



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-fuzzy com Aplicações em Biomatemática

João de Deus Mendes da Silva[†]

Doutorado em Matemática Aplicada - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

[†]Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-fuzzy com Aplicações em Biomatemática

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **João de Deus Mendes da Silva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de dezembro de 2005.

Prof. Dr. **Rodney Carlos Bassanezi**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Fernando Antonio Campos Gomide (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano (IBMEC)

Prof. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira (UNESP-Rio Claro)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Silva, João de Deus Mendes da

Si38a Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática / João de Deus Mendes da Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Rodney Carlos Bassanezi

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas difusos. 2. Biomatemática. 3. Análise do ponto de equilíbrio. I. Bassanezi, Rodney Carlos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Analysis of stability of p-fuzzy dynamic systems with applications in biomathematic.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Fuzzy systems. 2. Biomathematics. 3. Break-even analysis.

Área de concentração: Biomatemática

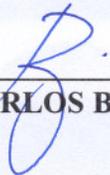
Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Fernando Antonio Campos Gomide (FECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano (IBMEC)
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira (UNESP-Rio Claro)

Data da defesa: 15/12/2005

Tese de Doutorado defendida em 15 de dezembro de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



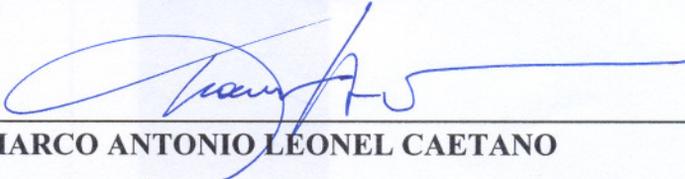
Prof. (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



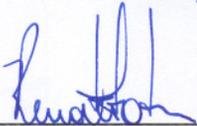
Prof. (a). Dr (a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS



Prof. (a). Dr (a). FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE



Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO LEONEL CAETANO



Prof. (a) Dr. (a) RENATA ZOTIN GOMES DE OLIVEIRA

A Deus.
Aos meus pais, Antonia e Vicente.
Aos meus avós, Luis de Souza (em memória)

Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo Rodney Carlos Bassanezi, que, além da orientação segura deste trabalho, contribuiu expressivamente para minha formação como pesquisador e principalmente como ser humano.

A minha esposa, Claudilene da Cruz Silva, que soube compreender as ausências e apoiar a todo momento.

Ao meu filho que, mesmo sem saber, é o meu maior incentivador.

Aos meus pais pela formação moral que me deram, pelo incentivo constante e pela confiança depositada.

Aos grandes amigos do IMECC, aos quais prefiro não citar para não cometer injustiça.

Aos meus grandes amigos fora do meio acadêmico, principalmente a Napoleão Campos Sobrinho e família pelo incentivo e confiança.

Aos professores do IMECC/UNICAMP, que contribuíram significativamente para minha formação como matemático aplicado.

Agradeço a CAPES e a UFMA pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho seria impossível.

Agradeço aos funcionários da secretaria de pós-graduação pela eficiência que sempre demonstraram.

Para finalizar quero agradecer a todas as pessoas que contribuíram para a realização desta tese de doutorado.

A todos, muito obrigado!

Resumo

Um sistema dinâmico p-fuzzy é um sistema cuja dinâmica é obtida através de um sistema baseado em regras fuzzy. Neste trabalho, realizamos um estudo analítico da estabilidade dos sistemas dinâmicos p-fuzzy. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para existência de ponto de equilíbrio para sistemas p-fuzzy unidimensionais e bidimensionais e derivamos condições para estabilidade deste ponto. Vimos que, uma condição suficiente para existência de ponto de equilíbrio é uma mudança de sinal na saída do controlador.

Este trabalho mostra ainda, que a estabilidade de um ponto de equilíbrio depende, principalmente, das variáveis de entradas e saídas do sistema baseado em regras fuzzy associado ao sistema p-fuzzy.

Além dos diversos resultados matemáticos encontrados, com demonstrações rigorosas, realizamos inúmeros experimentos computacionais e obtivemos resultados que atestam a veracidade de da teoria aqui proposta.

Apresentamos ainda, algumas aplicações em Biomatemática onde podemos comprovar, em situações concretas, a eficácia, versatilidade e robustez da teoria desenvolvida.

Abstract

A p-fuzzy dynamic system is a system whose dynamics is obtained through a fuzzy rule-based systems. In this work we present an analytical study of the stability of p-fuzzy dynamic systems. We establish necessary and sufficient conditions to existence of equilibrium point for one variable and two variable p-fuzzy systems and, we derive conditions for stability of this point. We saw that, a sufficient condition for existence of equilibrium point is a change of signal in the output of the controller

This work still shows, that the stability of an equilibrium point depends, mainly, fuzzy rule-based systems's input-output.

Many mathematical results has been found and demonstrated rigorously. We still made many computational experiments and its results show that all developed mathematical theory is efficient.

We still present, some applications in Biomathematics where we can prove, in real situations, the efficiency, versatility and robustness of the developed theory in this work.

Sumário

Introdução	1
1 Teoria de conjuntos fuzzy	4
1.1 Conjuntos fuzzy	4
1.1.1 Operações com conjuntos fuzzy	5
1.1.2 Número fuzzy	6
1.2 Lógica fuzzy	8
1.2.1 Variáveis lingüísticas	8
1.2.2 Proposição fuzzy e operadores $max - \vee$ e $min - \wedge$	9
1.3 Sistemas baseados em regras fuzzy	11
1.4 Sistemas p-fuzzy	13
1.4.1 Sistemas p-fuzzy e as equações diferenciais	13
2 Sistema p-fuzzy unidimensional	16
2.1 Definições preliminares	16
2.2 Defuzificação da saída do sistema fuzzy	18
2.3 Preliminares matemáticos	19
2.4 Existência de ponto de equilíbrio	23
2.4.1 Determinação do ponto de equilíbrio - saída simétrica	23
2.4.2 Exemplo - saída simétrica	24
2.5 Unicidade do ponto de equilíbrio	25
2.5.1 Exemplos - unicidade de ponto de equilíbrio para saídas não simétricas	28
2.5.2 Caso 1: $g(t) > f(-t)$	29
2.5.3 Caso 2: $g(t) < f(-t)$	32
2.5.4 Exemplos	34
2.5.5 Conseqüências importantes dos Teoremas 2.3 e 2.4	35
2.5.6 Outros casos: contra-exemplo	38
2.6 Resumo do capítulo	40
3 Sistema p-fuzzy bidimensional	41
3.1 Definições preliminares	41
3.2 Defuzificação da saída do sistema baseado em regras fuzzy	45
3.3 Existência de ponto de equilíbrio	46
3.4 Identificação do ponto de equilíbrio	47
3.4.1 Exemplo 1 - modelo p-fuzzy bidimensional	50
3.4.2 Exemplo 2 - modelo p-fuzzy bidimensional	53
3.5 Unicidade do ponto de equilíbrio	55

3.5.1	Unicidade - saídas simétricas	56
3.5.2	Exemplo - sistema bidimensional com saídas simétricas	59
3.5.3	Unicidade para saídas não simétricas	63
3.6	Resumo do capítulo	65
4	Estabilidade local de sistemas p-fuzzy	66
4.1	Estabilidade de sistemas p-fuzzy unidimensionais	66
4.1.1	Exemplo - análise de estabilidade de sistemas p-fuzzy unidimensionais com saída simétrica	68
4.1.2	Exemplo - análise de estabilidade de sistemas p-fuzzy unidimensionais com saída não simétrica	70
4.2	Estabilidade de sistemas p-fuzzy bidimensionais	74
4.2.1	Análise de estabilidade - Tipo 1	76
4.2.2	Exemplos da análise de estabilidade - Tipo 1	79
4.2.3	Análise de estabilidade - Tipo 2	83
4.2.4	Exemplos - análise de estabilidade - Tipo 2	86
4.3	Resumo do capítulo	90
5	Aplicações em Biomatemática	91
5.1	Sistemas p-fuzzy unidimensionais inibidos	91
5.2	Sistemas interativos - p-fuzzy	92
5.2.1	Sistema presa-predador discreto	93
5.2.2	Sistema presa-predador contínuo	96
5.2.3	Epidemiologia	98
5.3	Conclusões do capítulo	101
	Conclusões	102
	Referências Bibliográficas	104

Lista de Figuras

1.1	Função de pertinência do conjunto das pessoas altas.	5
1.2	Função de pertinência do subconjunto $A \cap B$	6
1.3	Função de pertinência do subconjunto $A \cup B$	6
1.4	Interpretação geométrica de número fuzzy	7
1.5	Número fuzzy triangular	8
1.6	Número fuzzy trapezoidal	8
1.7	Variável lingüística temperatura	9
1.8	Esquema de um sistema baseado em regras fuzzy.	11
1.9	Sistema baseado em regras fuzzy com duas entradas e uma saída.	12
1.10	Arquitetura de um sistema <i>p-fuzzy</i>	13
1.11	Variável de entrada: População.	14
1.12	Variável de saída: Variação.	14
1.13	Gráficos: modelo logístico com $K = 234.71$ e $\alpha = 0.022$ e modelo p-fuzzy.	15
2.1	Família de subconjuntos fuzzy sucessivos.	17
2.2	Conjunto viável de equilíbrio.	17
2.3	Interpretação geométrica do centro de gravidade.	18
2.4	Processo de inferência de Mamdani de um sistema $(r, s) \rightarrow (g, f)$	19
2.5	Saída do sistema <i>p-fuzzy</i> com $g(t) > f(-t)$	21
2.6	Variável de entrada: x	25
2.7	Variável de saída: Dx	25
2.8	Solução do modelo p-fuzzy - saída simétrica, $x_o = 200$	26
2.9	Conjunto viável de equilíbrio.	26
2.10	Saída onde f e g são monótonas por partes	27
2.11	Variável lingüística de entrada do sistema p-fuzzy.	28
2.12	Exemplo 1: $f(t) < g(-t)$	29
2.13	Exemplo 2: $f(t) > g(-t)$	29
2.14	Exemplo 1: soluções do modelo p-fuzzy com $x_o = 200$ e $x_o = 280$	29
2.15	Exemplo 2: soluções do modelo p-fuzzy com $x_o = 200$ e $x_o = 280$	29
2.16	Função h_1 e h_2	30
2.17	Função ξ , δ_1 e δ_2	30
2.18	Função h_1 e h_2	33
2.19	Função ξ , δ_1 e δ_2	33
2.20	Variável de entrada do sistema fuzzy associado ao sistema p-fuzzy.	35
2.21	Variável de saída - $f(-t) < g(t)$	35
2.22	Variável de saída - $f(-t) > g(t)$	35
2.23	Equilíbrios dos sistemas p-fuzzy.	35

2.24	Funções r_σ e s_σ e interpretação geométrica da unicidade de ponto de equilíbrio para sistemas $(r_\sigma, s_\sigma) \rightarrow (g, f)$	38
2.25	Sistema p-fuzzy com possibilidade de existência de mais de um ponto de equilíbrio.	38
2.26	Gráfico da função Δ , para o sistema p-fuzzy, Figura 2.25, $m_1 = 0.1$ e $\varepsilon = 0.1$	39
2.27	Gráfico da função Δ , para o sistema p-fuzzy, Figura 2.25, $\varepsilon = 0.4$ e $m_1 = 0.1$	40
3.1	Região viável de equilíbrio.	42
3.2	Região de equilíbrio 1.	43
3.3	Região de equilíbrio 2.	43
3.4	Região de equilíbrio 3.	43
3.5	Região de equilíbrio 4.	43
3.6	Região de equilíbrio 5.	44
3.7	Região de equilíbrio 6.	44
3.8	Região de equilíbrio 7.	44
3.9	Região de equilíbrio 8.	44
3.10	Região de Equilíbrio.	46
3.11	Funções β_1 e β_2	47
3.12	Ponto de equilíbrio $(\omega_1 \cap \omega_2)$	48
3.13	Ponto de equilíbrio (x_2, y_1)	49
3.14	Variável de entrada x	51
3.15	Variável de entrada y	51
3.16	Variável de saída Δ_1	51
3.17	Variável de saída Δ_2	51
3.18	Diagrama de fase do sistema p-fuzzy S	52
3.19	Plano de fase do sistema S	53
3.20	Solução do sistema S	53
3.21	Variável de entrada de S_1	53
3.22	Variável de saída de S_1	53
3.23	Variável de entrada de S_2	54
3.24	Variável de saída de S_2	54
3.25	Solução de S_1 , $x_{S_1}^* = 94.1528$	54
3.26	Solução de S_2 , $y_{S_2}^* = 9.8116$	54
3.27	Nova saída Δ_1 de S	54
3.28	Nova saída Δ_2 de S	54
3.29	Variável de saída Δ_1	55
3.30	Variável de saída Δ_2	55
3.31	Plano de fase de S	55
3.32	Solução do sistema S	55
3.33	Solução de S_1	55
3.34	Solução de S_2	55
3.35	Intervalo de equilíbrio: $[A^*]^{B_1(y^*)} = [A_2^{-1}(B_1(y^*)), A_1^{-1}(B_1(y^*))]$	56
3.36	Único ponto de equilíbrio: (x^*, y^*)	57
3.37	Variável de entrada x	60
3.38	Variável de entrada y	60
3.39	Variável de saída Δ_1	60

3.40	Variável de saída Δ_2	60
3.41	Diagrama de fase de S	61
3.42	Entrada de S_1 : $supp(A^*) = [70, 130]$	61
3.43	Saída Δ_2 de S_1	61
3.44	Entrada de S_2 : $supp(B^*) = [7, 11]$	62
3.45	Saída Δ_1 de S_2	62
3.46	Gráfico $x \times n$	62
3.47	Gráfico $y \times n$	62
3.48	Plano de Fase.	63
3.49	Ponto de equilíbrio (x_2, y_1)	64
4.1	x , $supp(A^*) = [121, 129]$	68
4.2	Dx : domínio $[-25, 40]$	68
4.3	$\Delta'(x) = -2.177$	69
4.4	$supp(A^*) = [120, 130]$	69
4.5	$supp(A^*) = [110, 140]$	69
4.6	$\Delta'(x) = -1.607$	70
4.7	$\Delta'(x) = -0.278$	70
4.8	Saída: domínio $[-12.5, 20]$	71
4.9	Saída: domínio $[-5, 8]$	71
4.10	$\Delta'(x^*) = -1.088$	71
4.11	$\Delta'(x^*) = -0.435$	71
4.12	Variável x de entrada.	71
4.13	Variável Δ de saída.	71
4.14	Gráfico da função Δ para $x \in supp(A^*)$	72
4.15	Estável: $\Delta'(x^*) = -0.0541$	72
4.16	Instável: $\Delta'(x^*) = 0.0032$	72
4.17	Estável: $\Delta'(x^*) = -0.0127$	73
4.18	Iteração com a seqüência: $x_{n+1} = x_n - \Delta x_n$	74
4.19	Configurações possíveis de regiões viáveis de equilíbrio para sistemas p-fuzzy bidimensionais.	76
4.20	Entrada x de S	79
4.21	Entrada y de S	79
4.22	Saída Δ_1 de S	80
4.23	Saída Δ_2 de S	80
4.24	Gráfico $x \times n$	80
4.25	Gráfico $y \times n$	80
4.26	Plano de fase do sistema S	80
4.27	Saída Δ_2 do sistema S'	81
4.28	Gráfico $x \times n$	81
4.29	Gráfico $y \times n$	81
4.30	Plano de fase do sistema S'	82
4.31	Saída Δ_2 do sistema S''	82
4.32	Gráfico $x \times n$	82
4.33	Gráfico $y \times n$	82
4.34	Plano de fase do sistema S''	83

4.35	Entrada x de S .	87
4.36	Entrada y de S .	87
4.37	Saída Δ_1 de S .	87
4.38	Saída Δ_2 de S .	87
4.39	Trajetoórias de x e y .	87
4.40	Plano de fase: $(x_o, y_o) = (32, 6)$.	87
4.41	Saída Δ_1 de S' .	88
4.42	Saída Δ_1 de S' .	88
4.43	Trajetoórias de x e y .	88
4.44	Plano de fase: $(x_o, y_o) = (32, 8)$.	88
4.45	Entrada x .	89
4.46	Entrada y .	89
4.47	Saída Δ_1 .	89
4.48	Saída Δ_2 .	89
4.49	Trajetoórias de x e y .	89
4.50	Plano de fase: $(x_o, y_o) = (69.9, 17.4)$.	89
5.1	Variável fuzzy: população.	92
5.2	Variável fuzzy: variação.	92
5.3	Saída do software.	93
5.4	Plano de Fase: ciclo ecológico.	94
5.5	Entrada x - presas	95
5.6	Entrada y - predadores.	95
5.7	Variável de saída Vx .	95
5.8	Variável de saída Vy .	95
5.9	Gráfico $x \times n$ e $y \times n$.	95
5.10	Plano de fase	95
5.11	Saída Vx	96
5.12	Saída Vy	96
5.13	Trajetoória do modelo	96
5.14	Plano de fase do modelo	96
5.15	Saída Vx	97
5.16	Saída Vy	97
5.17	Gráfico $x \times n$ e $y \times n$	97
5.18	Plano de fase	97
5.19	Diagrama compartimental do modelo SI	98
5.20	Entrada I do modelo SI	99
5.21	Saída VI do modelo SI	99
5.22	Soluções do modelo SI determinístico e p-fuzzy	99
5.23	Diagrama compartimental do modelo SIS	100
5.24	Variável I do modelo SIS	101
5.25	Variável VI do modelo SIS	101
5.26	Soluções do modelo SIS p-fuzzy	101

Introdução

A teoria dos conjuntos fuzzy, introduzida em 1965 por Zadeh [38], vem sendo usada com êxito em várias áreas do conhecimento humano. A primeira aplicação desta teoria que se tornou famosa foi o trabalho de Mamdani em 1974 [15]. Mamdani usou a teoria dos conjuntos fuzzy para automatizar uma máquina a vapor. O trabalho publicado por Mamdani ainda descrevia as inúmeras tentativas frustradas de controle desta máquina por meio de outros tipos de controladores.

O trabalho de Mamdani impulsionou as pesquisas na área de teoria de conjuntos fuzzy, e a partir de então, muitas outras aplicações surgiram. Em 1983, Takagi e Sugeno, publicaram um trabalho onde descrevem como criar uma metodologia para derivação de regras de sistemas funcionais fuzzy [32].

Os sistemas do tipo Mamdani (lingüísticos) e do tipo Takagi-Sugeno (funcionais) diferem basicamente na forma de como é construída a variável de saída do controlador. No caso do controlador de Mamdani, a saída é construída por variáveis lingüísticas, assim como é à entrada deste controlador. Já, no controlador de Takagi-Sugeno a saída do controlador é uma função da entrada.

Os sistemas do tipo Takagi-Sugeno são muito menos intuitivos do que os sistemas de Mamdani. Entretanto, devido à existência de métodos teóricos para a análise de estabilidade do sistema fuzzy do tipo Takagi-Sugeno [11], [16], [18], [25],[33], [35], esse método, tornou-se muito utilizado. Os sistemas de Mamdani são utilizados como uma “caixa preta” [37] e sofrem críticas devido à inexistência de um estudo analítico de sua estabilidade. Neste trabalho enfocaremos exatamente o tema estabilidade de sistemas dinâmicos obtidos por meio de sistemas do tipo Mamdani.

As equações variacionais fuzzy têm sido usadas por distintos métodos. Algumas tentativas de se contemplar subjetividade do tipo não aleatória já foram propostas tais como a derivada de Hokuvara, Inclusões diferenciais e Extensão de Zadeh [26]. Nestes três métodos, o processo adotado para se estudar os sistemas variacionais é sempre derivado de sistemas clássicos determinísticos.

Os sistemas dinâmicos p-fuzzy são sistemas onde a dinâmica não se baseia em conceitos formais de variações provenientes das derivadas ou de diferenças explícitas ou de inclusões

diferenciais. Nos sistemas p-fuzzy a dinâmica (processo iterativo) é obtida por meio de um sistema baseado em regras fuzzy do tipo Mamdani.

Os sistemas dinâmicos p-fuzzy têm sido utilizado por vários autores, por exemplo: [7], [13], [24], [28] e [39] com eficiência comprovada. Entretanto, mesmo tendo sua eficácia comprovada, os sistemas p-fuzzy foram usados de modo empírico, devido à inexistência de um estudo analítico de estabilidade deste tipo de sistema.

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo analítico da estabilidade local dos sistemas dinâmicos p-fuzzy. Neste estudo, estabelecemos condições necessárias e suficientes para existência de ponto de equilíbrio para sistemas p-fuzzy unidimensionais e bidimensionais e, formulamos condições para estabilidade deste ponto. Vimos que, para que haja ponto de equilíbrio é suficiente que ocorra uma mudança de sinais na saída do controlador.

Este trabalho mostra ainda que para um sistema p-fuzzy, com uma base de regras fixa, a estabilidade de um ponto de equilíbrio está ligada às funções de pertinência associadas à entrada e à saída do sistema baseado em regras fuzzy. Usamos como método de defuzificação da saída do sistema baseado em regras - o centro de massa.

Além dos diversos resultados matemáticos encontrados, com demonstrações rigorosas, realizamos inúmeros experimentos computacionais e obtivemos resultados que atestam a veracidade de toda teoria matemática desenvolvida.

Acreditamos que os diversos exemplos com figuras que ilustram os resultados matemáticos obtidos deixem o texto claro e sua leitura mais motivante. Apresentamos ainda, algumas aplicações em Biomatemática onde podemos comprovar, em situações concretas, a eficácia, versatilidade e robustez da teoria desenvolvida.

Este trabalho está organizado como se segue.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos básicos da teoria de conjuntos fuzzy, lógica fuzzy, sistemas baseados em regras fuzzy do tipo Mamdani, definimos também sistemas p-fuzzy de ordem n e comparamos o uso dos sistemas p-fuzzy ao uso das equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 2, introduzimos os sistemas p-fuzzy unidimensionais, onde definimos, conjunto viável de equilíbrio e ponto de equilíbrio deste sistema. Estabelecemos condições para existência e unicidade de ponto de equilíbrio. Derivamos alguns resultados que serão usados para estender esta teoria á sistemas p-fuzzy bidimensionais. Damos exemplos e contra-exemplos dos resultados matemáticos obtidos.

No Capítulo 3, apresentamos os sistemas p-fuzzy bidimensionais. Definimos região viável de equilíbrio e ponto de equilíbrio. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para existência de ponto de equilíbrio. Demonstramos que é possível separar sistemas p-fuzzy bidimensionais em sistemas p-fuzzy unidimensionais, a fim de estudar a sua estabilidade.

No Capítulo 4, fazemos a análise de estabilidade de sistemas p-fuzzy unidimensionais e bidimensionais. Obtivemos vários resultados matemáticos para a estabilidade destes sistemas e fizemos diversos experimentos computacionais que confirmam estes resultados.

No Capítulo 5, apresentamos algumas aplicações em Biomatemática - dinâmica de populações e epidemiologia.

Por fim, apresentamos as conclusões e trabalhos futuros.

Capítulo 1

Teoria de conjuntos fuzzy

Neste Capítulo vamos apresentar a teoria que julgamos necessária para um bom entendimento do nosso trabalho.

1.1 Conjuntos fuzzy

Na teoria clássica de conjuntos, um subconjunto A de X é caracterizado por sua função característica,

$$\chi_{A(x)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

isto é, um elemento $x \in X$ pertence ou não pertence a A . Neste caso, podemos dizer que a fronteira de A está bem definida. Entretanto, em muitos casos não é claro quando um elemento x pertence ou não ao conjunto A . Por exemplo, se A representa o conjunto dos indivíduos altos. Podemos dizer que uma pessoa com $2,00m$ é alta, mas o que dizer sobre uma pessoa com $1,80m$ ou $1,72m$? São elas altas ou não? Neste caso, dizemos que a fronteira de A é subjetiva[2].

Pensando em resolver questões como estas, Em 1965 Lotfi A. Zadeh desenvolveu a teoria dos conjuntos fuzzy [38]. Nesta teoria, um elemento pertence a um dado conjunto com um grau de pertinência. Isto é, um conjunto A é caracterizado por uma função de pertinência com valores em $[0, 1]$. No caso do exemplo acima, podemos usar a seguinte função de pertinência para A (Figura 1.1),

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1.5 \\ \frac{x-1.5}{0.5}, & \text{se } 1.5 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

e, neste caso, uma pessoa com 1,8m, por exemplo, seria alta com grau 0,6 (Figura 1.1).

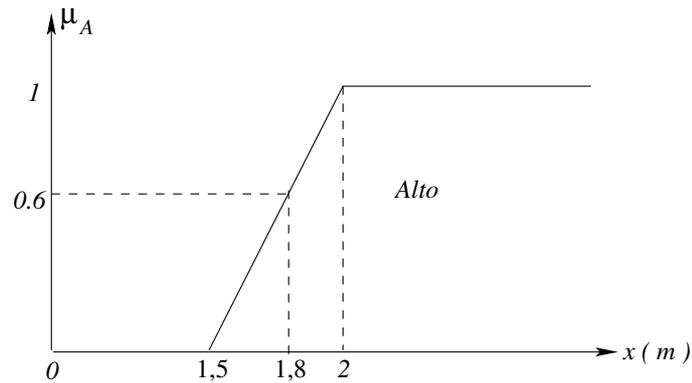


Figura 1.1: Função de pertinência do conjunto das pessoas altas.

Definição 1.1. *Seja X um subconjunto não vazio. Um conjunto fuzzy $A \subset X$ é caracterizado por sua função de pertinência $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$, onde $\mu_A(x)$ é interpretado como o grau com que x pertence a A .*

Definição 1.2. *Dizemos que um subconjunto fuzzy $A \subset X$ é normal se existe $x_o \in X$ tal que $\mu_A(x_o) = 1$.*

Observação 1.1. *Em nosso trabalho, usaremos indistintamente A ou μ_A para indicarmos a função de pertinência do subconjunto fuzzy A .*

1.1.1 Operações com conjuntos fuzzy

Um subconjunto fuzzy, matematicamente estende a definição de subconjunto clássico, pois basta tomar para função de pertinência de um subconjunto clássico sua função característica. A seguir vamos estender as principais operações sobre conjuntos clássicos para conjuntos fuzzy.

Definição 1.3. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X . A função de pertinência da interseção de A e B é definida por:*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X$$

Definição 1.4. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X . A função de pertinência da união de A e B é definida por:*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X$$

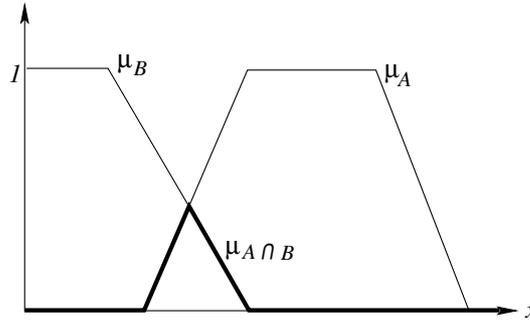


Figura 1.2: Função de pertinência do subconjunto $A \cap B$

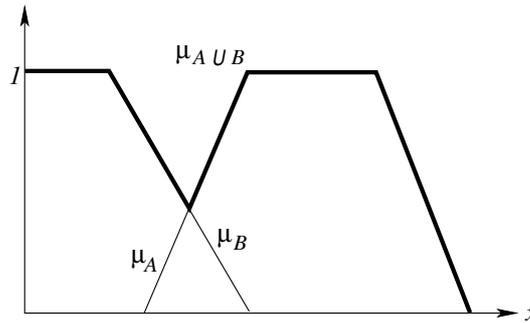


Figura 1.3: Função de pertinência do subconjunto $A \cup B$

1.1.2 Número fuzzy

Definição 1.5. Dado $\alpha \in [0, 1]$ e U um subconjunto fuzzy de X , denominamos de α -nível do subconjunto fuzzy U , o subconjunto $[U]^\alpha \subset X$ definido por:

i) $[U]^0 = \overline{\{x \in X; U(x) > 0\}}$, ($\alpha = 0$);

ii) $[U]^\alpha = \{x \in X; U(x) \geq \alpha\}$, se $\alpha \in (0, 1]$.

