

Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

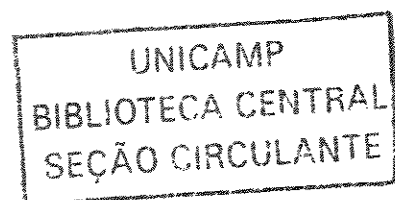
As Equações de Boussinesq

Márcio Santos da Rocha

Orientador: Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar

Tese apresentada ao Instituto de
Matemática Estatística e Computação
Científica, UNICAMP como requisito
parcial para obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada.

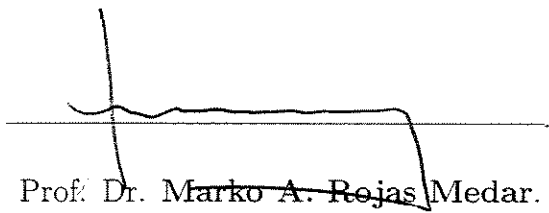
Campinas, fevereiro de 2003.



As Equações de Boussinesq

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Márcio Santos da Rocha** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de fevereiro de 2003.



Prof. Dr. ~~Marko A. Rojas~~ Medar.

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar

Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Profa. Dra. Luci Harue Fatori

Prof. Dr. Doherty Andrade

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada.**

UNIDADE	88
Nº CHAMADA	T/UNICAMP
	R 582e
V	EX
TOMBO BC/	53291
PROC.	124/03
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	23/04/03
Nº CPD	

CM00181414-1

10 ID 287900

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Rocha, Márcio Santos da

R582e As Equações de Boussinesq / Márcio Santos da Rocha --
Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : Marko Antonio Rajas Medar

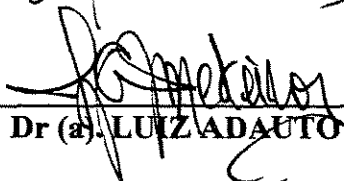
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Equações diferenciais parciais. 2.Dinâmica dos fluidos. 3.
Navier-Stokes, Equações de. 4. Cauchy, Problemas de. I. Rojas Medar,
Marko Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 24 de fevereiro de 2003

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR


Prof (a). Dr (a). LUIZ ADAUTO DA JUSTA MEDEIROS


Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI


Prof (a). Dr (a). LUCI HARUE FATORI


Prof (a). Dr (a). DOHERTY ANDRADE

10313657

Dedicatória

.....

.....

à memória de meus pais

Darcy Santos da Rocha

Antônio Francisco da Rocha

Agradecimentos

Em primeiro lugar, eu gostaria de agradecer ao Professor Dr. Marko Antonio Rojas Medar pela confiança na minha capacidade, pela orientação exemplar deste trabalho e pelas valiosas experiências acadêmicas transmitidas.

Agradeço aos professores Marcelo Martins dos Santos do departamento de Matemática do IMECC e ao professor Cheng He do departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Kobe (Japão), pelas sugestões e importantes comentários.

Agradeço, em especial, aos meus colegas do IMECC que gostaria de representá-los pelos nomes de Gabriela, Lucy e Roberto pelas sugestões, apoio e importantes horas de convívio e a minha amiga Érica pela ajuda na correção ortográfica do texto.

Um agradecimento aos funcionários da Biblioteca do IMECC e aos secretários Cidinha, Ednaldo, Fátima e Tânia, pela paciência e dedicação .

Agradeço aos professores do departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) pelo apoio e por ter me proporcionado uma licença para que eu pudesse dar mais esse importante passo na minha vida profissional.

Por último, agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Resumo

As equações de Boussinesq modelam a transferência de calor num fluido viscoso e incompressível. Este trabalho tem como objetivo apontar alguns resultados teóricos sobre existência, unicidade e comportamento assintótico das soluções das equações de Boussinesq onde as funções envolvidas estão definidas em um domínio do espaço $\mathbb{R}^3$.

Em muitas situações, as condições de contorno não são suficientemente regulares para usar a teoria existente na literatura. Nós damos uma maneira possível de abordar esta problemática para o modelo de Boussinesq Estacionário. Provamos um teorema de existência e unicidade onde as funções temperatura e velocidade estão definidas sobre um domínio limitado.

Em seguida, nós obtemos alguns resultados de regularidade e comportamento assintótico das soluções do problema de Cauchy para o modelo de Boussinesq clássico. Nós impomos condições sobre a pressão hidrodinâmica para garantirmos maior regularidade das soluções fracas do sistema. Ainda para o problema de Cauchy, obtemos alguns resultados sobre a conduta da solução forte. Para isso, usamos como ferramenta uma sequência de problemas de Cauchy para o sistema de Boussinesq linearizado.

Encerramos os resultados, estudando a existência de soluções fracas de um sistema de inequações variacionais, associadas ao sistema de Boussinesq generalizado, definidas sobre um cone convexo, para isto, introduzimos um sistema auxiliar de Galerkin penalizado

onde as funções envolvidas estão definidas sobre um domínio limitado em alguma direção. Soluções com a propriedade de reprodução no tempo são obtidas utilizando argumentos de ponto fixo.

Abstract

The Boussinesq equations describe the motion of an incompressible viscous fluid subject to convective heat transfer. In this work our main goal is to study some theoretical results related with existence, uniqueness and decay rate for the solutions of the three-dimensional Boussinesq equations.

In many situations the boundary conditions are not enough regular to use the usual theory described in the literature. Here, we present a new approach to address this problem for the case stationary Problem. We show the existence and uniqueness in bounded domain.

We prove some results of regularity and decay estimates for the solutions of the Cauchy problem for Boussinesq equations. We show that weak solutions of the Boussinesq equations are smooth if the pressure is controlled. We consider the Cauchy problem of the linearized Boussinesq equations and we show some results about decay rates of strong solutions for Boussinesq equations.

Finally, we study the existence of weak solutions and reproductive weak solutions for variational inequalities associated with the generalized Boussinesq models.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	O modelo Oberbeck-Boussinesq e objetivos	1
1.1.1	Leis de conservação	2
1.2	Modelo de Boussinesq Estacionário	7
1.3	Modelo de Boussinesq Clássico	9
1.4	Modelo de Boussinesq Generalizado	12
2	Notações e Definições	15
3	O problema estacionário com dados de fronteira em L^2	19
3.1	Problema em θ	21
3.2	Problema em $\mathbf{u}$	25
3.3	Prova dos principais teoremas	30
4	O Problema de Cauchy	37
4.1	Condições suficientes para a regularidade da solução fraca	37
4.2	Alguns resultados sobre a conduta da solução forte	53
4.2.1	Prova dos principais teoremas	70
4.3	Taxa de decrescimento para a solução forte	73

5 Existência de soluções fracas do sistema de Boussinesq generalizado	
definidas sobre um cone convexo	91
5.1 Resultados auxiliares	92
5.2 Formulação Variacional	93
5.3 Formulação fraca	96
5.3.1 Problema auxiliar	97
5.4 Solução muito fraca	106
5.5 Solução com a propriedade de reprodução	106
5.6 Formulação reprodutiva fraca	108
A Sistemas de Galerkin	113
Bibliografia	121

Capítulo 1

Introdução

1.1 O modelo Oberbeck-Boussinesq e objetivos

O objetivo deste trabalho é apontar novos resultados teóricos de existência, unicidade e comportamentos assintóticos das soluções das equações que descrevem o modelo de Oberbeck-Boussinesq.

Antes de descrevermos sobre as equações que regem o comportamento de um fluido viscoso, incompressível, não homogêneo com condutividade térmica, achamos importante citarmos alguns fatos históricos: Rayleigh, no ano de 1916, utiliza um conjunto de simplificações feitas por Boussinesq (1903) para as equações de Navier-Stokes com condutividade térmica e fluxo difusivo de um fluido incompressível. Graças ao prestígio de Rayleigh, dentro da Inglaterra, essas simplificações foram atribuídas a Boussinesq; talvez por não perceber outros trabalhos publicados ou possivelmente por tê-los achados obscuros, Rayleigh não destacou o trabalho de Oberbeck. Em 1891, Oberbeck utilizou essas simplificações (antes mesmo de Boussinesq) em seus estudos meteorológicos. Essas simplificações são:

- O movimento é incompressível exceto que trocas de densidades não são ignoradas nos termos forçantes da equação do movimento.
- As trocas de densidades são induzidas pelas trocas de temperatura e pela concentração e não pela pressão.
- Os gradientes velocidade são suficientemente pequenos, assim os efeitos sobre a temperatura de conversão de trabalho para calor podem ser ignorados.

As equações resultantes dessas simplificações são chamadas de Oberbeck–Boussinesq. Nós chamaremos de Oberbeck–Boussinesq simplificada, se assumirmos também que

- A viscosidade dinâmica, a condutividade térmica, o calor específico e a difusibilidade da solução são constantes.
- Na equação de estado o termo $\rho(T, C)$ está linearizado, i.e.,

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0) + \alpha_C(C - C_0)) \quad (1.1)$$

onde ρ_0 , T_0 e C_0 são a densidade do fluido na temperatura T_0 e a concentração de referência respectivamente e α_T e α_C são escolhidos por conveniência, comparando a equação (1.1) com a equação do estado $\rho = \rho(T, C, \pi)$ (π é a pressão hidrostática). Para um gás perfeito, $\alpha_T = \frac{1}{T_0} \approx 3 \times 10^{-3} K^{-1}$ e para um líquido usado em experimentos $\alpha_T \approx 5 \times 10^{-4} K^{-1}$.

1.1.1 Leis de conservação

Vamos considerar três princípios de conservação dos meios contínuos:

- conservação da massa

- conservação da energia interna ou da condução do calor
- conservação do momento

Suponha por momento que o fluido é homogêneo (o tensor de tensão σ não depende explicitamente sobre x). A cada princípio é associado uma respectiva equação:

- A equação da continuidade, a qual descreve a conservação de massa, é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.2)$$

onde ρ é a densidade (kgm^{-3}) do fluido e $\mathbf{u}$ sua velocidade (ms^{-1}). Se a densidade é constante, a equação (1.2) implica que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, isto indica que o fluido é incompressível. Para fluido incompressível é natural assumirmos homogeneidade, i.e., $\rho = 1$.

- Nós agora consideramos a equação da energia interna a qual é dada por:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{u}) = -\operatorname{div} \mathbf{q} - \pi \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau : \nabla \mathbf{u},$$

onde h representa a energia interna por unidade de massa do fluido (Jkg^{-1}), $\mathbf{q}$ o fluxo de Fourier, $\mathbf{q} = -\chi_T \nabla T$ onde χ_T é a condutividade térmica do fluido ($Wm^{-1}K^{-1}$), e T sua temperatura (K). Em coordenadas cartesianas:

$$\tau : \nabla \mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

onde

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

onde δ_{ij} representa o símbolo de Kronecker e u_k a k -ésima componente da velocidade $\mathbf{u}$. A equação da energia interna é obtida subtraindo a equação da energia mecânica

da equação da energia total. A equação da energia mecânica é derivada, fazendo o produto escalar entre a velocidade e a equação de conservação do momento. O último termo da equação é sempre positivo para fluidos Newtonianos e representa a taxa de conversão irreversível de energia cinética sobre energia térmica através do agente de viscosidade. O termo $\pi \operatorname{div} \mathbf{u}$ é positivo ou negativo, dependendo sobre o quanto o fluido é expandido ou contraído. Para os fenômenos aos quais nos interessamos, os dois últimos termos contribuem muito pouco e conseqüentemente iremos omiti-los.

- A conservação do momento é

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \operatorname{div} \sigma + \mathbf{f},$$

onde $\mathbf{f}$ é uma força externa (Nm^{-3}), por exemplo, gravitacional, σ é o tensor tensão e para fluidos Newtonianos, é a taxa de transporte molecular do momento, pode ser escrito da forma

$$\sigma = \tau - \pi I,$$

$$\tau = -\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u} I + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})$$

onde μ é a viscosidade dinâmica, I é a matriz identidade e em coordenadas cartesianas são representados por:

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$(\operatorname{div} \sigma)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}.$$

π é a pressão (Nm^{-2}), μ é o coeficiente de viscosidade do fluido ($kgm^{-1}s^{-1}$). Em coordenadas cartesianas temos o produto tensorial:

$$(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_{ij} = \rho u_i u_j$$

e o divergente:

$$(\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}.$$

Usando a equação da continuidade, nós podemos escrever a conservação de momento na forma mais familiar:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \nabla \sigma + \mathbf{f}.$$

Se todas as simplificações de Boussinesq estão presentes, as equações de Navier-Stokes para fluidos viscosos incompressível com condutividade térmica e fluxo difusivo não homogêneo, com a viscosidade, a condutividade térmica e a difusibilidade da solução constantes, podem ser aproximados pelo seguinte conjunto de equações de Boussinesq clássicas:

- A equação de estado do fluido:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0) + \alpha_C(C - C_0))$$

onde ρ_0 , T_0 e C_0 são a densidade, temperatura e concentração de referência.

- A equação do balanço do momento:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \pi + \rho_0(1 - \alpha_T(T - T_0) + \alpha_C(C - C_0))\mathbf{g} + \nabla \mathbf{S}$$

onde $\sigma = -\pi I + \mathbf{S}$ é o vetor tensão, $\mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D}[\mathbf{u}]$ é a tensão extra, $\mathbf{u}$ é a velocidade do fluido, π é a pressão hidrostática, $\mathbf{g}$ é um campo de força (tipicamente gravitacional), T é a temperatura e C é a concentração.

- A equação de evolução para a temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \chi_T \Delta T + F_T(x, t)$$

onde $\chi_T = \frac{k_T}{\rho_0 c_\pi}$ é a difusibilidade térmica, k_T é o termo de condutividade térmica do fluido, c_π é o calor específico em pressão constante e F_T é a fonte de calor do fluido.

- A equação de evolução para a concentração de solução:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)C = \chi_C \Delta C + F_C(x, t)$$

onde χ_C é a difusibilidade da solução e F_C é a fonte de distribuição de solução.

- A equação

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

indica que o fluido é incompressível, ela nos diz que o volume ocupado por um conjunto se desloca ao longo das trajetórias sem variar com o tempo.

O termo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ indica o operador de convecção, i.e., o termo responsável pelo transporte efetuado pelas correntes que formam no meio do fluido, cuja as i -ésimas componentes em coordenadas cartesianas é dada por:

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

O operador $(\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \sum u_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$ é o operador de advecção, i.e., o termo responsável pela transmissão do calor por um movimento horizontal. Esses termos de convecção e de advecção são mais delicados devido as suas não linearidades.

Notemos que neste tipo de fluido a densidade é assumida constante, com exceção da mudança de densidade que produz a força de flutuação. Entretanto, existem fluidos para os quais as dependências da viscosidade e condutividade térmica com respeito a temperatura, não podem ser ignoradas. Alguns destes tipos de fluidos podem ser representados pelas equações de Boussinesq generalizadas que são descritas por:

- A equação do balanço do momento:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (\nu(T) \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \pi = \rho_0 (1 - \alpha_T(T - T_0) + \alpha_C(C - C_0)) \mathbf{g} \right).$$

- A equação de evolução para a temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (k(T) \nabla T) + \mathbf{u} \cdot \nabla T = F_T(x, t).$$

- A equação de evolução para a concentração de solução:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \operatorname{div} (k(C) \nabla C) + \mathbf{u} \cdot \nabla C = F_C(x, t).$$

Para maiores detalhes veja [19].

Em fluxos acompanhados por transferência de calor, as propriedades do fluido são normalmente funções da temperatura. As variações da temperatura podem ser pequenas e ainda serem a causa do movimento do fluido. Se a variação de densidade não é grande, nós podemos considerar a densidade como constante nos termos oscilantes e de convecção, e tratar ela como variável unicamente no termo gravitacional. Estas aproximações de Boussinesq induz erros na ordem de 1% se a diferença de temperatura são de 2° para líquido e 15° para gases. O erro pode ser mais substancial quando as diferenças de temperaturas são grandes; a solução pode ser qualitativamente falsa. Em nosso contexto assumiremos que a concentração é constante.

1.2 Modelo de Boussinesq Estacionário

O sistema de equações da hidrodinâmica Boussinesq (veja [11], [29]) aparece como uma aproximação de ordem zero para um sistema acoplado entre as equações de Navier-Stokes

e a equação da termodinâmica. Esse modelo é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \pi &= \beta \theta \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ -\chi \Delta \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta &= g & \text{em } \Omega \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde Ω é um domínio em $\mathbb{R}^3$.

Aqui $\mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido, $\pi(x) \in \mathbb{R}$ é a pressão, $\theta(x) \in \mathbb{R}$ é a temperatura, $\mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^3$ é a função (vetorial) gravitacional, g uma força externa e ρ (densidade), ν (viscosidade cinética), β (coeficiente de expansão do volume), χ (a condutividade térmica) são constantes positivas.

Nos últimos anos, foram feitos consideráveis progressos na análise matemática e computacional do sistema acima, veja por instante, [5], [23], [35], [44], [47], [51], [63]. Alguns dos autores acima consideraram condições de bordo mistas para θ . Mas, todos os trabalhos são feitos para funções $\mathbf{u}_0(x)$ e $\theta_0(x)$ (condições sobre a fronteira de Ω) regulares, tal que elas podem ser estendidas para o interior do domínio Ω de acordo com o teorema do traço. Este procedimento nos permite obter um sistema análogo com condições de bordo de Dirichlet homogêneas e usar os argumentos padrões para obter a existência de soluções. Mas, quando $\mathbf{u}_0(x)$ e $\theta_0(x)$ não são regulares, o teorema do traço não pode ser aplicado e a solução de tal sistema não tem sido pesquisada. Portanto, neste trabalho, nós consideramos $\mathbf{u}_0(x) \in L^2(\partial\Omega)$ e $\theta_0(x) \in L^2(\partial\Omega)$, e nós provamos a existência de uma solução muito fraca (ou ultra fraca, a exata definição forneceremos mais tarde), quando a existência de uma solução fraca é conhecida, elas coincidem. Esta noção de solução, é usada por [15] (veja também [16]) para as equações de Stokes com conexão do problema de homogenização. A principal idéia de [16] é usar o método da transposição, antes introduzido por [38], em diferente contexto. Este método é útil quando o problema é linear.

Em seguida [42] estende os resultados de Conca para as equações de Navier-Stokes. O argumento usado por [42] são principalmente: a linearização das equações de Navier-Stokes e argumentos de ponto fixo. No sistema linearizado, ele aplica o resultado obtido por Conca e, em seguida, define um operador contrativo para usar o Teorema do ponto fixo de Banach. Nós estendemos, no capítulo três, os resultados acima para o sistema de Boussinesq.

Existem algumas motivações físicas que nos levam a considerar as equações dos fluidos com dados de bordo irregulares. Em [56] são consideradas as equações estacionárias de Navier-Stokes com dados de bordo em algum espaço de Sobolev $W^{1-\frac{1}{q},q}(\Omega)$, isto é, o problema de um fluido estacionário em “domínio com uma cavidade”, ou seja, a união de um semi-espaço com um domínio limitado (a “cavidade”) e o problema de Taylor, ou seja, o problema de equilíbrio de um fluido entre dois co-centricos cilindros com o cilindro externo fixado e o interno em um movimento rotacional sobre seu eixo.

1.3 Modelo de Boussinesq Clássico

Uma das propostas, do quarto capítulo, é estudar a regularidade das soluções fracas do problema de Cauchy para o modelo de Boussinesq de um fluido viscoso, incompressível e condutividade de calor.

Este problema tem sido estudado intensivamente nos últimos anos. O problema em domínio limitado foi estudado, por exemplo, por Korenev [34], Morimoto [45], Hishida [28], Rojas-Medar, Lorca [52], [53], [54]. Os resultados obtidos são análogos aos das equações de Navier-Stokes clássicas e os argumentos usados são os métodos de Galerkin, semigrupo, etc.

O problema em domínio exterior foi dado por Ōeda [47], [48]. O argumento usado é

o método de imersão de domínios de Ladyzhenskaya [36].

Nós observamos que todos os trabalhos anteriores, usando a decomposição de Helmholtz, eliminam a pressão, em seguida ela é recuperada pelo clássico argumento de De Rham.

Na teoria das equações de Navier-Stokes clássicas o problema de unicidade de solução fraca para $n = 3$ é um quanto difícil (veja Lions [[39] p. 84], Temam [[60], p. 297]). Para soluções suficientemente suaves, a unicidade é provada sem muitos problemas, embora na classe das soluções fracas o problema de unicidade ainda está em aberto. No caso bi-dimensional, o teorema de unicidade é válido.

Existem muitos trabalhos dirigidos para estas questões. Um trabalho pioneiro nesta direção foi dado por Serrin [57], ele impõe condições sobre a velocidade (nós observamos que o trabalho de Serrin tem a condição inicial $\mathbf{u}_0 \in H$). Em seguida muitos outros autores estendem os resultados de Serrin (veja [3], [62]).

Kaniel, em [32] estuda a regularidade da solução fraca para as clássicas equações de Navier-Stokes de um outro ponto de vista. Ele impõe condições sobre a pressão para mostrar a regularidade das soluções fracas. Esses argumentos foram ignorados por muitos anos, mas recentemente muitos autores têm desenvolvido extensões dos resultados de Kaniel (veja [6], [49]).

A principal idéia de Kaniel é a seguinte, se $\mathbf{u}_0 \in V$, é bem conhecido que existe uma única solução local forte para as equações de Navier-Stokes, se $|\mathbf{u}_0|_V$ é suficientemente pequena, a solução é global. Nós observamos que a solução fraca global também existe. Assim, algumas questões interessantes de responder são:

1. É possível trocar a hipótese norma de $\mathbf{u}_0 \in V$ suficientemente pequena por alguma condição que envolva só a pressão? Se a resposta for afirmativa, teríamos outro teorema de existência e unicidade global de soluções fortes, isto obviamente implicará na unicidade

da solução fraca.

2. Será possível trocar as hipóteses colocadas por Serrin sobre a velocidade por algumas que envolvam somente a pressão? Esta questão é muito difícil de responder.

3. Dado que é difícil de responder a questão acima, nasce a seguinte questão: é possível ter um resultado de solução global para espaços intermediários com condições razoáveis sobre a pressão? A resposta é afirmativa como mostrou Berselli [6]. Salientamos que no trabalho de Berselli a questão essencial, envolvida no argumento, é a unicidade da solução local pelo menos, e no caso das equações de Navier-Stokes elas se têm nos espaços L^α_σ , como demonstraram Giga e Miyakawa [22]. Sem a unicidade local o argumento usado por Berselli é inoperante.

É importante dizer que o resultado de Kaniel [32] não é diretamente comparável com o resultado de Serrin, desde que as condições iniciais estão em espaços diferentes. Além disso, será interessante conhecer se é possível trocar as hipóteses de Serrin por outra que envolva somente a pressão, mas esta ainda é uma questão difícil. Em fato, um recente trabalho de Heywood and Walsh [27] dá um interessante resultado sobre o comportamento da pressão em $t = 0$ quando a condição inicial $\mathbf{u}_0 \in V$. Eles mostram que existem condições iniciais $\mathbf{u}_0 \in V$ tais que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|\pi\|_{L^2(\Omega)} = +\infty \quad (1.4)$$

(nós chamamos a atenção que neste caso a pressão satisfaz $\pi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$). Isto implica que $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|\pi\|_{L^p(\Omega)} = +\infty$ para qualquer $p \geq 2$.

Por outro lado, a condição dada por Kaniel é: $\|\pi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_0$ para cada t no intervalo de existência da solução fraca, com $p > \frac{12}{5}$, isto implica, em particular, que $\limsup \|\pi\|_{L^p(\Omega)}$ é finito e conseqüentemente algum grau de regularidade sobre a pressão é em fato necessário. Portanto, outra questão interessante nesta direção é conhecer o

mínimo de hipótese sobre a pressão. O trabalho de Berselli [6] caminha nesta direção. Em fato, o resultado, rudemente falando, são as L^p -versões dos resultados de Kaniel ($p > 3$).

Para o problema de Cauchy, a regularidade da solução fraca foi estudada, por exemplo, por Beirão da Veiga [2], [4], Berselli [7], Chae e Lee [10], Giga [21], Kato [33].

O objetivo deste trabalho é estender as idéias de Chae e Lee para o sistema de Boussinesq. Portanto, nós procuramos o mesmo nível de conhecimento como no caso clássico das equações de Navier-Stokes.

Ainda no capítulo quatro, obtemos alguns resultados sobre a conduta da solução forte do problema de Cauchy para o sistema de Boussinesq, as idéias iniciais para o sistema de Navier-Stokes são dadas por Cheng e Ling [13] e Cheng [12]

1.4 Modelo de Boussinesq Generalizado

Lembramos que no caso das equações de Boussinesq clássicas, a viscosidade ν e a condutividade térmica χ são constantes. Porém, existem fluidos nas quais há dependência da viscosidade e condutividade térmica com respeito a temperatura. Para tais fluidos, a dependência da viscosidade com a temperatura é fundamental na determinação dos detalhes do escoamento. É conhecido que um líquido usualmente sobe no meio de uma célula poligonal de convecção, enquanto que num gás usualmente desce. Graham [25] sugeriu que isto acontece porque tipicamente a viscosidade de um líquido decresce com a temperatura, enquanto que ela tipicamente aumenta em um gás. Esta sugestão foi confirmada por experimentos de Toppelkirch [61] sobre a convecção gerada termicamente em enxofre líquido, no qual a viscosidade tem um mínimo perto de $153^\circ C$. Ele descobriu que a direção do escoamento no meio das células de convecção dependiam do fato da

temperatura estar acima ou abaixo de $153^{\circ}C$. Palm [50] foi o primeiro a analisar o efeito da variação da viscosidade com a temperatura.

As equações de Boussinesq Generalizada descrevem em primeira aproximação a convecção termicamente induzida em fluidos com viscosidades e condutividade térmica dependentes da própria temperatura. Uma análise matemática rigorosa deste problema é mais difícil do que aquela em que é feita no caso das equações de Boussinesq clássicas; isto devido aos fortes acoplamentos não lineares.

Alguns estudos mais detalhados destas equações, em um domínio limitado, com condições de bordo de Dirichlet, obtendo existência e unicidade de soluções via aproximações de Galerkin foram feitos por Boldrini e Lorca (veja [40], [41]). Em domínio exterior (veja [55]), onde se estudam as soluções fracas reprodutivas para este modelo.

Capítulo 2

Notações e Definições

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Nós denotamos por $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ o usual espaço de Lebesgue e por $\|\cdot\|_p$ a L^p -norma sobre Ω . Também nós denotamos por $W^{k,p}(\Omega)$ o usual espaço de Sobolev, sobre Ω , das funções com derivadas até a ordem k pertencentes a $L^p(\Omega)$, com norma $\|\cdot\|_{k,p}$. No caso $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ e $\|\cdot\|_{k,2} = \|\cdot\|_k$. $W_0^{k,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ sobre a norma $\|\cdot\|_{k,p}$ e $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$ (veja Adams [1]). Uma questão interessante é quando temos o domínio, sendo o espaço todo $\mathbb{R}^3$, neste caso $H_0^1(\mathbb{R}^3)$ coincide com $H^1(\mathbb{R}^3)$. Nós definimos também $W_2^{1,1}(Q_T) = \{f; f \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q_T)\}$ com $Q_T = [0, T] \times \Omega$. Com os mesmos símbolos, nós denotamos os espaços de funções vetoriais dimensionais e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto de dualidade de elementos do espaço de Banach X com elementos de seu dual X^* . Denotamos por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

onde $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é o produto escalar sobre $\mathbb{R}^n$.

Nós definimos

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$$

$$H = \text{fecho de } C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) \text{ em } (L^2(\Omega))^n$$

$$V = \text{fecho de } C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) \text{ em } (H_0^1(\Omega))^n.$$

Nós observamos que quando o domínio é limitado em alguma direção vale a desigualdade de Poincaré, isto é:

$$|\mathbf{u}|_2 \leq C(\Omega) |\nabla \mathbf{u}|_2 \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega),$$

esta desigualdade implica que a norma $\|\mathbf{u}\|_1$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a norma $\|\mathbf{u}\| = |\nabla \mathbf{u}|_2$ onde

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 = \sum_{i,j}^n \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

e denotamos por $((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$ e ainda $|\mathbf{u}|_V = |\nabla \mathbf{u}|_2$. No caso de domínio limitado o espaço de Banach V coincide com o conjunto

$$H_{0,\sigma}^1(\Omega) = \{\mathbf{u}; \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\},$$

para maiores detalhes veja [26]. Se Ω não é limitado, existe uma importante diferença entre $H_0^1(\Omega)$ (ou V) para o caso de duas dimensão e três dimensão. Se $n = 2$, $H_0^1(\Omega)$ (ou V) contém funções que não vão para zero quando $|x| \rightarrow \infty$. Se Ω não é limitado, pode existir funções suaves as quais são constantes para grandes valores de $|x|$ que pertencem a $H_0^1(\Omega)$ (ou V). Contudo, isto se torna impossível se $n = 3$ como mostra a desigualdade de Sobolev (Lema 4.14), i.e., a desigualdade de Sobolev implica que as funções em $H_0^1(\Omega)$ (ou V) vão para zero quando $|x| \rightarrow \infty$ (veja [26]).

Nós definimos $L_\sigma^\alpha(\Omega)$ como sendo o fecho, com a respectiva norma de $L^\alpha(\Omega)$, do conjunto $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$, em particular $H = L_\sigma^2(\Omega)$.

