
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

Áreas e Contornos

Felix Silva Costa

Orientadora: Prof^a Dr^a Sueli Irene Rodrigues Costa

Áreas e Contornos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Felix Silva Costa** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 15 de Abril de 2008.



Prof^ª. Dr^ª. Sueli Irene Rodrigues Costa
Orientadora

Banca Examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Edson Augustini (UFU)

Prof. Dr. José Mario Martinez (IMECC-UNICAMP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Costa, Felix Silva

C823a Áreas e contornos / Felix Silva Costa -- Campinas, [S.P. :s.n.],
2008.

Orientador : Sueli Irene Rodrigues Costa

Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Curvas planas. 2. Polígonos. 3. Green, Teorema de. 4. Cálculo
de áreas. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
III. Título.

Título em inglês: Areas and contours.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Plane curves. 2. Polygons. 3. Green's theorem.
4. Areas calculation.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Profª. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Edson Augustini (UFU-Uberlândia)

Prof. Dr. José Mário Martinez (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 15/04/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de abril de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



Prof. (a). Dr (a). EDSON AGUSTINI



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ MARIO MARTINEZ PÉREZ

A minha família.

Dedico

*“A vida é combate, que os fracos
abate, que os fortes, os bravos só
pode exaltar.”*

(Gonçalves Dias)

Agradecimentos

A Deus por sempre me ajudar e guiar nos momentos difíceis da minha vida.

À minha família, em especial à minha mãe pelo apoio e todo seu esforço para que eu pudesse atingir os meus objetivos.

À minha orientadora, Sueli I. R. Costa, pelo apoio, compreensão e ajuda no desenvolvimento desta dissertação. Por mostrar-me que o mundo da Matemática é algo divertido e cheio de curiosidades.

Aos meus amigos que me ajudaram neste trabalho, em especial ao Danilo pelo incentivo e o compartilhamento das dúvidas.

Ao pessoal do laboratório pela calma e as dúvidas esclarecidas. Em especial Cristiano, João, Alan, Celso e Nolmar, contribuindo assim para realização deste trabalho.

A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática pelos quais tenho grande admiração, pelo carisma e por serem para mim um referencial. Devido a estas pessoas, o sonho de muitos hoje, pode se tornar realidade. Em especial à professora Sandra pelo seu sorriso e sua maneira diferente de ensinar.

Às Universidades Estaduais de Campinas e do Maranhão, conjuntamente com a Capes por propiciarem a realização do Mestrado Profissional em Matemática.

Aos meus amigos de classe que estiveram comigo nessa caminhada lutando e sobrevivendo a cada disciplina cursada. Em especial ao Andre e Waléria, amigos que descobri ao longo do Mestrado.

Resumo

Neste trabalho são descritos métodos para o cálculo da área de regiões planas delimitadas por curvas simples e algumas propriedades de transformações do plano no plano que preservam áreas. No Capítulo 1, a área de polígonos é introduzida como uma soma de determinantes e utilizada para discutir o cálculo da área de regiões planas contornadas por curvas simples quando estas são aproximadas por polígonos com vértices ajustados por parâmetros geométricos. A fundamentação, baseada no Teorema de Green, de processos mecânicos (planímetros) para o cálculo destas áreas é descrita no Capítulo 2. Propriedades e famílias especiais de aplicações do plano no plano que preservam áreas são apresentadas no Capítulo 3.

Palavras-Chave: Áreas, Curvas, Planímetros, Polígonos, Teorema de Green, Transformações que preservam áreas.

Abstract

We describe here methods for the area estimation of plane regions bounded by simple curves and also some properties of plane transformations which preserve area. In Chapter 1 the area of polygons, described as a sum of determinants, is used to discuss the calculus of the area of plane regions bounded by simple curves approached by polygons adjusted through geometric parameters. Mechanical processes (planimeters) based on the Green's Theorem are described in Chapter 2. Properties and special families of area preserving mappings are presented in Chapter 3.

Keywords: Area, Curves, Planimeter, Polygons, Green's theorem, Area preserving mappings.

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Cálculo de área por aproximações poligonais	3
1.1 Cálculo de área de um triângulo por determinantes	3
1.2 Área de um polígono	6
1.3 Área contornada por uma curva fechada simples - um caso particular do Teorema de Green.	10
1.4 Aproximações da área de uma região por poligonais	13
1.4.1 Distribuição uniforme no parâmetro	14
1.4.2 Distribuição ponderada pelo raio de curvatura	17
1.4.3 Distribuição ponderada pelo inverso da velocidade	20
2 Planímetros	25
2.1 Introdução - O Teorema de Green	25
2.1.1 Área de um polígono pelo Teorema de Green	27
2.2 O planímetro polar	29
2.3 O planímetro linear	36
2.4 Cálculo da área da Lagoa da Jansen	38
2.5 Alguns dados históricos sobre George Green	40

3	Transformações que preservam áreas	42
3.1	Transformações do plano no plano	42
3.2	O jacobiano das transformações que preservam áreas	46
3.3	Transformações lineares do plano que preservam áreas	48
3.4	Deformação de um círculo por uma transformação linear que preserva área	55
3.5	Transformações gerais que preservam áreas	60
3.5.1	Transformações do tipo $T(x, y) = (bx + f(y), a \pm \frac{1}{b}y)$. . .	60
3.5.2	Transformações do tipo $T(x, y) = (c \pm \frac{1}{d}x, dy + g(x))$. . .	62
3.5.3	Composições	63
3.5.4	Observações	64
	Referências Bibliográficas	66

Introdução

O objetivo desta dissertação, dentro dos propósitos deste programa de mestrado, é o estudo e detalhamento de temas de interesse que tenham conexão com as disciplinas de matemática que são usualmente oferecidas no ensino superior. Neste trabalho focalizamos o cálculo de áreas de regiões planas e o estudo de transformações que preservam áreas. Julgamos de grande importância motivar os alunos para a compreensão dos conceitos que estão por trás de mecanismos e programas computacionais que efetuam estes cálculos, pois é a partir daí que adquirem condições de propor mecanismos e programas para resolver outros problemas.

Focalizamos inicialmente o cálculo de áreas contornadas por curvas fechadas no plano por aproximações poligonais. No Capítulo 1 é apresentada uma expressão simples para o cálculo de áreas do polígono por determinantes (Proposição 1.3) que é pouco usual nos textos de matemática mas bastante utilizada na topografia. Decorre desta expressão a formulação do caso particular do Teorema de Green que permite calcular a área de regiões através de uma integral de linha do contorno (Proposição 1.4).

Procuramos discutir um pouco da convergência de áreas poligonais para a área de uma região contornada por uma curva parametrizada. Isto foi feito através de diferentes escolhas dos vértices dos polígonos aproximadores em função do parâmetro mas com possíveis “correções” baseadas em elementos geométricos (curvatura e comprimento de arco aproximados).

Os planímetros, que são instrumentos mecânicos introduzidos no século XIX para o cálculo de áreas, são apresentados no Capítulo 2 fundamentados no Teorema de Green. Como ilustração, o cálculo de uma área (Lagoa da Jansen em São

Luis, MA) é feito comparativamente usando este instrumento e por aproximação poligonal.

No Capítulo 3 discutimos transformações do plano que preservam áreas e apresentamos um estudo detalhado sobre transformações lineares que tem esta propriedade (Proposição 3.1). Analisamos como círculos são deformados por tais transformações (Proposição 3.2) e incluímos também alguns tipos de transformações mais gerais que preservam áreas. Como é conhecido, transformações da superfície esférica no plano que preservam áreas são de interesse de cartografia (mapas). Colocamos como perspectiva futura a análise geométrica da composição dos mapas clássicos com esta propriedade, como o de Lambert, com as transformações discutidas neste capítulo.

Cálculo de área por aproximações poligonais

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, uma prova da expressão da área de um polígono qualquer do plano usando determinantes (Proposição 1.3). Este resultado simples e muito interessante não aparece em geral na literatura usual dos cursos de Cálculo ou Geometria Analítica. Usamos depois esta expressão da área de polígonos, para deduzir um caso especial do Teorema de Green sobre o cálculo de áreas contornadas por curvas fechadas simples, regulares por partes (Seção 1.2). As principais referências utilizadas neste capítulo foram [7], [9], [13], [16], [17], [12] e [2].

1.1 Cálculo de área de um triângulo por determinantes

Inicialmente mostraremos o cálculo da área de um polígono convexo com três lados (triângulo) através das coordenadas dos seus vértices, em seguida faremos

uma generalização do resultado obtido para o caso de um polígono simples (sem auto-intersecções) qualquer de n lados. A área de uma região plana contornada por uma curva fechada simples será obtida como limite de regiões contornadas por polígonos sendo um caso especial do Teorema de Green.

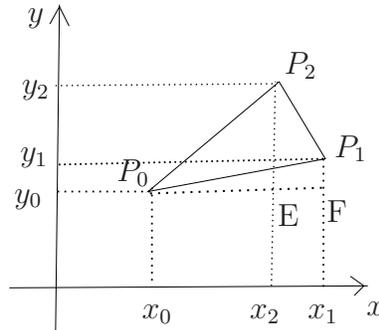


Fig. 1.1: triângulo

Seja um triângulo $P_0P_1P_2$ situado no plano cartesiano como na Figura 1.1. Utilizando a geometria euclidiana, sua área pode ser calculada somando-se a área do triângulo P_0EP_2 com a área do trapézio EFP_1P_2 e subtraindo da área do triângulo P_0FP_1 , ou seja,

$$A_{P_0P_1P_2} = A_{P_0EP_2} + A_{EFP_1P_2} - A_{P_0FP_1}.$$

Substituindo os valores das coordenadas destes pontos, temos:

$$\begin{aligned} A_{P_0P_1P_2} &= \frac{(y_2 - y_0)(x_2 - x_0)}{2} + \frac{[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0)](x_1 - x_2)}{2} - \frac{(y_1 - y_0)(x_1 - x_0)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[(y_2 - y_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(x_1 - x_2) + \right. \\ &\quad \left. + (y_2 - y_0)(x_1 - x_2) - (y_1 - y_0)(x_1 - x_0) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[x_1y_1 - x_1y_0 - x_2y_1 + x_2y_0 + x_1y_2 - x_1y_0 - x_2y_2 + \right. \\ &\quad \left. + x_2y_0 + x_2y_2 - x_2y_0 - x_0y_2 + x_0y_0 - x_1y_1 + x_1y_0 + x_0y_1 - x_0y_0 \right] \\ &= \frac{1}{2} [(x_0y_1 - x_1y_0) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_0 - x_0y_2)] \end{aligned}$$

Portanto, podemos expressar a área do triângulo com vértices no sentido anti-horário através do cálculo dos determinantes formados pelas coordenadas do triângulo.

$$A_{P_0P_1P_2} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right). \quad (1.1)$$

Notamos que uma outra forma de obtermos a expressão acima para triângulos gerais com vértices percorridos no sentido anti-horário é utilizando o conceitos de Cálculo Vetorial. A área do triângulo é igual à metade da área do paralelogramo (1.2) com suporte nos vetores $v_1 = P_1 - P_0$ e $v_2 = P_2 - P_0$, ou seja,

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|v_1\| \|v_2\| |\sin(\alpha)|, \quad (1.2)$$

onde α é o ângulo orientado do vetor v_1 para o vetor v_2 . Assim,

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|v_1 \times v_2\|, \quad (1.3)$$

Para os casos que os vetores são dados por:

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + 0\vec{k} \\ v_2 &= (x_2 - x_0)\vec{i} + (y_2 - y_0)\vec{j} + 0\vec{k}, \end{aligned}$$

temos,

$$v_1 \times v_2 = \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) \vec{k} \quad (1.4)$$

Por outro lado, temos que

$$v_1 \times v_2 = \|v_1\| \|v_2\| \sin(\alpha)\vec{k},$$

e como tomamos a orientação de v_1 para v_2 no sentido anti-horário, $\sin(\alpha) > 0$, donde obtemos novamente a expressão (1.1) a partir de (1.3). Escrevendo esta equação como proposição, temos:

Proposição 1.1. *A área de um triângulo no plano cartesiano de vértices $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dados no sentido anti-horário é expressa por:*

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) \quad (1.5)$$

1.2 Área de um polígono

A partir de (1.5) encontraremos a fórmula geral para o cálculo da área de um polígono, porém antes demonstraremos para o caso em que o polígono é convexo, com $n + 1$ vértices denotados por: $P_0 = (x_0, y_0)$, \dots , $P_n = (x_n, y_n)$, percorridos no sentido anti-horário.

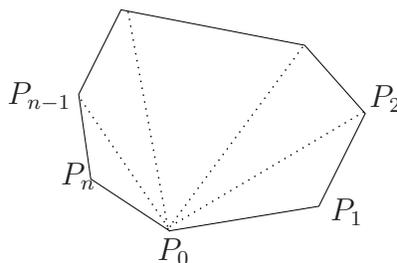


Fig. 1.2: Polígono convexo

Considerando inicialmente um polígono convexo simples, iremos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 1.2. *A área da região delimitada por um polígono convexo de vértices $P_0, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$, percorridos no sentido anti-horário é dada por:*

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right). \quad (1.6)$$

Prova: Fixando o vértice P_0 , dividimos o polígono nos seguintes triângulos adjacentes: $P_0P_1P_2, P_0P_2P_3, \dots, P_0P_{n-1}P_n$. Desta forma podemos calcular a área do polígono somando-se a área de cada triângulo, ou seja,

$$A = A_1 + \dots + A_i + \dots + A_{n-1}$$

onde cada A_i corresponde a área do i -ésimo triângulo a qual é dada pela expressão (1.5),

$$A_i = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_i & y_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{i+1} & y_{i+1} \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right). \quad (1.7)$$

Escrevendo-se a área do polígono como soma das áreas dos triângulos, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Analisando (1.8), nota-se que o último determinante de A_i se anula com o primeiro determinante de A_{i+1} , pois trocando-se as posições das linhas de uma matriz obtêm-se o determinante com sinal contrário. Logo a equação (1.8) resume-se à seguinte expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right),$$

que podemos escrever simplesmente como,

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad (1.9)$$

onde $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_0, y_0)$. \square

A demonstração da equação (1.6) para o caso de um polígono simples qualquer será feita por indução finita. De fato, como mostramos anteriormente vale para o caso de $n = 3$, supondo que é válido para $n = k$ (com $k \leq 3$) vamos então mostrar que é válido para $n = k+1$. Vamos verificar isto.

Dado um polígono A de $k + 1$ vértices, P_0, \dots, P_k , orientado no sentido anti-horário, consideramos o polígono B retirando um vértice de A, por exemplo, P_1 . Por hipótese de indução a expressão (1.6) vale para B, temos então duas possibilidades.