Definição 1.6. Seja U um subconjunto fuzzy de X , o suporte de U , o qual denota-se, por $\text{supp}(U)$, é o subconjunto de X cujos elementos têm grau de pertinência não nulos em U , isto é,

$$\text{supp}(U) = \{x \in X; U(x) > 0\}.$$

Definição 1.7. Um subconjunto fuzzy $A \subset \mathbb{R}$ é chamado de número fuzzy se satisfaz às condições:

(i) $[A]^\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \in [0, 1]$;

(ii) $[A]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in [0, 1]$;

(iii) O suporte de A é limitado.

O teorema seguinte mostra uma caracterização de número fuzzy através de funções monótonas e contínuas.

Teorema 1.1. *A é um número fuzzy se, somente se, existe um intervalo fechado $[b, c] \neq \emptyset$ e $a, d \in \mathbb{R}$ tal que,*

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [b, c] \\ f(x), & \text{se } x \in (-\infty, b) \\ g(x), & \text{se } x \in (c, \infty) \end{cases},$$

onde $f : (-\infty, b] \rightarrow [0, 1]$ é contínua à direita, crescente em $[a, b]$ e tal que $f(x) = 0$, para $x \in (-\infty, a)$; $g : [c, \infty) \rightarrow [0, 1]$ é contínua à esquerda, decrescente em $[c, d]$ e $g(x) = 0$ para $x \in [d, \infty)$.

Demonstração. Consultar [20].

A interpretação geométrica de número fuzzy geral é dada na Figura 1.4.

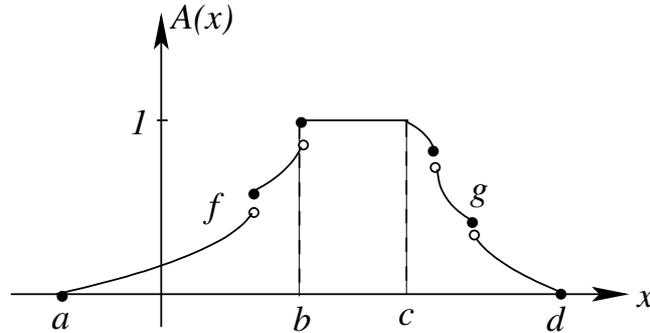


Figura 1.4: Interpretação geométrica de número fuzzy

Em nosso trabalho suporemos que as funções f e g , no Teorema 1.1, são contínuas como é o caso dos números fuzzy triangulares e trapezoidais definidos a seguir.

Definição 1.8. *Um número fuzzy A é dito triangular (Figura 1.5) quando sua função de pertinência tem a forma,*

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{se } b < x \leq c \\ 0, & \text{se } x > c \end{cases}, \text{ com } a < b < c.$$

Definição 1.9. *Um número fuzzy A é dito trapezoidal (Figura 1.6) quando sua função de*

pertinência tem a forma,

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } b < x \leq c, \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{se } b < x \leq d \\ 0, & \text{se } x > d \end{cases}, \quad \text{com } a < b < c < d.$$

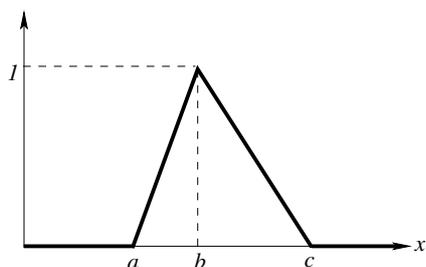


Figura 1.5: Número fuzzy triangular

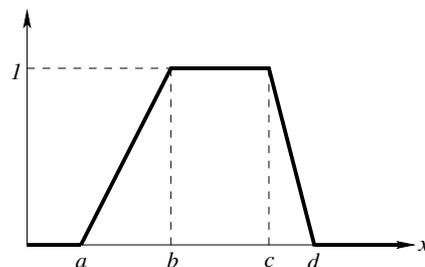


Figura 1.6: Número fuzzy trapezoidal

1.2 Lógica fuzzy

Lógica se refere ao estudo de métodos e princípios do pensamento humano. A lógica clássica trabalha com proposições que são ou verdadeiras ou falsas e se baseia na teoria clássica de conjuntos. A lógica fuzzy tem como base a teoria de conjuntos fuzzy e uma proposição fuzzy do tipo “Se x é A e y é B , Então z é C ou z é D ” é falsa ou verdadeira com um certo grau. No mundo real existem situações onde a dicotomia verdadeiro falso não é suficiente para representar a realidade. Nestes casos, a lógica fuzzy é útil, pois é capaz de traduzir em termos matemáticos as informações contidas em frases expressas em linguagem natural.

1.2.1 Variáveis lingüísticas

Variáveis lingüísticas são variáveis cujos valores ao invés de números são palavras, chamadas de termos lingüísticos. Cada termo lingüístico corresponde a um conjunto fuzzy. Por exemplo, se considerarmos a temperatura como uma variável lingüística seus termos poderiam ser: *Muito baixa*, *Baixa*, *Média*, *Alta* e *Muito alta* (Figura 1.7).

Formalmente, uma variável lingüística é caracterizada pela quintupla $(x, T(x), U, G, M)$, onde:

- U é o universo de discurso (domínio da variável lingüística);

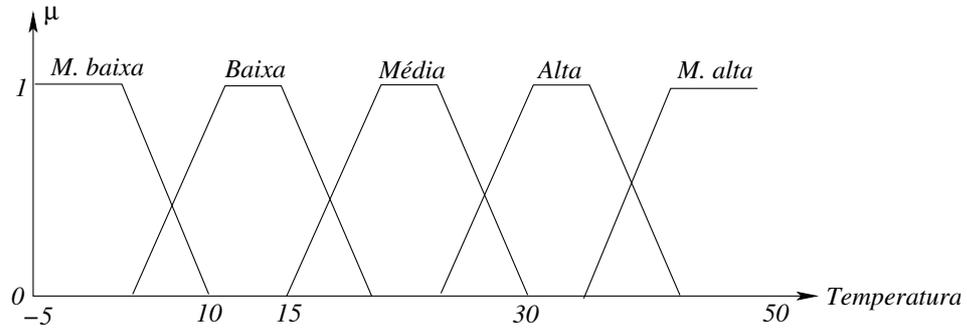


Figura 1.7: Variável linguística temperatura

- x é o nome da variável;
- T é o conjunto dos termos linguísticos, onde cada termo é um número fuzzy em U ;
- G é uma regra semântica para gerar os nomes dos valores de x ;
- M é uma regra semântica para associar cada valor ao seu significado.

No caso do exemplo dado acima para a variável *temperatura* temos $T = \{Muito\ baixa, Baixa, Média, Alta, Muito\ alta\}$, $U = [-5, 50]$.

1.2.2 Proposição fuzzy e operadores $max - \vee$ e $min - \wedge$

Uma proposição fuzzy é uma declaração do tipo “Se x é A e y é B , Então z é C ou z é D ”. Para traduzir matematicamente uma proposição fuzzy é necessário traduzir os conectivos **e** e **ou**. Para isso usamos os operadores t-norma e t-conorma os quais indicamos por \wedge e \vee e passamos a definir.

Definição 1.10. Dizemos que o operador binário $\wedge : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-norma se satisfaz:

- Comutatividade: $x \wedge y = y \wedge x$;
- Associatividade: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
- Monotonicidade: Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $x \wedge w \leq y \wedge z$;
- Condições de fronteira: $0 \wedge x = 0$ e $1 \wedge x = x$;

Definição 1.11. Dizemos que o operador binário $\vee : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-conorma se satisfaz:

- Comutatividade: $x \vee y = y \vee x$;

- ii) *Associatividade:* $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
- iii) *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $x \vee w \leq y \vee z$;
- iv) *Condições de fronteira:* $0 \vee x = x$ e $1 \vee x = 1$;

Proposição 1.1. Se A , B e C são subconjuntos fuzzy então os operadores \max e \min são associativos e comutativos, isto é:

- i) $\min\{\max\{A, B\}, \max\{A, C\}\} = \max\{A, \min\{B, C\}\}$;
- ii) $\max\{\min\{A, B\}, \min\{A, C\}\} = \min\{A, \max\{B, C\}\}$;

Demonstração. Para demonstração desta Proposição consultar [38].

Proposição 1.2. Seja $f(x, y) = \min\{C(y), D(x)\}$ e suponhamos que C seja derivável em y_o e D derivável em x_o então:

- i) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = C'(y_o)$, se $C(y_o) < D(x_o)$;
- ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 0$, se $C(y_o) > D(x_o)$.
- iii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = D'(x_o)$, se $C(y_o) > D(x_o)$;
- iv) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = 0$, se $C(y_o) < D(x_o)$.

Demonstração Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o, y_o + h) - f(x_o, y_o)}{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\min\{C(y_o + h), D(x_o)\} - \min\{C(y_o), D(x_o)\}}{h} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Se tivermos $C(y_o) > D(x_o)$ então $C(y_o + h) > D(x_o)$ para h suficientemente próximo de 0 (pois a função C é contínua). Daí por (1.1) tem-se,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(x_o) - D(x_o)}{h} = 0$$

Se, por outro lado, tivermos $C(y_o) < D(x_o)$ então por (1.1) tem-se,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(y_o + h) - C(y_o)}{h} = C'(y_o)$$

Os itens *iii)* e *iv)* demonstram-se de modo análogo.

Observação 1.2. Quando (x_o, y_o) é tal que $C(y_o) = D(x_o)$ possivelmente não existem as derivadas parciais neste ponto.

1.3 Sistemas baseados em regras fuzzy

Sistemas baseados em regras fuzzy são conceitualmente simples [17]. Tais sistemas consistem basicamente de três estágios (Figura 1.8) : um estágio de entrada-*fuzificador*, um estágio de processamento, composto por uma *base de regras fuzzy* e um *método de inferência* e um estágio de saída - *defuzificador*.

Supondo que \mathbb{R}^n é o universo de discurso, então dado $x_o \in \mathbb{R}^n$ o fuzificador

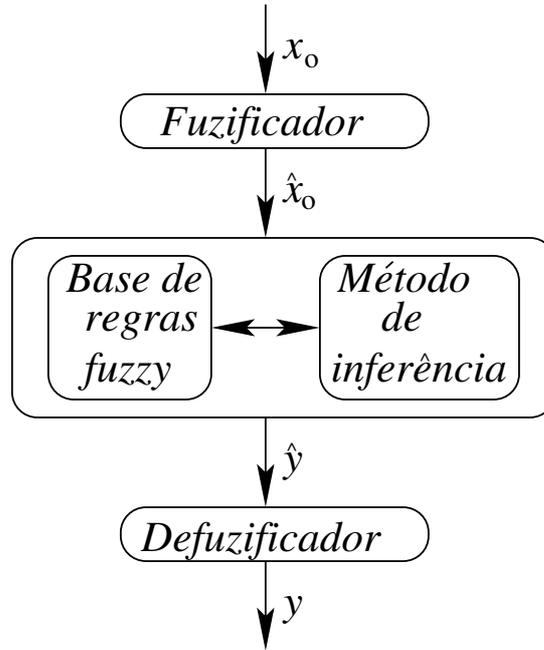


Figura 1.8: Esquema de um sistema baseado em regras fuzzy.

transforma x_o em um conjunto fuzzy, $\hat{x}_o \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Normalmente isto pode ser feito simplesmente tomando \hat{x}_o como a imagem da função característica de x_o , isto é, a imagem de:

$$\hat{x}_o(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = x_o \\ 0, & \text{se } a \neq x_o \end{cases}$$

O estágio de processamento é o núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base de regras é uma sentença do tipo:

Se “Condição” Então “Ação”

Normalmente estas sentenças são ligadas por conectivos: *E*, *OU* e *NÃO*. O método de inferência traduz estas regras matematicamente, por meio de *t-norma* e *t-conormas*, gerando para cada regra uma saída. A combinação destas saídas gera uma saída fuzzy do sistema, $\hat{y} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

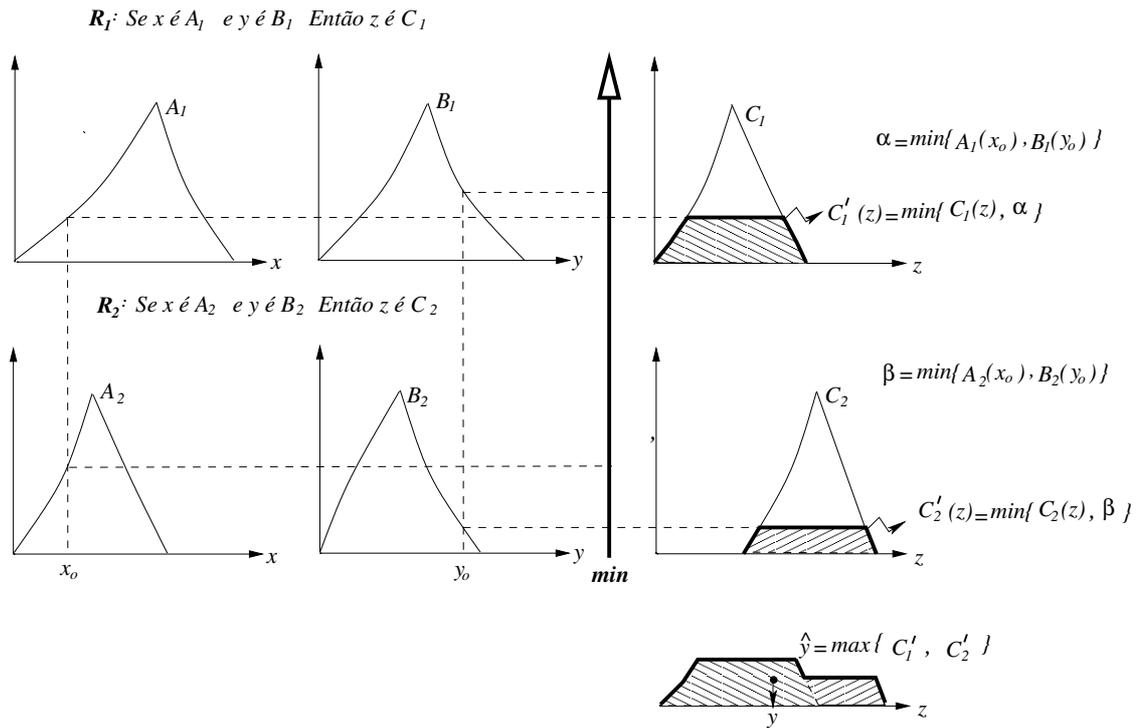


Figura 1.9: Sistema baseado em regras fuzzy com duas entradas e uma saída.

O método de inferência mais utilizado é o *MAX-MIN*, onde adota-se a *t-norma* \wedge (mínimo) para modelar o conectivo *E* e a *t-conorma* \vee (máximo) para agregar as regras fuzzy da base de regras. Normalmente sistemas do tipo Mamdani usam o *MAX-MIN* como *t-normas* e *t-conormas* [2].

A defuzificação é um processo de escolha de um elemento $y \in \text{supp}(\hat{y})$ tal que y seja capaz de representar o conjunto fuzzy \hat{y} . Existem vários métodos de defuzificação descritos na literatura, o mais utilizado é o *centro de gravidade* [17].

A Figura 1.9 ilustra um controlador fuzzy com duas variáveis de entrada e uma variável de saída, usando o método de inferência *MAX-MIN* e como defuzificador o método do *centro de massa*.

Na Figura 1.9 pode-se observar que dado $x_0 \in \text{supp}(A_1) \cap \text{supp}(A_2)$ e $y_0 \in \text{supp}(B_1) \cap \text{supp}(B_2)$ para cada regra $i = 1, 2$ é obtida uma saída, $C_i'(z) = (A_i(x_0) \wedge B_i(y_0) \wedge C_i(z))$. Daí, obtém-se o subconjunto fuzzy $\hat{y} = C_1' \vee C_2'$. E, com a defuzificação de \hat{y} obtém-se o número y , o qual é a abscissa do centro de massa da região limitada pela função de pertinência de \hat{y} .

1.4 Sistemas p-fuzzy

Um sistema *p-fuzzy* em \mathbb{R}^n é um sistema dinâmico discreto,

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

onde a função F é dada por $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$, a condição inicial $x_o \in \mathbb{R}^n$, é dada, e a variação $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é obtida por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. Em nosso estudo usamos o método de inferência de Mamdani, ou seja, trabalhamos com sistemas baseados em regras fuzzy do tipo Mamdani.

A arquitetura de um sistema *p-fuzzy* pode ser visualizada na Figura 1.10.

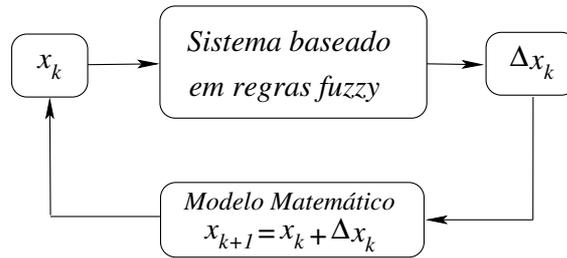


Figura 1.10: Arquitetura de um sistema *p-fuzzy*.

1.4.1 Sistemas p-fuzzy e as equações diferenciais

Motivados pelo grande sucesso de Newton com suas: “*Equações do movimento*”, vários cientistas passaram a acreditar que tudo no universo poderia ser descrito por sistemas determinísticos e, qualquer parte do sistema poderia - em princípio - ser previsto a partir do conhecimento exato do seu estado inicial [9]. Com este pensamento, as equações diferenciais tornaram-se a ferramenta mais utilizada para modelagem de problemas reais no século *XVIII* e começo do século *XIX*.

No entanto, mesmo quando é possível modelar, depois de formulado um modelo, resolvê-lo é algo quase sempre impossível do ponto de vista analítico, como assinalou Ian Stewart: “*Montar as equações é uma coisa, resolvê-las é totalmente outra*” [9]. Daí, os métodos numéricos passam a ser a única esperança de uma solução, aproximada, para o modelo.

Modelar é uma tarefa difícil, pois depende de conhecimento prévio do problema [4], e normalmente o que se tem são informações imprecisas. Nestes casos achamos improvável, se não impossível, dizer que uma função definida por uma determinada lei matemática, seja capaz de modelar o problema em questão. Nestes casos, ao invés de equações diferenciais, sugerimos uma função dada por uma base de regras, isto é um sistema *p-fuzzy*.

Para fazer uma análise comparativa entre as equações diferenciais e os sistemas p-fuzzy vamos considerar, em detalhes, o modelo logístico clássico,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

o qual tem por solução única, a curva

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-\alpha t}}.$$

Para obter o sistema p-fuzzy utilizaremos as variáveis lingüísticas: *população* e *variação*. A variável população será a variável de entrada (Figura 1.11), definida pelos termos lingüísticos: *Baixa(B)*, *Média Baixa(MB)*, *Média(M)*, *Média Alta(MA)*, *Alta(A)* e *Altíssima(AL)* e a variável de saída, *variação* (Figura 1.12) será definida pelos termos lingüísticos: *Baixa Negativa(BN)*, *Baixa Positiva(BP)*, *Média Positiva(MP)* e *Alta Positiva(AP)*.

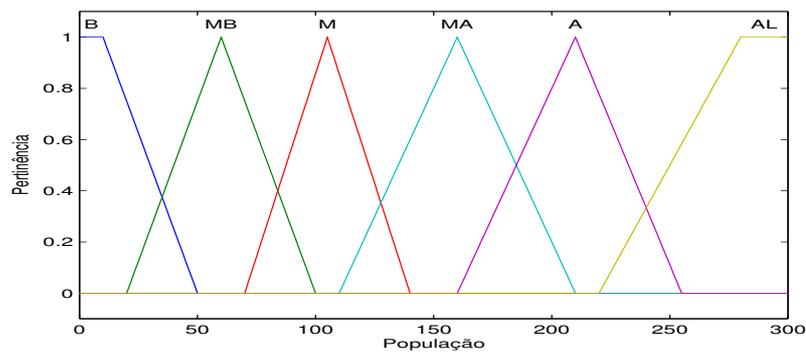


Figura 1.11: Variável de entrada: População.

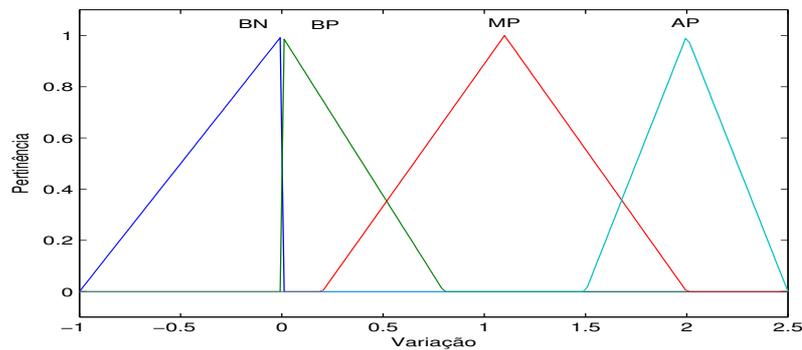


Figura 1.12: Variável de saída: Variação.

A base de regras depende do fenômeno estudado. Para este caso propomos a seguinte

base de regras:

1. Se população é *baixa* então variação é *baixa positiva*;
2. Se população é *média baixa* então variação é *média positiva*;
3. Se população é *média* então variação é *alta positiva*;
4. Se população é *média alta* então variação é *média positiva*;
5. Se população é *alta* então variação é *baixa positiva*;
6. Se população é *altíssima* então variação é *baixa negativa*;

As soluções: clássica e p-fuzzy podem ser vistas na Figura 1.13. Para solução clássica utilizamos $K = 234.714951$, $x_0 = 12.7945$ e $\alpha = 0.02232$, em (1.2). Observe que as soluções são muito “parecidas”. Isto é, com um sistema p-fuzzy simples podemos simular algo que na literatura é descrito por um modelo determinístico de equações diferenciais.

Uma observação interessante é que o método p-fuzzy pode auxiliar no cálculo dos parâmetros de um modelo clássico associado. Podemos utilizar o método p-fuzzy para obter os parâmetros para o modelo clássico, por exemplo, através de um ajuste de curva [30].

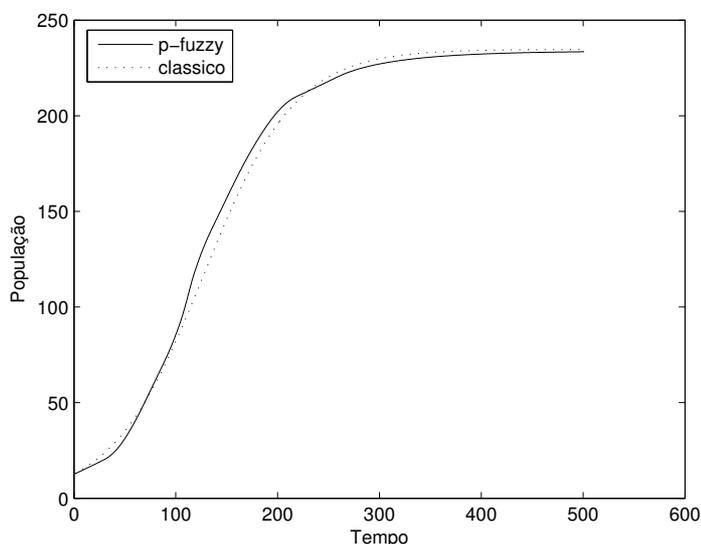


Figura 1.13: Gráficos: modelo logístico com $K = 234.71$ e $\alpha = 0.022$ e modelo p-fuzzy.

De qualquer forma, a importância maior do modelo p-fuzzy é quando não se têm possibilidade de avaliar certos parâmetros ou quando as variáveis estão carregadas de subjetividades.

Capítulo 2

Sistema p-fuzzy unidimensional

Neste capítulo, vamos abordar os sistemas *p-fuzzy* unidimensionais. Inicialmente apresentaremos as definições e os resultados matemáticos que julgamos necessários para o bom entendimento deste capítulo. Em seguida apresentaremos teoremas que garantem a existência e dão condições para unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema *p-fuzzy*. Também apresentaremos exemplos e contra-exemplos que ilustram a teoria desenvolvida.

2.1 Definições preliminares

Definição 2.1. *Dado um sistema p-fuzzy unidimensional,*

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_o \text{ dado e } x_k \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.1)$$

$F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$, dizemos que x^* é um ponto de equilíbrio de (2.1) se $F(x^*) = x^* \iff \Delta(x^*) = 0$.

Definição 2.2. *Seja $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ uma família finita de subconjuntos fuzzy normais associados a uma variável lingüística x . Dizemos que $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ é uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos (Figura 2.1) se,*

- i) $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$, para cada $1 \leq i < k$;*
- ii) $\bigcap_{j=i, i+2} \text{supp}(A_j)$ possui no máximo um elemento para cada $1 \leq i < k - 1$;*
- iii) $\bigcup_{i=1, k} \text{supp}(A_i) = U$, onde U é o domínio da variável lingüística x ;*
- iv) dados $z_1 \in \text{supp}(A_i)$ e $z_2 \in \text{supp}(A_{i+1})$, se $A_i(z_1) = 1$ e $A_{i+1}(z_2) = 1$ tem-se $z_1 < z_2$ para cada $1 \leq i < k$.*

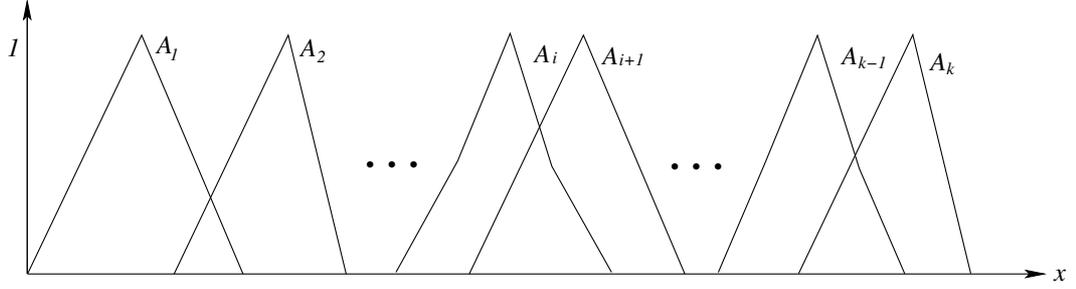


Figura 2.1: Família de subconjuntos fuzzy sucessivos.

Definição 2.3. Consideremos o sistema p -fuzzy (2.1) e uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$. Se para algum $1 \leq i < k$, $z_1, z_2 \in \text{supp}(A_i \cup A_{i+1})$, Δz_1 e Δz_2 possuem sinais contrários, então o subconjunto dado por: $\text{supp}(A^*)$, $A^* = A_i \cap A_{i+1}$, é denominado **conjunto viável de equilíbrio** do sistema p -fuzzy (2.1) (Figura 2.2).

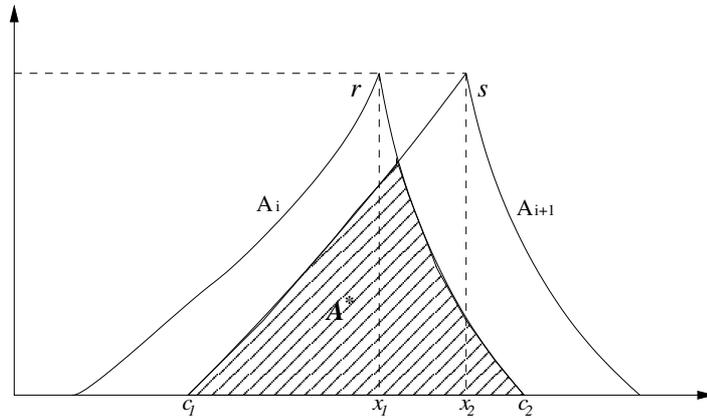


Figura 2.2: Conjunto viável de equilíbrio.

Um sistema p -fuzzy depende do tipo de sistema fuzzy associado a ele. Isto é, da base de regras, do método de inferência e do método de defuzificação utilizado. Na Definição 2.3, variações com sinais contrários significa que o sistema p -fuzzy está associado a um sistema fuzzy cuja a base de regras é do tipo:

R_1 : Se x é A_i Então $\Delta(x)$ é C ;

R_2 : Se x é A_{i+1} Então $\Delta(x)$ é D .

onde $\text{supp}(C) \subset \mathbb{R}^-$ e $\text{supp}(D) \subset \mathbb{R}^+$ ou vice e versa.

