cuidadosamente o tensor de energia-momento. O primeiro trabalha com soluções muito semelhantes à dada em (2.9) mas afirma que a pressão da textura é isotrópica, o que é falso dada a forma do tensor diagonalizado (2.6). Os últimos resolvem a equação de Einstein usando a aproximação $|r/t| \ll 1$, desprezando portanto a região $r > |t|$, onde há efeito gravitacional mesmo na aproximação newtoniana da Relatividade Geral. A razão entre a variação na densidade da radiação de fundo $\delta\rho$ causada pela textura e a sua densidade média ρ

⁴Para definirmos o cone de luz consideramos a textura como se ela fosse um evento totalmente localizado na origem. O cone referido é portanto relativo ao ponto $r = 0$, $t = 0$.

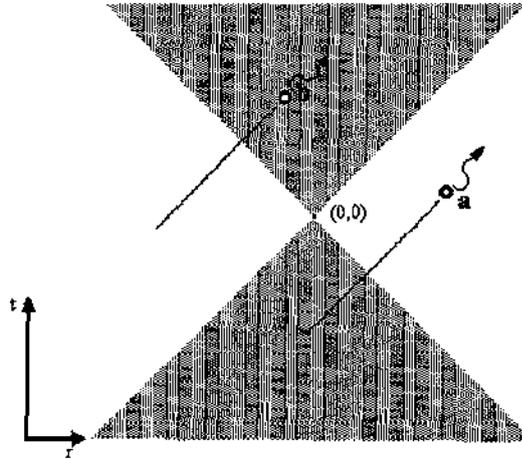


Figura 2.1: O fóton a sai do cone de luz da origem em $t < 0$, como fora do cone de luz ele tende a se afastar do centro há uma perda de energia do fóton, i.e. desvio para o vermelho, causado pela ação do potencial atrativo. O fóton b antes de entrar no cone de luz em $t > 0$ estava sob ação deste mesmo potencial contudo o seu movimento era na direção da origem com isso houve ganho de energia, i.e. desvio para o azul.

prevista segundo os cálculos de Barriola e Vaschupati é

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \left(1 - k\frac{t}{r}\right)^{-3} - 1. \quad (2.18)$$

$$k = 8\pi G\eta^2.$$

Fazemos, agora, uma previsão mais quantitativa do comportamento de uma textura como semente no processo de formação de estruturas larga escala. O procedimento que usamos nesta seção é a análise newtoniana do efeito causado por uma textura em um meio homogêneo. Procuramos desta maneira tornar claro o processo de formação de estruturas massivas através deste defeito topológico global.

Usamos a solução analítica de Turok para realizar os cálculos e simulações

com a textura. Para tal solução a densidade newtoniana é

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{dentro do cone,} \\ \frac{8\eta^2(r^2-t^2)}{(r^2+t^2)^2} > 0 & \text{fora do cone.} \end{cases} \quad (2.19)$$

deste modo o limite newtoniano na região $r > |t|$ será dado pela equação de Poisson

$$\nabla^2\varphi = \frac{8\eta^2(r^2-t^2)}{(r^2+t^2)^2}, \quad (2.20)$$

onde φ é o potencial gravitacional clássico.

Resolvendo (2.20) chegamos que a forma do potencial dependente de r e t é

$$\varphi(r,t)^5 = \frac{[3-\pi+4\arctan(r/t)]t}{2r} + \frac{\log(r^2+t^2)-3-\log(2t^2)}{2}, \quad (2.21)$$

cujo gráfico é

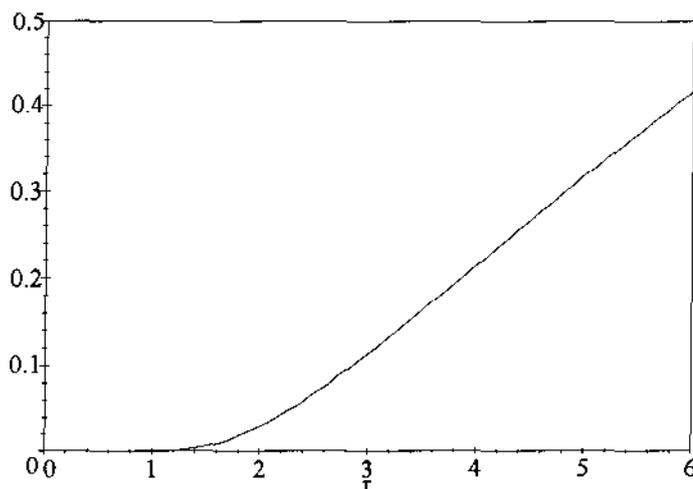


Figura 2.2: Gráfico com $t=1$

⁵As unidades são arbitrárias e dependem do parâmetro η .