- 1) P_1 está no interior do novo polígono B.
- 2) P_1 está no exterior do polígono B.

Apresentaremos neste trabalho apenas a demonstração para o caso 1, pois no caso 2 usamos o mesmo procedimento.

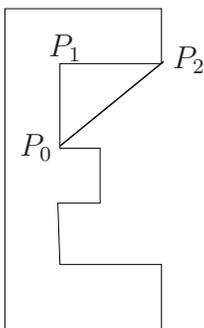


Fig. 1.3: P_1 no interior do polígono B

Note que neste caso a área do polígono A é dada por:

$$\text{Área de A} = \text{Área de B} - \text{Área } \triangle_{P_1P_0P_2},$$

onde a ordem P_1, P_0 e P_2 está no sentido anti-horário. De fato, sejam P_0, P_2 ,

..., P_k os vértices do polígono B. Utilizando (1.6), temos:

$$\begin{aligned} \text{Área de A} &= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) + \\ &- \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Portanto a equação (1.6) também é válida para este caso. Resumindo, temos a Proposição 1.2 estendida para todo polígono simples (sem auto intersecção) que pode ser enunciada da seguinte forma:

Proposição 1.3. *A área da região delimitada por um polígono simples, sem auto-intersecções, de vértices $P_0, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$, percorridos no sentido anti-horário é dada por:*

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right). \quad (1.10)$$

Vamos então utilizar esta equação para estimar a área da Lagoa da Jansen situada na cidade de São Luis do Maranhão. Para este cálculo, utilizamos as coordenadas dos pontos distribuídos sobre a imagem gerada pelo programa “Google Earth”. Aplicando poucos pontos ao contorno da figura de maneira a obtermos uma boa aproximação do valor da área como mostra a figura (ver figura 1.4).

A área encontrada quando distribuímos 21 pontos ao longo do contorno do mapa foi de 912731.04 m^2 ou 91,27 hectares. Ao distribuirmos um número maior de pontos (130) obtivemos o resultado 118 hectares que é um valor bem próximo do obtido com o uso de um planímetro polar como veremos no Capítulo 2.

Notamos que com a difusão do GPS (Global Position System) e a precisão cada vez maior destes instrumentos que fornecem a latitude e a longitude dos



Fig. 1.4: Lagoa da Jansen com a poligonal

pontos, estes dados podem ser utilizados na obtenção das coordenadas “planares” aproximadas das regiões com áreas a serem determinadas (e alguns GPS já possuem a programação de área embutida).

No exemplo da Lagoa da Jansen, não utilizamos as coordenadas geográficas, pois estas só estavam disponíveis para poucos pontos do contorno no “Google Erth”. As coordenadas foram então obtidas pelo mapa mesmo, através do programa Inkspace.

1.3 Área contornada por uma curva fechada simples - um caso particular do Teorema de Green.

Usaremos a equação (1.10) para calcular o valor da área delimitada por uma

curva fechada simples. Assumiremos ao longo deste trabalho que as curvas fechadas são simples e regulares por partes. Isto é, $C = \alpha[a, b]$ onde $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua tal que para $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\alpha|_{(t_i, t_{i+1})}$ é de classe C^1 com $\alpha'(t) \neq (0, 0)$, $\forall t \in (t_i, t_{i+1})$, $\alpha[a, b]$ é injetora e $\alpha(a) = \alpha(b)$.

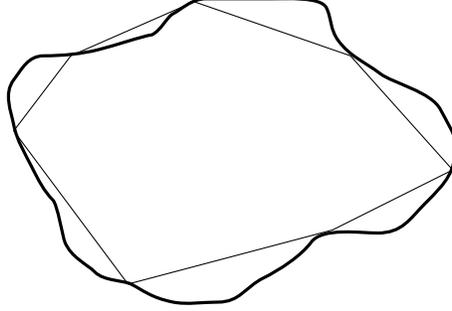


Fig. 1.5: Área da curva aproximada por uma curva poligonal

Com esta hipótese, temos assegurado que a função comprimento de arco é bem definida e pode ser dada pela aproximação da curva por poligonais cujos vértices estão inscritos na curva e tais que o comprimento da menor aresta tenda para zero ($\max \|P_{i+1} - P_i\| \rightarrow 0$) [16].

Assim, quanto maior o número de lados é menor o máximo dos comprimentos $\|P_{i+1} - P_i\|$ e a área do polígono vai se aproximar da área delimitada pela curva, (as cordas das curvas se aproximam cada vez mais dos arcos de curva). Ou seja, a área pode ser calculada tomando-se o limite da área dos polígonos aproximadores,

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \|P_{i+1} - P_i\| \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

fazendo-se $\Delta_i x = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta_i y = y_{i+1} - y_i$, temos:

$$A = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \|P_{i+1} - P_i\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i (\Delta_i y + y_i) - (\Delta_i x + x_i) y_i)$$

$$A = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \|P_{i+1} - P_i\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (x_i \Delta_i y - y_i \Delta_i x) \quad (1.11)$$

Consideremos a curva C descrita por um parâmetro t pertencente ao intervalo $[a, b]$, isto é, $C = \alpha(t)$; dividimos este intervalo em n subintervalos correspondentes aos vértices P_i , onde t_0, t_1, \dots, t_n e $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ sendo $\alpha(t_i) = (x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$ são as coordenadas dos pontos $P_i(x_i, y_i)$ que estão em C são os vértices do polígono utilizado para aproximar a área delimitada por C . Colocando-se (1.11) em função do parâmetro t e aplicando-se o Teorema do Valor Médio nas funções f, g em cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, (f e g são diferenciáveis por partes) obtemos t_i^* e t_i^{**} onde

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}) - f(t_i) &= f'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i) \\ \Delta_i x &= f'(t_i^*)\Delta_i t \\ e \\ g(t_{i+1}) - g(t_i) &= g'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i) \\ \Delta_i y &= g'(t_i^{**})\Delta_i t \end{aligned} \tag{1.12}$$

substituindo os resultados de (1.12) em (1.11), encontramos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \|P_{i+1} - P_i\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \left[f(t_i) \cdot g'(t_i^{**})\Delta_i t - g(t_i) \cdot f'(t_i^*)\Delta_i t \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \|P_{i+1} - P_i\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot g'(t_i^{**})\Delta_i t - \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \|P_{i+1} - P_i\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(t_i) \cdot f'(t_i^*)\Delta_i t \right] \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dentro das hipóteses assumidas para a curva C e as funções f e g , teremos convergências das somas de Riemann [16], [9] e, portanto, áreas dadas pelas integrais,

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(t)g'(t)dt - \int_a^b g(t)f'(t)dt \right)$$

as quais representam as integrais de linha ao longo da curva C . Concluimos assim pela proposição a seguir, que é um caso particular do Teorema de Green (ver Capítulo 2) quando $M(x, y) = -\frac{y}{2}$ e $N(x, y) = \frac{x}{2}$.

Proposição 1.4. *A área contornada por uma curva C regular por partes, fechada e simples é expressa pelas integrais de linha abaixo onde C é considerada orientada no sentido anti-horário:*

$$\frac{1}{2} \left(\oint_C xdy - \oint_C ydx \right) = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx \quad (1.14)$$

1.4 Aproximações da área de uma região por poligonais

Como colocamos na seção anterior, utilizamos (1.10) para determinar o valor aproximado da área contornada por curvas regulares por partes fechadas simples e a aproximação é garantida pela Proposição 1.4. Escolhemos uma quantidade finita de pontos sobre a curva considerando diferentes critérios. A comparação será feita entre três casos considerados a seguir. O objetivo é o de distribuir os pontos da “melhor maneira possível”, ou seja, compararmos a eficiência da aproximação da área por poligonais entre os três diferentes métodos de partição do intervalo de parametrização.

Primeiramente foi realizada a distribuição uniforme pelo intervalo de variação do parâmetro, em seguida ponderamos o parâmetro pelo raio de curvatura e por último fizemos uma ponderação em função da norma do vetor velocidade (velocidade escalar). Todas estas distribuições e o cálculo das áreas foram realizados em algumas curvas regulares parametrizadas. Naturalmente, na prática, estas estimativas são utilizadas em curvas em que não temos uma parametrização e poderemos tomar no máximo algumas inferências utilizando também “aproximações” para o comprimento de arco e a curvatura [7].

Foram utilizados alguns algoritmos criados no programa de cálculo numérico e simbólico Maxima (aberto) [18] e o programa Winplot (livre) [20] para gráficos. A

seguir resumimos alguns conceitos e resultados simples de Geometria Diferencial a serem utilizados ([3]).

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada regular e \vec{u} o versor tangente à curva definido por $\vec{u}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$, isto é, $|\alpha'(s)| = 1$. Para uma curva $\alpha(s)$ regular parametrizada pelo comprimento de arco, temos que o vetor velocidade $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ é unitário e a curvatura pode ser definida como $\frac{d\theta}{ds}$. Para curvas regulares $\alpha(t)$, descritas por um parâmetro qualquer podemos deduzir que:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left[\left(x'(t) \right)^2 + \left(y'(t) \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (1.15)$$

$$k(t) = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\left[\left(x'(t) \right)^2 + \left(y'(t) \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (1.16)$$

A grandeza $R(t) = \frac{1}{|k(t)|}$ é denominada raio de curvatura e o ponto $\alpha(t) + \frac{1}{|k(t)|} \vec{n}(t)$ é denominado o centro de curvatura, onde $\vec{n}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|(-y'(t), x'(t))\|}$ é um versor normal à curva no ponto t .

1.4.1 Distribuição uniforme no parâmetro

Analisamos alguns gráficos e tabelas (construídos com o auxílio de algoritmos criados no programa Maxima), observando a relação da área com o tipo de parametrização da curva como também a sua forma geométrica. As curvas analisadas foram a circunferência e a elipse. Verificamos que no caso da circunferência e da elipse, tivemos uma boa distribuição de pontos através da distribuição uniforme no intervalo do parâmetro no caso onde a circunferência foi percorrida com velocidade escalar constante (norma do vetor velocidade constante) e também da elipse,

onde tivemos uma velocidade escalar periódica regular (ver as parametrizações da elipse e da circunferência). Para os outros casos, a distribuição uniforme no parâmetro deixa de ser satisfatória, quando comparada com os outros métodos de distribuição propostos neste trabalho.

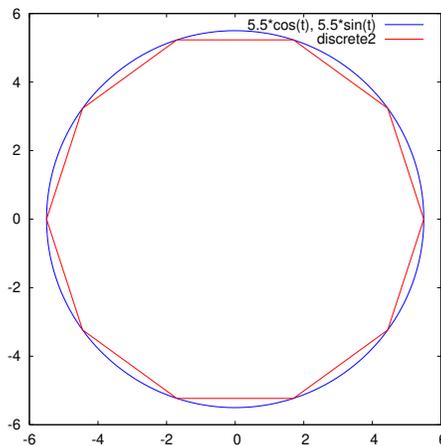


Fig. 1.6: Distribuição uniforme no parâmetro para uma circunferência percorrida com velocidade escalar constante

Ao percorrermos a circunferência com velocidade escalar constante (ver figura 1.6) encontramos uma boa distribuição dos pontos utilizando a distribuição uniforme do parâmetro. Que corresponde a um polígono “regular”. Porém, o mesmo não ocorreu quando percorrermos a circunferência com velocidade escalar variável, pois devido a esta variação tivemos no nosso experimento uma grande concentração de pontos no início da curva e poucos pontos na parte final da curva (isto considerando a velocidade escalar aumentando com o parâmetro). O que resultou numa convergência muito lenta.

O algoritmo usado para criar os gráficos 1.6, 1.7, 1.8 e 1.9 e calcular a área para a distribuição uniforme do parâmetro é dado por:

```
p:10$
I:[0,%pi*2],numer$
u(t):=[5.5*cos(t),5.5*sin(t)]$
tt:makelist(I[1]+(I[2]-I[1])*i/p,i,0,p)$
```

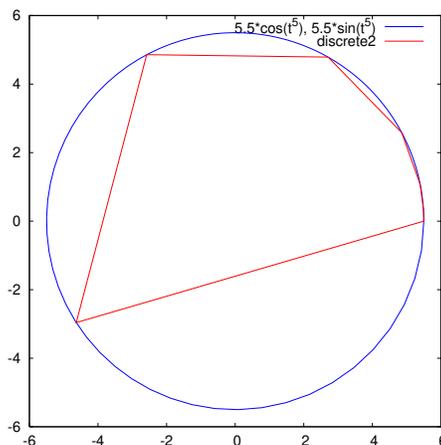
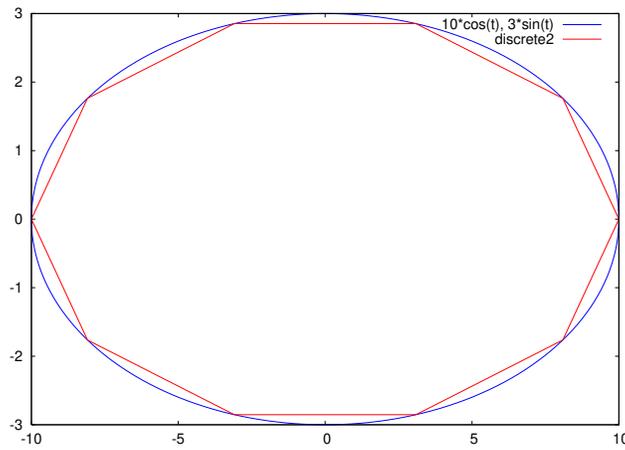
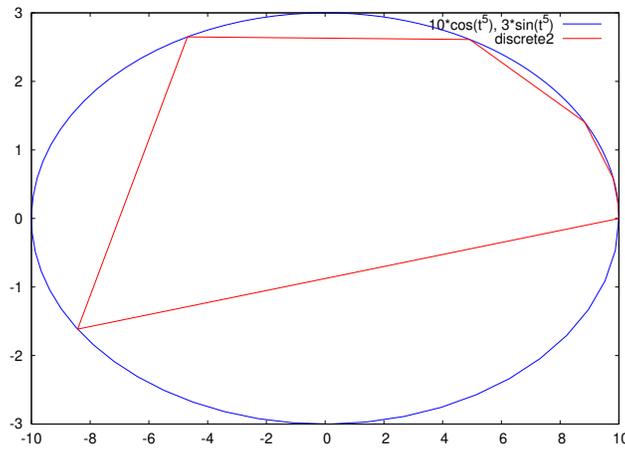


Fig. 1.7: Distribuição não uniforme no parâmetro para uma circunferência parametrizada por $\alpha(t) = (\cos(t^5), \sin(t^5))$

```
L1:flatten(map(u,tt))$
      x:makelist(part(L1,2*i-1),i,1,length(L1)/2),numer$
      y:makelist(part(L1,2*i),i,1,length(L1)/2),numer$
set_plot_option ([gnuplot_preamble,"set size square"])$
plot2d([[parametric,u(t)[1],u(t)[2],[t,I[1],I[2]],[nticks,200]],
        [discrete,x,y]])$
AREA_aprox=0.5*sum(part(x,i)*part(y,i+1)-part(x,i+1)*part(y,i),
        i,1,length(L1)/2-1);
```

onde $u(t)$ representa a curva parametrizada (se desejarmos obter a área de outras curvas basta colocarmos as coordenadas delas entre os colchetes), p o número de pontos a serem distribuídos e I o intervalo de variação do parâmetro t .