Os espaços L^α admitem a decomposição de Helmholtz $(L^\alpha(\Omega))^3 = L_\sigma^\alpha(\Omega) \oplus G_\alpha(\Omega)$ com $G_\alpha(\Omega) = \{\nabla \pi; \pi \in W^{1,\alpha}(\Omega)\}$. Seja P_α a projeção (Helmholtz) de $(L^\alpha(\Omega))^3$ sobre $L_\sigma^\alpha(\Omega)$. Nós denotamos por B_α o operador de Laplace em $L^\alpha(\Omega)$, $1 < \alpha < \infty$, com condições

de bordo de Dirichlet nulas $B_\alpha = -\Delta$ com domínio $D(B_\alpha) = W^{2,\alpha}(\Omega) \cap W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Nós também introduzimos o operador de Stokes A_α por $A_\alpha = -P_\alpha \Delta$ com domínio $D(A_\alpha) = (D(B_\alpha))^3 \cap L_\sigma^\alpha(\Omega)$.

Existem $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \dots\}$, $\mathbf{v}_m \in D(A_2)$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_m, \dots\}$, $\phi_m \in D(B_2)$ tais que

$$A_2 \mathbf{v}_m = \lambda_m \mathbf{v}_m$$

$$B_2 \phi_m = \mu_m \phi_m$$

e ainda $\{\mathbf{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ formam um sistema ortonormal completo em H e $L^2(\Omega)$ respectivamente (veja Constantin [18] e Trudinger [24]).

É bem conhecido que $-A_\alpha$ gera um semigrupo analítico limitado $\{e^{-tA_\alpha}; t \geq 0\}$ sobre $L_\sigma^\alpha(\Omega)$, veja Giga [21].

Nós denotamos por $L^\gamma(0, T; L^\alpha(\Omega))$ o espaço de Banach sobre $[0, T] \times \Omega$ com a norma

$$|\theta|_{L^\gamma(0, T; L^\alpha(\Omega))} = \left(\int_0^T |\theta(t)|_\alpha^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

para $1 \leq \gamma < \infty$, $1 \leq \alpha \leq \infty$ e

$$|\theta|_{L^\infty(0, T; L^\alpha(\Omega))} = \sup_{0 \leq t \leq T} |\theta(t)|_\alpha$$

para $1 \leq \alpha \leq \infty$.

Denotemos por $BC(0, T)$ as funções contínuas e limitadas definidas sobre $(0, T)$. Finalizando, nós escrevemos $L_{loc}^\gamma(0, \infty; L^\alpha(\Omega))$ para denotar o espaço das funções θ tais que

$$\theta \in L^\gamma(I; L^\alpha(\Omega))$$

para todo intervalo limitado I com o fecho de I contido em $[0, \infty)$.

Capítulo 3

O problema estacionário com dados de fronteira em L^2

O sistema de equações da hidrodinâmica Boussinesq (veja [11], [29]) aparece de uma aproximação de ordem zero para um sistema acoplado entre as equações de Navier-Stokes e a da termodinâmica. Em muitas situações, as condições de contorno não são suficientemente regulares para usar a teoria existente na literatura. Neste trabalho, damos uma maneira possível de abordar esta problemática sobre existência e unicidade da solução estacionária para as equações de natural convecção com dados de bordo em L^2 .

Tais equações são descritas pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \pi &= \beta \theta \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ -\chi \Delta \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta &= 0 & \text{em } \Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u} \cdot \nabla = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Aqui $\mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido, $\pi(x) \in \mathbb{R}$ é a pressão, $\theta(x) \in \mathbb{R}$ é a tem-

peratura, $\mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^3$ é a função (vetorial) gravitacional, e ρ (densidade), ν (viscosidade cinética), β (coeficiente de expansão do volume), χ (a condutividade térmica) são constantes positivas. Nós estudamos este sistema de equações com as condições de bordo não homogêneas para $\mathbf{u}$ e θ . Se $\partial\Omega$ é a o bordo de Ω , então as condições de bordo são as seguintes:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x), \quad \theta(x) = \theta_0(x), \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{u}_0(x)$ e $\theta_0(x)$ são funções dadas sobre $\partial\Omega$ (suave).

Nós denotamos por $\mathfrak{B}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $\mathfrak{b}(\cdot, \cdot, \cdot)$ as formas tri-lineares definida por:

$$\mathfrak{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

e

$$\mathfrak{b}(\mathbf{u}, \theta, \psi) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta, \psi).$$

Nós denotamos por $L^2(\partial\Omega)$, $H^q(\partial\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$ os conhecidos espaços de Lebesgue e Sobolev sobre $\partial\Omega$ e $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{H^q(\partial\Omega)}$ suas respectivas normas.

Definição 3.1 *Sejam $\mathbf{u}_0 \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$, $\theta_0 \in L^2(\partial\Omega)$ e $\mathbf{g} \in L^3(\Omega)$.*

Uma terna $(\mathbf{u}, \theta, \pi)$ em $L^3(\Omega) \times L^2(\Omega) \times W^{-1,3}(\Omega)$ é uma solução muito fraca do problema (3.1)-(3.2) se

$$(\mathbf{u}, \nabla \varphi) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \varphi \, ds \quad (3.3)$$

para toda φ em $W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$ para as quais $\gamma_0 \varphi \in L^2(\partial\Omega)$,

$$-\nu(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}) - \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) - \left(\frac{1}{\rho} \pi, \operatorname{div} \mathbf{v}\right) = \beta(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v}) - \nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \, ds \quad (3.4)$$

para toda $\mathbf{v}$ em $W^{2,\frac{3}{2}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$ para as quais $\gamma_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \in L^2(\partial\Omega)$ e

$$-\chi(\theta, \Delta \psi) - \mathfrak{b}(\mathbf{u}, \psi, \theta) = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \, ds \quad (3.5)$$

para toda ψ em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal a $\partial\Omega$.

Os principais resultados que provaremos neste capítulo são:

Teorema 3.2 *Existe uma solução muito fraca do problema (3.1)-(3.2) no sentido da definição 3.1.*

Teorema 3.3 *(Dependência contínua sobre $\mathbf{g}, \theta_0$ e unicidade) Sejam $(\mathbf{u}_i, \theta_i), i = 1, 2$ soluções muito fracas do problema (3.1)-(3.2) com as forças externas $\mathbf{g} = \mathbf{g}_i$, e as condições de bordo $\theta_{0i}, i = 1, 2$, respectivamente. Então, existe uma constante $\nu^* > 0$ tal que para todo $\nu \geq \nu^*$*

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_3 + |\theta_1 - \theta_2|_2 \leq & C(\nu) \{ (|\theta_{01} - \theta_{02}|_{L^2(\partial\Omega)} + |\theta_{01}|_{L^2(\partial\Omega)} |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3) \\ & \times (1 + |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3 + |\mathbf{g}_2|_3) + |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3 \} \end{aligned}$$

onde a constante C depende unicamente sobre os dados do problema e do domínio Ω . Em particular, para $\nu \geq \nu^*$ o problema tem uma única solução.

Primeiramente estudaremos um problema para θ com $\mathbf{u}$ fixo, em seguida consideraremos um problema em $\mathbf{u}$ com θ fixo, com isto, estaremos prontos para provarmos os principais resultados citados acima.

3.1 Problema em θ

Nesta seção, nós consideramos o seguinte problema em θ .

Problema 1. Dado $\theta_0 \in L^2(\partial\Omega)$ e $\mathbf{v} \in L^3(\Omega)$ com $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ e tal que $\mathbf{v} = \mathbf{w}^\varepsilon + \mathbf{v}^\varepsilon$ onde $\mathbf{w}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ e $\mathbf{v}^\varepsilon \in L^3(\Omega)$ com $|\mathbf{v}^\varepsilon|_3$ suficientemente pequeno, achar $\theta \in L^2(\Omega)$ tal que (3.5) é satisfeito para toda $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Observação 3.4 A condição $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ é entendida no sentido fraco, ou seja, $(\mathbf{v}, \nabla \varrho) = 0$, para toda $\varrho \in W_0^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$. Como consequência, nós temos que a forma bilinear

$$B(\phi, \psi) = \chi(\nabla \phi, \nabla \psi) - \mathbf{b}(\mathbf{v}, \psi, \phi)$$

é fortemente elíptica, isto é, ela é bilinear, contínua e coerciva. De fato,

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}, \phi, \phi) = -\frac{1}{2}(\mathbf{v}, \nabla \phi^2) = 0$$

para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$, desde que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ e $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$.

Lema 3.5 Existe uma única solução θ do Problema 1. Além disso,

$$|\theta|_2 \leq c(1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2),$$

onde c é independente de $\mathbf{v}$.

Demonstração: Nós usamos o método da transposição. Se

$$\mathfrak{L}(\psi) = -\chi \Delta \psi + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi,$$

dado $h \in L^2(\Omega)$, seja ψ a única solução fraca em $H_0^1(\Omega)$ da equação $\mathfrak{L}(\psi) = h$, isto é,

$$B(\phi, \psi) = (h, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.6)$$

A existência e unicidade da solução segue do Lema de Lax-Milgram.

Fazendo $\phi = \psi$ em (3.6), nós obtemos:

$$\begin{aligned} B(\psi, \psi) &= \chi(\nabla \psi, \nabla \psi) - \mathbf{b}(\mathbf{v}, \psi, \psi) \\ &= \chi |\nabla \psi|_2^2 = (h, \psi) \\ &\leq C |\psi|_2 |h|_2 \\ &\leq C |\nabla \psi|_2 |h|_2 \end{aligned}$$

conseqüentemente,

$$|\nabla \psi|_2 \leq C |h|_2. \quad (3.7)$$

Agora, nós provaremos que a seguinte estimativa é verdadeira:

$$\|\psi\|_2 \leq C(1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2) |h|_2,$$

implicando que $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Para fazer isto, nós regularizamos a função $\mathbf{v}$, fazendo a convolução dela com uma família de mollifiers $\{\rho_\eta\}$, $\eta > 0$, então escrevendo:

$$\mathbf{v}_\eta = \mathbf{v} * \rho_\eta = \mathbf{w}^\varepsilon * \rho_\eta + \mathbf{v}^\varepsilon * \rho_\eta = \mathbf{w}_\eta^\varepsilon + \mathbf{v}_\eta^\varepsilon$$

agora, seja ψ_η a solução em $H_0^1(\Omega)$ do sistema regularizado:

$$-\chi \Delta \psi_\eta = h - (\mathbf{v}_\eta \cdot \nabla) \psi_\eta = h - (\mathbf{w}_\eta^\varepsilon \cdot \nabla) \psi_\eta - (\mathbf{v}_\eta^\varepsilon \cdot \nabla) \psi_\eta = F_\eta,$$

desde que $\mathbf{v}_\eta^\varepsilon, \mathbf{w}_\eta^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $h, \nabla \psi \in L^2(\Omega)$ segue que $F_\eta \in L^2(\Omega)$.

Se usarmos o Teorema 5, p. 141 de [46], nós obtemos

$$\|\psi_\eta\|_2 \leq C |F_\eta|_2 \quad (3.8)$$

onde C é uma constante positiva independente de $\mathbf{v}_\eta$.

Agora, usando as desigualdades de Hölder, Young, Gagliardo-Nirenberg e de interpolação, nós obtemos:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{w}_\eta^\varepsilon \cdot \nabla) \psi_\eta|_2 &\leq C \|\mathbf{w}_\eta^\varepsilon\|_1 |\nabla \psi_\eta|_3 \\ &\leq \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} C \|\mathbf{w}_\eta^\varepsilon\|_1 |\nabla \psi_\eta|_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla \psi_\eta\|_1^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_\tau \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2 |\psi_\eta|_V + \tau \|\psi_\eta\|_2 \end{aligned}$$

e

$$|(\mathbf{v}_\eta^\varepsilon \cdot \nabla) \psi_\eta|_2 \leq |\mathbf{v}_\eta^\varepsilon|_3 |\nabla \psi_\eta|_6 \leq C |\mathbf{v}^\varepsilon|_3 \|\psi_\eta\|_2 \leq \tau C \|\psi_\eta\|_2$$

se $|\mathbf{v}^\varepsilon|_3 \leq \tau$. Usando esta última estimativa em (3.8), nós obtemos:

$$\|\psi_\eta\|_2 \leq C|h|_2 + C_\tau \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2 |\psi_\eta|_V + C_\tau \|\psi_\eta\|_2$$

com um apropriado τ , nós temos:

$$\|\psi_\eta\|_2 \leq C(|h|_2 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2 |\psi_\eta|_V),$$

e usando (3.7), nós obtemos:

$$|\psi_\eta|_V \leq C|h|_2$$

assim

$$\|\psi_\eta\|_2 \leq C(1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2) |h|_2.$$

Usando o Teorema de Banach-Alaoglu (veja [8]), nós temos para alguma subsequência

$$\|\psi\|_2 \leq C(1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2) |h|_2$$

e portanto, $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Considerando a aplicação l definida como segue: para cada $f \in L^2(\Omega)$ nós associamos a única solução $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ de (3.6). Então a relação

$$l(f) = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \, ds$$

define um funcional linear e contínuo em f . Escrevendo a equação para θ :

$$l(f) = (\theta, f)$$

para toda $f \in L^2(\Omega)$, pelo Teorema de Riesz, existe um único $\theta \in L^2(\Omega)$ tal que $l(f) = (\theta, f)$, conseqüentemente nós mostramos por (3.6) a existência e unicidade do lema.

Para mostrar a estimativa dada no lema, nós fazemos $f = \theta$ na igualdade $l(f) = (\theta, f)$, obtendo:

$$|\theta|_2^2 = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \, ds$$

usando o fato que

$$|z|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(|\nabla z|_2^{\frac{1}{2}} |z|_2^{\frac{1}{2}} + |z|_2)$$

para qualquer $z \in H^1(\Omega)$ e $\|\psi\|_2 \leq C(1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2) |\theta|_2$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} |\theta|_2^2 &= -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} ds \leq \chi |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} |\nabla\psi|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq C\chi |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} (\|\psi\|_2^{\frac{1}{2}} |\psi|_V^{\frac{1}{2}} + |\psi|_V) \\ &\leq C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} ((1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2) |\theta|_2)^{\frac{1}{2}} |\psi|_V^{\frac{1}{2}} + |\psi|_V, \end{aligned}$$

lembrando que $|\psi|_V \leq C |\theta|_2$, nós concluimos que

$$|\theta|_2^2 \leq C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} ((1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2) + 1) |\theta|_2$$

assim, nós obtemos a estimativa desejada. ■

3.2 Problema em u.

Nesta seção, nós consideramos o seguinte problema em $\mathbf{u}$.

Problema 2. Dado $\theta \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\partial\Omega)$ e $\mathbf{g} \in L^3(\Omega)$, achar $\mathbf{u} \in L^3(\Omega)$ tal que

$$(\mathbf{u}, \nabla\varphi) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \varphi ds$$

para toda $\varphi \in W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$ para as quais $\gamma_0\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ e

$$-\nu(\mathbf{u}, \Delta\varphi) - \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{u}) = \beta(\theta\mathbf{g}, \varphi) - \nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} ds \quad (3.9)$$

para toda $\varphi \in W^{2, \frac{3}{2}} \cap W_0^{1, \frac{3}{2}}$ para as quais $\gamma_0 \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $\operatorname{div} \varphi = 0$.

Os seguintes lemas são importantes para a resolução do problema 2.

Lema 3.6 (*extensão de Leray-Hopf*). *Seja Ω um conjunto limitado, aberto e conexo em $\mathbb{R}^3$ de classe C^2 e $\mathbf{z}_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ com $\int_{\partial\Omega} \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{n} ds = 0$. Então, para toda $\tau > 0$ existe uma*

função $\tilde{\mathbf{z}}_0 \in H^1(\Omega)$, $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{z}}_0 = 0$ em Ω , $\tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_0$ sobre $\partial\Omega$ e $|\mathfrak{B}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{z}}_0, \mathbf{u})| \leq \tau \|\mathbf{u}\|_V^2$ para toda $\mathbf{u} \in V$.

Demonstração: Veja Temam [60], Capítulo II, parágrafo 1.4 e Apêndice. ■

Lema 3.7 (Marusić-Paloca). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com um bordo $\partial\Omega$ de classe C^2 . Consideremos o seguinte problema de valor limitado para as equações de Navier-Stokes com dado $\mathbf{r}$ em $L^2(\partial\Omega)$, satisfazendo $\int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$,

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{z} + (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \frac{1}{\rho} \nabla \pi = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{z} = 0 \\ \mathbf{z} = \mathbf{r} \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

se $\|\mathbf{r}\|_{L^2(\partial\Omega)}$ é suficientemente pequeno então existe uma única solução muito fraca $\mathbf{z}$ em $L^3(\Omega)$ do problema acima. Além disso, existe uma constante c_1 dependendo unicamente sobre ν tal que

$$\|\mathbf{z}\|_3 < \frac{c_1 \nu \|\mathbf{r}\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\nu - c_1 \|\mathbf{r}\|_{L^2(\partial\Omega)}}.$$

Demonstração: Veja Teorema 4 em Marusić [42]. ■

Lema 3.8 Se $\{\mathbf{v}_n^\varepsilon\}$ é uma seqüência limitada em H^1 , $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon$, e θ_n a única solução do problema 1 com $\mathbf{v} = \mathbf{u}_n$. Então existe uma subsequência $\{\theta_{n_k}\}$ fortemente convergente em $L^2(\Omega)$.

Demonstração: Do Lema 3.5 segue que $\{\theta_n\}$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Conseqüentemente existe uma subsequência $\{\theta_{n_k}\}$ que é fracamente convergente em $L^2(\Omega)$.

Agora, usando o fato que $|\theta|_2^2 = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \, ds$ nós temos:

$$|\theta_{n_k}|_2^2 - |\theta_{n_l}|_2^2 = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\psi_{n_k} - \psi_{n_l}) \, ds$$

onde $\mathfrak{L}(\psi_{n_k}) = \theta_{n_k}$.

Desde que $\{\theta_n\}$ é limitada em $L^2(\Omega)$, a desigualdade $\|\psi\|_2 \leq C(1 + \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_1^2) \|h\|_2$ implica que $\{\psi_{n_k}\}$ é limitada em $H^2(\Omega)$. Usando a imersão compacta $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, nós obtemos a existência de uma subsequência que nós denotamos também por $\{\psi_{n_k}\}$, tal que $\{\nabla\psi_{n_k}\}$ converge fortemente em $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$. Desde que $H^2(\partial\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow H^1(\partial\Omega)$, nós podemos assumir que $\|\nabla\psi_{n_k} - \nabla\psi_{n_l}\|_{L^2(\partial\Omega)}$ converge para zero quando $k, l \rightarrow \infty$. Agora, nós obtemos da última desigualdade que $|\theta_{n_k}|_2^2 - |\theta_{n_l}|_2^2 \rightarrow 0$ quando $k, l \rightarrow \infty$. Usando a convergência fraca de $\{\theta_{n_k}\}$ em $L^2(\Omega)$, nós obtemos a convergência forte de $\{\theta_{n_k}\}$ em $L^2(\Omega)$. ■

Nós assumimos que $\mathbf{u}$ é a solução do Problema 2 e que nós podemos escrever $\mathbf{u}$ como uma parte regular $\mathbf{v}^\varepsilon$ e uma parte irregular $\mathbf{u}^\varepsilon$, isto é, nós escrevemos $\mathbf{u}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon \quad (3.11)$$

com $\varepsilon > 0$, onde $\mathbf{v}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $\operatorname{div} \mathbf{v}^\varepsilon = 0$, $\mathbf{v}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0^\varepsilon$ ($\mathbf{u}_0^\varepsilon$ é a aproximação de $\mathbf{u}_0$ em $L^2(\partial\Omega)$ tal que $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} \ll 1$) e $\mathbf{u}^\varepsilon \in L^3(\Omega)$ é uma solução muito fraca do problema

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\rho} \nabla \pi^\varepsilon &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon \end{aligned} \quad (3.12)$$

dado pelo Lema 3.7, pela definição da solução muito fraca, nós temos em particular

$$(\mathbf{u}^\varepsilon, \nabla \psi) = \int_{\partial\Omega} ((\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}) \psi \, ds$$

para toda $\psi \in W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$ para as quais $\gamma_0 \psi \in L^2(\partial\Omega)$ e portanto

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

e

$$-\nu(\mathbf{u}^\varepsilon, \Delta \varphi) - \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{u}^\varepsilon) = -\nu \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds$$

para toda $\varphi \in W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega) \cap W_0^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$ para as quais $\gamma_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$ com $\operatorname{div} \varphi = 0$. Usando (3.11) e (3.12) na última igualdade, nós obtemos:

$$\begin{aligned} -\nu(\mathbf{v}^\varepsilon, \Delta \varphi) - \nu(\mathbf{u}^\varepsilon, \Delta \varphi) - \mathfrak{B}(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}^\varepsilon) &= \mathfrak{B}(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{u}^\varepsilon) - \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}^\varepsilon) \\ &- \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{u}^\varepsilon) = \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi) - \nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -\nu(\mathbf{v}^\varepsilon, \Delta \varphi) &= \mathfrak{B}(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{u}) + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}^\varepsilon) \\ &+ \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi) - \nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds \end{aligned}$$

integrando por parte o lado esquerdo da última igualdade, e usando o fato que $\mathbf{v}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0^\varepsilon$, nós obtemos

$$\nu((\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi)) - \nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds = \mathfrak{B}(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{u}) + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}^\varepsilon) + \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi) - \nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds$$

e portanto

$$\nu((\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi)) = \mathfrak{B}(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{u}) + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}^\varepsilon) + \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi). \quad (3.13)$$

Agora, fazendo

$$\mathbf{v}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon + \mathbf{v} \quad (3.14)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon$ é uma apropriada extensão de Leray-Hopf de $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ para Ω dada pelo Lema 3.6 e $\mathbf{v} \in V$. Agora, usando (3.11) e (3.14) nós obtemos

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon + \mathbf{v} + \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{v} + \mathbf{U}^\varepsilon \quad (3.15)$$

nós observamos que $\mathbf{u}^\varepsilon \in L^3(\Omega)$ e

$$\mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_{\partial\Omega} + \mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0^\varepsilon + \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon = \mathbf{u}_0$$

aplicando (3.14) e (3.15) em (3.13) nós obtemos:

$$\begin{aligned}\nu((\mathbf{v}, \varphi)) &= -\nu((\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \varphi)) + \mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon + \mathbf{v}, \varphi, \mathbf{v} + \mathbf{U}^\varepsilon) \\ &\quad + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon + \mathbf{v}) + \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi)\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\nu((\mathbf{v}, \varphi)) &= -\nu((\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \varphi)) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \varphi, \mathbf{v}) \\ &\quad + \mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \varphi, \mathbf{U}^\varepsilon) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \varphi, \mathbf{U}^\varepsilon) \\ &\quad + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}) + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon) + \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi).\end{aligned}$$

Nós definimos os operadores

$$L(\mathbf{v}, \varphi) = \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \varphi, \mathbf{U}^\varepsilon)$$

e

$$\langle F, \varphi \rangle = -\nu((\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \varphi)) + \mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \varphi, \mathbf{U}^\varepsilon) + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon)$$

então

$$\nu((\mathbf{v}, \varphi)) = \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \varphi, \mathbf{v}) + \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi) + L(\mathbf{v}, \varphi) + \langle F, \varphi \rangle \quad (3.16)$$

para toda $\varphi \in W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega) \cap W_0^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$ com $\operatorname{div} \varphi = 0$. Se $\mathbf{v}$ é uma solução do problema (3.16) então, também é uma solução variacional, isto é,

$$\nu((\mathbf{v}, \varphi)) = \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \varphi, \mathbf{v}) + \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi) + L(\mathbf{v}, \varphi) + \langle F, \varphi \rangle \quad (3.17)$$

para toda $\varphi \in V$, nós podemos verificar que $\mathfrak{B}(\mathbf{v}, \varphi, \mathbf{v})$, $L(\mathbf{v}, \varphi)$ e $\langle F, \varphi \rangle$ são aplicações lineares contínuas em φ com respeito a topologia de $H^1(\Omega)$, e por argumentos de continuidade segue que a última equação tem solução em $\mathbf{v} \in V$.

Fazendo $\mathbf{v} \in V$ uma solução de (3.17), nós concluímos que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{U}^\varepsilon = \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon$$

é uma solução muito fraca do problema 2.

3.3 Prova dos principais teoremas

Demonstração: (Teorema 3.2) Nós iremos assumir que $\mathbf{u}_0 \in L^2(\partial\Omega)$, os dados de bordo irregular. Nós fazemos uma aproximação suave $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ de $\mathbf{u}_0$ em $L^2(\partial\Omega)$ tal que $|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon|_{L^2(\partial\Omega)}$ é suficientemente pequeno, e seja $\mathbf{u}^\varepsilon$ uma solução muito fraca de (3.12), dado pelo Lema 3.7; nós fazemos $|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon|_{L^2(\partial\Omega)}$ suficientemente pequeno tal que o problema 1 tenha uma solução para cada $\mathbf{v}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ e que a desigualdade a frente (3.20) seja verdadeira. Então, nós construímos a extensão de Leray-Hopf $\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon$ de $\mathbf{u}_0^\varepsilon$, satisfazendo

$$|\mathfrak{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \mathbf{v})| \leq \frac{\nu}{2} |\mathbf{v}|_V^2 \quad (3.18)$$

para toda $\mathbf{v} \in V$. O Lema 3.6 implica a última desigualdade na construção da extensão $\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon$ de $\mathbf{u}_0^\varepsilon$.

Agora, para $\mathbf{v} \in V$, nós definimos

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{v}^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon$$

e para este $\mathbf{v}$ nós resolvemos o **problema 1** em θ . Em seguida, com este θ a única solução do problema 1, nós podemos definir $A(\mathbf{v}) \in V$ por

$$\nu((A\mathbf{v}, \varphi)) - L(A\mathbf{v}, \varphi) = \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \varphi, \mathbf{v}) + \langle F, \varphi \rangle + \beta(\theta \mathbf{g}, \varphi) \quad (3.19)$$

para toda $\varphi \in V$. É fácil mostrar que o operador $E(\mathbf{v}, \varphi) = \nu((\mathbf{v}, \varphi)) - L(\mathbf{v}, \varphi)$ é contínuo e coercivo. Para cada $\theta \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{v} \in V$ o lado direito de (3.19) define um funcional linear contínuo em φ sobre V . Então, do Lema de Lax-Milgram, nós obtemos que o operador A está bem definido.

Nós observamos que cada ponto fixo $\mathbf{v}$ do operador A , define um par $(\mathbf{u}, \theta) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}^\varepsilon, \theta)$ que é uma solução muito fraca de (3.1)-(3.2). Usando o Lema de De Rham (veja [60]), nós mostramos que existe $\pi \in W^{-1,3}(\Omega)$ tal que a terna $(\mathbf{u}, \theta, \pi)$ satisfaz as condições da definição 3.1.