A forma do campo gravitacional correspondente é

$$G_{\mathbf{r}} = - \left(\frac{2r - 3t + \pi t - 4t \arctan(r/t)}{2r^2} + \frac{t^2}{r(r^2 + t^2)} \right). \quad (2.22)$$

Algumas órbitas possíveis estão mostradas na figura a seguir

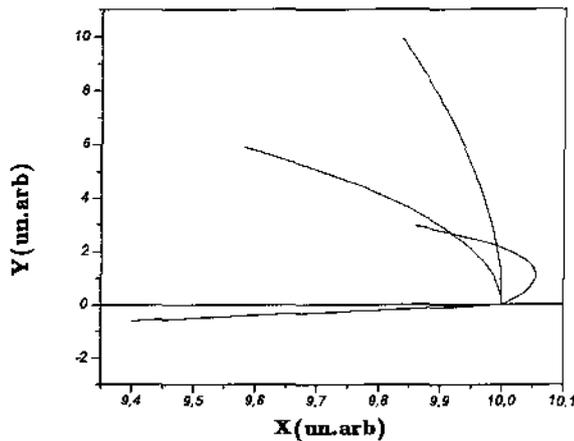


Figura 2.3: As órbitas mostradas acima partem do mesmo ponto inicial e possuem diferentes velocidades iniciais, na simulação completa notamos que não existem órbitas fechadas ou mesmo que aprisionem a partícula em uma região, este resultado era previsível visto que o potencial tende a se anular quando o tempo vai a infinito.

Para que tenhamos uma boa caracterização do efeito fizemos uma simulação considerando uma textura localizada em $r = 0$ e que colapsou em $t = 0$. Escolhemos um instante inicial $t_i < 0$ e consideramos uma distribuição de massa uniforme neste instante. O instante inicial e as posições foram escolhidos de tal forma que em $t \leq t_i$ as partículas de prova não sofrem atração pois $r_i < |t_i|$ e a medida que o tempo ia aumentando na simulação algumas massas de prova começam a sentir o efeito atrativo, até que em $t = 0$ todas as partículas de teste sofrem a ação do campo.

Quando $t > 0$ o processo se inverte e com o aumento de t a matéria localizada onde $r < t$ pára gradativamente de sofrer atração tendo adquirido uma velocidade radial, de modo que o seu movimento passa a ser uniforme até o fim da simulação.

Nas figuras 2.4, 2.5, 2.6 exibimos três simulações partindo das mesmas condições iniciais mas terminando em instantes diferentes, respectivamente t_a , t_b e t_c com $t_a < t_b < t_c$. (O valor usado para η foi grande o suficiente para se visualizar bem o efeito)

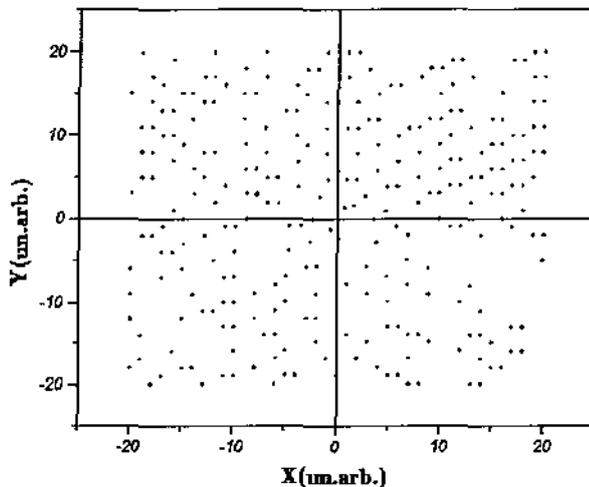


Figura 2.4: Instante inicial onde a região é homogênea.

Na fig. 2.4 os pontos representam a distribuição simétrica inicial, na fig. 2.5 há variação na distribuição de partículas, elas estão bem concentradas em torno da origem. Na fig. 2.6 já podemos notar que os pontos estão mais distantes entre si, inclusive mais espalhados do que no início da simulação, por causa da velocidade radial uniforme adquirida que diminui a concentração de massa ⁶.

⁶Num cálculo mais rigoroso deveríamos considerar a atração gravitacional entre as

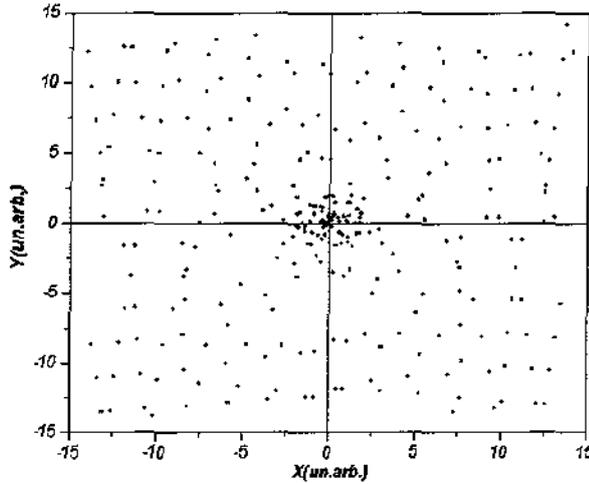


Figura 2.5: Instante com maior concentração de pontos em torno da textura.

A equação de movimento foi resolvida através de um programa que utiliza o método Runge-Kutta para várias condições iniciais mapeando assim a região onde ocorreu o evento. O valor do parâmetro η nas figuras acima é maior do que o previsto em teoria pois queremos que estas figuras apenas mostrem a forma do processo.