Os mesmos resultados podem ser observados para o caso elipse, parametrizada por $u(t)=(10\cos(t), 3\sin(t))$, onde a velocidade escalar varia de forma regular e periódica. Entretanto, quando reparametrizamos a elipse por $\bar{u}(t)=(10\cos(t^5), 3\sin(t^5))$ de modo que a variação da velocidade escalar se torna mais acentuada temos uma má distribuição dos pontos, que correspondem aos vértices do polígono aproximador. Esta distribuição acarretará naturalmente numa convergência mais lenta para o valor da área.

Fig. 1.8: Elipse parametrizada por $\alpha(t) = (10 \cos t, 3 \sin t)$ Fig. 1.9: Elipse parametrizada por $\alpha(t) = (10 \cos(t^5), 3 \sin(t^5))$

1.4.2 Distribuição ponderada pelo raio de curvatura

Uma alternativa que testamos foi a ponderação do parâmetro que leva em consideração as propriedades geométricas da curva (curvatura e do vetor velocidade “normalizado”) os quais forneceram, experimentalmente, bons resultados em cada análise realizada, tanto gráfica quanto numérica, quando comparadas com a distribuição uniforme no parâmetro. A primeira distribuição leva em consideração a variação da curvatura da curva. A ponderação do parâmetro (“passo”) pelo raio

de curvatura foi feita com o auxílio do algoritmo descrito a seguir:

```

p:10$
I: [(0+%pi)^0.2, (%pi*3)^0.2], numer$
u(t):=[10*cos(t^5), 3*sin(t^5)]$
ud(k,i):=subst(t=k,diff(u(t),t,i))$
r(k):=trigsimp((ud(k,1).transpose(ud(k,1)))^1.5/
(ud(k,1)[1].ud(k,2)[2]-ud(k,2)[1].ud(k,1)[2]))$
L:flatten(abs(map(r,makelist(I[1]+i*(I[2]-I[1])/p,i,0,p))))$
L1:makelist(sqrt((part(L,i+1)+part(L,i))/2),
i,1,length(L)-1), numer$
L3:cons(I[1], (I[2]-I[1])*L1/apply("+",L1)), numer$
L5:flatten(map(u,makelist(sum(part(L3,i),i,1,j),
j,1,length(L3))))), numer$
x:makelist(part(L5,2*i-1),i,1,length(L3))$
y:makelist(part(L5,2*i),i,1,length(L3)), numer$
plot2d([[parametric, u(t)[1], u(t)[2], [t,I[1],I[2]],
[nticks, 200]], [discrete,x,y]])$
AREA_aprox=0.5*sum(part(x,i)*part(y,i+1)-part(x,i+1)*part(y,i),
i,1,length(L1));

```

Este algoritmo cria uma lista, ponderada pelo raio de curvatura, dos valores do parâmetro t e aplica estes valores sobre a curva. Distribuindo desse modo os pontos sobre a curva.

Calculamos inicialmente o raio de curvatura médio em cada trecho e fizemos a ponderação do parâmetro pela média geométrica dos raios de curvatura dos pontos “intermediários”, encontrando, portanto, uma lista com os valores para o parâmetro. Atribuindo estes à curva parametrizada determinando as coordenadas dos vértices para a construção do gráfico da poligonal e cálculo da área delimitada pela mesma, utilizando (2.16).

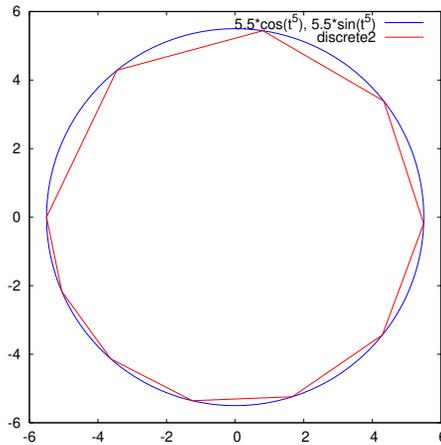


Fig. 1.10: Distribuição ponderada pela curvatura a circunferência $\alpha(t) = (5.5 \cos t^5, 5.5 \sin t^5)$

Para obtermos os resultados na Figura 1.10, tivemos também que considerar o valor inicial do parâmetro, pois devemos tomar cuidado com a parametrização envolvida pois podemos encontrar indeterminações do tipo zero dividido por zero, isto devido ao aparecimento de $\alpha'(t) = 0$, em pontos isolados quando calculamos o raio de curvatura para alguns valores do parâmetro. No caso considerado optamos pelo valor inicial do parâmetro igual à $t_0 = \pi$ obtendo uma distribuição regular dos pontos e resultados melhores que os encontrados pela distribuição uniforme do parâmetro.

Podemos verificar que na elipse também temos uma distribuição melhor dos pontos que a distribuição dada pela distribuição uniforme no parâmetro, pois este tipo de distribuição do parâmetro tende a atribuir um maior número de pontos nas regiões com grande variação de curvatura e poucos pontos em regiões com pouca variação de curvatura, “corrigindo” a má distribuição anterior.

Testamos também a curva $N(t) = 0.5 \cos(t^2) - 1.5 \sin(t^2), 3 \sin(t^2) \sin(2t^2)$ (Figura 1.12, gerada no Winplot), onde a curvatura varia de forma considerável. Para esta curva tivemos que utilizar um número maior de pontos para que pudéssemos obter uma boa aproximação do traço dela, sendo que nos locais de grande variação de curvatura temos um número maior de pontos que nos locais com pouca

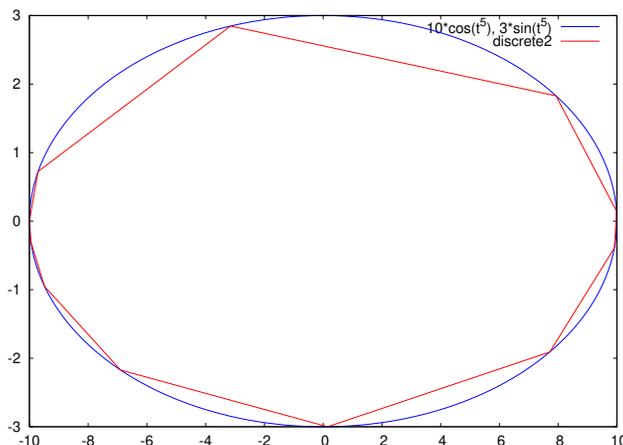


Fig. 1.11: Distribuição regular no parâmetro para a elipse $\alpha(t) = (10 \cos(t^5), 3 \sin(t^5))$

variação de curvatura.

1.4.3 Distribuição ponderada pelo inverso da velocidade

Neste caso, o parâmetro é ponderado em função da velocidade levando em consideração o inverso da média geométrica da velocidade em pontos intermediários situados em cada trecho. O objetivo é o de deixar a distribuição de pontos mais regular possível, com a idéia de aproximar por polígonos com tamanho mais homogêneos de segmentos.

Experimentalmente encontramos uma boa distribuição para as curvas analisadas, tomando o cuidado com o valor inicial do parâmetro para a distribuição dos pontos na curva e considerando um número maior de pontos para curvas que apresentam muita variação na velocidade escalar para que pudéssemos encontrar uma aproximação melhor. O algoritmo utilizado para construção dos gráficos e cálculo da área relacionada a este tipo de parametrização é dado por:

p:10\$

I: [(0)^0.2, (%pi*2)^(0.2)], numer\$

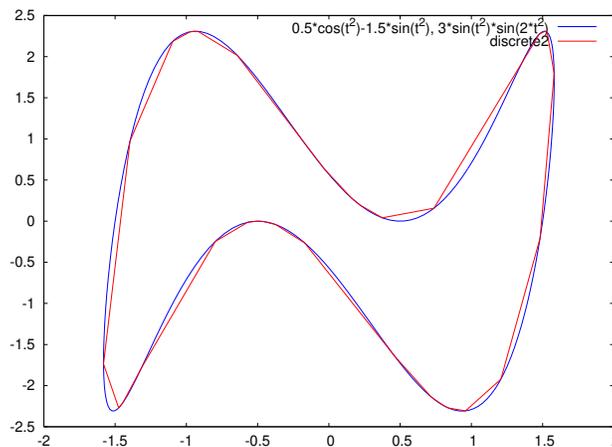


Fig. 1.12: curva $N(t) = 0.5 \cos(t^2) - 1.5 \text{sen}(t^2) + 3 \text{sen}(t^2) \text{sen}(2t^2)$

```

u(t):=[10*cos(t^5),3*sen(t^5)]$
ud(x,i):=subst(t=x,diff(u(t),t,i))$
r(x):=trigsimp((ud(x,1).transpose(ud(x,1)))^(0.5))$
L1:flatten(map(r,makelist(part(I,1)+i*(I[2]-I[1])/p,i,0,p))),
  numer$
L2:makelist(sqrt(2/(part(L1,i+1)+part(L1,i))),
  i,1,length(L1)-1)$
L4:cons(I[1],(I[2]-I[1])*L2/apply("+",L2)),numer$
L6:flatten(map(u,makelist(sum(part(L4,i),i,1,j),j,1,length(L4)))),
  numer$
  x:makelist(part(L6,2*i-1),i,1,length(L6)/2)$
  y:makelist(part(L6,2*i),i,1,length(L6)/2),numer$
plot2d([[parametric, u(t)[1], u(t)[2], [t,I[1],I[2]], [nticks, 200]],
  [discrete,x,y]])$
AREA_aprox=0.5*sum(part(x,i)*part(y,i+1)-part(x,i+1)*part(y,i),
  i,1,length(L1)-1);

```

Com este procedimento, obtemos uma melhor distribuição dos pontos, isto porque à medida que a velocidade escalar aumenta, por exemplo, ocorre uma

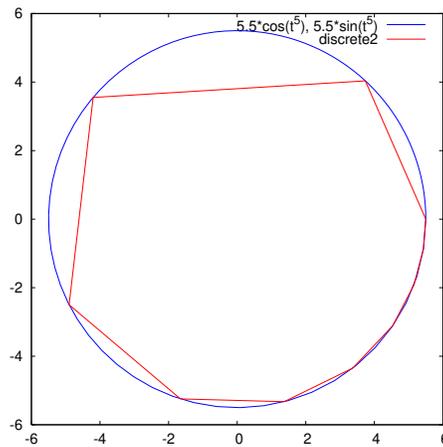


Fig. 1.13: circunferência $\alpha(t) = (5.5 \cos(t^5), 5.5 \text{sen}(t^5))$

“compensação” aproximando de uma distribuição pelo comprimento de arco o que não acontece na distribuição uniforme no parâmetro. Conseguimos resgatar uma boa distribuição com poucos pontos para a circunferência $\alpha(t) = (5.5 \cos t^5, 5.5 \text{sen} t^5)$ e a elipse $\alpha(t) = (10 \cos(t^5), 3 \text{sen}(t^5))$. Levando em consideração também o valor inicial do parâmetro.

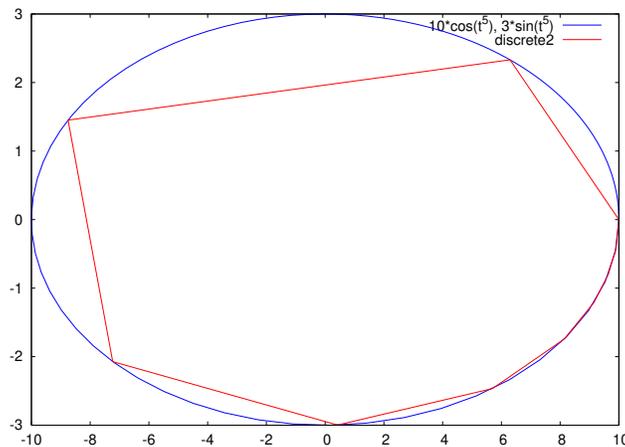


Fig. 1.14: elipse parametrizada por $\alpha(t) = (10 \cos(t^5), 3 \text{sen}(t^5))$

Podemos notar através das Figuras 1.13 e 1.14 que tanto na circunferência como na elipse temos distribuições de pontos melhor que as distribuições obtidas pela distribuição uniforme no parâmetro.

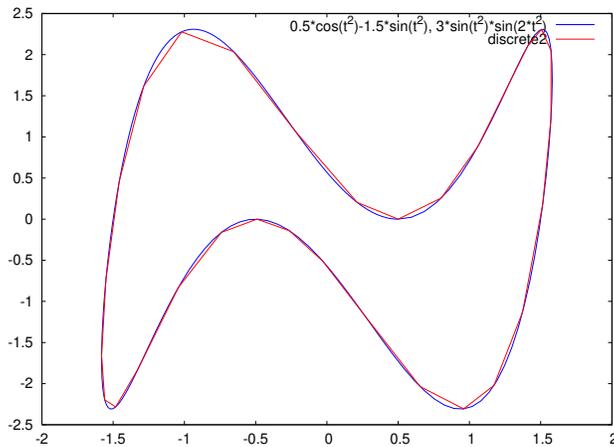


Fig. 1.15: curva $N(t) = 0.5\cos(t^2) - 1.5\sin(t^2), 3\sin(t^2)\sin(2t^2)$

As tabelas a seguir contém os valores aproximados da área delimitada por cada curva variando-se o número de pontos e a parametrização, com auxílio dos algoritmos apresentados anteriormente.

Como era de se esperar, ao partirmos da circunferência com velocidade constante, como a curvatura é constante não dá diferença, a não ser de aproximação nas três formas de distribuição de vértices aqui estudadas.

Mas, quando percorrermos a circunferência com velocidade escalar variável, temos que a distribuição dos pontos feita pela distribuição uniforme do parâmetro nos fornece maus resultados se comparados com os obtidos pelos outros métodos utilizados neste trabalho, isto pode ser melhor observado quando consideramos dada por $\alpha(t) = (5\cos(t^2), 5\sin(t^2))$. Podemos observar claramente o efeito “corretor” das distribuições que levam em conta a curvatura e o vetor velocidade, (Tabela 1.2)

A mesma análise foi feita para a elipse dada por $\alpha(t) = (10\cos(t^5), 3\sin(t^5))$.