Para ν suficientemente grande, nós podemos provar que o operador A é completamente contínuo e que para toda $\mathbf{v} \in V$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$, o conjunto dos vetores $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v}$ estão na bola $|\mathbf{v}|_V \leq M$. A existência do ponto fixo de A segue do princípio de Leray-Schauder (para saber sobre o princípio, veja [24]). ■

Lema 3.9 *Se ν é suficientemente grande, existe uma constante positiva $M > 0$ tal que para toda $\mathbf{v} \in V$ satisfazendo a equação $\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v}$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ nós temos $|\mathbf{v}|_V \leq M$.*

Demonstração: Se $\lambda = 0$ então $\mathbf{v} = 0$. Agora, se $\lambda \in (0, 1]$ nós temos $A\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$ e usando (3.19) no caso que $\varphi = \mathbf{v}$, nós obtemos

$$E\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) = \langle F, \mathbf{v} \rangle + \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \beta(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v}) = \langle F, \mathbf{v} \rangle + \beta(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})$$

ou

$$\nu |\mathbf{v}|_V^2 - L(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda \langle F, \mathbf{v} \rangle + \lambda \beta(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})$$

agora, usando a definição de L ,

$$|L(\mathbf{v}, \mathbf{v})| = |\mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{U}^\varepsilon)| \leq |\mathfrak{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \mathbf{v})| + |\mathfrak{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon)|$$

a estimativa (3.18), a desigualdade de Hölder para obtermos

$$|\mathfrak{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon)| \leq |\mathbf{u}^\varepsilon|_3 |\nabla \mathbf{v}|_2 |\mathbf{v}|_6 \leq C |\mathbf{u}^\varepsilon|_3 |\mathbf{v}|_V^2,$$

o Lema 3.7 e para ν suficientemente grande, segue que

$$\begin{aligned} |L(\mathbf{v}, \mathbf{v})| &\leq \left(\frac{\nu}{2} + C \frac{c_1 \nu |\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_{L^2(\partial\Omega)}}{\nu - c_1 |\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_{L^2(\partial\Omega)}} \right) |\mathbf{v}|_V^2 \\ &\leq \frac{3}{4} \nu |\mathbf{v}|_V^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

para $|\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_{L^2(\partial\Omega)}$ suficientemente pequeno com relação a ν . Agora, usando a definição de F nós obtemos

$$|\langle F, \mathbf{v} \rangle| = |-\nu((\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \mathbf{v})) + \mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon) + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon)|,$$

usando a desigualdade de Hölder, nós damos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} |((\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \mathbf{v}))| &\leq |\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_2 |\mathbf{v}|_V \\ |\mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon)| &\leq |\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_3 |\mathbf{u}^\varepsilon|_6 |\nabla \mathbf{v}|_2 \leq C |\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_3 |\mathbf{u}^\varepsilon|_V |\mathbf{v}|_V \\ |\mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon)| &\leq |\mathbf{u}^\varepsilon|_3 |\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_6 |\nabla \mathbf{v}|_2 \leq C |\mathbf{u}^\varepsilon|_3 |\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon|_V |\mathbf{v}|_V. \end{aligned}$$

Então, $|\langle F, \mathbf{v} \rangle| \leq \lambda C |\mathbf{v}|_V$ e pelo Lema 3.5

$$\beta |(\theta \mathbf{g}, \mathbf{v})| \leq C |\mathbf{g}|_3 (1 + \|\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon\|_1) |\mathbf{v}|_V \leq \frac{\nu}{8} |\mathbf{v}|_V^2 + C |\mathbf{v}|_V,$$

portanto

$$\nu |\mathbf{v}|_V^2 \leq \frac{7}{8} \nu |\mathbf{v}|_V^2 + C |\mathbf{v}|_V,$$

com isto, nós obtemos o resultado desejado. ■

Lema 3.10 *O operador A é completamente contínuo.*

Demonstração: Seja $\{\mathbf{v}_n\}$ uma seqüência limitada em V . Por definição, nós temos

$$E(A\mathbf{v}_m, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle + \mathfrak{B}(\mathbf{v}_m, \varphi, \mathbf{v}_m) + (\beta \theta_m \mathbf{g}, \varphi) \quad (3.21)$$

$$E(A\mathbf{v}_n, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle + \mathfrak{B}(\mathbf{v}_n, \varphi, \mathbf{v}_n) + (\beta \theta_n \mathbf{g}, \varphi) \quad (3.22)$$

para toda $\varphi \in V$, onde

$$(\theta_n, -\chi \Delta \psi + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla \psi)) = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \, ds$$

e

$$(\theta_m, -\chi \Delta \psi + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \psi)) = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \, ds$$

e $\mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m + \mathbf{u}^\varepsilon$. Nós fazemos a diferença entre (3.21) e (3.22), para obtermos:

$$\begin{aligned} E(A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, \varphi) &= \mathfrak{B}(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n, \varphi, \mathbf{v}_n) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}_m, \varphi, \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n) \\ &\quad + \beta((\theta_m - \theta_n)\mathbf{g}, \varphi), \end{aligned}$$

fazendo $\varphi = A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n$, segue que

$$\begin{aligned} \nu |A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n|_V^2 - \mathfrak{B}(A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, \mathbf{u}^\varepsilon) &= \mathfrak{B}(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \\ &\quad + \mathfrak{B}(\mathbf{v}_m, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n) \\ &\quad + \beta((\theta_m - \theta_n)\mathbf{g}, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

usando o fato que $|L(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \leq \frac{3}{4}\nu |\mathbf{v}|_V^2$ e a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}(A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, \mathbf{u}^\varepsilon)| &\leq \frac{3}{4}\nu |A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n|_V^2, \\ |\mathfrak{B}(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n)| &\leq |\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n|_3 |\nabla(A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n)|_2 |\mathbf{v}_n|_6 \\ &\leq C |\mathbf{v}_n|_6 |\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n|_3 |A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n|_V \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}(\mathbf{v}_m, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n)| &\leq |\mathbf{v}_m|_6 |\nabla(A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n)|_2 |\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n|_3 \\ &\leq C |\mathbf{v}_m|_6 |\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n|_3 |A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n|_V, \\ |((\theta_m - \theta_n)\mathbf{g}, A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n)| &\leq C |\theta_m - \theta_n|_2 |\mathbf{g}|_3 |A\mathbf{v}_m - A\mathbf{v}_n|_V, \end{aligned}$$

desde que $\{\mathbf{v}_m\}$ é uma seqüência limitada em V , existe uma subsequência $\{\mathbf{v}_{m_k}\}$ que converge em $L^3(\Omega)$. Portanto, o Lema 3.8 implica na existência de uma subsequência $\{\theta_{n_k}\}$ que converge em $L^2(\Omega)$. Então $\{A\mathbf{v}_{n_k}\}$ é uma seqüência de Cauchy em V . Consequentemente, o operador A é compacto. Nós observamos que a continuidade de A em V é uma imediata consequência das últimas desigualdades. ■

Em seguida, daremos a demonstração do resultado de dependência contínua e unicidade de solução.

Demonstração: (Teorema 3.3) Se

$$\nu((\mathbf{v}_i, \varphi)) = \mathfrak{B}(\mathbf{v}_i, \varphi, \mathbf{v}_i) + \beta(\theta_i \mathbf{g}_i, \varphi) + L(\mathbf{v}_i, \varphi) + \langle F, \varphi \rangle \quad (3.23)$$

onde

$$L(\mathbf{v}_i, \varphi) = \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \mathbf{v}_i) + \mathfrak{B}(\mathbf{v}_i, \varphi, \mathbf{U}^\varepsilon)$$

com $\mathbf{U}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon$ e

$$\langle F, \varphi \rangle = -\nu((\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \varphi)) + \mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon, \varphi, \mathbf{U}^\varepsilon) + \mathfrak{B}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi, \tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon)$$

para $i = 1, 2$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Nós lembramos que $\mathbf{u}^\varepsilon$ é uma solução muito fraca de (3.12) com $\mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon$, onde $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ é uma aproximação de $\mathbf{u}_0$ e $|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^\varepsilon|_{L^2(\partial\Omega)}$ é suficientemente pequeno com relação a ν , e $\tilde{\mathbf{u}}_0^\varepsilon$ é uma Leray-Hopf extensão de $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ satisfazendo (3.18). De (3.20), nós obtemos

$$|L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)| \leq \frac{3}{4}\nu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V^2.$$

Agora, escrevendo (3.23) para $i = 1, 2$, tomando a diferença e observando que

$$(\theta_1 \mathbf{g}_1, \varphi) - (\theta_2 \mathbf{g}_2, \varphi) = ((\theta_1 - \theta_2)(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2), \varphi) + ((\theta_1 - \theta_2)\mathbf{g}_2, \varphi) + (\theta_2(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2), \varphi)$$

e fazendo $\varphi = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, segue que

$$\begin{aligned} \nu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V &\leq \frac{3}{4}\nu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V + C |\mathbf{v}_2|_V |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V \\ &\quad + C |\theta_1 - \theta_2|_2 (|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3 + |\mathbf{g}_2|_3) \\ &\quad + C |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3 \end{aligned}$$

conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V &\leq C |\mathbf{v}_2|_V |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V + C |\theta_1 - \theta_2|_2 (|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3 + |\mathbf{g}_2|_3) \\ &\quad + C |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3. \end{aligned}$$

Do Lema 3.9, nós temos $|\mathbf{v}_2|_V \leq M$, onde M não cresce quando ν cresce. Portanto, para ν suficientemente grande nós temos $C |\mathbf{v}_2|_V \leq \frac{\nu}{8}$. E assim

$$\frac{1}{8}\nu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V \leq C |\theta_1 - \theta_2|_2 (|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3 + |\mathbf{g}_2|_3) + C |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3. \quad (3.24)$$

Primeiro, assumiremos que $\theta_{01} = \theta_{02}$. Então, desde que $(\theta_i, f_i) = l(f_i)$

$$(\theta_1, f_i) = -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{n}} ds \quad (3.25)$$

onde $f_i = \mathfrak{L}_{u_i}(\psi_i)$ para $\mathfrak{L}_u(\psi) = -\chi \Delta \psi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi$. Fazendo a diferença entre (3.25) para $i = 1, 2$, segue que

$$\begin{aligned} |\theta_1 - \theta_2|_2^2 &= -\chi \int_{\partial\Omega} \theta_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\psi_1 - \psi_2) ds \\ &\leq C \chi |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} \|\psi_1 - \psi_2\|_2 \\ &\leq C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \nabla \psi_2|_2 \\ &\leq C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \|\psi_2\|_2 \\ &\leq C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V (1 + \|\mathbf{v}_2\|_V^2) |\theta_1 - \theta_2|_2 \\ &\leq C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V (1 + M^2) |\theta_1 - \theta_2|_2 \\ &= C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V |\theta_1 - \theta_2|_2 \end{aligned}$$

usando (3.24)

$$\begin{aligned} |\theta_1 - \theta_2|_2 &\leq C |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V \\ &\leq \frac{C}{\nu} |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} (|\theta_1 - \theta_2|_2 (|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3 + |\mathbf{g}_2|_3) + |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3) \end{aligned}$$

agora para ν suficientemente grande, segue que

$$|\theta_1 - \theta_2|_2 \leq C(\nu) |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3$$

usando o fato que

$$|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_3 = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_3 \leq C \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V$$

segue

$$|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_3 + |\theta_1 - \theta_2|_2 \leq C(\nu) |\theta_0|_{L^2(\partial\Omega)} |\theta_2|_2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_3.$$

Nós observamos que se fizermos $\theta_{01} \neq \theta_{02}$, adiciona-se o termo

$$\chi \int_{\partial\Omega} (\theta_{01} - \theta_{02}) \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}} \, ds$$

e este último termo é facilmente estimado por $C \|\theta_{01} - \theta_{02}\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\theta_1 - \theta_2\|_2$. ■

Capítulo 4

O Problema de Cauchy

4.1 Condições suficientes para a regularidade da solução

fraca

A proposta desta seção é estudar a regularidade das soluções fracas do problema de Cauchy para o modelo de Boussinesq de um fluido viscoso, incompressível e com condutividade de calor.

Sejam $\mathbf{u}, \pi, \theta$ a velocidade, pressão e a temperatura do fluido, respectivamente, no domínio $[0, T] \times \mathbb{R}^3, 0 < T < \infty$. Na aproximação Oberbeck-Boussinesq, o modelo é

descrito pelas equações (veja [29]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \pi = \theta \mathbf{f} \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = g \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x) \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad (4.6)$$

$$\theta \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Este problema tem sido estudado intensivamente nos últimos anos. O problema em domínio limitado foi estudado, entre outros, por Hishida [28], Korenev [34], Morimoto [45], Rojas-Medar e Lorca [52], [53], [54]. Os resultados obtidos são análogos aos das clássicas equações de Navier-Stokes e os argumentos usados são os métodos de Galerkin, semigrupo, etc.

Kaniel [32] estuda a regularidade da solução fraca para as clássicas equações de Navier-Stokes de um outro ponto de vista. Ele impõe condições sobre a pressão para mostrar a regularidade das soluções fracas. Mais recentemente, Berselli [6], Chae e Lee [10], aplicam uma técnica (a mesma empregada neste capítulo) de forma similar ao que é usada na construção de soluções fracas. A desigualdade da energia é trocada por uma apropriada estimativa no espaço $L^\alpha(\mathbb{R}^3)$, $\alpha > 3$. Para isto, multiplicamos (4.1) por $\alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u}$ e integramos por partes para obtermos uma estimativa em $L^\alpha(\mathbb{R}^3)$. Com essa técnica, o termo da pressão não desaparece (nós observamos que todos os trabalhos anteriores, usando a decomposição de Helmholtz, eliminam a pressão, em seguida ela é recuperada pelo clássico argumento de De Rham). Ambos trabalhos partem da unicidade da solução

local, para garantir isso, é necessário assumir que a condição inicial $\mathbf{u}_0$ pertença a um apropriado espaço funcional. Uma certa limitação é imposta sobre a associada pressão da solução fraca das equações o que é uma condição suficiente para garantir uma melhor regularidade da solução fraca e com isso há um ganho da unicidade.

Berselli trabalha em um domínio limitado, suave de $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, sendo que Chae e Lee trabalham no espaço todo $\mathbb{R}^3$. Nesta seção, estendemos as idéias de Chae e Lee [10] para o sistema de Boussinesq clássico. Portanto, nós procuramos o mesmo nível de conhecimento como no caso clássico das equações de Navier-Stokes.

A seguir, damos a definição de solução regular para as equações do modelo de Boussinesq.

Definição 4.1 *Sejam $\mathbf{u}_0 \in L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap L^r_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $\theta_0 \in L^\alpha(\mathbb{R}^3) \cap L^r(\mathbb{R}^3)$, e $\mathbf{f} \in L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)) \cap L^{2\alpha}(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T; L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^3))$, $g \in L^\alpha(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$ para $\alpha > r \geq 3$ e $\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3}$. Uma solução regular do problema (4.1)-(4.7), é um par $(\mathbf{u}, \theta)$ tal que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; D(A_\alpha))$, $\theta \in L^\infty(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; D(B_\alpha))$ e que satisfaça (4.1)-(4.7).*

Em seguida, daremos alguns lemas que servirão como ferramentas para demonstrarmos o teorema principal.

Lema 4.2 *Se $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, então*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \cdot \alpha |\theta|^{\alpha-2} \theta \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Para provar o lema é suficiente observar que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx &= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \partial_i u_j u_j |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\
 &= - \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} u_i u_j \partial_i u_j |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\
 &\quad - (\alpha - 2) \sum_{i,j,l} \int_{\mathbb{R}^3} u_i u_j u_j \partial_i |\mathbf{u}|^{\alpha-2} |\mathbf{u}|^{-2} u_l \partial_i u_l \, dx \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx \\
 &\quad - (\alpha - 2) \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx.
 \end{aligned}$$

■

O próximo lema é importante para futuros argumentos.

Lema 4.3 *Seja $(\mathbf{u}, \theta)$ uma solução regular de (4.1)-(4.7) com condições iniciais $\mathbf{u}_0 \in L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $\theta_0 \in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{f} \in L^{\frac{\alpha}{2}}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T; L^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}(\mathbb{R}^3))$ e $g \in L^{\frac{\alpha}{2}}(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$ para $\alpha \geq 3$. Se π , a associada pressão satisfaz*

$$\pi \in L^2(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))$$

então

$$\begin{aligned}
 &\sup_{0 \leq t \leq T} (|\mathbf{u}|_\alpha^\alpha + |\theta|_\alpha^\alpha) + \mu (|\mathbf{u}|_{L^\alpha(0, T; L^{3\alpha})} + |\theta|_{L^\alpha(0, T; L^{3\alpha})}) \\
 &\leq (|\mathbf{u}(0)|_\alpha^\alpha + |\theta(0)|_\alpha^\alpha + C(|g|_{L^{\frac{\alpha}{2}}(0, T; L^\alpha)}^{\frac{2}{\alpha}} + |\pi|_{L^2(0, T; L^\infty)} + |\mathbf{f}|_{L^\infty(0, T; L^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}})}^\alpha) \\
 &\quad \times \exp(C \int_0^t (|\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} + |\pi|_\infty + |g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}) dt),
 \end{aligned}$$

onde $C = C(\alpha)$ e $\mu = \min\{\nu, \chi\}$.

Observação 4.4 *Nós observamos que usualmente $\mathbf{f}$ é o campo gravitacional. Mas, em alguns modelos geofísicos é interessante considerarmos forças mais gerais*

Demonstração: Multiplicando (4.1) por $\alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2}$ e integrando sobre $\mathbb{R}^3$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \mathbf{u} \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx &= \nu \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \mathbf{u} \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta \mathbf{f} \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx. \end{aligned}$$

É fácil verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \mathbf{u} \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha} \, dx.$$

Nós observamos também que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx &= - \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_{ii}^2 u_j) u_j |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\ &= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i u_j \partial_i u_j |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\ &\quad + \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} u_j \partial_i u_j \partial_i |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\ &\quad + (\alpha - 2) \sum_{i,j,l} \int_{\mathbb{R}^3} u_j \partial_i u_j |\mathbf{u}|^{\alpha-4} u_l \partial_i u_l \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx + (\alpha - 2) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\mathbf{u}||^2 |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\mathbf{u}||^2 |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx = \frac{2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Analogamente, usando as desigualdades de Hölder, Calderón-Zygmund e Young:

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot \alpha |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx &= -\alpha \sum_i \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i \pi u_i |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\
&= \alpha \sum_i \int_{\mathbb{R}^3} \pi u_i \partial_i |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \, dx \\
&= \alpha(\alpha-2) \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} \pi u_i \partial_i u_j u_j |\mathbf{u}|^{\alpha-4} \, dx \\
&\leq 4(\alpha-2) \int_{\mathbb{R}^3} |\pi| |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha-2}{2}} \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right| \, dx \\
&\leq 4(\alpha-2) \left| \pi \right|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \left| \pi \right|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \mathbf{u} \right|_{\alpha}^{\frac{\alpha-2}{2}} \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2 \\
&\leq \varepsilon \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 + C_{\varepsilon} |\pi|_{\infty} |\pi|_{\frac{3}{2}} |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha-2} \\
&\leq \varepsilon \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \tag{4.8} \\
&\quad + C_{\varepsilon} |\pi|_{\infty} |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha-2} (|\pi_1|_{\frac{3}{2}} + |\pi_2|_{\frac{3}{2}}) \\
&\leq \varepsilon \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \\
&\quad + C_{\varepsilon} |\pi|_{\infty} |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha-2} (|\mathbf{u}|_{\alpha}^2 + |\theta|_{\alpha} |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}) \\
&\leq \varepsilon \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \\
&\quad + C_{\varepsilon} |\pi|_{\infty} (2|\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha} + |\theta|_{\alpha}^{\alpha} + |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}^{\alpha}) \\
&\leq \varepsilon \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 + C_{\varepsilon} |\pi|_{\infty} (|\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha} + |\theta|_{\alpha}^{\alpha} + |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}^{\alpha})
\end{aligned}$$

novamente, usando as desigualdades de Hölder e Young,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^3} \theta \mathbf{f} \cdot |\mathbf{u}|^{\alpha-2} \mathbf{u} \, dx \right| &\leq |\theta|_{\alpha} |\mathbf{f}|_{\infty} |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha-1} \\
&\leq C(|\mathbf{f}|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}})(|\theta|_{\alpha}^{\alpha} + |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha}).
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha} + 2\nu \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \\
&\leq \varepsilon \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 + C_{\varepsilon}(\alpha) (|\mathbf{f}|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} + |\pi|_{\infty}) (|\theta|_{\alpha}^{\alpha} + |\mathbf{u}|_{\alpha}^{\alpha}) \\
&\quad + C_{\varepsilon}(\alpha) |\pi|_{\infty} |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}^{\alpha},
\end{aligned}$$

fazendo $\varepsilon = \nu$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|_\alpha^\alpha + \nu \left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 &\leq C(|\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} + |\pi|_\infty)(|\theta|_\alpha^\alpha + |\mathbf{u}|_\alpha^\alpha) \\ &\quad + C|\pi|_\infty |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}^\alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por outro lado, multiplicando (4.3) por $\alpha\theta|\theta|^{\alpha-2}$ e integrando sobre $\mathbb{R}^3$ nós obtemos

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \theta \theta |\theta|^{\alpha-2} dx - \chi \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \theta \theta |\theta|^{\alpha-2} dx &= -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \theta |\theta|^{\alpha-2} dx \\ &\quad + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} g \theta |\theta|^{\alpha-2} dx. \end{aligned}$$

Analogamente, nós obtemos para a equação da temperatura:

$$\frac{d}{dt} |\theta|_\alpha^\alpha + \chi \left| \nabla |\theta|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \leq C(|g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2}} + |g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} |\theta|_\alpha^\alpha). \quad (4.10)$$

Somando as desigualdades (4.9) e (4.10) e fazendo $\mu = \min\{\nu, \chi\}$ nós obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (|\mathbf{u}|_\alpha^\alpha + |\theta|_\alpha^\alpha) + \mu \left(\left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 + \left| \nabla |\theta|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \right) \\ &\leq C(|\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} + |\pi|_\infty + |g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}})(|\theta|_\alpha^\alpha + |\mathbf{u}|_\alpha^\alpha) \\ &\quad C(|g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2}} + C|\pi|_\infty |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}^\alpha) \end{aligned}$$

integrando, a última desigualdade, de 0 até t :

$$\begin{aligned} (|\mathbf{u}(t)|_\alpha^\alpha + |\theta(t)|_\alpha^\alpha) - (|\mathbf{u}(0)|_\alpha^\alpha + |\theta(0)|_\alpha^\alpha) &+ \mu \int_0^t \left(\left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 + \left| \nabla |\theta|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \right) dt \\ &\leq C \int_0^t (|\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} + |\pi|_\infty + |g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}})(|\theta|_\alpha^\alpha + |\mathbf{u}|_\alpha^\alpha) dt \\ &\quad + C \int_0^t (|g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2}} + |\pi|_\infty |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}^\alpha) dt. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema de Gronwall, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} (|\mathbf{u}|_\alpha^\alpha + |\theta|_\alpha^\alpha) &= (|\mathbf{u}(0)|_\alpha^\alpha + |\theta(0)|_\alpha^\alpha) + \mu \int_0^T \left(\left| \nabla |\mathbf{u}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 + \left| \nabla |\theta|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^2 \right) dt \\ &\leq +C(|g|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(0,T;L^\alpha)}^\alpha + |\pi|_{L^2(0,T;L^\infty)} + |\mathbf{f}|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}})^\alpha) \\ &\quad \times \exp C \int_0^t (|\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} + |\pi|_\infty + |g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}) dt, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Sobolev:

$$|\mathbf{v}|_{3\alpha} = \left| |\mathbf{v}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_6^{\frac{2}{\alpha}} \leq C \left| \nabla |\mathbf{v}|^{\frac{\alpha}{2}} \right|_2^{\frac{2}{\alpha}}$$

nós obtemos o resultado desejado. ■

Observação 4.5 *Para obtermos a desigualdade em (4.8), nós procedemos da seguinte forma: primeiro aplicamos o operador divergente na equação (4.1), para obtermos a seguinte equação em π :*

$$\Delta \pi = \operatorname{div} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \operatorname{div} (\theta \mathbf{f}),$$

escrevendo $\pi = \pi_1 + \pi_2$, podemos resolver esta equação fazendo a seguinte decomposição:

$$\Delta \pi_1 = \operatorname{div} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \quad e \quad \Delta \pi_2 = \operatorname{div} (\theta \mathbf{f})$$

para obtermos as duas estimativas

$$|\pi_1|_{\frac{\alpha}{2}} \leq C |\mathbf{u}|_{\alpha}^2 \quad (4.11)$$

e

$$|\pi_2|_{\frac{\alpha}{2}} \leq C |\theta|_{\alpha} |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}} \quad (4.12)$$

primeiro, observamos que

$$\pi_1 = \sum_{i,j=1}^3 R_i R_j (u_i u_j) \quad (4.13)$$

onde $(R_i)_{i=1}^3$ são as transformadas de Riez em $\mathbb{R}^3$ definidas para $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p < \infty$ por

$$R_i(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(2)}{\pi^2} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_i}{|y|^4} f(x - y) dy$$

$i = 1, 2, 3$. Usando a desigualdade de Hölder e o fato que os operadores de Riez R_i são

limitados, obtemos:

$$\begin{aligned} |\pi_1|_\gamma^\gamma &= \left| \sum_{i,j=1}^3 R_i R_j (u_i u_j) \right|_\gamma^\gamma \leq C \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |u_i u_j|^\gamma dx \\ &\leq C \sum_{i,j=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_j|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C |\mathbf{u}|_{2\gamma}^{2\gamma}. \end{aligned}$$

As idéias básicas que levam a igualdade (4.13) são as seguintes: pelo fato que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, obtemos

$$\Delta \pi_1 = \sum_{j,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

e usando a transformada de Fourier segue

$$-|x|^2 \hat{\pi}_1 = C \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} * \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}$$

por outro lado, se

$$\pi_1 = \sum_{j,k=1}^3 R_i R_j (u_i u_j)$$

segue que

$$\hat{\pi}_1 = -C \sum_{j,k=1}^3 |x|^{-2} x_j x_k \hat{u}_j * \hat{u}_k$$

e o resultado é obtido usando a igualdade

$$\sum_{j,k=1}^3 x_j x_k \hat{u}_j * \hat{u}_k = C \sum_{j,k=1}^3 (x_k \hat{u}_j) * (x_j \hat{u}_k)$$

e para mostrarmos esta última igualdade, usamos novamente o fato que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ e as propriedades de transformada de Fourier. A constante C , é a constante que aparece dependendo da escolha da definição da transformada de Fourier. Para maiores detalhes veja Stein [59].

Para a segunda estimativa, na análise da equação $\Delta \pi_2 = \operatorname{div}(\theta \mathbf{f})$, notemos que podemos escrever

$$\pi_2(x) = C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div}(\theta \mathbf{f})(y)}{|x-y|} dy$$

onde C é uma constante. Usando integração por partes sobre o espaço $\mathbb{R}^3$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div}(\theta \mathbf{f})(y)}{|x-y|} dy &= -2 \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x_i - y_i)(\theta \mathbf{f})(y)}{|x-y|^3} dy \\ &\leq 6 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\theta \mathbf{f})(y)|}{|x-y|^2} dy \end{aligned}$$

agora, utilizando o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev (veja [37])

$$|\pi_2|_{\frac{6}{5}} \leq C \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\theta \mathbf{f})(y)|}{|x-y|^2} dy \right|_{\frac{6}{5}} \leq C |\theta \mathbf{f}|_p$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{3}$, $1 \leq p < \frac{6}{\alpha} < \infty$. Agora, pela desigualdade de Hölder segue que

$$|\pi_2|_{\frac{6}{5}} \leq C |\theta \mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{6+\alpha}} \leq C |\theta|_{\alpha} |\mathbf{f}|_{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}.$$

Agora, aplicando o operador projeção P_{α} sobre a equação (4.1), nós podemos reescrever o problema (4.1)-(4.7) em $L^{\alpha}(\mathbb{R}^3) \times L^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$, como o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + A_{\alpha} \mathbf{u} &= F(\mathbf{u}, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} + B_{\alpha} \theta &= G(\mathbf{u}, \theta) \end{aligned} \quad (4.14)$$

com condições iniciais $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ e $\theta(0) = \theta_0$, onde

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}, \theta) &= -P_{\alpha}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + P_{\alpha} \theta \mathbf{f} \\ G(\mathbf{u}, \theta) &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \end{aligned}$$

estamos tomando $g = 0$ só para uma questão de simplificação dos cálculos.

As equações integrais associadas ao problema acima são:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= e^{-tA_{\alpha}} \mathbf{u}_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A_{\alpha}} F(\mathbf{u}, \theta)(s) ds \\ \theta(t) &= e^{-tB_{\alpha}} \theta_0 + \int_0^t e^{-(t-s)B_{\alpha}} G(\mathbf{u}, \theta)(s) ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

$0 \leq t \leq T$.

Com as observações acima, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 4.6 *Se $(\mathbf{u}_0, \theta_0) \in L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap L^r_\sigma(\mathbb{R}^3) \times L^\alpha(\mathbb{R}^3) \cap L^r(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^3))$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com r fixo, $\alpha > r \geq 3$, satisfazendo $\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3}$. Então, existe T_0 , $0 < T_0 \leq T$ e uma solução $(\mathbf{u}, \theta)$ de (4.14) sobre $[0, T_0)$ tal que*

- $t^\sigma \mathbf{u}(t) \in BC([0, T_0); L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3))$,
- $t^\sigma \theta(t) \in BC([0, T_0); L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, onde $\sigma = \frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha})$.
- A seguinte estimativa é verdadeira

$$T_0 \geq C(|\mathbf{u}_0|_r + |\theta_0|_r)^{-\frac{1}{\rho}}$$

para algum $\rho > 0$ e com C independente de $\mathbf{u}_0$ e θ_0

- Seja $(0, T_*)$ o intervalo maximal tal que $(\mathbf{u}, \theta)$ resolve (4.14). Então

$$|\mathbf{u}(s)|_\alpha + |\theta(s)|_\alpha \geq \frac{C}{(T_* - s)^\rho}$$

com a constante C independente de T_* e s .

Demonstração: A prova do lema é uma consequência dos resultados de Giga [21] e Hishida [28] (Teorema 4, pag. 202). Porém, a seguir daremos os principais passos para a sua compreensão. Para isto, recordamos os seguintes resultados:

Lema 4.7 *Seja $f \in L^s(\mathbb{R}^3)$, então a seguinte estimativa é verdadeira*

$$|e^{-tQ} f|_\alpha \leq \frac{M_1 |f|_s}{t^\sigma},$$

para $0 < t < T$ com $\sigma = \frac{3}{2}(\frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha})$, $\alpha \geq s > 1$ e $M_1 = M_1(\alpha, s, T)$, onde $Q = A_\alpha$ ou B_α .

Lema 4.8 *Seja Γ_k , $k = 1, 2$ um operador linear fechado densamente definido em $L^\alpha(\mathbb{R}^3)$ para Z^q com $q > 1$ tal que para algum γ , $0 \leq \gamma < 2$ a estimativa*

$$|e^{-tQ_k} \Gamma_k f|_\alpha \leq \frac{M_2 |f|_\alpha}{t^{\frac{\gamma}{2}}},$$

vale para $f \in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$, $0 < t < T$ com $M_2 = M_2(T)$, $1 < \alpha < \infty$, e $Z^q = L^q_\sigma(\mathbb{R}^3)$ (ou $L^q(\mathbb{R}^3)$), onde $Q_1 = A_\alpha$ e $Q_2 = B_\alpha$ e $\Gamma_1 g^{ij} = \sum_{i,j=1}^n P_\alpha \nabla_j g^{ij}$ e $g(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^9$ definido por $g(\mathbf{u})^{ij} = -u^i u^j$ e $\Gamma_2 \tilde{g}^i = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \tilde{g}^i$ e $\tilde{g}(\mathbf{u}, \theta) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde $\tilde{g}(\mathbf{u}, \theta)^i = -u_i \theta$.