Em cálculos da anisotropia da radiação de fundo é necessário que a razão entre variação máxima de densidade causada por um defeito topológico e a densidade total, $\delta\rho/\rho$, seja menor que 10^{-4} por causa de medidas efetuadas na radiação de micro-ondas realizadas pelo satélite COBE (Cosmic Background Explorer) [19].

Nos nossos cálculos definimos $\eta = 10^{17} GeV$ que é o valor máximo proposto por Turok [11] e também é compatível com o resultado recente obtido por Durrer e Zhong [20]. Com este valor o campo dado por (2.22) deve ser multiplicado por 10^{-4} que é o quadrado da razão entre o fator η e a massa de Planck. Usando estes valores na simulação efetuamos o cálculo de $\delta\rho/\rho$ comparando a densidade no instante de máxima concentração de partículas

massas de prova, o que iria conter a dissipação.

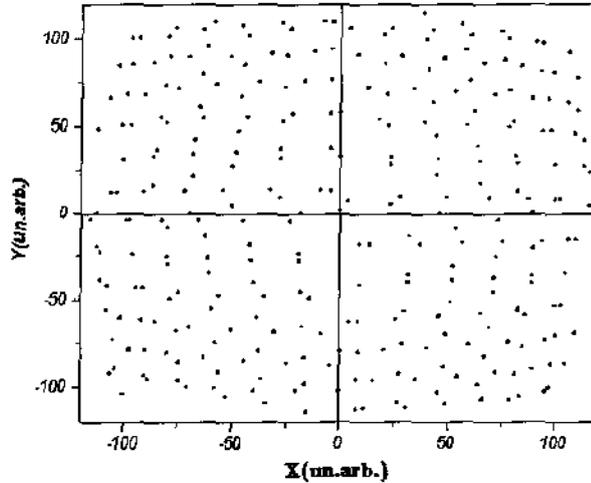


Figura 2.6: Com o maior valor do tempo já se observa que as partículas estão se afastando.

com a do instante inicial. A maior concentração é atingida imediatamente antes que a expansão devido a velocidade radial prevaleça sobre o processo de contração. Com isso obtivemos

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq 10^{-3},$$

o que ilustra a predominância deste efeito sobre o obtido através da aproximação (2.18).

Na época em que ocorreram as formações de texturas o Universo era bem menor e mais denso, o que se pode observar com uma certa precisão que indica a forma e o tamanho da anisotropia nas densidades, tanto de massa quanto de radiação, todavia uma perturbação tão grande na distribuição de massa poderia sugerir estruturas mais densas e maiores anisotropias do que a imposta pelo limite da radiação de fundo, medido pelo COBE. Tais questionamentos podem ser parcialmente explicados porque, apesar de causar uma grande variação na densidade, o efeito newtoniano da textura tende a

se dissipar por sua própria estrutura, há um campo de velocidades residual que afasta as partículas da origem.

A anisotropia causada pela textura é basicamente devido à sua massa. Os efeitos de simulações completas da evolução de textura com a anisotropia na radiação de fundo por ela causada já estão razoavelmente bem calculados [21, 22]. Há modelos menos aproximados de texturas também usados para prever formação de estruturas de modo que cálculos feitos nesta seção se tornariam irrelevantes se comparados com resultados obtidos, por exemplo, por Durrer e Zhou [20]. A aproximação que usamos, no entanto, além de tornar possível uma clara visualização do efeito nos permite supor a existência de estruturas atípicas em aglomerados de galáxias.

A simulação mostra que depois que o ponto mais distante considerado na aproximação passa pela origem temos uma simetria esférica v. fig.2.6. Quando consideramos a interação entre as partículas de prova a partir de um determinado momento esta última configuração tende a se contrair, isto pode simular a formação de uma concentração muito grande de matéria, uma estrutura atípica como por exemplo o Grande Atrator [24].

Na direção do aglomerado de Centaurus existe uma concentração de massa maior do que a prevista pela lei de Hubble [23]. Um bom teste da lei de Hubble é plotar as velocidades médias de galáxias em um aglomerado pela distância de Tully-Fisher [25], calculada a partir de relação de luminosidade⁷. Todas as galáxias com uma distância máxima de aproximadamente 90 megaparsecs se encaixam bem na reta teórica prevista pela lei. Galáxias a uma distância maior não se encaixam devido às prováveis diferenças nas características de estrelas na época do Universo correspondente a estas distâncias e ao efeito de curvatura. A velocidade de dispersão na região citada é muito alta, o que sugere um excesso de aproximadamente $10^{16}M_{\odot}$ em relação a super aglomerados com a mesma velocidade em relação ao sol [24].