Outros tipos de ponderações no parâmetro, utilizadas na obtenção de uma melhor distribuição de pontos podem ser encontradas em [7],[13]. Para curvas onde não se tem uma parametrização, uma “estimativa” do raio de curvatura pode ser feita se lembrarmos que o raio de curvatura é o raio do círculo “por três pontos consecutivos” (círculo osculador) da curva. Abordagens desta forma podem ser

Pontos	Área			Erro Absoluto		
	Uniforme	Curvatura	Velocidade	Uniforme	Curvatura	Velocidade
10	68.77	74.05	73.20	9.76	4.48	5.33
30	77.39	77.96	77.95	1.14	0.57	0.58
50	78.13	78.33	78.32	0.41	0.21	0.21
100	78.43	78.48	78.48	0.10	0.05	0.05
Área Exata	$25\pi \approx 78.54$					

Tabela 1.1: Aproximação da área do círculo parametrizada por $\alpha(t) = (5 \cos(t^2), 5 \sin(t^2))$

encontradas em trabalhos de computação gráfica ([7]).

Pontos	Área			Erro Absoluto		
	Uniforme	Curvatura	Velocidade	Uniforme	Curvatura	Velocidade
10	50.99	84.83	87.64	43.25	9.41	6.61
30	87.87	92.91	93.46	6.37	1.33	0.79
50	91.89	93.75	93.95	2.35	0.49	0.288
100	93.65	94.12	94.17	0.59	0.12	0.072
Área Exata	$30\pi \approx 94.25$					

Tabela 1.2: Aproximação da área da elipse parametrizada por $\alpha(t) = (10 \cos t^5, 3 \sin t^5)$

Planímetros

Neste capítulo estudamos o funcionamento de dois modelos de planímetro que são instrumentos utilizados para o cálculo de área por processos mecânicos. O fundamento teórico dos planímetros é dado pelo Teorema de Green em todos estes modelos. O desenvolvimento aqui apresentado inclui os detalhes teóricos do funcionamento destes instrumentos os quais se constituem em interessante motivação para apresentação e proposição de pequenos projetos de investigação aos alunos de cálculo de várias variáveis. As principais referências utilizadas foram [8],[16],[2] e [14].

2.1 Introdução - O Teorema de Green

Os planímetros são instrumentos usados em geral para medir áreas de figuras planas, dentre os mais conhecidos podemos citar os planímetros polar e o linear. Apesar de utilizarem mecanismos diferentes para calcular a área de uma região delimitada por uma curva fechada simples, apenas contornando esta curva ao final do percurso eles nos fornecem o valor da área delimitada por ela simplesmente pelo número de voltas de uma pequena roda vezes uma constante que depende

das medidas do aparelho. A facilidade da obtenção do valor da área pode ser muito útil, por exemplo, na determinação da área de figuras bastante irregulares.

O planímetro que analisamos com mais detalhes aqui é o introduzido por Jakob Amisler Leffon em 1854, conhecido como planímetro polar. Existem registros de versões anteriores de planímetros (Herman, Golege em 1814). Não encontramos muito da fundamentação teórica destes, mas idéias subjacentes ao teorema de Green também devem fazer parte dessa fundamentação. Em 1907, J. Y. Whetley escreveu um livro, intitulado “The Polar Planimeter”. Existem atualmente versões eletrônicas dos planímetros. Mesmo estas não parece ser muito utilizadas pelos engenheiros.

Programas computacionais como Autocad possuem ferramentas que possibilitam o cálculo da área uma vez que temos o desenho no computador. Mas, como comentamos na introdução, julgamos importante que o conhecimento dos fundamentos matemáticos que estão envolvidos, sejam do conhecimento dos alunos, em especial dos alunos de engenharia.

Observamos inicialmente que um planímetro relaciona o percurso feito sobre uma curva fechada com a área que esta contorna e que esta relação pode ser estabelecida pelo clássico “Teorema de Green” que relaciona os conceitos de integral de linha de um campo de vetores no plano e integral dupla de uma função escalar [16], [2]. As curvas C considerada são as *simples fechadas regulares de classe C^1 por partes*, isto é, $C = f[a, b]$ onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua tal que para $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ é de classe C^1 com $f'(t) \neq (0, 0) \forall t \in (t_i, t_{i+1})$, $f[a, b]$ é injetora e $f(a) = f(b)$.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Green (1828)). *Sejam C uma curva simples fechada regular por partes, orientada no sentido anti-horário e $\vec{F} = (M(x, y), N(x, y))$, um campo vetorial, onde M, N e suas derivadas parciais são contínuas num conjunto aberto de \mathbb{R}^2 que contém a curva C e a região R interior a esta. Então vale a igualdade:*

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.1)$$

Para o caso particular em que

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = k \quad (2.2)$$

onde k é uma constante, temos:

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R k dx dy = k \iint_R dx dy = k \iint_R dA.$$

Neste caso o valor da área de R é dado simplesmente calculando a integral de linha em C multiplicada pela constante $\frac{1}{k}$,

$$\text{Área de } R = \frac{1}{k} \oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (2.3)$$

Como comentamos no capítulo anterior, podemos deduzir o caso especial do “Teorema de Green” em que $M(x, y) = -\frac{y}{2}$ e $N(x, y) = \frac{x}{2}$ e, portanto, $k = 1$, para calcular a área de uma região por integral de linha. Naturalmente, o Teorema de Green é muito mais geral e envolve mais pré-requisitos do que o caso da área.

2.1.1 Área de um polígono pelo Teorema de Green

Como um possível exercício a ser proposto como aplicação do Teorema de Green, podemos refazer o cálculo de área englobada por uma poligonal usando agora o Teorema de Green.

De fato, dado um polígono de n vértices, denotado por P_1, \dots, P_n (ver Figura 2.1), podemos parametrizar cada lado do polígono da seguinte forma:

$$\overline{P_i P_{i+1}}(t) = (1 - t)P_i + tP_{i+1}, \quad (2.4)$$

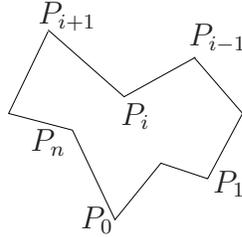


Fig. 2.1: Polígono

onde $t \in (0, 1)$.

Utilizando (2.2) para o caso particular de $M(x, y) = -\frac{y}{2}$ e $N(x, y) = \frac{x}{2}$, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \\ \oint_C -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy &= \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx dy = \iint_R dx dy = \text{Área de R} \end{aligned} \quad (2.5)$$

O cálculo dessa integral de linha é dado simplesmente calculando a integral de linha em cada lado do polígono e somando-se estes resultados. Assim,

$$\text{Área de R} = \oint_C -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{\overline{P_i P_{i+1}}} xdy - ydx \quad (2.6)$$

Sendo $P_i = (x_i, y_i)$ e $P_{n+1} = P_0$, temos de (2.5) que

$$\begin{aligned} \overline{P_i P_{i+1}}(t) &= (1-t)(x_i, y_i) + t(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ \overline{P_i P_{i+1}}(t) &= (x_i, y_i) + t(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ou seja, temos a parametrização do segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$, com as respectivas coordenadas:

$$x_i(t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i) \quad (2.8)$$

$$y_i(t) = y_i + t(y_{i+1} - y_i), \quad (2.9)$$

lembrando que $t \in (0, 1)$.

Assim:

$$\begin{aligned} \text{Área de R} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{\overline{P_i P_{i+1}}} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left(x_i(t) \frac{dy_i}{dt} - y_i(t) \frac{dx_i}{dt} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left((x_i + t(x_{i+1} - x_i))(y_{i+1} - y_i) + \right. \\ &\quad \left. - (y_i + t(y_{i+1} - y_i))(x_{i+1} - x_i) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[x_i(y_{i+1} - y_i)t + (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i) \frac{t^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. - y_i(x_{i+1} - x_i)t - (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[x_i(y_{i+1} - y_i) + (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i) \frac{1}{2} + \right. \\ &\quad \left. - y_i(x_{i+1} - x_i) - (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1} \end{aligned}$$

Refazemos assim o resultado apresentado no Capítulo 1 que mostra a área de um polígono simples sendo calculada.

2.2 O planímetro polar

Mostraremos a seguir como o instrumento mecânico planímetro calcula a integral de linha e a relação de k com as medidas do mesmo. Isso será feito inicialmente com o planímetro polar e depois estendido ao planímetro linear.

O planímetro polar é um instrumento com dois braços acoplados, não necessariamente iguais, geralmente feitos de metal e com abertura entre eles variando de 0° até 180° . Numa das extremidades temos uma ponta que pode ser fixada em superfícies planas (pólo) e no extremo do outro braço temos um ponto móvel (traçador), o qual percorre a curva que delimita a área que desejamos medir. Neste mesmo braço em sua outra extremidade temos uma pequena roda com um contador, que registra o número de voltas que ela dá quando o ponto móvel (traçador) percorre a curva. Esta roda encontra-se próxima ao vínculo entre os dois braços (pivô) (ver Figura 2.2). A roda é colocada perpendicular ao braço com a ponta móvel (braço traçador) e gira perpendicular a este como detalharemos no que se segue.

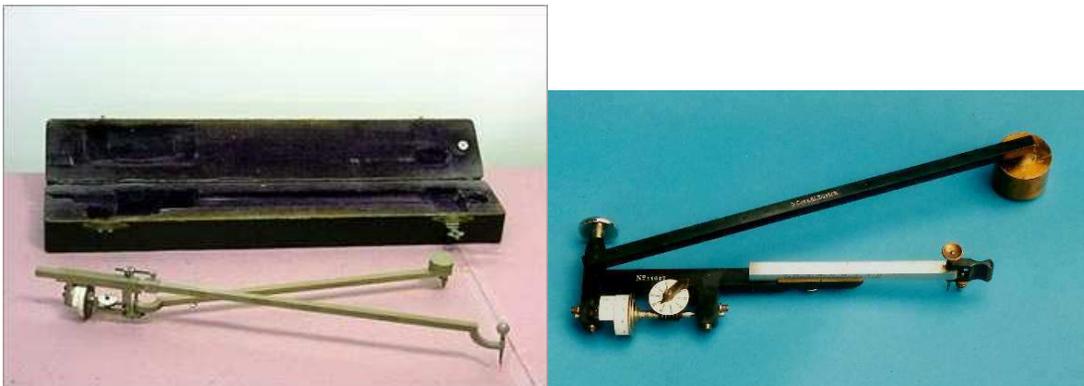


Fig. 2.2: Planímetro polar

Vamos inicialmente descobrir a relação de um fator k como em (2.2) com as medidas do instrumento, para isso devemos primeiro encontrar as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ de forma que se verifiquem as equações (2.1) e (2.2). Como a roda é um dos elementos que nos fornece a área, devemos então pensar num campo de direções perpendicular ao braço do traçador, para isso introduziremos os seguintes

dados:

- Inserimos um sistema cartesiano de modo que a origem do sistema cartesiano coincida com a posição da ponta fixa, C;
- A ponta fixa pode ser colocada na parte interna ou externa, vai depender da região da qual desejamos calcular a área.

Denotaremos por B o ponto de acoplamento dos braços, por A a extremidade livre do braço traçador, e por d e L o comprimento dos braços (ver Figura 2.3).

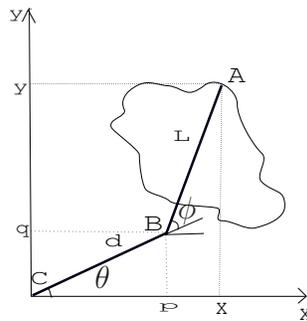


Fig. 2.3: região com planímetro

Para encontrarmos um campo de vetores perpendicular ao braço traçador, podemos tomar o vetor $\vec{u} = (x - p, y - q)$ que é paralelo ao braço móvel, e um vetor perpendicular ao braço móvel $\vec{v} = (q - y, x - p)$, do traçador que realiza movimento no sentido anti-horário. O campo de direções será dado por:

$$F(x, y) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{L}(q - y, x - p). \quad (2.10)$$

Como o ponto B também se movimenta e este movimento está relacionado com o do braço móvel, podemos então associar as coordenadas p e q às coordenadas x, y e verificar que as funções que compõem o campo de direções e suas derivadas parciais são contínuas. Como estamos interessados nas derivadas parciais de M e N , vamos utilizar as variáveis auxiliares ϕ e θ , que representam, respectivamente, o complementar do ângulo de abertura entre os dois braços e o ângulo entre o braço fixo e o eixo x (ver figura 2.3). Desse modo temos as seguintes relações:

$$\sin(\phi + \theta) = \frac{(y - q)}{L}, \quad \cos(\phi + \theta) = \frac{(x - p)}{L}, \quad \cos(\theta) = \frac{p}{d} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{q}{d}$$

assim,

$$q - y = -L \operatorname{sen}(\phi + \theta), \quad x - p = L \cos(\phi + \theta), \quad p = d \cos(\theta) \quad \text{e} \quad q = d \operatorname{sen}(\theta)$$

$$x = L \cos(\phi + \theta) + d \cos(\theta) \quad (2.11)$$

$$y = L \operatorname{sen}(\phi + \theta) + d \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.12)$$

substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10), obtemos um campo de direções em função das variáveis auxiliares θ e ϕ com $0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \phi < \pi$. Estamos supondo que a curva fique na região interior a um disco de raio $L + d$.

$$F(\theta, \phi) = \frac{1}{L}(-L \operatorname{sen}(\phi + \theta), L \cos(\phi + \theta)) = (-\operatorname{sen}(\phi + \theta), \cos(\phi + \theta)). \quad (2.13)$$

Onde,

$$M(\theta, \phi) = -\operatorname{sen}(\phi + \theta), \quad (2.14)$$

$$N(\theta, \phi) = \cos(\phi + \theta). \quad (2.15)$$

Vamos agora, através da regra da cadeia encontrar o valor de k . De fato, sejam

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M}{\partial \phi} = \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial \theta} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{cases} \quad (2.17)$$