Fazendo $F(\mathbf{u}, \theta) = F_1(\mathbf{u}) + F_2(\theta)$ onde $F_1(\mathbf{u}) = -P_\alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ e $F_2(\theta) = P_\alpha \theta \mathbf{f}$ então é possível escrever F_1 na seguinte forma $F_1(\mathbf{u}) = \Gamma_1 G_1(\mathbf{u})$, onde G_1 é uma aplicação não linear de $L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3)$ sobre $(L^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3))^9$ tal que para algum $\alpha > 2$ a estimativa

$$|G_1(\mathbf{w}) - G_1(\mathbf{v})|_h \leq M_3 |\mathbf{w} - \mathbf{v}|_\alpha (|\mathbf{w}|_\alpha + |\mathbf{v}|_\alpha),$$

com $G_1 0 = 0$, vale com $1 \leq h = \frac{\alpha}{2}$ e $M_3 = M_3(\alpha)$.

Analogamente, nós consideramos $F_3(\mathbf{u}, \theta) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta$, então é possível escrever F_3 como $F_3(\mathbf{u}, \theta) = \Gamma_2 G_2(\mathbf{u}, \theta)$ onde G_2 é uma aplicação não linear de $H_\alpha(\mathbb{R}^3) \times L^\alpha(\mathbb{R}^3)$ para $(L^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3))^3$ tal que para algum $\alpha > 2$ a estimativa

$$|G_2(\mathbf{w}, \theta_1) - G_2(\mathbf{v}, \theta_2)|_h \leq M_4 (|\mathbf{w} - \mathbf{v}|_\alpha + |\theta_2 - \theta_1|_\alpha) (|\mathbf{w}|_\alpha + |\mathbf{v}|_\alpha + |\theta_1|_\alpha + |\theta_2|_\alpha),$$

com $G_2 0 = 0$, vale com $1 \leq h = \frac{\alpha}{2}$ e $M_4 = M_4(\alpha)$.

Para as provas dos lemas acima, veja [21].

Nós consideramos:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}, \theta) &= \int_0^t e^{-(t-s)A_\alpha} F(\mathbf{u}, \theta)(s) \, ds \\ \Psi(\mathbf{u}, \theta) &= \int_0^t e^{-(t-s)B_\alpha} G(\mathbf{u}, \theta)(s) \, ds \end{aligned}$$

e as seguintes seqüências:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^0 + \Phi(\mathbf{u}^n, \theta^n)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^0 + \Psi(\mathbf{u}^n, \theta^n)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ onde $\mathbf{u}^0(t) = e^{-tA_\alpha} \mathbf{u}_0$ e $\theta^0(t) = e^{-tB_\alpha} \theta_0$. Para $j = 1, 2, \dots$ e $\sigma = \frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha})$ com $\alpha > r \geq 3$ e $\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3}$ e nós definimos a seqüência de funções monótona não decrescente

$$k_j^\sigma(t) = k_j(t) = \sup_{0 < s \leq t} s^\sigma (|\theta^j|_\alpha + |\mathbf{u}^j|_\alpha),$$

usando os Lemas 4.7 e 4.8 é possível de mostrar que existe $\rho > 0$ tal que

$$k_{j+1}(t) \leq 2k_0 + Ck_j^2 t^\rho + Ck_j t^\rho$$

e que para T_0 suficientemente pequeno, existe uma constante $C(T_0)$ independente de n e t tal que $k_j \leq Ck_0$ para $0 < t \leq T_0$. É suficiente considerar $4CK_0(T_0)T_0^\rho + CT_0^\rho < \frac{1}{4}$.

Para as seqüências $\{\mathbf{u}^j, \theta^j\}$, podemos demonstrar as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} t^\sigma |\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0|_p &\leq t^\sigma \int_0^t |e^{-(t-s)A} F(\mathbf{u}^0, \theta^0)|_p \, ds \\ &\leq Ct^\sigma \{k_0^2 B_1 t^{-\varphi-2\sigma+\frac{1}{2}} + |\mathbf{f}|_{L^\infty(0,T;L^{p'})} k_0 B_2 t^{-\varphi-\sigma+1}\} \\ &\leq Ck_0(k_0 + 1) \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} t^\sigma |\theta^1 - \theta^0|_p &\leq t^\sigma \int_0^t |e^{-(t-s)B} G(\mathbf{u}^0, \theta^0)|_p \, ds \\ &\leq CB_1 k_0^2 t^{-\varphi-\sigma+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

obtendo assim:

$$\max\{t^\sigma |\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0|_p, t^\sigma |\theta^1 - \theta^0|_p\} \leq Ck_0(k_0 + 1)$$

e de um modo geral temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^{n+2} - \mathbf{u}^{n+1}|_p &\leq \int_0^t |e^{-(t-s)A} \{F(\mathbf{u}^{n+1}, \theta^{n+1}) - F(\mathbf{u}^n, \theta^n)\}|_p \, ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\varphi-\frac{1}{2}} |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|_p (|\mathbf{u}^{n+1}|_p + |\mathbf{u}^n|_p) \, ds \\ &\quad + |\mathbf{f}|_{L^\infty(0,T;L^{p'})} C \int_0^t (t-s)^{-\varphi} |\theta^{n+1} - \theta^n|_p \, ds \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} |\theta^{n+2} - \theta^{n+1}|_p &\leq \int_0^t |e^{-(t-s)B} \{G(\mathbf{u}^{n+1}, \theta^{n+1}) - G(\mathbf{u}^n, \theta^n)\}|_p ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\varphi-\frac{1}{2}} \{|\theta^{n+1} - \theta^n|_p + |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|_p\} \\ &\quad (|\theta^{n+1}|_p + |\theta^n|_p + |\mathbf{u}^{n+1}|_p + |\mathbf{u}^n|_p) ds \end{aligned}$$

portanto

$$t^\sigma \{|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|_p + |\theta^{n+1} - \theta^n|_p\} \leq C k_0 (k_0 + 1) (k_0 + t^\rho)^n$$

para todo $n \geq 0$ e $0 < t \leq T_0$. Conseqüentemente, $\{t^\sigma \mathbf{u}^n\}$ e $\{t^\sigma \theta^n\}$ são seqüências de Cauchy em $BC([0, T_*]; L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3))$ e $BC([0, T_*]; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$ respectivamente, para algum $T_* \leq T_0$. Assim

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} t^\sigma \mathbf{u}^n &= t^\sigma \mathbf{u} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t^\sigma \theta^n &= t^\sigma \theta \end{aligned}$$

em $C([0, T_*]; L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^3))$ e $C([0, T_*]; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$ respectivamente e ainda, satisfazendo

$$\{|\theta|_p + |\mathbf{u}|_p\} \leq C t^{-\sigma} \{|\theta^0|_p + |\mathbf{u}^0|_p\}$$

para todo $0 < t \leq T_*$. O Teorema da convergência dominada assegura que $\{\mathbf{u}, \theta\}$ soluciona (4.14) para $0 < t \leq T_*$.

A unicidade da solução, sobre algum intervalo $[0, \bar{t}]$, $0 < \bar{t} \leq T_*$, é provada, considerando

$$\psi(t) = \max \left\{ \sup_{0 < s \leq t} s^\sigma |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_\alpha, \sup_{0 < s \leq t} s^\sigma |\theta_1 - \theta_2|_\alpha \right\}$$

e

$$b(t) = \max \left\{ \sup_{0 < s \leq t} s^\sigma |\mathbf{u}_1|_\alpha, \sup_{0 < s \leq t} s^\sigma |\theta_1|_\alpha, \sup_{0 < s \leq t} s^\sigma |\mathbf{u}_2|_\alpha, \sup_{0 < s \leq t} s^\sigma |\theta_2|_\alpha \right\},$$

usando os fatos que

$$\begin{aligned} t^\sigma |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_p &\leq Ct^\sigma \left\{ \int_0^t (t-s)^{-\varphi-\frac{1}{2}} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_p (|\mathbf{u}_1|_p + |\mathbf{u}_2|_p) ds \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{f}|_{L^\infty(0,T;L^{p'})} \int_0^t (t-s)^{-\varphi} |\theta_1 - \theta_2|_p ds \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} t^\sigma |\theta_1 - \theta_2|_p &\leq Ct^\sigma \int_0^t (t-s)^{-\varphi-\frac{1}{2}} \{ |\theta_1 - \theta_2|_p + |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_p \} \\ &\quad (|\theta_1|_p + |\theta_2|_p + |\mathbf{u}_1|_p + |\mathbf{u}_2|_p) ds \end{aligned}$$

segue que

$$t^\sigma |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_p \leq Ct^{1-\varphi-\frac{1}{2}-\sigma} \psi(t) b(t) B_1 + C |\mathbf{f}|_{L^\infty(0,T;L^{p'})} t^{1-\varphi} B_2 \psi(t)$$

e

$$t^\sigma |\theta_1 - \theta_2|_p \leq CB_1 t^{1-\varphi-\frac{1}{2}-\sigma} \psi(t) b(t)$$

e assim, obtemos

$$\psi(t) \leq Ct^\rho (b(t) + 1) \psi(t)$$

para algum $\rho > 0$. Como $t^\rho (b(t) + 1)$ vai para zero quando $t \rightarrow 0^+$, é possível encontrarmos t_0 suficientemente pequeno tal que $\psi(t) < \psi(t)$ para $0 < t \leq t_0$. O que é uma contradição se não tivermos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ e $\theta_1 = \theta_2$ em $(0, t_0]$. Agora, fazendo $\mathbf{u}(t_0)$ e $\theta(t_0)$ como condições iniciais e por argumento de extensão podemos mostrar a unicidade sobre $[0, T_*)$.

O próximo teorema é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.9 *Sejam $\mathbf{u}_0 \in L^\alpha(\mathbb{R}^3) \cap L^r(\mathbb{R}^3)$, $\text{div } \mathbf{u}_0 = 0$, $\theta_0 \in L^\alpha(\mathbb{R}^3) \cap L^r(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{f} \in L^{\frac{\alpha}{2}}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T; L^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^{2\alpha}(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$ e $g \in L^\alpha(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$ para $\alpha > r \geq 3$ e $\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3}$. Suponha que $(\mathbf{u}, \theta)$ é uma solução fraca de (4.1)-(4.7) em $[0, T)$. Se π , a associada pressão satisfaz*

$$\pi \in L^2(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))$$

então $(\mathbf{u}, \theta)$ é uma solução regular sobre $[0, T)$.

Demonstração: Nós assumimos que $T_* < T$. Nós observamos que do Lema 4.3

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} (|\mathbf{u}|_\alpha^\alpha + |\theta|_\alpha^\alpha) &= (|\mathbf{u}(0)|_\alpha^\alpha + |\theta(0)|_\alpha^\alpha) + \mu(|\mathbf{u}|_{L^\alpha(0,T;L^{3\alpha})} + |\theta|_{L^\alpha(0,T;L^{3\alpha})}) \\ &\leq +C(|g|_{L^{\frac{2}{\alpha}}(0,T;L^\alpha)} + |\pi|_{L^2(0,T;L^\infty)} + |\mathbf{f}|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}})^\alpha) \\ &\quad \times \exp(C \int_0^t (|\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2}} + |\mathbf{f}|_\infty^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} + |\pi|_\infty + |g|_\alpha^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}) dt). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por outro lado, do Lema 4.6 nós temos

$$|\mathbf{u}(s)|_\alpha + |\theta(s)|_\alpha \geq \frac{C}{(T_* - s)^{\frac{\alpha-3}{2\alpha}}}$$

conseqüentemente

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (|\mathbf{u}|_\alpha^\alpha + |\theta|_\alpha^\alpha) \geq K \sup_{0 \leq t \leq T} (|\mathbf{u}|_\alpha + |\theta|_\alpha)^\alpha \geq K \frac{C^\alpha}{(T_* - s)^{\frac{\alpha-3}{2}}}$$

onde K é uma constante positiva, nós observamos que $\frac{\alpha-3}{2} > 0$, conseqüentemente

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (|\mathbf{u}|_\alpha^\alpha + |\theta|_\alpha^\alpha) = \infty$$

e isto é uma contradição com (4.16). Conseqüentemente $T_* = T$. ■

Observação 4.10 *Recordemos que sob argumentos clássicos (Lema de De Rham) podemos recuperar a pressão associada à solução fraca (dados iniciais $\mathbf{u}_0 \in H$ e $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V^*)$), mas a pressão não satisfaz a regularidade necessária exigida no resultado de Kaniel [32]. Porém em alguns problemas práticos (ver por exemplo Conca [17]) esta informação é conhecida.*

4.2 Alguns resultados sobre a conduta da solução forte

Nas últimas três décadas, foi construída uma extensiva literatura que envolve as soluções do problema de Cauchy para as equações de Navier-Stokes. O objetivo desta seção é dar alguns resultados sobre existência local, global e condutas assintóticas das soluções do problema de Cauchy para o sistema de Boussinesq (4.1)-(4.7). A seguir, damos a definição de solução forte do problema de Cauchy.

Definição 4.11 Dizemos que o par $(\mathbf{u}, \theta)$ é uma solução forte do sistema de Boussinesq (4.1)-(4.7) com condições iniciais $(\mathbf{a}, b)$, se $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H \cap L^6(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; V)$, $\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$ para $T > 0$ e satisfaz as identidades

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(-\mathbf{u} \cdot \frac{d\phi}{dt} + \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \sum_{k=1}^3 u_k \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) dx dt \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{a} \cdot \phi(0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \theta \mathbf{f} \cdot \phi dx dt, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in W_2^{1,1}(Q_T)$ com $\phi(T) = 0$ e ainda

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(-\theta \frac{d\psi}{dt} + \chi \nabla \theta \cdot \nabla \psi - \theta \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \right) dx dt \\ = \int_{\mathbb{R}^3} b\psi(0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} g\psi dx dt \end{aligned}$$

para todo $\psi \in W_2^{1,1}(Q_T)$ com $\psi(T) = 0$ onde $Q_T = [0, T] \times \mathbb{R}^3$ e $W_2^{1,1}(Q_T) = \{\psi; \psi \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)), \frac{d\psi}{dt} \in L^2(Q_T)\}$.

A seguir, enunciamos os principais teoremas desta seção.

Teorema 4.12 Sejam $\mathbf{f} \in L^4(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^3))$, $g \in L^{\frac{4}{3}}(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3))$, $\mathbf{a} \in H \cap L^6(\mathbb{R}^3)$, $b \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap$

$L^6(\mathbb{R}^3)$. Então existe $T_0 > 0$ e uma única solução forte $(\mathbf{u}, \theta)$ do problema de Cauchy para o sistema de Boussinesq (4.1)-(4.7) tal que

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_0; H \cap L^6(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T_0; V),$$

$$\theta \in L^\infty(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T_0; H^1(\mathbb{R}^3)),$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T_0; V^*), \quad \frac{d\theta}{dt} \in L^2(0, T_0; H^{-1})$$

e ainda

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{a} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

$$\theta(t) \rightarrow b \text{ em } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Teorema 4.13 *Sejam $\mathbf{f} \in L^4(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^3))$, $g \in L^{\frac{4}{3}}(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3))$, $\mathbf{a} \in H \cap L^6(\mathbb{R}^3)$, $b \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$. Existem constantes positivas*

$$\lambda_1 = \lambda_1(\mathbf{a}, b, \mathbf{f}, g),$$

$$\lambda_2 = \lambda_2(\mathbf{a}, b, \mathbf{f}, g),$$

tais que, se

$$e^{C(|\mathbf{f}|_{L^2(0, \infty; L^3)} + |g|_{L^1(0, \infty; L^2)})} (|\mathbf{a}|_2^2 + |b|_2^2 + |g|_{L^1(0, \infty; L^2)}) \leq \lambda_1$$

ou

$$|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^4(0, \infty; L^3)} + A^2 |\mathbf{f}|_{L^2(0, \infty; L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0, \infty; L^6)} \leq \lambda_2,$$

onde A é uma constante que denotaremos, em toda esta seção, por

$$A = C(|\mathbf{a}|_2^2 + |b|_2^2 + |g|_{L^2(0, \infty; L^{\frac{6}{5}})}) \exp(C |\mathbf{f}|_{L^2(0, \infty; L^3)})$$

e notemos que ela é independente de k . Então a solução $(\mathbf{u}, \theta)$ do Teorema 4.12 é global, e portanto $T_0 = \infty$. Além disso, $\mathbf{u} \in L^4(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3))$, $\theta \in L^4(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3))$ e se

$$|\mathbf{f}(t)|_3^2 + |\mathbf{f}(t)|_{L^\infty} + |g(t)|_6 < C(1+t)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

então

$$|\mathbf{u}(t)|_6^6 + |\theta(t)|_6^6 \leq C(1+t)^{-\beta} \text{ para } t \geq 1,$$

com $\beta = \min\{3, \frac{3\alpha}{4}\}$ e $C = C(\nu, \chi)$.

A seguir, vamos considerar dois resultados que serão importantes para as demonstrações dos principais teoremas.

Lema 4.14 (*desigualdade de Sobolev*) Para cada $1 \leq p < n$, vale a desigualdade

$$|\mathbf{u}|_{r, \mathbb{R}^3} \leq C |\mathbf{u}|_{1, p, \mathbb{R}^3}$$

onde $r = \frac{np}{n-p}$.

Demonstração: veja [1]. ■

Lema 4.15 (*desigualdade de Ladyzhenskaya*) Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um domínio limitado ou não. Então para $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$ (ou V), nós temos

$$|\mathbf{u}|_6 \leq C_L |\nabla \mathbf{u}|_2$$

onde $C_L = (48)^{\frac{1}{6}}$.

Demonstração: veja [36]. ■

Proposição 4.16 (*desigualdade de Ladyzhenskaya*) Para qualquer função suave f de suporte compacto em $\mathbb{R}^3$, vale a seguinte desigualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^4 dx \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 f dx \right)^{\frac{3}{2}}$$

Demonstração: veja [36]. ■

Soluções aproximadas e algumas estimativas importantes:

Vamos considerar as seqüências de funções $\mathbf{a}^k \in V$ e $b^k \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tais que

$$\mathbf{a}^k \rightarrow \mathbf{a} \text{ em } V \text{ fortemente,}$$

$$b^k \rightarrow b \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3) \text{ fortemente,}$$

e ainda

$$|\mathbf{a}^k|_2 \leq C |\mathbf{a}|_2, \quad |\mathbf{a}^k|_6 \leq C |\mathbf{a}|_6, \quad |\mathbf{a}^k|_V \leq C |\mathbf{a}|_V,$$

$$|b^k|_2 \leq C |b|_2, \quad |b^k|_6 \leq C |b|_6, \quad |b^k|_{H^1} \leq C |b|_{H^1}.$$

.....Consideremos agora, os seguintes problemas de Cauchy para o sistema de Boussinesq linearizado

$$\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}^0 + \nabla \pi^0 = \theta^0 \mathbf{f} \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^0 = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{u}^0 \rightarrow \mathbf{0} \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \theta^0}{\partial t} - \chi \Delta \theta^0 = g \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.20)$$

$$\theta^0 \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{u}^0(0, x) = \mathbf{a}^0(x) \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad (4.22)$$

$$\theta^0(0, x) = b^0(x) \text{ em } \mathbb{R}^3 \quad (4.23)$$

e para $k > 0$,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}^k + (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^k + \nabla \pi^k = \theta^k \mathbf{f} \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^k = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{u}^k \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \theta^k}{\partial t} - \chi \Delta \theta^k + \mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla \theta^k = g \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.27)$$

$$\theta^k \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{u}^k(0, x) = \mathbf{a}^k(x) \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad (4.29)$$

$$\theta^k(0, x) = b^k(x) \text{ em } \mathbb{R}^3. \quad (4.30)$$

Observação 4.17 Às vezes, o modelo físico exige a condição:

$$\mathbf{u}^k \rightarrow \boldsymbol{\eta}^k \text{ quando } |x| \rightarrow \infty,$$

onde $\boldsymbol{\eta}^k$ é um vetor constante, ou ainda

$$\theta^k \rightarrow \eta^k \text{ quando } |x| \rightarrow \infty,$$

onde η^k é uma constante real. Além de determinar o modelo físico, esta exigência no infinito é determinante para os espaços em que moram as soluções do modelo. A forma de tratarmos o problema não homogêneo é igual ao modelo homogêneo, pois notamos que as equações do modelo são invariante sobre a transformação $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}$ (veja Heywood [26] e também Galdi [20]).

Observação 4.18 É fácil de mostrarmos que o sistema linear (4.17)-(4.23) tem uma única solução regular global. A seguir, trabalharemos para mostrarmos que o sistema linear (4.24)-(4.30) também tem uma solução regular global. Para mostrarmos esse resultado usaremos o princípio de indução finita.

Para um fixado $k \geq 1$, vamos considerar, por hipótese de indução, que

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{k-1}}{\partial x_i}, \frac{d\mathbf{u}^{k-1}}{dt}, \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{k-1}}{\partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial \pi^{k-1}}{\partial x_i} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$$

e $\mathbf{u}^{k-1} \in L^\infty(0, T; H)$. O caso $k = 1$ se refere a observação acima. Para simplificarmos a notação, fazemos $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{k-1}$ e vamos considerar a equação da temperatura

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + \mathbf{w} \cdot \nabla \theta = g \quad \text{em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.31)$$

e o seguinte lema:

Lema 4.19 *Sejam $g \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$, $b \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Então a equação linearizada (4.31) com condição inicial*

$$\theta(0, x) = b(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

tem uma única solução θ e

$$\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_i} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Demonstração: Para provar este lema nós utilizamos transformada de Fourier.

Podemos supor que b é identicamente nula, pois podemos fazer a mudança de variável $\theta \rightarrow \theta + w$ onde w é a solução da equação do calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \chi \Delta w &= 0 \quad \text{em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ w(0, x) &= b(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ w &\rightarrow 0 \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

veja [36].

Definindo $T = \theta \exp(-t)$ e substituindo em (4.31) nós obtemos o seguinte sistema:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + T - \Delta T + \mathbf{w} \cdot \nabla T = G \quad \text{em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.32)$$

onde $G = (g + \mathbf{w} \cdot \nabla w) \exp(-t)$. Nós agora escrevemos

$$T(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{T}(\alpha_0, \alpha) e^{i\alpha_0 t + i\alpha x} d\alpha_0 d\alpha, \quad (4.33)$$

$$G(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{G}(\alpha_0, \alpha) e^{i\alpha_0 t + i\alpha x} d\alpha_0 d\alpha, \quad (4.34)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$, $\alpha x = \sum \alpha_i x_i$, $\alpha^2 = \sum \alpha_i^2$ as integrais são avaliadas entre $-\infty < \alpha_i < \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$. Substituindo (4.33)-(4.34) em (4.32) nós obtemos, para um fixado par (t, x) , a relação algébrica

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{G}}{i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x)},$$

portanto

$$T(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\tilde{G}(\alpha_0, \alpha)}{i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x)} e^{i\alpha_0 t + i\alpha x} d\alpha_0 d\alpha. \quad (4.35)$$

Vamos definir a função Θ por

$$\Theta(\alpha_0, \alpha) = \frac{1}{i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x)}$$

e consideremos as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha_0} &= \frac{-i}{(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x))^2}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha_i} &= -\frac{2\alpha_i + iw_i(t, x)}{(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x))^2} \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$ e as derivadas de ordem superior

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha_i \partial \alpha_0} &= \frac{-2w_i(t, x) + 4i\alpha_i}{(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x))^3}, \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} &= \frac{2(2\alpha_i + iw_i(t, x))(2\alpha_j + iw_j(t, x))}{(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x))^3}, \\ \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j \partial \alpha_0} &= -\frac{6i(2\alpha_i + iw_i(t, x))(2\alpha_j + iw_j(t, x))}{(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x))^4}, \\ \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j \partial \alpha_k} &= -\frac{3(2\alpha_i + iw_i(t, x))(2\alpha_j + iw_j(t, x))(2\alpha_k + iw_k(t, x))}{(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x))^4}, \\ \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_2 \partial \alpha_1 \partial \alpha_0} &= \frac{24i(2\alpha_1 + iw_1(t, x))(2\alpha_2 + iw_2(t, x))(2\alpha_3 + iw_3(t, x))}{(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i\alpha \mathbf{w}(t, x))^5}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$.

Agora, a demonstração do lema segue do Lema de Marcinkiewicz de uma versão para transformada de Fourier (veja [43]). Basicamente, o lema diz que: Seja ϕ definida sobre todo espaço $\mathbb{R}^n$ e pertencente a $L^r(\mathbb{R}^n)$ e seja $\tilde{\phi}$ sua transformada de Fourier e definimos o operador

$$A_{\Theta}\phi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Theta(\alpha) \tilde{\phi}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

para alguma função Θ . O lema relata que se as derivadas parciais mistas de Θ existem até ordem n e se

$$|\Theta(\alpha)|, \left| \alpha_k \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha_k} \right|, \dots, \left| \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \frac{\partial^n \Theta}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_n} \right| \leq M,$$

então o operador A_{Θ} é limitado com domínio e imagem em $L^r(\mathbb{R}^n)$. Observemos que este lema nos diz sobre a convergência da relação integral (4.35) e por diferenciação formal sobre a fórmula (4.35) nós concluimos que

$$\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_i} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

■

Observe que $\theta \in H^2(\mathbb{R}^3)$ e portanto $|\theta|_p$ está bem definida para todo $2 \leq p < \infty$. Com o mesmo procedimento que fizemos para equação da temperatura, fazemos para a equação da velocidade mais a pressão. Sejam $\mathbf{v} = \exp(-t)\mathbf{u}$, $\mathbf{F} = T\mathbf{f}$, $q = \pi \exp(-t)$, onde T é a função obtida resolvendo a equação da temperatura. Agora, substituindo $\mathbf{v}$ e q em

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \pi = \theta \mathbf{f} \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.36)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.37)$$

obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{F} \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.38)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3. \quad (4.39)$$

Nós agora escrevemos

$$\mathbf{v}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\mathbf{v}}(\alpha_0, \alpha) e^{i\alpha_0 t + i\alpha x} d\alpha_0 d\alpha,$$

$$q(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{q}(\alpha_0, \alpha) e^{i\alpha_0 t + i\alpha x} d\alpha_0 d\alpha$$

e ainda

$$\mathbf{F}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\mathbf{F}}(\alpha_0, \alpha) e^{i\alpha_0 t + i\alpha x} d\alpha_0 d\alpha,$$

substituindo essas relações integrais em (4.38)-(4.39), nós obtemos o sistema algébrico

$$(i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i \sum_{j=1}^3 w_j \alpha_k) \tilde{v}_k + i\alpha_k \tilde{q} = \tilde{F}_k,$$

$$\sum_{j=1}^3 i\alpha_j \tilde{v}_k = 0$$

e a solução do sistema é:

$$\tilde{q} = -i \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_j \tilde{F}_j}{\alpha^2}$$

e

$$\tilde{v}_k = \frac{\alpha^2 \tilde{F}_k - \alpha_k \sum_{j=1}^3 \alpha_j \tilde{F}_j}{\alpha^2 (i\alpha_0 + \alpha^2 + 1 + i \sum_{j=1}^3 w_j \alpha_k)}$$

e assim, com o auxílio do Lema de Marcinkiewicz podemos provar um resultado similar ao que foi provado para a temperatura.