Definição 2.4. Seja \mathcal{A} uma região limitada pela função contínua $y = f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x (Figura 2.3). O centro de gravidade ou centróide de \mathcal{A} é o ponto

(\bar{x}, \bar{y}) onde,

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

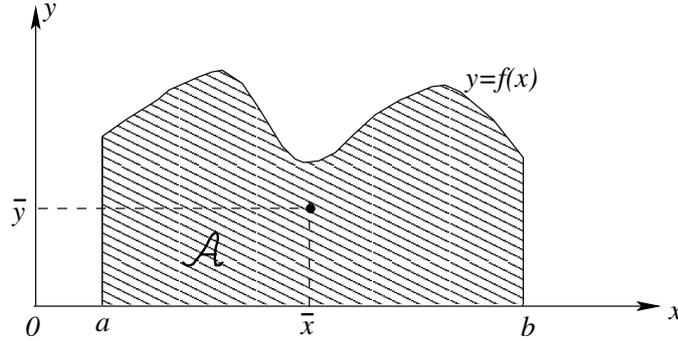


Figura 2.3: Interpretação geométrica do centro de gravidade.

Na teoria de sistemas fuzzy, usualmente centróide se refere apenas à abscissa do ponto (\bar{x}, \bar{y}) . Portanto estaremos particularmente interessado em \bar{x} .

2.2 Defuzificação da saída do sistema fuzzy

Consideremos agora o sistema *p-fuzzy* associado ao sistema fuzzy de Mamdani (Figura 2.4). Seja $supp(A^*) = [c_1, c_2]$, $A^* = A_i \cap A_{i+1}$, um subconjunto viável de equilíbrio do sistema p-fuzzy. Para facilitar a notação indicaremos por r a função de pertinência de A_i , por s a função de pertinência de A_{i+1} ,

$$z_1 = \min_{x \in supp(A_i)} \{r(x) = 1\} \quad e \quad z_2 = \max_{x \in supp(A_{i+1})} \{s(x) = 1\},$$

e por f e g as respectivas funções de pertinências das saídas associadas a A_i e A_{i+1} .

Nestas condições, indicaremos este sistema p-fuzzy por $(r, s) \rightarrow (g, f)$, afim de explicitar qual sistema fuzzy está associado ao sistema p-fuzzy.

Dado $x \in supp(A^*)$, $\hat{\Delta}x$ é a curva que limita a região R (Figura 2.4). Ao valor defuzificado de $\hat{\Delta}x$ (veja Figura 2.4), pelo método de defuzificação centro de gravidade (usando a Definição 2.4), indicaremos por $\Delta(x)$ e definimos:

$$\Delta(x) = \frac{\int_b^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mt dt + \int_0^{g^{-1}(n)} nt dt + \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt}{\int_0^n g^{-1}(t)dt - \int_0^m f^{-1}(t)dt} \quad (2.2)$$

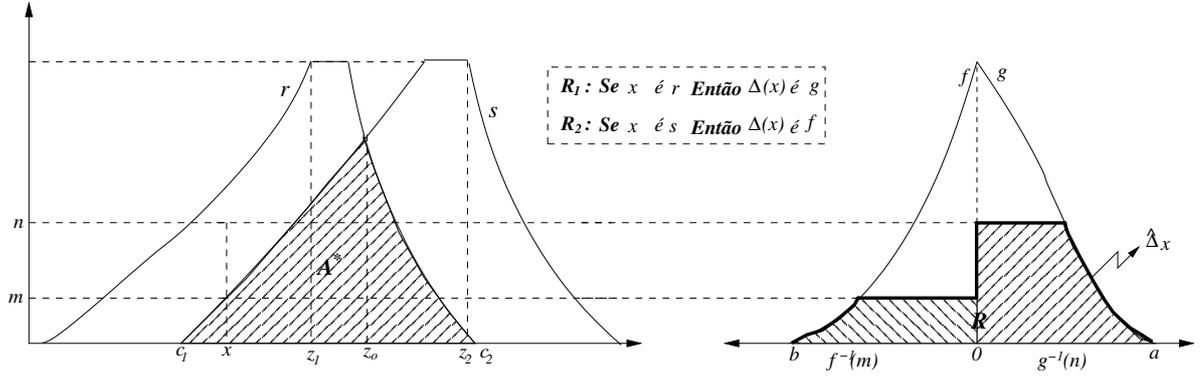


Figura 2.4: Processo de inferência de Mamdani de um sistema $(r, s) \rightarrow (g, f)$.

onde $(n, m) = (r(x), s(x))$. A Equação (2.2) ainda pode ser reescrita por:

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)},$$

onde,

$$h_1(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} ntdt + \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt \quad (2.3)$$

$$h_2(m) = \int_b^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt \quad (2.4)$$

$$A(m, n) = \int_0^n g^{-1}(t)dt - \int_0^m f^{-1}(t)dt \quad (2.5)$$

Observe que $A(m, n)$ é a área da região R , onde optamos por escrevê-la em função das funções inversas de f e de g .

2.3 Preliminares matemáticos

Nesta seção vamos apresentar os resultados matemáticos necessários para o bom entendimento do restante do capítulo. Os resultados que seguem se referem ao sistema do tipo $(r, s) \rightarrow (g, f)$ da Figura 2.4. Para todos os resultados do restante deste Capítulo suporemos que as função r, s, f e g são contínuas.

Lema 2.1. A função h_1 (2.3) é crescente e sua imagem é dada por, $Im(h_1) = [0, \int_0^a tg(t)dt]$.

Demonstração. Como g é contínua em $[0, a]$ (portanto, limitada, o que implica que g^{-1} é limitada) então a função h_1 é derivável, e,

$$h_1'(n) = \left(\int_0^{g^{-1}(n)} ntdt \right)' + \left(\int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt \right)'$$

usando as propriedades de derivadas,

$$h_1'(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} tdt + n \left(\int_0^{g^{-1}(n)} tdt \right)' - \left(\int_a^{g^{-1}(n)} tg(t)dt \right)'$$

usando a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo obtém-se

$$h_1'(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} tdt + ng^{-1}(n)(g^{-1})'(n) - ng^{-1}(n)(g^{-1})'(n)$$

donde,

$$h_1'(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} tdt = \frac{(g^{-1}(n))^2}{2} > 0.$$

e, portanto h_1 é crescente.

Agora,

$$h_1(0) = \int_0^{g^{-1}(0)} 0tdt + \int_{g^{-1}(0)}^a tg(t)dt = \int_a^{g^{-1}(0)} tg(t)dt = 0$$

e

$$h_1(1) = \int_0^{g^{-1}(1)} tdt + \int_{g^{-1}(1)}^a tg(t)dt = \int_0^a tg(t)dt.$$

Logo $Im(h_1) = [0, \int_0^a tg(t)dt]$.

Lema 2.2. A função h_2 é decrescente e sua imagem é dada por, $Im(h_2) = [\int_b^0 tf(t)dt, 0]$.

Demonstração. Basta verificar que $h_2'(m) = -\frac{(f^{-1}(m))^2}{2} < 0$.

Lema 2.3. Seja $\phi : I = [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Se $\phi''(z) > 0, \forall z \in (d_1, d_2)$ e $\phi(d_1) < 0$, então ϕ possui no máximo uma raiz em I .

Demonstração. Suponhamos que existam $z_1, z_2 \in I$ ($z_1 < z_2$) tal que $\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0$. De $\phi''(z) > 0$, temos que ϕ não é constante. Daí, pelo Teorema de Rolle, $\exists c \in (z_1, z_2)$ tal que $\phi'(c) = 0 \Rightarrow c$ é ponto de mínimo, pois $\phi''(c) > 0$. Mas, $\phi(d_1) < 0 \Rightarrow \phi(c) > 0$. Como ϕ é contínua $\exists z_o \in (z_1, z_2)$ tal que $\phi(c) > \phi(z_o) > 0$, Absurdo! Logo ϕ tem no máximo uma raiz.

Lema 2.4. Seja $\phi : I = [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Se $\phi''(z) < 0, \forall z \in I$ e $\phi(d_1) > 0$, então ϕ possui no máximo uma raiz em I .

Demonstraçãõ. Análoga à demonstraçãõ anterior.

Considerando ainda o sistema p -fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ da Figura 2.4, suponhamos que $g(t) > f(-t)$, $\forall t \in D_g = [0, a]$ e $-t \in D_f = [b, 0]$, então $a \geq -b$. De fato: se $a < -b \Rightarrow -a \in D_f$ e como $g(t) > f(-t)$, $\forall t \in D_g$ e $-t \in D_f$ então $0 = g(a) > f(-a) > 0$ o que é um absurdo!

Observaçãõ 2.1. Usamos D_g e D_f para representar respectivamente: $\text{supp}(\widehat{\Delta}) \cap \mathbb{R}^+$ e $\text{supp}(\widehat{\Delta}) \cap \mathbb{R}^-$.

Lema 2.5. Se $g(t) > f(-t)$, $\forall t \in [0, -b]$ então $g^{-1}(k) > -f^{-1}(k) \forall k \in [0, 1]$.

Demonstraçãõ. Trivial (ver Figura 2.5) .

Lema 2.6. Se $g(t) > f(-t)$, $\forall t \in [0, -b]$ então para $m, n \in [0, 1]$ com $m \leq n$ tem-se,

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)} > 0.$$

Demonstraçãõ. Seja $H(m, n) = h_1(n) + h_2(m)$, é suficiente mostrarmos que $H(m, n) > 0$, pois $A(m, n) > 0$. Vamos mostrar inicialmente que dado $k \in [0, 1]$ tem-se $H(k, k) > 0$, para isto consideraremos dois casos.

Suponhamos primeiro que $k \in [0, 1]$ é tal que $g^{-1}(k) \leq -b$. Temos que,

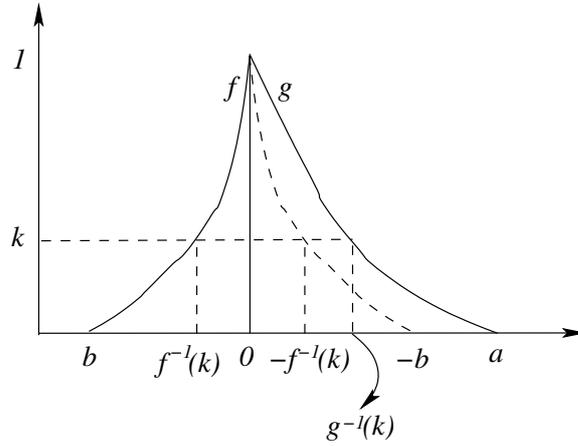


Figura 2.5: Saída do sistema p -fuzzy com $g(t) > f(-t)$.

$$H(k, k) = h_1(k) + h_2(k) = \int_0^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt$$

Usando o Lema 2.5 tem-se $\int_0^{g^{-1}(k)} ktdt = \int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt + \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt$, então,

$$H(k, k) = \int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt + \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt \quad (2.6)$$

Como $\int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt = -\int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt$ então de (2.6),

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt \quad (2.7)$$

Temos que $\int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt$, pois $g^{-1}(k) \leq -b$. Substituindo este resultado em (2.7) tem-se,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt - \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt \quad (2.8)$$

Podemos reescrever (2.8) da forma,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)]dt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt \quad (2.9)$$

Como $a > -b$ de (2.9) tem-se,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)]dt + \int_{g^{-1}(k)}^{-b} [tg(t) - tf(-t)]dt + \int_{-b}^a tg(t)dt \quad (2.10)$$

Como $\forall t \in [0, -b]$ tem-se $k > f(t) = f(-t) \Leftrightarrow kt - tf(-t) > 0$ e do Lema 2.5 tem-se $tg(t) - tf(-t) > 0$ então todos os termos de (2.10) são positivos, portanto: $H(k, k) > 0$.

Se dado $k \in [0, 1]$ tivermos $g^{-1}(k) > -b$ a demonstração é análoga. Então, em qualquer caso, tem-se:

$$H(k, k) > 0 \quad (2.11)$$

Dados $m, n \in [0, 1]$, $m \leq n$ temos de (2.11) que $h_1(m) + h_2(m) > 0 \Leftrightarrow -h_2(m) < h_1(m)$. Como h_1 é crescente tem-se $-h_2(m) < h_1(m) \leq h_1(n)$. Logo $H(n, m) > 0 \Rightarrow \Delta(x) > 0$.

Lema 2.7. Se $g(t) < f(-t)$, $\forall t \in [0, a]$, e $m, n \in [0, 1]$ $m \geq n$ então $H(n, m) < 0$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Lema 2.6.

Observação 2.2. Observe que o Lema 2.6 mostra que se $g(t) > f(-t)$ então $x^* \notin [c_1, z_o]$, pois $x^* \in [c_1, z_o] \Leftrightarrow m \leq n$. Já o Lema 2.7 mostra que se $g(t) < f(-t)$ então $x^* \notin [z_o, c_2]$,

pois $x^* \in [z_o, c_2] \Leftrightarrow m \geq n$.

2.4 Existência de ponto de equilíbrio

Agora enunciaremos e demonstraremos um teorema que garante a existência de ao menos um ponto de equilíbrio para cada região de equilíbrio de um sistema p-fuzzy. Para isso, ainda usaremos a Figura 2.4 para motivar os resultados apresentados nesta seção.

Teorema 2.1. (*Existência*) *Seja S um sistema p-fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ e $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ um conjunto viável de equilíbrio de S . Então, $\text{supp}(A^*)$ possui ao menos um ponto de equilíbrio. Isto é, $\exists x^* \in \text{supp}(A^*)$ tal que $\Delta(x^*) = 0$.*

Demonstração. Dado $x \in \text{supp}(A^*)$, pela Definição 2.1 x é ponto de equilíbrio se, e somente se,

$$\Delta(x) = 0 \iff h_1(n) + h_2(m) = 0.$$

Se $r(c_1) = 0$ então

$$\Delta(c_1) = h_1(r(c_1)) + h_2(s(c_1)) = h_1(0) + h_2(0) = 0,$$

e, portanto c_1 é ponto de equilíbrio. Se $s(c_2) = 0$ tem-se $\Delta(c_2) = 0$ donde c_2 é ponto de equilíbrio. Suponhamos que $r(c_1) > 0$ e $s(c_2) > 0$. Como $s(c_1) = 0$, então, do Lema 2.1 e Lema 2.2 $h_1(r(c_1)) > 0$ e $h_2(s(c_1)) = 0$. Daí,

$$\Delta(c_1) = h_1(r(c_1)) + h_2(s(c_1)) = h_1(r(c_1)) > 0.$$

Analogamente,

$$\Delta(c_2) = h_1(r(c_2)) + h_2(s(c_2)) = h_2(s(c_2)) < 0.$$

Como Δ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário $\exists x^* \in [c_1, c_2]$ tal que $\Delta(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ é ponto de equilíbrio.

Observação 2.3. *Se considerarmos no Teorema 2.1, ao invés de S do tipo $(r, s) \rightarrow (g, f)$, um sistema do tipo $(r, s) \rightarrow (f, g)$, o resultado seria análogo. Isto é, dado um conjunto viável de equilíbrio $\text{supp}(A^*)$, existe um ponto de equilíbrio $x^* \in \text{supp}(A^*)$.*

2.4.1 Determinação do ponto de equilíbrio - saída simétrica

Quando a variável de saída do sistema fuzzy está associada à funções simétricas, o ponto de equilíbrio de um conjunto viável de equilíbrio é único. Exceto em casos extremos

(veja Observação 2.4). Senão vejamos,

Proposição 2.1. *Seja S um sistema p-fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ e $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ um conjunto viável de equilíbrio de S . Se f e g são funções monótonas e simétricas, isto é $f(t) = g(-t)$, então um ponto de equilíbrio de S é:*

$$x^* = r \cap s = \max_{x \in \text{supp}(A^*)} [\min(r(x), s(x))].$$

Demonstração. Como $f(t) = g(-t)$ então $f(-a) = g(a) = 0 = f(b) \implies b = -a$, pois f é monótona. Temos ainda que, $f(t) = g(-t) \implies g^{-1}(f(t)) = -t = -f^{-1}(f(t)) \implies f^{-1}(y) = -g^{-1}(y)$.

Então, $\Delta(z_o) = 0$ se, somente se, $h_1(n) = -h_2(m)$. Como $b = -a$, da Equação (2.4),

$$h_2(m) = \int_{-a}^{f^{-1}(m)} t f(t) dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 m t dt$$

fazendo a mudança de variável $u = -t$ tem-se,

$$\begin{aligned} h_2(m) &= \int_a^{-f^{-1}(m)} u f(-u) du + \int_{-f^{-1}(m)}^0 m u du \implies \\ \implies h_2(m) &= \int_a^{g^{-1}(m)} u g(u) du + \int_{g^{-1}(m)}^0 m u du = -h_1(m). \end{aligned}$$

Isto é, $h_2 = -h_1$. Daí, $h_1(n) = -h_2(m) \iff h_1(n) = h_1(m) \iff m = n$ (pois h_1 é crescente - Lema 2.1), portanto $x^* = r \cap s$.

Observação 2.4. *Observemos que se tivermos $r(c_1) \neq 0$ e $s(c_2) \neq 0$ então $x^* = r \cap s$ é o único ponto de equilíbrio do sistema. Além disso, se o sistema S for $(r, s) \rightarrow (f, g)$ o resultado da Proposição 2.1 é o mesmo.*

2.4.2 Exemplo - saída simétrica

Consideremos um sistema p-fuzzy onde x é a variável de entrada definida pela família de números fuzzy sucessivos (Figura 2.6): B, MB, M, MA, A e AL . A variável de saída, Dx (Figura 2.7) é definida pelos números fuzzy: BN, BP, MP e AP .

Para base de regras consideremos:

1. Se x é B então Dx é BP ;
2. Se x é MB então Dx é MP ;

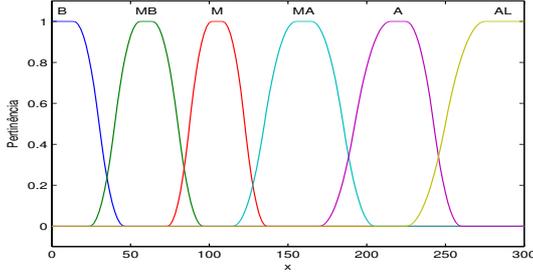


Figura 2.6: Variável de entrada: x .

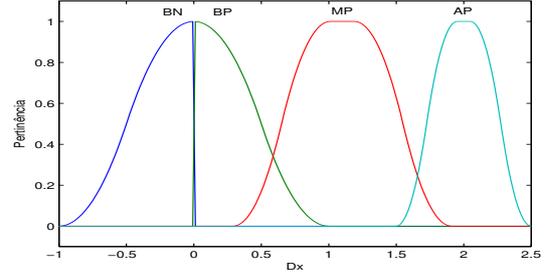


Figura 2.7: Variável de saída: Dx .

3. Se x é M então Dx é AP ;
4. Se x é MA então Dx é MP ;
5. Se x é A então Dx é BP ;
6. Se x é AL então Dx é BN ;

Como BP e BN são tais que $\text{supp}(BP) \subset \mathbb{R}^+$ e $\text{supp}(BN) \subset \mathbb{R}^-$ observe, pelas regras 5 e 6, que $\text{supp}(A^*)$, $A^* = A \cap AL$, é um conjunto viável de equilíbrio. Os números fuzzy BP e BN são simétricos (Figura 2.7), então pela Proposição 2.1 o ponto de equilíbrio é a intersecção entre as funções de pertinências de A e AL . De fato, indiquemos as funções de pertinências de A e AL respectivamente por r e s . Então, na região de interesse tem-se,

$$r(x) = \begin{cases} 1 - 2 \left(\frac{x-260}{35} \right)^2, & \text{se } 225 < x \leq 242.5 \\ 2 \left(\frac{260-x}{35} \right)^2, & \text{se } 242.5 < x \leq 260 \end{cases}$$

e

$$s(x) = \begin{cases} 2 \left(\frac{x-225}{35} \right)^2, & \text{se } 225 < x \leq 242.5 \\ 1 - 2 \left(\frac{x-260}{35} \right)^2, & \text{se } 242.5 < x \leq 260 \end{cases}.$$

Resolvendo a equação $r(x) = s(x)$ tem-se o ponto de equilíbrio $x^* = 245.5882$, o que confere com os experimentos numéricos dado na Figura 2.8. Pode-se observar a solução do sistema p-fuzzy com $x_o = 200$ convergindo para x^* .

2.5 Unicidade do ponto de equilíbrio

De posse da teoria matemática apresentada anteriormente podemos agora tratar da unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema p -fuzzy unidimensional. Vamos enunciar e demonstrar teoremas que estabelecem condições suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema p -fuzzy unidimensional.

Nesta seção vamos supor que as regiões de equilíbrios são tais que $r(c_1) \neq 0$ e $s(c_2) \neq 0$,

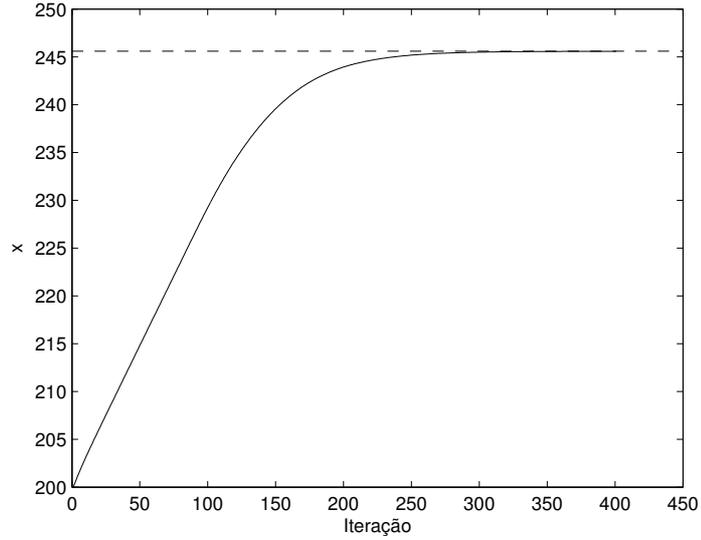


Figura 2.8: Solução do modelo p-fuzzy - saída simétrica, $x_o = 200$.

para facilitar a notação. Além disso, quando temos $r(c_1) = 0$ ou $s(c_2) = 0$ pode não haver unicidade de ponto de equilíbrio. Vamos dividir este problema em dois casos. Sejam

$$z_1 = \min_{x \in \text{supp}(A_i)} \{r(x) = 1\} \quad \text{e} \quad z_2 = \max_{x \in \text{supp}(A_{i+1})} \{s(x) = 1\}.$$

Suponhamos inicialmente que o conjunto viável de equilíbrio é tal que $c_1 \geq z_1$ e $c_2 \leq z_2$ (Figura 2.9), isto é, temos $\text{supp}(A^*) \subset [z_1, z_2]$. Neste caso,

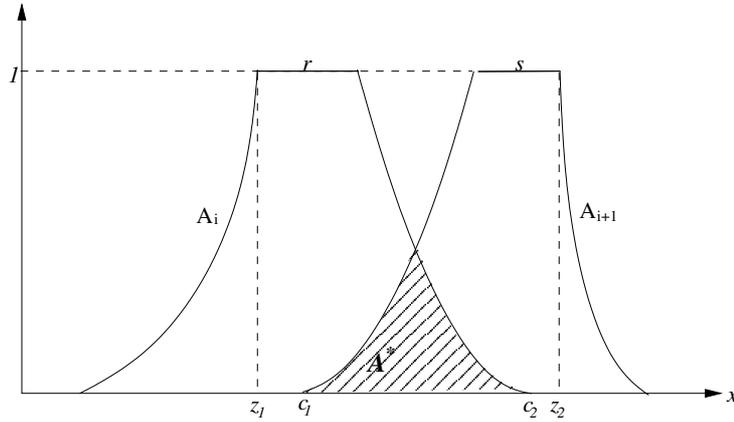


Figura 2.9: Conjunto viável de equilíbrio.

Teorema 2.2. *Seja S um sistema p-fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ e $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ um conjunto viável de equilíbrio de S . Se as funções r e s são monótonas por partes e A^* é tal que $c_1 \geq z_1$ e $c_2 \leq z_2$ então, existe um único ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$.*

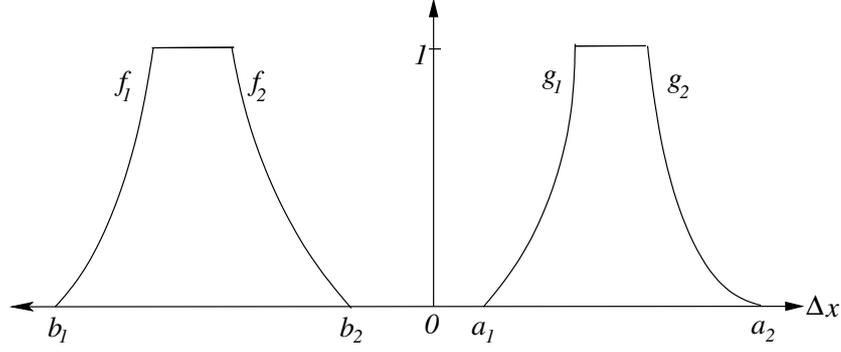


Figura 2.10: Saída onde f e g são monótonas por partes

Demonstração. Dado um $x \in \text{supp}(A^*)$ temos que,

$$\Delta(x) = h_1(n) + h_2(m) = h_1(r(x)) + h_2(s(x)).$$

Usando os Lemas 2.1 e 2.2 e a regra da cadeia temos que a derivada de Δ é dada por,

$$\Delta'(x) = \frac{[g^{-1}(r(x))]^2}{2} r'(x) - \frac{[f^{-1}(s(x))]^2}{2} s'(x) \quad (2.12)$$

Como, em $[c_1, c_2]$, r é não crescente e s é não decrescente então $r'(x) \leq 0$ e $s'(x) \geq 0$ e, além disso, se $r'(x) = 0$ tem-se $s'(x) \neq 0$ e se $s'(x) = 0$ tem-se $r'(x) \neq 0$. Então, de (2.12), $\Delta'(x) < 0$ o que mostra que Δ é decrescente. Como, pelo Teorema 2.1, existe um ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$, ele é único.

Observação 2.5. Se no Teorema 2.2 tivéssemos f e g monótonas por parte (Figura 2.10) ainda assim teríamos um único ponto de equilíbrio. Basta observar que neste caso teríamos

$$h_1(n) = \int_{a_1}^{g_1^{-1}(n)} t g_1(t) dt + \int_{g_1^{-1}(n)}^{g_2^{-1}(n)} n t dt + \int_{g_2^{-1}(n)}^{a_2} t g_2(t) dt \quad (2.13)$$

$$h_2(m) = \int_{b_1}^{f_1^{-1}(m)} t f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(m)}^{f_2^{-1}(m)} m t dt + \int_{f_2^{-1}(m)}^{b_2} t f_2(t) dt \quad (2.14)$$

donde obtêm-se,

$$h_1'(n) = \frac{1}{2} \{ [g_2^{-1}(n)]^2 - [g_1^{-1}(n)]^2 \} > 0, \text{ pois } g_1^{-1}(n) < g_2^{-1}(n)$$

e

$$h_2'(m) = \frac{1}{2} \{ [f_2^{-1}(m)]^2 - [f_1^{-1}(m)]^2 \} < 0, \text{ pois } f_1^{-1}(m) < f_2^{-1}(m)$$

Observação 2.6. Em sistemas p -fuzzy unidimensionais, relacionados a fenômenos bi-

ológicos, não acreditamos ser necessário usar variável lingüística de saída associada a funções monótonas por partes. No entanto, vamos utilizá-las em sistemas bidimensionais no capítulo seguinte

Observação 2.7. Pelo Teorema 1.1 temos que, se r e s são números fuzzy, r e s satisfazem o Teorema 2.2.