Sendo as derivas parciais de M , N , x e y em função das variáveis θ e ϕ , dadas por:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -(L \operatorname{sen}(\theta + \phi) + d \operatorname{sen}(\theta)) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -L \operatorname{sen}(\theta + \phi) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = (L \cos(\theta + \phi) + d \cos \theta) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = L \cos(\theta + \phi) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial M}{\partial \phi} = -\cos(\theta + \phi) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = \frac{\partial N}{\partial \phi} = -\operatorname{sen}(\theta + \phi), \quad (2.23)$$

substituindo (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) e (2.23) nos sistemas (2.16) e (2.17), através do método de eliminação, encontramos as derivadas parciais de M e N em função das variáveis x e y, com isso calculamos o valor de k dado por (2.2), ou seja:

$$\begin{cases} -(L \operatorname{sen}(\theta + \phi) + d \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial M}{\partial x} + (L \cos(\theta + \phi) + d \cos(\theta)) \frac{\partial M}{\partial y} = -\cos(\theta + \phi) \\ -L \operatorname{sen}(\theta + \phi) \frac{\partial M}{\partial x} + L \cos(\theta + \phi) \frac{\partial M}{\partial y} = -\cos(\theta + \phi) \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} -(L \operatorname{sen}(\theta + \phi) + d \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial N}{\partial x} + (L \cos(\theta + \phi) + d \cos(\theta)) \frac{\partial N}{\partial y} = -\operatorname{sen}(\theta + \phi) \\ -L \operatorname{sen}(\theta + \phi) \frac{\partial N}{\partial x} + L \cos(\theta + \phi) \frac{\partial N}{\partial y} = -\operatorname{sen}(\theta + \phi) \end{cases} \quad (2.25)$$

Resolvendo-se os sistemas (2.24) e (2.25), obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\cot(\phi + \theta)}{L(\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta))} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\tan(\phi + \theta)}{L(\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta))} \quad (2.27)$$

Substituindo os resultados em (2.2)

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\tan(\phi + \theta)}{L(\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta))} - \frac{\cot(\phi + \theta)}{L(\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta))} = \\
&= \frac{\tan(\phi + \theta)[\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta)] - \cot(\phi + \theta)[\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta)]}{L(\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta))(\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta))} = \\
&= \frac{\tan(\phi + \theta)[\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta)] - 1 + \tan(\theta) \cot(\phi + \theta)}{L(\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta))(\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta))} = \\
&= \frac{\tan(\phi + \theta)[\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta)] - \tan(\theta) \cot(\theta) + \tan(\theta) \cot(\phi + \theta)}{L(\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta))(\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta))} = \\
&= \frac{\tan(\phi + \theta)[\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta)] - \tan(\theta)[\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta)]}{L(\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta))(\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta))} = \\
&= \frac{[\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta)][\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta)]}{L(\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta))(\cot(\theta) - \cot(\phi + \theta))} = \\
k &= \frac{1}{L}.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor de k depende apenas do comprimento do braço móvel. A próxima etapa é mostrar a relação do planímetro com integral de linha, ou seja, como ele a calcula. Para isso vamos analisar com mais detalhes o movimento da roda.

A roda gira na direção perpendicular ao braço móvel, quando há um movimento paralelo a este, ela desliza sobre o plano. Portanto, o único movimento que é computado pela roda é o movimento perpendicular ao braço móvel.

Dado o campo $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$, podemos procurar suas curvas integrais, isto é, as curvas que são sempre tangentes ao campo. Procuramos curvas $(x(s), y(s))$ de modo que o vetor tangente satisfaça $\vec{v} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}) = (M(x, y), N(x, y)) = F(x, y)$. Se $\|F(x, y)\| = 1$ então a curva sai parametrizada pelo comprimento de arco com $F(x(s), y(s)) \cdot \vec{v}(s) = 1$ e a integral de linha de um campo unitário em cima de uma curva integral mede o comprimento desta curva, pois

$$\begin{aligned}
\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy &= \int_0^{s_1} \left(M(x(s), y(s)) \frac{dx}{ds} + N(x(s), y(s)) \frac{dy}{ds} \right) ds \\
&= \int_0^{s_1} F(C(s)) \cdot \vec{v}(s) ds = \int_0^{s_1} ds = s_1 = \\
&= \text{Comprimento da curva}
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

Do mesmo modo podemos pensar em curvas ortogonais ao campo, isto é, curvas que são sempre perpendiculares ao campo. Ou seja, uma curva $C(s) = (x(s), y(s))$ tal que o vetor tangente à curva C , definido por $\vec{v} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$, e o campo F obedecem a relação $F(x(s), y(s)) \cdot \vec{v}(s) = 0$.

Quando o planímetro percorre uma curva integral do campo, a rodinha fixada perpendicularmente ao braço móvel, roda perfeitamente livre. O contador acoplado a esta rodinha mede o número de voltas que ela dá ao se deslocar sobre a curva. Sejam n_i (pode não ser inteiro) esta medida e \tilde{d} o diâmetro da rodinha. O comprimento total da curva integral vale

$$\text{Comprimento} = \oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = n_i \pi \tilde{d}.$$

Quando o Planímetro percorre uma curva ortogonal, a roda desliza sobre o plano da figura, o medidor acoplado na rodinha indica zero, ou seja, o valor da integral de linha do campo sobre a curva ortogonal que vale nessa situação zero.

Qualquer curva fechada C regular por partes pode ser aproximada por vários segmentos de curvas integrais e ortogonais ao campo intercaladas, que denotaremos por C_1, C_2, \dots, C_m . Então,

$$\begin{aligned}
\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy &\approx \oint_{C_1} M(x, y)dx + N(x, y)dy + \dots + \\
&+ \oint_{C_m} M(x, y)dx + N(x, y)dy = (n_1 + \dots + n_m) \pi d = n \pi \tilde{d},
\end{aligned}$$

onde n é o número dado pelo contador ao percorrermos a curva C . Ou seja,

$$\text{Comprimento} = \oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = n\pi\tilde{d},$$

em que n corresponde ao número de voltas e \tilde{d} é o diâmetro da roda. Encontrado o valor da integral de linha, o valor da área é dado por:

$$\text{Área} = \frac{1}{k} \oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = n\pi\tilde{d}L$$

2.3 O planímetro linear

Como vimos, o braço de comprimento d que possui ponta fixa não influencia nas rotações que a roda faz ao percorrer a curva, ou seja, no cálculo da área, podendo então ser desprezado. Daí ter sido concebido um novo planímetro contendo apenas o braço com a ponta móvel sendo que o ponto onde se encontrava o vínculo entre os dois braços pertencente agora uma reta com a roda perpendicular ao braço móvel a uma certa distância do pivô (ver Figura 2.4). Este outro planímetro é conhecido como “Planímetro linear”.

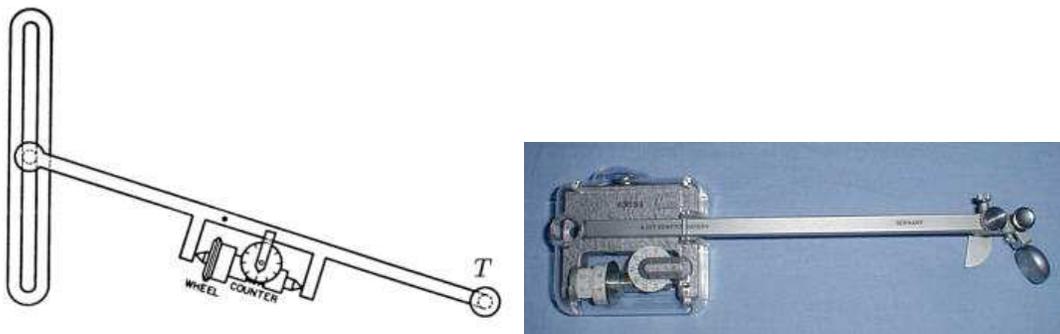


Fig. 2.4: Planímetro linear

Colocando um sistema de coordenadas tal que a linha reta coincida com o eixo y (ver Figura 2.5), temos que as coordenadas de B (pivô) são dadas por $(0, Y)$ e as coordenadas de A por (x, y) . Por simplicidade, consideramos a região pertencente

ao primeiro quadrante e além disso que o valor de x não pode ser maior que o valor de L , (pois nesse caso, não teríamos o planímetro passando naquele ponto). Portanto $x \leq L$ (notamos ainda que se por acaso a região estiver contida, por exemplo, nos dois primeiros quadrantes então consideraríamos $|x| \leq L$). No caso particular em que $x = L$ teríamos $Y = y$, e então para entendermos melhor o planímetro vamos admitir que $x < L$.

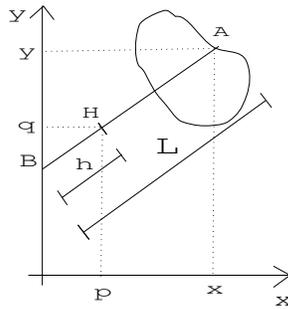


Fig. 2.5: Região com o planímetro linear

Fazendo-se um procedimento semelhante ao do planímetro polar, mostraremos inicialmente a relação estabelecida entre a área e o caminho percorrido pelo planímetro determinado pelo conjunto de dados: número n de voltas da roda, diâmetro D da roda e comprimento L do braço.

Para encontrar um campo de direções F perpendicular ao braço móvel, que seja paralelo ao movimento da roda fixada em H na direção paralela ao braço, basta tomarmos um vetor perpendicular ao vetor $\overrightarrow{BH} = (a, b)$ o qual é paralelo ao vetor $\overrightarrow{BA} = (x, y - Y)$. Sejam $\|\overrightarrow{BH}\| = h$ e $\|\overrightarrow{BA}\| = L$, então:

$$\overrightarrow{BH} = \frac{h}{L} \overrightarrow{BA}. \quad (2.29)$$

Portanto de (2.29), temos que $a = \frac{h}{L} x$ e $b = \frac{h}{L}(y - Y)$ e o nosso vetor \vec{v} perpendicular a \overrightarrow{BH} é dado por:

$$\vec{v} = (-b, a) = \frac{h}{L}(Y - y, x) \quad (2.30)$$

Temos também que a posição do pivô está relacionada com o movimento do planímetro sobre a região, ou seja, Y depende das variáveis x e y onde a relação

entre estas é dada por:

$$(x - 0)^2 + (y - Y)^2 = L^2 \implies |y - Y| = \sqrt{L^2 - x^2}$$

$$Y = y - \sqrt{L^2 - x^2} \quad (2.31)$$

utilizando-se (2.30) e (2.31) encontramos o campo de direções, definido por:

$$F(x, y) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{h} \frac{h}{L} (Y - y, x) = \frac{1}{L} (-\sqrt{L^2 - x^2}, x)$$

Desta maneira, obtemos $M(x, y) = -\frac{1}{L} \sqrt{L^2 - x^2}$ e $N(x, y) = \frac{x}{L}$ e assim:

$$k = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{L}$$

Utilizando a relação (2.3) através de análise análoga à feita para o planímetro polar e a integral de Green e considerando também as mesmas medidas, obtemos a equação:

$$\text{ÁREA} = \frac{1}{k} \oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = n\pi DL$$

2.4 Cálculo da área da Lagoa da Jansen

Utilizamos o planímetro polar (o mesmo poderia ser feito com o planímetro linear) para calcular a área da Lagoa da Jansen com o objetivo de entendermos o seu funcionamento na prática.

Através do programa “Google Earth” conseguimos a imagem da Lagoa da Jansen (ver Figura 2.6). Utilizamos então o planímetro polar do Laboratório de Geotecnia da Faculdade de Engenharia Civil (FEC) da Unicamp. O uso do planímetro é feito da seguinte maneira: primeiro desenhamos um quadrado de área conhecida e fazemos um certo número de leituras, ou seja, contornamos a curva que delimita a área e em cada volta anotamos o número de voltas da roda (em geral fazemos três leituras); logo em seguida calculamos a média das leituras

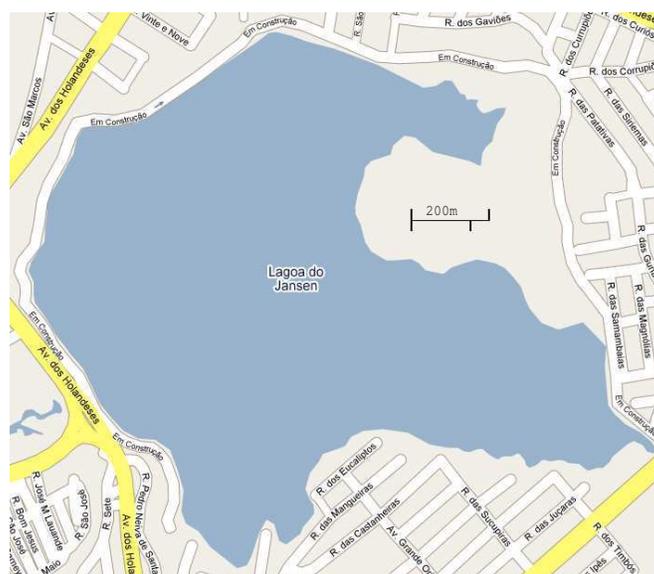


Fig. 2.6: Lagoa da Jansen

feitas. Esta leitura média fica então relacionada com o valor da área do quadrado que é conhecida. Fazemos agora um outro número de leituras sobre a figura e calculamos a média, com esta nova leitura média encontramos a área do mapa aplicando a “regra de três”. Lembramos então que esta área encontrada ainda não é o valor real, para encontrar este valor, devemos multiplicar a área encontrada pelo fator de escala ao quadrado.

Para este trabalho tivemos o fator de escala $23 : 2.10^5$ e tomamos um quadrado de área 100cm^2 . Encontrando assim que o valor aproximado da área da lagoa corresponde à 1190582.57m^2 , ou 119.5 hectares, valor próximo ao que encontramos pela aproximação poligonal discutida no Capítulo 1.

O cálculo da área (variável) de lagoas, é utilizado em problemas de poluição. O modelo matemático usual para simulações numéricas que estimam a poluição de uma lagoa é baseado na concentração temporal da carga de DBO (Demanda Bioquímica de Oxigênio), em g/l , a qual leva em consideração vários parâmetros e a área é fundamental no processo de autodepuração, ou seja, capacidade do corpo receptor receber efluentes sem causar danos que afetem o ecossistema aquático [19].

2.5 Alguns dados históricos sobre George Green

É interessante notar que na forma que foi descrito aqui o funcionamento dos planímetros, usamos o Teorema de Green que foi publicado pela primeira vez em 1828, como relatamos a seguir e no entanto, segundo ([5]), existem registros de planímetros desde 1814. Portanto a fundamentação destes foi estabelecida antes da referida publicação. Não encontramos dados sobre qual teria sido esta fundamentação, mas pretendemos investigar futuramente.

O relato que se segue foi extraído do artigo ([6]) e descreve um pouco da trajetória e das importantes contribuições de George Green.