Lema 4.20 *Sejam $\mathbf{f} \in L^2(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3))$ e $g \in L^2(0, \infty; L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3))$. Então*

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}^k(t)|_2^2 + |\theta^k(t)|_2^2 + \int_0^t (|\nabla \mathbf{u}^k(s)|_2^2 + |\nabla \theta^k(s)|_2^2) ds \\ & \leq C(|\mathbf{a}|_2^2 + |b|_2^2 + |g|_{L^2(0, \infty; L^{\frac{6}{5}})}) \exp(C \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \infty; L^3)}) \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$ e $k \geq 0$.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.24) por $\mathbf{u}^k$ obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_2^2 + \nu |\nabla \mathbf{u}^k|_2^2 = (\theta^k \mathbf{f}, \mathbf{u}^k).$$

Pelas desigualdades de Hölder, Ladyzhenskaya e de Young nós obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_2^2 + \nu |\nabla \mathbf{u}^k|_2^2 \leq \frac{\nu}{2} |\nabla \mathbf{u}^k|_2^2 + C |\theta^k|_2^2 |\mathbf{f}|_3^2.$$

Da mesma forma, para a equação da temperatura, obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta^k|_2^2 + \chi |\nabla \theta^k|_2^2 \leq \frac{\chi}{2} |\nabla \theta^k|_2^2 + C |g|_{\frac{6}{5}}^2.$$

e portanto, fazendo $\mu = \min\{\nu, \chi\}$ segue que

$$\frac{d}{dt} (|\mathbf{u}^k|_2^2 + |\theta^k|_2^2) + \mu (|\nabla \mathbf{u}^k|_2^2 + |\nabla \theta^k|_2^2) \leq C (|\theta^k|_2^2 |\mathbf{f}|_3^2 + |g|_{\frac{6}{5}}^2)$$

agora, integrando de 0 até t obtemos

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}^k(t)|_2^2 + |\theta^k(t)|_2^2 + \mu \int_0^t (|\nabla \mathbf{u}^k(s)|_2^2 + |\nabla \theta^k(s)|_2^2) ds \\ & \leq |\mathbf{a}|_2^2 + |b|_2^2 + C |g|_{L^2(0, \infty; L^{\frac{6}{5}})} + C \int_0^t |\theta^k(s)|_2^2 |\mathbf{f}(s)|_3^2 ds \end{aligned}$$

o resultado segue pelo Lema de Gronwall. ■

Aplicando o operador divergente em (4.24) segue que

$$-\Delta \pi^k = \operatorname{div} ((\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - \theta^k \mathbf{f})$$

desde que π^k é única a menos de constante, nós assumimos, sem perdas de generalidades, que a pressão π^k é determinada pela condição suplementar

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi^k(t, x) = 0.$$

Consideremos a decomposição $\pi^k = \pi_1^k + \pi_2^k$ onde

$$\begin{aligned} -\Delta \pi_1^k &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i^{k-1} u_j^k), \\ -\Delta \pi_2^k &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta^k f_i). \end{aligned}$$

Usando a teoria de Calderon-Zygmund (veja [59]), o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev (veja [37]) e a desigualdade de Hölder é possível demonstrarmos o seguinte lema:

Lema 4.21 *Seja $\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $(\mathbf{u}^k, \theta^k)$, satisfazendo (4.24)-(4.30). Então valem as seguintes estimativas:*

$$|\pi_1^k|_3 \leq C |\mathbf{u}^{k-1}|_6 |\mathbf{u}^k|_6, \quad (4.40)$$

$$|\pi_2^k|_6 \leq C |\theta^k \mathbf{f}|_2 \quad (4.41)$$

para todo $k \geq 1$.

O próximo lema é uma importante ferramenta para os resultados que virão a seguir.

Lema 4.22 *Sejam $\mathbf{f} \in L^4(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^3))$, $g \in L^{\frac{4}{3}}(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0, \infty; L^6(\mathbb{R}^3))$, $\mathbf{a} \in H \cap L^6(\mathbb{R}^3)$, $b \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$. Então valem as seguintes desigualdades diferenciais*

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_6^6 + CA^{-2} |\mathbf{u}^k|_6^8 \leq C (|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^6 + |\theta^k \mathbf{f}|_2^2 |\mathbf{u}^k|_6^4 + |\theta^k \mathbf{f}|_6 |\mathbf{u}^k|_6^5) \quad (4.42)$$

e

$$\frac{d}{dt} |\theta^k|_6^6 + CA^{-2} |\theta^k|_6^8 \leq C |g|_6 |\theta^k|_6^5. \quad (4.43)$$

onde A , já definida anteriormente, é uma constante que independe de k .

Demonstração: Vamos considerar a i -ésima componente da equação (4.24), multiplicarmos por $|u_i^k|^4 u_i^k$ e integrarmos em $\mathbb{R}^3$. Usando o fato que $((\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) u_i^k, |u_i^k|^4 u_i^k) = 0$ (veja Lema 4.2) obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{du_i^k}{dt} |u_i^k|^4 u_i^k dx - \nu \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u_i^k |u_i^k|^4 u_i^k dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i} |u_i^k|^4 u_i^k dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta^k f_i |u_i^k|^4 u_i^k dx.$$

Consideremos as identidades:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{du_i^k}{dt} |u_i^k|^4 u_i^k dx &= \frac{1}{6} \frac{d}{dt} |u_i^k|_6^6 \\ -\nu \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u_i^k |u_i^k|^4 u_i^k dx &= 5\nu \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 dx, \end{aligned}$$

usando integração por partes, as desigualdades de Hölder, Young e a estimativa (4.31), nós obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i} |u_i^k|^4 u_i^k dx &= 5 \int_{\mathbb{R}^3} \pi^k |u_i^k|^4 \left| \frac{\partial u_i^k}{\partial x_i} \right| dx \\
 &\leq \frac{5}{2} \nu \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 dx + 5\nu^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\pi_1^k|^2 dx \\
 &\quad + 5\nu^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\pi_2^k|^2 dx \\
 &\leq \frac{5}{2} \nu \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 dx + 5\nu^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\pi_1^k|^2 dx \\
 &\quad + 5\nu^{-1} C |u_i^k|_6^4 |\theta^k \mathbf{f}|_2^2.
 \end{aligned}$$

Por Hölder nós obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \theta^k f_i |u_i^k|^4 u_i^k dx \leq |\theta^k \mathbf{f}|_6 |u_i^k|_6^5.$$

Usando as estimativas acima segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6} \frac{d}{dt} |u_i^k|_6^6 + \frac{5}{2} \nu \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 dx &\leq 5\nu^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\pi_1^k|^2 dx + 5\nu^{-1} C |u_i^k|_6^4 |\theta^k \mathbf{f}|_2^2 \\
 &\quad + |u_i^k|_6^5 |\theta^k \mathbf{f}|_6.
 \end{aligned}$$

Agora, usando as desigualdades de Hölder, Young, Ladyzhenskaya com $f = |u_i^k|^2 u_i^k$ e a estimativa (4.40) segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k| |\pi_1^k|^2 dx &\leq |u_i^k|_{12}^4 |\pi_1^k|_3^2 = |\pi_1^k|_3^2 |u_i^k|_4^2 |u_i^k|_4^{\frac{4}{3}} \\
 &\leq |\mathbf{u}^{k-1}|_6^2 |\mathbf{u}^k|_6^2 |\mathbf{u}^k|_6 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{5}{4} \nu \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 dx + C |\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^6
 \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{1}{6} \frac{d}{dt} |u_i^k|_6^6 + \frac{5}{4} \nu \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 dx \leq C |\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^6 + C |\mathbf{u}^k|_6^4 |\theta^k \mathbf{f}|_2^2 + |\mathbf{u}^k|_6^5 |\theta^k \mathbf{f}|_6.$$

Agora, usando a desigualdade de Sobolev

$$C |u_i^k|_{18}^6 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 \, dx$$

e a desigualdade de interpolação

$$|u_i^k|_6 \leq |u_i^k|_2^{\frac{1}{4}} |u_i^k|_{18}^{\frac{3}{4}}$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_i^k|^4 |\nabla u_i^k|^2 \, dx \geq CA^{-2} |u_i^k|_6^8.$$

Agora, somando em i , segue que

$$\frac{1}{6} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_6^6 + CA^{-2} \sum_{i=1}^3 |u_i^k|_6^8 \leq C(|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^6 + |\mathbf{u}^k|_6^4 |\theta^k \mathbf{f}|_2^2 + |\mathbf{u}^k|_6^5 |\theta^k \mathbf{f}|_6).$$

Usando a desigualdade de Hölder para os espaço das sequências $l^p(N)$, com $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$,

obtemos:

$$|\mathbf{u}^k|_6^6 = \sum_{i=1}^3 |u_i^k|_6^6 \leq 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{i=1}^3 |u_i^k|_6^8 \right)^{\frac{3}{4}}$$

e portanto

$$C |\mathbf{u}^k|_6^8 \leq \sum_{i=1}^3 |u_i^k|_6^8$$

assim, obtemos:

$$\frac{1}{6} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_6^6 + CA^{-2} |\mathbf{u}^k|_6^8 \leq C(|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^6 + |\theta^k \mathbf{f}|_2^2 |\mathbf{u}^k|_6^4 + |\theta^k \mathbf{f}|_6 |\mathbf{u}^k|_6^5).$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.27) por $|\theta^k|^4 \theta^k$, integrando em $\mathbb{R}^3$ e usando o fato que $\int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla \theta^k) |\theta^k|^4 \theta^k \, dx = 0$ segue que

$$\frac{1}{6} \frac{d}{dt} |\theta^k|_6^6 + 5\chi \int_{\mathbb{R}^3} |\theta^k|^4 |\nabla \theta^k|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} g |\theta^k|^4 \theta^k \leq |g|_6 |\theta^k|_6^5 \, dx.$$

■

Lema 4.23 *Suponhamos que valem as hipóteses do Lema 4.22. Então, existe $T_0 > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^k(t)|_6 + |\theta^k(t)|_6 &\leq C \quad \forall t \in [0, T_0] \\ \int_0^t (|\mathbf{u}^k|_6^4 + |\theta^k|_6^4) d\tau &\leq CM \quad \forall t \in [0, T_0] \end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$.

Demonstração: De (4.42) e (4.43) e pelo fatos que

$$\frac{d}{dt} |\theta^k|_6^6 = 3 |\theta^k|_6^4 \frac{d}{dt} |\theta^k|_6^2$$

e

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_6^6 = 3 |\mathbf{u}^k|_6^4 \frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_6^2$$

podemos obter por simples cálculo que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}^k|_6^2 + C_1 A^{-2} |\mathbf{u}^k|_6^4 \leq C (|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^2 + |\theta^k \mathbf{f}|_2^2 + |\theta^k \mathbf{f}|_6 |\mathbf{u}^k|_6)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta^k|_6^2 + C_1 A^{-2} |\theta^k|_6^4 \leq C |g|_6 |\theta^k|_6$$

portanto

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (|\mathbf{u}^k|_6^2 + |\theta^k|_6^2) + C A_1^{-2} (|\mathbf{u}^k|_6^4 + |\theta^k|_6^4) \\ &\leq C (|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^2 + |\theta^k \mathbf{f}|_2^2 + |\theta^k \mathbf{f}|_6 |\mathbf{u}^k|_6 + |g|_6 |\theta^k|_6) \\ &\leq C (|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^2 + |\mathbf{f}|_3^2 |\theta^k|_6^2 + |\mathbf{f}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |\theta^k|_6^2 + |\mathbf{f}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |\mathbf{u}^k|_6^2 + |g|_6 |\theta^k|_6) \\ &\leq \frac{C_1}{2} A^{-2} (|\theta^k|_6^4 + |\mathbf{u}^k|_6^4) + C (|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_3^4 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 + A^{\frac{2}{3}} |g|_6^{\frac{4}{3}}) \end{aligned}$$

agora, integrando de 0 até s e usando o Lema de Gronwall segue que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}^k(s)|_6^2 + |\theta^k(s)|_6^2 &+ \frac{C_1}{2} A^{-2} \int_0^s (|\mathbf{u}^k(\tau)|_6^4 + |\theta^k(\tau)|_6^4) d\tau \\
&\leq C(|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^4(0,T;L^3)} \\
&\quad + A^2 |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^6)}) e^{C \int_0^s |\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 d\tau}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Seguindo os mesmos raciocínio feito para obter a estimativa (4.44), podemos usar (4.17)-(4.23) para mostrarmos que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}^0|_{L^4(0,\infty;L^6)} + |\theta^0|_{L^4(0,\infty;L^6)} &\leq CM = C(|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + |g|_{L^1(0,\infty;L^6)}) \\
&\quad * \exp(C(|\mathbf{f}|_{L^2(0,\infty;L^3)} + |\mathbf{f}|_{L^1(0,\infty;L^\infty)} + |g|_{L^1(0,\infty;L^6)}).
\end{aligned}$$

Portanto, tomemos T_0 tal que

$$C e^{CM} (|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^4(0,T;L^3)} + A^2 |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^6)}) T_0 \leq CM$$

assim, usando o princípio de indução finita e a estimativa (4.44), é fácil de mostrarmos que

$$\int_0^t (|\mathbf{u}^k|_6^4 + |\theta^k|_6^4) d\tau \leq CM \quad \forall t \in [0, T_0]$$

o que nos faz concluir por (4.44) que

$$|\mathbf{u}^k(t)|_6 + |\theta^k(t)|_6 \leq C \quad \forall t \in [0, T_0].$$

■

Lema 4.24 *Se as hipóteses do Lema 4.22 valem, e se existem duas constantes C_1, C_2 independentes de $\mathbf{a}$, b e $\mathbf{f}$, as quais satisfazem*

$$A^2 C_1 e^{C_2 M} (|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^4(0,T;L^3)} + A^2 |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^6)}) \leq M$$

então, vale as estimativas

$$|\mathbf{u}^k(t)|_6 + |\theta^k(t)|_6 \leq C \quad \forall t \geq 0, \quad \forall k \geq 1 \quad (4.45)$$

e ainda

$$\int_0^\infty (|\mathbf{u}^k(t)|_6^4 + |\theta^k(t)|_6^4) dt \leq C \quad \forall k \geq 1. \quad (4.46)$$

Demonstração: Usando a estimativa (4.44)

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}^k(s)|_6^2 + |\theta^k(s)|_6^2 + \frac{C}{2} A^{-2} \int_0^s (|\mathbf{u}^k(\tau)|_6^4 + |\theta^k(\tau)|_6^4) d\tau \\ & \leq CC_1(|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^4(0,T;L^3)} \\ & \quad + A^2 |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^6)}) e^{C \int_0^s (|\theta^{k-1}|_6^4 + |\mathbf{u}^{k-1}|_6^4) d\tau} \end{aligned} \quad (4.47)$$

portanto

$$\begin{aligned} & \int_0^s (|\mathbf{u}^k(\tau)|_6^4 + |\theta^k(\tau)|_6^4) d\tau \\ & \leq A^2 C (|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^4(0,T;L^3)} \\ & \quad + A^2 |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^6)}) e^{C \int_0^s (|\theta^{k-1}|_6^4 + |\mathbf{u}^{k-1}|_6^4) d\tau} \end{aligned} \quad (4.48)$$

agora, utilizando a hipótese que

$$A^2 C_1 e^{C_2 M} (|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 |\mathbf{f}|_{L^4(0,T;L^3)} + A^2 |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^6)}) \leq M.$$

O resultado segue por indução finita, assumindo que $\int_0^\infty (|\mathbf{u}^0(t)|_6^4 + |\theta^0(t)|_6^4) dt \leq M$. ■

Lema 4.25 *Sejam $a_1, a_2, \alpha, \beta \geq 0$. Se $x(t)$ satisfaz*

$$\frac{dx}{dt} + a_1 x^{1+\alpha} \leq a_2 (1+t)^{-\beta} \quad \forall t \geq 1,$$

então

$$x(t) \leq C_0 (1+t)^{-s} \quad \forall t \geq 1$$

onde $s = \min\{\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{1+\alpha}\}$, $C_0 = \max\{x(1), \frac{2a_2}{a_1^{1+\alpha}}, \frac{2s}{a_1^{\frac{1}{\alpha}}}\}$.

Demonstração: veja [20]. ■

Lema 4.26 *Suponha que são validas as hipóteses do Lema 4.24. Se $|\mathbf{f}(t)|_3^2 + |\mathbf{f}(t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |g(t)|_6 \leq C(1+t)^{-\alpha}$ para alguma constante C , $\alpha > 0$, então*

$$|\mathbf{u}^k(t)|_6^6 + |\theta^k(t)|_6^6 \leq C(1+t)^{-\beta} \quad \forall t \geq 1 \quad (4.49)$$

com $\beta = \min\{3, \frac{3}{4}\alpha\}$

Demonstração: Vamos definir

$$y(t) = (|\mathbf{u}^k|_6^6 + |\theta^k|_6^6) \exp(-C \int_0^t |\mathbf{u}^{k-1}(\tau)|_6^4 d\tau)$$

Usando as estimativas (4.42)-(4.43), segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &+ \frac{C}{C_1}A^{-2}y^{\frac{4}{3}}(t) \\ &\leq C \exp(-C \int_0^t |\mathbf{u}^{k-1}(\tau)|_6^4 d\tau) (|\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 |\mathbf{u}^k|_6^6 \\ &\quad + |\theta^k|_6^2 |\mathbf{f}|_3^2 |\mathbf{u}^k|_6^4 + |\mathbf{f}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |\theta^k|_6 |\mathbf{u}^k|_6^5 \\ &\quad + |g|_6 |\theta^k|_6^5 - |\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 (|\mathbf{u}^k|_6^6 + |\theta^k|_6^6)) \\ &\leq C |\mathbf{f}(t)|_3^2 y^{\frac{2}{3}}(t) + C (|\mathbf{f}(t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |g(t)|_6) y^{\frac{5}{6}}(t) \\ &\leq C (|\mathbf{f}(t)|_3^2 + |\mathbf{f}(t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + |g(t)|_6) y^{\frac{2}{3}}(t). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Vamos supor por hipótese de indução finita que $y(t) \leq C_m(1+t)^{-\beta_m}$ com $C_m > 0$ e $\beta_m \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, e $\beta_0 = 0$. Agora, usando o Lema 4.25 segue que

$$y(t) \leq C_{m+1}(1+t)^{-\beta_{m+1}}$$

onde $\beta_{m+1} = \min\{3, \frac{2\beta_m+3\alpha}{4}\}$ e $C_{m+1} = \lambda C_m^{\frac{1}{2}}$ e se $m \rightarrow \infty$, $\beta_m \rightarrow \min\{3, \frac{3\alpha}{4}\}$ e $\limsup_m C_m \leq \lambda^2$. Logo

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^k(t)|_6^6 + |\theta^k(t)|_6^6 &\leq \exp(C \int_0^t |\mathbf{u}^{k-1}|_6^4 d\tau) y(t) \\ &\leq \lambda^2 \exp(C \int_0^t |\mathbf{u}^k|_6^4 d\tau) (1+t)^{-\beta} \\ &\leq C(1+t)^{-\beta} \quad \forall t \geq 1. \end{aligned}$$

■

4.2.1 Prova dos principais teoremas

Demonstração: (do Teorema 4.12) por definição de $|\cdot|_{V^*}$, $|\cdot|_{H^{-1}}$ e usando as equações (4.24) e (4.27), segue que

$$\left| \frac{d\mathbf{u}^k}{dt} \right|_{V^*} = \sup_{|\mathbf{v}|_V=1} | \langle \nu \Delta \mathbf{u}^k - (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - \nabla \pi^k + \theta^k \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle |$$

e

$$\left| \frac{d\theta^k}{dt} \right|_{H^{-1}} = \sup_{|v|_{H_0^1}=1} | \langle \Delta \theta^k - \mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla \theta^k + g, v \rangle |$$

olhando cada parcela em separado e, em seguida, usando a desigualdade de Hölder obtemos:

$$\sup_{|\mathbf{v}|_V=1} | \langle \nu \Delta \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \rangle | \leq \nu |\nabla \mathbf{u}^k|_2,$$

e ainda

$$\begin{aligned} \sup_{|\mathbf{v}|_V=1} | \langle (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \rangle | &\leq \sup_{|\mathbf{v}|_V=1} \sum_{i,j=1}^3 \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_i^{k-1} \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} v_j \, dx \right| \\ &\leq \sup_{|\mathbf{v}|_V=1} \sum_{i,j=1}^3 \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_i^{k-1} u_j^k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx \right| \\ &\leq \sup_{|\mathbf{v}|_V=1} |\mathbf{u}^{k-1}|_3 |\mathbf{u}^k|_6 |\nabla \mathbf{v}|_2 \\ &\leq C |\mathbf{u}^{k-1}|_2^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}^{k-1}|_6^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}^k|_6 \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Ladyzhenskaya segue que

$$\sup_{|\mathbf{v}|_V=1} |\langle \theta^k \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle| \leq \sup_{|\mathbf{v}|_V=1} |\theta^k|_6 |\mathbf{f}|_{\frac{3}{2}} |\mathbf{v}|_6 \leq C |\theta^k|_6 |\mathbf{f}|_{\frac{3}{2}}.$$

Agora, usando o Lema 4.23 e o fato que $\nabla \mathbf{u}^k \in L^2(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^3))$ segue que

$$\left| \frac{d\mathbf{u}^k}{dt} \right|_{L^2(0, T_0; V^*)} \leq C \text{ uniformemente em } k \quad (4.51)$$

e com raciocínio análogo segue que

$$\left| \frac{d\theta^k}{dt} \right|_{L^2(0, T_0; H^{-1})} \leq C \text{ uniformemente em } k. \quad (4.52)$$

Agora, usando os resultados dos Lemas 4.22 e 4.23 e as estimativas (4.51) e (4.52), nós asseguramos que existe um par $(\mathbf{u}, \theta)$, tais que

- $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_0; L^6(\mathbb{R}^3) \cap H)$, $\nabla \mathbf{u} \in L^2(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^3))$, $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T_0; V^*)$
- $\theta \in L^\infty(0, T_0; L^6(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3))$, $\nabla \theta \in L^2(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^3))$, $\frac{d\theta}{dt} \in L^2(0, T_0; H^{-1})$

e um par de subsequências que denotaremos também por $(\mathbf{u}^k, \theta^k)$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^6(\mathbb{R}^3) \cap H) \text{ fraca estrela,} \\ \frac{d\mathbf{u}^k}{dt} &\rightharpoonup \frac{d\mathbf{u}}{dt} \text{ em } L^2(0, T_0; V^*) \text{ fracamente,} \\ \nabla \mathbf{u}^k &\rightharpoonup \nabla \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^3)) \text{ fracamente,} \end{aligned} \quad (4.53)$$

e ainda

$$\begin{aligned} \theta^k &\rightharpoonup \theta \text{ em } L^\infty(0, T_0; L^6(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)) \text{ fraca estrela,} \\ \frac{d\theta^k}{dt} &\rightharpoonup \frac{d\theta}{dt} \text{ em } L^2(0, T_0; H^{-1}) \text{ fracamente,} \\ \nabla \theta^k &\rightharpoonup \nabla \theta \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^3)) \text{ fracamente,} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Tomemos $\phi \in C^\infty(0, T_0; C_{0,\sigma}^\infty)$ e $\psi \in C^\infty(0, T_0; C_0^\infty)$, com $\phi(T_0) = \mathbf{0}$ e $\psi(T_0) = 0$. Seja $\text{supp}\phi = \{\text{suporte de } \phi\} \subset [0, T_0] \times \Omega$ e $\text{supp}\psi \subset [0, T_0] \times \Omega$ para algum conjunto limitado Ω . Consideremos a inclusão compacta

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

Aplicando o resultado de compacidade de Lions ([39], Cap. 1) ou de Temam ([60], Cap. 3), nós concluimos que

$$\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \text{ fortemente} \quad (4.55)$$

$$\theta^k \rightarrow \theta \text{ em } L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \text{ fortemente} \quad (4.56)$$

Nós agora multiplicamos (4.24) por ϕ e integramos em $[0, T_0] \times \mathbb{R}^3$ e da mesma forma, multiplicamos (4.27) por ψ e integramos em $[0, T_0] \times \mathbb{R}^3$ para obtermos:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u}^k \frac{d\phi}{dt} - \nu \nabla \mathbf{u}^k \cdot \nabla \phi + (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \nabla \phi \cdot \mathbf{u}^k) dx dt \\ = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{a} \cdot \phi(0) dx - \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} \theta^k \mathbf{f} \cdot \phi dx dt, \\ \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} (\theta^k \frac{d\psi}{dt} - \chi \nabla \theta^k \cdot \nabla \psi + (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla \psi) \theta^k) dx dt \\ = - \int_{\mathbb{R}^3} b \psi(0) dx - \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} g \psi dx dt. \end{aligned}$$

Por causa que $C^\infty([0, T_0]; C_{0,\sigma}^\infty)$ e $C^\infty([0, T_0]; C_0^\infty)$ são densos em $W_2^{1,1}(Q_{T_0})$, usando (4.51)-(4.56), nós podemos provar, através de argumentos conhecidos, que o limite $(\mathbf{u}, \theta)$ de $(\mathbf{u}^k, \theta^k)$ é a única solução generalizada de (4.1)-(4.7), e ainda

$$(\mathbf{u}(\cdot, t), \theta(\cdot, t)) \rightarrow (\mathbf{a}, b) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

■

Demonstração: (do Teorema 4.13) Se $|\mathbf{a}|_6^2 + |b|_6^2 + A^2 \|\mathbf{f}\|_{L^4(0,\infty;L^3)} + A^2 \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,\infty;L^\infty)} + A^{\frac{2}{3}} \|g\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,\infty;L^6)}$ é dado, supondo $A \leq 1$. Para obtermos a estimativa da hipótese do Lema

4.24, nós necessitamos que

$$A^2 \leq A_0 = C_1^{-1} e^{-C_2 M} * \frac{M}{|a|_6^2 + |b|_6^2 + |f|_{L^4(0,T;L^3)} + |f|_{L^2(0,T;L^\infty)} + |g|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^6)}}.$$

onde

$$M = (|a|_6^2 + |b|_6^2 + |g|_{L^1(0,\infty;L^6)}) * \exp(C(|f|_{L^2(0,\infty;L^3)} + |f|_{L^1(0,\infty;L^\infty)} + |g|_{L^1(0,\infty;L^6)})).$$

Assim nós fazemos $\lambda_1 = \min\{1, A_0\}$.

Agora, se $e^{C(|f|_{L^2(0,\infty;L^3)} + |g|_{L^1(0,\infty;L^2)})} (|a|_2^2 + |b|_2^2 + |g|_{L^1(0,\infty;L^2)})$ é dado, nós fazemos $\lambda_2 = \min\{1, C_1^{-1} e^{2C(|f|_{L^2(0,\infty;L^3)} + |g|_{L^1(0,\infty;L^2)})} (|a|_2^2 + |b|_2^2 + |g|_{L^1(0,\infty;L^2)})^2 e^{-C_2}\}$, onde C_1, C_2 , não dependem de a, b, f e g . Então, as hipóteses do Teorema 4.13 garantem as hipóteses do Lema 4.24 e portanto valem as estimativas (4.45) e (4.46).

Agora, fazendo uso da estimativa global (4.45) e (4.46) no lugar da estimativa local, a prova do Teorema 4.13 é similar como foi feito na prova do Teorema 4.12.

Usando as estimativas de decaimento do Lema 4.26 e a semi-continuidade fraca inferior da norma, existe uma subsequência de (u^k, θ^k) , que iremos denotar com o mesmo índice k , tal que

$$\begin{aligned} |u(t)|_6^6 + |\theta(t)|_6^6 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (|u^k(t)|_6^6 + |\theta^k(t)|_6^6) \\ &\leq |u^k(t)|_6^6 + |\theta^k(t)|_6^6 \leq C(1+t)^{-\beta} \end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$. ■

4.3 Taxa de decaimento para a solução forte

Esta seção tem como objetivo obter taxas de decaimento das derivadas parciais espaciais e temporais da solução forte do problema de Cauchy para o sistema de Boussinesq

(4.1)-(4.7) e no que segue, por questões de simplificação, faremos a força g identicamente nula. Consideremos também duas seqüências de funções $\mathbf{a}^k \in C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $b^k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tais que

$$\mathbf{a}^k \rightarrow \mathbf{a} \text{ em } L_\sigma^3(\mathbb{R}^3) \text{ fortemente,}$$

$$b^k \rightarrow b \text{ em } L^3(\mathbb{R}^3) \text{ fortemente,}$$

e ainda

$$|\mathbf{a}^k|_3 \leq |\mathbf{a}|_3,$$

$$|b^k|_3 \leq |b|_3$$

A seguir, consideremos uma seqüência de problemas de Cauchy de sistemas de Boussinesq linearizados:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}^0 + \nabla \pi^0 = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.57)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^0 = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{u}^0 \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \theta^0}{\partial t} - \chi \Delta \theta^0 = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.60)$$

$$\theta^0 \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{u}^0(0, x) = \mathbf{a}^0(x) \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad (4.62)$$

$$\theta^0(0, x) = b^0(x) \text{ em } \mathbb{R}^3. \quad (4.63)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u}^k + (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1} + \nabla \pi^k = \theta^{k-1} \mathbf{f} \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.64)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^k = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.65)$$

$$\mathbf{u}^k \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial \theta^k}{\partial t} - \chi \Delta \theta^k + \mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla \theta^{k-1} = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (4.67)$$

$$\theta^k \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{u}^k(0, x) = \mathbf{a}^k(x) \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad (4.69)$$

$$\theta^k(0, x) = b^k(x) \text{ em } \mathbb{R}^3 \quad (4.70)$$

para $k \geq 1$.

Lema 4.27 *Para a função pressão π^k vale a seguinte estimativa:*

$$|\nabla \pi^k|_r \leq C |(\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1} + \theta^{k-1} \mathbf{f}|_r \quad (4.71)$$

para $1 < r < \infty$, $k > 0$.

Desde que π^k é única a menos de constantes, nós assumimos, sem perdas de generalidades, que a pressão π^k é determinada pela condição suplementar:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi^k(t, x) = 0.$$

A estimativa do Lema 4.27 segue do fato que

$$-\Delta \pi^k = \operatorname{div} ((\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1} + \theta^{k-1} \mathbf{f}) \text{ em } \mathbb{R}^3$$

e da desigualdade de Calderon-Zygmund.

Vamos definir a função $B : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ com a lei de formação

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-s)^{y-1} s^{x-1} ds,$$

também conhecida como função Beta.

Notemos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{y-1} s^{x-1} ds \leq \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{-1} s^{x-1} ds \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} s^{x-1} ds = \frac{2}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (4.72)$$

e

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{y-1} s^{x-1} ds \leq \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{y-1} s^{-1} ds \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{y-1} ds = \frac{2}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \quad (4.73)$$

logo, pelas estimativas (4.72) e (4.73), a função B está bem definida.