Como foi mostrado por Philips [16] os eventos predominantes são menos energéticos do que o modelo de textura proposto por Turok. Não significa no entanto que este tipo de textura mais isolada e energética deixe de ocorrer. As simulações indicam a frequência deste evento. Não podemos afirmar com precisão, mesmo porque ainda não há um bom modelo para *windings* texturas, como seria o efeito newtoniano de uma textura deste tipo, no en-

⁷O método para se realizar estas medidas é estatístico. A análise da radiação de aglomerados nos permite determinar a velocidade de dispersão e sua distância comparando com padrão. Este método é eficiente para a faixa de distâncias citadas e a velocidade de dispersão é melhor calculada nas regiões mais afastadas dos centros de galáxias.

tanto por ser este um evento mais fraco podemos inferir que a velocidade radial média adquirida por partículas de prova submetidas ao campo destas é menor.

A conclusão final é que apenas texturas onde a carga topológica varia uma unidade, ou perto disso, poderiam formar o grande atrator; isto explicaria o fato de se ter encontrado apenas uma estrutura desta forma até hoje.

2.4 Métrica Induzida pela Textura

Na seção anterior discutimos a aproximação que não considera os efeitos da textura sobre a métrica da região do espaço-tempo onde ela se encontra. Trataremos agora do caso em que o efeito gravitacional dela é relevante para alterar a curvatura do espaço-tempo.

Alguns autores usaram diferentes mecanismos para tentar descrever o elemento de linha alterado por uma textura. Estudamos basicamente os desenvolvidos por Barriola e Vaschaspati [26] onde definindo novas coordenadas R e T propõem que a métrica tenha a forma:

$$ds^2 = e^{2T}[B(R)dT^2 - A(R)dR^2 - R^2d\Omega^2]. \quad (2.23)$$

Utilizando a mesma definição para χ , que passa a ser função somente de R , obtém-se os seguintes valores para as componentes não nulas do tensor de energia momento:

$$\begin{aligned} T_T^T &= e^{-2T} \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{(\chi')^2}{A} + \frac{2 \sin^2 \chi}{R^2} \right), \\ T_R^R &= e^{-2T} \frac{\eta^2}{2} \left(-\frac{(\chi')^2}{A} + \frac{2 \sin^2 \chi}{R^2} \right), \\ T_\theta^\theta &= T_\varphi^\varphi = e^{-2T} \eta^2 \frac{(\chi')^2}{2A}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde a linha denota derivada com respeito a R . Fazendo $B = 1$ chega-se à equação para a função A

$$A(R) = \frac{1 - kR^2(\chi')^2/2}{1 + R^2 - k \sin^2 \chi}, \quad (2.25)$$

onde $k = 8\pi G\eta^2$ é o parâmetro da textura. Obtem-se daí a seguinte equação para a função χ :

$$(1 + R^2 - k \sin^2 \chi)R^2\chi'' + (2 + 3R^2 - 2k \sin^2 \chi)R\chi' + \frac{k}{2} \sin 2\chi R^2(\chi')^2 - \frac{k}{2}(1 + 2R^2 - k \sin^2 \chi)R^3(\chi')^3 = \sin 2\chi. \quad (2.26)$$

Quando $k = 0$ chegamos a métrica de Minkowski efetuando a transformação de coordenadas

$$t = \pm e^T(\sqrt{1 + R^2}), \quad r = e^T R. \quad (2.27)$$

Claramente podemos notar que as coordenadas T e R cobrem somente a região do espaço-tempo onde $r < |t|$, i.e., dentro do cone de luz. A equação (2.27) nos mostra que o tensor de energia momento para essas coordenadas é diagonal isto é esperado porque R é uma função da variável de similaridade $u = r/t$.

Podemos garantir que ρ_{new} é igual a zero no caso em que $k = 0$ o que é óbvio já que este é o limite em que se chega a solução (2.9). Efetuamos cálculos numéricos para resolver a equação diferencial de χ (2.26) utilizando as mesmas condições iniciais definidas por Turok. O valor usado para k foi [20]

$$k = 2 \times 10^{-5}.$$

Um gráfico da função A é exibido abaixo

Como A é sempre positivo podemos concluir que não há nenhuma mudança na densidade newtoniana para a região em que $r < |t|$ onde ela é nula.

Ainda no artigo de Barriola e Vaschaspatti [26] encontramos outra forma de se calcular a métrica, utilizando agora a coordenada $u = r/t$ que cobre todo o espaço. Com essas coordenadas a métrica proposta é:

$$ds^2 = (1 - u^2 H)dt^2 + 2uHdrdt - (1 + H)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.28)$$

a função $H(u)$ é

$$H(u) = k \frac{\sin^2 \chi - u^2(1 - u^2)(\chi')^2/2}{1 - k(1 - u^2)\sin^2 \chi}. \quad (2.29)$$

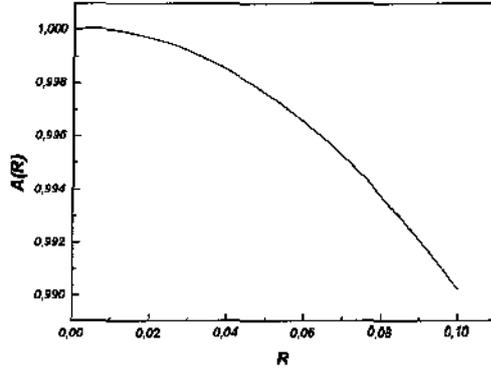


Figura 2.7: Gráfico da função $A(R)$. Ela é muito próxima de 1 nessa região.