George Green nasceu em 1793 em Nottingham na Inglaterra e era filho único. O seu pai possuía uma padaria próxima ao centro de Nottingham na qual Green trabalhou durante cinco anos. Depois foi trabalhar num moinho que era do seu pai, no qual trabalhou por bastante tempo.

Em março de 1801, ele foi matriculado na escola de Robert Goodacre, em Nottingham, onde permaneceu por 18 meses. O período que permaneceu nesta escola foi a única educação formal de Green até os seus 40 anos, quando ingressou em Gonville and Caius College, Cambridge em 1833.

No período de 1802 à 1823 não se tem informações se Green obteve algum tipo de auxílio no seu desenvolvimento matemático ou se ele era completamente autodidata. Sabe-se que teve sempre o suporte do pai que tinha boas condições financeiras e sabia de seu fascínio por Astronomia e Ciência Natural.

Em 1823, associou-se à biblioteca de Nottingham, o centro de atividade intelectual da cidade. Obteve assim estímulo, suporte, e acesso ao *Philosophical Transactions* da Royal Society e outras revistas científicas. Em 1828, Green publicou seu primeiro trabalho, “*Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*”, e neste trabalho de aproximadamente 70 páginas, que está contido a derivação do Teorema de Green e também as Funções de Green e relações com os problemas de eletrostática.

O caminho habitual para publicações de artigos científicos na Inglaterra era então em duas revistas de duas sociedades: a Royal Society e a Cambridge Philosophical Society. Porém, como Green não possuía qualificações formais e nem contatos com o meio científico, não conseguiu publicar o seu artigo numa revista. Teve então que pagar para o seu artigo ser publicado privativamente em Nottingham.

Em 1833, Green, com apoio de Sir Edward Bromhead, de Lincoln, que havia lido o seu ensaio de 1828, publicou seu primeiro artigo numa revista. Novamente este artigo era sobre eletricidade, porém com conselhos de Bromhead, publicou sobre hidrodinâmica, movimento de ondas e óptica, assuntos de mais interesse no período, num total de oito artigos publicados, no período de 1835 a 1839.

Green, então aos 40 anos, entrou para o Gonville and Caius College, Cambridge, a mesma Universidade de Bromhead. Ensinou no Caius College e foi eleito Fellow em Novembro de 1839. Com a saúde declinando, voltou para Nottingham em 1840 onde morre em 1841.

A inspiração para ensaio de Green de 1828 vinha da França, de Laplace e Siméon D. Poisson. A lei do inverso do quadrado das distâncias para forças entre duas cargas tinha sido então recentemente estabelecida experimentalmente por Poisson, que tinha mostrado como esta determinava a distribuição de carga sobre superfícies de condutores. Ele fazia grande uso do conceito de potencial, nome o qual ele estabeleceu.

Por volta de 1840 muitos trabalhos de Green estavam publicados, mas sua contribuição mais importante, o “Essay”, não havia ainda sido publicado numa revista. Foi posteriormente organizada e publicada no Crelles’s Journal por William Thompson e Lord Kelvin, que ingressaram em Cambridge logo depois de G. Green. Assim como outros importantes físicos e matemáticos deste período, como Rayleigh e Maxwell, eles foram também muito influenciados pelos trabalhos de George Green.

Transformações que preservam áreas

Abordamos neste capítulo algumas transformações do plano no plano que preservam áreas. Inicialmente, vamos explicitar uma propriedade usada para determinar se a transformação preserva ou não a área delimitada pela curva inicial. Estabelecemos uma caracterização das transformações lineares que preservam áreas na seção 3.3 e analisamos o efeito destas num círculo. Apresentamos também alguns tipos de transformações mais gerais que preservam áreas de regiões do plano. As principais referências utilizadas neste capítulo, foram [4], [15],[1], [9], [10], [11], [15], [16], [17], [12] e [2].

3.1 Transformações do plano no plano

Nosso estudo sobre transformações do plano no plano tem como enfoque as transformações que preservam áreas. Vamos inicialmente introduzir e exemplificar alguns conceitos que serão utilizados ao longo deste capítulo, fazendo uma análise geométrica das transformações lineares que satisfazem esta condição. Uma

transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de \mathbb{R}^2 (ver Figura 3.1).

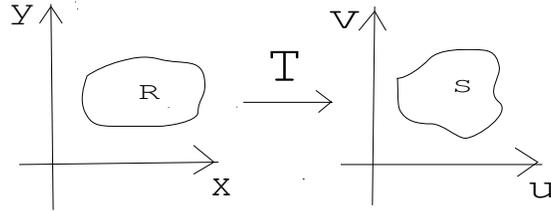


Fig. 3.1: Transformação de uma região em outra

T transforma uma região R numa região S no plano uv e é expressa por $T(x, y) = (u, v)$, com $(x, y) \in R$ e $(u, v) \in S$, sendo que $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ são funções reais. Sendo $T(x_1, y_1) = (u_1, v_1)$, dizemos que o ponto (u_1, v_1) é a imagem do ponto (x_1, y_1) pela transformação T . Assim, S é o conjunto das imagens dos pontos de R do plano que denominamos simplesmente de Imagem de R . Resumimos a seguir conceitos e resultados sobre transformações lineares [4], [15],[1].

Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita linear se para quaisquer $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- i) $T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2)$
- ii) $T(\alpha w_1) = \alpha T(w_1)$

Uma transformação do plano no plano é linear se, e somente se, tem a forma

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) \quad (3.1)$$

onde a, b, c, d são constantes reais. Matricialmente podemos expressar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e assim a cada transformação linear podemos associar univocamente uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

que é sua matriz em relação à base canônica.

Os exemplos a seguir foram ilustrados com o auxílio do *software* Winplot.

Expansão ou contração uniforme : Dados $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha > 0$ a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma expansão ou contração uniforme quando $T(u) = \alpha T(u)$ (se $\alpha > 1$, teremos uma expansão e para $0 < \alpha < 1$ obteremos uma contração). Estas transformações preservam a forma.

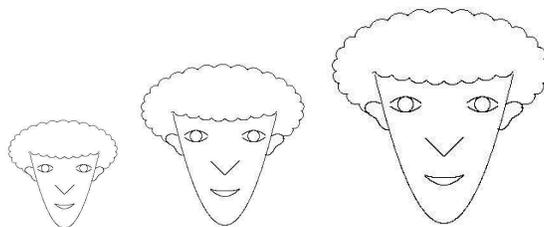


Fig. 3.2: Contração e Expansão da uma imagem do meio

Reflexão em torno dos eixos cartesianos : Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reflexão em torno eixo y quando $T(x, y) = (-x, y)$. Nesta transformação os valores das ordenadas são conservados e os da abscissas ficam com o sinal contrário. No caso da reflexão em relação ao eixo x temos as abscissas mudam de sinal e as ordenadas não se alteram, ou seja, $T(x, y) = (x, -y)$.

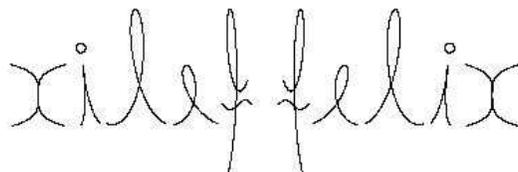


Fig. 3.3: Reflexão no eixo dos y

Reflexão na origem Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reflexão na origem quando $T(x, y) = (-x, -y)$. Nesta transformação

os valores das abcissas e das ordenadas apenas mudam de sinal. A matriz associada a esta transformação em relação à base canônica é dada por:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário Uma rotação de um ângulo θ é uma transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$R_\theta = (x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta), x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta))$$

Uma transformação que também preserva forma (e distância) é a translação, apesar de não ser uma transformação linear.

Exemplos de transformações lineares que preservam áreas são as **isometrias lineares**, isto é, transformações lineares que preservam distâncias.

Uma transformação linear é uma isometria se, e somente se, sua matriz associada for ortogonal [4]. Isometrias lineares preservam, portanto, além do comprimento, o ângulo, ou seja, formas e tamanhos. Como os vetores de uma matriz ortogonal são ortonormais só existem duas possibilidades para as isometrias lineares:

i) **As rotações de um ângulo θ , as quais tem por matrizes**

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Notamos que $\det A = 1$, neste caso.

ii) **As reflexões por uma reta** passando pela origem e formando um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com o eixo x. Estas terão por matrizes:

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

($\det B = -1$, neste caso)

Para vermos que B é de fato uma reflexão através de uma reta, decompos a matriz B , diagonalizando-a através de seus autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e autovetores $v_1 = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}))$ e $v_2 = (-\sin(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2}))$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

3.2 O jacobiano das transformações que preservam áreas

Consideramos uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com derivadas parciais contínuas, dadas por $(u, v) = T(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$.

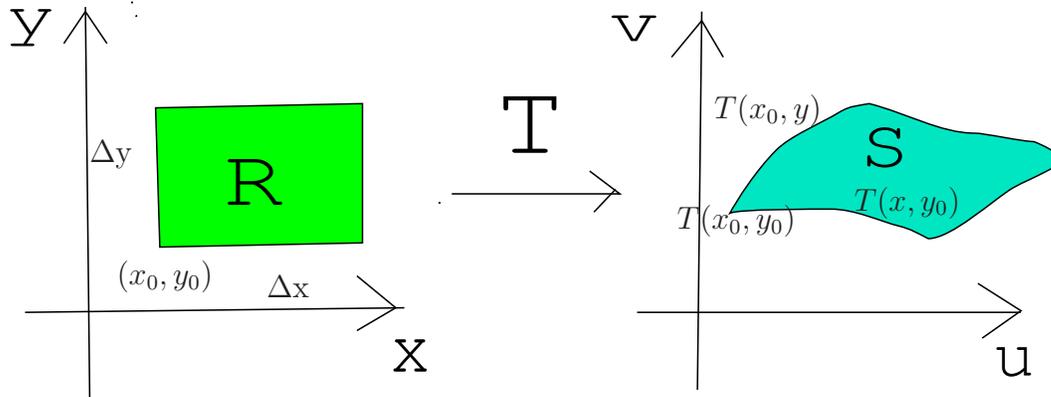
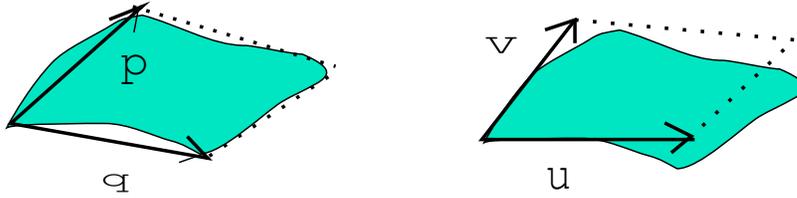


Fig. 3.4: Transformação do retângulo R na região S

Seja a região S do plano uv correspondente à imagem pela transformação T de uma “região elementar” R , dada por $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$ e $y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y$. Podemos aproximar a região S por um paralelogramo determinado pelos vetores secantes $\vec{p} = T(x_0, y_0 + \Delta y) - T(x_0, y_0)$ e $\vec{q} = T(x_0 + \Delta x, y_0) - T(x_0, y_0)$ às respectivas curvas $T(x_0, y)$ e $T(x, y_0)$. Utilizando a definição da derivada parcial de uma função, temos:

$$T_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + \Delta x, y_0) - T(x_0, y_0)}{\Delta x} \Rightarrow T(x_0 + \Delta x, y_0) - T(x_0, y_0) \approx \Delta x T_x$$

$$T_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{T(x_0, y_0 + \Delta y) - T(x_0, y_0)}{\Delta y} \Rightarrow T(x_0, y_0 + \Delta y) - T(x_0, y_0) \approx \Delta y T_y$$

Fig. 3.5: Transformação do retângulo R na região S

Vamos então aproximar S por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta x T_x$ e $\Delta y T_y$, onde os vetores T_u e T_v valem:

$$T_x = \frac{\partial F_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \vec{j}$$

$$T_y = \frac{\partial F_1}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \vec{j}$$

Desse modo, a área ΔA da região S pode ser aproximada pela área deste paralelogramo que corresponde à norma do produto vetorial dos vetores $r_u \Delta u$ e $r_v \Delta v$, ou seja,

$$\Delta A \approx \|\Delta x T_x \times \Delta y T_y\| = \|T_x \times T_y\| \Delta x \Delta y$$

Quando calculamos o produto vetorial $\Delta x T_x \times \Delta y T_y$ encontramos o determinante que é denominado jacobiano da transformação.

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} \vec{k} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \vec{k}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

Podemos então encontrar uma aproximação para ΔA de S :

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta x \Delta y \quad (3.2)$$

Para regiões R do plano que são “bem definidas” por uma reunião de regiões elementares, (como é o caso da regiões que podem ser subdivididas em subregiões limitadas por gráficos de funções) podemos demonstrar que as áreas de R e de sua imagem $S = T(R)$ serão dadas pelo limite das somas de Riemann das áreas de $\Delta_i R$ e dos paralelogramos aproximadores que definem as integrais duplas [2], [16].

$$\begin{aligned} \text{Área de } S_{uv} &= \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty \\ \max \|\Delta_i u \Delta_j v\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta_i u \Delta_j v = \iint_R dA \\ \text{Área de } S_{xy} &= \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty \\ \max \|\Delta_i x \Delta_j y\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta_i u \Delta_j v = \iint_R \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy \end{aligned}$$

Concluimos assim que uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injetiva de classe C^1 preserva área se, e somente se, o jacobiano for constante e igual a 1 ou -1. Em geral podemos dizer que o jacobiano de uma transformação corresponde a um fator de deformação para áreas.