Vamos analisar as seguintes integrais cujas convergências serão importantes para estimativas que irão surgir nesta seção.

•

$$t^{1-\frac{3}{2q}} \int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}-\frac{3}{2r_1}} s^{\frac{-3}{2}+\frac{3}{2r_1}+\frac{3}{2q}} ds = \int_0^1 (1-w)^{\frac{-1}{2}-\frac{3}{2r_1}} w^{\frac{-3}{2}+\frac{3}{2r_1}+\frac{3}{2q}} dw = B(x, y)$$

onde $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2r_1}$ com $r_1 > 3$ e $x = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2r_1} + \frac{3}{2q}$ com $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{q} > \frac{1}{3}$.

•

$$t^{1-\frac{3}{2q}} \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{4}+\frac{3}{2q}} s^{\frac{-3}{4}} ds = \int_0^1 (1-w)^{\frac{-3}{4}+\frac{3}{2q}} w^{\frac{-3}{4}} dw = B(x, y)$$

onde $y = \frac{1}{4} + \frac{3}{2q}$ e $x = \frac{1}{4}$.

•

$$t \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{\frac{-5}{4}} s^{\frac{-3}{4}} ds = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-w)^{\frac{-5}{4}} w^{\frac{-3}{4}} dw \leq \frac{2}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

onde $x = \frac{1}{4}$.

•

$$t \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{\frac{-1}{2}-\frac{3}{2r}} s^{\frac{-3}{2}+\frac{3}{2r}} ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-w)^{\frac{-1}{2}-\frac{3}{2r}} w^{\frac{-3}{2}+\frac{3}{2r}} dw \leq \frac{2}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

onde $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2r}$ e $r > 3$.

Seja agora $\Gamma_\psi(t, x)$ a solução fundamental da equação do calor em $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$\Gamma_\psi(t, x) = (4\psi\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\psi t}}.$$

Então a solução $(\mathbf{u}^k, \theta^k)$ do sistema de Boussinesq linearizado (4.64)-(4.70) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} u_i^k(t, x) = & \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y) dy \\ & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy ds \\ & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i}(s, y) dy ds + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \theta^{k-1}(s, y) f_i(s, y) dy ds \end{aligned} \quad (4.74)$$

e

$$\begin{aligned} \theta^k(t, x) = & \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\chi(t, x; 0, y) b^k(y) dy \\ & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\chi(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial \theta^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy ds \end{aligned} \quad (4.75)$$

para maiores detalhes veja [36].

A definição de solução forte do problema de Cauchy para o sistema de Boussinesq em $L^p(0, \infty; L^q(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, \infty; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))$ é dada a seguir:

Definição 4.28 *O par $(\mathbf{u}, \theta)$ é chamado de solução forte em $L^p(0, \infty; L^q(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, \infty; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))$ $L^p(0, \infty; L^q(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3))$ do sistema (4.1)-(4.7), se $\mathbf{u} \in L^p(0, \infty; L^q(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, \infty; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $\theta \in L^p(0, \infty; L^q(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3))$ para algum*

$p > 2$ e $q > 3$ e satisfazendo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{u} \cdot \Delta \varphi + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi) \mathbf{u}) dx dt &= - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{a} \cdot \varphi(0, x) dx \\ &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \theta \mathbf{f} \cdot \varphi dx dt \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty; C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^3))$ e ainda

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} (\theta \frac{d\psi}{dt} + \theta \Delta \psi + (\mathbf{u} \cdot \nabla \psi) \theta) dx dt = - \int_{\mathbb{R}^3} b \psi(0, x) dx$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(0, \infty; C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$.

Lema 4.29 *Sejam $\mathbf{a} \in L_\sigma^3(\mathbb{R}^3)$, $b \in L^3(\mathbb{R}^3)$, $|\mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-1+\frac{3}{2q}}(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$, $|\nabla \mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2q}}(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$, onde a constante C_0 é independente de t e q . Se $C^* C_0(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) \leq 1$ para alguma constante C^* , então*

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}}(|\mathbf{u}^k|_q + |\theta^k|_q) \leq C C_0(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3), \quad (4.76)$$

$$t^{1-\frac{3}{2q}}(|\nabla \mathbf{u}^k|_q + |\nabla \theta^k|_q) \leq C C_0(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) \quad (4.77)$$

para $3 \leq q \leq \infty$, $t \geq 0$ e $k \geq 0$.

Demonstração: Vamos mostrar o lema, usando o princípio de indução finita. Definimos

$$I_q^k = t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}}(|\mathbf{u}^k|_q + |\theta^k|_q)$$

e

$$J_q^k = t^{1-\frac{3}{2q}}(|\nabla \mathbf{u}^k|_q + |\nabla \theta^k|_q).$$

Para o caso $k = 0$ observamos que

$$\begin{aligned} u_i^0(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^0(y) dy \\ \theta^0(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\chi(t, x; 0, y) b^0(y) dy \end{aligned}$$

são soluções de (4.57)-(4.63) com $\nabla\pi = 0$. Usando a desigualdade de Young para a convolução com a solução fundamental obtemos:

$$|u_i^0|_q = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^0(y) dy \right|_q \leq (4\nu\pi t)^{-\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\nu t}} dy \right)^{\frac{1}{p}} |a_i^0|_3 \leq C t^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2q}} |a|_3,$$

e

$$|\theta^0|_q = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\chi(t, x; 0, y) b^0(y) dy \right|_q \leq (4\chi\pi t)^{-\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\chi t}} dy \right)^{\frac{1}{p}} |b^0|_3 \leq C t^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2q}} |b|_3.$$

Agora, usando a estimativa

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) \right| \leq C t^{-2} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{4\nu t}}$$

segue que

$$\left| \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \right|_q \leq C t^{-2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\lambda|x-y|^2}{4\nu t}} |a_i^0(y)| dy \right|_q$$

e portanto

$$\left| \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \right|_q \leq C t^{-1 + \frac{3}{2q}} |a|_3$$

com raciocínio análogo para a temperatura podemos mostrar que

$$\left| \frac{\partial \theta^0}{\partial x_i} \right|_q \leq C t^{-1 + \frac{3}{2q}} |b|_3$$

e portanto as estimativas (4.76)-(4.77) são válidas para $k = 0$.

Vamos assumir por hipótese de indução que as estimativas (4.76)-(4.77) são válidas para $k - 1$. Usando a desigualdade de Young para a convolução com a solução fundamental, podemos estimar as parcelas de (4.74) da seguinte forma:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y) dy \right|_q \leq (4\nu\pi t)^{-\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\nu t}} dy \right)^{\frac{1}{p}} |a_i^k|_3 \leq C t^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2q}} |a_i^k|_3$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{q}$. Novamente usando a desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy ds \right|_q \\
& \leq C \int_0^t (4\nu\pi(t-s))^{\frac{-3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{-|x-y|^2 p}{4\nu(t-s)}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left| \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j} \right|_2 ds \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \left| \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j} \right|_2 ds \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} |\mathbf{u}^{k-1}|_4 |\nabla \mathbf{u}^{k-1}|_4 ds \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} s^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-1+\frac{3}{8}} I_4^{k-1} J_4^{k-1} ds \\
& \leq CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2 t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}} \int_0^1 (1-w)^{\frac{-3}{4}+\frac{3}{2q}} w^{-\frac{3}{4}} dw \\
& \leq CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2 t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{q}$. Agora, usando (4.71) segue que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i}(s, y) dy ds \right|_q \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \left| \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i} \right|_2 ds \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} (|(\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1}|_2 + |\theta^{k-1} \mathbf{f}|_2) ds \\
& \leq CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2 t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}} + CC_0 (|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3) \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} s^{-\frac{3}{4}} I_4^{k-1} ds \\
& \leq CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2 t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \theta^{k-1}(s, y) f_i(s, y) dy ds \right|_q \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} |\theta^{k-1} f_i|_2 ds \\
& \leq CC_0^2 t^{-1+\frac{3}{2q}} (|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2 \int_0^1 (1-w)^{\frac{-3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} w^{-\frac{3}{4}} dw \\
& \leq CC_0^2 t^{-1+\frac{3}{2q}} (|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|\mathbf{u}^k(t)|_q \leq Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}(C_0(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) + C_0^2(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2).$$

Da mesma forma, podemos obter estimativa análoga para $|\theta^k(t)|_q$.

Agora, derivando a expressão (4.74) e usando o fato que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \right| &\leq \left| \frac{2(x_l - y_l)}{4\nu(t-s)} \right| (4\nu\pi(t-s))^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\nu(t-s)}} \\ &\leq C(t-s)^{-2} e^{\frac{-\lambda|x-y|^2}{4\nu(t-s)}} \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$ e alguma constante $\lambda > 0$, segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y) dy \right|_q &\leq Ct^{-2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{-\lambda|x-y|^2}{4\nu t}} |a_i^k(y)| dy \right|_q \\ &\leq Ct^{-2+\frac{3}{2}(\frac{2}{3}+\frac{1}{q})} |a_i^k|_3 = Ct^{-1+\frac{3}{2q}} |\mathbf{a}|_3 \end{aligned}$$

da mesma forma obtemos:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial x_l} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy ds \right|_q \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{-\lambda|x-y|^2}{4\nu(t-s)}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left| \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1} \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j} \right|_2 ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-2+\frac{3}{2}(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \left| \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1} \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j} \right|_2 ds \\ &\leq CC_0^2(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{4}+\frac{3}{2q}} s^{-\frac{3}{2}} ds \\ &\leq CC_0^2(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{4}+\frac{3}{2q}} s^{-\frac{3}{2}} ds \\ &\leq CC_0^2(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 t^{-1+\frac{3}{2q}} \int_0^1 (1-w)^{-\frac{5}{4}+\frac{3}{2q}} w^{-\frac{3}{4}} dw \\ &\leq CC_0^2(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 t^{-1+\frac{3}{2q}} \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i}(s, y) dy ds \right|_q \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{l})} \left(\left| \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1} \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j} \right|_l + |\theta^{k-1} f_i|_l \right) ds \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{l})} (|\mathbf{u}^{k-1}|_r |\nabla \mathbf{u}^{k-1}|_q + |\theta^{k-1}|_r |\mathbf{f}|_q) ds \quad (4.78) \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{l})} s^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2r}} s^{-1 + \frac{3}{2q}} (I_r^{k-1} J_q^{k-1} + C_0(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) I_r^{k-1}) ds \\
& \leq CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 t^{-1 + \frac{3}{2q}} \int_0^1 (1-w)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2r}} w^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{r} + \frac{1}{q})} dw
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{l}$, pelo uso da desigualdade de Hölder e $r > 3$ com $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} > \frac{1}{3}$, para que possamos garantir a convergência da última integral em (4.78). Por último, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \theta^{k-1} f_i dy ds \right|_q \\
& \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{l})} |\theta^{k-1} f_i|_l ds.
\end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos para a equação da temperatura, podemos facilmente mostrar que

$$\begin{aligned}
J_q^k & \leq C_0(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) + CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 \\
& \leq 2C_0(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3).
\end{aligned}$$

Para $q = \infty$ podemos seguir de forma análoga ao que foi feito acima para obtermos:

$$\begin{aligned}
I_\infty^k &\leq C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) + Ct^{\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} |\mathbf{u}^{k-1}|_4 (|\nabla \mathbf{u}^{k-1}|_4 + |\nabla \theta^{k-1}|_4) ds \\
&\quad + Ct^{\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} |\theta^{k-1}|_4 |\mathbf{f}|_4 ds \\
&\leq C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) + Ct^{\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}} s^{-1 + \frac{3}{8}} I_4^{k-1} J_4^{k-1} ds \\
&\quad + Ct^{\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{8}} s^{-1 + \frac{3}{8}} I_4^{k-1} C_0 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) ds \\
&\leq C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) + CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 \int_0^1 (1-w)^{-\frac{3}{4}} w^{-\frac{3}{4}} dw \\
&\leq C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) + CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2.
\end{aligned}$$

De forma análoga nós obtemos a estimativa para J_∞^k . ■

Lema 4.30 *Sejam $\mathbf{a} \in L_\sigma^3(\mathbb{R}^3)$, $b \in L^3(\mathbb{R}^3)$ e $|\mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-1 + \frac{3}{2q}} (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$, $|\nabla \mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2q}} (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$. Se $C^* C_0 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) \leq 1$ para alguma constante C^* , então para $3 \leq q \leq \infty$, a estimativa*

$$t^{\frac{3}{2} - \frac{3}{2q}} \sum_{l,j=1}^3 \left(\left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}^k}{\partial x_l \partial x_j} \right|_q + \left| \frac{\partial^2 \theta^k}{\partial x_l \partial x_j} \right|_q \right) \leq 2C_0 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$$

vale uniformemente em k .

Demonstração: As identidades (4.74) e (4.75) podem ser escritas da forma:

$$\begin{aligned}
u_i^k(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y) dy - \int_0^{\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \left(\sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i}(s, y) - \theta^{k-1}(s, y) f_i(s, y) \right) dy ds \\
&\quad - \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \left(\sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) \right) dy ds \\
&\quad + \frac{\partial \pi^k}{\partial x_i}(s, y) - \theta^{k-1}(s, y) f_i(s, y) dy ds
\end{aligned}$$

e para a temperatura:

$$\begin{aligned}\theta^k(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\chi(t, x; 0, y) b^k(y) dy - \int_0^{\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\chi(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial \theta^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy ds \\ &\quad - \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\chi(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial \theta^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy ds,\end{aligned}$$

nós fazemos essas decomposições para podermos controlar as integrais envolvidas nos cálculos a seguir. Agora, notemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_\nu(t, x; s, y) &= (4\nu\pi(t-s))^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4\nu(t-s)}}, \\ \frac{\partial \Gamma_\nu(t, x; s, y)}{\partial x_l} &= \frac{-2(x_l - y_l)}{4\nu(t-s)} \Gamma_\nu(t, x; s, y), \\ \frac{\partial^2 \Gamma_\nu(t, x; s, y)}{\partial x_j \partial x_l} &= \frac{(x_j - y_j)(x_l - y_l)}{4(\nu(t-s))^2} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \quad \text{se } l \neq j,\end{aligned}$$

e ainda

$$\frac{\partial^2 \Gamma_\nu(t, x; s, y)}{\partial x_l^2} = \frac{-2}{4\nu(t-s)} \Gamma_\nu(t, x; s, y) + \frac{4(x_l - y_l)^2}{4(\nu(t-s))^2} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \quad \text{se } l = j.$$

Faremos o caso em que $l = j$ (para o caso em que $l \neq j$ as contas são análogas). Notemos também que a estimativa

$$\frac{(x_j - y_j)^2}{t-s} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\nu(t-s)}} \leq e^{\frac{-\lambda|x-y|^2}{(t-s)}}$$

é válida para alguma constante $\lambda > 0$.

Faremos as estimativas separadamente e usaremos as propriedades de derivação do produto de convolução para controlarmos as integrais envolvidas. Usando a desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned}& \left| \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y) dy \right|_q \\ & \leq C \frac{1}{t} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y) + \frac{(x_l - y_l)^2}{t^2} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y)) dy \right|_q \\ & \leq t^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; 0, y) a_i^k(y) dy \right|_q + t^{-\frac{5}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{-\lambda|x-y|^2}{t}} |a_i^k(y)| dy \right|_q \\ & \leq C t^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2q}} \|a\|_3\end{aligned}$$

com o mesmo raciocínio, temos:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \int_0^{\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy \right|_q \\
& \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{q})} |\mathbf{u}^{k-1}|_4 |\nabla \mathbf{u}^{k-1}|_4 ds \\
& \leq CC_0^2(|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2 t^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2q}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-w)^{\frac{-7}{4} + \frac{3}{2q}} w^{\frac{-3}{4}} dw
\end{aligned}$$

da mesma forma seguem as estimativa envolvendo $\int_0^{\frac{t}{2}}$. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \sum_{j=1}^3 u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y) dy ds \right|_q \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{-\lambda|x-y|^2}{t-s}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} (u_j^{k-1}(s, y) \frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j}(s, y)) dy \right|_q ds \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (|\nabla \mathbf{u}^{k-1}|_\infty |\nabla \mathbf{u}^{k-1}|_q + |\mathbf{u}^{k-1}|_\infty \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{k-1}}{\partial x_l^2} \right|_q) ds \\
& \leq CC_0^2(|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3)^2 t^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2q}} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-w)^{\frac{-1}{2}} w^{-2 + \frac{3}{2q}} dw \\
& \quad + CC_0(|\mathbf{a}|_3 + |\mathbf{b}|_3) \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-w)^{\frac{-1}{2}} w^{-2 + \frac{3}{2q}} dw \sup_{s \in [\frac{t}{2}, t]} \left| s^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2q}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{k-1}}{\partial x_l^2}(s) \right|_q.
\end{aligned}$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \frac{\partial \pi}{\partial x_i} dy ds \right|_q \\
& \leq \int_{\frac{t}{2}}^t \left| \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \nabla \pi dy \right|_q ds \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-2} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x_l} ((\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1}) \right|_q + \left| \frac{\partial \theta^{k-1} \mathbf{f}}{\partial x_l} \right|_q \right) ds
\end{aligned}$$

e, por último,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_\nu(t, x; s, y) \theta^{k-1} f_i \, dy \, ds \right|_q \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{-\lambda|x-y|^2}{t-s}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} (\theta^{k-1} f_i) \, dy \right|_q \, ds \\
& \leq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (|\nabla \theta^{k-1}|_\infty |\mathbf{f}|_q + |\theta^{k-1}|_q |\nabla f_i|_\infty) \, ds \\
& \leq CC_0^2 (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 t^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2q}} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-w)^{-\frac{1}{2}} w^{-2 + \frac{3}{2q}} \, dw,
\end{aligned}$$

a demonstração do Lema segue das estimativas acima. ■

Lema 4.31 *Sejam $\mathbf{a} \in L_\sigma^3(\mathbb{R}^3)$, $b \in L^3(\mathbb{R}^3)$ e $|\mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-1 + \frac{3}{2q}} (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$, $|\nabla \mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2q}} (|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$. Se $M(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) \leq 1$ para alguma constante M , então para $3 \leq q \leq \infty$, as estimativas*

$$t^{\frac{3}{2} - \frac{3}{2q}} |\nabla \pi^k|_q \leq C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 \quad (4.79)$$

e

$$t^{\frac{3}{2} - \frac{3}{2q}} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t} \right|_q + \left| \frac{\partial \theta^k}{\partial t} \right|_q \right) \leq C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) + C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)^2 \quad (4.80)$$

valem uniformemente em k .

Demonstração: A demonstração segue dos Lemas 4.27, 4.29 e 4.30 e dos fatos que

$$\frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u}^k - (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1} - \nabla \pi^k + \theta^{k-1} \mathbf{f}$$

e

$$\frac{\partial \theta^k}{\partial t} = \chi \Delta \theta^k - \mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla \theta^{k-1}$$

■

A seguir, enunciamos o nosso principal resultado.

Teorema 4.32 *Sejam $\mathbf{a} \in L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $b \in L^3(\mathbb{R}^3)$ e $|\mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-1+\frac{3}{2q}}(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$, $|\nabla \mathbf{f}|_q \leq C_0 t^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2q}}(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$. Então existe uma constante positiva ε tal que, se $(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3) \leq \varepsilon$, existe uma única solução $(\mathbf{u}, \theta)$ para (4.1)-(4.7), a qual satisfaz:*

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \mathbf{u} &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \\ t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \theta &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \\ t^{1-\frac{3}{2q}} |\nabla \mathbf{u}| &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \\ t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} |\nabla \theta| &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \end{aligned}$$

para $3 \leq q \leq \infty$ e ainda

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2q}} \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_j \partial x_i} \right| &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \\ t^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2q}} \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_i} \right| &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \\ t^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2q}} |\nabla \pi| &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \\ t^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2q}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &\in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)), \end{aligned}$$

para $3 \leq q \leq \infty$.

Demonstração: Usando o Lema 4.29 com $q = 3$, obtemos:

$$|\mathbf{u}^k|_3 + |\theta^k|_3 \leq C(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$$

e

$$|\nabla \mathbf{u}^k|_3 + |\nabla \theta^k|_3 \leq C t^{-\frac{1}{2}}(|\mathbf{a}|_3 + |b|_3)$$

logo, para $1 < p < 2$ é fácil de verificar que

$$\mathbf{u}^k \in L^\infty(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3)),$$

$$\theta^k \in L^\infty(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3)),$$

$$\nabla \mathbf{u}^k \in L_{loc}^p(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3)),$$

$$\nabla \theta^k \in L_{loc}^p(0, \infty; L^3(\mathbb{R}^3)).$$

Sejam q e q^* tais que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$ e consideremos agora as seguintes estimativas:

$$\sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} |\langle \Delta \mathbf{u}^k, \mathbf{v} \rangle| \leq \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} |\nabla \mathbf{u}^k|_q |\nabla \mathbf{v}|_{q^*} \leq |\nabla \mathbf{u}^k|_q,$$

$$\begin{aligned} \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} |\langle (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v} \rangle| &\leq \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} \sum_{i,j} \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_i^{k-1} \frac{\partial u_j^{k-1}}{\partial x_i} v_j \, dx \right| \\ &\leq \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} \sum_{i,j} \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_i^{k-1} u_j^{k-1} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx \right| \\ &\leq \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} \|\mathbf{u}^{k-1}\|_q^2 |\nabla \mathbf{v}|_{q^*} \leq \|\mathbf{u}^{k-1}\|_q^2 \end{aligned}$$

e

$$\sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} |\langle \nabla \pi^k, \mathbf{v} \rangle| \leq |\pi^k|_q$$

agora, usando as desigualdades de Hölder e Sobolev, obtemos também:

$$\begin{aligned} \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} |\langle \theta^{k-1} \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle| &\leq \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} |\theta^{k-1} \mathbf{f}|_{\frac{3q}{q+3}} |\mathbf{v}|_{\frac{3q}{2q-3}} \\ &\leq C \sup_{|\mathbf{v}|_{W_0^{1,q^*}}=1} |\theta^{k-1} \mathbf{f}|_{\frac{3q}{q+3}} |\nabla \mathbf{v}|_{q^*} = C |\theta^{k-1} \mathbf{f}|_{\frac{3q}{q+3}}, \end{aligned}$$

desta forma, recorrendo para a expressão (4.74), usando novamente as desigualdades de Sobolev e Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t} \right|_{W^{-1,q}} &\leq \left| \nabla \mathbf{u}^k \right|_q + \left| \mathbf{u}^{k-1} \right|_q^2 + \left| \pi^k \right|_q + C \left| \theta^{k-1} \mathbf{f} \right|_{\frac{3q}{q+3}} \\
&\leq \left| \nabla \mathbf{u}^k \right|_q + \left| \nabla \left| \mathbf{u}^{k-1} \right|^2 \right|_{\frac{3q}{q+3}} + \left| \nabla \pi^k \right|_{\frac{3q}{q+3}} + C \left| \theta^{k-1} \mathbf{f} \right|_{\frac{3q}{q+3}} \\
&\leq \left| \nabla \mathbf{u}^k \right|_q + C \left| \mathbf{u}^{k-1} \right|_3 \left| \nabla \mathbf{u}^{k-1} \right|_q + C \left| \theta^{k-1} \right|_3 \left| \mathbf{f} \right|_q
\end{aligned}$$

usando raciocínio análogo para a temperatura θ^k , é fácil mostrar que

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t} \right|_{W^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} + \left| \frac{\partial \theta^k}{\partial t} \right|_{W^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \leq C t^{-1+\frac{3}{2q}}.$$

Portanto, para $1 < r < \frac{2q}{2q-3}$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial t} &\in L_{loc}^r(0, \infty; W^{-1,q}(\mathbb{R}^3)), \\
\frac{\partial \theta^k}{\partial t} &\in L_{loc}^r(0, \infty; W^{-1,q}(\mathbb{R}^3))
\end{aligned}$$

Usando a inclusão compacta de $W^{1,3}(\mathbb{R}^3)$ em $L_{loc}^3(\mathbb{R}^3)$ e o Teorema de compacidade, dado em Temam ([60], Cap. 3), concluímos que existem $(\mathbf{u}, \theta)$ tais que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^k &\rightarrow \mathbf{u} \text{ em } L_{loc}^2(0, \infty; L_{loc}^3(\mathbb{R}^3)) \text{ fortemente} \\
\theta^k &\rightarrow \theta \text{ em } L_{loc}^2(0, \infty; L_{loc}^3(\mathbb{R}^3)) \text{ fortemente}
\end{aligned}$$

Agora, usando argumentos conhecidos, não é difícil de mostrarmos que $(\mathbf{u}, \theta)$ é a única solução para (4.1)-(4.7). ■

Capítulo 5

Existência de soluções fracas do sistema de Boussinesq generalizado definidas sobre um cone convexo

No caso das equações de Boussinesq clássicas, a viscosidade ν e a condutividade térmica κ são constantes. Porém existem fluidos aos quais há dependência da viscosidade e condutividade térmica com respeito a temperatura (ou com respeito a pressão). Para tais fluidos a dependência da viscosidade com a temperatura é fundamental na determinação dos detalhes do escoamento.

As equações de Boussinesq Generalizada descrevem em primeira aproximação a convecção termicamente induzida em fluidos com viscosidades e condutividade térmica dependentes da própria temperatura.

Vamos considerar o sistema Boussinesq generalizado, dado pelo modelo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (\nu(\theta) \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \pi - \alpha \theta \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (k(\theta) \nabla \theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 \quad (5.3)$$

e com condições iniciais e de bordo:

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ em } \Omega \quad (5.4)$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x) \text{ em } \Omega \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega \quad (5.6)$$

$$\theta(t, x) = T(t, x) \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega \quad (5.7)$$

Onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado em uma direção. Nos assumimos que as funções ν e k , são funções de classe $C^1(\mathbb{R})$, satisfazendo a condição de limitação:

$$0 < \nu_0 \leq \nu(\zeta) \leq \nu_1$$

$$0 < k_0 \leq k(\zeta) \leq k_1$$

para toda $\zeta \in \mathbb{R}$.

5.1 Resultados auxiliares

Lema 5.1 (*desigualdade de Hölder*) *Se cada integral faz sentido, então nos temos:*

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq 3^{\frac{1}{p} + \frac{1}{r}} |\mathbf{u}|_p |\nabla \mathbf{v}|_q |\mathbf{w}|_r$$

onde $p, q, r > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

Para maiores detalhes, veja [1].

Lema 5.2 *Existe uma função S a qual satisfaz as seguintes propriedades:*

- $S = T$ para $(t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega$;
- $S(t) \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$;
- para qualquer $\varepsilon > 0$ e $p \geq 1$, nós poderemos redefinir S , se necessário, tal que $|S|_p < \varepsilon$.

Para maiores detalhes do Lema 5.2 veja [24] ou [41].

Lema 5.3 *(Simon) Sejam $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ espaços de Banach com imersões contínuas e densas, a primeira delas compactas. Então as seguintes imersões são compactas:*

- $L^q(0, T; X) \cap \{\phi; \frac{d\phi}{dt} \in L^1(0, T; Y)\} \hookrightarrow L^2(0, T; B)$ se $1 \leq q \leq \infty$,
- $L^\infty(0, T; X) \cap \{\phi; \frac{d\phi}{dt} \in L^r(0, T; Y)\} \hookrightarrow C([0, T]; B)$ se $1 < r \leq \infty$.

Para maiores detalhes veja [58].

5.2 Formulação Variacional

Fazendo a mudança de variável $\tau = \theta - S$, S dado pelo Lema 5.2, nós podemos reescrever o sistema (5.1)-(5.7) da forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \pi + \alpha(\tau + S) \mathbf{g} \quad (5.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \operatorname{div} (k(\tau + S) \nabla \tau) + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau = -\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} (k(\tau + S) \nabla S) - \mathbf{u} \cdot \nabla S \quad (5.10)$$

com as condições iniciais e de fronteira:

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ em } \Omega \quad (5.11)$$

$$\tau(0, x) = \tau_0(x) = \theta_0(x) - S_0(x) \text{ em } \Omega \quad (5.12)$$

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega \quad (5.13)$$

$$\tau(t, x) = 0 \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (5.14)$$

Considere os seguintes espaços funcionais:

$$\begin{aligned} \Phi &= \{ \varphi \in L^2(0, T; V); \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap L^1(0, T; V^*) \\ &\text{e } \nabla \varphi \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \{ \psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \frac{d\psi}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; H_0^{-1}(\Omega)) \\ &\text{e } \nabla \psi \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \}. \end{aligned}$$

Consideremos os dois conjuntos convexos $K_1 \subseteq V$ e $K_2 \subseteq H_0^1(\Omega)$ fechados tais que $\mathbf{0} \in K_1$ e $0 \in K_2$.

Em mecânica dos fluidos, as desigualdades variacionais aparecem com uma certa frequência, quando algumas hipóteses são impostas sobre as incógnitas do problema, em geral para descrever situações físicas tal como fluidos de pequeno escoamento.

Vamos considerar a desigualdade variacional relacionadas com as equações de Boussinesq generalizada dada a seguir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) &= \left(\operatorname{div} (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) \\ &\geq -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + (\alpha(\tau + S) \mathbf{g}, \mathbf{v} - \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\tau}{dt}, \psi - \tau\right) &= (\operatorname{div} (k(\tau + S)\nabla\tau), \psi - \tau) \\
&\geq -(\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, \psi - \tau) - \left(\frac{dS}{dt}, \psi - \tau\right) \\
&\quad + (\operatorname{div} (k(\tau + S)\nabla S), \psi - \tau) - (\mathbf{u} \cdot \nabla S, \psi - \tau)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

para $(\mathbf{v}, \psi) \in \Phi \times \Psi$ e $(\mathbf{v}(t), \psi(t)) \in K_1 \times K_2$, satisfazendo as condições iniciais.