O tensor de energia-momento para esse elemento de linha é:

$$\begin{aligned}
 T_t^t &= \frac{\eta^2}{t^2} \left[\frac{\chi'^2(2Hu^2 - u^2 - 1)}{2(Hu^2 - H - 1)} + \frac{\sin^2 \chi}{u^2} \right], \\
 T_r^r &= -T_t^r = \frac{\eta^2 \chi'^2 u}{t^2(Hu^2 - H - 1)}, \\
 T_r^r &= \frac{\eta^2}{t^2} \left[\frac{\chi'^2(2Hu^2 + u^2 + 1)}{2(Hu^2 - H - 1)} + \frac{\sin^2 \chi}{u^2} \right], \\
 T_\theta^\theta &= T_\phi^\phi = \frac{\eta^2 \chi'^2(2Hu^2 + u^2 - 1)}{2t^2(Hu^2 - H - 1)}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

a linha denota derivada com relação a u . Anulando-se a função $H(u)$, o que equivale a $k = 0$, reduzimos ao tensor de tensões encontrado em (2.5).

A diagonalização do tensor acima nos leva a

$$\bar{T} = \frac{\eta^2 (\chi')^2}{2t^2(1 + H - Hu^2)} \times \tag{2.31}$$

$$\begin{pmatrix} A + |1 - u^2| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A - |1 - u^2| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - u^2 - 2Hu^2 & \\ & & & 1 - u^2 - 2Hu^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{onde } A = \left[\frac{2(1 + H - Hu^2) \sin^2 \chi}{u^2 \chi'^2} - 2Hu^2 \right].$$

Os auto-vetores não normalizados podem ser escritos como

$$\begin{aligned} u^0 &= (1, -u, 0, 0), \\ u^1 &= (u, -1, 0, 0), \\ u^2 &= (0, 0, 1, 0), \\ u^3 &= (0, 0, 0, 1), \end{aligned} \quad (2.32)$$

u^0 é tipo tempo quando $|u| < 1$ e tipo espaço quando $|u| > 1$ acontecendo o inverso com u^1 . Quando $|u| = 1$ ambos são vetores nulos [27]. Os outros são vetores tipo espaço sempre.

Podemos observar que a densidade newtoniana correspondente é

$$\rho_{neut} = \frac{2\eta^2(\chi')^2}{t^2(1 + H - Hu^2)} \times \begin{cases} Hu^2 & \text{se } u^2 < 1 \\ Hu^2 + u^2 - 1 & \text{se } u^2 > 1 \end{cases}. \quad (2.33)$$

A equação para a função $\chi(u)$ [26] é

$$\begin{aligned} [1 - k(1 - u^2) \sin^2 \chi] \chi'' + \frac{2}{u} [1 + \frac{k}{2}(3u^2 - 2) \sin^2 \chi] \chi' \\ + \frac{k}{2}u(1 - u^2)[1 + u^2 - k(1 - u^2) \sin^2 \chi] \chi'^3 = \frac{\sin 2\chi}{u^2(1 - u^2)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A resolução numérica desta equação utilizando as condições de fronteiras definidas por Turok [11] nos mostra que não há um horizonte definido pela textura e a densidade newtoniana dada em (2.33) é sempre positiva. O gráfico da função $H(u)$ para u positivo é mostrado em duas partes, figuras 2.8 e 2.9, por problemas de escala.

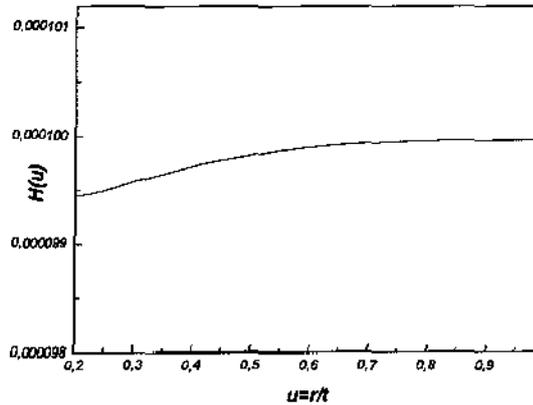


Figura 2.8: Gráfico de $H(u)$ para u pequeno.

A força gravitacional neste caso que consideramos a textura auto gravitante é muito próxima à obtida na simulação anterior. A conclusão que tiramos com todos estes cálculos numéricos é que não há nenhum efeito relevante que a aproximação discutida na seção 2.2 ou as considerações feitas em 2.3 não tenham chegado. Talvez o único resultado importante a ser destacado é que na textura auto-gravitante existe massa newtoniana em todo o espaço, apesar de ser bem menor na região interna ao cone de luz definido pela origem. Portanto cálculos tipo Wolfe-Sach para uma geodésica tipo tempo não nos levariam a um resultado consideravelmente mais preciso.

Com estas considerações concluímos que o único papel importante da formulação onde a carga topológica da textura diminui uma unidade no contexto de formação de estruturas é a formação do grande atrator. Os resultados destas últimas seções indicam, ainda, que uma formulação teórica que preveja resultados mais quantitativos passa por uma determinação da densidade média do Universo na época em que ocorre a quebra de simetria do grupo $SU(2)$.

