Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Sobre a Função de Mittag-Leffler

por

Danilo Castro Rosendo

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Sobre a Função de Mittag-Leffler

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Danilo Castro Rosendo** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 7 de maio de 2008.

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Prof.Dr. Hamilton Germano Pavão
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

Rosendo, Danilo Castro

R724s Sobre a função de Mittag-Leffler / Danilo Castro Rosendo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira

Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções hipergeométricas. 2. Funções de Mittag-Leffler. 3. Cálculo fracionário. 4. Oscilador harmônico fracionário. I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: On the Mittag-Leffler function.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Hypergeometric function. 2. Mittag-Leffler function. 3. Fractional calculus. 4. Fractional harmonic oscillator.

Área de concentração: Funções especiais

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Hamilton Germano Pavão (DFI/CCET/UFMS)
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 07/05/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 07 de maio de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____
Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

____
Prof. (a). Dr (a). HAMILTON GERMANO PAVÃO

Ary O. Chiacchio
____
Prof. (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

A minha mãe Deuzimar.

Agradecimentos

Agradeço com honras a meu amigo e orientador Edmundo Capelas de Oliveira pela sugestão, exemplo e constante orientação para a conclusão desta dissertação.

A Deus por ter me dado forças, todos os dias, para continuar na busca do conhecimento.

A meus pais, Antônio José e Deuzimar Castro, pelo amor e incentivo na vida, dando forças para continuar estudando.

A professora Sueli Costa por ter acreditado em mim e pelo apoio na minha vinda para a Unicamp-SP.

Aos meus professores Carlile, Vera, Edson, Sandra e Plínio pelas boas aulas lecionadas.

A meus amigos Vinícius Farias, José Marão, mas em especial a Felix Silva por ter sempre me apoiado nas horas de estudos e de problemas pessoais.

A todos os meus familiares, em especial a Deuzuita Castro, Helena Borralho, Maria Helena, Dayanne Castro e Júnior pelo amor e carinho que têm por mim.

Aos meus amigos do laboratório de matemática, em especial a João, Cristiano, Nolmar, Celso e Alan.

A Rubens Camargo pela contribuição na elaboração deste trabalho.

Aos meus colegas de turma do mestrado em especial a Remi, Ubiran, Filardes, Heron, Bosco, Adão, Osciram, Alexandre, Gilson, Waléria, André, Hilkias Jordão e Jackson pelo constante apoio.

Resumo

Neste trabalho abordamos um estudo da equação diferencial ordinária, linear, homogênea de segunda ordem com três singularidades regulares, incluindo uma no infinito de onde obtivemos a equação hipergeométrica e, através do método de Frobenius, introduzimos a função hipergeométrica com singularidade na origem. Por um conveniente processo de limite na equação hipergeométrica obtivemos a equação hipergeométrica confluente, bem como a função hipergeométrica confluente. Apresentamos a função de Mittag-Leffler como uma generalização da função exponencial e suas relações com outras funções, em especial com a função hipergeométrica confluente. Abordamos o conceito de integral e derivada de ordens fracionárias de algumas funções conhecidas. Atráves da metodologia da transformada de Laplace discutimos uma equação diferencial fracionária com coeficientes constantes de onde emergem as funções de Mittag-Leffler. Por fim, definimos as equações diferenciais fracionárias e, como aplicação, efetuamos um estudo sistemático do oscilador harmônico fracionário.

Palavras chaves: funções hipergeométricas, função de Mittag-Leffler, integral fracionária, derivada fracionária, oscilador harmônico fracionário.

Abstract

This work presents an introductory study of a second order, linear and homogeneous, ordinary differential equation with three singular regular points, including a singularity at the infinity. We obtain the hypergeometric equation and, by means of the Frobenius method, we introduce the hypergeometric function which is regular at the origin. By a convenient limit process we obtain the confluent hypergeometric equation which has the confluent hypergeometric function as a regular solution at the origin. We introduce the Mittag-Leffler function as a generalization of the exponential function and present a relation with the confluent hypergeometric function. Finally, we present the so-called fractional ordinary differential equation and as an application we discuss the fractional harmonic oscillator.

Key Words: hypergeometric function, Mittag-Leffler function, fractional integral, fractional derivative, fractional harmonic oscillator.

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vi**

Abstract **vii**

Introdução **1**

1 Função Hipergeométrica **3**

1.1 Equação diferencial ordinária com três pontos singulares 4

1.2 Equação hipergeométrica 9

1.3 A função hipergeométrica 11

1.4 Representação integral para a função hipergeométrica 15

1.5 Função hipergeométrica confluente 17

1.6 Representação integral da função confluente 20

2 A Função de Mittag-Leffler **21**

2.1 As funções $E_\alpha(x)$ e $E_{\alpha,\beta}(x)$ 21

2.2 A função gama incompleta 25

2.3 A função erro 27

2.4 A transformada de Laplace e a função de Mittag-Leffler 29

2.5 Generalizações da função de Mittag-Leffler 33

3 Cálculo Fracionário **34**

3.1 Abordagens históricas 34

3.2 Classes de funções 38

3.3 A integral fracionária 39

3.4 A derivada fracionária 47
3.4.1 A formulação de Riemann-Liouville 47
3.4.2 A derivada segundo Caputo 49
3.4.3 A transformada de Laplace 50

4 Equação Diferencial de Ordem Arbitrária 52
4.1 Introdução 52
4.2 Equação diferencial fracionária homogênea 55
4.3 O oscilador harmônico fracionário 60

Perspectivas Futuras 66

A Funções Gama e Beta 68
A.1 A função gama 68
A.2 A função beta 70

B Magnus Gösta Mittag-Leffler 72

Referências Bibliográficas e Comentários 74

Introdução

O estudo das equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais, é material de estudo da Análise, um dos grandes ramos da Matemática. Conforme é sabido, várias destas equações diferenciais emergem da modelagem matemática de fenômenos naturais, estudo este, em geral, delegado ao ramo da Matemática que atende pelo nome de Matemática Aplicada.

Iniciamos o Capítulo 1 estudando as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares, de um maneira geral, com três pontos singulares regulares incluindo um no infinito. Atráves do método de Frobenius discutimos a equação diferencial hipergeométrica também conhecida como equação de Gauss, cujas soluções são chamadas de funções hipergeométricas. Por um conveniente processo de limite, ou seja, a confluência de duas singularidades na equação diferencial hipergeométrica, introduzimos a equação hipergeométrica confluente cujas soluções são as funções hipergeométricas confluentes. Explicitamos as representações integrais para essas funções.

No Capítulo 2 introduzimos a função de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros complexos, e mostramos relações com a função gama incompleta e com a função erro através da função hipergeométrica confluente. Algumas relações de recorrência e propriedades da função de Mittag-Leffler são discutidas. Por conseguinte, a transformada de Laplace da função de Mittag-leffler é explicitada. Uma generalização para a função de Mittag-Leffler é apresentada.

Algumas abordagens históricas do cálculo fracionário são expostas no Capítulo 3. Caracterizamos duas classes de funções: a classe de Riemann e a classe de Liouville. Introduzimos o conceito de integral fracionária de Riemann-Liouville além de estudar algumas propriedades e teoremas importantes. A metolodogia da transformada de Laplace é discutida no contexto da integral de Riemann-Liouville. Discutimos a diferença entre o conceito de derivada fracionária no sentido de Caputo e a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

Uma simples abordagem das equações diferenciais fracionárias é encontrada no Capítulo 4, onde resolvemos o problema de um oscilador harmônico simples em termos da função de Mittag-Leffler e observamos que sua amplitude é variável com o tempo, isso devido sua ordem ser fracionária.

Dois apêndices concluem o trabalho. No apêndice A apresentamos um estudo introdutório das funções gama e beta, bem como discutimos algumas de suas propriedades visto que elas aparecem no texto tanto em conexão com as funções hipergeométricas confluentes quanto com as funções de Mittag-Leffler.

No apêndice B mencionamos algumas passagens importantes do matemático M. G. Mittag-Leffler, isto é, um pequeno retrato de sua vida.

Capítulo 1

Função Hipergeométrica

Existe uma classe de funções que, em geral, se apresenta como solução de uma equação diferencial que modela problemas advindos de vários ramos da ciência, as chamadas funções especiais.

Por esse motivo, iniciamos nosso trabalho, neste capítulo, estudando as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares, de uma maneira geral, com três pontos singulares regulares, incluindo um ponto no infinito, através do método de Frobenius. Essa equação será conduzida a uma equação diferencial ordinária conhecida pelo nome de equação hipergeométrica, cujas soluções são as chamadas funções hipergeométricas[1]. Através de um conveniente processo de limite, efetuado sobre as equações hipergeométricas, obtemos a chamada equação hipergeométrica confluente, cujas soluções são chamadas de funções hipergeométricas confluentes.[2]

Concluímos o capítulo apresentando uma representação integral tanto para a função hipergeométrica quanto para a função hipergeométrica confluente.

[1] Existem várias funções especiais, casos particulares das funções hipergeométricas, que têm nomes especiais: Legendre, Jacobi, Gegenbauer e Tchebichef, dentre outras.

[2] Algumas funções especiais, casos particulares das funções hipergeométricas confluentes, não abordadas neste trabalho, são: as funções de Kummer, de Wittaker, de Hermite, de Laguerre, dentre outras.

1.1 Equação diferencial ordinária com três pontos singulares

A forma mais geral de uma equação diferencial ordinária, homogênea, linear e de segunda ordem para a função $u(x)$ é

$$a(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + b(x)\frac{du(x)}{dx} + c(x)u(x) = 0 \tag{1.1}$$

com $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ funções analíticas nas vizinhanças de um ponto x_0 pertencente a um intervalo aberto I.

Se $a(x_0) \neq 0$, então x_0 é chamado ponto ordinário da equação diferencial. Introduzimos as funções $P(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ e $Q(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}$, analíticas nas vizinhanças de x_0 e que admitem um desenvolvimento em série de Taylor (1685-Brook Taylor-1731) [3] na vizinhança de x_0.

Se $a(x_0) = 0$ então x_0 é ponto singular da equação e as funções $P(x)$ e $Q(x)$ têm singularidade em $x = x_0$ [5]. Esse ponto singular será um ponto singular regular ou uma singularidade não essencial se $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)P(x)$ e $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2Q(x)$ forem finitos. Por outro lado, x_0 será um ponto singular irregular ou uma singularidade essencial se pelo menos um destes limites não for finito.

O método de Frobenius (1849-Ferdinand Georg Frobenius-1917) [3] é aplicável quando a singularidade é regular, casos que aparecem em problemas de Física e Engenharia, e que será o único caso a ser discutido neste trabalho.

Seja x_0 um ponto singular regular. Dividindo a equação (1.1) por $a(x)$, obtemos[3]

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + P(x)\frac{du(x)}{dx} + Q(x)u(x) = 0. \tag{1.2}$$

Existe uma relação entre as propriedades das funções $P(x)$ e $Q(x)$ que aparecem na equação (1.2) e as propriedades das soluções desta equação. A equação (1.2) terá singularidade nos pontos do plano complexo onde $P(x)$ e $Q(x)$ possuem singularidades [4]. Os pontos nos quais $P(x)$ e $Q(x)$ são funções analíticas

[3] Sem perda de generalidade, tomamos $x_0 = 0$, pois pode-se sempre substituir $x - x_0 \Rightarrow x$.

são chamados pontos ordinários da equação. Os pontos em que essas funções apresentam singularidade são pontos singulares da equação diferencial (1.2).

Vamos estudar a equação (1.2) com três pontos singulares regulares $x = x_1$, $x = x_2$ e $x = x_3$. Para isso acontecer é necessário e suficiente que $P(x)$ tenha pólos simples nos três pontos x_1, x_2 e x_3 e que $Q(x)$ tenha pólos de ordem menor ou igual a dois nesses pontos [4].

Além disso, exigimos momentaneamente que o ponto no infinito seja ordinário. Para assegurar esse fato, realizamos a mudança de variável[4] $x = 1/w$ na equação (1.2). Calculando as derivadas, temos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dw}\frac{dw}{dx} = \frac{du}{dw}(-w^2) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dw^2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{d^2w}{dx^2}\frac{du}{dw} = \frac{d^2u}{dw^2}w^4 + 2w^3\frac{du}{dw}. \tag{1.4}$$

Substituindo esses resultados na equação (1.2), obtemos

$$\frac{d^2u}{dw^2} + \overline{P(w)}\frac{du}{dw} + \overline{Q(w)}u = 0, \tag{1.5}$$

onde

$$\overline{P(w)} = \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}P(1/w) \tag{1.6}$$

$$\overline{Q(w)} = \frac{1}{w^4}Q(1/w). \tag{1.7}$$

Assim, o infinito será um ponto ordinário se, e somente se, existirem os limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\overline{P(1/x)}$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\overline{Q(1/x)},$$

e forem finitos.

Para que $P(x)$ tenha pólo simples em x_1, x_2 e x_3, escrevemos

$$P(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + D \tag{1.8}$$

onde A, B, C e D são constantes, sendo D=0 e $A + B + C = 2$ [4].

[4] w tendendo para o infinito implica x tendendo para zero.

Para que $Q(x)$ tenha pólo em x_1, x_2 e x_3 menor ou igual a dois tem-se

$$Q(x) = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}\left(\frac{E}{x-x_1} + \frac{F}{x-x_2} + \frac{G}{x-x_3}\right) \tag{1.9}$$

onde E, F e G são constantes.

Como já estão definidos $P(x)$ e $Q(x)$, vamos usar o método de Frobenius para encontrar as soluções da equação (1.2) na forma de uma série, em torno das singularidades x_1, x_2 e x_3. Suponhamos que as três soluções sejam da forma

$$u_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_i)^{n+s} \tag{1.10}$$

para i=1, 2, 3 e s é um parâmetro. Antes de substituir a série (1.10) na equação (1.2) vamos reescrever as funções $P(x)$ e $Q(x)$ numa forma conveniente. Primeiro $P(x)$ na forma

$$P(x) = \frac{F_i(x)}{(x-x_i)}, \tag{1.11}$$

onde $F_i(x)$ é uma função a determinar, para i=1, 2, 3. Vamos introduzir para $Q(x)$ a forma

$$Q(x) = \frac{G_i(x)}{(x-x_i)^2} \tag{1.12}$$

onde $G_i(x)$ tem que ser determinado, para i=1, 2, 3. Agora vamos calcular $F_i(x)$ e $G_i(x)$, para i=1, 2, 3. Então, substituindo a equação (1.8) na equação (1.11) e isolando $F_i(x)$ no primeiro membro, temos que:

$$F_i(x) = \frac{A(x-x_i)}{x-x_1} + \frac{B(x-x_i)}{x-x_2} + \frac{C(x-x_i)}{x-x_3} = P(x)(x-x_i). \tag{1.13}$$

Fazendo i=1, 2, 3, na equação (1.13), e depois substituindo $x = x_1$, $x = x_2$ e $x = x_3$, temos, respectivamente,

$$F_1(x_1) = A, \tag{1.14}$$

$$F_2(x_2) = B, \tag{1.15}$$

$$F_3(x_3) = C. \tag{1.16}$$

Agora substituindo a equação (1.9) na equação (1.12), temos que

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \frac{(x-x_i)^2}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}\left(\frac{E}{x-x_1}+\frac{F}{x-x_2}+\frac{G}{x-x_3}\right) \\ &= Q(x)(x-x_i)^2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Fazendo i=1, 2, 3, na equação (1.17) e depois substituindo $x = x_1$, $x = x_2$ e $x = x_3$, temos, respectivamente:

$$G_1(x_1) = \frac{E}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \tag{1.18}$$

$$G_2(x_2) = \frac{F}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \tag{1.19}$$

$$G_3(x_3) = \frac{G}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \tag{1.20}$$

Como cada uma das funções $F_i(x)$ e $G_i(x)$ são analíticas com $i = 1, 2, 3$ podemos expandir em série de Taylor, em torno do ponto $x = x_i$, então

$$F_i(x) = F_i(x_i)+F_i'(x_i)(x-x_i)+\frac{F_i''(x_i)(x-x_i)^2}{2!}+\frac{F_i^{(3)}(x_i)(x-x_i)^3}{3!}+\cdots \tag{1.21}$$

$$G_i(x) = G_i(x_i)+G_i'(x_i)(x-x_i)+\frac{G_i''(x_i)(x-x_i)^2}{2!}+\frac{G_i^{(3)}(x_i)(x-x_i)^3}{3!}+\cdots \tag{1.22}$$