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \tau(0, x) = \tau_0(x), \tag{5.17}$$

e com as condições de fronteiras

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tau = 0 \text{ sobre } (0, T) \times \partial\Omega. \tag{5.18}$$

Definição 5.4 Dizemos que $(\mathbf{u}, \tau) \in \Phi \times \Psi$ com $(\mathbf{u}(t), \tau(t)) \in K_1 \times K_2$ para todo $t \in [0, T]$ é uma solução forte do sistema variacional se verificam o sistema variacional (5.15)-(5.16) e as condições iniciais e de fronteira (5.17)-(5.18).

Observação 5.5 Observe que as condições iniciais para $(\mathbf{u}, \tau)$ têm sentido, porque se $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ e $\tau \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; V^*)$ e $\frac{d\tau}{dt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, então $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$ e $\tau \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Provar a existência de solução forte continua em aberto. Então, nós procuramos relaxar a formulação variacional do nosso problema e definimos o conceito de solução fraca. Uma de nossas metas é estudar a existência de soluções fracas para o sistema (5.15)-(5.16) no sentido da formulação variacional que obteremos a seguir.

5.3 Formulação fraca

Integrando em (5.15) de 0 até T , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt &= \int_0^T \left(\operatorname{div} (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt \\ &\geq - \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) dt + \int_0^T (\alpha(\tau + S) \mathbf{g}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) dt \end{aligned}$$

somemos a quantidade $\int_0^T \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt$ nos dois lados da desigualdade, obtendo:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{u} \right) dt &= \int_0^T \left(\operatorname{div} (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt \\ &\geq - \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) dt + \int_0^T (\alpha(\tau + S) \mathbf{g}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) dt \quad (5.19) \\ &\quad - \frac{1}{2} |\mathbf{v}(0) - \mathbf{u}_0|_2^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{u}(T)|_2^2 \end{aligned}$$

para toda $\mathbf{v} \in \Phi$, $\mathbf{v}(t) \in K_1$ e $\mathbf{v}(T) = 0$.

Com procedimento análogo para a inequação da temperatura obtemos:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\frac{d\psi}{dt}, \tau \right) dt &= \int_0^T \left(\operatorname{div} (k(\tau + S) \nabla \tau), \psi - \tau \right) dt \\ &\geq - \int_0^T (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \psi) dt - \int_0^T \left(\frac{dS}{dt}, \psi - \tau \right) dt \\ &\quad + \int_0^T \left(\operatorname{div} (k(\tau + S) \nabla S), \psi - \tau \right) dt \quad (5.20) \\ &\quad - \int_0^T (\mathbf{u} \cdot \nabla S, \psi - \tau) dt - \frac{1}{2} |\psi(0) - \tau_0|_2^2 + \frac{1}{2} |\tau(T)|_2^2 \end{aligned}$$

para toda $\psi \in \Psi$, $\psi(t) \in K_1$ e $\psi(T) = 0$.

Definição 5.6 Dizemos que $(\mathbf{u}, \tau)$ é uma solução fraca do sistema variacional, se $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\tau \in L^2(0, T; H_0^1) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $(\mathbf{u}(t), \tau(t)) \in K_1 \times K_2$ e verificam as condições (5.19)-(5.20) e as condições (5.17)-(5.18) para todo par $(\mathbf{v}, \psi) \in \Phi \times \Psi$ com $(\mathbf{v}(t), \psi(t)) \in K_1 \times K_2$ para quase todo $t \in [0, T]$ e $(\mathbf{v}(T), \psi(T)) = (\mathbf{0}, 0)$.

Observação 5.7 *Se $(\mathbf{u}, \tau)$ é uma solução fraca e suficientemente regular, então é uma solução forte.*

Teorema 5.8 *Se $\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^4(\Omega))$ então existe uma solução fraca do sistema variacional (5.15)-(5.16).*

5.3.1 Problema auxiliar

Em busca de nosso objetivo de mostrarmos existência de solução fraca global, a principal idéia é usarmos o método de Galerkin associado a um operador de penalização transformando o problema variacional para um problema de equações associadas as equações de Boussinesq.

Para usarmos o argumento de penalização, consideramos P_{K_1} o operador projeção de $(L^2(\Omega))^3$ sobre K_1 , e definimos

$$Q^1 \mathbf{v} = \mathbf{v} - P_{K_1} \mathbf{v}.$$

O operador P_{K_1} satisfaz as seguintes propriedades:

$$(\mathbf{v} - P_{K_1} \mathbf{v}, P_{K_1} \mathbf{v}) \geq 0$$

$$(\mathbf{v} - P_{K_1} \mathbf{v}, P_{K_1} \mathbf{v} - \mathbf{h}) \geq 0, \text{ para toda } \mathbf{h} \in K_1.$$

Com as mesmas propriedades definimos $Q^2 \psi = \psi - P_{K_2} \psi$ onde P_{K_2} é o operador projeção de $L^2(\Omega)$ sobre K_2 (veja [8]).

Vamos considerar agora as auto-funções $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \dots\}$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_m, \dots\}$ dos operadores de Stokes e Laplaciano respectivamente e V_m, W_m os auto-espacos gerados por $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ respectivamente.

Consideremos agora o seguinte sistema auxiliar penalizado (sistema de Galerkin):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \mathbf{v}_k\right) &= (\operatorname{div}(\nu(\tau_m + S)\nabla\mathbf{u}_m), \mathbf{v}_k) + ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_k) \\ &= (\alpha(\tau_m + S)\mathbf{g}, \mathbf{v}_k) - m(Q^1\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_k), \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau_m}{dt}, \phi_k\right) &= (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla\tau_m), \phi_k) + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla\tau_m, \phi_k) \\ &= -\left(\frac{dS}{dt}, \phi_k\right) + (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla S), \phi_k) \\ &\quad - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \phi_k) - m(Q^2\tau_m, \phi_k). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Desde que V é denso em H , $H^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e $(\mathbf{u}_0, \tau_0) \in H \times L^2(\Omega)$, é possível encontrar $\mathbf{u}_{0m} \in V_m$ com $|\mathbf{u}_{0m}|_2 \leq |\mathbf{u}_0|_2$ tal que $\mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}_0$ em H e $\tau_{0m} \in W_m$ com $|\tau_{0m}|_2 \leq |\tau_0|_2$ tal que $\tau_{0m} \rightarrow \tau_0$ em $L^2(\Omega)$. Somamos assim, ao sistema auxiliar, as seguintes condições iniciais:

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m} \text{ e } \tau_m(0) = \tau_{0m}. \quad (5.23)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m &= \sum_{k=1}^m c_{km}(t) \mathbf{v}_k \\ \tau_m &= \sum_{k=1}^m d_{km}(t) \phi_k \end{aligned}$$

podemos multiplicar as equações (5.21) e (5.22) por c_{km} e d_{km} respectivamente e somarmos sobre o índice k de 1 até m , para obtermos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \mathbf{u}_m\right) &= (\operatorname{div}(\nu(\tau_m + S)\nabla\mathbf{u}_m), \mathbf{u}_m) + m(Q^1\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) \\ &= (\alpha(\tau_m + S)\mathbf{g}, \mathbf{u}_m) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau_m}{dt}, \tau_m\right) &= (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla\tau_m), \tau_m) + m(Q^2\tau_m, \tau_m) \\ &= -\left(\frac{dS}{dt}, \tau_m\right) + (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla S), \tau_m) - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \tau_m). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Estimativas e convergências

Usando as equações (5.24) e (5.25) é fácil de mostrarmos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_m|_2^2 + \nu_0 |\nabla \mathbf{u}_m|_2^2 + m(Q^1 \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) \\ \leq (\alpha(\tau_m + S) \mathbf{g}, \mathbf{u}_m) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tau_m|_2^2 + k_0 |\nabla \tau_m|_2^2 + m(Q^2 \tau_m, \tau_m) \\ \leq -\left(\frac{dS}{dt}, \tau_m\right) + (k(\tau_m + S) \nabla S, \nabla \tau_m) - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \tau_m). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, podemos mostrar as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} (\alpha \tau_m \mathbf{g}, \mathbf{u}_m) &\leq 3\alpha |\tau_m|_6 |\mathbf{g}|_{\frac{3}{2}} |\mathbf{u}_m|_6, \\ (\alpha S \mathbf{g}, \mathbf{u}_m) &\leq 3\alpha |S|_3 |\mathbf{g}|_2 |\mathbf{u}_m|_6, \\ |(\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \tau_m)| &= |(\mathbf{u}_m \cdot \nabla \tau_m, S)| \leq 3 |S|_3 |\nabla \tau_m|_2 |\mathbf{u}_m|_6, \\ \left(\frac{dS}{dt}, \tau_m\right) &\leq \left| \left\langle \frac{dS}{dt}, \frac{\tau_m}{|\nabla \tau_m|_2} \right\rangle \right| |\nabla \tau_m|_2 \leq \left| \frac{dS}{dt} \right|_{H^{-1}} |\nabla \tau_m|_2, \\ (k(\tau_m + S) \nabla S, \nabla \tau_m) &\leq k_1 |\nabla S|_2 |\nabla \tau_m|_2 \end{aligned}$$

utilizando estas últimas estimativas, a desigualdade de Ladyzhenskaya e somando as inequações (5.26) e (5.27) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (|\mathbf{u}_m|_2^2 + |\tau_m|_2^2) + \nu_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha C_L^2}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |\mathbf{g}|_{\frac{3}{2}} - \frac{3C_L}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |S|_3\right) |\nabla \mathbf{u}_m|_2^2 \\ + k_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha C_L^2}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |\mathbf{g}|_{\frac{3}{2}} - \frac{3C_L}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |S|_3\right) |\nabla \tau_m|_2^2 + m((Q^1 \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + (Q^2 \tau_m, \tau_m)) \\ \leq F(t), \end{aligned}$$

onde $F(t) = \frac{9\alpha^2}{2\nu_0} |S|_3^2 |\mathbf{g}|_2^2 + \frac{1}{k_0} \left| \frac{dS}{dt} \right|_{H^{-1}}^2 + \frac{k^2}{k_0} |\nabla S|_2^2$.

Seja $\gamma = \inf_t \left\{ \nu_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha C_L^2}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |\mathbf{g}|_{\frac{3}{2}} - \frac{3C_L}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |S|_3^2\right), k_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha C_L^2}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |\mathbf{g}|_{\frac{3}{2}} - \frac{3C_L}{2\sqrt{k_0\nu_0}} |S|_3^2\right) \right\}$ e

suponhamos que para α, g , e S apropriados temos $\gamma > 0$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(|\mathbf{u}_m|_2^2 + |\tau_m|_2^2) + \gamma(|\nabla \mathbf{u}_m|_2^2 + |\nabla \tau_m|_2^2) \\ + m((Q^1 \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + (Q^2 \tau_m, \tau_m)) \\ \leq F(t). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Agora, integrando de 0 até t na inequação (5.28) obtemos:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_m(t)|_2^2 + |\tau_m(t)|_2^2 + \gamma \int_0^t (|\nabla \mathbf{u}_m|_2^2 + |\nabla \tau_m|_2^2) dt \\ + m \int_0^t (|\mathbf{u}_m - P_{K_1} \mathbf{u}_m|_2^2 + |\tau_m - P_{K_2} \tau_m|_2^2) dt \\ \leq |\mathbf{u}_m(0)|_2^2 + |\tau_m(0)|_2^2 + \int_0^t F(t) dt \\ \leq N + \int_0^t F(t) dt \end{aligned}$$

assim nós obtemos existência global em t para as aproximações $(\mathbf{u}_m, \tau_m)$ e também:

- $\mathbf{u}_m$ é limitada em $L^2(0, T; V)$,
- τ_m é limitada em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,
- $m \int_0^T |\mathbf{u}_m - P_{K_1} \mathbf{u}_m|_2^2 dt \leq C_1$,
- $m \int_0^T |\tau_m - P_{K_2} \tau_m|_2^2 dt \leq C_2$

onde C_i , $i = 1, 2$ são constantes independentes de m .

Pelas duas últimas desigualdades concluímos também que

$$\mathbf{u}_m - P_{K_1} \mathbf{u}_m \rightarrow 0 \text{ na topologia forte de } L^2(Q_T)^3,$$

$$\tau_m - P_{K_2} \tau_m \rightarrow 0 \text{ na topologia forte de } L^2(Q_T).$$

Assim, podemos concluir que existe $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e existem subsequências de $\{\mathbf{u}_m\}$ e $\{\tau_m\}$, as quais denotaremos pelos mesmos índices, tais que

$$\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u} \text{ fracamente em } L^2(0, T; V) \text{ e fraca-estrela em } L^\infty(0, T; H),$$

$$\tau_m \rightarrow \tau \text{ fracamente em } L^2(0, T; H_0^1) \text{ e fraca-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora, necessitamos usar o Lema 5.3 (de compacidade). Para isto, mostraremos estimativas para as seqüências $\{\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\}$ e $\{\frac{d\tau_m}{dt}\}$.

Consideraremos os seguintes operadores:

$$\langle A_\nu(\mathbf{u}, \tau), \mathbf{v} \rangle = (\nu(\tau + S)\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}),$$

$$\langle D(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$\langle E(\tau), \mathbf{v} \rangle = (\tau \mathbf{g}, \mathbf{v}),$$

$$\langle F_m(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = m(Q^1(u), \mathbf{v}).$$

Agora, seguindo como em Lions p. 76 [39], consideremos a projeção ortogonal P_m de $L^2(\Omega)^3$ sobre o auto-espço gerado por $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$. Observamos que devido a escolha da base $\{\mathbf{v}_k\}$, o operador P_m pertence a $L(V, V)$ com norma $|P_m|_{L(V, V)} \leq 1$ e como $P_m^* = P_m$ (onde P_m^* é definido por $\langle P_m^* \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, P_m \mathbf{w} \rangle$), segue por transposição que $|P_m^*|_{L(V^*, V^*)} \leq 1$. Notemos, usando o fato de $P_m^* \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_m}{dt}$, que vale a seguinte igualdade:

$$\frac{d\mathbf{u}_m}{dt} = -P_m^*(A_\nu(\mathbf{u}_m, \tau_m) + D(\mathbf{u}_m) + E(\tau_m + S) + F_m(\mathbf{u}_m)) \text{ em } V^*.$$

Consideremos as seguintes estimativas:

$$\bullet \quad |A_\nu(\mathbf{u}_m, \tau_m)|_{V^*} \leq \nu_1 |\nabla \mathbf{u}_m|_2,$$

- $|D(\mathbf{u}_m)|_{V^*} \leq C |\nabla \mathbf{u}_m|_2,$
- $|E(\tau_m)|_{V^*} \leq C |\mathbf{g}|_4 |\nabla \tau_m|_2,$

e ainda,

$$\begin{aligned} \int_0^T |F_m(\mathbf{u}_m)| dt_{V^*} &= \int_0^T \sup_{|v|_V \leq 1} |m(Q^1(u), \mathbf{v})|_2 dt \\ &\leq \sup_{|v|_V \leq 1} \int_0^T |mQ^1(u)|_2 dt |\nabla \mathbf{v}|_2 dt. \end{aligned}$$

Como $m \int_0^T |\mathbf{u}_m - P_{K_1} \mathbf{u}_m|_2^2 dt \leq C_1$ segue por Hölder que

$$m \int_0^T |\mathbf{u}_m - P_{K_1} \mathbf{u}_m|_2 dt \leq C.$$

De forma similar, podemos provar estimativas análogas para $\{\frac{d\theta_m}{dt}\}$. Agora, pelo Lema 5.3, segue que $\{\mathbf{u}_m\}$ e $\{\tau_m\}$ são relativamente compactas em $L^2(0, T; H)$ e $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ respectivamente. Portanto existem subsequências de $\{\mathbf{u}_m\}$ e $\{\tau_m\}$ respectivamente, as quais denotaremos pelos mesmos símbolos, tais que $\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}$ fortemente em $L^2(0, T; H)$ e $\tau_m \rightarrow \tau$ fortemente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Com essas convergências, as convergências fortes de $\mathbf{u}_m - P_{K_1} \mathbf{u}_m$ e $\tau_m - P_{K_2} \tau_m$ em $L^2(0, T; H)$ e $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ respectivamente para zero e ainda usando o fato que

$$\int_0^T |\mathbf{u}_m - P_{K_1} \mathbf{u}_m - \mathbf{u} + P_{K_1} \mathbf{u}|^2 dt \leq 4 \int_0^T |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty,$$

concluimos que $\mathbf{u} - P_{K_1} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\tau - P_{K_2} \tau = 0$ e portanto $(\mathbf{u}(t), \tau(t)) \in K_1 \times K_2$.

Como $K_1 \times K_2$ é um convexo fechado contido em $V \times H_0^1(\Omega)$, é possível escolhermos uma sequência $\{\gamma_k(t), \sigma_k(t)\}$ densa em $K_1 \times K_2$ com $(\gamma_k(T), \sigma_k(T)) = (\mathbf{0}, 0)$. Substituindo $\mathbf{v}_k$ por $\gamma_k(t) - \mathbf{u}_m(t)$ e ϕ_k por $\sigma_k(t) - \tau_m(t)$ em (5.21) e (5.22) respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \gamma_k - \mathbf{u}_m \right) &= (\operatorname{div} (\nu(\tau_m + S) \nabla \mathbf{u}_m), \gamma_k - \mathbf{u}_m) \\ &= -((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m, \gamma_k - \mathbf{u}_m) + (\alpha(\tau_m + S) \mathbf{g}, \gamma_k - \mathbf{u}_m) \\ &\quad - m(Q^1 \mathbf{u}_m, \gamma_k - \mathbf{u}_m) \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\tau_m}{dt}, \sigma_k - \tau_m\right) &= (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla\tau_m), \sigma_k - \tau_m) \\
&\quad + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla\tau_m, \sigma_k - \tau_m) + m(Q^2\tau_m, \sigma_k - \tau_m) \\
&= -\left(\frac{dS}{dt}, \sigma_k - \tau_m\right) + (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla S), \sigma_k - \tau_m) \\
&\quad - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \sigma_k - \tau_m).
\end{aligned}$$

Como $m(Q^1\mathbf{u}_m, \gamma_k - \mathbf{u}_m) \leq 0$ e $m(Q^2\tau_m, \sigma_k - \tau_m) \leq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \gamma_k - \mathbf{u}_m\right) &- (\operatorname{div}(\nu(\tau_m + S)\nabla\mathbf{u}_m), \gamma_k - \mathbf{u}_m) \\
&+ ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla)\mathbf{u}_m, \gamma_k - \mathbf{u}_m) - (\alpha(\tau_m + S)\mathbf{g}, \gamma_k - \mathbf{u}_m) \geq 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d\tau_m}{dt}, \sigma_k - \tau_m\right) - (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla\tau_m), \sigma_k - \tau_m) + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla\tau_m, \sigma_k - \tau_m) \\
&\geq -\left(\frac{dS}{dt}, \sigma_k - \tau_m\right) + (\operatorname{div}(k(\tau_m + S)\nabla S), \sigma_k - \tau_m) - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \sigma_k - \tau_m).
\end{aligned}$$

Agora, fazendo um procedimento análogo ao que foi feito na formulação variacional,

obtemos:

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \left(\frac{d\gamma_k}{dt}, \mathbf{u}_m\right) dt &+ \int_0^T ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla)\mathbf{u}_m, \gamma_k) dt \\
&\geq -\int_0^T (\nu(\tau_m + S)\nabla\mathbf{u}_m, \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)) dt + \int_0^T (\alpha(\tau_m + S)\mathbf{g}, \gamma_k - \mathbf{u}_m) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} |\gamma_k(0) - \mathbf{u}_m(0)|_2^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_m(T)|_2^2,
\end{aligned}$$

e para a equação da temperatura obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\frac{d\sigma_k}{dt}, \sigma_k - \tau_m\right) dt &+ \int_0^T (\mathbf{u}_m \cdot \nabla\tau_m, \sigma_k - \tau_m) dt \\
&\geq -\int_0^T (k(\tau_m + S)\nabla\sigma_k, \nabla(\sigma_k - \tau_m)) dt - \int_0^T \left(\frac{dS}{dt}, \sigma_k - \tau_m\right) dt \\
&\quad - \int_0^T (k(\tau_m + S)\nabla S, \nabla(\sigma_k - \tau_m)) dt - \int_0^T (\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \sigma_k - \tau_m) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} |\sigma_k(0) - \tau_m(0)|_2^2 + \frac{1}{2} |\tau_m(T)|_2^2.
\end{aligned}$$

Agora, para mostrarmos a existência da solução fraca do sistema como na Definição 5.6, basta passarmos o limite em m . A convergência segue por causa dos seguintes fatos:

Para mostrarmos que $\int_0^T (\frac{d\gamma_k}{dt}, \mathbf{u}_m) dt \rightarrow \int_0^T (\frac{d\gamma_k}{dt}, \mathbf{u}) dt$ quando $m \rightarrow \infty$, primeiro usamos que

$$\int_0^T (\frac{d\gamma_k}{dt}, \mathbf{u}_m) dt - \int_0^T (\frac{d\gamma_k}{dt}, \mathbf{u}) dt \leq \left| \frac{d\gamma_k}{dt} \right|_{L^2(0,T;L^2)} |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_{L^2(0,T;L^2)}$$

a convergência segue da convergência forte de $\mathbf{u}_m$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Para mostrarmos que $\int_0^T ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m, \gamma_k) dt \rightarrow \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \gamma_k) dt$ quando $m \rightarrow \infty$, primeiro usamos o fato de

$$\int_0^T ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m, \gamma_k) dt = - \int_0^T ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \gamma_k, \mathbf{u}_m) dt \quad (5.29)$$

em seguida observamos que

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \gamma_k, \mathbf{u}_m) &= ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \gamma_k, \mathbf{u}) \\ &= (((\mathbf{u}_m - \mathbf{u}) \cdot \nabla) \gamma_k, \mathbf{u}_m) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \gamma_k, \mathbf{u}_m - \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

agora, usando a estimativa de Hölder, obtemos:

$$(((\mathbf{u}_m - \mathbf{u}) \cdot \nabla) \gamma_k, \mathbf{u}_m) \leq |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_2 |\nabla \gamma_k|_{\frac{3}{2}} |\mathbf{u}_m|_6 \quad (5.31)$$

e ainda

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \gamma_k, \mathbf{u}_m - \mathbf{u}) \leq |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_2 |\nabla \gamma_k|_{\frac{3}{2}} |\mathbf{u}_m|_6 \quad (5.32)$$

a convergência segue de (5.29)-(5.32), do fato que $\nabla \gamma_k \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ e da convergência forte de $(\mathbf{u}_m)$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Uma outra questão complicada, por causa da não linearidade é mostrarmos que $\int_0^T ((\nu(\tau_m + S) \nabla \mathbf{u}_m, \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)) dt \rightarrow \int_0^T ((\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}, \nabla(\gamma_k - \mathbf{u})) dt$ quando $m \rightarrow \infty$,

para isto, notemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^T ((\nu(\tau_m + S) \nabla \mathbf{u}_m, \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)) - ((\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}, \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}))) dt \\
 = \int_0^T ((\nu(\tau_m + S) - \nu(\tau + S)) \nabla \mathbf{u}_m, \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)) dt \\
 + \int_0^T (\nu(\tau + S) \nabla(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}), \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)) dt \\
 + \int_0^T (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}, \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m)) dt \\
 = I + II + III
 \end{aligned}$$

Para mostrarmos a convergência de I para zero, usamos a desigualdade de Hölder e o teorema do valor médio, isto é,

$$|(\nu(\tau_m + S) - \nu(\tau + S))| \leq C |\tau_m - \tau|_2,$$

obtendo

$$\begin{aligned}
 \int_0^T ((\nu(\tau_m + S) - \nu(\tau + S)) \nabla \mathbf{u}_m, \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)) dt \\
 \leq \int_0^T \sup_{\Omega} |\nu(\tau_m + S) - \nu(\tau + S)| |\nabla \mathbf{u}_m|_2 |\nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)|_2 dt \\
 \leq C |\tau_m - \tau|_{L^2(0,T;L^2)} (|\nabla \mathbf{u}_m|_{L^2(0,T;L^2)} + |\nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)|_{L^2(0,T;L^2)})
 \end{aligned}$$

a convergência para zero segue por causa da convergência forte de $\tau_m - \tau$ em $L^2(0, T; L^2)$.

O termo II converge para zero por causa que $\nu(\tau + S) \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)$ é limitada em $H^{-1}(\Omega)$,

$$(\nu(\tau + S) \nabla(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}), \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m)) = (\nabla(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}), \nu(\tau + S) \nabla(\gamma_k - \mathbf{u}_m))$$

e $\nabla(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})$ é fracamente convergente. O termo III segue analogamente.

Para obtermos o resultado desejado, usamos o argumento de densidade para substituir $(\gamma_k(t), \sigma_k(t))$ por qualquer $(\gamma(t), \sigma(t))$ em $K_1 \times K_2$ na desigualdade variacional.

5.4 Solução muito fraca

Partindo da formulação forte, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T ((-\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{u}) - (\operatorname{div}(\nu(\tau + S)\nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}))dt \\ \geq \int_0^T (\alpha(\tau + S)\mathbf{g}, \mathbf{v} - \mathbf{u})dt - \frac{1}{2} |\mathbf{v}(0) - \mathbf{u}(0)|_2^2, \end{aligned} \quad (5.33)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T ((-\frac{d\psi}{dt}, \tau) - (\operatorname{div}(k(\tau + S)\nabla \tau), \psi - \tau) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \psi))dt \\ \geq \int_0^T ((-\frac{dS}{dt}, \psi - \tau) + (\operatorname{div}(k(\tau + S)\nabla S), \psi - \tau))dt \\ - \int_0^T (\mathbf{u} \cdot \nabla S, \psi - \tau)dt - \frac{1}{2} |\psi(0) - \tau(0)|_2^2. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Definição 5.9 Dizemos que $(\mathbf{u}, \tau)$ é uma solução muito fraca do sistema variacional (5.15)-(5.16), se $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $\tau \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $(\mathbf{u}(t), \tau(t)) \in K_1 \times K_2$ e verificam as condições (5.33)-(5.34) para todo par $(\mathbf{v}, \psi) \in \Phi \times \Psi$ com $(\mathbf{v}(t), \psi(t)) \in K_1 \times K_2$, $(\mathbf{v}(T), \psi(T)) = (0, 0)$ para quase todo $t \in [0, T]$.

Observação 5.10 Se $(\mathbf{u}, \tau)$ é uma solução muito fraca, então a boa regularidade desta solução não pode nos garantir que $(\mathbf{u}, \tau)$ seja uma solução fraca porque os termos $\frac{1}{2} |\mathbf{u}(T)|_2^2$ e $\frac{1}{2} |\tau(T)|_2^2$ respectivamente estão ausentes.

5.5 Solução com a propriedade de reprodução

A seguir, vamos especificar a noção de solução reprodutiva. Seja X um espaço de Banach onde consideramos a equação de evolução

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = A(t, \mathbf{U}) \quad (5.35)$$

com a condição inicial $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$. Dizemos que (5.35) tem a propriedade reprodutiva em t_0 , se podemos encontrar $\mathbf{U}_0 \in X$ tal que $\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0$. Dizemos então que $\mathbf{U}(t)$ é uma solução reprodutiva de (5.35) e $\mathbf{U}_0$ é um valor inicial reprodutivo em t_0 . Em [31], Kaniel e Shinbrot provam soluções reprodutivas fracas para as equações de Navier-Stokes, i.e., soluções com a propriedade reprodutiva em T ou seja $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}(T)$. Nós observamos que a propriedade reprodutiva é uma generalização da noção de periodicidade, i.e., soluções que satisfazem $\mathbf{U}(t+w) = \mathbf{U}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo w o seu período. Observamos que toda solução periódica é reprodutiva, mas a recíproca não se verifica necessariamente, salvo se tivermos regularidade da solução.