2.5.1 Exemplos - unicidade de ponto de equilíbrio para saídas não simétricas

Vamos apresentar dois exemplos, sendo que ambos possuem a mesma variável lingüística de entrada (Figura 2.11) e variáveis lingüísticas de saídas diferentes (Figuras 2.12 e 2.13). Consideremos também a mesma base de regras, dada no exemplo 2.4.2. No exemplo 1 (Figura 2.12) a função de pertinência de BN , f é tal que $f(t) < g(-t)$, onde g é a função de pertinência do conjunto fuzzy BP . No exemplo 2 (Figura 2.13) temos $f(t) > g(-t)$.

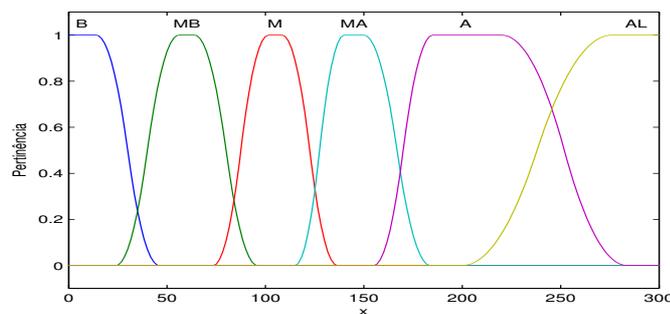


Figura 2.11: Variável lingüística de entrada do sistema p-fuzzy.

A intercessão entre as funções de pertinências dos conjuntos fuzzy associados à variável de entrada, A e AL é $x_o = 243,076$. Observe que no exemplo 1 o ponto de equilíbrio (Figura 2.14) é dado por $x_1^* = 259,551 > z_o$ e no exemplo 2 (Figura 2.15) tem-se $x_2^* = 215,702 < z_o$. Ou seja, temos $x_1^* > z_o$ e $z_o > x_2^*$. O que está em conformidade com os Lemas 2.6 e 2.7.

Vamos mostrar a seguir alguns resultados que permitem estabelecer condições suficientes para a unicidade de ponto de equilíbrio. Consideraremos o caso em que o conjunto viável de equilíbrio, $supp(A^*)$, pode não ter o comportamento descrito anteriormente, isto é, pode-se ter $c_1 > z_1$ ou $c_2 < z_2$.

Subdividimos este caso em duas seções. Inicialmente consideremos o caso em que $g(t) > f(-t)$.

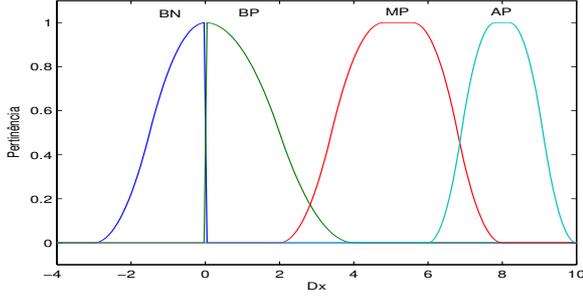


Figura 2.12: Exemplo 1: $f(t) < g(-t)$.

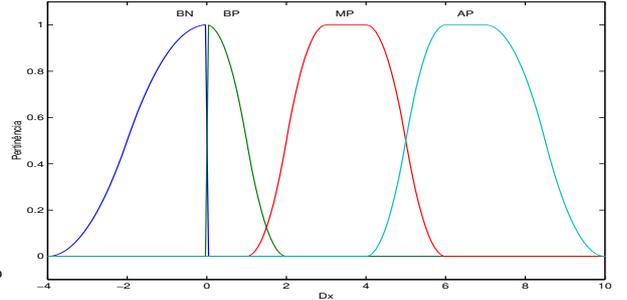


Figura 2.13: Exemplo 2: $f(t) > g(-t)$.

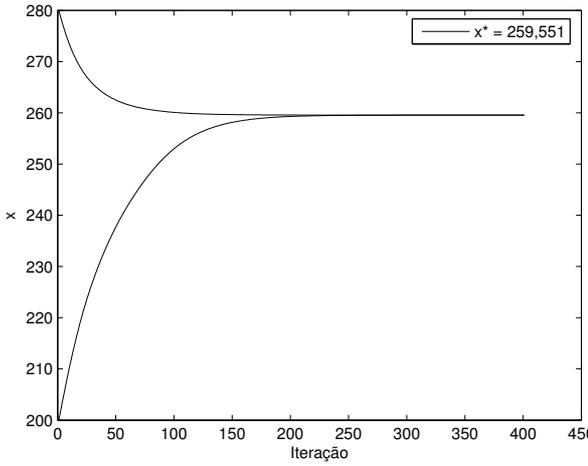


Figura 2.14: Exemplo 1: soluções do modelo p-fuzzy com $x_o = 200$ e $x_o = 280$.

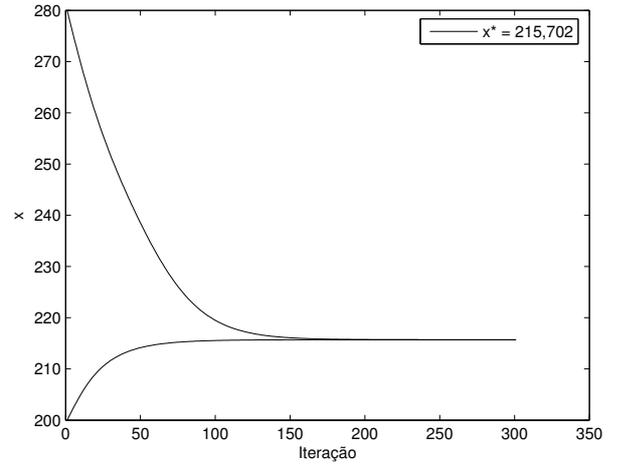


Figura 2.15: Exemplo 2: soluções do modelo p-fuzzy com $x_o = 200$ e $x_o = 280$.

2.5.2 Caso 1: $g(t) > f(-t)$

Teorema 2.3. (Unicidade) *Seja S um sistema p-fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ e $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ um conjunto viável de equilíbrio de S . Se as funções $r, s, f, g \in C^1$; r e s são monótonas por partes, f e g estritamente monótonas, tais que:*

- (i) $g(t) > f(-t), \forall t \in (0, -b)$;
- (ii) $\frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \overset{\circ}{D}_f, q \in \overset{\circ}{D}_g$ e $f(p) > g(q)$;
- (iii) $\left[\frac{s'(x)}{r'(x)} \right]' \leq 0, \forall x \in (z_o, c_2), r(x) \neq s(x)$.

Então S possui um único ponto de equilíbrio, x^* em $\text{supp}(A^*)$, e $x^* \in (z_o, c_2]$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que dado $x \in (z_o, c_2]$ (Figura 2.4), x determina um único par $(n, m) \in [0, 1]^2$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$. Pela monotonicidade de r , temos que para cada $n \in [0, r(z_o))$ existe um único $m \in [0, 1]$ tal que $n = r(x)$ e

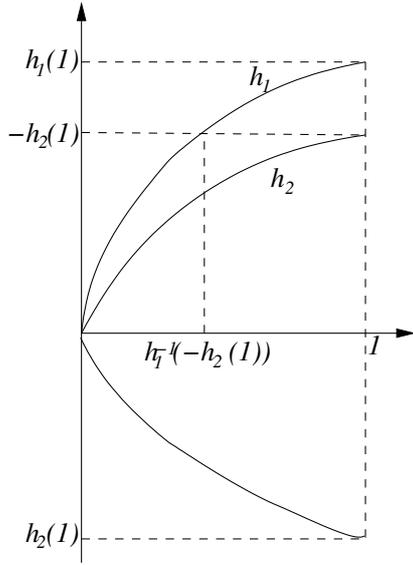


Figura 2.16: Função h_1 e h_2 .

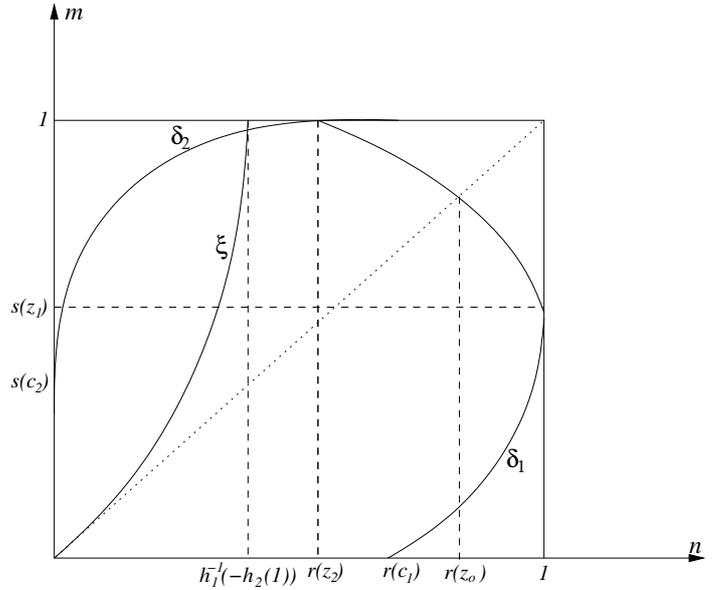


Figura 2.17: Função ξ , δ_1 e δ_2 .

$m = s(x)$. Ou seja, cada par (n, m) nestas condições, determina um único $x \in (z_o, c_2]$.

Pelo Teorema 2.1 existe um ponto de equilíbrio $x^* \in [c_1, c_2] = [c_1, z_o] \cup (z_o, c_2]$. Dado $x \in [c_1, z_o] \Rightarrow m = s(x) \leq n = r(x)$. Então, pelo Lema 2.6 $x^* \notin [c_1, z_o] \Rightarrow x^* \in (z_o, c_2]$. Ou equivalentemente, existe um único (n^*, m^*) com $n^* \in [0, r(z_o))$ tal que $H(n^*, m^*) = 0$.

Como para cada $n \in [0, r(z_o))$, existe um único $m \in [0, 1]$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$, então podemos definir uma função $\delta_2 : [0, r(z_o)) \rightarrow [0, 1]$ tal que $m = \delta_2(n)$ (Figura 2.17). Observe também que δ_2 é contínua, pois r e s são contínuas [23]. Utilizando a regra da cadeia, a derivada de δ_2 é dada por:

$$\delta_2'(n) = \frac{s'(x)}{r'(x)} \xrightarrow{(iii)} \delta_2''(n) \leq 0, \quad \forall n \in D_{\delta_2} \quad (2.15)$$

Pelo Lema 2.1 e Lema 2.2, h_1 e $-h_2$ são crescentes e pela condição (i), segue que (Figura 2.16):

$$\int_0^a tg(t)dt > - \int_b^0 tf(t)dt \Leftrightarrow h_1(1) > -h_2(1)$$

Então, dado $n \in [0, h_1^{-1}(-h_2(1))]$, existe um único $m \in [0, 1]$ tal que $h_1(n) = -h_2(m) \Leftrightarrow h_1(n) + h_2(m) = 0$. Daí, pode-se definir uma função injetiva ξ , $m = \xi(n)$ (Figura 2.17) tal que,

$$H^{-1}(0) = \{(n, m); m = \xi(n)\},$$

onde $H : [0, h_1^{-1}(-h_2(1))] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $H(n, m) = h_1(n) + h_2(m)$.

Como já vimos (Lema 2.1) que $\frac{\partial H}{\partial n} = h_1'(n) = \frac{(g^{-1}(n))^2}{2} > 0$ e (Lema 2.2) $\frac{\partial H}{\partial m} =$

$h_2'(m) = -\frac{(f^{-1}(m))^2}{2} < 0$ então, pelo Teorema da Função Implícita ([23], pg.160), ξ é k vezes diferenciável e, além disso:

$$\xi'(n) = -\frac{\frac{dh_1}{n}}{\frac{dh_2}{m}} = \left[\frac{g^{-1}(n)}{f^{-1}(m)} \right]^2 > 0, \forall n \in (0, h_1^{-1}(-h_2(1))), m \in (0, 1) \text{ e } m = \xi(n) \quad (2.16)$$

Logo, ξ é uma função estritamente crescente e como $H(0, 0) = 0$ e $H(h_1^{-1}(-h_2(1)), 1) = 0$ então $D_\xi = [0, h_1^{-1}(h_2(1))]$ e $Im_\xi = [0, 1]$.

Dado $m, n \in (0, 1)$ existe um único $p \in (b, 0)$ tal que $p = f^{-1}(m)$ e existe um único $q \in (0, a)$ tal que $q = g^{-1}(n)$, pois f e g são estritamente monótonas, por hipótese.

Do Lema 2.6 temos que $m \leq n \Rightarrow H(m, n) > 0$. Daí $H(m, n) = 0 \Rightarrow m > n$. Portanto, estamos interessados nos pares (m, n) tais que, $m > n$. Temos que,

$$m > n \Leftrightarrow f(p) > g(q) \quad (2.17)$$

Como f e g são monótonas, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange ([22], pg.213-216), têm-se:

$$p = f^{-1}(m) \Leftrightarrow (f^{-1})'(m) = \frac{1}{f'(p)} \quad (2.18)$$

e

$$q = g^{-1}(n) \Leftrightarrow (g^{-1})'(n) = \frac{1}{g'(q)} \quad (2.19)$$

Então,

$$m > n \stackrel{(2.17)}{\Leftrightarrow} f(p) > g(q) \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p^3}{q^3} \stackrel{(2.18) \text{ e } (2.19)}{\Leftrightarrow} \frac{(f^{-1})'(m)}{(g^{-1})'(n)} < \frac{[f^{-1}(m)]^3}{[g^{-1}(n)]^3}.$$

Portanto,

$$m > n \Rightarrow (f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3 > 0. \quad (2.20)$$

Derivando ξ' , de (2.16), tem-se

$$\xi''(n) = \frac{-2g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} \left\{ (f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3 \right\}$$

e como $\frac{-2g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} > 0, \forall m, n \in (0, 1)$, de (2.20) tem-se,

$$\xi''(n) > 0, \forall n \in \overset{\circ}{D}_\xi \quad (2.21)$$

Tomemos agora $I = D_\xi \cap D_{\delta_2} = D_\xi \cap [0, r(z_o))$ e definamos a função $\phi : I \rightarrow [0, 1]$ tal que,

$$\phi(n) = \xi(n) - \delta_2(n) \quad (2.22)$$

Então, de (2.15) e (2.21) tem-se $\phi''(n) > 0, \forall n \in \overset{\circ}{I}$. Como $\xi(0) = 0$ e a condição (iv) $\Rightarrow \delta_2(0) > 0$, então tem-se $\phi(0) < 0$. Daí, em virtude do *Lema 2.3* temos que existe um único $n^* \in I$ tal que,

$$\phi(n^*) = 0 \stackrel{(2.22)}{\Leftrightarrow} \xi(n^*) = \delta_2(n^*) \quad (2.23)$$

Como $\xi = H^{-1}(0)$ então, temos que

$$0 = H(n^*, \xi(n^*)) \stackrel{(2.23)}{=} H(n^*, \delta_2(n^*))$$

Logo, existe um único $x^* \in (z_o, c_2]$, $n^* = r(x^*)$ e $m^* = \delta_2(n^*) = s(x^*)$ tal que,

$$\Delta(x^*) = \frac{H(n^*, m^*)}{A(n^*, m^*)} = 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

2.5.3 Caso 2: $g(t) < f(-t)$

Teorema 2.4. (*Unicidade*) *Seja S um sistema p -fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S com $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$. Se as funções $r, s, f, g \in C^1$; r e s monótonas por partes, f e g estritamente monótonas, tais que:*

- (i) $g(t) < f(-t), \forall t \in (0, a)$;
- (ii) $\frac{g'(q)}{f'(p)} > \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \overset{\circ}{D}_f, q \in \overset{\circ}{D}_g$ e $f(p) < g(q)$;
- (iii) $\left[\frac{r'(x)}{s'(x)} \right]' \leq 0, \forall x \in (c_1, z_o), r(x) \neq s(x)$.

Então S possui um único ponto de equilíbrio, x^* em A^* , e $x^* \in [c_1, z_o)$.

Observação 2.8. *A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema 2.3, simplesmente a reproduzimos devido aos pequenos detalhes técnicos.*

Demonstração. Dado $m \in [0, s(z_o)]$, existe um único $n \in [0, 1]$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$, então podemos definir uma função $\delta_1 : [0, s(z_o)] \rightarrow [0, 1]$ tal que $n = \delta_1(m)$ (Figura 2.19). A função δ_1 é contínua e, pela Regra da cadeia tem-se,

$$\delta_1'(m) = \frac{r'(x)}{s'(x)} \stackrel{(iii)}{\implies} \delta_1''(m) \leq 0, \forall m \in D_{\delta_1} = [0, s(z_o)] \quad (2.24)$$

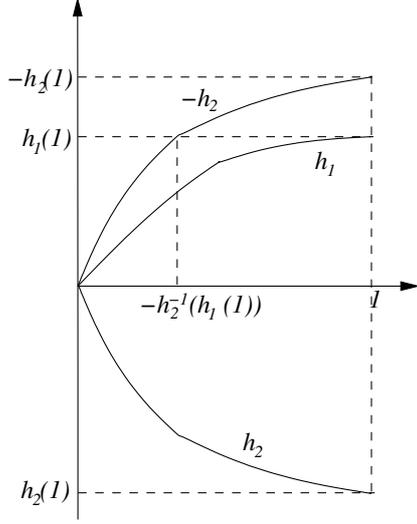


Figura 2.18: Função h_1 e h_2 .

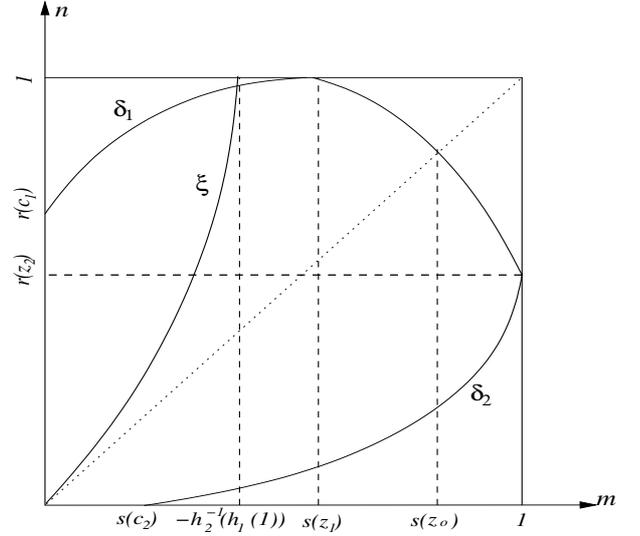


Figura 2.19: Função ξ , δ_1 e δ_2 .

Pelo Lema 2.1 e Lema 2.2 h_1 e $-h_2$ são crescentes e pela condição (i), segue que (Figura 2.18):

$$h_1(1) = \int_0^a tg(t)dt < - \int_b^0 tf(t)dt = -h_2(1)$$

Então, dado $m \in [0, -h_2^{-1}(h_1(1))]$, existe um único $n \in [0, 1]$ tal que $-h_2(m) = h_1(n) \Leftrightarrow h_1(n) + h_2(m) = 0$. Daí, pode-se definir uma função injetiva ξ , $n = \xi(m)$ (Figura 2.17) tal que,

$$H^{-1}(0) = \{(n, m); n = \xi(m)\},$$

onde $H : [0, -h_2^{-1}(h_1(1))] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $H(n, m) = h_1(n) + h_2(m)$.

Então, ξ é uma função crescente e como $H(0, 0) = 0$ e $H(1, -h_2^{-1}(h_1(1))) = 0$ então $D_\xi = [0, -h_2^{-1}(h_1(1))]$ e $Im(\xi) = [0, 1]$.

Como já vimos (Lema 2.1) que $\frac{\partial H}{\partial n} = h_1'(n) = \frac{(g^{-1}(n))^2}{2} > 0$ e (Lema 2.2) $\frac{\partial H}{\partial m} = h_2'(m) = -\frac{(f^{-1}(m))^2}{2} < 0$ então, pelo Teorema da Função Implícita ([23], pg.160), ξ é k vezes diferenciável e, além disso:

$$\xi'(n) = -\frac{\frac{dh_1}{dn}}{\frac{dh_2}{dm}} = \left[\frac{f^{-1}(m)}{g^{-1}(n)} \right]^2 > 0, \forall m \in (0, h_1^{-1}(-h_2(1))), n \in (0, 1) \text{ e } n = \xi(m) \quad (2.25)$$

Derivando ξ' , de (2.25), tem-se

$$\xi''(n) = \frac{-2f^{-1}(m)}{[g^{-1}(n)]^5} \{ (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3 - (f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 \}$$

e como $\frac{-2f^{-1}(m)}{[g^{-1}(n)]^5} > 0, \forall m, n \in (0, 1)$, de (2.24) tem-se,

$$\xi''(n) > 0, \forall n \in \overset{\circ}{D}_\xi \quad (2.26)$$

Tomemos agora, $I = D_\xi \cap D_{\delta_2} = D_\xi \cap [0, s(z_o))$ e definamos a função $\phi : I \rightarrow [0, 1]$ tal que,

$$\phi(n) = \xi(n) - \delta_1(n) \quad (2.27)$$

Então, de (2.24) e (2.26) tem-se $\phi''(n) > 0, \forall m \in \overset{\circ}{I}$. Como $\xi(0) = 0$ e a condição (iv) $\Rightarrow \delta_2(0) > 0$, então tem-se $\phi(0) < 0$. Daí, em virtude do *Lema 2.3* temos que, existe um único $m^* \in I$ tal que,

$$\phi(m^*) = 0 \stackrel{(2.27)}{\Leftrightarrow} \xi(m^*) = \delta_2(m^*) \quad (2.28)$$

Como $\xi = H^{-1}(0)$ então, temos que

$$0 = H(m^*, \xi(m^*)) \stackrel{(2.28)}{=} H(m^*, \delta_1(m^*))$$

Logo, existe um único $x^* \in (c_1, z_o)$, $m^* = s(x^*)$ e $n^* = \delta_1(m^*) = r(x^*)$ tal que,

$$\Delta(x^*) = \frac{H(n^*, m^*)}{A(n^*, m^*)} = 0$$

o que conclui a demonstração do teorema.

2.5.4 Exemplos

Vamos considerar dois sistemas p-fuzzy com a mesma variável de entrada (Figura 2.20) e variáveis de saídas distintas (Figuras 2.21, 2.22), uma onde $f(-t) < g(t)$ (Figura 2.21) e outra onde $f(-t) > g(t)$ (Figura 2.22). Usaremos as mesmas regras utilizadas para o exemplo 2.4.2.

Os resultados experimentais podem ser vistos na Figura 2.23, onde podem-se observar duas curvas, uma contínua, que converge para $x_1^* = 284,35$ e outra pontilhada, que converge para $x_2^* = 206,41$. A curva contínua se refere ao caso em que a saída satisfaz $f(-t) < g(t)$ e a curva pontilhada ao caso em que a saída satisfaz $f(-t) > g(t)$. Observe ainda, que os resultados encontrados estão em conformidade com os Teoremas 2.3 e 2.4 (observe que $supp(A^*)$ onde $A^* = A \cap AL$, é um conjunto viável de equilíbrio - Figura 2.20).

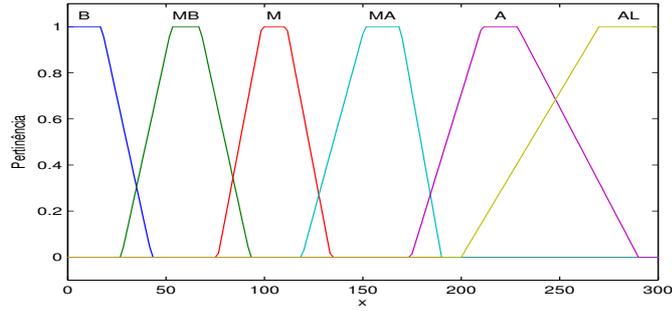


Figura 2.20: Variável de entrada do sistema fuzzy associado ao sistema p-fuzzy.

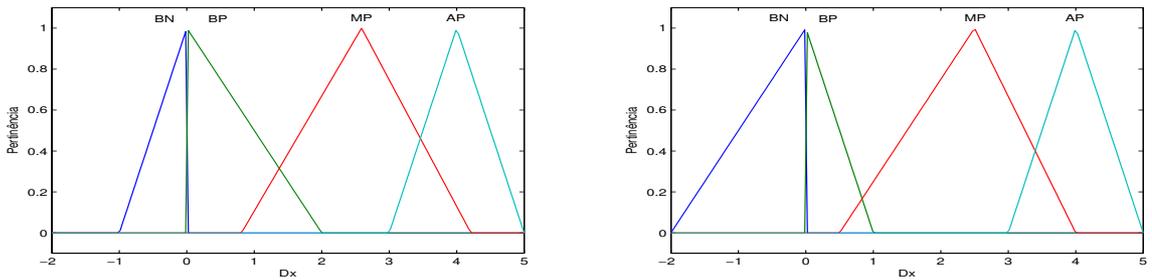


Figura 2.21: Variável de saída - $f(-t) < g(t)$. Figura 2.22: Variável de saída - $f(-t) > g(t)$.

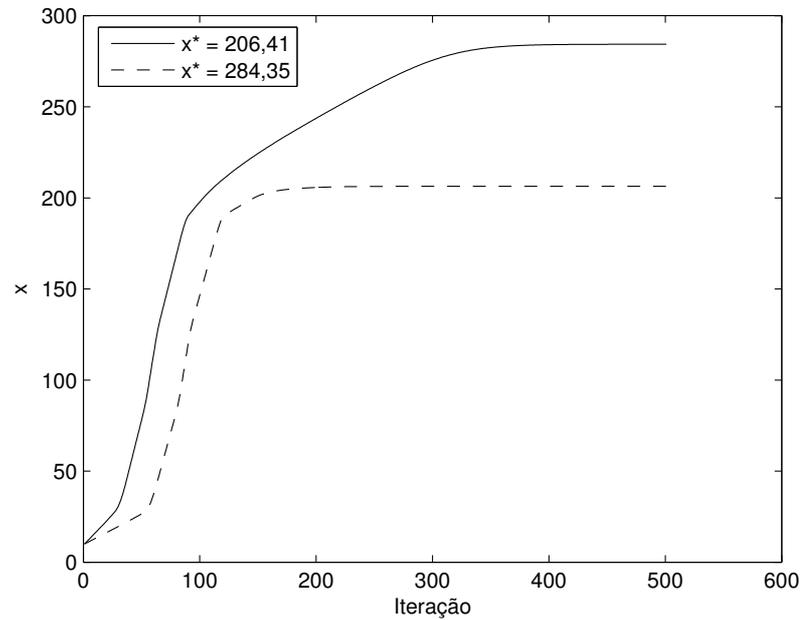


Figura 2.23: Equilíbrios dos sistemas p-fuzzy.

2.5.5 Conseqüências importantes dos Teoremas 2.3 e 2.4

Nesta seção, vamos enunciar algumas das conseqüências importantes, referentes aos Teoremas 2.3 e 2.4 dados nas seções anteriores.

Lema 2.8. Se $f(p) > g(q)$ então $q > -p$, onde $p = f^{-1}(m)$ e $q = g^{-1}(n)$.

Demonstração. De fato, temos que $f(p) > g(q) \Rightarrow m > n$ daí usando o Lema 2.5 e o fato de $-f^{-1}$ ser decrescente, pois f é crescente, então:

$$q = g^{-1}(n) > -f^{-1}(n) > -f^{-1}(m) = -p$$

Lema 2.9. Se $f(p) < g(q)$ então $q < -p$, onde $p = f^{-1}(m)$ e $q = g^{-1}(n)$.

Demonstração. Análoga à anterior.

Corolário 2.1. Seja S um sistema p -fuzzy e $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ um conjunto viável de equilíbrio de S . Se r, s, f e g forem números fuzzy triangulares então S possui um único ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$.

Demonstração. Demonstraremos o caso em que S é $(r, s) \rightarrow (g, f)$. Se S for $(r, s) \rightarrow (f, g)$ a demonstração é análoga.