Vamos encontrar $u_i'(x)$ e $u_i''(x)$ a partir da equação (1.10) e substituir na equação (1.2), logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)(n+s-1)(x-x_i)^{n+s-2} + P(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)(x-x_i)^{n+s-1} \\ +Q(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_i)^{n+s} = 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Substituindo as equações (1.11) e (1.12) na equação (1.23), obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s-1)(n+s)(x-x_i)^{n+s-2} + \\ &\left(\frac{F_i(x_i)+F_i'(x_i)(x-x_i)+...}{(x-x_i)}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)(x-x_i)^{n+s-1} + \\ &\left(\frac{G_i(x_i)+G_i'(x_i)(x-x_i)+...}{(x-x_i)^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_i)^{n+s} = 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Rearranjando os termos na equação (1.24) e expandindo os primeiros termos do somatório temos

$$a_0\left[s(s-1)+F_i(x_i)s+G_i(x_i)\right](x-x_i)^{s-2}+$$
$$a_1\left[(1+s)s+F_i(x_i)(1+s)+G_i(x_i)\right](x-x_i)^{s-1}+$$
$$a_0\left[F_i'(x_i)s+G'(x_i)\right](x-x_i)^{s-1}+\ldots=0.$$

O fator que multiplica o termo de menor expoente, quando igualado a zero, nos conduz à chamada equação indicial com $a(x_0)\neq 0$, de onde segue-se

$$s(s-1)+F_i(x_i)s+G_i(x_i)=0, \tag{1.25}$$

para i=1, 2, 3. A equação (1.25), para cada um dos i, é tal que:

$$s^2+\left[F_1(x_1)-1\right]s+G_1(x_1)=0, \tag{1.26}$$

$$s^2+\left[F_2(x_2)-1\right]s+G_2(x_2)=0, \tag{1.27}$$

$$s^2+\left[F_3(x_3)-1\right]s+G_3(x_3)=0. \tag{1.28}$$

Resolvendo essas equações e sabendo que a equação (1.26) tem raízes α e α', a equação (1.27) tem raízes β e β' e a equação (1.28) tem raízes γ e γ', então das equações (1.26), (1.27) e (1.28), temos:

$$\alpha+\alpha'=1-A$$
$$\alpha\alpha'=\frac{E}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},$$
$$\beta+\beta'=1-B$$
$$\beta\beta'=\frac{F}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)},$$
$$\gamma+\gamma'=1-C$$
$$\gamma\gamma'=\frac{G}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Substituindo esses valores nas equações (1.8) e (1.9), obtemos, respectivamente,

$$P(x)=\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-x_1}+\frac{1-\beta-\beta'}{x-x_2}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{x-x_3},$$

e

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \left[\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}\right]\left\{\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\alpha\alpha'}{x-x_1}+\right.\\
&+ \left.\frac{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\beta\beta'}{x-x_2}+\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\gamma\gamma'}{x-x_3}\right\}.
\end{aligned}
$$

Substituindo $P(x)$ e $Q(x)$ na equação (1.2), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dx^2}+\left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-x_1}+\frac{1-\beta-\beta'}{x-x_2}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{x-x_3}\right]\frac{du}{dx}+\\
&+\left[\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}\right]\left\{\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\alpha\alpha'}{x-x_1}+\right.\\
&\left.\frac{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\beta\beta'}{x-x_2}+\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\gamma\gamma'}{x-x_3}\right\}u=0. \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

com a restrição $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$ que decorre da exigência de que o ponto $x=\infty$ seja um ponto ordinário da equação diferencial dada. Essa equação é chamada de equação de Riemann (1826-Georg Friedrich Bernhard Riemann-1866). Sua solução pode ser representada pelo símbolo P de Riemann-Papperitz (1857-Freiberg Erwin Papperitz-1938):

$$
u(x) = P\left\{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} \qquad (1.30)
$$

onde x_1, x_2 e x_3 são os pontos singulares e α α'; β β' e γ γ' são as respectivas raízes das equações indiciais e na última coluna temos a variável independente.

1.2 Equação hipergeométrica

Para resolver a equação de Riemann que contém nove parâmetros diferentes, três pontos singulares e as seis raízes das equações indiciais, com a restrição $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$, vamos utilizar uma transformação de modo a reduzir a três parâmetros independentes. Vamos introduzir a transformação na variável dependente na forma

$$
u(x) = (x-x_1)^{-r}(x-x_2)^{-s}(x-x_3)^{-t}v(x) \qquad (1.31)
$$

com r+s+t=0 e uma mudança na variável independente

$$x' = \frac{\overline{A}x + \overline{B}}{\overline{C}x + \overline{D}} \tag{1.32}$$

onde $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ e $\overline{D}$ são constantes a determinar. A primeira transformação muda as raízes das equações indiciais nas três singularidades. Substituindo a equação (1.30) na equação (1.31), e isolando $v(x)$, temos que

$$v(x) = P\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \alpha + r & \beta + s & \gamma + t & x \\ \alpha' + r & \beta' + s & \gamma' + t & \end{array}\right\}. \tag{1.33}$$

Os pontos singulares continuam os mesmos. Com a mudança de variável independente, é possível deslocar as três singularidades x_1, x_2 e x_3 para os pontos 0, 1 e ∞. Escolhendo r=$-\alpha$, s=γ+α e t=$-\gamma$, obtemos

$$u(x) = \left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{x - x_3}{x - x_2}\right)^{\gamma} P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha + \beta + \gamma & 0 & x' \\ \alpha' - \alpha & \alpha + \beta' + \gamma & \gamma' - \gamma & \end{array}\right\}. \tag{1.34}$$

Definindo os parâmetros a, b e c na forma

$$\alpha + \beta + \gamma = a$$

$$\alpha + \beta' + \gamma = b$$

$$1 + \alpha - \alpha' = c$$

e introduzindo-os na equação (1.34), obtemos

$$u(x) = \left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{x - x_3}{x - x_2}\right)^{\gamma} P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & x' \\ 1 - c & b & c - a - b & \end{array}\right\}. \tag{1.35}$$

A equação de Riemann, associada ao símbolo P da equação da equação (1.35), é

$$\frac{d^2v}{dx'^2} + \left\{\frac{c}{x' - 0} + \lim_{x_2' \to \infty}\left(\frac{1 - a - b}{x' - x_2'}\right) + \frac{1 - c + a + b}{x' - 1}\right\}\frac{dv}{dx'} +$$
$$\lim_{x_2' \to \infty}\left\{\frac{(0 - x_2')(0 - 1)(0)}{(x' - 0)^2(x' - x_2')(x - 1)} + \frac{(x_2' - 0)(x_2' - 1)ab}{(x' - 0)(x' - x_2')^2((x' - 1)}\right\} +$$
$$\lim_{x_2' \to \infty}\left\{\frac{(1 - 0)(1 - x_2')0}{(x' - 0)(x' - x_2')(x' - 1)^2}\right\} v = 0 \tag{1.36}$$

ou seja,

$$x'(1-x')\frac{d^2v}{dx'^2}+[c-(a+b+1)x']\frac{dv}{dx'}-abv=0, \tag{1.37}$$

de onde segue-se, voltando para a variável original

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{du}{dx}-abu=0. \tag{1.38}$$

Essa equação é chamada de equação hipergeométrica. Qualquer equação diferencial, linear de segunda ordem com três pontos singulares regulares, incluindo um ponto no infinito, pode ser colocada nessa forma.

1.3 A função hipergeométrica

A forma mais geral de uma equação diferencial ordinária, linear e homogênea de segunda ordem é dada pela equação (1.38). As singularidades dessa equação encontram-se nos pontos 0, 1 e ∞ e são regulares no sentido de Fuchs[5] e a equação admite soluções em séries de potências, dependendo dos parâmetros a, b e c. Considere-se as soluções para o caso da singularidade em $x=0$. A equação hipergeométrica é da forma

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{du}{dx}-abu=0, \tag{1.39}$$

com $u=u(x)$. Admitamos uma solução na forma de uma série de potências

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s} \tag{1.40}$$

com $a_0\neq 0$ e s sendo um parâmetro. Introduzindo esta série na equação (1.39), temos que

$$x(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}+$$
$$[c-(a+b+1)x]\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)x^{n+s-1}a_n-ab\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0.$$

[5]S. Hassani, **Fundations of Mathematical Physics**, Prentice-Hall International Editions, London, (1991).

Rearranjando, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1+c)x^{n+s-1}a_n - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s)(a+b+n+s)+ab\right]x^{n+s}a_n = 0.$$

Efetuando um deslocamento no índice do primeiro somatório para $n \to n+1$, temos

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+s+1)(n+s+c)x^{n+s}a_{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s)(a+b+n+s)+ab\right]x^{n+s}a_n = 0.$$

Expandindo o primeiro somatório até $n=0$, então

$$a_0(s)(-1+s+c)x^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s+1)(n+s+c)x^{n+s}a_{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s)(a+b+n+s)+ab\right]x^{n+s}a_n = 0. \tag{1.41}$$

Segue-se a equação indicial,

$$s(-1+s+c)a_0 \cdot x^{s-1} = 0. \tag{1.42}$$

Resolvendo essa equação algébrica temos dois valores $s=0$ e $s=1-c$. A chamada relação de recorrência toma a forma

$$a_{n+1} = \frac{(n+s)(a+b+n+s)+ab}{(n+s+1)(n+s+c)}\,a_n. \tag{1.43}$$

Fazendo $s=0$ na equação (1.43), vem

$$a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)}\,a_n. \tag{1.44}$$

Tomando valores para n natural, temos:

$$\begin{aligned}
n=0 \quad &\to \quad a_1 = \frac{ab}{c}\,a_0\\
n=1 \quad &\to \quad a_2 = \frac{(1+a)(1+b)}{2\cdot 1(1+c)}\cdot a_1 = \frac{a(1+a)\cdot b(1+b)}{2\cdot 1\cdot c(1+c)}\,a_0\\
n=2 \quad &\to \quad a_3 = \frac{(2+a)(2+b)}{3(2+c)}\cdot a_2 = \frac{a(1+a)(2+a)\cdot b(1+b)(2+b)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot c(1+c)(2+c)}\,a_0\\
&\quad\;\;\vdots\\
&\quad\;\; a_n = \frac{a(1+a)(2+a)\ldots(n+a-1)\cdot(b)(1+b)(2+b)(n+b-1)}{n!(c)(c+1)(c+2)\ldots(n+c-1)}\,a_0.
\end{aligned}$$

Introduzindo a notação

$$\begin{aligned}(a)_0 &= 1\\(a)_n &= a(1+a)(2+a)\ldots(a+n-1),\end{aligned} \tag{1.45}$$

chamado símbolo de Pochhammer (1841-Leo August Pochhammer-1920), podemos escrever

$$a_n = \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n! \cdot (c)_n}\, a_0 \tag{1.46}$$

A série de potências toma a forma, para $a_0 = 1$,

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n! \cdot (c)_n}\, x^n \tag{1.47}$$

ou ainda com a notação

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n! \cdot (c)_n}\, x^n \tag{1.48}$$

que é a função hipergeométrica ou função hipergeométrica de Gauss (1777-Johann Carl Friedrich Gauss-1855). Agora, fazendo $s = 1 - c$, e rearranjando, temos que

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{(n+1-c)(n+1-c+a+b)+ab}{(n+1+1-c)(n+1)}\, a_n,\\a_{n+1} &= \frac{[n+(2-c)-1][n+(2-c)-1+a+b]+ab}{(n+1)[n+(2-c)]}\, a_n.\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável $c' = 2 - c$ e reorganizando o numerador, temos

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{(n+c'-1)(n+c'-1+a+b)+ab}{(n+1)(n+c')}\, a_n,\\a_{n+1} &= \frac{(n+c'-1+a)(n+c'-1+b)}{(n+1)(n+c')}\, a_n.\end{aligned}$$

Introduzindo a notação $a' = 1 + a - c$ e $b' = 1 + b - c$, temos a forma

$$a_{n+1} = \frac{(n+a')(n+b')}{(n+1)(n+c')}\, a_n$$

Então, a segunda solução é, para $a_0 = 1$,

$${}_2F_1(a', b'; c'; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a')_n \cdot (b')_n}{n! \cdot (c')_n}\, x^n \tag{1.49}$$

voltando as suas variáveis originais, temos:

$$u_2(x) = x^{1-c}{}_2F_1(1+a-c; 1+b-c; 2-c; x).$$

A solução geral da equação hipergeométrica é dada por

$$u(x) = A_2F_1(a, b; c; x) + Bx^{1-c}{}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x), \tag{1.50}$$

visto que $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são linearmente independentes. A restrição $1-c \neq 0, 1, 2, 3, ...$ garante a solução geral. A e B são constantes a serem determinadas pelas condições do particular problema.

Vamos fazer uma análise para os valores que c pode admitir. Para $c = 0$, temos que

$$u(x) = A_2F_1(a, b; c; x) + Bx\,{}_2F_1(1+a, 1+b; 2; x)$$

onde ainda temos duas soluções linearmente independentes.

Se c é um inteiro qualquer, as soluções $u_1(x)$ e $u_2(x)$, definidas acima, não podem representar duas soluções linearmente independentes. Note que, para $c = 1$, então $u_2(x)$, toma a forma:

$$u_2(x) = {}_2F_1(a, b; 1; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a')_n \cdot (b')_n}{n! \cdot (1)_n}\, x^n \tag{1.51}$$

Aí, notamos que para $c = 1$, temos $u_1(x)$ e $u_2(x)$ duas soluções linearmente dependentes, isto é, não representam duas soluções diferentes para a equação hipergeométrica. Vamos agora considerar dois casos onde c é um número inteiro $(c \neq 1)$.

Para $c = k \geq 2$, o fator do denominador de cada termo da soma em $u_2(x)$ pode ser escrito na forma

$$(2-c)_n = (2-k)_n = (2-n)(3-n)...(-1)\cdots(-k+n+1)!$$

que contém o fator zero para todos os termos com $n \geq k-1$, de onde vemos que o denominador, em cada termo da série, em geral $u_2(x)$, não pode representar a solução da equação hipergeométrica para tais valores de c.

Se $c = -k \leq 0$, para $u_1(x)$ podemos escrever o fator no denominador de cada termo como

$$(c)_n = (-k)_n = (-k) \cdot (-k+1) ... (-1) \cdot (0) \cdot (n-k-1)!$$

que contém o zero no produto para todos os termos $n \geq k+1$. Conseqüentemente, o denominador em cada termo da série é zero e $u_1(x)$ não será solução.

Aplicando o teste da razão na série (1.47) encontramos os valores para os quais as soluções da equação hipergeométrica convergem. Sabendo que

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

então (a_n) converge, em $|x| < 1$.

1.4 Representação integral para a função hipergeométrica

A função hipergeométrica pode ser representada na forma da função gama[6] denotada por $\Gamma(x)$ que foi introduzida por Euler (1707-Leonhard Euler-1783), como uma possível generalização do fatorial, através da integral imprópria

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty t^\alpha \mathrm{e}^{-t} dt \tag{1.52}$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$. Para $\alpha = n$, onde $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ temos

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.53}$$

O símbolo de Pochhammer, expresso em termos da função gama é tal que

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

[6]Ver Apêndice A.

Uma função que também pode ser escrita em termos da função gama é a função beta[7] definida por

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \tag{1.54}$$

que está relacionada com a função gama através da expressão

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.55}$$

com $\mathrm{Re}(p) > 0$ e $\mathrm{Re}(q) > 0$.

Seja a função hipergeomética na representação em série de potências

$$_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n! \cdot (c)_n}\, x^n.$$

Representando o quociente $\dfrac{(b)_n}{(c)_n}$ em termos da função beta, temos

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\cdot\Gamma(c-b)}\, B(b+n, c-b).$$

Assim a função hipergeométrica [15] toma a forma

$$_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\cdot\Gamma(c-b)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \cdot B(b+n, c-b)\, x^n. \tag{1.56}$$

Usando a representação integral para $B(b+n, c-b)$, temos

$$B(b+n, c-b) = \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt,$$

que substituído na equação (1.56), fornece

$$_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\cdot\Gamma(c-b)} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt \right\} \frac{(a)_n}{n!}\, x^n.$$

A soma em n é uma expansão binomial, logo

$$_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\cdot\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt, \tag{1.57}$$

para $\mathrm{Re}(b) > 0$, $\mathrm{Re}(c-b) > 0$ e $|x| < 1$. Essa representação nos mostra a continuidade analítica da função hipergeométrica no plano complexo. Tomando $x = z$ um número complexo, a função é analítica na região $|\arg(1-z)| < \pi$.

[7] Ver Apêndice A.

1.5 Função hipergeométrica confluente

A função hipergeométrica

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{n! \cdot (c)_n}\, x^n $$

pode ser escrita na forma

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!(c)_n}\, x^n. $$

Introduzindo a mudança de variável $y = bx$, podemos escrever

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot 1\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\dots\left(1+\dfrac{n-1}{b}\right)}{n!(c)_n}\, y^n. $$

Tomando o limite $b \to \infty$, obtemos a seguinte função

$$ {}_1F_1(a;c;y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n}\, y^n. \tag{1.58} $$

Essa função foi obtida a partir da confluência de duas singularidades da função hipergeométrica, daí o nome de função hipergeométrica confluente.