3.3 Transformações lineares do plano que preservam áreas

Vamos então analisar quando as transformações lineares do plano que preservam áreas. Para $T(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (ax + by, cx + dy)$, temos que o jacobiano é constante:

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Para que as transformações lineares preservem a área devemos então ter $|ad - bc| = 1$. Com o auxílio dos autovalores e autovetores verificaremos o comportamento das transformações sob estas condições. Calculando autovalores da transformação linear, temos:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

Como os autovalores correspondem às raízes do polinômio característico, obtemos a seguinte equação:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (3.3)$$

Caso 1: $ad - bc = -1$

Impondo inicialmente a condição $ad - bc = -1$ em (3.3), obtemos a seguinte equação:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda - 1 = 0 \quad (3.4)$$

A equação 3.4 possui autovalores reais distintos, pois neste caso temos $\Delta = (a + d)^2 + 4$ e com isso podemos diagonalizar a matriz, o que nos fornece, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ \det(A) &= \det(PDP^{-1}) \\ \det(A) &= \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) \\ \det(A) &= \det(P)\det(P^{-1})\det(D) \\ \det(A) &= \det(D), \end{aligned}$$

onde,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que o determinante da matriz A é, por hipótese, igual a -1 e temos, portanto, que o produto dos autovalores correspondem a -1 , ou seja, um autovalor corresponde a menos o inverso do outro, $\lambda_1 = -\lambda_2^{-1}$. Resolvendo a equação 3.4, obtemos os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{(a + d)^2 + 4}}{2} \quad (3.5)$$

$$\lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 + 4}}{2} \quad (3.6)$$

Vamos então calcular os autovetores correspondentes a (3.5) e (3.6):

a) Cálculo dos autovetores associados a λ_1 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Se $\lambda_1 \neq a$, os autovetores satisfazem:

$$(a - \lambda_1)x + by = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a - \lambda_1}y \Rightarrow x = -\frac{2by}{a - d - \sqrt{(a + d)^2 + 4}}$$

e, portanto, os autovetores são da forma:

$$\left(-\frac{2by}{a - d - \sqrt{(a + d)^2 + 4}}, y \right)$$

ii) Se $\lambda_1 \neq d$, os autovetores satisfazem:

$$cx + (d - \lambda_1)y = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{d - \lambda_1}x \Rightarrow y = -\frac{2cx}{d - a - \sqrt{(a + d)^2 + 4}}$$

e, portanto, os autovetores são da forma:

$$\left(x, -\frac{2cx}{d - a - \sqrt{(a + d)^2 + 4}} \right)$$

iii) No caso de $\lambda_1 = a = d$, se aplicarmos esta hipótese em (3.5), obtemos:

$$a = \frac{a + a + \sqrt{(a+a)^2 + 4}}{2} \Rightarrow a = \frac{2a + \sqrt{(2a)^2 + 4}}{2} \Rightarrow a = a + \sqrt{(a)^2 + 1}$$

$$\sqrt{(a)^2 + 1} = 0 \Rightarrow a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1$$

Admitindo apenas que os elementos da matriz são números reais, a hipótese (iii), portanto, não ocorre.

b) Cálculo dos autovetores associados a λ_2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_2 & b \\ c & d - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Se $\lambda_2 \neq a$, os autovetores satisfazem:

$$(a - \lambda_2)x + by = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a - \lambda_2}y \Rightarrow x = -\frac{2by}{a - d + \sqrt{(a+d)^2 + 4}}$$

e, portanto, os autovetores são da forma:

$$\left(-\frac{2by}{a - d + \sqrt{(a+d)^2 + 4}}, y \right)$$

ii) Se $\lambda_2 \neq d$, os autovetores satisfazem:

$$cx + (d - \lambda_2)y = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{d - \lambda_2}x \Rightarrow y = -\frac{2cx}{d - a - \sqrt{(a+d)^2 + 4}}$$

e, portanto, os autovetores são da forma:

$$\left(x, -\frac{2cx}{d - a + \sqrt{(a+d)^2 + 4}} \right)$$

iii) No caso de $\lambda_2 = a = d$, se aplicarmos esta hipótese em (3.6), obtemos:

$$a = \frac{a + a - \sqrt{(a+a)^2 + 4}}{2} \Rightarrow a = \frac{2a + \sqrt{(2a)^2 + 4}}{2} \Rightarrow a = a - \sqrt{(a)^2 + 1}$$

$$\sqrt{(a)^2 + 1} = 0 \Rightarrow a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1$$

Admitindo que os elementos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, a hipótese (iii), portanto, não ocorre.

Caso 2: $ad - bc = 1$

No caso onde temos $ad - bc = 1$, encontramos a seguinte equação:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 = 0 \quad (3.7)$$

A equação (3.7) possui $\Delta = (a + d)^2 - 4$ que pode ser maior, igual ou menor do que zero. Estes resultados vão depender do módulo do traço da matriz da transformação linear, ou seja, $|a + d|$ e nem sempre teremos autovalores reais.

Apesar da transformação, neste caso, nem sempre preservar alguma direção determinada por autovetores, podemos analisar o comportamento da deformação aplicada em uma região do plano utilizando uma transformação linear auxiliar. De fato, podemos fazer a seguinte decomposição matricial da transformação linear,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Ou seja, observamos que a matriz da transformação linear, A , é dada pelo produto da matriz de reflexão em torno do eixo x , denotada por R_x , com a matriz A_1 que possui os mesmos elementos, porém com c e d com sinais trocados e determinante igual a -1 , denotada por A_1 , ou seja, $A = R_x A_1$. Desse modo, podemos analisar a transformação linear original com base no estudo realizado anteriormente para a matriz A_1 de determinante igual a -1 e o efeito final será o da composição da transformação associada a A_1 com uma reflexão no eixo x .

Exemplos particulares deste caso 2 (e que possuem autovetores) são as trans-

formações dadas por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

com $a \neq 0$, ou estas matrizes compostas com rotações.

Resumindo o desenvolvimento feito até aqui, para os Casos 1 e 2, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Uma transformação linear T_A no plano associada à matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ preserva área se, e somente se, } |\det A| = 1, \text{ Além disto temos:}$$

(1) *Se $\det A = -1$, os autovalores de A satisfazem, $\lambda_2 = -\frac{1}{\lambda_1}$ onde*

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 + 4}}{2}$$

e temos:

$$v_i = \left(-\frac{b}{a - \lambda_i}, 1 \right) \text{ ou } \bar{v}_i = \left(1, -\frac{c}{d - \lambda_i} \right),$$

onde utilizamos v_i quando $a \neq \lambda_i$ e utilizamos \bar{v}_i quando $d \neq \lambda_i$, sendo $i = 1, 2$.

(2) *Se $\det A = 1$, consideramos a decomposição;*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_1$$

com

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

(3) *Se $\det A = -1$, teremos pelo item (1) expansão/ contração na direção de v_1 e contração/expansão seguida de reflexão na direção de v_2 .*

(4) *Se $\det A = 1$ teremos pelo item (2) a composição do efeito 3 para a matriz A_1 composto com uma reflexão no eixo x .*

Vamos ilustrar então esta proposição com o exemplo a seguir:

Exemplo 3.3.1. *Seja a transformação linear do plano no plano definida por $T(x, y) = (x + \frac{3}{2}y, -x - \frac{1}{2}y)$, vamos verificar o comportamento desta transformação.*

De fato, sendo a matriz associada a esta transformação linear dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

é fácil verificar que esta matriz possui determinante igual a 1 e o traço igual 1.5, ou seja, $|a + d| < 2$, portanto ela não possui autovalores reais. Aplicando a decomposição sugerida, obtemos as seguintes matrizes:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculando os autovalores da matriz A_1 usando a Proposição 3.1, encontramos os autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ e os seus respectivos autovetores $(\frac{3}{2}y, y)$ e $(x, -x)$. Portanto, podemos dizer que a matriz A transforma os autovetores relacionados com λ_1 da matriz A_1 num vetor com o dobro do módulo na mesma direção e em seguida o reflete em relação ao eixo x . Do mesmo modo, a transformação associada à matriz A transforma os autovetores de λ_2 da matriz A_1 num vetor que de mesma direção, porém com módulo igual à metade do original, sentido contrário e logo em seguida o reflete em relação ao eixo x .

A deformação por T_A dos outros vetores do plano pode ser observada através da decomposição destes nos eixos assentados nos autovetores de A_1 . Uma outra forma de observamos o efeito de uma transformação linear no plano que preserva área é através das imagens de círculos, como faremos na próxima seção. A Figura 3.6 ilustra esta imagem para a transformação acima.

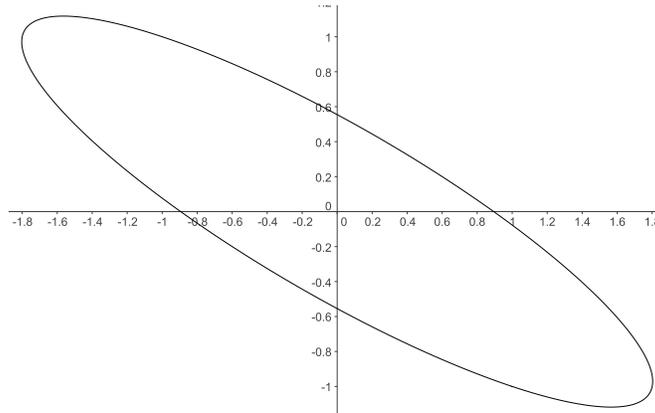


Fig. 3.6: Imagem de um círculo unitário centrado na origem pela transformação $T(x, y) = (x + 1.5y, -x - 0.5y)$

3.4 Deformação de um círculo por uma transformação linear que preserva área

Nesta seção analisaremos a imagem de uma circunferência de raio unitário centrada na origem por uma transformação linear que preserva área. Iremos verificar que esta imagem corresponde a uma elipse, ou seja, que sendo $x^2 + y^2 = 1$, e $T(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (u, v)$ mostraremos que existem as constantes k_2 , k_3 e k_4 reais, de maneira que a imagem do círculo pode ser escrita da seguinte forma:

$$u^2 + k_2v^2 + k_3uv = k_4 \tag{3.8}$$

onde $u = ax + by$ e $v = cx + dy$, isto é,

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_3}{2} \\ \frac{k_3}{2} & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k_4, \quad k_4 > 0. \tag{3.9}$$

Além disto, o determinante da matriz simétrica da forma quadrática deve ser maior do que zero. Vamos então substituir os valores de u e de v na equação (3.8) e verificar a existência de k_2 , k_3 e k_4 . Temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
 (ax + by)^2 + k_2(cx + dy)^2 + k_3(ax + by)(cx + dy) &= k_4 \\
 (a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy) + k_2(c^2x^2 + d^2y^2 + 2cdxy) + \\
 + k_3(acx^2 + bdy^2 + adxy + bcxy) &= k_4 \\
 (a^2 + c^2k_2 + ack_3)x^2 + (b^2 + d^2k_2 + bdk_3)y^2 + [2ab + 2cdk_2 + (ad + bc)k_3]xy &= k_4
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Utilizando a hipótese que $x^2 + y^2 = 1$ na equação (3.10), obtemos a equação a seguir,

$$\begin{aligned}
 (a^2 + c^2k_2 + ack_3)x^2 + (b^2 + d^2k_2 + bdk_3)y^2 + [2ab + 2cdk_2 + \\
 + (ad + bc)k_3]xy &= k_4 \\
 (a^2 + c^2k_2 + ack_3)x^2 + (b^2 + d^2k_2 + bdk_3)(1 - x^2) + [2ab + 2cdk_2 + \\
 + (ad + bc)k_3]xy &= k_4 \\
 (a^2 + c^2k_2 + ack_3 - b^2 - d^2k_2 - bdk_3)x^2 + (b^2 + d^2k_2 + bdk_3) + \\
 + [2ab + 2cdk_2 + (ad + bc)k_3]xy &= k_4 \\
 [a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)k_2 + (ac - bd)k_3]x^2 + [2ab + 2cdk_2 + (ad + bc)k_3]xy + \\
 + (b^2 + d^2k_2 + bdk_3) &= k_4
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Para que a igualdade obtida em (3.8) seja verdadeira, devemos ter:

$$a^2 - b^2 + (c^2 - d^2)k_2 + (ac - bd)k_3 = 0 \tag{3.12}$$

$$2ab + 2cdk_2 + (ad + bc)k_3 = 0 \tag{3.13}$$

$$(b^2 + d^2k_2 + bdk_3) = k_4 \tag{3.14}$$

Desse modo, se encontrarmos k_2 e k_3 que satisfaçam 3.12, 3.13 e 3.14 verificaremos a validade da afirmação feita. Mas encontrar estas variáveis significa resolver o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} (c^2 - d^2)k_2 + (ac - bd)k_3 = b^2 - a^2 \\ 2cdk_2 + (ad + bc)k_3 = -2ab \end{cases}$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} c^2 - d^2 & ac - bd \\ 2cd & ad + bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 \\ -2ab \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear, denotado por Δ , temos:

$$\begin{aligned} \Delta &= (c^2 - d^2)(ad + bc) - 2cd(ac - bd) \\ &= ac^2d + bc^3 - ad^3 - bcd^2 - 2ac^2d + 2bcd^2 \\ &= bcd^2 - ac^2d + bc^3 - ad^3 \\ &= d^2(bc - ad) + c^2(bc - ad) \\ &= -(d^2 + c^2)(ad - bc) \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com transformações lineares que preservam áreas, temos que $|ad - bc| = 1$. Admitindo, por exemplo, $ad - bc = 1$, então $\Delta = -(c^2 + d^2)$. Para que este determinante seja nulo, isto é, $\Delta = 0$, devemos ter $c = d = 0$, mas isto não pode acontecer pois teríamos $ad - bc = 0$ o que é absurdo, logo, $\Delta \neq 0$. Assim, nosso sistema linear possui solução única, ou seja, existem variáveis reais k_2 e k_3 e a equação 3.8 é válida.

Resolvendo o sistema, encontramos :

$$k_2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} \text{ e } k_3 = -\frac{2(ac + bd)}{c^2 + d^2}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{k_3}{2} \\ \frac{k_3}{2} & k_2 \end{vmatrix} = k_2 - \left(\frac{k_3}{2}\right)^2, \quad (3.16)$$

substituindo os valores de k_2 e k_3 em (3.16), obtemos:

$$\begin{aligned}
 k_2 - \left(\frac{k_3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}\right) - \left[-\frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2}\right]^2 \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} - \frac{(ac + bd)^2}{(c^2 + d^2)^2} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}{(c^2 + d^2)^2} \\
 &= \frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 2abcd}{(c^2 + d^2)^2} \\
 &= \frac{b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd}{(c^2 + d^2)^2} \\
 &= \frac{(ad - bc)^2}{(c^2 + d^2)^2} > 0
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que a imagem de uma circunferência de raio unitário é, como esperado, uma elipse.