Há modelos e simulações que mostram a anisotropia da radiação de fundo causada por texturas e outros defeitos topológicos, Durrer e Zhou [28] fazem mapas em seu recente artigo que ilustram bem as possíveis configurações da CMBR, usando principalmente cosmologia de texturas, monopolos e cordas cósmicas.

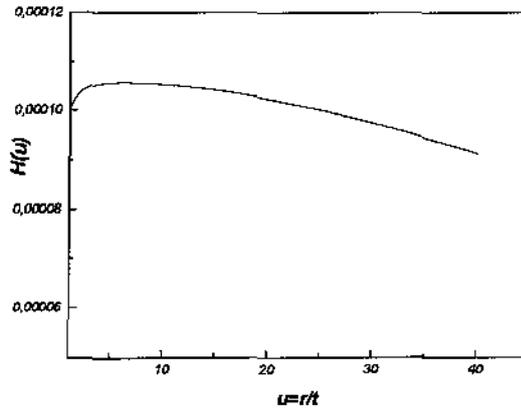


Figura 2.9: Gráfico de $H(u)$ para $u > 1$.

2.5 Outras Texturas

O modelo de textura que usamos até agora foi basicamente o mesmo, ou seja, trabalhamos com a solução de textura esfericamente simétrica, auto-similar e que muda a carga topológica na origem temporal. Este é inclusive o único modelo que possui solução analítica [11].

Há, dentro deste modelo, algumas variações possíveis como a inclusão de um número C , cobertura, definido entre 0 e 1 para caracterizar texturas *unwindings* [29]. A cobertura diferencia texturas com a mesma carga topológica e caracteriza quantas vezes a variedade é coberta pela textura, por exemplo, na solução que usamos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \chi \leq \pi, \end{aligned}$$

é caracterizado $Q = 1$ e $C = 1$. Numa variação desta solução temos $\bar{\theta} = \theta$, $\bar{\varphi} = 2\varphi$ e χ varia entre 0 e $\pi/2$. Podemos verificar usando (2.12) que $Q = 1$ mas neste caso a cobertura $C = 0.5$.

Simulações numéricas usando o modelo completo para texturas mostram que a maior parte das texturas com carga topológica unitária possui C pequeno [30]. O efeito gravitacional isolado destas é menor, mas todas juntas contribuem mais que uma textura com $C = 1$.

A textura, como já dissemos anteriormente, é um defeito topológico proveniente da quebra de simetria do grupo não abeliano $SU(2)$. Até o momento estamos usando uma representação deste grupo que nos permite efetuar os cálculos a partir de uma lagrangeana com simetria maior, $SO(4)$. Propomos, agora, trabalhar com a textura usando uma representação $O(3)$ do grupo $SU(2)$, podemos fazê-la sem problema pois $SU(2)$ é homeomorfo a $O(3)$.

É necessário ressaltar no entanto que a variedade definida por esta textura será outra, algo semelhante a $S^2 \times R$. Estaremos trabalhando com 2+1 dimensões pois definimos o campo de tal modo que não dependa da coordenada z . A classificação homotópica desta textura⁸ será também diferente pois ela define uma 2-esfera assim como o monopolo, só que neste caso a esfera está imersa no espaço tridimensional definido por duas coordenadas espaciais e uma temporal.

A equação desta textura é semelhante à dada em (2.1) mas o escalar Φ é agora um tripleto real. A parametrização que usamos é:

$$\Phi = \eta(\cos \chi, \sin \chi \cos \theta, \sin \chi \sin \theta), \quad (2.35)$$

onde θ é o ângulo usualmente definido para coordenadas cilíndricas e χ é função de $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ e t .

Assim como no modelo de Davis a equação de movimento desta textura se reduz a uma equação da evolução do campo escalar χ . Com o *ansatz* definido em (2.35) a equação de movimento de χ é

$$\ddot{\chi} - \chi'' - \frac{\chi'}{r} = -\frac{\sin 2\chi}{2r^2}, \quad (2.36)$$

Neste caso também podemos definir uma variável de similaridade, a que escolhemos é $u = t/r$, usando-a em (2.36) obtemos a equação

$$\chi''(u^2 - 1) + u\chi' = \frac{\sin 2\chi}{2}, \quad (2.37)$$

⁸Não é muito correto chamar este defeito de textura por sua classificação homotópica diferente, ainda assim usamos este nome pois fazemos a identificação do espaço de campos com um pedaço do espaço-tempo de modo de certa forma uma coordenada do espaço de campos pode ser identificada com o tempo como acontece no modelo da textura.

a linha indica derivação em relação a u .