A equação diferencial que a função (1.58) satisfaz é obtida através da mesma mudança de variável $y = bx$ introduzida na equação hipergeométrica

$$ x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + [c-(a+b+1)x]\frac{du}{dx} - abu = 0 $$

que toma a forma

$$ y\left(1-\frac{y}{b}\right)\frac{d^2u}{dy^2} + \left[c - (\frac{a+1}{b}+1)y\right]\frac{du}{dy} - au = 0. $$

Tomando o limite $b \to \infty$, temos a equação hipergeométrica confluente

$$ y\frac{d^2v}{dy^2} + (c-y)\,\frac{dv}{dy} - av = 0, \tag{1.59} $$

com $v = v(y)$. Nessa equação temos somente dois pontos singulares $y = 0$ que é um ponto singular regular, pois

$$ \lim_{y\to 0} \frac{y(c-y)}{y} = c $$

$$ \lim_{y\to 0} \frac{y^2(-a)}{y} = 0 $$

são finitos, sendo c uma constante, o que mostra que $y = 0$ é ponto singular regular. Para analisar o ponto $y = \infty$, efetuamos a mudança de variável $t = \dfrac{1}{y}$ e consideramos a singularidade em $t = 0$. Com esta mudança de variável, podemos escrever a equação (1.59), como

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{t + (2-c)t^2}{t^3}\right]\frac{du}{dt} - \left(\frac{a}{t^3}\right)u = 0$$

onde

$$\lim_{t\to 0} t\left(\frac{t + (2-c)t^2}{t^3}\right) = \infty,$$

ou seja, o ponto $y = \infty$ é singular irregular.

Agora vamos obter a solução da equação (1.59), aplicando novamente o método de Frobenius. Considere a função

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \tag{1.60}$$

onde s é um parâmetro a determinar e $a_0 \neq 0$. Introduzindo essa função na equação (1.59) com x no lugar de y, vem

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s-1+c)(n+s)\right]a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s+a)\right]a_n x^{n+s} = 0.$$

Desenvolvendo o primeiro somatório obtemos

$$(s-1+c)(s)a_0x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+s-1+c)(n+s)\right]a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+s+a)a_n x^{n+s} = 0.$$

A equação indicial é, com $a_0 \neq 0$,

$$(s-1+c)(s)a_0x^{s-1} = 0,$$

cujas raízes são $s = 0$ e $s = 1 - c$. Fazendo $n \to n+1$ no primeiro somatório temos, já rearranjando

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s+c)(n+s+1)a_{n+1} - (n+s+a)a_n\right]x^{n+s} = 0.$$

A relação de recorrência toma a forma

$$a_{n+1} = \frac{n+s+a}{(n+s+c)(n+s+1)}\, a_n.$$

Então, para $s = 0$, temos que

$$a_{n+1} = \frac{n+a}{(n+c)(n+1)}\, a_n. \tag{1.61}$$

Tomando valores para n natural, temos:

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad &\rightarrow \quad a_1 = \frac{a}{c}\, a_0 \\
n = 1 \quad &\rightarrow \quad a_2 = \frac{(1+a)}{2\cdot 1(1+c)}\, a_1 = \frac{a(1+a)}{2\cdot 1\cdot c(1+c)}\, a_0 \\
n = 2 \quad &\rightarrow \quad a_3 = \frac{(2+a)}{3(2+c)}\, a_2 = \frac{a(1+a)(2+a)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot c(1+c)(2+c)}\, a_0 \\
&\qquad\ \ \vdots \\
&\qquad\ \ a_n = \frac{a(1+a)(2+a)\ldots(n+a-1)}{n!(c)(c+1)(c+2)\ldots(n+c-1)}\, a_0
\end{aligned}$$

ou na forma

$$a_n = \frac{(a)_n}{n!(c)_n}\, a_0.$$

Substituindo esse resultado na função (1.60), temos

$$u_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n}\, x^n \tag{1.62}$$

ou ainda, para $a_0 = 1$,

$${}_1F_1(a;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n}\, x^n \tag{1.63}$$

chamada função hipergeométrica confluente. Essa função foi obtida pelo processo de limite na função hipergeométrica e resultou em (1.58). Aqui foi obtida através do processo limite na equação hipergeométrica, depois de aplicar o método de Frobenius.

Para $s = 1-c$, onde c é não inteiro, temos

$$a_{n+1} = \frac{(n+1+a-c)}{(n+1)(n-c+2)}\, a_0.$$

Introduzindo a mudança de variável $a' = 1 + a - c$ e $c' = 2 - c$, vem que

$$a_{n+1} = \frac{(n + a')}{(n + 1)(n + c')}_n\, a_0.$$

Comparando com a equação (1.61) temos

$$a_n = \frac{(1 + a - c)}{(2 - c)_n}\, a_0$$

onde, a segunda solução toma a forma, para $a_0 = 1$,

$$u_2(x) = {}_1F_1(1 + a - c; 2 - c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + a - c)_n}{n!(2 - c)_n}\, x^n \tag{1.64}$$

que é a segunda solução linearmente independente da equação hipergeométrica confluente. A solução geral da equação hipergeométrica confluente, somente no caso em que $1 - c$ é não inteiro é dada por

$$u(x) = A\,{}_1F_1(a; c; x) + Bx^{1-c}\,{}_1F_1(1 + a - c; 2 - c; x) \tag{1.65}$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

1.6 Representação integral da função confluente

A representação integral para a função hipergeométrica confluente é dada por

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \cdot \Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1}(1 - t)^{c-b-1}(1 - xt)^{-a} dt.$$

Introduzindo a mudança de variável, $y = bx$, temos que

$${}_2F_1(a, b; c; x/b) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \cdot \Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1}(1 - t)^{c-b-1} \left(1 - \frac{yt}{b}\right)^{-a} dt$$

e tomando o limite para $b \to \infty$ obtemos

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(c - a)} \int_0^1 \mathrm{e}^{xt} t^{a-1}(1 - t)^{c-a-1} dt \tag{1.66}$$

onde $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$.

Capítulo 2

A Função de Mittag-Leffler

O conhecimento da função de Mittag-Leffler é de grande valia no estudo das equações diferenciais fracionárias. A função de Mittag-Leffler pode ser interpretada como uma generalização da função exponencial. Abordamos, neste capítulo, a função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros complexos, bem como algumas relações de recorrência e propriedades. A relação entre a função hipergeométrica confluente e a função gama incompleta é apresentada, bem como expressa em termos da função erro, num particular caso do parâmetro. Enfim, apresentamos a transformada de Laplace (1749-Pierre Simon Laplace-1827) da função de Mittag-Leffler, bem como uma possível generalização destes resultados.

2.1 As funções $E_\alpha(x)$ e $E_{\alpha,\beta}(x)$

Em 1903, o matemático sueco Gosta Mittag-Leffler[1][13] introduziu uma função complexa dependendo de um parâmetro complexo α, com $\text{Re}(\alpha) > 0$, na forma de uma série

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(\alpha 1 + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(\alpha 2 + 1)} + \ldots + \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \ldots \tag{2.1}$$

que hoje é conhecida como função de Mittag-Leffler. Aqui, neste trabalho estamos considerando apenas o caso real, isto é, $x \in \mathbb{R}$. Na forma de somatório, podemos

[1]Ver Apêndice B.

escrever

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{2.2}$$

Essa função é uma generalização da função exponencial, isto é, com $\alpha = 1$ a função (2.2) reduz-se à função exponencial,

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \mathrm{e}^x = {}_1F_1(a; a; x)$$

sendo ${}_1F_1(a; a; x)$ a função hipergeométrica confluente, conforme introduzida no Capítulo 1, onde a é um numero inteiro não negativo.

Uma generalização da função de Mittag-Leffler foi proposta e estudada por Wiman [17] em 1905,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \tag{2.3}$$

com os dois parâmetros α e β ambos complexos, com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Essa função é conhecida como generalização da função de Mittag-Leffler ou função de Wiman ou ainda função de Mittag-Lefller com dois parâmetros. No caso em que $\beta = 1$, temos

$$E_{\alpha,1}(x) = E_\alpha(x),$$

ou seja, recuperamos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Uma outra possível generalização da função de Mittag-Leffler, pode ser dada pela seguinte expressão [10]

$$E_x(\alpha, c) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{\Gamma(1 + k + \alpha)}. \tag{2.4}$$

Essa função introduzida acima, é bastante importante pois é a integral fracionária da função exponencial[2]. Como casos particulares da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, podemos mencionar as funções seno e co-seno hiperbólicas, ou seja,

$$\begin{aligned} E_{2,1}(x^2) &= \cosh(x) \\ E_{2,2}(x^2) &= \frac{1}{x}\mathrm{senh}(x). \end{aligned}$$

[2]No Capítulo 3 será introduzida a definição de Riemann-Liouville para integrais fracionárias.

Agora, vamos encontrar uma relação de recorrência envolvendo a função (2.3). Derivando formalmente a função (2.3), em relação a x, temos

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{\Gamma(k\alpha+\beta)}. \tag{2.5}$$

Mudando o índice $k \to k+1$, vem que

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^{k}}{\Gamma\left((k+1)\alpha+\beta\right)}, \tag{2.6}$$

de onde, rearranjando, temos

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{\Gamma\left(k\alpha+\alpha+\beta\right)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k}}{\Gamma\left(k\alpha+\alpha+\beta\right)}. \tag{2.7}$$

Derivando $E_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$ e depois multiplicando por x, temos

$$x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\alpha+\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k}}{\Gamma\left(k\alpha+\alpha+\beta\right)}. \tag{2.8}$$

Substiuindo a relação (2.8) na equação (2.7), temos a seguinte relação de recorrência

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = E_{\alpha,\alpha+\beta}(x) + x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \tag{2.9}$$

Uma relação contígua envolvendo o parâmetro β é dada, na forma

$$\alpha\, x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = E_{\alpha,\beta-1}(x) + (1-\beta)E_{\alpha,\beta}(x), \tag{2.10}$$

que é fácil de ser demonstrada como vemos a seguir.

Temos

$$x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k}}{\Gamma(k\alpha+\beta)}. \tag{2.11}$$

Dividindo essa equação por α, e rearranjando, podemos escrever

$$\begin{aligned} x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha k\, x^{k}}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha+\beta-1+1-\beta}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\, x^{k} \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha+\beta-1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\, x^{k} + \frac{1-\beta}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade[3]

$$\frac{(x-1)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x-1)}$$

envolvendo a função gama, e introduzindo-a nessa expressão, temos

$$\begin{aligned} x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta-1)} + \frac{1-\beta}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha}E_{\alpha,\beta-1}(x) + \frac{1-\beta}{\alpha}E_{\alpha,\beta}(x), \end{aligned}$$

que é exatamente a relação (2.10).

Uma relação bastante importante envolvendo a função de Mittag-Leffler é a fórmula de duplicação, que é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 2.1.1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e α um parâmetro real, temos*

$$2E_{2\alpha}(x) = \left[E_\alpha(x^{\frac{1}{2}}) + E_\alpha(-x^{\frac{1}{2}})\right].$$

Demostração: Desenvolvendo as duas funções no segundo membro, temos que

$$E_\alpha(x^{\frac{1}{2}}) = 1 + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots$$

$$E_\alpha(-x^{\frac{1}{2}}) = 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots$$

Somando membro a membro esses dois desenvolvimentos em série, temos

$$2E_{2\alpha}(x) = 2 + \frac{2x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{2x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots + \frac{2x^k}{\Gamma((2k)\alpha+1)} + \dots$$

o que mostra o teorema.

Uma importante aplicação desse teorema é tal que, para $\alpha = 1$ e $x^2 \to x$, temos

$$E_2(x^2) = \frac{1}{2}\left[E_1(x) + E_1(-x)\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right] = \cosh x.$$

[3]Ver Apêndice A.

2.2 A função gama incompleta

A função gama incompleta pode ser definida pela integral

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt \tag{2.12}$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Graficamente pode ser representada conforme a Figura 2.1.

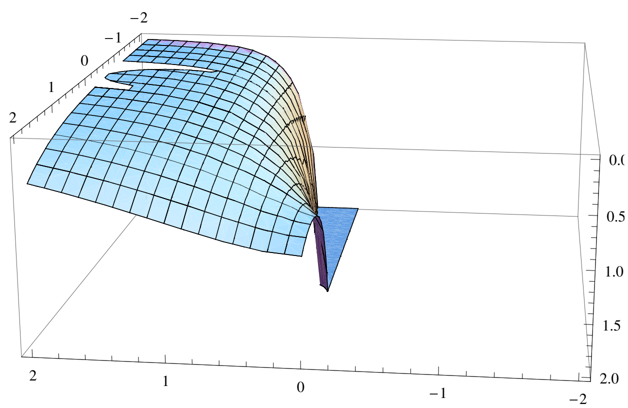

Figura 2.1: Função gama incompleta.

Utilizando a expressão em série para a função exponencial, temos

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{n+\alpha-1} dt \\ &= x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+\alpha) n!} \\ &\equiv \gamma(\alpha, x) \end{aligned}$$

que pode ser escrito em termos da função hipergeométrica confluente, na forma

$$\gamma(\alpha, x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1) n!} (-x)^n,$$

ou ainda

$$\gamma(\alpha, x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} {}_1F_1(\alpha, \alpha+1, -x). \tag{2.13}$$

Uma outra função gama incompleta (complementar) é definida por

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt \tag{2.14}$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, onde vale a seguinte relação

$$\gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(x).$$

Introduzindo uma conveniente função gama incompleta, definida por

$$\gamma^*(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_1(\alpha, \alpha+1, -x), \tag{2.15}$$

e utilizando a relação[4]

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

podemos escrever a equação (2.15) na forma

$$\gamma^*(\alpha, x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, x). \tag{2.16}$$

Tomando o limite $x \to \infty$ na equação (2.12), temos

$$\lim_{x\to\infty} \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha)$$

isto é, recuperamos a clássica função gama.

A relação entre a função de Mittag-Leffler $E_{1,\alpha}(x)$ e a função gama incompleta $\gamma(\alpha, x)$ é tal que

$$E_{1,\alpha}(x) = \mathrm{e}^x \gamma(\alpha, x), \tag{2.17}$$

enquanto que em termos da função hipergeométrica, temos

$$E_{1,\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} {}_1F_1(1, \alpha, x),$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

[4] Ver Apêndice A.

2.3 A função erro

A função erro é definida por

$$\mathrm{erf}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt. \tag{2.18}$$

Graficamente esta função é representada pela Figura 2.2.

Introduzindo a mudança de variável $t^2 = \theta$ na igualdade (2.18), obtemos

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-\theta} \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta.$$

Escrevendo essa função em termos da função gama incompleta, temos

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{1}{2}, x^2 \right). \tag{2.19}$$

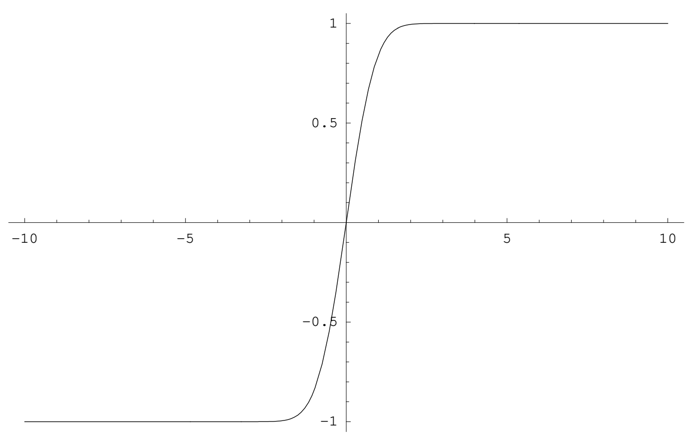

Figura 2.2: Função erro.

Podemos escrever a função erro em termos de uma função hipergeométrica confluente, ou seja, na forma

$$\mathrm{erf}(x) = x^{\frac{1}{2}} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2 \right).$$

Por outro lado a função erro complementar é definida por

$$\mathrm{erfc}(x) = \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt. \tag{2.20}$$

Introduzindo a mudança de variável $t^2 = \theta$, obtemos

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{\infty} \mathrm{e}^{-\theta}\theta^{-\frac{1}{2}}d\theta,$$

que, em termos da função gama incompleta (Complementar), é dada por

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right). \tag{2.21}$$

Adicionando as equações (2.19) e (2.20) obtemos

$$\mathrm{erf}(x) + \mathrm{erfc}(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Redefinindo as funções erro e erro complementar, temos

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}dt,$$

e

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt,$$

respectivamente, de onde segue-se

$$\mathrm{erf}(x) + \mathrm{erfc}(x) = 1.$$

A função erro se constitui num caso particular da função de Mittag-Leffler, a saber

$$E_{\frac{1}{2},1}(ix) = \mathrm{e}^{-x^2}[1 + \mathrm{erf}(ix)] = \mathrm{e}^{-x^2}[\mathrm{erfc}(-ix)]. \tag{2.22}$$

A verificação dessa identidade pode ser encontada em [7].