Vamos então, com auxílio dos autovalores, diagonalizar a matriz simétrica da forma quadrática e com isso escrever a elipse na forma canônica. Para o cálculo destes autovalores e seus respectivos autovetores utilizamos o *software* Maxima que nos forneceu os seguintes resultados:

$$\lambda_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{[(b+c)^2 + (a-d)^2][(b-c)^2 + (a+d)^2]}}{2(c^2 + d^2)} \quad (3.17)$$

$$\lambda_2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \sqrt{[(b+c)^2 + (a-d)^2][(b-c)^2 + (a+d)^2]}}{2(c^2 + d^2)} \quad (3.18)$$

Autovetores associados a λ_1 :

$$\lambda \left(1, \frac{2(bd + ac)}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - \sqrt{[(b+c)^2 + (a-d)^2][(b-c)^2 + (a+d)^2]}} \right), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Autovetores associados a λ_2 :

$$\lambda \left(1, \frac{2(bd + ac)}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + \sqrt{[(b+c)^2 + (a-d)^2][(b-c)^2 + (a+d)^2]}} \right), \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Antes de apresentarmos a elipse na forma canônica mostraremos a relação dos autovalores (3.17) e (3.18) com o valor de k_4 . De fato, a multiplicação de λ_1 por λ_2

corresponde, simplesmente, ao determinante da matriz simétrica da forma quadrática, que já foi calculado. Se substituirmos os valores de k_2 e k_3 em (3.14) encontramos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 k_4 &= b^2 + d^2 k_2 + bdk_3 \\
 k_4 &= b^2 + d^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} \right) + bd \left(-\frac{2(ac + bd)}{c^2 + d^2} \right) \\
 k_4 &= \frac{b^2(c^2 + d^2) + d^2(a^2 + b^2) - 2bd(ac + bd)}{c^2 + d^2} \\
 k_4 &= \frac{b^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2d^2 - 2abcd - 2b^2d^2}{c^2 + d^2} \\
 k_4 &= \frac{a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2}{c^2 + d^2} \\
 k_4 &= \frac{(ad - bc)^2}{c^2 + d^2} \\
 k_4 &= \lambda_1 \lambda_2 (c^2 + d^2)
 \end{aligned}$$

Desse modo, a elipse na forma canônica é escrita como

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \lambda_2 (c^2 + d^2) \\
 \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 v_1^2 &= \lambda_1 \lambda_2 (c^2 + d^2) \\
 \frac{u_1^2}{(c^2 + d^2)\lambda_2} + \frac{v_1^2}{(c^2 + d^2)\lambda_1} &= 1
 \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = [I]_{\text{canonica}}^{\text{autovetores}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Resumindo o desenvolvimento feito até aqui e observando que o caso em que o determinante é igual a -1 pode ser reduzido a este, a menos de uma reflexão no eixo x , temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2. *Uma transformação linear T_A que preserva área leva um círculo centrado na origem numa elipse de semi-eixos l_1 e l_2 , $l_2 = \frac{1}{l_1}$, onde, para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*

e $|\det A| = 1$, temos

$$l_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{[(b+c)^2 + (a-d)^2][(b-c)^2 + (a+d)^2]}}{2}$$

A imagem de uma circunferência de raio r e não necessariamente centrada na origem pode ser obtida por composição e será também uma elipse semelhante à dada pela proposição anterior.

3.5 Transformações gerais que preservam áreas

Apresentaremos nesta seção alguns tipos de transformações mais gerais do plano no plano que preservam áreas. Estas transformações foram escolhidas através dos seus jacobianos.

3.5.1 Transformações do tipo $T(x, y) = (bx + f(y), a \pm \frac{1}{b}y)$

Inicialmente vamos estudar transformações “quase lineares” da forma

$$T(x, y) = (bx + f(y), a \pm \frac{1}{b}y), \quad (3.21)$$

onde f é uma função de uma variável derivável e $b \neq 0$. Sendo

$$JT(x, y) = \begin{pmatrix} b & f'(y) \\ 0 & \pm \frac{1}{b} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

é fácil observar que o determinante de (3.22) vale ± 1 . Além disso T é uma transformação injetiva. De fato,

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0) &= T(x_1, y_1) \\ \left(bx_0 + f(y_0), a \pm \frac{1}{b}y_0\right) &= \left(bx_1 + f(y_1), a \pm \frac{1}{b}y_1\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Portanto, de (3.23) encontramos $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ e a transformação 3.21 também preserva área. Vamos então verificar um exemplo desta forma.

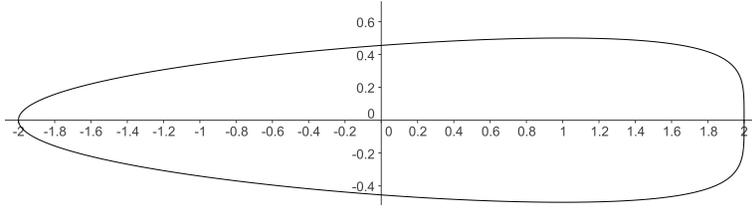


Fig. 3.7: Deformação do círculo unitário por $T(x, y) = (2x + y^2, -\frac{1}{2}y)$

Exemplo 3.5.1. *Sejam $T(x, y) = (2x + y^2, -\frac{1}{2}y)$ e $(x, y) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ de raio 1 numa curva fechada simples $\beta(t) = T(x(t), y(t)) = (2\cos(t) + \text{sen}(t)^2, -\frac{1}{2}\text{sen}(t))$ (ver figura 3.7).*

De fato, só para conferir, calculando a integral de linha no intervalo de 0 a 2π , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \oint_{\beta} xdy - ydx &= \frac{1}{2} \int_{\beta(t)} \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x(t) \frac{dy(t)}{dt} - y(t) \frac{dx(t)}{dt} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left((2\cos(t) + \text{sen}(t)^2) \left(-\frac{1}{2} \cos(t)\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{sen}(t) (2\cos(t)\text{sent} - 2\text{sen}(t)) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-(\cos(t))^2 - \frac{1}{2}(\text{sen}(t))^2 \cos(t) - (\text{sen}(t))^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (\text{sen}(t))^2 \cos(t) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-1 + \frac{1}{2}(\text{sen}(t))^2 \cos(t) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(-t + \frac{1}{6}(\text{sen}(t))^3 \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -\pi.
 \end{aligned}$$

Este valor negativo é porque T inverte a orientação (seu jacobiano é -1) e estamos percorrendo a curva no sentido horário. Portanto, para utilizarmos o caso especial do teorema de Green, devemos trocar o sinal para que a curva seja percorrida no sentido anti-horário e obtemos então o seguinte resultado:

$$\int \int_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\beta} xdy - ydx = \pi,$$

que é a área do círculo de raio unitário.

3.5.2 Transformações do tipo $T(x, y) = (c \pm \frac{1}{d}x, dy + g(x))$

Outras transformações que também preservam áreas são as transformações da forma,

$$T(x, y) = (c \pm \frac{1}{d}x, dy + g(x)), \tag{3.24}$$

onde c e d são constantes reais, $d \neq 0$, e $g(x)$ tem derivada contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, temos que T é injetiva e para todo par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o determinante da matriz jacobiana de (3.24) vale ± 1 .

$$JT(x, y) = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{d} & 0 \\ g'(x) & d \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

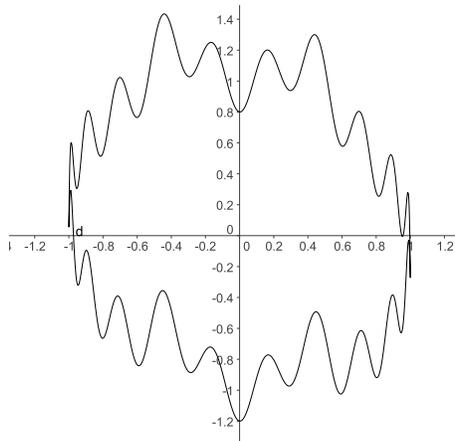


Fig. 3.8: Deformação do círculo $x^2 + y^2 = 1$ por e $T(x, y) = (-x, y + (0.3\text{sen}(4x))^4 - 0.2x^5 - 0.2 \cos(20x) + 0.3 \tan(0.5x))$

Exemplo 3.5.2. *Sejam $T(x, y) = (-x, y + (0.3\text{sen}(4x))^4 - 0.2x^5 - 0.2 \cos(20x) + 0.3 \tan(0.5x))$ e fazendo-se $(x, y) = (\cos(t), \text{sen}(t))$. T preserva áreas e transforma, o círculo de raio 1 numa curva fechada simples $\alpha(t) = T(x(t), y(t))$ mais “complexa” que a do exemplo anterior (ver Figura 3.9). A área delimitada por α (que é curva fechada simples), possui exatamente o mesmo valor da área do círculo unitário, o que pode ser conferido com o auxílio do Maxima.*

3.5.3 Composições

Outros tipos de transformações que preservam áreas, podem ser obtidos por composição. Notamos que as composições destas transformações também preservam áreas. De fato, se tomarmos duas transformações do plano no plano e as composições entre as duas, de modo que esta composição esteja bem definida, a matriz jacobiana desta composição é o produto das duas matrizes jacobianas das transformações, portanto o jacobiano da composição será o produto dos jacobianos pela propriedade de determinantes. Como estas transformações preservam áreas então o módulo do jacobiano de cada transformação vale 1 e podemos então concluir que o módulo do jacobiano da composta também possui valor 1. Por outro lado a composta de funções injetivas é injetiva, logo áreas serão preservadas pela composta.

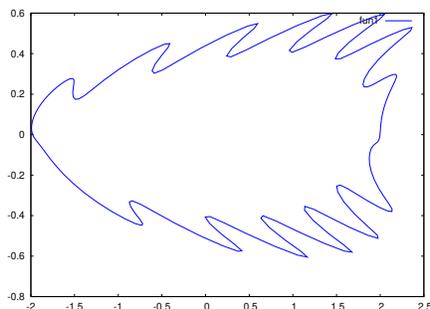


Fig. 3.9: Composição

Exemplos com o Maxima

Apresentaremos a seguir a implementação que fizemos no Maxima para mostrar a deformação do círculo unitário quando aplicamos nele um dos tipos de transformação estudadas nesta seção. Aqui também é calculado o valor da área delimitada pela nova curva, só para ilustrar que equivale à área do círculo unitário. Naturalmente outras curvas simples podem ser utilizadas ao invés do círculo original $u(t)$.

```
u(t):=[cos(t),sin(t)]$
```

```
I:[0,%pi*2],numer$
```

```
a:0$b:1$c:0$d:1$
```

```
f(y):=(0.2*tan(y))^2-y^3$
```

```
g(x):=(0.3*sin(4*x))^4-0.2*x^5-0.2*cos(20*x)+0.3*tan(0.5*x)$
```

```

h(x,y):=[b*x+f(y),a-y/b]$
k(x,y):=[c-x/d,d*y+g(x)]$
n(t):=k(u(t)[1],u(t)[2])$
m(t):=h(u(t)[1],u(t)[2])$
plot2d([[parametric, u(t)[1], u(t)[2],[t,I[1],I[2]],[nticks, 200]])$
plot2d([[parametric, m(t)[1], m(t)[2],[t,I[1],I[2]],[nticks, 200]])$
plot2d([[parametric, n(t)[1], n(t)[2],[t,I[1],I[2]],[nticks, 200]])$
f(z):= subst(t=z,diff(n(t)[1],t)*n(t)[2])$
romberg(f(z), z, 0, %pi*2);

```

$u(t)$ é curva original parametrizada (círculo unitário); I o intervalo, a , b , c e d as constantes da transformação e f e g as funções que contribuem para as deformações. Estas transformações permitem criar objetos bem diversos que possuem a mesma área da região contornada pela curva inicial. Fica aqui o convite para a experimentação.

3.5.4 Observações

É importante notar que é bastante grande a classe das transformações gerais que preservam áreas. Por outro lado ressaltamos que se exigirmos que uma transformação seja uma isometria, isto é, que preserve distâncias (e portanto área) ficaremos restritos às isometrias lineares, já descritas na seção 2.2 e a composição destas com uma translação. De fato, como é conhecido da geometria clássica ([10]), uma isometria no \mathbb{R}^n é necessariamente a composta de uma transformação linear ortogonal (rotação ou reflexão através da origem) com a translação por um vetor.

Transformações que preservam área são importantes na cartografia. Como é conhecido, não existe uma isometria que leve parte de uma superfície da esfera (que tem curvatura Gaussiana constante positiva) no plano (que tem curvatura Gaussiana zero). Portanto, mapas que são “planificações” de uma esfera nunca são fieis, mas podem preservar áreas. Aí estamos falando de transformações de regiões da esfera no plano que preservam áreas.

Observamos que a proposta inicial deste trabalho foi um problema sobre mapas proposto pelo Prof. Mário Martinez. Acabamos por nos estender sobre a discussão de transformações do plano no plano, o que seria a parte inicial do trabalho, a qual

mostrou-se também muito interessante em seu desenvolvimento.

Uma referência para mapas que preservam áreas é ([11]). Um clássico exemplo é dado pela projeção de Lambert (1772). Uma perspectiva futura é observar os mapas dados pela composição destas projeções de igual área conhecidas com as transformações neste capítulo.

Referências Bibliográficas

- [1] Anton, Rorres, *Álgebra Linear com Aplicações*. 8.ed., Bookman, 2001.
- [2] Apostol, T. M. *Calculus Vol II*, Wiley International, 2ª Edição.
- [3] Araújo, P. V.. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [4] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., Wetzler, H., *Álgebra Linear*. Harbra, 1984.
- [5] Care, C.. *Illustrating the History of the Planimeter*. <http://empublic.dcs.warwick.ac.uk/projects/planimeterCare2004/Docs/report.pdf>.
- [6] Challis, L. e Sheard, F.. *The Green of Green Functions*. Physics Today, 2003.
- [7] Coelho, L. C. G.. *Modelagem de Cascas com Interseções Paramétricas*. Tese de doutorado, PUC-Rio, 1998.
- [8] Colli, E.. *O planímetro linear*. <http://matemateca.incubadora.fapesp.br/portal/textos/matemateca/planimetro>.
- [9] Courant, R., John, F.. *Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II*, Wiley. Nova Iorque, 1974.
- [10] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, J. Wiley and Sons; 1º ed. 1961.
- [11] Feemann, T.G. *Portraits of the Earth: A Mathematician looks at Maps*. AMS-American Mathematical Society, USA. 2002.
- [12] Kaplan, W., *Cálculo Avançado, vol. 1*. Edgard Blucher, 1972.
- [13] Lee, I. K. *Curve reconstruction from unorganized points*. Comput. Aided Geom. Des. 17, 161 - 177. 2000.

- [14] Leise, T.. *As the Planimeter's Wheel Turns: Planimeter Proofs for Calculus Class*. The College Mathematics Journal, Volume 38, Number 1, January 2007 , pp. 24-31(8).
- [15] Lima, E. L.. *Álgebra Linear*. 7.ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [16] Lima, E. L.. *Análise Real volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [17] Lima, R. de B.. *Elementos de álgebra vetorial*. São Paulo, Nacional, 1974.
- [18] Maxima, <http://maxima.sourceforge.net/download.html>.
- [19] Von Sperling, M., *Princípios Básicos do Tratamento de Esgotos - Princípios de Tratamento Biológico de Águas Residuárias*. Vol. 2. Belo Horizonte: DESA-UFMG. 1996.
- [20] Winplot, <http://www.math.hawaii.edu/lab/241/winplot.html>.