Se $a = b$ então f e g são simétricas, pela Proposição 2.1 o ponto de equilíbrio é único,

$$x^* = r \cap s = \max_{x \in \text{supp}(A^*)} [\min(r(x), s(x))].$$

Suponhamos que $a > b$, então f, g, r e s satisfazem o Teorema 2.3. De fato, (i) e (iii) são triviais. Como $f(t) = -\frac{1}{b}t + 1$ e $g(t) = -\frac{1}{a}t + 1$ então $f(p) > g(q) \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p}{q}$. Do Lema 2.8 temos que $q > -p \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{p^3}{q^3}$ e, portanto tem-se $\frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p^3}{q^3}$ o que satisfaz (ii).

Suponhamos agora que $a < b$ então f, g, r e s satisfazem o Teorema 2.4. De fato, (i) e (iii) são triviais e $f(p) < g(q) \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{g'(q)}{f'(p)} > \frac{p}{q}$. Do Lema 2.9 temos que $q < -p \Rightarrow \frac{p}{q} > \frac{p^3}{q^3}$ e, portanto tem-se $\frac{g'(q)}{f'(p)} > \frac{p^3}{q^3}$ o que satisfaz (ii). O que conclui a demonstração.

Corolário 2.2. Seja S um sistema p -fuzzy e $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ um conjunto viável de equilíbrio de S . Se r e s são números fuzzy trapezoidais e f e g são triangulares então S possui um único ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$.

Demonstração. Análoga à demonstração do Corolário 2.1.

Dado $\sigma \in (0, 1)$ consideremos as funções r_σ e s_σ tais que $r_\sigma = \min_{x \in [c_1, c_2]} \{r(x), \sigma\}$ e $s_\sigma = \min_{x \in [c_1, c_2]} \{s(x), \sigma\}$. Em um sistema p -fuzzy a variável de entrada e a variável de saída são definidas por subconjuntos fuzzy. A um sistema p -fuzzy indicamos por: $(r, s) \rightarrow (g, f)$. Vamos utilizar esta mesma notação para sistemas onde a entrada é definida por funções como r_σ e s_σ . Claramente este não é um sistema p -fuzzy, mas é um sistema

que nos interessará para as seções posteriores. Após estas considerações, enunciemos o seguinte resultado.

Corolário 2.3. *Seja S um sistema p -fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ e $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ um conjunto viável de equilíbrio de S . Se S possui um único ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$, então o sistema $(r_\sigma, s_\sigma) \rightarrow (g, f)$, onde $r_\sigma(x) = \min\{r(x), \sigma\}$, $s_\sigma(x) = \min\{s(x), \sigma\}$ e $\sigma \in (0, 1)$, possui um único ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$.*

Demonstração. Dado $\sigma \in (0, 1)$ temos que $r_\sigma(c_1) > 0$, $s_\sigma(c_1) = 0$, $s_\sigma(c_2) > 0$ e $r_\sigma(c_2) = 0$ então,

$$H(r_\sigma(c_1), s_\sigma(c_1)) = h_1(r_\sigma(c_1)) + h_2(0) = h_1(r_\sigma(c_1)) > 0$$

e

$$H(r_\sigma(c_2), s_\sigma(c_2)) = h_1(0) + h_2(s_\sigma(c_2)) = h_2(s_\sigma(c_2)) < 0$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{x} \in [c_1, c_2]$ tal que $H(r_\sigma(\bar{x}), s_\sigma(\bar{x})) = 0$.

Vamos agora provar a unicidade. No caso em que o sistema satisfaz o Teorema 2.2 a demonstração é simples. Demonstremos o caso em que o sistema satisfaz o Teorema 2.4.

Suponhamos que $f(-t) > g(t)$. Dado $x \in (z_o, c_2)$ temos que $r_\sigma(x) \neq s_\sigma(x) \Rightarrow$

$$r_\sigma(x) = r(x) \text{ e } s_\sigma(x) = \begin{cases} \sigma \\ \text{ou} \\ r(x) \end{cases} \quad (\text{veja Figura 2.24})$$

Portanto, $\frac{s'_\sigma(x)}{r'_\sigma(x)} = 0$ ou $\frac{s'_\sigma(x)}{r'_\sigma(x)} = \frac{s'(x)}{r'(x)}$. Logo, r_σ e s_σ satisfazem a condição (iii) do Teorema 2.4 e, como as funções f e g satisfazem as condições (i) e (ii), então existe um único ponto de equilíbrio.

Se, por outro lado, tivermos $g(t) > f(-t)$, demonstra-se de modo análogo que s_σ e r_σ satisfazem a condição (iii) do Teorema 2.3. O que conclui a demonstração do Corolário.

A seguir, vamos apresentar um exemplo, afim de que, o apelo geométrico possa tornar mais explícito o Corolário 2.3.

Na Figura 2.24 temos ao lado esquerdo, dois pares de funções $(r_{\sigma_1}, s_{\sigma_1})$ e $(r_{\sigma_2}, s_{\sigma_2})$ e ao lado direito, a curva desenhada com linha mais fina representando os pares $(r_{\sigma_1}(x), s_{\sigma_1}(x))$, a curva mais grossa representando os pares $(r_{\sigma_2}(x), s_{\sigma_2}(x))$ e a função ξ (imagem inversa da função H). Observe que a função ξ intercepta cada uma das curvas uma única vez. O que mostra que existe apenas um ponto de equilíbrio para cada par de funções. Isto é, cada um dos sistemas $(r_{\sigma_1}, s_{\sigma_1}) \rightarrow (g, f)$ e $(r_{\sigma_2}, s_{\sigma_2}) \rightarrow (g, f)$ apresenta apenas um ponto de equilíbrio.

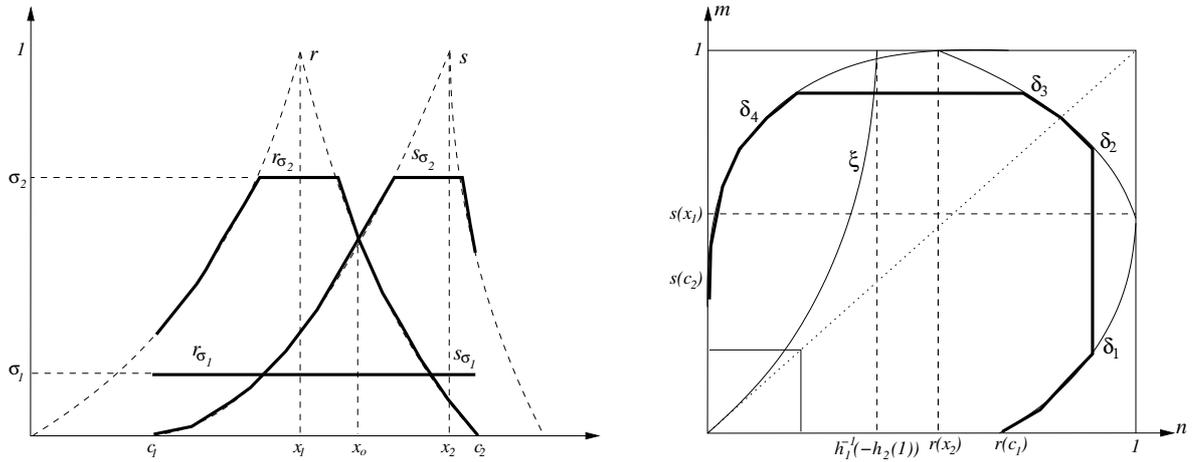


Figura 2.24: Funções r_σ e s_σ e interpretação geométrica da unicidade de ponto de equilíbrio para sistemas $(r_\sigma, s_\sigma) \rightarrow (g, f)$.

2.5.6 Outros casos: contra-exemplo

Quando não temos $f(-t) > g(t)$ ou $f(-t) < g(t)$ não é possível estabelecer condições gerais para unicidade do ponto de equilíbrio, como fizemos nos casos anteriores. Por exemplo, consideremos um sistema p-fuzzy ilustrado na Figura 2.25. Os conjuntos fuzzy

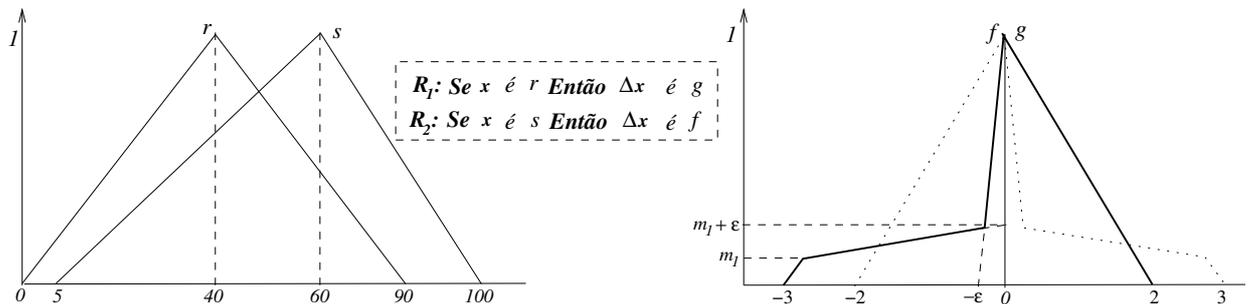


Figura 2.25: Sistema p-fuzzy com possibilidade de existência de mais de um ponto de equilíbrio.

de entrada têm como funções de pertinências:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}x, & \text{se } 0 < x \leq 40 \\ \frac{-1}{50}x + \frac{9}{5}, & \text{se } 40 < x \leq 90 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad s(x) = \begin{cases} \frac{1}{55}x - \frac{1}{11}, & \text{se } 5 < x \leq 60 \\ \frac{-1}{40}x + \frac{5}{2}, & \text{se } 60 < x \leq 100 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e os conjuntos fuzzy de saída têm como funções de pertinências: $g(t) = \frac{-1}{2}t + 1$ e

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t + 1, & \text{se } -3 < t \leq 3(m_1 - 1) \\ \frac{\varepsilon}{3(m_1-1)}t + m_1 + \varepsilon, & \text{se } 3(m_1 - 1) < t \leq \frac{3\varepsilon(\varepsilon+m_1-1)(m_1-1)}{3(m_1-1)+\varepsilon^2} \\ \frac{1}{\varepsilon}t + 1, & \text{se } \frac{3\varepsilon(\varepsilon+m_1-1)(m_1-1)}{3(m_1-1)+\varepsilon^2} < t \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.29)$$

Se tomarmos em (2.29), por exemplo, $m_1 = 0.1$ e $\varepsilon = 0.1$ o sistema p-fuzzy obtido possui três pontos de equilíbrio, os quais podem ser visualizados na Figura 2.26

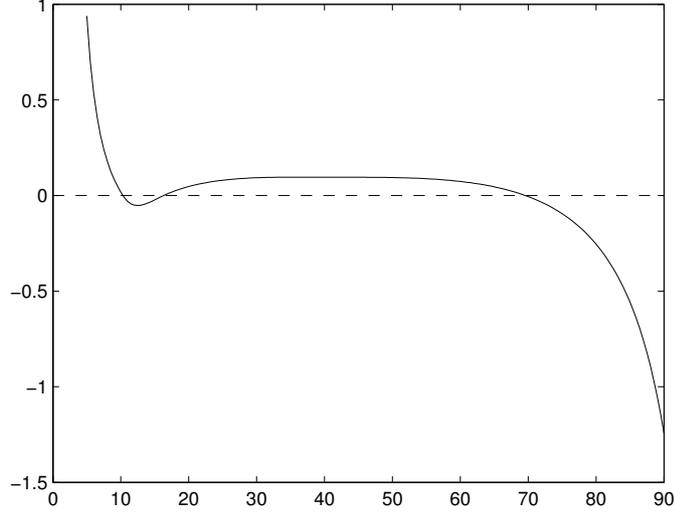


Figura 2.26: Gráfico da função Δ , para o sistema p-fuzzy, Figura 2.25, $m_1 = 0.1$ e $\varepsilon = 0.1$.

Observação 2.9. Observe que a função f não é derivável em todos os pontos de $\overset{\circ}{D}_f$, exigência feita nos casos anteriores. Entretanto, claramente pode se construir uma função f que seja derivável em todos os pontos de $\overset{\circ}{D}_f$. Por exemplo, se substituirmos a segunda sentença de f por um polinômio de quarto grau adequado, obviamente f será derivável em $\overset{\circ}{D}_f$.

Observação 2.10. Se tomarmos, por exemplo, $\varepsilon = 0.3$ e $m_1 = 0.3$ temos que o sistema p-fuzzy obtido possui somente um ponto de equilíbrio (Figura 2.27). O que mostra que os Teoremas 2.3 e 2.4 estabelecem apenas condições suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio.

Observação 2.11. Observe que, mesmo quando existe mais de um ponto de equilíbrio, estes estão fora do intervalo $[z_1, z_2] = [40, 60]$ (Figura 2.26), em conformidade com o Teorema 2.2.

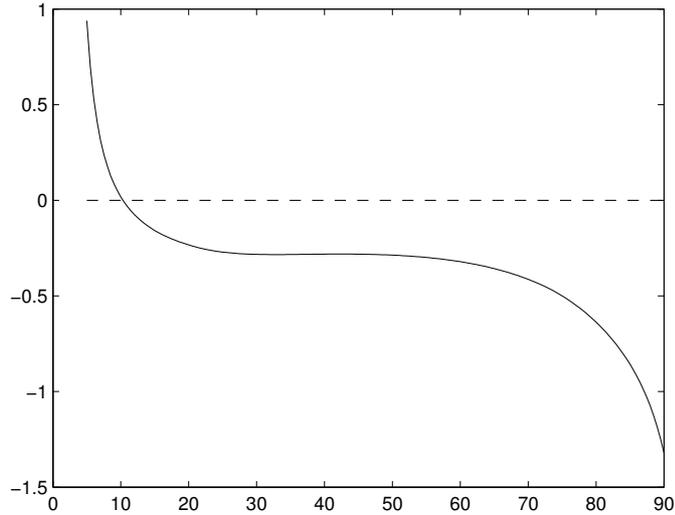


Figura 2.27: Gráfico da função Δ , para o sistema p-fuzzy, Figura 2.25, $\varepsilon = 0.4$ e $m_1 = 0.1$.

2.6 Resumo do capítulo

Neste capítulo, estudamos os sistemas p-fuzzy unidimensionais. Definimos subconjunto viável de equilíbrio e ponto de equilíbrio, enunciamos e demonstramos teoremas (Teoremas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4) que estabelecem condições suficientes para existência e unicidade de ponto de equilíbrio numa região de equilíbrio. Na demonstração destes teoremas fizemos uso de vários resultados os quais denominamos de preliminares matemáticos, seção 2.3.

Mostramos que se a variável de entrada do sistema fuzzy estiver associada a números fuzzy triangulares ou trapezoidais e a variável de saída estiver associada a números fuzzy triangulares, então o sistema p-fuzzy associado possui um único ponto de equilíbrio em cada região de equilíbrio, Corolários 2.1 e 2.2. Mostramos ainda que (Corolário 2.3), se um sistema p-fuzzy $(r, s) \rightarrow (g, f)$ possui um único ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$, então o sistema $(r_\sigma, s_\sigma) \rightarrow (g, f)$, $\sigma \in (0, 1)$, possui um único ponto de equilíbrio em $\text{supp}(A^*)$. Este resultado será fundamental para o capítulo seguinte.

Em todo o capítulo apresentamos vários exemplos e contra-exemplos ilustrando toda a teoria matemática descrita, a fim de tornar este capítulo mais inteligível.

Capítulo 3

Sistema p-fuzzy bidimensional

Neste capítulo vamos estender a teoria desenvolvida no capítulo anterior para sistemas p-fuzzy bidimensionais.

3.1 Definições preliminares

Sejam x e y duas variáveis de estado, um sistema dinâmico p -fuzzy bidimensional é um sistema de equações de diferenças, dado por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \Delta_2(x_n, y_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ é a condição inicial e $\Delta(x_n, y_n) = (\Delta_1(x_n, y_n), \Delta_2(x_n, y_n))$ é obtido por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. O sistema (3.1), pode ser escrito como,

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde $F(x_n, y_n) = x_n + \Delta_1(x_n, y_n)$ e $G(x_n, y_n) = y_n + \Delta_2(x_n, y_n)$.

Dizemos que um par (x^*, y^*) é um ponto de equilíbrio de (3.2) se,

$$\begin{cases} x^* = F(x^*, y^*) \\ y^* = G(x^*, y^*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1(x^*, y^*) = 0 \\ \Delta_2(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

Agora, vamos estender a definição de conjunto viável de equilíbrio (Definição 2.3) para sistemas bidimensionais, lembrando que o método de inferência utilizado é o de Mamdani.

Definição 3.1. *Sejam $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k_1}$ e $\{B_j\}_{1 \leq j \leq k_2}$, famílias de subconjuntos fuzzy, respectivamente sucessivos, associados às variáveis linguísticas x e y , respectivamente. Se $\text{supp}(A^*)$*

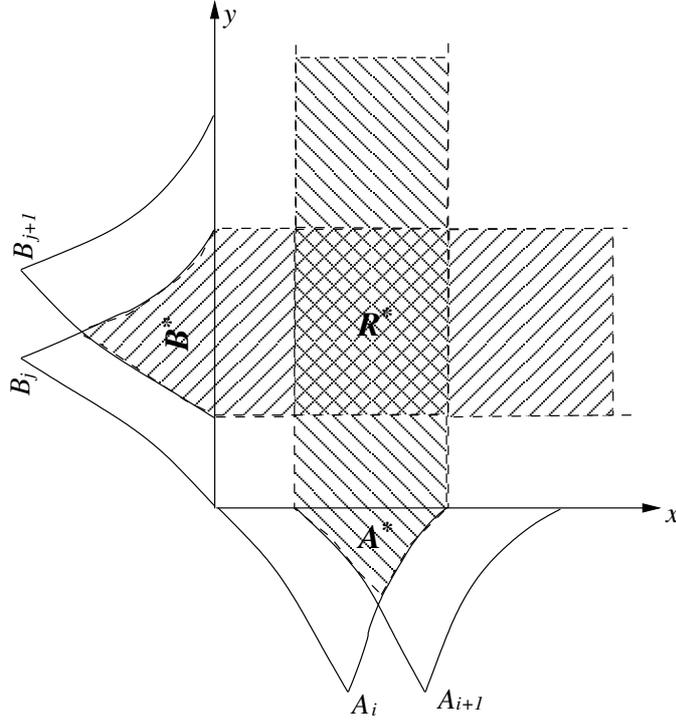


Figura 3.1: Região viável de equilíbrio.

e $\text{supp}(B^*)$ são conjuntos viáveis de equilíbrios, conforme Definição 2.3, então dizemos que $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$ é uma **região viável de equilíbrio** para o sistema p -fuzzy (3.1) (Figura 3.1).

Pela Definição 2.3, para que o conjunto $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$, $A^* = A_i \cap A_{i+1}$ e $B^* = B_j \cap B_{j+1}$ seja uma região viável de equilíbrio é necessário que o sistema p -fuzzy esteja associado a um sistema fuzzy tal que os conjuntos A_i , A_{i+1} e B_j e B_{j+1} estejam associados aos conjuntos fuzzy C_1 , C_2 , D_1 e D_2 , através das regras (ou variações destas):

1. Se x é A_i e y é B_j Então Δ_1 é D_1 e Δ_2 é C_2 ;
2. Se x é A_i e y é B_{j+1} Então Δ_1 é C_1 e Δ_2 é C_2 ;
3. Se x é A_{i+1} e y é B_j Então Δ_1 é D_1 e Δ_2 é D_2 ;
4. Se x é A_{i+1} e y é B_{j+1} Então Δ_1 é C_1 e Δ_2 é D_2 .

onde $\text{supp}(C_1), \text{supp}(C_2) \subset \mathbb{R}^-$ e $\text{supp}(D_1), \text{supp}(D_2) \subset \mathbb{R}^+$.

Podemos identificar todas as possíveis variações das regras acima. É um problema simples mostrar que existem apenas 8 combinações possíveis. Usemos a seguinte simbologia: \rightarrow ou \uparrow (variações positivas) significando que o conjunto fuzzy está associado a um conjunto fuzzy com suporte em \mathbb{R}^+ e \leftarrow ou \downarrow (variações negativas) significando que o

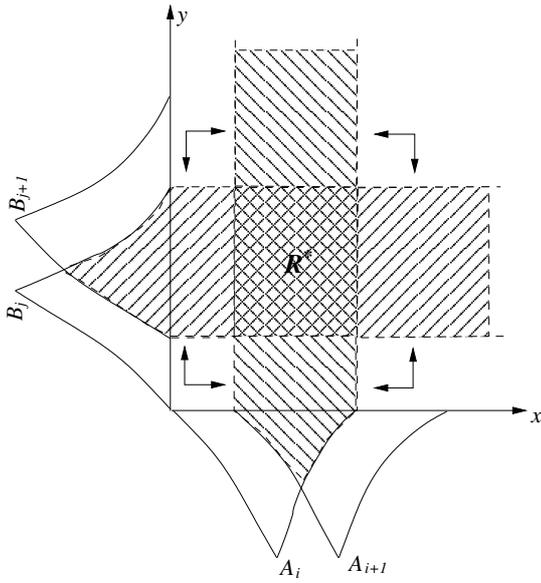


Figura 3.2: Região de equilíbrio 1.

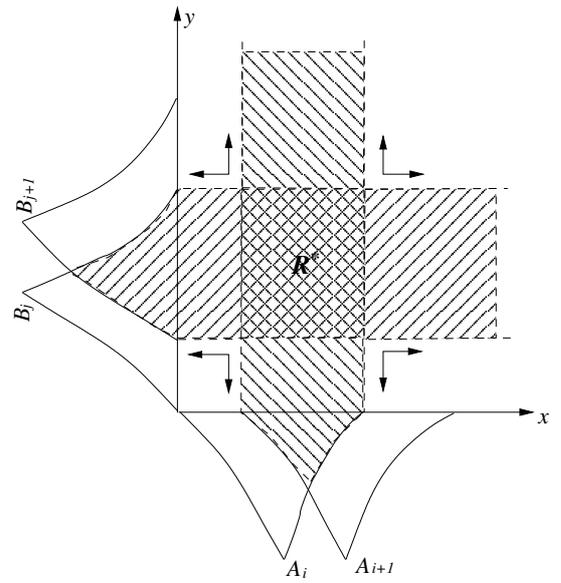


Figura 3.3: Região de equilíbrio 2.

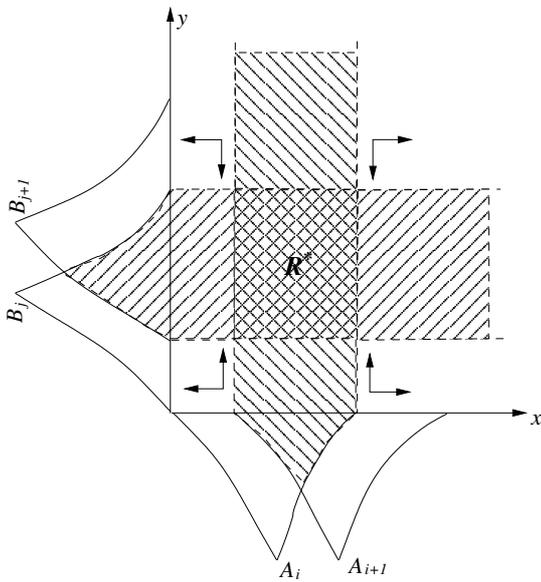


Figura 3.4: Região de equilíbrio 3.

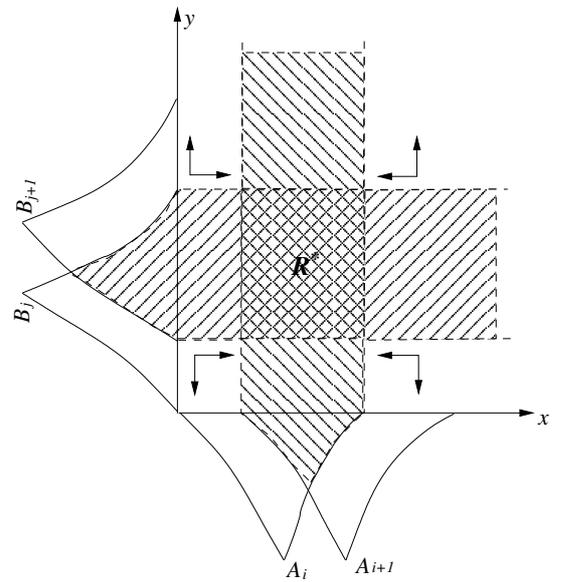


Figura 3.5: Região de equilíbrio 4.

conjunto fuzzy está associado a um conjunto fuzzy com suporte em \mathbb{R}^- . Assim, todas as 8 possíveis regiões podem ser vistas nas Figuras 3.2 a 3.9. Chamaremos cada uma destas regiões de diagrama de fase.

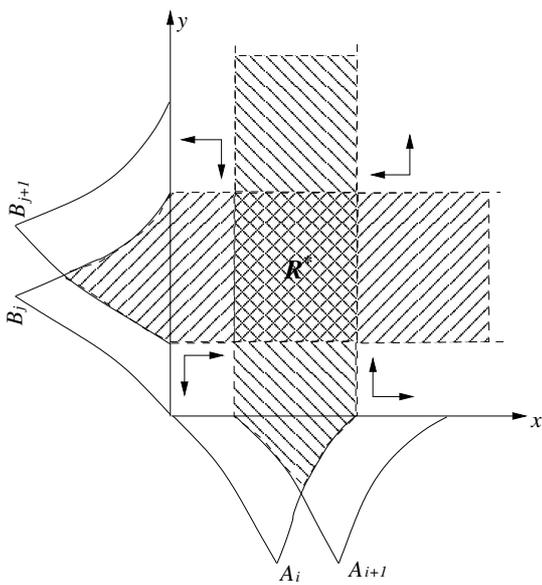


Figura 3.6: Região de equilíbrio 5.

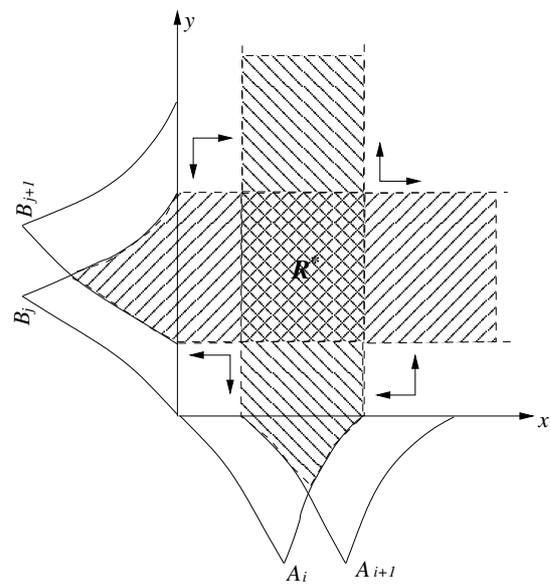


Figura 3.7: Região de equilíbrio 6.

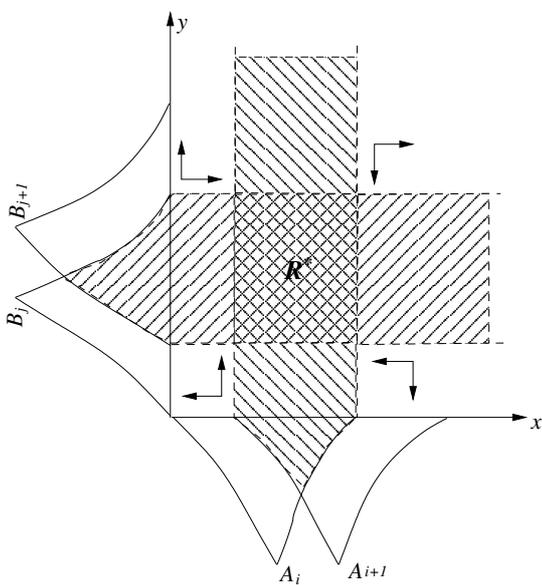


Figura 3.8: Região de equilíbrio 7.