Enfim, a função de Mittag-Leffler pode ser representada na forma integral em termos da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros iguais na forma [7]

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{x}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 dt\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(xt^{\alpha}). \tag{2.23}$$

Para um caso particular, onde $\alpha = \beta = 1$, temos:

$$E_{1,1}(x) = 1 + x\int_0^1 E_{1,1}(xt)\,dt$$

como podemos verificar.

2.4 A transformada de Laplace e a função de Mittag-Leffler

Definição 2.4.1. *Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $0 \leq t < \infty$. Definimos a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $F(s)$, a partir da integral imprópria*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) dt \tag{2.24}$$

onde s é a variável transformada e Re$(s)> 0$.

Uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dita admissível ou de ordem exponencial se for contínua por partes em todo $t \in [0, \infty)$ e se existirem duas constantes positivas M e μ no intervalo $t \in [0, \infty)$ onde vale a desigualdade

$$|f(t)| < M\mathrm{e}^{\mu}. \tag{2.25}$$

Neste caso, dizemos que $f(t)$ é de ordem exponencial μ.

Seja $f(t)$ uma função de ordem exponencial μ no intervalo $[0, \infty)$. Então, a trasformada de Laplace[5] $F(s)$, existe para todo Re$(s) > 0$ [4].

Uma propriedade importante da transformada de Laplace é a linearidade, devido ao fato de serem definidas em termos de integrais que são operadores lineares. Seja $h(t) = Af(t) + Bg(t)$ uma função definida no intervalo $[0, \infty)$. Pela definição da transformada de Laplace, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[h(t)] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} h(t) dt \\
&= A \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) dt + B \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} g(t) dt \\
&= A\mathcal{L}[f(t)] + B\mathcal{L}[g(t)],
\end{aligned}$$

[5]As condições de existência de $f(t)$ são suficientes, mas não necessárias. Existem funções que não são de ordem exponencial, no entanto, que possuem transformada de Laplace. Como exemplo a função delta de Dirac. [2].

com A e B constantes. Sendo λ qualquer, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\lambda h(t)] &= \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-st} h(t)dt \\ &= \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} h(t)dt \\ &= \lambda \mathcal{L}[h(t)],\end{aligned}$$

que mostra ser a transformada de Laplace linear.

Agora, introduzimos um conceito bastante importante, o produto de convolução. A priori temos que saber que a transformada de Laplace do produto de duas funções não é o produto das respectivas transformadas.

Definição 2.4.2. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções definidas em $[0,\infty)$ e de ordens exponenciais. O produto de convolução dessas duas funções, $(f*g)(t)$ é*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{2.26}$$

A transformada de Laplace do produto de convolução é dada por

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Introduzindo a mudança de variavel $t-\tau=\tau'$, podemos escrever

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \int_{-\tau}^\infty d\tau' \int_0^t \mathrm{e}^{-s(\tau+\tau')} f(\tau)g(\tau')d\tau.$$

Definindo-se $g(t)=0$ para $t<0$; o limite superior em vez de t pode ser tomado para ∞; logo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f*g)(t)] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau'} g(\tau')d\tau' \int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}d\tau \\ &= \mathcal{L}[f(t)]\cdot\mathcal{L}[g(t)].\end{aligned}$$

Então, podemos escrever

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\cdot\mathcal{L}[g(t)]. \tag{2.27}$$

Daí, concluímos que a transformada de Laplace do produto de convolução é o produto das respectivas transformadas.

Como um exemplo, aqui vamos obter a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler. Primeiro vamos encontrar a transformada de Laplace da função

$$f(t) = t^k a^k,$$

onde a é um parâmetro real.

A partir da expressão em série da função exponencial, temos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm x)^k = \frac{1}{1 \mp x}$$

e

$$g(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(1 \pm x)t} dt$$

que pelo processo de continuação analítica[6] nos permite dizer que $f(x)$ e $g(x)$ são a mesma função analítica, dado que as duas representações coincidem na região $|x| < 1$. A função g constitui-se em uma continuação analítica na forma integral, válida para todo semi-plano $\mathrm{Re}(z) < 1$, da função f que é representada na forma de série e só tem validade para $|x| < 1$. Esse processo, nos fornece que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(1 \pm x)t} dt = \frac{1}{1 \pm x}$$

para $|x| < 1$. Derivando n vezes essa expressão, em relação a x, obtemos

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \mathrm{e}^{\pm xt} dt = \frac{n!}{(1 \mp x)^{n+1}}.$$

Introduzindo o parâmetro b tal que $\pm x = 1 - p \pm b$, nessa expressão, podemos escrever

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} t^n \mathrm{e}^{\pm bt} dt = \frac{n!}{(p \mp b)^{n+1}} \tag{2.28}$$

com $\mathrm{Re}(p) > |b|$.

Utilizando a equação (2.24) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t^n \mathrm{e}^{\pm bt}\right] &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} t^n \mathrm{e}^{\pm bt} dt \\ &= \frac{n!}{(p \mp b)^{n+1}}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

[6] Para um melhor esclarecimento sobre o processo de continuação analítica ver [4].

Vamos calcular a transformada de Laplace da função $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^{\alpha})$. Utilizando a equação (2.24), temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^{\alpha})\right\} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{pt}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^{\alpha})dt \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{pt}t^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm b)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha+\beta)}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm b)^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{pt}t^{n\alpha+\beta-1}dt.
\end{aligned}$$

Introduzindo uma mudança de variável[7] da forma $pt = u$, temos que

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}u^{n\alpha+\beta-1}}{p^{n\alpha+\beta}}dt = \frac{\Gamma(n\alpha+\beta)}{p^{n\alpha+\beta}},$$

então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^{\alpha})\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm b)^n}{p^{\alpha+\beta}} \\
&= p^{-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pm\frac{b}{p^{\alpha}}\right)^n \\
&= \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}\mp b}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^{\alpha})\right\} = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}\mp b}. \tag{2.30}$$

Aplicando n vezes a derivada nos dois lados da equação (2.30) em relação a b, vem que

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}t^{\alpha n+\beta-1}E^{(n)}_{\alpha,\beta}(\pm bt^{\alpha})dt = \frac{n!p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}\mp b)^{n+1}} \tag{2.31}$$

com $\mathrm{Re}(p) > |b|^{\frac{1}{\alpha}}$ onde usamos a notação

$$E^{(n)}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{d^n}{dx^n}E_{\alpha,\beta}(x).$$

Em resumo, obtemos o par de transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\left[t^{\alpha n+\beta-1}E^{(n)}_{\alpha,\beta}(\pm bt)\right] = \frac{n!p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}\mp b)^{n+1}} \tag{2.32}$$

[7]Foi introduzida devido a definição da função gama e ainda a troca da integral com o somatório é garantido somente se a série converge uniformemente.

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!p^{\alpha-\beta}}{(p^\alpha \mp b)^{n+1}}\right] = t^{\alpha k+\beta-1}E^{(n)}_{\alpha,\beta}(\pm bt). \tag{2.33}$$

2.5 Generalizações da função de Mittag-Leffler

Em 1971, Prabhakar [16] introduziu uma função $E^{\varphi}_{\alpha,\beta}(x)$ na forma

$$E^{\varphi}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varphi)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{x^k}{k!} \tag{2.34}$$

com α, β e φ complexos e $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ e $\mathrm{Re}(\varphi) > 0$. Aqui $(\varphi)_n$ é o símbolo de Pochhammer definido no capítulo anterior. Essa função é uma generalização das funções exponencial, função de Mittag-Lefler, definida na Seção 2.1 e a função de Wiman, definida na Seção 2.3.

Em continuação as generalizações da função de Mittag-Leffler, foi investigada a função $E^{\varphi,q}_{\alpha,\beta}(x)$ dada na forma

$$E^{\varphi,q}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varphi)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{x^k}{k!} \tag{2.35}$$

com α, β e φ complexos e $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(\varphi) > 0$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$. Aqui, $(\varphi)_{qk}$ é uma generalização do símbolo de Pochhammer, escrito na forma

$$(\varphi)_{qn} = \frac{\Gamma(\varphi+qn)}{\Gamma(\varphi)}. \tag{2.36}$$

A equação (2.35) é uma generalização de todas funções de Mittag-Lefler estudadas até aqui, neste trabalho.

CAPÍTULO 3

Cálculo Fracionário

O cálculo de ordem não inteira, que nesse trabalho chamamos cálculo fracionário, oferece uma descrição mais sofisticada aos modelos de certos fenômenos da natureza do que o cálculo usual. Num primeiro momento, fazemos uma simples abordagem histórica sobre o desenvolvimento do cálculo fracionário. Por conseguinte, as funções aqui discutidas são de classes de Riemann ou de classe de Liouville (1809-Joseph Liouville-1882), como vamos ver a seguir.

Logo após introduzimos o conceito de integral fracionária de Riemann-Liouville. A transformada de Laplace para a integral de Riemann-Liouville de algumas funções é apresentada, bem como a lei dos expoentes.

Enfim, os conceitos de derivada fracionária de Riemann-Liouville e derivada fracionária no sentido de Caputo são apresentados caracterizando a particularidade de cada um deles. A transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Caputo é a mais usada neste trabalho.

3.1 Abordagens históricas

Historicamente, Newton (1643-Sir Isaac Newton-1727) e Leibniz (1646-Gottfried Wilhelm von Leibniz-1716) independentemente, desenvolveram as noções de cálculo diferencial e integral, no século XVII. Sabemos que o cálculo é uma das ferramentas essenciais para a ciência. A notação moderna que atualmente usamos foi introduzida por Leibniz na forma $\dfrac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ que representa a n-ésima derivada da função y em relação a x, sendo n um inteiro não negativo.

Em 1695, em cartas[1] trocadas entre Leibniz e L'Hôpital (1661-Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital-1704) surgiu a seguinte questão: Existe possibilidade de estender o significado de uma derivada de ordem inteira para uma derivada de ordem não inteira?

Desde então, tem-se talvez o primeiro registro sobre o cálculo de ordem não inteira que, aqui nesse trabalho, chamamos de cálculo fracionário. Dessa época para os dias atuais o cálculo fracionário tem sido tema de constantes estudos e controvérsias.

Em 1819, Lacroix (1765-Silvestre François Lacroix-1843) foi o primeiro a mencionar em duas páginas sobre derivada de ordem não inteira em um longo livro[2] de 700 páginas. Lacroix desenvolveu uma fórmula para a derivada m-ésima de $y = x^n$ por indução, onde n é um inteiro positivo

$$D^m x^n = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} \tag{3.1}$$

onde $m \leq n$ e m é um inteiro. Introduzindo a função gama, ele obteve a forma

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \tag{3.2}$$

onde α e β são números arbitrários, em princípio.

Fourier (1768-Jean Baptiste Joseph Fourier-1830)[3] em 1822 derivou uma representação integral, hoje conhecida como integral de Fourier, para $f(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left[p(x-\alpha)\right] dp \tag{3.3}$$

obtendo formalmente a versão, para ν arbitrário

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} p^\nu \cos\left[p(x-\alpha) + \frac{\nu\pi}{2}\right] dp. \tag{3.4}$$

[1] 30 de setembro, Alemanha.

[2] Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 2nd ed , Vol. 3, pp. 409-410, Paris.

[3] Théorie Analytique de la Chaleur, Oeuvres de Fourier, Vol. 1, pp. 508. Didot, Paris.

Em 1823, Abel (1802-Niels Henrik Abel-1829) encontrou uma aplicação para o cálculo fracionário, pois grandes matemáticos não tinham ainda uma aplicação bem definida. Abel resolveu o problema da tautócrona[4] onde emerge naturalmente uma integral fracionária [12].

Liouville, em 1832, efetuou um estudo mais apurado sobre o cálculo fracionário. Nesse trabalho[5] mostrou que alguns problemas de mecânica e geometria são resolvidos usando operadores fracionários.

Liouville aplicou as definições já estudadas e iniciou com a seguinte relação

$$D^m \mathrm{e}^{ax} = a^m \mathrm{e}^{ax}$$

de onde obteve uma extensão natural para a derivada de ordem arbitrária

$$D^\nu \mathrm{e}^{ax} = a^\nu \mathrm{e}^{ax}. \tag{3.5}$$

Ele considera que a derivada de ordem arbitrária de uma função pode ser estendida na forma de uma série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{a_n x} \tag{3.6}$$

com $\mathrm{Re}(a_n) > 0$, e onde sua derivada de ordem ν, dada pela equação (3.5) é

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a_n^\nu \mathrm{e}^{a_n x}. \tag{3.7}$$

Essa fórmula é conhecida como a primeira fórmula de Liouville para a derivada fracionária. A desvantagem dessa fórmula é que é aplicada apenas para funções do tipo (3.6).

[4] A integral que emerge desse problema é da forma

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t) dt.$$

[5] Mémoire sur quelques Quéstions de Géometria et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quéstions, J. Escole Polytrch. 13, Section 21, pp. 1-69.

A segunda definição de Liouville é a integral indefinida relacionada com a função gama. Consideremos na integral

$$I = \int_0^\infty u^{a-1}\mathrm{e}^{-xu}du, \quad a > 0, \quad x > 0,$$

a mudança de variável $xu = t$ e substituindo esse resultado na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} I &= x^{-a}\int_0^\infty t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ I &= x^{-a}\Gamma(a) \\ x^{-a} &= \frac{1}{\Gamma(a)}I. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Aplicando operador D^ν em ambos os lados da igualdade (3.8), temos

$$\begin{aligned} D^\nu x^{-a} &= (-1)^\nu \int_0^\infty u^{a+\nu-1}\mathrm{e}^{-xu}du \\ &= (-1)^{-\nu}\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\nu} \end{aligned} \tag{3.9}$$

que é a segunda definição de Liouville. Essa definição é restrita a uma classe de funções da forma x^{-a}, $a > 0$, chamadas de classe de Liouville.

Riemann também contribuiu com o desenvolvimento do cálculo fracionário. Em uma publicação póstuma[6] de 1892 ele sugeriu uma generalização para a série de Taylor e uma expressão para a integral fracionária. Riemann estudou esses assuntos em sua graduação e somente depois de falecido apareceu para o meio acadêmico uma definição de derivada fracionária,

$$D^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^x (x-t)^{\nu-1}f(t)dt + \Psi(x) \tag{3.10}$$

onde $\Psi(x)$ é uma função complementar.

[6] Versuch einer Auffassung der Integration und Differentiation, Gesammelte Werke (Tentativa de um entendimento de integração e diferenciação. (1876) publicada postumamente, 1892 ed., pp. 353-366, Teubner, Leipzig.

Laurent (1813-Pierre Alphonse Laurent-1854) em 1878 apresentou um trabalho[7] que escreveu sobre a generalização da regra de Leibniz. Esse trabalho foi importante para o desenvolvimento do cálculo fracionário. Ele usou a integral de Cauchy para formular a definição e chegar a

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \tag{3.11}$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$. Essa é a definição de Riemann-Liouville.

Outros matemáticos contribuiram para o avanço do cálculo fracionário tais como: M. Caputo, H. Weyl, M. Riesz, K. Grunwald, H. Kober, entre outros. Mas, uma pergunta fica sem respostas definidas. Qual a interpretação geométrica ou físíca para a integral e derivada fracionárias [8].

3.2 Classes de funções

Laurent se baseou nos seus trabalhos e na definição de integral de Cauchy

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \tag{3.12}$$

e conduziu a definição para integral de ordem ν arbitrária

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \tag{3.13}$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$.

Devemos observar que sair da equação (3.12) e chegar à equação (3.13) não consiste em apenas mudar n natural por um ν não natural, o integrando da equação (3.12) deixa de possuir um pólo e passa a possuir um ponto de ramificação em $z = \xi$, assim temos que mudar o contorno C para algum contorno modificado do tipo de Bromwich (1875-Thomas John l'Anson Bromwich-1929) modificado [6].

A versão mais usada da equação acima é aquela em que $c = 0$

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \tag{3.14}$$

[7] Sur le calcul des derivées à indices quelconques, Now. Ann. Math, [3],**3**, 240-252, (1878).

com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, que é conhecida como integral fracionária de Riemann-Liouville.

Agora vamos discutir condições para as quais a integral da equação (3.13) seja convergente. Para valores de $c = 0$, temos as funções de classe de Riemann e $c = -\infty$, funções de classe de Liouville.

Uma condição suficiente para que uma função f seja de classe de Riemann é que

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^{1-\epsilon}), \qquad \epsilon > 0. \tag{3.15}$$

Exemplos de funções dessa classe são x^a com $a > -1$.

Por outro lado, para que uma função seja de classe de Liouville e garanta uma suficiência na convergência da integral

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \tag{3.16}$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ é que satisfaça

$$f(-x) = O(x^{\nu-\epsilon}) \ \epsilon > 0, \ x \to \infty. \tag{3.17}$$

Como por exemplo, funções do tipo x^{-a} com $a > \nu > 0$.