Considere os seguintes espaços funcionais:

$$L_\pi^p(0, T; X) = \{\mathbf{u} \in L^p(0, T; X); \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}(T, x) \text{ em } \Omega\}$$

onde X é um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$,

$$\begin{aligned} \Phi_\pi &= \{\varphi \in L^2(0, T; V) \cap L_\pi^2(0, T; H); \\ \frac{d\varphi}{dt} &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap L^1(0, T; V^*) \text{ e } \nabla \varphi \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_\pi &= \{\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L_\pi^2(0, T; L^2(\Omega)); \\ \frac{d\psi}{dt} &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; H_0^{-1}(\Omega)) \text{ e } \nabla \psi \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))\}. \end{aligned}$$

Definição 5.11 Dizemos que $(\mathbf{u}, \tau)$ definida sobre $[0, T] \times \Omega$ é uma solução reprodutiva forte do sistema (5.15)-(5.16) se verificam o sistema variacional (5.15)-(5.16), $(\mathbf{u}, \tau) \in \Phi_\pi \times \Psi_\pi$ e $(\mathbf{u}(t), \tau(t)) \in K_1 \times K_2$ para todo $t \in [0, T]$, satisfazendo as condições iniciais

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \tau(0, x) = \tau_0(x),$$

e as condições de fronteiras

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tau = 0 \text{ sobre } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Observação 5.12 *Notemos que as condições iniciais para $(\mathbf{u}, \tau)$ tem sentido, porque se $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ e $\tau \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; V^*)$ e $\frac{d\tau}{dt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, então $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$ e $\tau \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Provar a existência de solução reprodutiva forte continua em aberto. Então, nós procuramos relaxar a formulação variacional do nosso problema e definimos o conceito de solução fraca. Nossa principal meta é estudar a existência de soluções reprodutivas fracas para o sistema (5.15)-(5.18) no sentido da formulação variacional que obteremos a seguir.*

5.6 Formulação reprodutiva fraca

Integrando em (5.15) de 0 até T , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt &= \int_0^T \left(\operatorname{div} (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt \\ &\geq - \int_0^T \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt + \int_0^T (\alpha(\tau + S) \mathbf{g}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) dt \end{aligned}$$

somemos nesta última desigualdade a quantidade $\int_0^T \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt$ nos dois lados da desigualdade, obtendo:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{u} \right) dt &= \int_0^T \left(\operatorname{div} (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \right) dt \\ &\geq - \int_0^T \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) dt + \int_0^T (\alpha(\tau + S) \mathbf{g}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) dt \end{aligned} \quad (5.36)$$

com $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, $\mathbf{u}(t) \in K_1$, para toda $\mathbf{v} \in \Phi$, $\mathbf{v}(t) \in K_1$.

Com procedimento análogo para a inequação (5.16), obtemos:

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \left(\frac{d\psi}{dt}, \tau \right) dt &= \int_0^T \left(\operatorname{div} (k(\tau + S) \nabla \tau), \psi - \tau \right) dt \\
 &\geq - \int_0^T (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \psi) dt - \int_0^T \left(\frac{dS}{dt}, \psi - \tau \right) dt \\
 &\quad + \int_0^T \left(\operatorname{div} (k(\tau + S) \nabla S), \psi - \tau \right) dt - \int_0^T (\mathbf{u} \cdot \nabla S, \psi - \tau) dt.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Definição 5.13 Dizemos que $(\mathbf{u}, \tau)$ definida sobre $[0, T] \times \Omega$ é uma solução reprodutiva fraca do sistema (5.15)-(5.16) se verificam o sistema variacional (5.36)-(5.37), $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^2_\pi(0, T; H)$, $\tau \in L^2(0, T; H_0^1) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2_\pi(0, T; L^2(\Omega))$, $(\mathbf{u}(t), \tau(t)) \in K_1 \times K_2$ para quase todo $t \in [0, T]$, satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \tau(0, x) = \tau_0(x),$$

e as condições de fronteiras

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tau = 0 \text{ sobre } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Teorema 5.14 Se $g \in L^2(0, T; L^4(\Omega))$, então existe uma solução fraca do sistema (5.15)-(5.16) com a propriedade de reprodução no tempo:

$$\mathbf{u}(T, x) = \mathbf{u}_0(x), \tau(T, x) = \tau_0(x) \text{ em } \Omega.$$

Demonstração: Em busca de nosso objetivo de mostrarmos existência de solução reprodutiva fraca global, aproveitaremos as estimativas feitas neste capítulo.

Usando a desigualdade de Poincaré, em (5.28), segue que

$$\frac{d}{dt} (|\mathbf{u}_m|_2^2 + |\tau_m|_2^2) + \gamma_1 (|\mathbf{u}_m|_2^2 + |\tau_m|_2^2) + m((Q^1 \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + (Q^2 \tau_m, \tau_m)) \leq F(t)$$

e usando os fatos que $m((Q^1 \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + (Q^2 \tau_m, \tau_m)) \geq 0$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} (e^{\gamma_1 t} (|\mathbf{u}_m|_2^2 + |\tau_m|_2^2)) \leq e^{\gamma_1 t} F(t),$$

integrando de 0 até T segue que

$$e^{\gamma_1 T} (|\mathbf{u}_m|_2^2 + |\tau_m|_2^2) \leq (|\mathbf{u}_m(0)|_2^2 + |\tau_m(0)|_2^2) + \int_0^T e^{\gamma_1 t} F(t) dt.$$

Vamos denotar por $\mathbf{z}_m(t)$ o vetor $(\mathbf{u}_m(t), \tau_m(t))$ e sua norma $\|\mathbf{z}_m(t)\|^2 = |\mathbf{u}_m(t)|_2^2 + |\tau_m(t)|_2^2$, portanto

$$e^{\gamma_1 T} \|\mathbf{z}_m(T)\|^2 \leq \|\mathbf{z}_m(0)\|^2 + \int_0^T e^{\gamma_1 t} F(t) dt.$$

Se nós definirmos a aplicação $L^m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ como

$$L^m(t) = (c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t), d_{1m}(t), \dots, d_{mm}(t))$$

onde as coordenadas (c_{im}) e (d_{im}) são definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m &= \sum_{k=1}^m c_{km}(t) \mathbf{v}_k \\ \tau_m &= \sum_{k=1}^m d_{km}(t) \phi_k \end{aligned}$$

desde que as bases escolhidas formam um sistema ortonormal completo segue que

$$|L^m(t)|_{\mathbb{R}^{2m}} = \|\mathbf{z}_m(t)\|.$$

Agora definimos a aplicação $\Gamma^m : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ e para um dado $L_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ segue que $\Gamma^m(L_0) = L^m(T)$, onde $L^m(t)$ corresponde a solução do problema (5.21)-(5.22) (veja o apêndice) com valor inicial correspondente para L_0 . Segue por dependência contínua sobre os dados iniciais que Γ^m é contínua (veja [41]). Para usarmos o Teorema do ponto fixo de Brouwer, devemos mostrar que para qualquer $\lambda \in [0, 1]$, uma possível solução da equação $L_0^m(\lambda) = \lambda \Gamma^m(L_0^m(\lambda))$ é limitada independente de λ (para mais detalhes do Teorema do ponto fixo de Brouwer veja [24]).

Desde que $L_0^m(0) = 0$, resta mostrarmos para $\lambda \in (0, 1]$. Pela definição de Γ^m

$$e^{\gamma_1 T} \left| \frac{L_0^m(\lambda)}{\lambda} \right|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 = e^{\gamma_1 T} |\Gamma^m(L_0^m(\lambda))|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 \leq |L^m(t)|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 + \int_0^T e^{\gamma_1 t} F(t) dt$$

e portanto

$$\left| \frac{L_0^m(\lambda)}{\lambda} \right|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 \leq \frac{\int_0^T e^{\gamma t} F(t) dt}{e^{\gamma T} - 1} = N$$

esta limitação é independente de $\lambda \in [0, 1]$ e além disso notamos que

$$\Gamma^m(L_0^m(1)) = L_0^m(1),$$

correspondendo a existência de uma solução $(\mathbf{u}_m, \theta_m)$, satisfazendo $\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_m(T)$ e $\theta_m(0) = \theta_m(T)$. Além disso, temos $|\mathbf{u}_m(0)|_2^2 + |\tau_m(0)|_2^2 = |L_0^m(1)|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 \leq N$ a qual não depende de m .

Agora, a demonstração segue fazendo um procedimento análogo ao que foi feito quando mostramos a existência da solução fraca (Definição 5.6). ■

Apêndice A

Sistemas de Galerkin

As equações de Boussinesq generalizada descrevem em primeira aproximação a convecção termicamente induzida em fluidos com viscosidades e condutividade térmica dependentes da própria temperatura. Os termos não lineares aparecem por causa da viscosidade, coeficiente de condutividade térmica e dos termos de convecção $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ e advecção $\mathbf{u} \cdot \nabla\theta$.

Vamos considerar o sistema Boussinesq generalizado, dado pelo modelo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (\nu(\theta) \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \pi - \alpha \theta \mathbf{g} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (\chi(\theta) \nabla \theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 \text{ em } \Omega \quad (\text{A.3})$$

e com condições iniciais e de bordo:

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.4})$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x) \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (\text{A.6})$$

$$\theta(t, x) = T(t, x) \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (\text{A.7})$$

Onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado em uma direção. Nós assumimos que as funções ν e χ , são funções de classe $C^1(\mathbb{R})$, satisfazendo:

$$0 < \nu_0 \leq \nu(\zeta) \leq \nu_1$$

$$0 < \chi_0 \leq \chi(\zeta) \leq \chi_1$$

para toda $\zeta \in \mathbb{R}$.

Fazendo a mudança de variável $\tau = \theta - S$, S dado pelo Lema 5.2, nós podemos reescrever o sistema (A.1)-(A.7) da forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (\nu(\tau + S) \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \pi + \alpha(\tau + S) \mathbf{g}, \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \operatorname{div} (\chi(\tau + S) \nabla \tau) + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau = -\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} (\chi(\tau + S) \nabla S) - \mathbf{u} \cdot \nabla S, \quad (\text{A.10})$$

com as condições iniciais e de fronteira:

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x) \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.11})$$

$$\tau(0, x) = \tau_0(x) = \theta_0(x) - S_0(x) \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (\text{A.13})$$

$$\tau(t, x) = 0 \text{ em } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (\text{A.14})$$

Vamos considerar agora as auto-funções $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \dots\}$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_m, \dots\}$ dos operadores de Stokes e Laplaciano respectivamente e V_m, W_m os auto-espacos gerados por $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ respectivamente. Desde que V é denso em H , $H^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e $(\mathbf{u}_0, \tau_0) \in H \times L^2(\Omega)$, é possível encontrar $\mathbf{u}_{0m} \in V_m$ tal que $\mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}_0$ em H e $\tau_{0m} \in W_m$ tal que $\tau_{0m} \rightarrow \tau_0$ em $L^2(\Omega)$.

Definição A.1 Dizemos que o par $\{\mathbf{u}_m, \tau_m\}$ é uma m -ésima solução aproximada do sistema de Boussinesq generalizado (A.8)-(A.14), se $\mathbf{u}_m \in C^1([0, T]; V_m)$, $\tau_m \in C^1([0, T]; W_m)$

e verificam o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \mathbf{v} \right) &= (\operatorname{div} (\nu(\tau_m + S)\nabla \mathbf{u}_m), \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \\ &= (\alpha(\tau_m + S)\mathbf{g}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in W_m, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau_m}{dt}, \phi \right) &= (\operatorname{div} (k(\tau_m + S)\nabla \tau_m), \phi) + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \tau_m, \phi) \\ &= -\left(\frac{dS}{dt}, \phi \right) + (\operatorname{div} (k(\tau_m + S)\nabla S), \phi) \\ &= (\mathbf{u}_m \cdot \nabla S, \phi) \quad \forall \phi \in W_m \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

e com condições iniciais $\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}$ e $\tau_m(0) = \tau_{0m}$ em Ω .

Observação A.2 Para obtermos as seqüências $\mathbf{u}_{0m}$ e τ_{0m} basta tomarmos:

$$\mathbf{u}_{0m} = \operatorname{proj}_{V_m} \mathbf{u}_0,$$

$$\tau_{0m} = \operatorname{proj}_{W_m} \tau_0$$

isto é, $\mathbf{u}_{0m} \in V_m$ e $\tau_{0m} \in W_m$ tais que

$$(\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{v})_{L^2} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_{L^2} \quad \forall \mathbf{v} \in V_m,$$

$$(\tau_{0m}, \phi)_{L^2} = (\tau_0, \phi)_{L^2} \quad \forall \phi \in W_m$$

com esta escolha, as seqüências satisfazem $|\mathbf{u}_{0m}|_2 \leq |\mathbf{u}_0|_2$ e $|\tau_{0m}|_2 \leq |\tau_0|_2$.

Linerização do problema aproximado

Vamos admitir que encontramos-nos na m -ésima etapa do processo de aproximação. Por uma questão de simplificação de notação, omitiremos o sub-índice m .

A seguir, com o objetivo de acharmos uma m -ésima solução aproximada do sistema de Boussinesq generalizado, vamos dividir o problema original em dois problemas mais simples.

Problema em $\mathbf{u}$

Dado $\theta \in C([0, T]; W_m)$, queremos resolver o seguinte problema:

Achar $\mathbf{u} \in C^1([0, T], V_m)$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} \right) - \left(\operatorname{div} (\nu(\theta + S) \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} \right) + \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\ = \left(\alpha(\theta + S) \mathbf{g}, \mathbf{v} \right) \quad \forall \mathbf{v} \in V_m \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

com a condição inicial $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_{0m}(x)$ em Ω .

Para encontrarmos uma solução $\mathbf{u}$ de (A.17), procedemos da seguinte forma: definimos

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{j=1}^m f_j(t) \mathbf{v}_j(x). \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.18) em (A.17) e escrevendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k, k = 1, 2, \dots, m$, chegamos a conclusão de que $\mathbf{u}$ é uma solução de (A.17) se e somente se $\{f_j\}_{j=1}^m \in C^1([0, T])$ e verificam o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{df_k}{dt} + \sum_{j=1}^m b_{kj}(t) f_j(t) + \sum_{j,l=1}^m b_{kjl} f_j(t) f_l(t) = b_k(t) \quad (\text{A.19})$$

com condições iniciais dadas por $f_k(0) = (\mathbf{u}_{0m}(x), \mathbf{v}_k), k = 1, 2, \dots, m$. Onde os coeficientes são definidos por

$$\begin{aligned} b_{kj}(t) &= (\nu(\theta(t) + S(t)) \nabla \mathbf{v}_j, \nabla \mathbf{v}_k), \\ b_{kjl} &= \sum_{i,p=1}^3 \int_{\Omega} v_{ji} (D_i v_{lp}) v_{kp} dx, \\ b_k(t) &= (\alpha(\theta(t) + S(t)) \mathbf{g}, \mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Pelos resultados da teoria clássica de equações diferenciais ordinárias, existe uma única solução do problema em $\mathbf{u}$.

Problema em τ

Dado $\theta \in C([0, T]; W_m)$ e $\mathbf{w} \in C([0, T], V_m)$, queremos resolver o seguinte problema:

Achar $\tau \in C^1([0, T], W_m)$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dt}, \phi\right) - (\operatorname{div}(k(\theta + S)\nabla\tau), \phi) + (\mathbf{w} \cdot \nabla\tau, \phi) \\ = -\left(\frac{dS}{dt}, \phi\right) + (\operatorname{div}(k(\theta + S)\nabla S), \phi) \quad (\text{A.20}) \\ -(\mathbf{w} \cdot \nabla S, \phi) \quad \forall \phi \in W_m. \end{aligned}$$

e com a condição inicial $\tau(0, x) = \tau_{0m}(x)$ em Ω .

Para encontrarmos uma solução τ de (A.20), procedemos da seguinte forma: definimos

$$\tau(x, t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) \phi_j(x). \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.21) em (A.20) e escrevendo $\phi = \phi_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, chegamos a conclusão de que τ é uma solução de (A.20) se e somente se $\{h_j\}_{j=1}^m \in C^1([0, T])$ e verificam o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dh_k}{dt} + \sum_{j=1}^m b_{kj}^1(t) h_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{kj}^2 h_j(t) = b_k^3(t) \quad (\text{A.22})$$

com condições iniciais dadas por $h_k(0) = (\tau_{0m}(x), \phi_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Onde os coeficientes são definidos por

$$\begin{aligned} b_{kj}^1(t) &= (\chi(\theta(t) + S(t)) \nabla \phi_j, \nabla \phi_k), \\ b_{kj}^2 &= (\mathbf{w}(t) \cdot \nabla \phi_j, \phi_k), \\ b_k^3(t) &= -\left(\frac{dS}{dt}, \phi_k\right) - (\chi(\theta(t) + S(t)) \nabla S(t), \nabla \phi_k) - (\mathbf{w}(t) \cdot \nabla S(t), \phi_k). \end{aligned}$$

Novamente, pelos resultados da teoria clássica de equações diferenciais ordinárias, existe uma única solução do problema em τ .

Estimativas das soluções aproximadas linearizadas

Seja $\theta \in C([0, T]; W_m)$ dado e $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; V_m)$ a solução obtida resolvendo o problema em $\mathbf{u}$ e para essa solução obtida nós resolvemos o problema em τ .

Agora, escolhendo em (A.17) $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t) \in V_m$ e em (A.20) escolhemos $\phi = \tau(t) \in W_m$ nós podemos obter:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|_2^2 + \nu_0 |\nabla \mathbf{u}|_2^2 = (\alpha(\theta + S)\mathbf{g}, \mathbf{u})$$

e também

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tau|_2^2 + \chi_0 |\nabla \tau|_2^2 = -\left(\frac{dS}{dt}, \tau\right) + (\chi(\theta + S)\nabla S, \nabla \tau) - (\mathbf{u} \cdot \nabla S, \tau),$$

usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|_2^2 + \nu_0 |\nabla \mathbf{u}|_2^2 \leq C(|\nabla \theta|_2^2 + |\nabla S|_2^2) |\mathbf{g}|_3 + |\mathbf{g}|_3 |\mathbf{u}|_2^2 \quad (\text{A.23})$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tau|_2^2 + \frac{\chi_0}{2} |\nabla \tau|_2^2 = C\left(\left|\frac{dS}{dt}\right|_{H^{-1}} + |\nabla S|_2^2 + |\nabla \mathbf{u}|_2^2 |S|_3^2\right) \quad (\text{A.24})$$

Vamos supor que θ é limitada em $C([0, T]; W_m)$ então, integrando em (A.23) de 0 à t e usando o Lema de Gronwall, concluímos que

$$|\mathbf{u}(t)|_2^2 + \nu_0 \int_0^t |\nabla \mathbf{u}(s)|_2^2 ds \leq C,$$

onde C é uma constante independente de m . Agora da expressão (A.18) e da ortonormalidade de $\mathbf{v}_j$ segue que

$$\sum_{j=1}^m |f_j(t)|^2 \leq |\mathbf{u}(t)|_2^2 \leq C \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{A.25})$$

onde a constante C independe de m , isto implica que $\mathbf{u}$ é limitada em $C([0, T]; V_m)$.

Por outro lado, usando (A.25) em (A.19) segue que $\frac{df_j}{dt}$ é limitada em $C([0, T])$, $j = 1, 2, \dots, m$. Se nós usarmos novamente (A.18) segue que $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ é limitada em $C([0, T]; V_m)$.

Como $\mathbf{u}$ é limitada em $C([0, T]; V_m)$ e $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ é limitada em $C([0, T]; V_m)$, concluímos que para θ limitada em $C([0, T]; W_m)$ segue que $\mathbf{u}$ é limitada em $C^1([0, T]; V_m)$. Com raciocínio análogo, nós podemos mostrar que τ é limitada em $C^1([0, T]; W_m)$.

Aplicando o Teorema do ponto fixo de Schauder

Agora, dados $(\theta, \mathbf{w})$ limitados em $C([0, T]; W_m) \times C([0, T]; V_m)$, isto é, existe uma constante C tal que $\max\{|\theta|_{C([0, T]; W_m)}, |\mathbf{w}|_{C([0, T]; V_m)}\} \leq C$, vimos que as respectivas soluções $\mathbf{u}$ e τ dos problemas em $\mathbf{u}$ e do problema em τ são limitadas em $C^1([0, T]; V_m)$ e $C^1([0, T]; W_m)$ respectivamente, isto é, existe uma constante C_1 tal que:

$$\max\{|\tau|_{C^1([0, T]; W_m)}, |\mathbf{u}|_{C^1([0, T]; V_m)}\} \leq C_2.$$

Vamos chamar de B a bola fechada em $C([0, T]; W_m) \times C([0, T]; V_m)$ de raio C e B_1 a bola fechada em $C^1([0, T]; W_m) \times C^1([0, T]; V_m)$ de raio C_1 . Vamos definir a aplicação

$$(\theta, \mathbf{w}) \in B \subset C([0, T]; W_m) \times C([0, T]; V_m) \rightarrow (\tau, \mathbf{u}) \in B_1 \subset C^1([0, T]; W_m) \times C^1([0, T]; V_m)$$

por dependência contínua sobre os parâmetros e dados iniciais é fácil de provar que essa aplicação é contínua. Pelo teorema de Ascoli-Arzelà, B_1 se injeta em $C([0, T]; W_m) \times C([0, T]; V_m)$ de forma compacta e portanto fica bem definida a aplicação

$$(\theta, \mathbf{w}) \in B \subset C([0, T]; W_m) \times C([0, T]; V_m) \rightarrow (\tau, \mathbf{u}) \in B \subset C([0, T]; W_m) \times C([0, T]; V_m)$$

e esta aplicação é contínua e compacta. Como B é um convexo fechado e limitado do espaço de Banach $C([0, T]; W_m) \times C([0, T]; V_m)$, podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Schauder. Chamando de $(\tau_m, \mathbf{u}_m)$ tal ponto fixo, segue $(\tau_m, \mathbf{u}_m)$ forma uma m -ésima solução aproximada do sistema de Boussinesq generalizado e por construção temos que

$$(\tau_m, \mathbf{u}_m) \in C^1([0, T]; W_m) \times C^1([0, T]; V_m).$$

Bibliografia

- [1] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Beirão da Veiga, H., *A new regularity class for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$* , Chin. Ann. of Math., 16B: **4** (1995), 407-412.
- [3] Beirão da Veiga, H., *Concerning the regularity of the solutions to the Navier-Stokes equations via the truncation method*, Part I, Differential and integral Equations, **10** (1997), 1149-1156.
- [4] Beirão da Veiga, H., *On the smoothness of a class of weak solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech., **2** (2000), 315-323.
- [5] Bernardi, C. Métivet, B., Pernaud-Thomas, B., *Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur le modèle et son approximation par éléments finis*, M^2AN , **29** (1995), 871-921.
- [6] Berselli, L., *Sufficient conditions for the regularity of the solutions of the Navier-Stokes Equations*, Math. Meth. Appl. Sci., **22** (1999), 1079-1085.
- [7] Berselli, L.C., *A note on the regularity of the weak solution of the Navier-Stokes equations in the whole space $\mathbb{R}^n$* , pre-printer, (2000).
- [8] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1987.

-
- [9] Calderón, A. P. and Zygmund, A., *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math, **88** (1952), 85-139.
- [10] Chae, D. and Lee, J., *Regularity criterion in terms of pressure for the Navier-Stokes equations*, pre-printer (2000).
- [11] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover, New York, 1981.
- [12] Cheng He, *The Cauchy problem for the Navier-Stokes equations*, J. Math. Anal. Appl., **209** (1997), 228-242.
- [13] Cheng He, Ling Hsiao, *The Decay of Strong Solutions for Navier-Stokes Equations*, J. Math. Anal. Appl., **268** (2002), 417-425.
- [14] Coddington, E.A., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [15] Conca, C., *Étude d'un fluide traversant une paroi perforée II. Comportement limite loin de la paroi*, J. Math. Pures et Appl., **66**(1987), 45-69.
- [16] Conca, C., *Stokes equations with non-smooth data*, Rev. Mat. Aplic., **10** (1989), 115-122.
- [17] Conca, C., Murat, F., Pironneau, O., *The Stokes and Navier-Stokes equations with boundary conditions involving the pressure.*, Japan. J. Math., **20** (1994), 279-318.
- [18] Constantin, P. and Foias, C., *Navier-Stokes Equations*, Chicago Lectures in Mathematics, 1988.

- [19] Drazin. P.G. and Reid, W.H., *Hidrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 1981.
- [20] Galdi, G.P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Springer, Vol 1, 1994.
- [21] Giga, Y., *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Diff. Eq., **62** (1986), 186-212.
- [22] Giga, Y., Miyakawa, T., *Solutions in L_r of the Navier-Stokes Initial Value Problem*, Arch. Rational Mech. Anal., **89** (1985) , 267-281.
- [23] Gil, M.I., *Solvability of a system of stationary Boussinesq equations*, Differential Equations, **27** (1991), 1377-1382.
- [24] Gilbarg D., Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [25] Graham, A., *Shear patterns in a unstable layer of air*, Phil. Trans. Royal Soc. A **232** (1933), 285-296.
- [26] Heywood, J.G., *On Uniqueness Questions in the theory of Viscous Flow*, Acta Math., **136** (1976), 61-102.
- [27] Heywood, J.G. and Walsh, O.D., *A counter-example concerning the pressure in the Navier-Stokes, as $t \rightarrow 0^+$* , P.J. Math., **164** (1994), 351-359.
- [28] Hishida, T., *Existence and regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem*, Funkcialy Ekvaciy, **34** (1991), 449-474.
- [29] Joseph, D.D., *Stability of Fluid Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

- [30] Kaniel, S. and Shinbrot, M., *Smoothness of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **24** (1967), 302-324.
- [31] Kaniel, S. and Shinbrot, M., *A reproductive property of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **24** (1967), 363-369.
- [32] Kaniel, S., *A sufficient conditions for smoothness of solutions of Navier-Stokes equations*, Israel J. Math., **6** (1968), 354-358.
- [33] Kato, T., *Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in R^n , with applications to weak solutions*, Math. Z., **187** (1984), 471-480.
- [34] Korenev, N.K., *On some problems of convection in a viscous incompressible fluid*, Vestnik Leningrand Univ. math., **4** (1977), 125-137.
- [35] Kuraev, G.N., *The problem of stationary free convection with non-linear boundary conditions*, USSR Comp. Maths. Math. Phys., **18** (1979), 263-270.
- [36] Ladyzhenskaya, O.A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second edition. Gordon and Breach, New York, 1969.
- [37] Lieb, E.H., Loss, M., *Analysis*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Second edition, 2001.
- [38] Lions, J.L., Magenes, E., *Problèmes aux limites non-homogènes et applications*, Vol **1** and **2**, Dunod, Paris, 1968.
- [39] Lions, J.L., *Quelques Méthodes de Resolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

-
- [40] Lorca, S.A., Boldrini, J.L., *The initial value problem for a generalized Boussinesq model: regularity and global existence of strong solutions*, Mat., Cont., **11** (1996), 71-94.
- [41] Lorca, S.A., Boldrini, J.L., *The initial value problem for a generalized Boussinesq model*, Nonlinear Analysis, **36** (1998), 457-480.
- [42] Marusič-Paloka, E., *Solvability of the Navier-Stokes system with L^2 boundary data*, Appl. Math. Optim. **41**(03) (2000), 365-375.
- [43] Mikhlin, S.G., *Fourier integral and singular multiple integral*, Vestnik Leningrad. Univ. **7**(1957), 143-155.
- [44] Morimoto, H., *On the existence and uniqueness of the stationary solution to the equations of natural convection*, Tokyo J. Math. **14** (1991), 218-226.
- [45] Morimoto, H., *Nonstationary Boussinesq equations*, J. Fac. Sci., Univ Tokyo, Sect., IA Math., **39** (1992), 61-75.
- [46] Nečas, J., *L'application de l'égalité de Rellich sur les systèmes elliptiques du deuxième ordre*, J. Math. pures appl. **44** (1965), 133-147.
- [47] Ōeda, K., *Stationary solutions of the heat convection equations in exterior domains*, Proc. Japan Acad. **73** (1997), Ser. A, 111-115.
- [48] Ōeda, K., *Remarks on the periodic solution of the heat convection equation in a perturbed annulus domain*, Proc. Japan Acad., **73** (1997) Ser. A, 21-25.
- [49] O'Leray, M., *Pressure conditions for the local regularity of solutions of the Navier-Stokes equations*, EJDE, **1998** (1998), 1-9.

- [50] Palm, E., *On the tendency towards hexagonal cell in steady convection*, J. Fluid Mech., **8** (1960), 183-192.
- [51] Rabinowitz, P.H., *Existence and non uniqueness of rectangular solutions of the Bénard convection*, Arch. Rat. Mech. Anal., **29** (1968), 32-57.
- [52] Rojas-Medar, M.A., Lorca, S.A., *The equation of a viscous incompressible chemical active fluid I: uniqueness and existence of the local solutions*, Rev. Mat. Apl., **16** (1995), 57-80.
- [53] Rojas-Medar, M.A., Lorca, S.A., *The equation of a viscous incompressible chemical active fluid II: regularity of solutions*, Rev. Mat. Apl., **16** (1995), 81- 95.
- [54] Rojas-Medar, M.A., Lorca, S.A., *Global strong solution of the equations for the motion of a chemical active fluid*, Matemática Contemporânea, **8** (1995), 319-335.
- [55] Rojas-Medar, M.A., Rojas-Medar, M.D., Moretti, A.C., *Reproductive Weak solutions for generalized Boussinesq models in exterior domains*, pre-printer.
- [56] Serre, D., *Equations de Navier-Stokes stationnaires avec données peu régulières*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **10** (1983), 543-559.
- [57] Serrin, J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **9** (1962), 187-195.
- [58] Simon, J., *Non-homogeneous viscous incompressible fluids: Existence of velocity, density and pressure*, Siam J. Math. Anal., **21** (1990), 1093-1117.
- [59] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

-
- [60] Temam, R., *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, Rev. Edit., 1979.
- [61] von Toppelkirch, H., *Über Konvektionszellen insbesondere im flüssigen Schwefel*, Beiträge Phys. Atmos., **20** (1956), 37-54.
- [62] von Wahl, W., *The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations*, Aspects of Math., Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, **58** (1985).
- [63] Zarubin, A.G., *The problem of stationary free convection*, USSR Comp. Maths. Math. Phys., **8** (1968), 265-272.
-