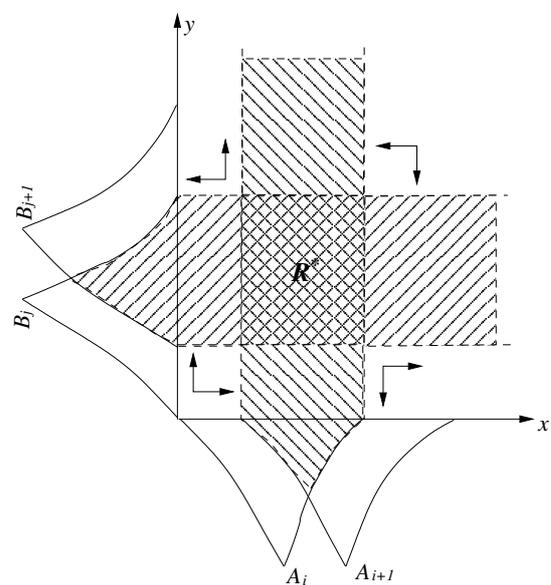


Figura 3.9: Região de equilíbrio 8.

3.2 Defuzificação da saída do sistema baseado em regras fuzzy

Dado um $(x_o, y_o) \in R^*$ para obter $\Delta_1(x_o, y_o)$ e $\Delta_2(x_o, y_o)$, utilizando o método de inferência de Mamdani e o método de defuzificação centro de massa. Devemos inicialmente traduzir matematicamente o antecedente de cada uma das regras (Figura 3.10). Isto é,

$$\alpha_1 = \min\{A_1(x_o), B_1(y_o)\} \quad (3.3)$$

$$\alpha_2 = \min\{A_1(x_o), B_2(y_o)\} \quad (3.4)$$

$$\alpha_3 = \min\{A_2(x_o), B_1(y_o)\} \quad (3.5)$$

$$\alpha_4 = \min\{A_2(x_o), B_2(y_o)\} \quad (3.6)$$

Em seguida calculamos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 . Neste caso,

$$\beta_1 = \max\{\alpha_2, \alpha_4\} \quad (3.7)$$

$$\beta_2 = \max\{\alpha_1, \alpha_3\} \quad (3.8)$$

$$\beta_3 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \quad (3.9)$$

$$\beta_4 = \max\{\alpha_3, \alpha_4\} \quad (3.10)$$

sendo que, β_1 e β_2 correspondem respectivamente a parte negativa e positiva de $\Delta_1(x_o, y_o)$ e, β_3 e β_4 correspondem respectivamente a parte negativa e positiva de $\Delta_2(x_o, y_o)$.

Finalmente, calculamos Δ_1 e Δ_2 ,

$$\Delta_1(x_o, y_o) = \frac{\int_b^{f_1^{-1}(\beta_1)} t f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 t dt + \int_0^{g_1^{-1}(\beta_2)} \beta_2 t dt + \int_{g_1^{-1}(\beta_2)}^a t g_1(t) dt}{\int_0^{\beta_2} g_1^{-1}(t) dt - \int_0^{\beta_1} f_1^{-1}(t) dt} \quad (3.11)$$

$$\Delta_2(x_o, y_o) = \frac{\int_d^{f_2^{-1}(\beta_3)} t f_2(t) dt + \int_{f_2^{-1}(\beta_3)}^0 \beta_3 t dt + \int_0^{g_2^{-1}(\beta_4)} \beta_4 t dt + \int_{g_2^{-1}(\beta_4)}^a t g_2(t) dt}{\int_0^{\beta_4} g_2^{-1}(t) dt - \int_0^{\beta_3} f_2^{-1}(t) dt} \quad (3.12)$$

observe que Δ_1 e Δ_2 estão bem definidas, pois cada função β_i é contínua e limitada, portanto cada função definida pelos integrandos é contínua e limitada.

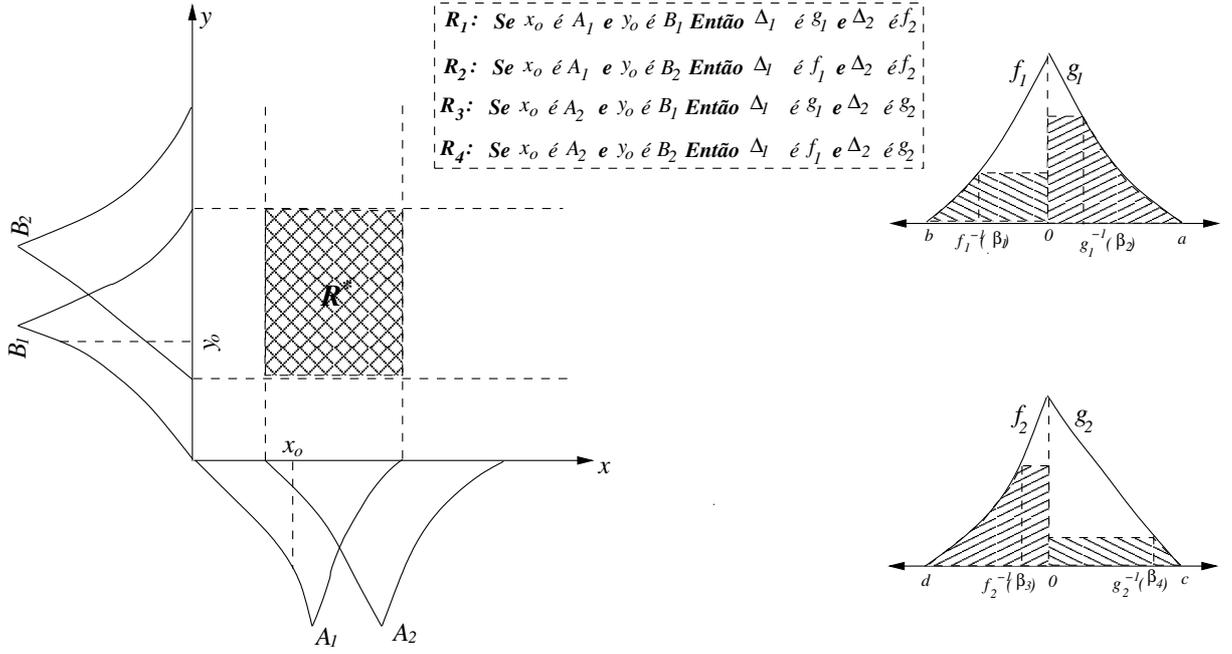


Figura 3.10: Região de Equilíbrio.

3.3 Existência de ponto de equilíbrio

Teorema 3.1. (Existência) Seja S um sistema p -fuzzy e R^* uma região viável de equilíbrio de S . Então, R^* possui pelo menos um ponto de equilíbrio, isto é, $\exists(x^*, y^*) \in R^*$ tal que,

$$\Delta(x^*, y^*) = (\Delta_1(x^*, y^*), \Delta_2(x^*, y^*)) = (0, 0).$$

Demonstração. Vamos provar este resultado para o caso da Figura 3.10. Os outros casos têm demonstrações análogas. As funções Δ_1 e Δ_2 de $[c_1, c_2] \times [d_1, d_2]$ em \mathbb{R} são contínuas. Se $A_1(c_1) = 0$ (ou $A_2(c_2) = 0$) mostra-se, trivialmente, que (c_1, d_1) (ou (c_2, d_2)) é um ponto de equilíbrio. Caso contrário, dado $x_0 \in [c_1, c_2]$ consideremos as funções

$$\beta_1(y) = \max\{\min\{A_1(x_0), B_2(y)\}, \min\{A_2(x_0), B_2(y)\}\} \quad (3.13)$$

$$\beta_2(y) = \max\{\min\{A_1(x_0), B_1(y)\}, \min\{A_2(x_0), B_1(y)\}\} \quad (3.14)$$

para $y \in [d_1, d_2]$. Pela Proposição 1.1, as funções em (3.13) e (3.14) podem ser reescritas por:

$$\beta_1(y) = \min\{B_2(y), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} \quad (3.15)$$

$$\beta_2(y) = \min\{B_1(y), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} \quad (3.16)$$

para $y \in [d_1, d_2]$. Observe que $Im(\beta_1) \subset Im(B_2)$ e $Im(\beta_2) \subset Im(B_1)$ (Figura 3.11).

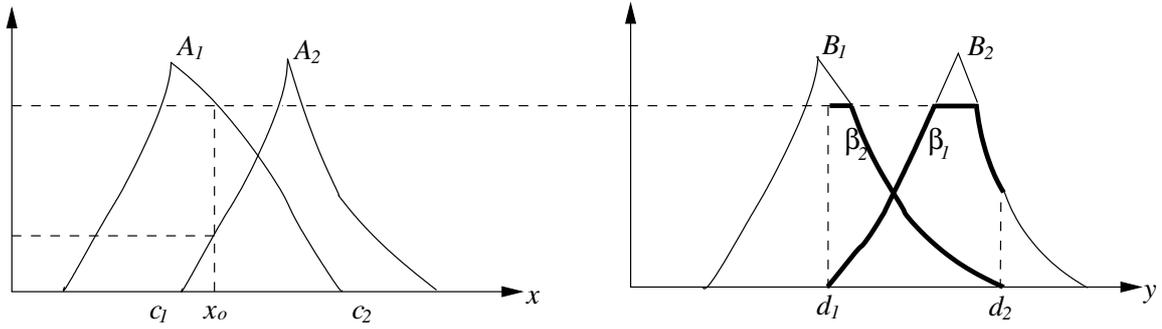


Figura 3.11: Funções β_1 e β_2 .

Daí, $\Delta_1(x_o, y) = \Delta(y)$, onde Δ é a função usada na demonstração do Teorema 2.1 (não confundir com o “ Δ ” = (Δ_1, Δ_2)). Como por hipótese, $\max\{A_1(x_o), A_2(x_o)\} \neq 0$, $\forall x_o \in [c_1, c_2]$, então $\beta_1(d_1) = 0$, $\beta_2(d_1) \neq 0$, $\beta_2(d_2) = 0$ e $\beta_1(d_2) \neq 0$. Pelo Teorema 2.1 (fazendo $m = \beta_1$, $n = \beta_2$, $r = B_2$, $s = B_1$, $f = g_1$ e $g = f_1$) existe $y_o \in [d_1, d_2]$ tal que $h(y_o) = 0 \Rightarrow \Delta_1(x_o, y_o) = 0$. Como x_o foi tomado arbitrariamente o resultado vale para todo $x \in [c_1, c_2]$, isto é, a imagem inversa do 0 por Δ_1 , $\Delta_1^{-1}(0)$, é uma curva $\omega_1 : [d_1, d_2] \rightarrow [c_1, c_2]$ contínua, pois Δ_1 é contínua. De modo análogo mostra-se que $\Delta_2^{-1}(0)$ é uma curva contínua, $\omega_2 : [c_1, c_2] \rightarrow [d_1, d_2]$. Daí, pelo Teorema do Valor Intermediário, ω_1 e ω_2 se interceptam em pelo menos um ponto, (x^*, y^*) , o qual é um ponto de equilíbrio do sistema (Figura 3.12).

3.4 Identificação do ponto de equilíbrio

Dado um sistema p -fuzzy bidimensional S , seja $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$ uma região viável de equilíbrio de S . Vamos decompor o sistema S em dois sistemas unidimensionais S_1 e S_2 tais que A^* é um conjunto viável de equilíbrio de S_1 e B^* é um conjunto viável de equilíbrio de S_2 . Vamos mostrar que pelo menos uma das coordenadas de um dos pontos de equilíbrio de S é igual ao ponto de equilíbrio de S_1 ou de S_2 . Além disso, indicaremos um intervalo onde está à outra coordenada. A decomposição do sistema S nos sistemas S_1 e S_2 depende das regras associadas a S . Por exemplo, no caso da Figura 3.1 S_1 é o sistema $(A_1, A_2) \rightarrow (f_2, g_2)$ e S_2 é o sistema $(B_1, B_2) \rightarrow (g_1, f_1)$.

Observação 3.1. Indicaremos por $z_o \in [c_1, c_2]$ a abscissa da intercessão entre as funções de pertinências de A_1 e A_2 e, por $w_o \in [d_1, d_2]$ a intercessão entre as funções de pertinências de B_1 e B_2 .

Observação 3.2. Para simplificar a notação, dado $y_1 \in [d_1, d_2]$ indicaremos por r_{y_1} a função $\beta_1(x, y_1) = \min\{A_1(x), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\}$ e por s_{y_1} a função $\beta_2(x, y_1) =$

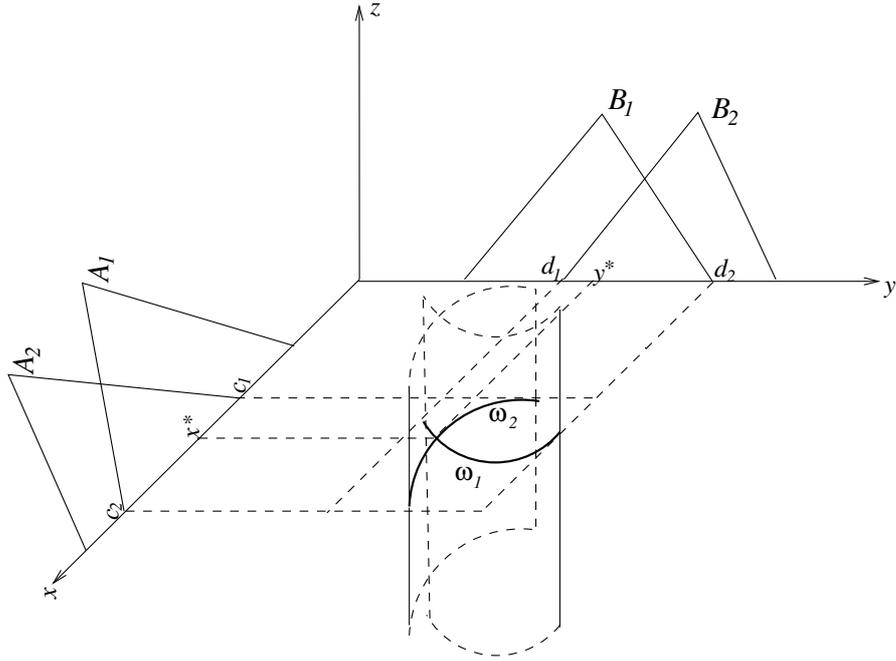


Figura 3.12: Ponto de equilíbrio ($\omega_1 \cap \omega_2$).

$\min\{A_2(x), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\}$, $x \in [c_1, c_2]$ (Figura 3.13). Dado um $x_2 \in [c_1, c_2]$ indicaremos por r_{x_2} a função $\beta_3(x_2, y) = \min\{B_1(y), \max\{A_1(x_2), A_2(x_2)\}\}$ e por s_{x_2} a função $\beta_4(x_2, y) = \min\{B_2(y), \max\{A_1(x_2), A_2(x_2)\}\}$, $y \in [d_1, d_2]$ (Figura 3.13).

Teorema 3.2. *Suponhamos que $x_1 \in \text{supp}(A^*)$ é o único ponto de equilíbrio de S_1 em A^* e $y_1 \in \text{supp}(B^*)$ é o único ponto de equilíbrio de S_2 em B^* . Se $x_1 \in (c_1, z_o)$ e $y_1 \in (d_1, w_o)$ então:*

- i) Se $A_1(x_1) \geq B_1(y_1)$, (x_2, y_1) é ponto de equilíbrio de S e $x_2 \in (A_1^{-1}(B_1(y_1)), x_1]$;*
- ii) Se $A_1(x_1) \leq B_1(y_1)$, (x_1, y_2) é ponto de equilíbrio de S e $y_2 \in (B_1^{-1}(A_1(x_1)), y_1]$;*
- iii) Se $A_1(x_1) = B_1(y_1)$, (x_1, y_1) é ponto de equilíbrio de S .*

Demonstração. Consideremos a função $H_1(x) = \Delta_1(x, y_1) = h_1^1(r_{y_1}(x)) + h_2^1(s_{y_1}(x))$. Por hipótese S_1 possui um único ponto de equilíbrio, então pelo Corolário 2.3 para todo $\sigma \in (0, 1)$ o sistema $(r_\sigma, s_\sigma) \rightarrow (f_2, g_2)$ satisfaz o Teorema 2.3. Portanto $\exists !x_2 \in (c_1, z_o)$ tal que $H_1(x_2) = \Delta_1(x_2, y_1) = 0$. Além disso, pela unicidade de x_1 como ponto de equilíbrio de S_1 ,

$$x_2 \in [A_1]^{B_1(y_1)} \Rightarrow A_1(x_2) \geq B_1(y_1) \Rightarrow \begin{cases} r_{x_2}(y_1) = B_1(y_1) \\ e \\ s_{x_2}(y_1) = B_2(y_1) \end{cases} \quad (3.17)$$

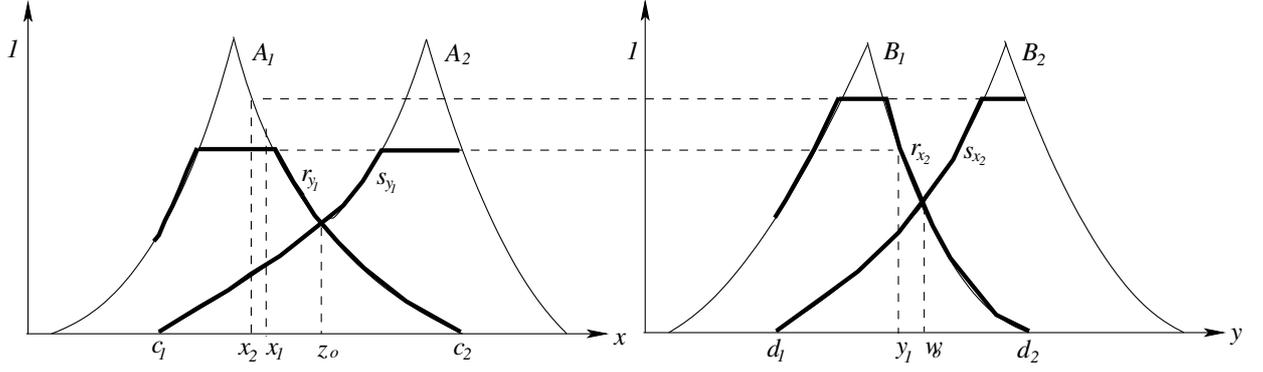


Figura 3.13: Ponto de equilíbrio (x_2, y_1) .

Consideremos a função $H_2(y) = \Delta_2(x_2, y) = h_1^2(r_{x_2}(y)) + h_2^2(s_{x_2}(y))$. Usando (3.17) tem-se, $H_2(y_1) = \Delta_2(x_2, y_1) = h_1^2(B_1(y_1)) + h_2^2(B_2(y_1)) = 0$ por hipótese. Portanto $\Delta_2(x_2, y_1) = 0$, o que conclui a demonstração de que (x_2, y_1) é ponto de equilíbrio de S .

Vamos provar agora que $x_2 < x_1$, isto é que $x_2 \in (A_1^{-1}(B_1(y_1)), x_1)$. Observe inicialmente que h_1^1 é uma função decrescente e h_2^1 é uma função crescente. Isto ocorre porque o sistema S_1 é do tipo $(A_1, A_2) \rightarrow (f_2, g_2)$. Como x_1 é ponto de equilíbrio de S_1 ,

$$h_1^1(A_1(x_1)) + h_2^1(A_2(x_1)) = 0 \quad (3.18)$$

$$s_{y_1}(x_1) = A_2(x_1) \quad (3.19)$$

Como por hipótese $A_1(x_1) > B_1(y_1) = r_{y_1}(x_1)$ então,

$$h_1^1(A_1(x_1)) < h_1^1(r_{y_1}(x_1)). \quad (3.20)$$

De (3.18) – (3.20) tem-se

$$h_1^1(r_{y_1}(x_1)) + h_2^1(s_{y_1}(x_1)) > 0. \quad (3.21)$$

Dado $x_2 > x_1 \Rightarrow A_2(x_2) > A_2(x_1) \Leftrightarrow s_{y_1}(x_2) > s_{y_1}(x_1) \Rightarrow h_2^1(s_{y_1}(x_2)) > h_2^1(s_{y_1}(x_1))$. Somando $h_1^1(r_{y_1}(x_1))$ a esta desigualdade tem-se,

$$h_1^1(r_{y_1}(x_1)) + h_2^1(s_{y_1}(x_2)) > h_1^1(r_{y_1}(x_1)) + h_2^1(s_{y_1}(x_1))$$

usando (3.21) tem-se

$$h_1^1(r_{y_1}(x_1)) + h_2^1(s_{y_1}(x_2)) > 0. \quad (3.22)$$

Como $r_{y_1}(x_1) = r_{y_1}(x_2)$ então de (3.22), $0 < h_1^1(r_{y_1}(x_2)) + h_2^1(s_{y_1}(x_2)) = \Delta_2(x_2, y_1)$. Portanto $x_2 > x_1 \Rightarrow \Delta_2(x_2, y_1) > 0$, logo $x_2 \in (A_1^{-1}(B_1(y_1)), x_1)$. O que conclui a demonstração de *i*). A demonstração de *ii*) é análoga à demonstração de *i*) e, a demonstração de *iii*) é

conseqüência direta de i) e ii).

Este teorema implica em duas conseqüências importantes, as quais usaremos para estudar a estabilidade dos sistemas bidimensionais no capítulo seguinte. Passemos a enunciá-las.

Corolário 3.1. *Seja S um sistema que satisfaz a condição i) do Teorema 3.2. Então, numa vizinhança do ponto de equilíbrio (x_2, y_1) tem-se $A_2(x) < B_1(y)$.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.2, lembrando que as saídas são não simétrica (veja Figura 3.13).

Corolário 3.2. *Seja S um sistema que satisfaz a condição ii) do Teorema 3.2. Então, numa vizinhança do ponto de equilíbrio (x_1, y_2) tem-se $B_2(y) < A_1(x)$.*

Demonstração. Análoga à demonstração do Corolário 3.1.

Observação 3.3. *De modo geral, se um sistema bidimensional S é decomposto nos sistemas unidimensionais S_1 e S_2 então, se S_1 e S_2 possuem cada um, apenas um ponto de equilíbrio, então podemos identificar uma coordenada de um ponto de equilíbrio de S e um intervalo no qual está à outra coordenada deste ponto.*

Observação 3.4. *Para formalizar os resultados citados na Observação 3.3 basta supor o ponto de equilíbrio em outra região, isto é $x_1 \in (c_1, z_o)$ e $y_1 \in (w_o, d_2)$ ou $x_1 \in (z_o, c_2)$ e $y_1 \in (d_1, w_o)$ ou $x_1 \in (z_o, c_2)$ e $y_1 \in (w_o, d_2)$. Obviamente, as demonstrações destes fatos são análogas à demonstração do Teorema 3.2.*

3.4.1 Exemplo 1 - modelo p-fuzzy bidimensional

Consideremos o sistema bidimensional S com as variáveis de entrada x (Figura 3.14) e y (Figura 3.15) e variáveis de saída Δ_1 (Figura 3.16) e Δ_2 (Figura 3.17) e com as regras:

1. Se x é B e y é B Então Δ_1 é MAp e Δ_2 é MA_n ;
2. Se x é B e y é MB Então Δ_1 é MBp e Δ_2 é An ;
3. Se x é B e y é MA Então Δ_1 é Bn e Δ_2 é An ;
4. Se x é B e y é A Então Δ_1 é MA_n e Δ_2 é MA_n ;
5. Se x é MB e y é B Então Δ_1 é Ap e Δ_2 é Bn ;
6. Se x é MB e y é MB Então Δ_1 é Bp e Δ_2 é Bn ;
7. Se x é MB e y é MA Então Δ_1 é Bn e Δ_2 é Bn ;

8. Se x é MB e y é A Então Δ_1 é MBn e Δ_2 é Bn ;
9. Se x é MA e y é B Então Δ_1 é Ap e Δ_2 é Bn ;
10. Se x é MA e y é MB Então Δ_1 é Bn e Δ_2 é Bp ;
11. Se x é MA e y é MA Então Δ_1 é MBn e Δ_2 é MBn ;
12. Se x é MA e y é A Então Δ_1 é MBn e Δ_2 é Bp ;
13. Se x é A e y é B Então Δ_1 é MAp e Δ_2 é MAp ;
14. Se x é A e y é MB Então Δ_1 é Bp e Δ_2 é MBp ;
15. Se x é A e y é MA Então Δ_1 é Bp e Δ_2 é MBp ;
16. Se x é A e y é A Então Δ_1 é MAn e Δ_2 é Bn .

Estas regras podem ser visualizadas no “diagrama de fase” na Figura 3.18, onde é possível identificar, com maior facilidade, que $R^* = [90, 110] \times [9, 11]$ é uma região de equilíbrio do sistema.

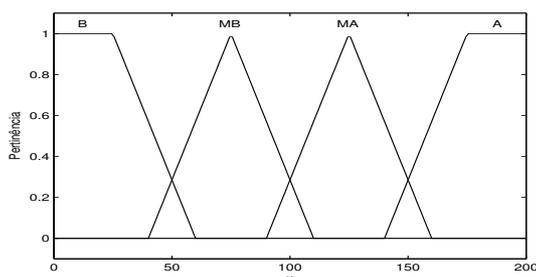


Figura 3.14: Variável de entrada x .

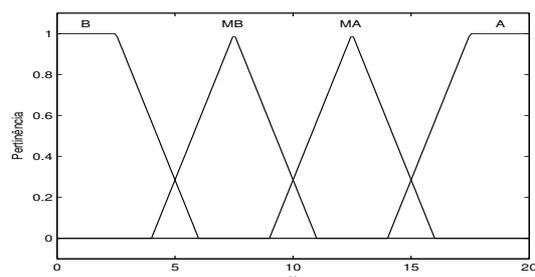


Figura 3.15: Variável de entrada y .

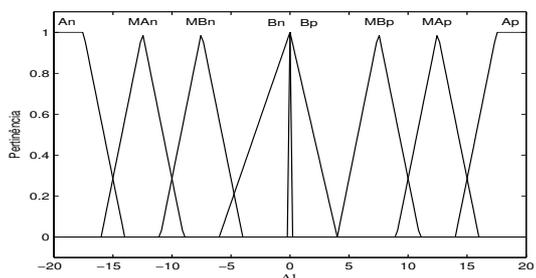


Figura 3.16: Variável de saída Δ_1 .

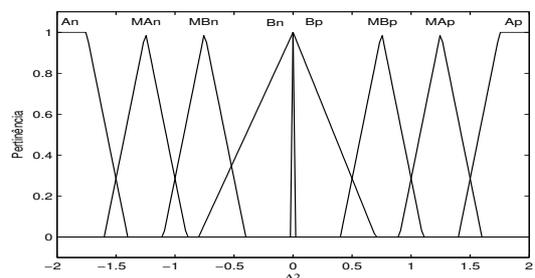


Figura 3.17: Variável de saída Δ_2 .

O ponto de equilíbrio do sistema S é $(x^*, y^*) = (94.8566, 9.8116)$, apresentado nas Figuras 3.19 e 3.20. Vamos decompor o sistema S nos sistemas S_1 e S_2 tais que $\text{supp}(A^*) =$

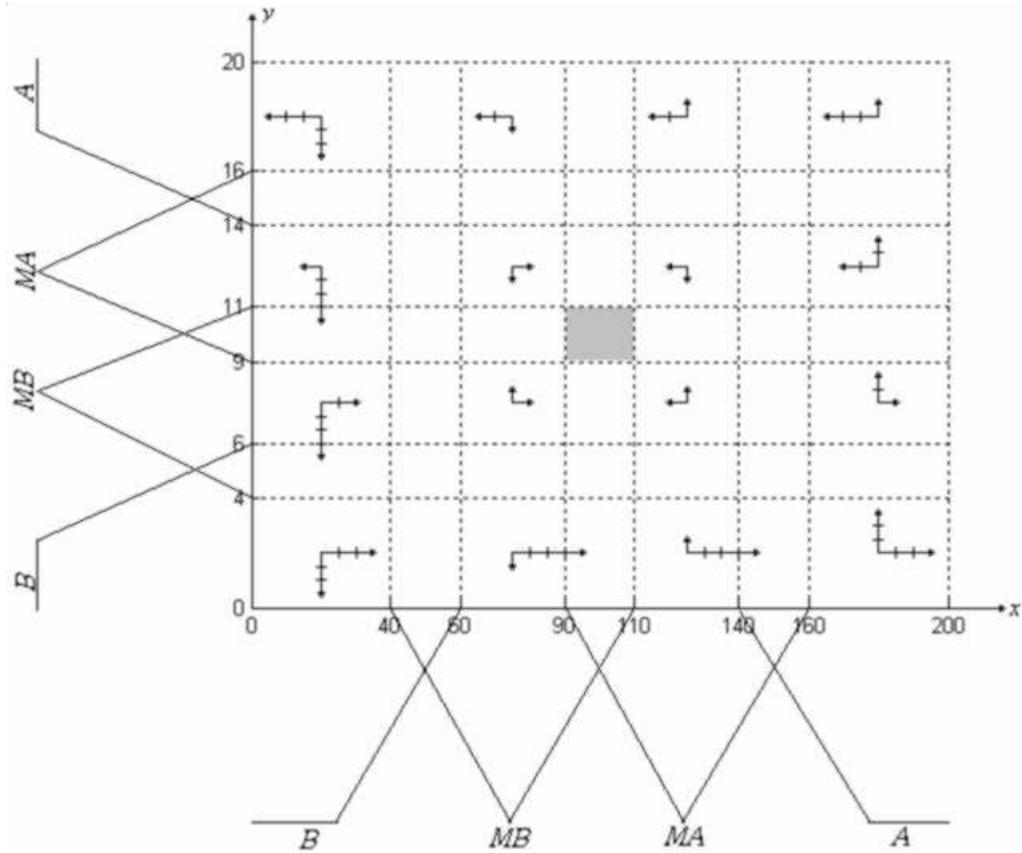


Figura 3.18: Diagrama de fase do sistema p-fuzzy S .