3.3 A integral fracionária

O primeiro argumento dado que conduz à definição de integral fracionária inicia-se com uma consideração da n-ésima integral

$${}_cD_x^{-n} f(x) = \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} dx_2 \ldots \int_c^{x_{n-1}} f(t)dt \tag{3.18}$$

A notação ${}_cD_x^{-n}$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem n. A função f na equação (3.18) é contínua no intervalo $[a, b]$, com $a \leq c < x \leq b$, onde podemos escrever na seguinte forma

$$\int_c^x K_n(x,t) f(t)dt, \tag{3.19}$$

onde $K_n(x,t)$ é o núcleo que depende de n, x e t sendo n inteiro não negativo. Então, definimos

$$ {}_cD_x^{-n} f(x) = \int_c^x K_n(x,t) f(t) dt. \tag{3.20} $$

Para provar essa conjectura vamos admitir que a função $K_n(x,t)$ é contínua no conjunto compacto $[a,b] \times [c,b]$, bem como usar o teorema da inversão de ordem nas integrais repetidas [11].

Consideremos $K_n(x_1,t) = f(t)$ de modo que

$$ \begin{aligned} \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(t) dt &= \int_c^x dt \int_c^x f(t) dx_1 \\ &= \int_c^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned} $$

O mesmo procedimento, para $n = 3$ podemos escrever

$$ \begin{aligned} {}_cD_x^{-3} f(x) &= \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} dx_2 \int_c^{x_2} dt f(t) \\ &= \int_c^x dx_1 \left[\int_c^{x_1} (x_1 - t) f(t) dt \right] \\ &= \int_c^x f(t) dt \int_c^x (x_1 - t) dx_1 \\ &= \int_c^x f(t) \frac{(x_1-t)^2}{2} dt. \end{aligned} $$

Da mesma forma para n vezes temos a seguinte relação

$$ \begin{aligned} K_n(x,t) &= \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)}. \end{aligned} $$

Então podemos escrever ${}_cD_x^{-n}$ com ν no lugar de n, a expressão

$$ {}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \tag{3.21} $$

com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, isto é, a definição de integral fracionária de f de ordem ν. Nesse trabalho, vamos usar a notação $J^\nu f(x)$ introduzida por Gorenflo e Mainardi [9], para representar a integral fracionária na equação (3.21), isto é,

$$ {}_cD_x^{-\nu} f(x) = J^\nu f(x), \tag{3.22}$$

sendo ν arbitrário.

Seja a um número estritamente positivo a função f contínua por partes em $[a, b]$. Então, se $\nu > 1$

$$\int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \tag{3.23}$$

existe uma integral de Riemann para todo $t \in [0, a]$.

Definição 3.3.1. *Seja f uma função contínua por partes em I= $(0, \infty)$ e integrável em qualquer subintervalo semifinito I= $[0, \infty)$, onde $x > 0$ então*

$$J^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt$$

isto é, a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem ν, com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$.

Da definição acima, a hipótese de que f é contínua por partes em $(0, \infty)$ é tomada com o intuito de que essas funções tenham comportamento similar a lnt ou t^ν (para $-1 < \nu < 0$) para que em uma vizinhança da origem também tenham sua integral fracionária definida. Definimos E a classe de funções que satisfaz a Definição 3.3.1.

Por exemplo, se $f(x) = x^\mu$ com $\mu > -1$, então pela Definição 3.3.1, e sabendo que essa função é da classe E, vem que

$$J^\nu x^\mu = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} x^\mu dt. \tag{3.24}$$

Introduzindo a mudança de variável $ux = t$, podemos escrever a equação (3.24), na forma

$$\begin{aligned} J^\nu x^\mu &= \frac{x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} u^\mu du \\ &= \frac{x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)} B(\mu+1, \nu) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\nu+\mu}, \qquad x > 0, \qquad \nu > 0 \end{aligned}$$

onde $B(\mu+1,\nu)$ é a função beta, definida em (1.54). Daí temos a integral fracionária de Riemann-Liouville, para as funções da classe de Riemann, logo

$$J^\nu x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\nu+\mu}, \qquad x>0, \qquad \nu>0, \tag{3.25}$$

onde ν é arbitrária.

Como caso particular, fazendo $\mu = 0$ na equação (3.25), temos a derivada fracionária de uma constante

$$\begin{aligned} J^\nu x^0 &= \frac{x^0}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu \\ &= \frac{C}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu, \qquad \nu > 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $C = x^0$.

Agora vamos encontrar a integral fracionária de algumas funções elementares tais como e^{ax}, $\mathrm{sen}(ax)$ e $\cos(ax)$, onde a é uma constante e as funções são de classe E, ou seja, podem ser resolvidas pela Definição 3.3.1.

Seja $f(t) = \mathrm{e}^{ax}$, então aplicando a Definição 3.3.1, temos

$$J^\nu \mathrm{e}^{ax} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} \mathrm{e}^{at} dt, \qquad \nu > 0. \tag{3.27}$$

Introduzindo a mudança de variável $u = x - t$, então

$$\begin{aligned} J^\nu \mathrm{e}^{ax} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x u^{\nu-1} \mathrm{e}^{a(x-u)} du \qquad (3.28) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\Gamma(\nu)} \int_0^x u^{\nu-1} \mathrm{e}^{-au} du \\ &= x^\nu \mathrm{e}^{ax} \gamma^*(\nu, ax) \end{aligned}$$

onde $\gamma^*(\nu, ax)$ é a função gama incompleta definida pela equação (2.12). A relação entre a função gama incompleta e a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, definida no Capítulo 2, em especial (2.12), é

$$E_t(\nu, a) = x^\nu \mathrm{e}^{ax} \gamma^*(\nu, ax), \tag{3.29}$$

de onde segue-se,

$$J^\nu \mathrm{e}^{ax} = E_x(\nu, a). \tag{3.30}$$

A partir da Definição 3.3.1 da integral fracionária para as funções seno e co-seno definimos; respectivamente, as funções $S_x(\nu, a)$ e $C_x(\nu, a)$, onde

$$S_x(\nu, a) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} \mathrm{sen}(at)dt \qquad \nu > 0 \tag{3.31}$$

$$C_x(\nu, a) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} \cos(at)dt \qquad \nu > 0. \tag{3.32}$$

Então, sejam as funções $f(x) = \mathrm{sen}(ax)$ e $g(x) = \cos(ax)$, vem que

$$J^\nu \mathrm{sen}(ax) = S_x(\nu, a), \tag{3.33}$$

$$J^\nu \cos(ax) = C_x(\nu, a). \tag{3.34}$$

Em resumo, temos que:

$$J^\nu \mathrm{e}^{ax} = E_x(\nu, a), \tag{3.35}$$

$$J^\nu \mathrm{sen}(ax) = S_x(\nu, a), \tag{3.36}$$

$$J^\nu \cos(ax) = C_x(\nu, a). \tag{3.37}$$

Como notamos, calcular uma integral fracionária é um pouco trabalhoso e as vezes complicado em particular devido o núcleo $(x-t)^{\nu-1}$. No entanto, esse núcleo nos permite desenvolver relações que nos levam ao cálculo imediato de uma grande classe de funções. Isto é dado pelo teorema que se segue:

Teorema 3.3.1. *Seja f uma função complexa e $J^\nu f(x)$ a integral fracionária de ordem ν da função f com* $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ e sabendo que satisfaz a Definição 3.3.1, então

$$J^\nu [xf(x)] = xJ^\nu f(x) - \nu J^{\nu+1} f(x). \tag{3.38}$$

Demonstração: Pela Definição 3.3.1, temos que

$$J^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt.$$

Introduzindo $[tf(t)] = [x - (x-t)]f(t)$ na igualdade acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} J^\nu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} [x-(x-t)] f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} xf(t)dt + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu} xf(t)dt \end{aligned}$$

e, sabendo que

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)},$$

então,

$$\begin{aligned} J^{\nu}[xf(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}xf(t)dt + \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^x (x-t)^{\nu}xf(t)dt \\ &= xJ^{\nu}f(x) - \nu J^{\nu+1}f(x). \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

De imediato calculamos as seguintes integrais:

$$J^{\nu}[x\mathrm{e}^{ax}] = xE_x(\nu,a) - \nu E_x(\nu+1,a), \tag{3.39}$$

$$J^{\nu}[x\mathrm{sen}(ax)] = xC_x(\nu,a) - \nu C_x(\nu+1,a), \tag{3.40}$$

$$J^{\nu}[x\cos(ax)] = xS_x(\nu,a) - \nu S_x(\nu+1,a). \tag{3.41}$$

Uma generalização para o Teorema 3.3.1 pode ser encontrada em [12].

Teorema 3.3.2. *Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, então $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ é dado por*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty} \mathrm{e}^{st}F(t)dt & se \quad t>0 \\ 0, & se \quad t<0 \end{cases}$$

onde a integração é efetuada ao longo de uma reta $s=\gamma$ no plano complexo, com $s = x+iy$. O número complexo γ escolhido de modo que $s=\gamma$ está direita de todas singularidades, isto é, $\mathrm{Re}(s) > \gamma$. Para o caso em que nenhuma sigularidade é ponto de ramificação podemos utilizar o contorno de Bromwich [6].

A Definição 3.3.1 de integral fracionária pode ser interpretada como sendo a transformada de Laplace do produto de convolução definido pela equação (2.28). Para o cálculo de transformadas de Laplace das integrais fracionárias temos que ter um conhecimento das transfomadas das funções elementares e do produto de convolução [2]. Comecemos com o teorema:

Teorema 3.3.3. *Seja f uma função complexa contínua por partes e de ordem exponencial, J^{ν} a integral fracionária de ordem ν, onde $Re(\nu) > 0$* e *$F(s) =$*

$\mathcal{L}[f(t)]$ representa a transformada de Laplace de função $f(t)$, então vale que

$$\mathcal{L}[J^\nu f(x)] = s^{-\nu} F(s). \tag{3.42}$$

Demonstração: Aplicando a transformada de Laplace na Definição(3.3.1), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[J^\nu f(x)] &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1} x f(t)dt\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\mathcal{L}\{t^{\nu-1}\}\mathcal{L}\{f(t)\} \\
&= s^{-\nu}\mathcal{L}\{f(t)\}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Aplicando o resultado acima, vamos calcular as transformadas de Laplace da integral fracionária das funções x^ν, com $\nu > -1$, e^{ax}, $x^{\nu-1}\mathrm{e}^{ax}$, com $\nu > 0$, $\cos(ax)$ e $\mathrm{sen}(ax)$ pertencentes a classe E e que são de ordem exponencial. Então, temos

$$\mathcal{L}\{J^\nu t^\mu\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\nu+\mu+1}}, \tag{3.43}$$

$$\mathcal{L}\{J^\nu \mathrm{e}^{ax}\} = \frac{1}{s^\nu(s-a)}, \tag{3.44}$$

$$\mathcal{L}\left\{J^\nu x^{\nu-1}\mathrm{e}^{ax}\right\} = \frac{\Gamma(\mu)}{s^\nu(s^2+a^2)}, \tag{3.45}$$

$$\mathcal{L}\{J^\nu \cos(ax)\} = \frac{1}{s^{\nu-1}(s^2+a^2)}, \tag{3.46}$$

$$\mathcal{L}\{J^\nu \sin(ax)\} = \frac{a}{s^\nu(s^2+a^2)}, \tag{3.47}$$

onde $\nu, \mu > 0$.

Podemos escrever de uma forma mais elegante as transformadas,

$$\mathcal{L}\{E_x(\nu,a)\} = \frac{1}{s^\nu(s-a)}, \tag{3.48}$$

$$\mathcal{L}\{C_x(\nu,a)\} = \frac{1}{s^{\nu-1}(s^2+a^2)}, \tag{3.49}$$

$$\mathcal{L}\{S_x(\nu,a)\} = \frac{1}{s^\nu(s^2+a^2)}. \tag{3.50}$$

Agora, vamos enunciar um teorema relativo à chamada lei dos expoentes, para integrais e derivadas fracionárias. Vamos utilizar a transformada de Laplace do produto de convolução, bem como a relação (1.55) entre a função gama e beta[8]. Mais ainda, devemos saber que a lei dos expoentes não se aplica, em geral, para as derivadas fracionárias.

Teorema 3.3.4. *Seja J^ν o operador integral fracionário. Temos, de acordo com a propriedade de semigrupo* [9]

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} \tag{3.51}$$

onde $\alpha, \beta > 0$ e de imediato a propriedade comutativa, $J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha$ é satisfeita.

Demonstração: Vamos introduzir a função auxiliar $\Phi_\alpha(x)$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se} \quad x > 0 \\ \quad 0, & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Sabemos que a integral fracionária pode ser interpretada como o produto de convolução de duas funções, isto é

$$J^\alpha f(x) = \Phi_\alpha(t) * f(x),\ \alpha > 0. \tag{3.52}$$

Temos que mostrar a seguinte relação

$$\Phi_{\alpha+\beta}(x) = \Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x). \tag{3.53}$$

Pela definição (2.28) do produto de convolução, podemos escrever

$$\Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x) \quad = \quad \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \tau^{\alpha-1}(1-\tau/x)^{\beta-1} d\tau.$$

Introduzindo a mudança de variável $u = \tau/x$, e pela definição (1.54) da função

[8]Ver Apêndice A.

beta e a relação (1.55) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x) &= \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)B(\alpha,\beta)}\int_0^1 (ux)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}(xdu) \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)B(\alpha,\beta)}\int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \Phi_{\alpha+\beta}(x).
\end{aligned}$$

Agora vamos concluir a demonstração tendo em mente as equações (3.52) e (3.53), da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
J^\alpha J^\beta f(x) &= \Phi_\alpha(x) * J^\beta f(x) \\
&= \Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x) f(x) \\
&= J^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

onde $\alpha + \beta > 0$.

3.4 A derivada fracionária

Seja $D = \dfrac{d}{dx}$ o operador diferencial e m um número natural. A derivada de ordem m de uma função f é denotada por $D^m f(x)$ e é bem conhecida. Vamos apresentar as definições de derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo.

3.4.1 A formulação de Riemann-Liouville

A derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville, está relacionada a operação inversa da integração e na lei dos expoentes.

Definição 3.4.1. *Seja f uma função de classe E. Sejam $\beta > 0$, m o menor inteiro maior que β e $(\nu) = m - \beta > 0$. Então, a derivada fracionária de f de ordem β de Riemann-Liouville é definida como*

$$D^\beta f(x) = D^m \left[J^\nu f(x) \right], \qquad x > 0$$

onde $J^{\nu}f(x)$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville e $D^{\beta}f(x)$ é a derivada fracionária de Riemann-Liouville.

Seja $f(x) = x^{\mu}$, $\mu > -1$. Vamos calcular a derivada de ordem β, segundo a definição de Riemann-Liouville. Usando a equação (3.25), temos

$$\begin{aligned} D^{\beta}f(x) &= D^{m}[J^{\nu}x^{\mu}] \\ &= D^{m}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}x^{\nu+\mu}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu-m+1)}x^{\nu+\mu-m}, \end{aligned}$$

com $\nu = m - \beta > 0$, logo

$$D^{\beta}f(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)}x^{\mu-\beta}. \tag{3.54}$$

Como caso particular seja $f(x) = x^5$. Vamos calcular pela definição de Riemann-Liouville, a derivada fracionária $D^2 f(x)$, logo

$$\begin{aligned} D^2[x^5] &= \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(4)}x^3 \\ &= 20x^3. \end{aligned}$$

O que notamos é que a igualdade acima estende a derivada de ordem inteira para a de ordem fracionária, para uma certa classe de funções. Como sabemos a derivada segunda da função $f = x^5$ é $20x^3$.

Sendo $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, com a um número qualquer, então a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville de f de ordem β é

$$\begin{aligned} D^{\beta}\mathrm{e}^{ax} &= D^{m}[J^{\nu}\mathrm{e}^{ax}] \\ &= D^{m}E_x(\nu, a) \\ &= E_x(\nu - m, a) = E_x(-\beta, a) \end{aligned} \tag{3.55}$$

desde que $\nu = m - \beta > 0$.

De maneira análoga calculamos a derivada fracionária das funções seno e co-seno de ordem β, então

$$
\begin{aligned}
D^{\beta}\cos(ax) &= C_x(-\mu, a), && (3.56)\\
D^{\beta}\mathrm{sen}(ax) &= S_x(-\mu, a). && (3.57)
\end{aligned}
$$

3.4.2 A derivada segundo Caputo

A derivada fracionária segundo Caputo é bastante similar à definição de Riemann-Liouville, porém a ordem das operações é invertida.