O tensor de energia momento diagonalizado e escrito em função da variável de similaridade para este defeito é:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_0^0 &= \eta^2/2[r^{-2}(\sin^2 \chi + \chi'^2|u^2 - 1|)], \\
 \mathbf{T}_1^1 &= \eta^2/2[r^{-2}(\sin^2 \chi - \chi'^2|u^2 - 1|)], \\
 \mathbf{T}_2^2 &= \eta^2/2[r^{-2}(\chi'^2(u^2 - 1) - \sin^2 \chi)], \\
 \mathbf{T}_3^3 &= \eta^2/2[r^{-2}(\sin^2 \chi + \chi'^2(u^2 - 1))].
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

Podemos notar que a densidade newtoniana associada é nula quando $r < |t|$ e positiva na outra região. Devemos ressaltar que $r < |t|$ define uma região interna a um cilindro de comprimento infinito e cujo raio aumenta com a velocidade da luz. É de se esperar, portanto, que haja uma simetria cilíndrica nas estruturas criadas por este defeito.

Este defeito aparentemente não possui grande importância na formação de estruturas e não há nenhum fator mais forte que indique a sua presença, i.e., uma simulação completa do processo de quebra de simetria. O importante é que esta solução ilustra uma alternativa ao monopolo na quebra de simetria do grupo $SU(2)$ que gere um defeito do mesmo grupo homotópico.

O defeito que obtemos pode ser interpretado como uma solução auto-similar de uma corda-cósmica obtida na quebra de simetria de um grupo não abeliano. Esta corda tende a sumir naturalmente com o passar do tempo assim como a textura e é singular na linha $r = t = 0$.

Capítulo 3

Conclusão

Nós acreditamos que são originais as análises feitas no capítulo 2 pois não encontramos autores que fizessem uma caracterização completa do tensor de energia-momento da textura. O procedimento usado no seção 2.3 é talvez a contribuição mais completa desta tese do ponto de vista de originalidade, pois resgatamos a caracterização newtoniana de um evento como a textura, o que nos permitiu ter uma visualização clara dos efeitos dela em um meio de massas de prova e, posteriormente, pudemos levantar a hipótese da textura como causadora do Grande Atrator.

Na seção 2.4 fizemos uma mescla de algumas formulações para descrever a métrica da textura e contribuimos com cálculos numéricos que nos permitiram caracterizar o tensor de energia momento e conseqüentemente o campo gravitacional da solução auto gravitante.

Na seção 2.5 acreditamos que formulamos uma nova forma de defeito topológico global através da quebra de simetria do grupo $SU(2)$. Não obtivemos uma solução analítica para ele mas pudemos elaborar uma idéia de sua forma e de alguns de seus possíveis efeitos gravitacionais.

Após o estudo de texturas e de seu papel na formação de estruturas podemos concluir que este defeito topológico deve, nos próximos anos, ter um papel importante na cosmologia assim como as cordas cósmicas há muito já têm. As soluções analíticas ou semi analíticas menos aproximadas são muito difíceis de serem obtidas pela forma da equação de campo da textura mas análises mais profundas da sua estrutura física podem nos dar bons modelos de formação de estruturas em larga escala.

Apêndice A

Grupos de Homotopia

Sejam [31, 32]

$f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações entre os espaços topológicos X e Y .

Dizemos que estas aplicações são homotopicamente equivalentes, ou simplesmente equivalentes ($f \cong g$), quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ t.q. $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

$I \equiv [0, 1]$

A aplicação H chama-se homotopia entre f e g .

Estamos interessados em espaços métricos e funções contínuas. Definimos, portanto, homotopia por caminhos quando X e Y são metrizáveis e $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, $t \in I$, são contínuas.

Quando $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ e $\beta(0) = \beta(1) = x_0$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ definem caminhos fechados com base no ponto x_0 . Dizemos que $\alpha \cong \beta$ se $\exists H : I \times I \rightarrow X$ t.q. $H(0, s) = H(1, s) = x_0$, $H(t, 0) = \alpha(t)$ e $H(t, 1) = \beta(t)$.

Quando trabalhamos com laços usamos a notação $H(\cdot, s)$.

A classe de todos os caminhos homotopicamente equivalentes a um caminho fechado α é denotada como $[\alpha]$.

Definindo um ponto básico x_0 do espaço X . O conjunto de todas as classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 é chamado **grupo fundamental** do espaço X com base no ponto x_0 . Denotamo-no como $\pi_1(X, x_0)$.

Quando X é conexo por caminhos pode-se demonstrar que o ponto básico x_0 não influencia, o que significa $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos se $x_0, x_1 \in X$. Conseqüentemente podemos simplesmente utilizar o grupo fundamental do espaço X , representado por $\pi_1(X)$.

Vamos agora definir uma relação de equivalência para “laços de dimensão maior” .

Seja $\alpha(t_1, t_2, \dots, t_n)$ uma aplicação de I^n no espaço topológico X tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.

Definindo $\beta(t_1, \dots, t_n)$ também como uma aplicação com ponto base x_0 dizemos que

$$\alpha(t) \cong \beta(t) \Leftrightarrow \exists H(\cdot, s) : I^n \times I \rightarrow X \text{ t.q. } H(\cdot, 0) = \alpha(t) \text{ e } H(\cdot, 1) = \beta(t).$$

É fácil notar que podemos definir um isomorfismo entre S^n e I^n portanto uma definição equivalente da homotopia $H(\cdot, s) : S^n \times I \rightarrow X$.