$[90, 110]$ e $supp(B^*) = [9, 11]$ são conjuntos viáveis de equilíbrio de S_1 e de S_2 , respectivamente. O sistema S_1 tem variável de entrada x (Figura 3.21) e variável de saída Δ_1 (Figura 3.22) e a base de regras dada por:

1. Se x é MB Então Δ_1 é Bp ;
2. Se x é MA Então Δ_1 é Bn .

Já o sistema S_2 tem variável de entrada y (Figura 3.23), variável de saída Δ_2 (Figura 3.24) e base de regras:

1. Se y é MB Então Δ_2 é Bp ;
2. Se y é MA Então Δ_2 é Bn .

O único ponto de equilíbrio do sistema S_1 e o único ponto de equilíbrio de S_2 (com erro inferior a 10^{-10}) são, respectivamente: $x_{S_1}^* = 94.1528$ e $y_{S_2}^* = 9.8116$. Os resultados experimentais podem ser vistos nas Figuras 3.25 e 3.26.

Sejam r_1 e s_1 as funções de pertinências do sistema S_1 em $supp(A^*) = [90, 110]$ e r_2 e s_2

as funções de pertinências do sistema S_2 em $\text{supp}(B^*) = [9, 11]$. Temos que (Figura 3.21 e 3.23),

$$\begin{cases} r_1(x) = \frac{110-x}{35} \\ s_1(x) = \frac{x-90}{35} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r_2(x) = \frac{11-x}{3.5} \\ s_2(x) = \frac{x-9}{3.5} \end{cases} \quad (3.23)$$

Daí $r_1(x_{S_1}^*) = r_1(94.1528) = 0.4528 > 0.3395 = r_2(y_{S_2}^*) = r_1(9.8116)$. Além disso, $r_1 \cap s_1 = x_o = 100$ e $r_2 \cap s_2 = w_o = 10$, então S_1 e S_2 satisfazem a condição (i) do Teorema 3.2. Observe que de fato temos $y_{S_2}^* = 9.8116 = y^* = 9.8116$.

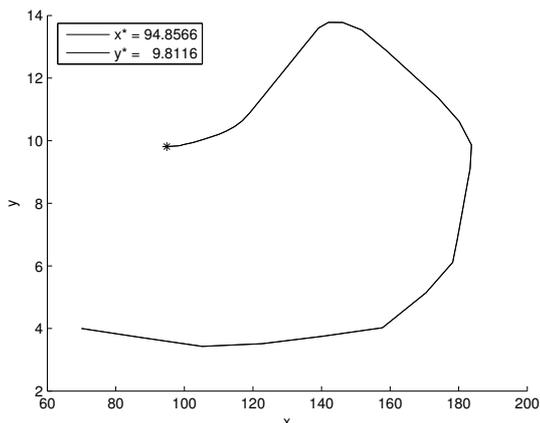


Figura 3.19: Plano de fase do sistema S .

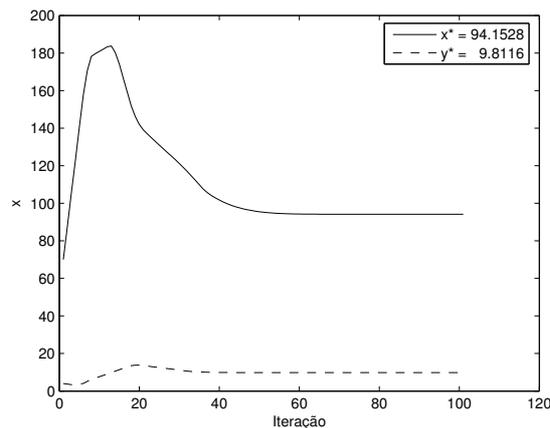


Figura 3.20: Solução do sistema S .

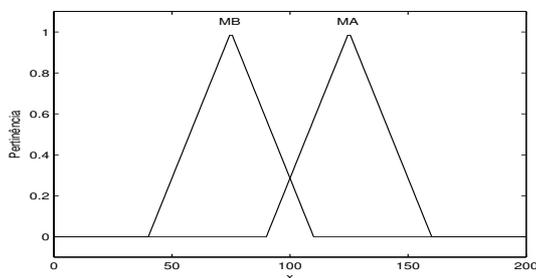


Figura 3.21: Variável de entrada de S_1 .

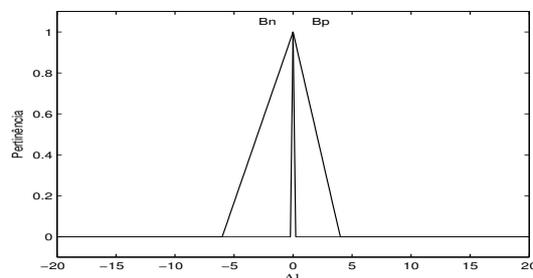


Figura 3.22: Variável de saída de S_1 .

3.4.2 Exemplo 2 - modelo p-fuzzy bidimensional

Veremos agora um exemplo de um sistema p-fuzzy bidimensional que satisfaz a condição ii) do Teorema 3.2. Consideremos o sistema anterior S (seção 3.4.1) com as mesmas entradas, a mesma base de regras e mudemos as saídas: Δ_1 (Figura 3.27) e Δ_2 (Figura 3.28).

A decomposição desse sistema dará origem aos sistemas S_1 e S_2 apenas com mudanças nas saídas: Δ_1 (Figura 3.29) e Δ_2 (Figura 3.30). Estas mudanças influenciarão nos pontos

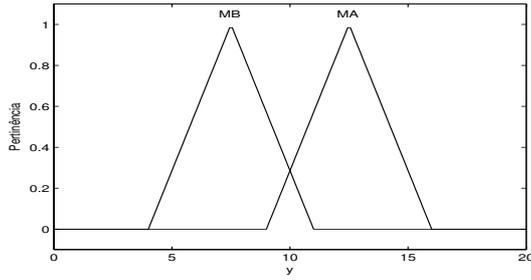


Figura 3.23: Variável de entrada de S_2 .

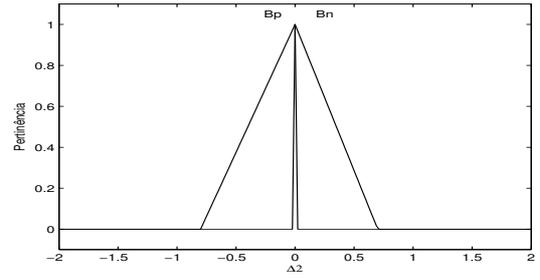


Figura 3.24: Variável de saída de S_2 .

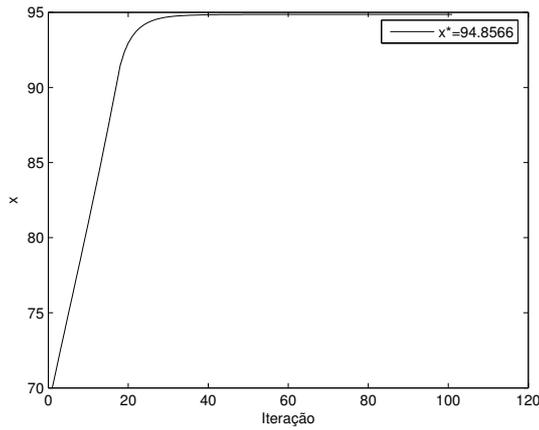


Figura 3.25: Solução de S_1 , $x_{S_1}^* = 94.1528$.

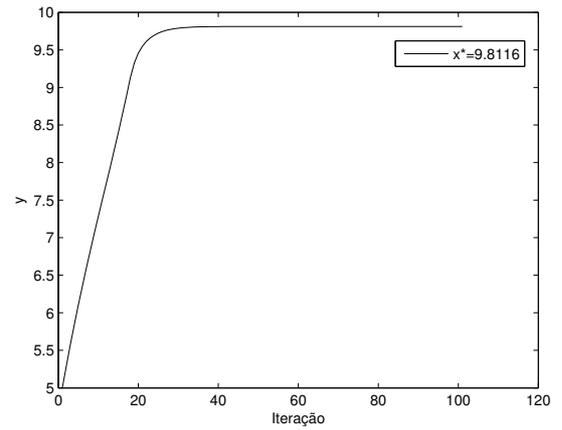


Figura 3.26: Solução de S_2 , $y_{S_2}^* = 9.8116$.

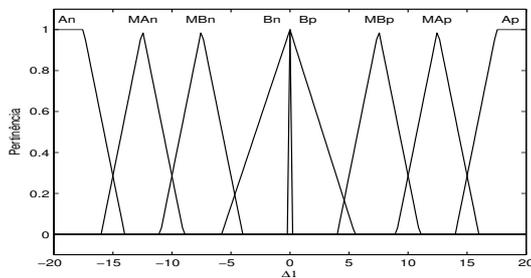


Figura 3.27: Nova saída Δ_1 de S .

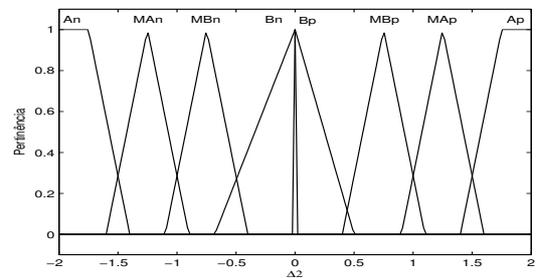


Figura 3.28: Nova saída Δ_2 de S .

de equilíbrio desses sistemas: o de S será $(x^*, y^*) = (99.2142, 9.4903)$ (Figuras 3.31 e 3.32), o de S_1 será $x_{S_1}^* = 99.2142$ (Figura 3.33) e o de S_2 será $y_{S_2}^* = 9.5920$ (Figura 3.34). As funções r_1 , s_1 , r_2 e s_2 são as mesmas dadas em (3.29). Daí, $r_1(x_{S_1}^*) = r_1(99.2142) = 0.3082 < 0.4023 = r_2(y_{S_2}^*) = r_1(9.5920)$. Portanto, estes sistemas satisfazem a condição *ii*) do Teorema 3.2 e de fato obtivemos $x_{S_1}^* = 99.2142 = x^* = 99.2142$.

Um exemplo para o caso *iii*) do Teorema daremos na seção seguinte.

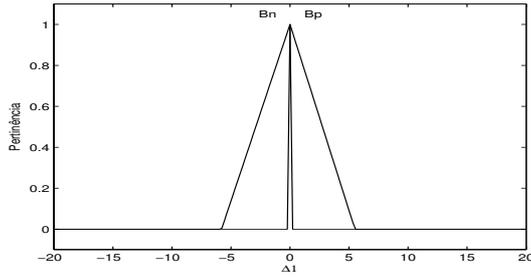


Figura 3.29: Variável de saída Δ_1 .

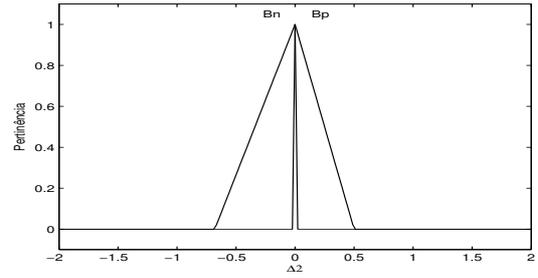


Figura 3.30: Variável de saída Δ_2 .

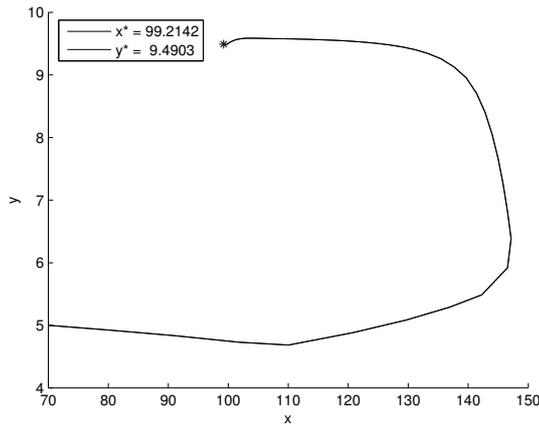


Figura 3.31: Plano de fase de S .

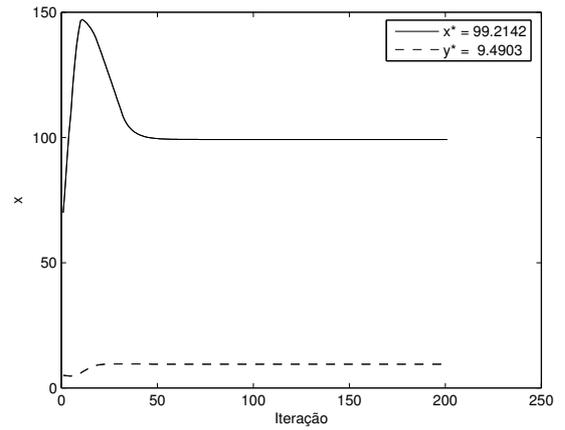


Figura 3.32: Solução do sistema S .

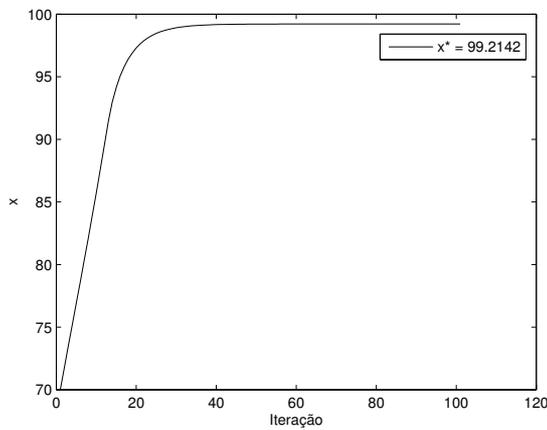


Figura 3.33: Solução de S_1 .

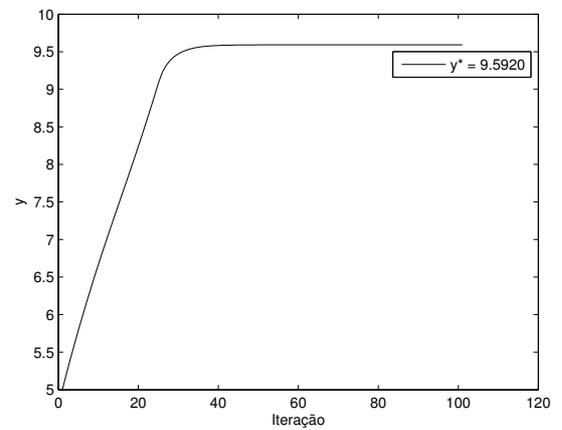


Figura 3.34: Solução de S_2 .

3.5 Unicidade do ponto de equilíbrio

Nesta seção, vamos discutir em que condições o ponto de equilíbrio é único. Semelhante ao que fizemos no caso unidimensional, vamos dividir em três casos. Inicialmente

consideremos o caso em que as saídas são simétricas. Em seguida consideraremos os outros casos.

3.5.1 Unicidade - saídas simétricas

Observemos inicialmente que para saídas simétricas,

Proposição 3.1. *Se (x^*, y^*) é tal que, $A_1(x^*) = A_2(x^*)$ e $B_1(y^*) = B_2(y^*)$ então (x^*, y^*) é um ponto de equilíbrio.*

Demonstração. De fato,

$$\beta_1(x^*, y^*) = \min\{B_2(y^*), \max\{A_1(x^*), A_2(x^*)\}\} = \min\{B_1(y^*), \max\{A_1(x^*), A_2(x^*)\}\} = \beta_2(x^*, y^*)$$

e

$$\beta_3(x^*, y^*) = \min\{A_1(x^*), \max\{B_1(y^*), B_2(y^*)\}\} = \min\{A_2(x^*), \max\{B_1(y^*), B_2(y^*)\}\} = \beta_4(x^*, y^*).$$

Então, pelo Proposição 2.1, (x^*, y^*) é ponto de equilíbrio do sistema (3.1).

A seguir apresentaremos três lemas, os quais serão usados para a demonstração de um teorema que estabelece as condições necessárias e suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio.

Lema 3.1. *Se $A_1(x^*) > B_1(y^*)$ então $\forall x \in [A^*]^{B_1(y^*)} \cap [c_1, c_2]$, (x, y^*) é ponto de equilíbrio.*

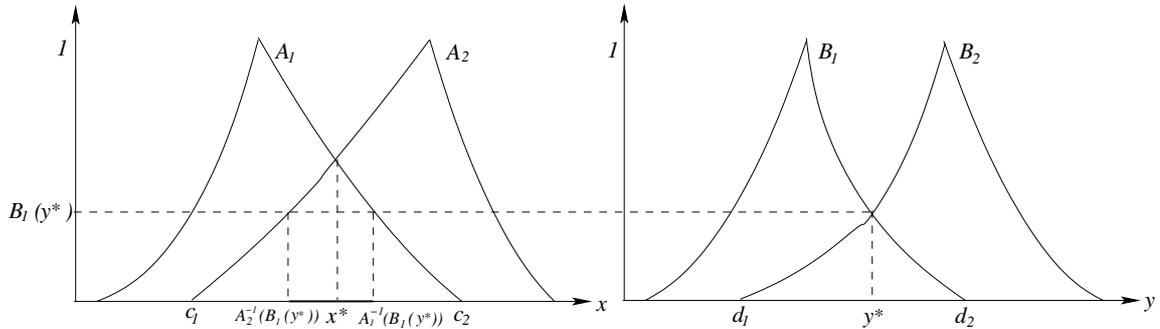


Figura 3.35: Intervalo de equilíbrio: $[A^*]^{B_1(y^*)} = [A_2^{-1}(B_1(y^*)), A_1^{-1}(B_1(y^*))]$.

Demonstração. Dado $x \in [A^*]^{B_1(y^*)} \Leftrightarrow A^*(x) \geq B_1(y^*) \Leftrightarrow \min\{A_1(x), A_2(x)\} \geq B_1(y^*)$. Donde tem-se (Figura 3.35),

$$\begin{cases} A_1(x) \geq B_1(y^*) = B_2(y^*) \\ A_2(x) \geq B_1(y^*) = B_2(y^*) \end{cases}$$

Então,

$$\beta_1(x, y^*) = \min\{B_2(y^*), \max\{A_1(x), A_2(x)\}\} = B_2(y^*) = B_1(y^*) = \beta_2(x, y^*)$$

e

$$\beta_3(x, y^*) = \min\{A_1(x), \max\{B_1(y^*), B_2(y^*)\}\} = B_1(y^*) = B_2(y^*) = \beta_4(x, y^*).$$

Portanto, pela Proposição 2.1 $\Delta_1(x, y^*) = \Delta_2(x, y^*) = 0$, para todo x em $[A^*]^{B_1(y^*)}$. O que conclui a demonstração.

Lema 3.2. Se $A_1(x^*) < B_1(y^*)$ então $\forall y \in [B^*]^{A_1(x^*)} \cap [d_1, d_2]$, (x^*, y) é ponto de equilíbrio.

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 3.1.

Lema 3.3. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\min\{a, b\} = \min\{c, b\}$ se, e somente se, $a, c \geq b$ ou $a = c$.

Demonstração. (\implies) Suponhamos que $\min\{a, b\} = \min\{c, b\}$. Se $a, c < b$, então $a = \min\{a, b\} = \min\{c, b\} = c \implies a = c$. Se, por outro lado, tivermos $a \neq c$, então $b = \min\{a, b\} = \min\{c, b\} \implies a, c \geq b$.

(\impliedby) Trivial.

Teorema 3.3. Seja $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$ uma região viável de equilíbrio de um sistema p -fuzzy S . Se S é decomposto em S_1 e S_2 tal que A^* é um conjunto viável de equilíbrio de S_1 e B^* é um conjunto viável de equilíbrio de S_2 , então o ponto de equilíbrio $(x^*, y^*) \in R^*$ é único se, e somente se,

$$A_1(x^*) = A_2(x^*) = B_1(y^*) = B_2(y^*)$$

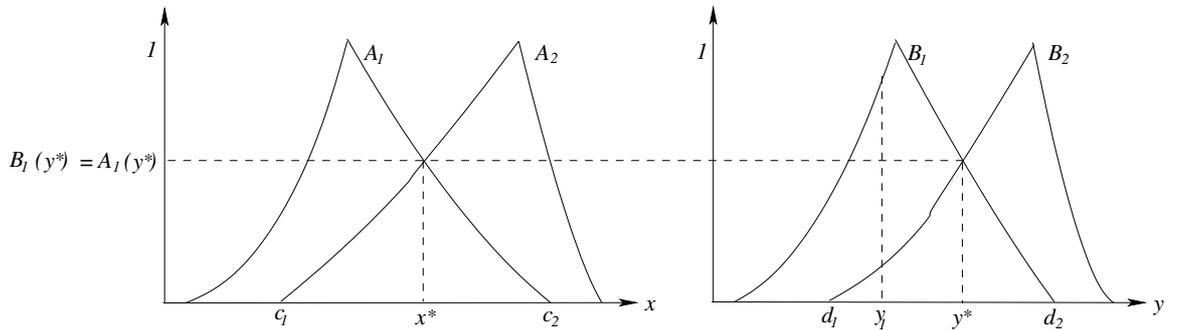


Figura 3.36: Único ponto de equilíbrio: (x^*, y^*) .

Demonstração. (\implies) Suponhamos que o ponto de equilíbrio seja único. Se tivermos $A_1(x^*) > B_1(y^*)$ (ou $A_1(x^*) < B_1(y^*)$), então pelo Lema 3.1 (ou Lema 3.2) o ponto não é

único, o que contraria à hipótese. Portanto $A_1(x^*) = A_2(x^*) = B_1(y^*) = B_2(y^*)$.

(\Leftarrow) Suponhamos agora que $A_1(x^*) = A_2(x^*) = B_1(y^*) = B_2(y^*)$. Dado $(x_1, y_1) \in \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$ com $(x_1, y_1) \neq (x^*, y^*)$ vamos mostrar que (x_1, y_1) não é ponto de equilíbrio. Pela Proposição 2.1 (x_1, y_1) é ponto de equilíbrio se, e somente se, $\beta_1(x_1, y_1) = \beta_2(x_1, y_1)$ e $\beta_3(x_1, y_1) = \beta_4(x_1, y_1)$. Ou seja, se, e somente se,

$$\min\{B_2(y_1), \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\}\} = \min\{B_1(y_1), \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\}\} \quad (3.24)$$

$$\min\{A_1(x_1), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\} = \min\{A_2(x_1), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\} \quad (3.25)$$

Suponhamos que $y_1 \neq y^* \Leftrightarrow B_1(y_1) \neq B_2(y_1)$. Pelo Lema 3.3 e Equação (3.24) temos que:

$$B_1(y_1), B_2(y_1) \geq \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\} \quad (3.26)$$

De (3.26) tem-se,

$$A_1(x_1), A_2(x_1) \leq \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\} \quad (3.27)$$

Usando a Equação (3.25) e o Lema 3.3 tem-se,

$$A_1(x_1), A_2(x_1) \geq \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\} \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28) tem-se,

$$A_1(x_1) = A_2(x_1) \Leftrightarrow x_1 = x^* \Rightarrow A_1(x_1) = A_1(x^*) = B_1(y^*),$$

por hipótese. Substituindo estes resultados em (3.26) tem-se,

$$B_1(y_1), B_2(y_1) \geq A_1(x^*) = B_1(y^*)$$

o que é um absurdo, pois para todo $y_1 \in \text{supp}(B^*)$ com $y_1 \neq y^*$ tem-se $B_1(y_1) < B_1(y^*)$ ou $B_2(y_1) < B_1(y^*)$ (veja Figura 3.36).

Se supormos $x_1 \neq x^*$, de modo análogo, chega-se a um absurdo! Portanto (x^*, y^*) é o único ponto de equilíbrio de S em R^* .

Os resultados acima são válidos quando as duas saídas são simétricas. Se, apenas uma das saídas é simétrica! O que ocorre? O teorema seguinte responde esta questão.

Teorema 3.4. *Seja S um sistema bidimensional, decomposto nos sistemas unidimensionais S_1 e S_2 tal que, x_1 é o único ponto de equilíbrio de S_1 e y_1 é o único ponto de equilíbrio de S_2 :*

- i) Se S_1 possui saída simétrica e $\beta = \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\} < A_1(x_1) = A_2(x_1)$, então $\forall x \in [A^*]^\beta \cap [c_1, c_2]$, (x, y_1) é ponto de equilíbrio de S ;*

ii) Se S_2 possui saída simétrica e $\alpha = \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\} < B_1(y_1) = B_2(y_1)$, então $\forall y \in [B^*]^\alpha \cap [d_1, d_2]$, (x_1, y) é ponto de equilíbrio de S .

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do Lema 3.1.

Como consequência imediata do Teorema 3.4, podemos estabelecer condições necessárias e suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio quando apenas uma das saídas é simétrica.

Corolário 3.3. S possui um único ponto de equilíbrio se, somente se, tivermos $\beta = \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\} \geq A_1(x_1) = A_2(x_1)$ ou $\alpha = \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\} \geq B_1(y_1) = B_2(y_1)$.

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema 3.3.

3.5.2 Exemplo - sistema bidimensional com saídas simétricas

Consideremos o sistema p-fuzzy S com entradas x (Figura 3.37), y (Figura 3.38) e saídas Δ_1 (Figura 3.39) e Δ_2 (Figura 3.40) e com as regras:

1. Se x é B e y é B Então Δ_1 é MAp e Δ_2 é MA_n ;
2. Se x é B e y é MB Então Δ_1 é MBp e Δ_2 é An ;
3. Se x é B e y é MA Então Δ_1 é Bn e Δ_2 é An ;
4. Se x é B e y é A Então Δ_1 é MA_n e Δ_2 é MA_n ;
5. Se x é MB e y é B Então Δ_1 é Ap e Δ_2 é Bn ;
6. Se x é MB e y é MB Então Δ_1 é MAp e Δ_2 é MA_n ;
7. Se x é MB e y é MA Então Δ_1 é MA_n e Δ_2 é MA_n ;
8. Se x é MB e y é A Então Δ_1 é MBn e Δ_2 é Bn ;
9. Se x é MA e y é B Então Δ_1 é Ap e Δ_2 é Bn ;
10. Se x é MA e y é MB Então Δ_1 é MAp e Δ_2 é MAp ;
11. Se x é MA e y é MA Então Δ_1 é MA_n e Δ_2 é MAp ;
12. Se x é MA e y é A Então Δ_1 é MBn e Δ_2 é Bp ;
13. Se x é A e y é B Então Δ_1 é MAp e Δ_2 é MAp ;

14. Se x é A e y é MB Então Δ_1 é Bp e Δ_2 é MBp ;
15. Se x é A e y é MA Então Δ_1 é Bp e Δ_2 é MBp ;
16. Se x é A e y é A Então Δ_1 é MA_n e Δ_2 é B_n .