Definição 3.4.2. *Sejam* $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, m o menor inteiro maior que $\mathrm{Re}(\beta)$ e $\nu = m - \beta$ com $0 < \mathrm{Re}(\nu) \leq 1$. A derivada fracionária de ordem β de f, segundo Caputo, é $D_*^{\beta} f(x) = \mathrm{J}^{\nu}\left[D^m f(x)\right]$ dada por

$$
D_*^{\beta} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\beta)} \displaystyle\int_0^x \frac{f^{(m)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & m-1 < \beta < m. \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(\tau) & \beta = m. \end{cases} \tag{3.58}
$$

A definição de derivada segundo Caputo é mais restritiva que a de Riemann-Liouville. Vamos calcular primeiramente a derivada de ordem β, no sentido de Riemann-Liouville, da função $f(x) = x^{\mu}$ com $\mu > -1$,

$$
D^n x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} x^{\nu-n} \tag{3.59}
$$

e através da equação (3.25),

$$
J^{\nu} x^{\mu-n} = \frac{\Gamma(\mu-n+1)}{\Gamma(\mu-n+\nu+1)} x^{\mu-n+\nu}. \tag{3.60}
$$

Agora, pela definição segundo Caputo temos

$$
\begin{aligned}
D_*^{\beta} x^{\mu} &= J^{\nu}[D^n x^{\mu}] \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+\nu+1)} x^{\mu-n+\nu}
\end{aligned}
$$

e uma vez que $\nu = n - \beta$, podemos escrever

$$
D_*^{\beta} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)} x^{\mu-\beta}, \tag{3.61}
$$

que é o mesmo resultado obtido pela definição de Riemann-Liouville.

3.4.3 A transformada de Laplace

Vamos considerar a metodologia da transformada de Laplace nas duas definições, Riemann-Liouville e Caputo, de derivada fracionária.

A transformada de Laplace para a derivada de Riemann-Liouville requer o conhecimento de condições iniciais dadas em termos da integral $J^{(m-\beta)}$ e suas derivadas de ordem $k = 1, 2, \ldots, m-1$, então

$$\mathcal{L}\left\{D^{\beta} f(x)\right\} = s^{\beta} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k} J^{m-\beta} f(0^{+}) s^{m-1-k} \tag{3.62}$$

pelo teorema da função inversa, temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{\beta} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k} J^{m-\beta} f(0^{+}) s^{m-1-k}\right\} = D^{\beta} f(x) \tag{3.63}$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ e $m - 1 < \beta < m$.

A metodologia da transformada de Laplace segundo Caputo parace ser mais apropriada na resolução de equações diferenciais fracionárias, pois requer o conhecimento de condições iniciais da função e suas derivadas de ordem inteira, que têm interpretações físicas. Notemos que,

$$J^{\beta} D_{*}^{\beta} f(x) = J^{\beta} J^{m-\beta} f(x) = J^{m} D^{m} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(}k).(0^{+}) \frac{x^{k}}{k!} \tag{3.64}$$

De acordo com a equação (3.42), temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\beta} F(s)\right\} = J^{\beta} f(x),\ \beta > 0 \tag{3.65}$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Vamos aplicar a transformada de Laplace na equação (3.64) e usando a equação (3.65), podemos escrever, para o primeiro termo

$$\mathcal{L}\left\{J^{\beta} D_{*}^{\beta}\right\} = s^{-\beta} \mathcal{L}\left\{D_{*}^{\beta}\right\}. \tag{3.66}$$

Aplicando a transformada de Laplace no último termo da equação (3.64),vem que

$$\mathcal{L}\left\{J^{\beta} D_{*}^{\beta}\right\} = F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{-k-1}. \tag{3.67}$$

Com esses resultados, podemos obter a expressão para a trasformada de Laplace segundo Caputo, então

$$\mathcal{L}\left\{D_*^\beta\right\} = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)s^{\beta-k-1}, \tag{3.68}$$

e a sua inversa, fica

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)s^{\beta-k-1}\right\} = \mathcal{L}\left\{D_*^\beta\right\}. \tag{3.69}$$

A definição de derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville embora seja a definição mais usada e conhecida, no entanto possui dois inconvenientes. O primeiro é que a derivada de uma constante é não nula, como é fácil mostrar, e dessa forma não pode ser interpretada como uma taxa de variação. A segunda é que a transformada de Laplace desta depende de condições físicas cuja interpretação deve ser dada conforme o particular problema [12].

Para evitar estes problemas é que Caputo desenvolveu outra definição de derivada fracionária baseada na integral de Riemann-Liouville. A derivada fracionária de uma constante segundo Caputo é nula e a transformada de Laplace depende de condições que são fisicamente interpretáveis. Neste contexto, a definição de Caputo, apesar de mais restritiva, nos parece mais apropriada para o estudo de equações diferenciais fracionárias.

Capítulo 4

Equação Diferencial de Ordem Arbitrária

O conhecimento da função de Mittag-Leffler, abordado no Capítulo 2, é fundamental para a solução das equações diferenciais fracionárias, pois das soluções dessas equações emergem as funções de Mittag-Leffler. Para a resolução das equações diferenciais fracionárias a metodologia da transformada de Laplace segundo Caputo é fundamental. Um aplicação bastante importante são as chamadas oscilações fracionárias. Aqui, estudamos como aplicação, apenas a equação diferencial fracionária associada ao problema do oscilador harmônico simples, de ordem α obtida para valores de $1 < \alpha \leq 2$ e encontramos a função deslocamento, a velocidade, a quantidade de movimento e a energia total.

4.1 Introdução

Há décadas o cálculo de ordem não inteira tem atraído pesquisadores de várias áreas do conhecimento em destaque para a Matemática, Física, Engenharias, Química e Finanças.

Essas áreas têm em comum algo de grande importância: As equações diferencias fracionárias, EDF. Em todas as áreas citadas acima podemos, através de leis e observações dos fenômenos, modelar e tentar explicar seus processos atráves de equações diferenciais.

Na solução das EDF utilizamos a metodologia da transformada de Laplace onde, como solução, emerge naturalmente uma função de Mittag-Leffler.

A priori vamos considerar a equação diferencial ordinária

$$D^2y(t) + aDy(t) + by(t) = 0 \tag{4.1}$$

onde a e b são constantes. Então, sendo α e β raízes da equação indicial e diferentes de zero, temos

$$P(t) = t^2 + at + b = 0 \tag{4.2}$$

onde sabemos que $\mathrm{e}^{\alpha t}$ e $\mathrm{e}^{\beta t}$ são soluções linearmente independentes da equação (4.1), e se tivermos $\alpha = \beta$, então $\mathrm{e}^{\alpha t}$ e $t\mathrm{e}^{\beta t}$ são soluções linearmente independentes da equação (4.1).

Como uma primeira tentativa de definir as equações diferenciais fracionárias, vamos considerar que $r_m, r_{m-1}, \cdots, r_0$ seja uma seqüência decrescente de números não-negativos. Logo se $b_1, b_2, \cdots, b_m$ são constantes, então

$$\left[D^{r_m} + b_1 D^{r_{m-1}} + \cdots + b_m D^{r_0}\right] y(t) = 0. \tag{4.3}$$

Vamos impor a condição adicional que r_j seja um número racional. Então se q é o menor múltiplo comum com denominador diferente de zero, podemos escrever a equação (4.3) como

$$\left[D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \cdots + a_n D^0\right] y(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{4.4}$$

onde

$$v = \frac{1}{q}.$$

Vamos denominar a equação (4.4) de equação diferencial fracionária homogênea com coeficientes constantes de ordem (n, q). Por conveniência introduzimos:

$$P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

que é a equação indicial associada à equação (4.4). Agora, vamos denominar

$$P(D^v) = D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \cdots + a_n D^0, \tag{4.5}$$

de operador diferencial fracionário, de onde podemos escrever a equação (4.4) na forma

$$P(D^v)y(t) = 0. \tag{4.6}$$

No caso particular em que $q = 1$, temos $v = 1$, logo a equação (4.4) é uma equação diferencial ordinária.

A teoria das EDF deve estar em correspondência com a teoria das equações diferenciais ordinárias, pois em ambas teorias podemos usar, por exemplo, a metodologia da transformada de Laplace para obter as suas soluções.

Devemos aqui destacar a função de Mittag-Leffler introduzida pela equação (2.4), onde aqui vamos escrevê-la na forma

$$E_t(\nu, a) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(1+k+\nu)}, \ \mathrm{Re}(\nu) \geq 0. \tag{4.7}$$

Algumas relações importantes, que são de simples verificação, são

$$\begin{aligned} E_t(0, a) &= \mathrm{e}^{at}, & (4.8)\\ E_t(\nu, a) &= aE_t(\nu+1, a) + \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, & (4.9)\\ D[t^\mu E_t(\nu, a)] &= t^\mu E_t(\nu-1, a) + \mu t^{\mu-1} E_t(\nu, a). & (4.10) \end{aligned}$$

Como um exemplo específico temos que a EDF dada por

$$Dy - ay = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu)}, \ \ \nu > 0, \tag{4.11}$$

tem como solução a equação (4.7).

Uma relação entre as funções de Mittag-Leffler, conforme introduzida no Capítulo 2 e esta aqui, e que merece ser destacada é dada por

$$E_\alpha(at^\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} a^k E_t(k\alpha, a^q). \tag{4.12}$$

Uma simples demonstração pode ser encontrada em [7].

4.2 Equação diferencial fracionária homogênea

Desde que conheçamos a transformada de Laplace para as derivadas fracionárias, podemos obter a solução das EDF aplicando-a para encontrar a função desconhecida, e então o teorema de inversão da transformada de Laplace, recupera a solução procurada.

A seguir vamos resolver algumas EDF, onde ficará esclarecida essa metodologia de resolução.

Exemplo 4.2.1. *Seja a* EDF *dada por*

$$[D^{\frac{1}{2}} + aD^0]f(t) = 0 \tag{4.13}$$

para $t > 0$ *e* $D^{-\frac{1}{2}}f(0) = C$ *e* a *é uma constante.*

Solução: Aplicando a transformada de Laplace na equação, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}f(t)\right\} + a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= 0 \\ s^{\frac{1}{2}}F(s) - C + aF(s) &= 0 \\ F(s) &= \frac{C}{s^{\frac{1}{2}} + a} \end{aligned}$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. A fim de recuperar a solução devemos calcular a inversa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s^{\frac{1}{2}} + a}\right\}$$

que, em termos da função de Mittag-Leffler, dada pela equação (2.33), fornece a solução

$$f(t) = Ct^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-a\sqrt{t}). \tag{4.14}$$

Exemplo 4.2.2. *Seja a* EDF *dada por*

$$[D + aD^{\frac{1}{2}} + bD^0]y(t) = 0 \tag{4.15}$$

com a e b constantes.

Solução: Aplicando a transformada de Laplace nessa equação, temos:

$$\mathcal{L}\left\{Dy(t)\right\} + a\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}y(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{D^{0}y(t)\right\} = 0. \tag{4.16}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{Dy(t)\right\} &= sY(s) - y(0), & (4.17)\\
\mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}}y(t)\right\} &= s^{\frac{1}{2}}Y(s) - D^{-\frac{1}{2}}y(0) & (4.18)
\end{aligned}$$

e substituindo esses resultados na equação (4.16), podemos escrevê-la como

$$Y(s) = \frac{y(0) + aD^{-\frac{1}{2}}y(0)}{s + as^{\frac{1}{2}} + b}, \tag{4.19}$$

ou ainda na forma, que relaciona-se com o polinômio indicial da equação (4.15), dado por

$$P(t) = t^2 + at + b \equiv (t-\alpha)(t-\beta), \tag{4.20}$$

onde α e β são raízes da equação $P(t) = 0$, com $\alpha \neq \beta$. Então, a equação (4.19) pode ser escrita como

$$Y(s) = \frac{A}{P(s^{\frac{1}{2}})}, \tag{4.21}$$

onde $A = y(0) + aD^{-\frac{1}{2}}y(0)$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$.

Reescrevendo a equação (4.20), para que possamos de maneira bem simples aplicar a transformada de Laplace inversa, temos:

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t-\beta}\right). \tag{4.22}$$

Fazendo $t = s^{\frac{1}{2}}$, podemos escrever

$$\frac{1}{P(s^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\alpha} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-\beta}\right). \tag{4.23}$$

Substituindo esse resultado na equação (4.21), temos

$$Y(s) = \frac{A}{P(s^{\frac{1}{2}})} = AP^{-1}(s^{\frac{1}{2}}),$$

cuja a transformada de Laplace inversa[1], fornece

$$y(t) = A\mathcal{L}^{-1}\left\{P^{-1}(s^{\frac{1}{2}})\right\}.$$

Sabendo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-a}\right\} = E_t\left(-\frac{1}{2}, a^2\right) + aE_t\left(0, a^2\right), \tag{4.24}$$

temos que a solução dessa equação é dada por

$$y(t) = \frac{A}{\alpha-\beta}\left[\alpha E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right) + \alpha E_t\left(0, \alpha^2\right) - \beta E_t\left(-\frac{1}{2}, \beta^2\right) - \beta E_t\left(0, \beta^2\right)\right].$$

Agora, vamos supor que a EDF da forma (4.4) de ordem (n, q) com $n > q$ possa ter mais de uma solução.

Primeiramente, consideremos a equação diferencial de segunda ordem dada pela equação (4.1) sendo $f_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ uma solução. Notamos que $Df_1(t) = \alpha\mathrm{e}^{\alpha t}$ ainda é solução da equação (4.1). O que observamos é que $f_1(t)$ e $Df_1(t)$ são soluções linearmente dependentes da equação (4.1). Se $\beta \neq \alpha$, são raízes da equação indicial associada à equação (4.1), temos que $f_2(t) = \mathrm{e}^{\beta t}$ é outra solução dessa equação, onde $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções linearmente independentes. Então, a solução dessa equação é $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

Vemos que $f(t)$ e $Df(t)$ são soluções da equação (4.1). Então, $f(t)$ e $Df(t)$ são linearmente independentes e podemos escrever as funções na forma:

$$f_1(t) = \frac{\beta f(t) - Df(t)}{\beta - \alpha}, \tag{4.25}$$

$$f_2(t) = \frac{Df(t) - \alpha f(t)}{\beta - \alpha}, \tag{4.26}$$

ou seja, as funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são combinações lineares de $f(t)$ e $Df(t)$.

De maneira analoga, para $\alpha = \beta$, na equação (4.1) com $f_2(t) = t\mathrm{e}^{\alpha t}$, podemos escrever

$$f_1(t) = Df(t) - \alpha f(t), \tag{4.27}$$

$$f_2(t) = (\alpha + 1)f(t) - Df(t). \tag{4.28}$$

[1]Uma demonstração desse resultado pode ser encontrado no apêndice da referência [12].

Usando algumas idéias que abordamos até agora, vamos enunciar um teorema sobre as soluções das equações diferenciais fracionárias homogêneas.

Teorema 4.2.1. *Seja*

$$\left[D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \cdots + a_n D^0\right] y(t) = 0 \tag{4.29}$$

uma EDF *de ordem* (n, q)*, e*

$$P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \tag{4.30}$$

o polinômio indicial associado. Seja a função

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{P^{-1}(s^v)\right\}. \tag{4.31}$$

Então se N *é o menor inteiro com a propriedade que* $N \geq nv$*,*

$$y_1(t), y_2(t), \cdots y_N(t),$$

onde

$$y_{j+1}(t) = D^j y_1(t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

são N *soluções linearmente independentes da equação* (4.29).

Para uma demonstração desse teorema ver [12].

Exemplo 4.2.3. *Dada a* EDF *de ordem* $(2, q)$

$$\left[D^{2v} + a_1 D^v + a_2\right] y(t) = 0, \tag{4.32}$$

sendo q *uma constante, encontrar a solução e discutir os possíveis resultados.*

Solução: O polinômio indicial associado à equação é dado por

$$P(t) = t^2 + a_1 t + a_2 = (t - \alpha)(t - \beta), \tag{4.33}$$

onde α e β são soluções da equação indicial. Primeiramente consideramos $\alpha \neq \beta$. Pelo teorema acima, notamos que $N = 1$, temos que

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{P^{-1}(s^v)\right\},$$

mas,

$$P^{-1}(s^v) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{s^v - \alpha} - \frac{1}{s^v - \beta}\right),$$

então,

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{s^v - \alpha} - \frac{1}{s^v - \beta}\right)\right\}. \tag{4.34}$$

Sabendo que essa transformada inversa é dada em termos da função de Mittag-Leffler[2]

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - \alpha}\right\} = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha^{q-k-1} E_t(-kv, \alpha^q), \tag{4.35}$$

a solução da equação (4.32) é dada por

$$y_1(t) = A\left[\sum_{k=0}^{q-1} \alpha^{q-k-1} E_t(-kv, \alpha^q) + \sum_{k=0}^{q-1} \beta^{q-k-1} E_t(-kv, \beta^q)\right]. \tag{4.36}$$

onde A é uma constante arbitrária. A equação (4.32) é uma generalização das equações diferenciais ordinárias, homogênea de segunda ordem, bem como também o é a sua solução. Fazendo $q = 1$ na equação (4.32), temos uma equação diferencial ordinária, homogênea de segunda ordem onde a solução pode ser obtida substituindo o valor de $q = 1$ na equação (4.36), logo

$$y_1(t) = A\left[E_t(0, \alpha) - E_t(0, \beta)\right]$$

onde sabe-se que $E_t(0, a) = \mathrm{e}^{at}$.