O grupo formado por todas as classes de equivalência $[\alpha]$ de aplicações $\alpha(t_1, \dots, t_n) : I^n \rightarrow X$ tendo como ponto de base x_0 é denotado $\pi_n(X, x_0)$. Ou simplesmente $\pi_n(X)$.

Alguns exemplos são listados abaixo:

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}.$$

$$\pi_n(S^n) \simeq \pi_n(P^n)$$

$$\pi_k(S^n) \simeq \{0\} \text{ se } n < k.$$

A classificação homotópica dos defeitos topológicos é muito importante pois ela mostra que a topologia da variedade do vácuo M , do defeito topológico, não é trivial visto que há um grupo de homotopia $\pi_n(M) \simeq \mathbb{Z}$. Esta é a caracterização fundamental do defeito topológico, a sua própria definição topológica [33].

Bibliografia

- [1] G. Rajasekaran, *Gravitation, Gauge Theories and the Early Universe* (Kluwer Academic Publishers, Holanda 1990)
- [2] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley Publishing Company, 1990).
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco 1973)
- [4] E.S. Abers and B.W. Lee, "Gauge Theories ", *Physics Report.9C*, n.1 (1973).
- [5] R. C. Tolman, *Relativity Thermodynamics and Cosmology* (Oxford University Press, Inglaterra 1934)
- [6] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Applications to Physical Problems* (Addison-Wesley Publishing Company, 1962)
- [7] A. Vilenkin, "Cosmic Strings and Domain Walls ", *Physics Report.121*, n.5 (1985).
- [8] G. H. Derrick, "Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles ", *J. Math. Phys.5*, 1252 (1964).
- [9] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*. (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1982).
- [10] R. L. Davis, "Texture: A cosmological topological defect. ", *Phys.Rev D 35*, 3705 (1987).
- [11] N. Turok, "Global Texture as the Origin of Cosmic Structure ", *Phys. Rev. Lett.63*, 2625 (1989).

- [12] G. I. Barrenblatt, *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, (Consultants Bureau, New York 1979)
- [13] F. Schwarz, "Automatically Determining Symmetries of Partial Differential Equations ", *Computing* **34**, 91-106 (1984).
- [14] N. Turok and D. Spergel, "Global Texture and the Microwave Background ", *Phys. Rev. Lett.***64**, 2736 (1990)
- [15] R. Sachs and A. Wolfe, "Perturbations of a Cosmological model and Angular Variations of The Microwave Background " *Ap.J.***147**, 73 (1967).
- [16] N. G. Phillips, "Field Ordering and Energy Density in Texture Cosmology ", *Phys. Rev. Lett* **75**, 1264 (1995).
- [17] D. Nötzold, "Gravitational Effects of Global Textures ", *Phys. Rev.D* **43**, R961 (1991).
- [18] M. Barriola and T. Vachaspati, "Analytical approximations to the self-similar global texture metric ", *Phys. Rev.D* **43**, 2726 (1991).
- [19] G. F. Smoot et al. "Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps ", *Ap. J.* **396**, L1 (1992).
- [20] R. Durrer and Zhi-Hong Zhou, "Structure Formation in the Universe from Texture Induced Fluctuations ", *Phys. Rev. Lett.***74**, 1701 (1995).
- [21] Ue-Li Pen, D. N. Spergel and N. Turok, "Cosmic structure formation and microwave anisotropies from global field ordering ", *Phys Rev.D* **49**, 692 (1994).
- [22] R. Durrer, A. Howard and Zhi-Hong Zhou, "Microwave anisotropies from texture-seeded structure formation ", *Phys Rev.D* **49**, 681 (1994).
- [23] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, New Jersey 1993)
- [24] D. Lynden-Bell et al., "Spectroscopy and Photometry of Elliptical Galaxies V. Galaxy Streaming Toward The New Supergalactic Center ", *Ap. J.* **326**, 19 (1988).

- [25] R. B. Tully and J. R. Fischer, "A New Method of Determining Distances to Galaxies ", *Astron. Ap.* **54**, 661 (1977)
- [26] M. Barriola and T. Vachaspati, "Strong Gravity of a Self-Similar Global Texture ", *Phys. Rev.D* **43**, 1056 (1991).
- [27] J. I. Synge, *Relativity, The General Theory*, (North-Holland, Amsterdam 1960)
- [28] R. Durrer and ZH. Zhou, "Large Scale Structure Formation with Global Topological Defects", *Physical Review D* **53**, 5394 (1996).
- [29] J. Borril, E.J. Copeland and A.R. Liddle, "Initial Conditions for Global Texture ", *Phys. Letters. B* **258**, 310 (1991).
- [30] J. Borril, E. J. Copeland and A. R. Liddle, "Characteristics of Unwinding Textures ", *Phys. Rev.D* **47**, 4292 (1993).
- [31] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro 1977)
- [32] F. H. Croom, *Basic Concepts of Algebraic Topology*, (Springer-Verlag, New York 1978).
- [33] R. Brandenberger, "Topological Defects and The Formation of Structures ", SLAC-Preprint 9604033 (1996)