Por outro lado, no caso em que $\alpha = \beta$, temos

$$P^{-1}(s^v) = \frac{1}{(s^v - \alpha)^2}$$

cuja transformada de Laplace inversa é calculada utilizando o produto de convolução[3]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v - \alpha)^2}\right\} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q} \alpha^{j+k-2}\Big\{ & tE_t\left((j+k)v - 2, \alpha^q\right) \\ & -[(j+k)v - 2]E_t\left((j+k)v - 1, \alpha^q\right)\Big\},\end{aligned} \tag{4.37}$$

[2] Uma demonstração desse resultado pode ser encontrado no apêndice da referência [12].

[3] Uma demonstração desse resultado pode ser encontrado no apêndice da referência [12].

então a solução da equação (4.32) para essas condições é dada por

$$y_1(t) = A\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q}\alpha^{j+k-2}\Big\{tE_t - [(j+k)v-2]E_t\left((j+k)v-1,\alpha^q\right)\Big\}, \quad (4.38)$$

onde A é uma constante arbitrária.

4.3 O oscilador harmônico fracionário

A equação diferencial ordinária que descreve o movimento de um oscilador harmônico simples sem amortercimento é dado pela segunda lei de Newton do movimento aplicado a sistemas que se repetem no tempo, ou seja, periódicos com freqüência angular ω, constante do material k e massa m. A equação diferencial ordinária que descreve esse sistema é dada por

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0 \quad (4.39)$$

onde $\omega^2 = k/m$ e $x = x(t)$ é o deslocamento em função do tempo.

A solução dessa equação é bem simples e dada por

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \theta), \quad (4.40)$$

onde x_0 é a amplitude do movimento e θ é a constante de fase.

A equação diferencial (4.39) pode ser dada em termos de uma equação integral [1] na seguinte forma

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t - \omega^2\int_0^t (t-t^{'})x(t^{'})dt^{'}, \quad (4.41)$$

onde $x(0)$ é o deslocamento inicial, $\dot{x}(0)$ a velocidade inicial do oscilador harmônico simples e ω é a freqüência angular.

A equação diferencial ordinária, associada ao problema do oscilador harmônico simples, dada pela equação (4.39), na forma fracionária, fica:

$$m\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} + kx = 0, \quad (4.42)$$

onde notamos que o parâmetro m na equação tem dimensão $\mathrm{MT}^{\alpha-2}$. Reescrevendo essa equação, temos

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} + \omega^\alpha x = 0, \tag{4.43}$$

onde $\omega^\alpha = k/m$, para $1 < \alpha \leq 2$.

A integral do lado direito da equação (4.41) pode ser generalizada para uma integral de ordem α, isto é, a equação integral do oscilador harmônico fracionário, dada por

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t - \frac{\omega^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - t')^{\alpha-1} x(t') dt', \tag{4.44}$$

com $1 < \alpha \leq 2$. Para $\alpha = 2$, recuperamos a equação (4.41). Resolvemos essa equação integral do oscilador harmônico com as condições dos valores iniciais da velocidade e deslocamento para $t = 0$.

Usando a metodologia da transformada de Laplace em ambos os lados da equação (4.44) temos que

$$X(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2} - \omega^\alpha \frac{X(s)}{s^\alpha}, \tag{4.45}$$

onde, $X(s)$ é a transformada de Laplace de $x(t)$.

Resolvendo para $X(s)$ a equação (4.45), obtemos

$$X(s) = \frac{x(0)s^{-1}}{1 + \omega^\alpha s^{-\alpha}} + \frac{\dot{x}(0)s^{-2}}{1 + \omega^\alpha s^{-\alpha}}. \tag{4.46}$$

Aplicando o teorema da transformada inversa, temos que

$$x(t) = x(0)E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) + \dot{x}(0)tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha). \tag{4.47}$$

Essa expressão representa a solução da equação diferencial associada ao movimento do oscilador harmônico fracionário [14] dado pela equação (4.41). Admitindo-se, sem perda de generalidade, as condições inicias dadas por $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, e substituindo esses valores na equação (4.47), obtemos

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha), \tag{4.48}$$

a função deslocamento fracionário em relação ao tempo.

A velocidade em função do tempo é a derivada da equação (4.48) em relação ao tempo

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\omega^\alpha t^\alpha\right). \tag{4.49}$$

A energia total do oscilador harmônico é dada pela energia de posição somada com a energia de movimento, isto é,

$$E_T = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}. \tag{4.50}$$

No caso do oscilador harmônico simples, onde o movimento é periódico, a energia total do movimento é constante e o plano de fase é uma curva fechada, uma elipse. Para um oscilador harmônico amortecido, o movimento é ainda oscilatório, mas a energia total decresce e o diagrama do plano[4] de fase é uma curva não fechada, mas espiral logarítmica.

O plano de fase apresentado na Figura 4.1 pode ser descrito por

$$(x, \dot{x}) = \left(x_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha), -x_0 \omega^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\omega^\alpha t^\alpha\right)\right).$$

Para $\alpha = 2$, na equação acima, temos

$$(x, \dot{x}) = (x_0 \cos(\omega t), -x_0 \omega \mathrm{sen}(\omega t))$$

que representa a equação de uma elipse, como era esperado. O plano de fase para $\alpha = 2, 1.98, 1.85, 1.75, 1.5, 1.2$ é mostrado na Figura 4.2.

A generalização do momento linear para o oscilador fracionário é definido por

$$p = m\left(\frac{d^{\alpha/2}x}{dt^{\alpha/2}}\right) \tag{4.51}$$

e a energia total pode ser escrita como

$$E_T = \frac{kx^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{d^{\alpha/2}x}{dt^{\alpha/2}}\right), \tag{4.52}$$

onde o parâmetro m não tem dimensões de massa como no caso das oscilações hamônicas simples, como podemos ver na equação do oscilador fracionário. A generalização do momento p é definido tal que a expressão $p^2/2m$ tenha a dimensão

[4] O plano de fase é geralmente uma representação gráfica da velocidade versus deslocamento, que no movimento harmônico simples é uma elipse.

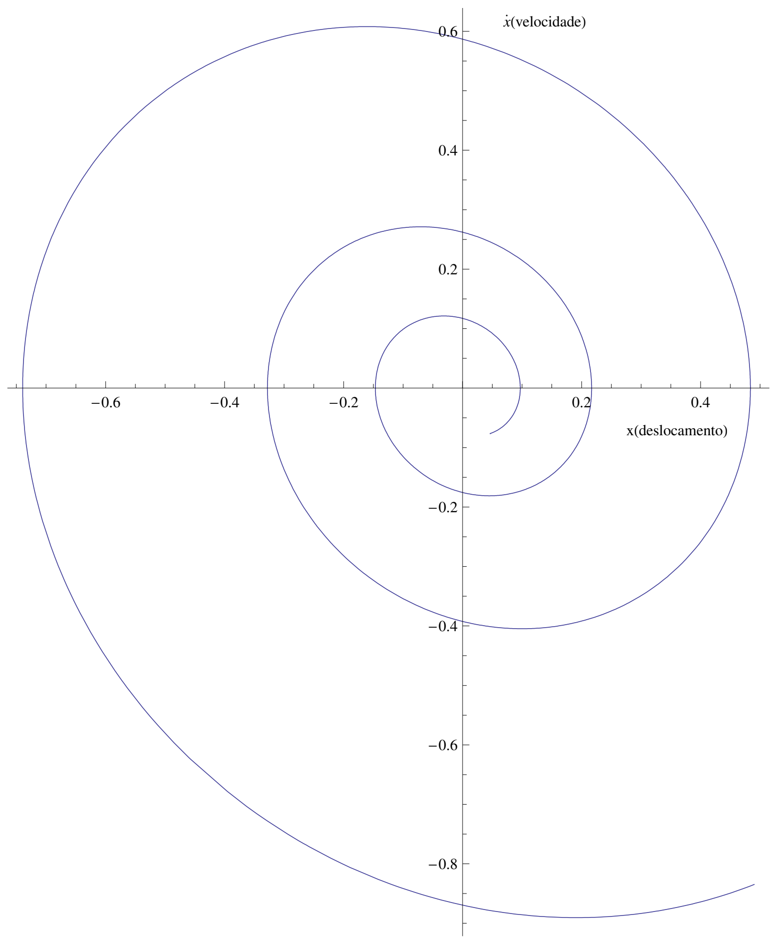

Figura 4.1: Plano de fase para $\alpha = 1.85$.

de energia. Isso pode ser facilmente demonstrado em cada termo do lado direito da equação (4.52). Além disso, podemos ver que nas equações (4.51) e (4.52) temos a derivada fracionária no sentido de Caputo de ordem $\alpha/2$, já definida no Capítulo 3.

Agora, vamos substituir a solução da equação do oscilador harmônico fracionário dada pela equação (4.48) nas equações (4.51) e (4.52), de onde temos que

$$p = -mx_0\omega^\alpha t^{\alpha/2} E_{\alpha,1+\alpha/2}(-\omega^2 t^\alpha) \tag{4.53}$$

e

$$E_T = \frac{1}{2}kx_0\left[E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)\right]^2 + \frac{1}{2}kx_0^2\omega^{2\alpha}t^\alpha\left[E_{\alpha,1+\alpha/2}(-\omega^\alpha t^\alpha)\right]^2, \tag{4.54}$$

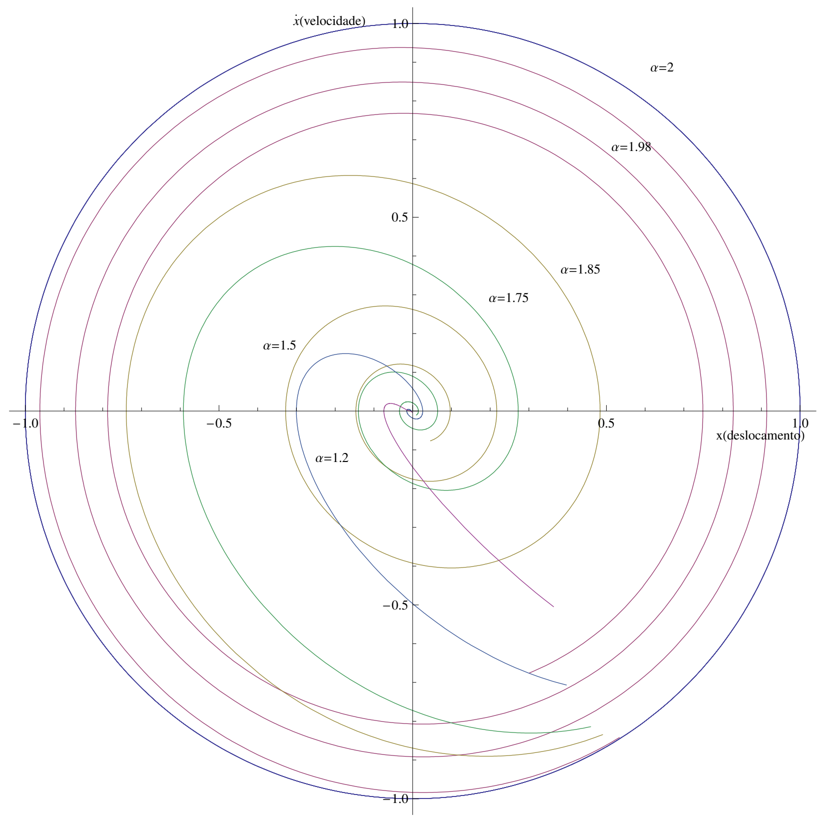

Figura 4.2: Plano de fase.

respectivamente, o momento e a energia do oscilador harmônico fracionário. Para $\alpha = 2$, temos que a energia do oscilador fracionário é $E_T = \dfrac{k{x_0}^2}{2}$, ou seja, é constante e garantimos que o sitema é conservativo, pois esse resultado é bem conhecido para o oscilador harmônico simples ordinário.

Vamos interpretar a solução do oscilador harmônico fracionário que é dada pela equação (4.48). Fazendo $\alpha = 2$, temos:

$$x(t) = x_0 E_{2,1}(-\omega^2 t^2), \tag{4.55}$$

que pode ser expressa em termos da função co-seno. Para $\alpha = 2, 1.98, 1.85, 1.75,$ $1.5, 1.2$ notamos que a amplitude vai decrescendo rapidamente com o passar do tempo, para valores de $\alpha \to 1$, como vemos no gráfico, Figura (4.3).

A energia total desse sitema é não constante, pois observamos que a amplitude no decorrer do tempo é variável, isso é, devido a ordem da equação do oscilador

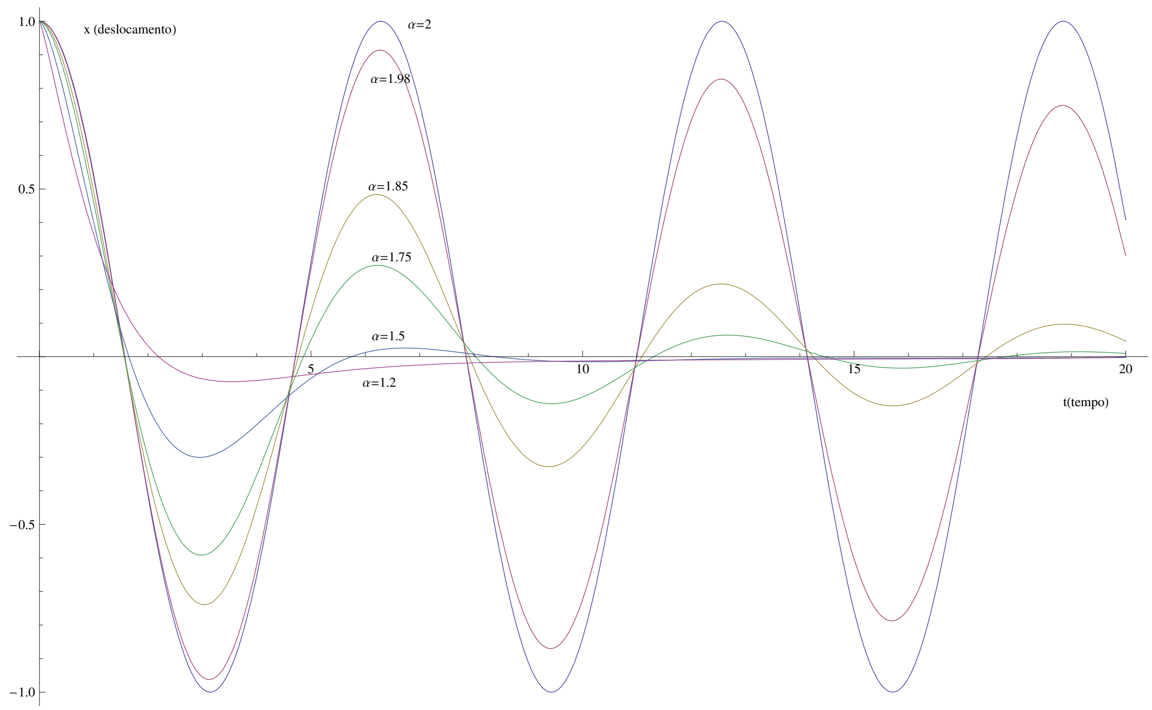

Figura 4.3: Deslocamento em função do tempo.

harmônico fracionário simples não ser inteira. É bom lembrar que esse comportamento é bem característico do movimento do oscilador harmônico amortecido.

Perspectivas Futuras

Nesse trabalho estudamos, no Capítulo 1, as funções hipergeométricas como sendo uma solução regular na origem da equação diferencial ordinária linear, de segunda ordem, a chamada equação hipergeométrica. Esta função, dependendo de três parâmetros, contém, como casos particulares dos parâmetros, as clássicas funções de Gegenbauer e Legendre, dentre outras. A partir da confluência de duas singularidades, introduzimos a função hipergeométrica confluente. Esta função, dentre outras, contém, como casos particulares dos parâmetros, as clássicas funções de Laguerre e Bessel.

No Capítulo 2, introduzimos a chamada função de Mittag-Leffler, dependente de um parâmetro, como sendo uma generalização da função exponencial. Discutimos várias propriedades, bem como relações envolvendo as funções gama incompleta, além da função hipergeométrica confluente, conforme apresentada no capítulo precedente. Apresentamos, também, a função de Mittag-Leffler com dois e três parâmetros. Esta última como sendo, neste trabalho, a forma mais geral de uma função de Mittag-Leffler.

No Capítulo 3, introduzimos os conceitos de integral e derivada fracionárias, como uma extensão natural de tais conceitos de ordem inteiras. A partir da integral fracionária apresentamos as derivadas fracionárias apenas no sentido de Riemann-Liouville e de Caputo unicamente por serem, a primeira, a mais usada e a segunda, ainda que mais restritiva, mais adequada para abordar uma equação diferencial e condições iniciais, istó é, um problema de valor inicial.

No estudo das equações diferenciais ordinárias, lineares e com coeficientes constantes, a função exponencial desempenha um papel fundamental, a saber: é solução, para convenientes parâmetros. Por outro lado, para uma equação diferencial fracionária, ainda com coeficientes constantes, emergem as funções de Mittag-Leffler como solução. No Capítulo 4, atráves da metodologia da transformada de Laplace, discutimos a equação diferencial associada ao oscilador harmônico fracionário, isto é, a solução satisfaz uma equação diferencial fracionária. Tanto a solução da equação diferencial quanto os chamados *momento* e *energia total*, associados ao oscilador harmônico fracionário foram escritos em termos das funções de Mittag-Leffler.

Como uma continuação natural desse trabalho efetua-se um estudo sistemático das chamadas funções de Fox [22] que se constituem numa generalização das funções hipergeométricas. Por outro lado, o estudo das funções de Meijer [18] é importante para a generalização das funções de Mittag-Leffler. Ressalta-se que a equação do telégrafo fracionária [21] foi recentemente discutida e vários teoremas de adição para as funções de Mittag-Leffler foram apresentados [19]. A partir destes trabalhos podemos estudar representações integrais para tais funções. Trabalhos nessa direção encontram-se em fase inicial. Devemos enfim, mencionar que ainda se faz necessário um estudo, no que tange uma possível interpretação geométrica da derivada fracionária [20].

Apêndice A

Funções Gama e Beta

A função gama desempenha um papel importante nesse trabalho. Fazemos uma descrição simples com resultados fundamentais. Uma maneira alternativa de mostrar a relação entre a função gama e a função beta é explicitada.

A.1 A função gama

A função gama pode ser definida para $z > 0$, através da integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} dt. \tag{A.1}$$

Pela propriedade da função gama que será demonstrada, logo em seguida, podemos extender os valores de z para valores inteiros, não negativo. Graficamente, para o intervalo $-5 < z < 5$, é representada na Figura A.1.

Substituindo $z = 1$ na equação (A.1), podemos escrever

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} dt = 1. \tag{A.2}$$

Pela definição (A.1), temos que

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{z} \mathrm{e}^{-t} dt.$$

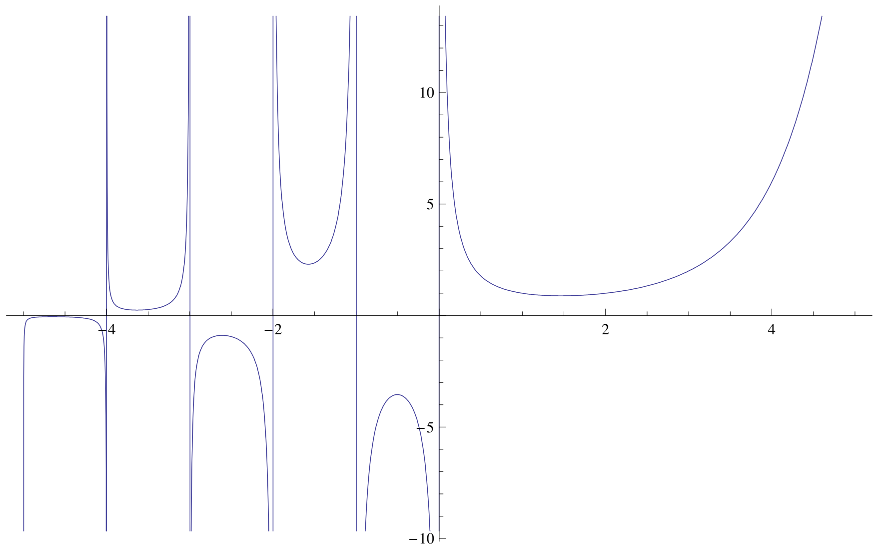

Figura A.1: Função gama.

Integrando por partes a equação, acima, vem que

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z\int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z),\end{aligned}$$

isto é,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{A.3}$$

A relação acima, como podemos ver, é uma generalização do conceito de fatorial, que é dado por

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{A.4}$$

Introduzindo a mudança de variável $t = ax$ com $a > 0$ e trocando z por $z+1$, na equação (A.1), obtemos

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}dx = \frac{\Gamma(z+1)}{a^{z+1}}. \tag{A.5}$$

Atráves da integral (A.1), substituindo z por $x+y$, temos

$$\Gamma(x+y) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x+y-1}dt, \;\; x > 0, \qquad y > 0. \tag{A.6}$$

Introduzindo uma mudança de variável $s = t/(1+p)$ com $p > -1$, podemos reescrever essa integral como

$$\Gamma(x+y) = (1+p)^{x+y} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1+p)s} s^{x+y-1} ds. \tag{A.7}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (A.7) por $p^{x-1}/(1+p)^{x+y}$ e integrando em relação a p, obtemos

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty p^{x-1}(1-p)^{-x-y} dp \;\; = \;\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{x+y-1} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ps} p^{x-1} dp \right) ds.$$

A integral entre parênteses é dada pela equação (A.5), onde

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ps} p^{x-1} dp = s^{-x}\Gamma(x)$$

de onde segue-se

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty p^{x-1}(1-p)^{-x-y} dp = \Gamma(x)\Gamma(y). \tag{A.8}$$

A.2 A função beta

A função beta é definida por

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \;\; x > 0 \;\; y > 0. \tag{A.9}$$

que, graficamente, pode ser representada, no intervalo $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 5$, como na Figura A.2.

Introduzindo a mudança de variável $t = p/(1+p)$ na equação (A.8), temos

$$\Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \Gamma(x)\Gamma(y), \tag{A.10}$$

que pela definição de função beta, fornece

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{A.11}$$

isto é a relação entre a função beta e a função gama.

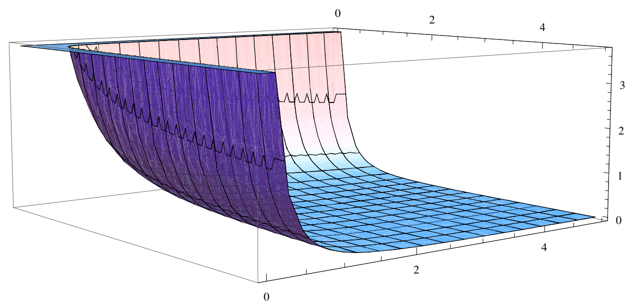

Figura A.2: Função beta.

Agora, introduzindo a mudança de variável da forma $t = \cos^2\theta$ na equação (A.10), temos

$$2\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2x-1}\theta)(\mathrm{sen}^{2y-1}\theta)d\theta = \Gamma(x)\Gamma(y). \tag{A.12}$$

Redefinindo os parâmetros na equação (A.12) para $\mu = x-\frac{1}{2}$ e $\nu = y-\frac{1}{2}$, podemos reescrever essa equação na forma

$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\pi}{2}\right) = 2\Gamma(\nu+\mu+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2\mu}\theta)(\mathrm{sen}^{2\nu}\theta)d\theta. \tag{A.13}$$

Apêndice B

Magnus Gösta Mittag-Leffler

Magnus Gösta Mittag-Leffler nasceu em 16 de março de 1846, em Estocolmo, Suécia. Na sua infância teve uma educação grandemente enriquecida por um estreito contacto com o seu pai Johan Olof Leffler que era diretor de escola em Estocolmo. A parte do nome Mittag é devida a sua mãe Gustava Wilhelmina Mittag. Quando entrou no Ginásio de Estocolmo, os seus professores reconheceram, em especial, a sua aptidão para a matemática superior, a qual estudou depois da formação específica em matemática.

Suas atividades de matemático começaram em 1865 quando se tornou um estudante na Universidade de Uppsala, onde defendeu sua tese de doutorado *Applications of the Argument Principle*, em 1872. Foi nomeado a partir de 1872 professor. Talvez o acontecimento que teve efeito duradouro em sua vida, foi atribuído a um salário que veio através de uma dotação[1] com a condição que o titular devesse passar três anos no estrangeiro. Em outubro de 1873 Mittag-Leffler viaja a Paris. Embora Mittag-Leffler tenha encontrado muitos matemáticos, em Paris, como Bouquet, Briot, Chasles, Darboux, e Liouville, o principal objetivo da visita foi o de estudar com Hermite. Mittag-Leffler assistiu algumas palestras de Hermite sobre funções elípticas.

Certamente Hermite recomendou-o para Weierstrass, bem como falou sobre as

[1]Previsão de uma verba inscrita em orçamento para determinado serviço.

contribuições que Mittag-Leffler estava fazendo. Mittag-Leffler tomou a decisão de ir a Berlim, na primavera de 1875.

Mittag-Leffler foi nomeado para uma cadeira na Universidade de Helsínquia em 1876 e, cinco anos mais tarde, retornou à sua cidade natal, Estocolmo, para ocupar uma cadeira na Universidade. Ele foi o primeiro titular da cátedra de matemática da nova universidade de Estocolmo. Logo após assumir a designação, começou a organizar a criação de uma nova revista internacional.

Em 1882, fundou o primeiro jornal internacional de matemática, o *Acta Mathematica*, e foi seu editor-chefe por 45 anos.

Mittag-Leffler fez inúmeras contribuições para a análise matemática, particularmente em áreas que incluíam cálculo com limites, geometria analítica e teoria de probabilidade. Trabalhou na teoria geral das funções e estudou as relações entre variáveis independentes e dependentes. Seus trabalhos mais conhecidos são em análise da representação de função, trabalho este que culminou com o teorema de Mittag-Leffler.

Entre 1900 e 1905 Mittag-Leffler publicou uma série de cinco artigos, que ele chamou *Notas sobre o somatório das séries divergentes.* O objetivo destas notas foi abordar a continuação analítica de uma série fora do seu círculo de convergência.

Mittag-Leffler recebeu muitas honrarias. Foi membro honorário de sociedades em quase todas academias de matemática no mundo, incluindo a Sociedade filosófica de Cambridge. Foi premiado com diplomas honorários das universidades de Oxford, Cambridge, Aberdeen, St. Andrews, Bolonha e Cristiania.

Mittag-Leffler faleceu em 7 Julho 1927, em Estocolmo, Suécia.

Referências Bibliográficas

[1] G. B. Arfken, H.J. Weber, **Mathematical Methods for Physicists**, 4ht Edition, Academic Press, San Diego, (1995).

Um excelente livro de física-matemática onde estudamos as representações na forma integral para o oscilador harmônico simples, bastante importante para a elaboração do Capítulo 4.

[2] E. Butkov, **Física Matemática**, LTC, São Paulo, 1ª edição, (1998).

Um bom livro de física-matemática onde estudamos a transformada de Laplace e suas propriedades.

[3] E. Capelas de Oliveira, **Funções Especiais com Aplicações**, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).

Um livro de abordagem objetiva sobre funções especiais no qual estudamos equações diferenciais, série de Laurent, o método de Frobenius, funções gama e beta, funções hipergeométricas e hipergeométricas confluentes. Este livro foi fundamental para elaboração do Capítulo 1 e entendimento de conceitos a ele relacionados.

[4] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Mariorino, **Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada**, Editora da Unicamp, Segunda Edição, Campinas, (2003).

Um livro de nível intermediário de matemática aplicada com uma apresentação clara e bastante exercícios resolvidos e propostos. Estudamos as funções especiais para desenvolver o Capítulo 1.

[5] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., **Funcões Analíticas e Aplicações**, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2006).

Este livro trata de funções analíticas, é bem didático e acessível para o estudante autodidata, pois apresenta exercícios resolvidos e propostos. Ele foi fundamental no melhor esclarecimento sobre analiticidade de uma função, bem como no teorema dos resíduos para compreensão da metodologia da transformada de Laplace inversa.

[6] R, Figueiredo Camargo, **Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard**, Dissertação de Mestrado, Campinas, (2005).

Um bom trabalho no qual estudamos as três formas do teorema de Cauchy onde está demonstrado de maneira rigorosa e a metodologia da transformada de Laplace onde eu destaco o teorema da existência e unicidade.

[7] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira e Ary O. Chiacchio, **Sobre a Função de Mittag-Leffler**, Relatório de Pesquisa 15/06, Imecc-Unicamp, (2006).

Esse relatório de pesquisa foi de fundamental importância na elaboração e concretização dos conceitos e propriedades discutidas no Capítulo 2, pois expõe a função de Mittag-Leffler, propriedades, relações com outras funções e transformada de Laplace a ela associada.

[8] R. Figueiredo Camargo, **Cálculo Fracionário e Aplicações**, Tese de Doutorado (Previsão: Março de 2009).

Um bom trabalho sobre cálculo fracionário abordado em uma liguagem acessível onde constam várias demonstrações de teoremas importantes. De fundamental valia no estudo de integral e derivadas de ordens fracionárias.

[9] R. Gorenflo and Mainardi, **Fractional Calculus: Integral and a Differential Equations of Fractional Order**, CISM, Lectures Notes, 233-276, (2000).

Artigo que trata do cálculo fracionário bem fundamentado, e que estudamos para elaborar o Capítulo 3.

[10] P. Humbert et R. P. Agarwal, **Sur la Fonction de Mittag-Leffler et Quelques-unes de ses Généralisations**, Bulletin des Sciences Matematiques, **77**, 180-185, (1953).

Esse artigo trata da generalização da função de Mittag-Leffler e também da transformada de Laplace dessa função.

[11] E. L. Lima, **Curso de Análise Real**, Volume 2, Segunda Edição, Rio de Janeiro, IMPA, (1981).

Esse livro, utilizado nos programas de pós-graduação e graduação do país, é um excelente livro com nível avançado. Estudamos o teorema da inversão de integrais.

[12] K.S. Miller and B. Ross, **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**, John Wiley and Sons, Wiley-Interscience, (1993).

Um belo tratado sobre cálculo fracionário com uma linguagem simples, no entanto, uma abordagem rigorosa. De fundamental importância na compreensão dos conceitos de integrais, derivadas e transformadas de ordem fracionária. Há ainda um estudo bem complexo de equações diferenciais fracionárias com teoremas e demonstrações com rigor matemático. Um apêndice excelente sobre relações da função de Mittag-Leffler com outras funções, onde levamos um bom tempo para compreender e demonstrar algumas delas.

[13] G.M. Mittag-Leffler, **Sur la Nouvelle Fonction** $E_\alpha(x)$, C. R. Acad. Sci. Paris, **137** 554-558, (1904).

Artigo original de Mittag-Leffler de 3 de janeiro de 1904, da *C. R. Acad. Sci. Paris*. Este artigo foi importante para o desenvolvimento do início do Capítulo 2.

[14] B. N. Narahari, J.W. Hanneken, T. Enck and T. Clarke, **Dynamics of the Fractional Oscillator**, Physica A, **297**, 361-367, (2001).

Artigo que discute o oscilador harmônico simples fracionário e apresenta alguns resultados numéricos interessantes. De fundamental importância para o desenrolar do Capítulo 4.

[15] J. B. Seabon, **Hypergeometric Functions and Applications**, Springer-Verlag, New York, (1991).

Um livro de funções hipergeométricas bem específico mas de boa leitura onde são exemplificadas as aplicações. Estudamos esse livro para aumentar o entendimento sobre funções hipergeométicas e perceber sua relação com outras funções especiais.

[16] T. R. Prabhakar **A Singular Integral Equation with Generalized Mittag-Leffler Function in the Kernel**, Yokohama, Math. J., **19**, 7-15, (1971).

Artigo que aborda algumas generalizações da função de Mittag-Leffler e também algumas propriedades importantes. Um artigo de nível avançado.

[17] A. Wiman, **Über den Fundamental Satz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$ (Sobre o Teorema Fundamental na Teoria das Funções $E_\alpha(x)$)**, Acta Math, **29**, 191-201, (1905).

Artigo de Wiman, que em 1905, propôs uma generalização com dois parâmetros para a função de Mittag-Leffler. Estudamos este artigo para escrever a parte envolvendo a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

[18] E. Capelas de Oliveira, **Sobre a Funcão de Meijer**, Em Preparação, (2008).

Artigo que explicita as funções de Meijer suas relações com outras funções especiais e propriedades.

[19] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, **Addition Theorems Associated with the and Generalized Mittag-Leffler Function**, Relatório de Pesquisa 34/07, Imecc-Unicamp, (2007).

Utilizando-se dois problemas físicos envolvendo a chamada equação do telegráfo fracionária, dois novos teoremas de adição associados a função de Mittag-Leffler são mostrados.

[20] H. Nicole and I. Podlubny, **Physical Interpretation of Initial Conditions for Fractional Differential Equations with Riemann-Liouville Fractional Derivatives**, Physique des Matériaux de Synthèse, Université Libre de Bruxelles, (2005).

Neste trabalho, uma série de exemplos no campo da viscoelasticidade é apresentada. Um significado físico para a condição inicial da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é discutido.

[21] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chicchio and E. Capelas de Oliveira, **Differentiation to Fractional Orders the Fractional Telegraph Equation**, J. Math. Phys, **49**, 033505 (2008).

Discute-se a equação do telégrafo fracionária tanto na parte espacial quando na parte temporal. Atráves da respectiva função de Green discute-se regras de soma para as funções de Mittag-Leffler.

[22] T. Craven and G. Csordas **The Fox-Wright Functions and Laguerre Multiplier Sequences**, J. Math. Anal. Appl. **314**, 109-125, (2006).

Artigo que apresenta a função de Fox-Wright bem como sua relação com outras funções.