O “diagrama de fase” das regras acima é dado na Figura 3.41, onde pode-se observar que $R^* = [70, 130] \times [9, 11]$ é uma região viável de equilíbrio de S .

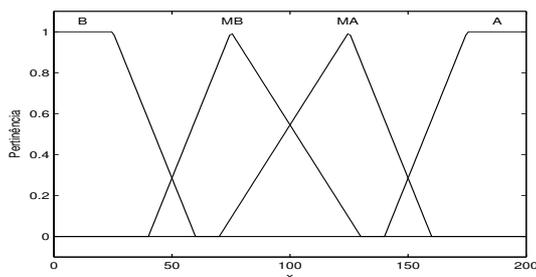


Figura 3.37: Variável de entrada x .

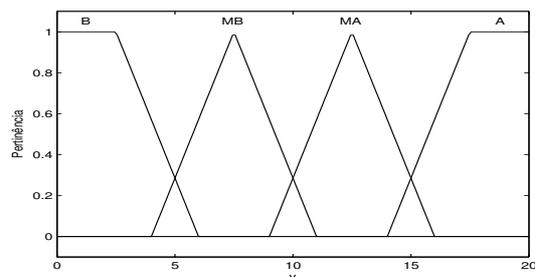


Figura 3.38: Variável de entrada y .

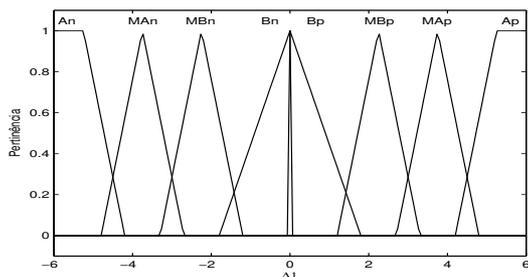


Figura 3.39: Variável de saída Δ_1 .

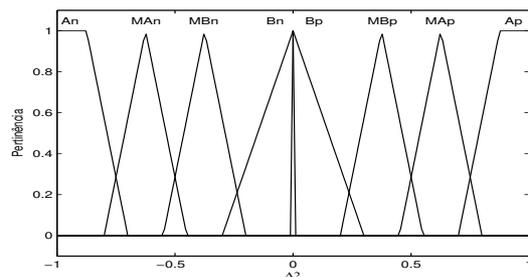


Figura 3.40: Variável de saída Δ_2 .

Neste caso, vamos decompor o sistema S nos sistemas S_1 e S_2 tais que $\text{supp}(A^*) = [70, 130]$ e $\text{supp}(B^*) = [9, 11]$ são conjuntos viáveis de equilíbrios de S_1 e de S_2 , respectivamente. O sistema S_1 tem entrada x (Figura 3.21) e saída Δ_2 (Figura 3.22) e a base de regras dada por:

1. Se x é MB Então Δ_2 é MA_n ;
2. Se x é MA Então Δ_2 é MA_p .

Já o sistema S_2 tem entrada x (Figura 3.42), saída Δ_1 (Figura 3.24) e base de regras:

1. Se y é MB Então Δ_1 é MA_p ;
2. Se y é MA Então Δ_1 é MA_n .

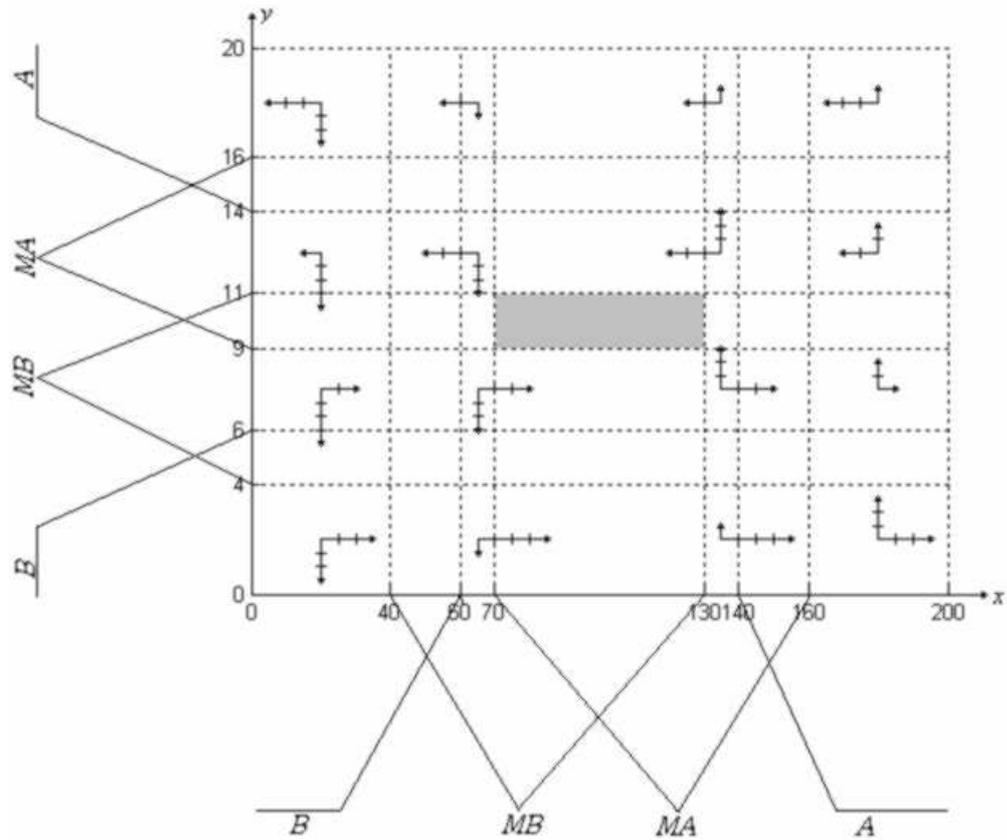


Figura 3.41: Diagrama de fase de S .

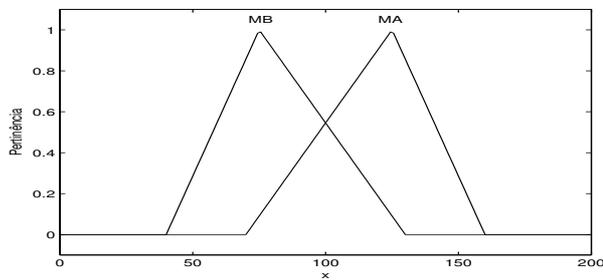


Figura 3.42: Entrada de S_1 : $\text{supp}(A^*) = [70, 130]$.

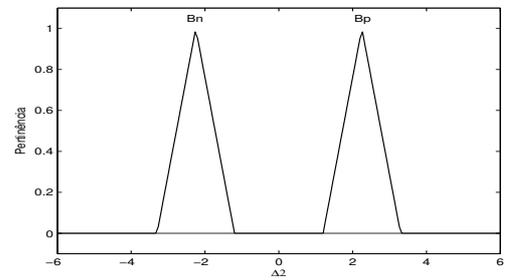


Figura 3.43: Saída Δ_2 de S_1 .

Indiquemos por r_1 e s_1 as funções de pertinências do sistema S_1 no conjunto viável de equilíbrio $\text{supp}(A^*) = [70, 130]$ e r_2 e s_2 as funções de pertinências do sistema S_2 em $\text{supp}(B^*) = [9, 11]$. Temos que (Figuras 3.42 e 3.44),

$$\begin{cases} r_1(x) = \frac{130-x}{55} \\ s_1(x) = \frac{x-70}{55} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r_2(x) = \frac{11-x}{3.5} \\ s_2(x) = \frac{x-9}{3.5} \end{cases} \quad (3.29)$$

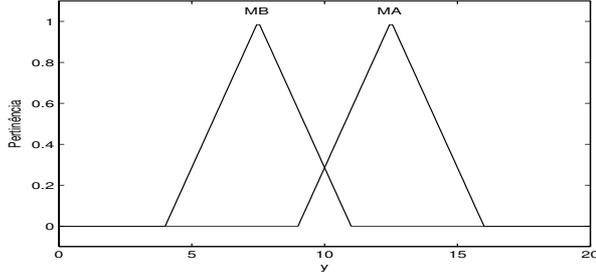


Figura 3.44: Entrada de S_2 : $\text{supp}(B^*) = [7, 11]$.

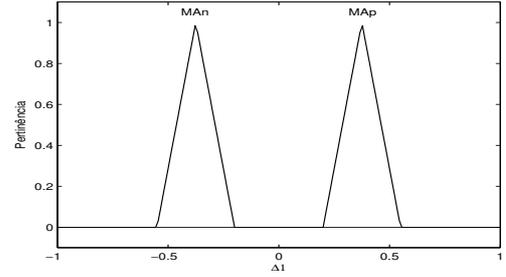


Figura 3.45: Saída Δ_1 de S_2 .

Como as saídas dos sistemas S_1 e S_2 são simétricas, então pelo Proposição 2.1 o único ponto de equilíbrio de S_1 é dado por $x^* = r_1 \cap s_1 = 100$ e o único ponto de equilíbrio de S_2 é $y^* = r_2 \cap s_2 = 10$.

Temos que $r_1(x_{S_1}^*) = r_1(100) = 0.5455 > r_2(y_{S_2}^*) = r_2(10) = 0.2857$. Ou seja, os sistemas S_1 e S_2 satisfazem o Lema 3.1. Como $[A^*]^{0.2857} = [s_1^{-1}(0.2857), r_1^{-1}(0.2857)]$ donde tem-se $[A^*]^{0.2857} = [85.7135, 114.2865]$, então o conjunto dado pelo produto cartesiano $[85.7135, 114.2865] \times 10$ é um conjunto de equilíbrio de S .

Os resultados experimentais são mostrados nas Figuras 3.46, 3.47 e 3.48, onde podemos ver várias soluções do sistema S com condições iniciais diferentes. Para as condições iniciais $(86, 10)$, $(100, 10)$ e $(115, 10)$ pôde-se observar que estes são pontos estacionários, representados na Figura 3.48 por “*”, o que mostra que são pontos de equilíbrios de S (como já sabíamos! Pois estes pontos pertencem ao conjunto de equilíbrio). Já, para as condições iniciais: $(86, 10)$ e $(115, 10)$ pôde-se observar que não são pontos de equilíbrios, suas curvas estão representadas na Figura 3.48 em preto e azul respectivamente.

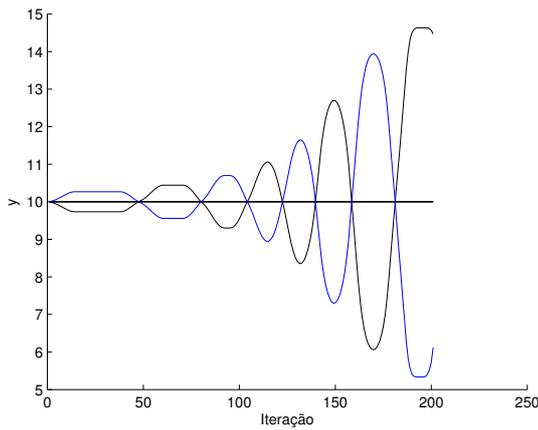


Figura 3.46: Gráfico $x \times n$.

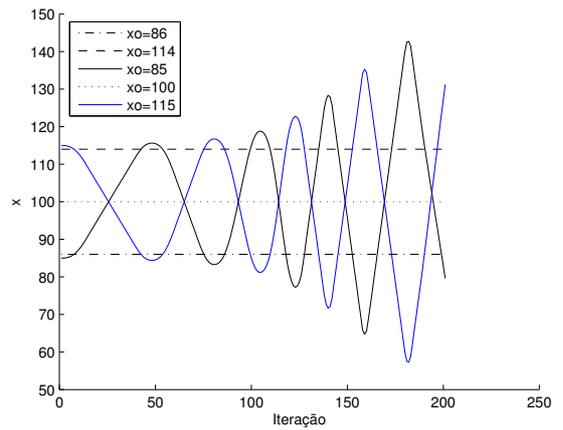


Figura 3.47: Gráfico $y \times n$.

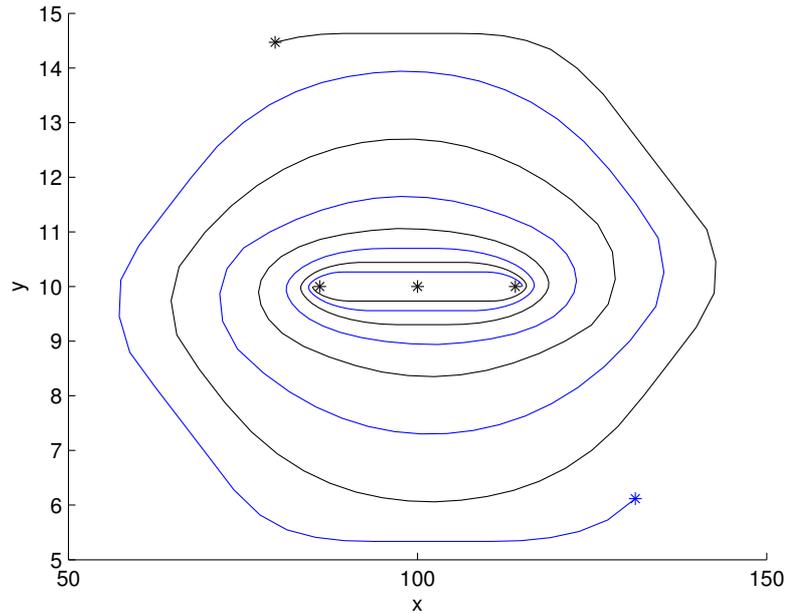


Figura 3.48: Plano de Fase.

3.5.3 Unicidade para saídas não simétricas

Pelos Teoremas 3.3 e 3.4 pode-se observar que, quando as saídas são simétricas há um pouco de restrição para estabelecer condições para a unicidade do ponto de equilíbrio. Já, quando as saídas são não simétricas há menos restrições para estabelecer condições para unicidade. Vamos dividir este problema em quatro casos. Antes porém, fazemos a seguinte observação:

Observação 3.5. *Indicaremos por $z_o \in [c_1, c_2]$ a abscissa da intercessão entre as funções de pertinências de A_1 e A_2 e por $w_o \in [d_1, d_2]$ a intercessão entre as funções de pertinências de B_1 e B_2 .*

Para saídas não simétricas temos:

Teorema 3.5. *Seja S um sistema bidimensional, decomposto nos sistemas unidimensionais S_1 e S_2 . Se S_1 e S_2 possuem, cada um, um único ponto de equilíbrio, então S possui um único ponto de equilíbrio.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração para o caso em que S satisfaz ao Teorema 3.2. Os outros casos são análogos. Se tivermos $y_1 = B_1^{-1}(1) \Rightarrow x_1 = A_1^{-1}(1)$, claramente (x_1, y_1) é o único ponto de equilíbrio de S . Suponhamos então que $y_1 \neq B_1^{-1}(1)$. Seja $(x_3, y_3) \in [c_1, z_o] \times [d_1, w_o]$, $(x_3, y_3) \neq (x_2, y_1)$. Vamos mostrar que $\Delta(x_3, y_3) = (\Delta_1(x_3, y_3), \Delta_2(x_3, y_3)) \neq O$. Inicialmente, notemos que $x_3 \neq x_2$ e $y_3 \neq y_1$, pois as

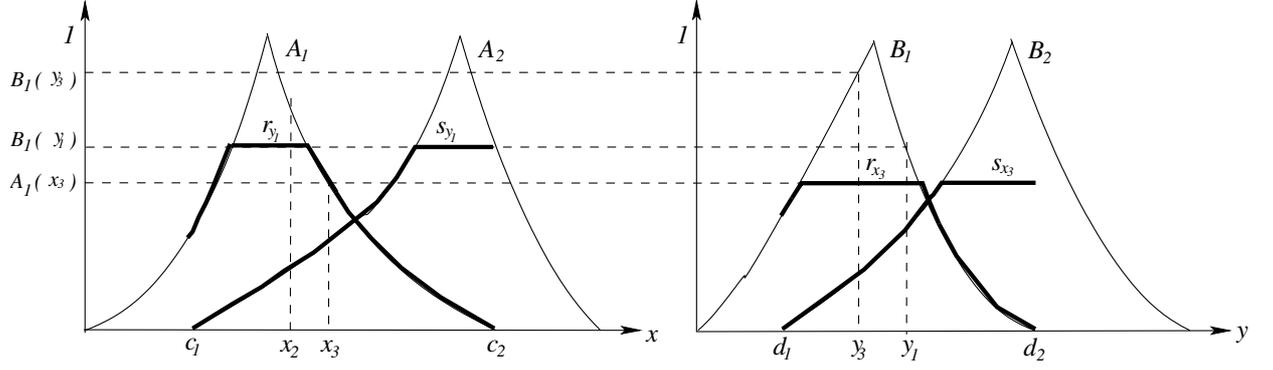


Figura 3.49: Ponto de equilíbrio (x_2, y_1) .

imagens inversas do 0 por Δ_1 e Δ_2 , $\Delta_1^{-1}(0)$ e $\Delta_2^{-1}(0)$, são funções (aplicação imediata do Corolário 2.3). Chamemo-as respectivamente de ω_1 e ω_2 , $\omega_1 : [d_1, d_2] \rightarrow [c_1, c_2]$ e $\omega_2 : [c_1, c_2] \rightarrow [d_1, d_2]$. Suponhamos que $x_3 \in [A_1]^{B_1(y_1)} \Leftrightarrow A_1(x_3) \geq B_1(y_1) \Rightarrow \Delta_2(x_3, y_1) = h_1^2(r_{x_3}(y_1) + h_2^2(s_{x_3}(y_1))) = 0$, pois y_1 é equilíbrio de S_2 por hipótese. Daí $\Delta_2(x_3, y_3) \neq 0$, pois caso contrário teríamos $\omega_2(x_3) = y_1$ e $\omega_2(x_3) = y_3$ o que é um absurdo, pois $y_1 \neq y_3$ e ω_2 é uma função. Suponhamos agora que $x_3 \notin [A_1]^{B_1(y_1)} \Leftrightarrow$

$$A_1(x_3) < B_1(y_1) \quad (3.30)$$

Suponhamos ainda que

$$\Delta_2(x_3, y_3) = h_1^2(r_{x_3}(y_3) + h_2^2(s_{x_3}(y_3))) = 0 \quad (3.31)$$

De (3.30) e (3.31) temos que $r_{x_3}(y_3) = A_1(x_3)$, pois $y_3 \neq y_1$ e y_1 é o único ponto de equilíbrio de S_2 . Daí,

$$B_1(y_3) > A_1(x_3) \Rightarrow \begin{cases} r_{y_3}(x_3) = A_1(x_3) \\ e \\ s_{y_3}(x_3) = A_2(x_3) \end{cases} \quad (3.32)$$

Suponhamos agora $\Delta_1(x_3, y_3) = h_1^1(r_{y_3}(x_3) + h_2^1(s_{y_3}(x_3))) = 0$. Daí, usando (3.32) tem-se $h_1^1(A_1(x_3)) + h_2^1(A_2(x_3)) = 0 \Rightarrow x_3 = x_1$ pois x_1 é único ponto de equilíbrio de S_1 . De (3.31) e de $x_3 = x_1$ tem-se,

$$\Delta_2(x_3, y_3) = h_1^2(r_{x_1}(y_3) + h_2^2(s_{x_1}(y_3))) = 0 \quad (3.33)$$

Mas, $A_1(x_1) > B_1(y_1) \Rightarrow$

$$h_1^2(r_{x_1}(y_1) + h_2^2(s_{x_1}(y_1))) = 0 \quad (3.34)$$

De (3.33) e (3.34) tem-se $y_3 = y_1$ o que é um absurdo! Logo, não é possível ter $\Delta_1(x_3, y_3) = \Delta_2(x_3, y_3) = 0$, o que conclui a demonstração de que (x_2, y_1) é o único ponto de equilíbrio de S .

Observação 3.6. *O Teorema 3.5 é válido para saídas não simétricas. O caso em que as saídas são simétricas foi tratado na seção 3.5.*

3.6 Resumo do capítulo

Neste capítulo definimos região viável de equilíbrio, vimos que existem 8 possibilidades (Figuras 3.2 - 3.9) para garantir a existência de tais regiões. Enunciamos e demonstramos um teorema (Teorema 3.1) que garante a existência de pontos de equilíbrios. Vimos que é possível associar um sistema bidimensional S a dois sistemas unidimensionais S_1 e S_2 , a fim de encontrar uma das coordenadas do ponto de equilíbrio de S (Teorema 3.2). Além disso, este resultado mostra que numa vizinhança do ponto de equilíbrio as funções Δ_1 e Δ_2 possuem derivadas parciais, o que será de fundamental importância para o estudo de estabilidade que faremos no capítulo seguinte.

Estabelecemos condições suficientes para unicidade de ponto de equilíbrio, quando as saídas são não simétricas, Teorema 3.5 e, quando as saídas são simétricas, o Teorema 3.3 estabelece condições necessárias e suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio.

Vale ressaltar que as demonstrações dos teoremas descritos neste capítulo, apesar de não serem gerais, mostram que suas generalizações são simples. E, para o caso em que as saídas são simétricas deve-se tomar cuidado com relação à unicidade de ponto de equilíbrio.

Capítulo 4

Estabilidade local de sistemas p-fuzzy

O estado de equilíbrio de um sistema pode desempenhar um papel importante na análise geral do sistema. Em muitos casos, é possível compreender o comportamento global das soluções quando se conhece o comportamento próximo ao estado de equilíbrio [36]. Neste capítulo vamos analisar a estabilidade de sistemas p-fuzzy. Inicialmente estudaremos o caso unidimensional e em seguida o caso bidimensional.

4.1 Estabilidade de sistemas p-fuzzy unidimensionais

Um sistema p-fuzzy unidimensional, como vimos no Capítulo 2, é uma equação de diferenças dada pela fórmula de recorrência,

$$x_{n+1} = x_n + \Delta(x_n) \quad (4.1)$$

onde, $\Delta(x_n)$ é a saída defuzificada do sistema baseado em regras fuzzy. Tomando $F(x) = x + \Delta(x)$ tem-se de (4.1) que

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (4.2)$$

Suponhamos que x^* seja um ponto de equilíbrio de (4.2) (x^* é ponto de equilíbrio de (4.1)). Da teoria de equações de diferenças [14, 3] a análise de estabilidade de (4.2) depende do valor de $\lambda = F'(x^*)$:

- se $0 < \lambda < 1$, x^* é assintoticamente estável (a convergência é monótona);
- se $-1 < \lambda < 0$, x^* é estável (convergência oscilatória);
- se $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$, x^* é neutralmente estável (trajetórias oscilam em torno de x^*);
- se $\lambda < -1$, x^* é instável (divergência oscilatória);

- se $\lambda > 1$, x^* é instável.

Como $F(x) = x + \Delta(x)$, temos que a análise de estabilidade do sistema p-fuzzy (Equação (4.1)), em função de $\Delta'(x^*)$, é dada por:

- $-1 < \Delta'(x^*) < 0$, x^* é assintoticamente estável (a convergência é monótona);
- $-2 < \Delta'(x^*) < -1$, x^* é estável (convergência oscilatória);
- $\Delta'(x^*) = 0$ ou $\Delta'(x^*) = -2$, x^* é neutralmente estável;
- $\Delta'(x^*) < -2$, x^* é instável (divergência oscilatória);
- $\Delta'(x^*) > 0$, x^* é instável.

Logo, observa-se que a análise de estabilidade de um sistema p-fuzzy unidimensional depende apenas de $\Delta'(x^*)$. Suponhamos que o método de inferência utilizado é o de Mamdani e o processo de defuzificação é o **Centro de gravidade**. Neste caso,

$$\Delta(x) = \frac{\int_{-b}^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt + \int_0^{g^{-1}(n)} ntdt + \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt}{\int_0^n g^{-1}(t)dt - \int_0^m f^{-1}(t)dt}$$

onde $(n, m) = (r(x), s(x))$.

Derivando a função Δ e lembrando que x^* é ponto de equilíbrio se, somente se, $h_1(x^*) + h_2(x^*) = 0$, tem-se:

$$\Delta'(x^*) = \frac{\frac{1}{2}[g^{-1}(n^*)]^2(n^*)' - \frac{1}{2}[f^{-1}(m^*)]^2(m^*)'}{\left(\int_0^{n^*} g^{-1}(t)dt - \int_0^{m^*} f^{-1}(t)dt\right)} \quad (4.3)$$

onde, $(n^*)'$ e $(m^*)'$ são respectivamente $r'(x^*)$ e $s'(x^*)$.

A Equação (4.3) acima pode ser reescrita por:

$$\Delta'(x^*) = \frac{H'(n^*, m^*)}{A(n^*, m^*)} \quad (4.4)$$

Observação 4.1. Observe em (4.3) que a análise de estabilidade de um dado ponto de equilíbrio depende do conjunto viável de equilíbrio, traduzido nos valores $(n^*)'$ e $(m^*)'$, e nas funções f e g .

Proposição 4.1. Seja $x^* \in \text{supp}(A^*)$ um ponto de equilíbrio de um sistema p-fuzzy unidimensional, se A^* é tal que $c_1 \leq z_1$ e $c_2 \geq z_2$. Então x^* é estável ou instável oscilante.

Demonstração. Basta mostrarmos que $\Delta'(x^*) < 0$. Isso é consequência imediata do Teorema 2.2.

4.1.1 Exemplo - análise de estabilidade de sistemas p-fuzzy unidimensionais com saída simétrica

Como f e g são simétricas, isto é $g(t) = f(-t)$, então $g^{-1}(t) = -f^{-1}(t)$ e pela Proposição 2.1 o sistema p-fuzzy possui um único ponto de equilíbrio (na região de equilíbrio, em questão) x^* tal que $s(x^*) = m^* = n^* = r(x^*)$. Substituindo estes resultados em (4.3) temos que,

$$\Delta'(x^*) = \frac{[g^{-1}(n^*)]^2[(n^*)' - (m^*)']}{4 \left(\int_0^{n^*} g^{-1}(t) dt \right)} \quad (4.5)$$

Consideremos um sistema p-fuzzy S_1 com variável de entrada x (Figura 4.1), variável de saída Dx (Figura 4.2) e como base de regras:

1. Se x é B então Dx é BP ;
2. Se x é MB então Dx é MP ;
3. Se x é M então Dx é BP ;
4. Se x é MA então Dx é BN ;
5. Se x é A então Dx é BP ;
6. Se x é AL então Dx é AP ;

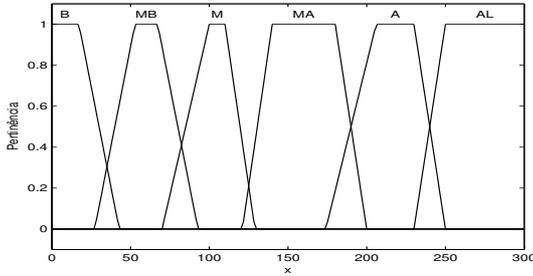


Figura 4.1: x , $\text{supp}(A^*) = [121, 129]$.

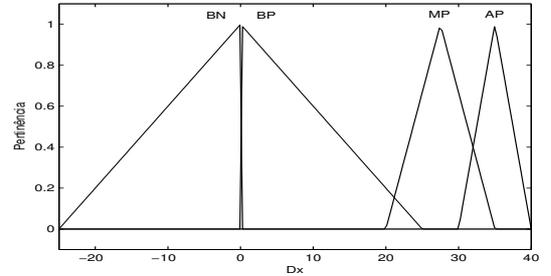


Figura 4.2: Dx : domínio $[-25, 40]$.

Observe que $A^* = M \cap MA$ é tal que $\text{supp}(A^*)$ é um conjunto viável de equilíbrio (Definição 2.3). Sejam r , s , f e g respectivamente as funções de pertinências dos conjuntos fuzzy M , MA , BP e BN . Temos que, $r(x) = -\frac{1}{19}(x - 129)$, $s(x) = \frac{1}{19}(x - 121)$ e $g^{-1}(t) = 25(1 - t)$. Resolvendo a equação $r(x) = s(x)$ tem-se $x^* = 125 \Rightarrow n^* = r(x^*) = \frac{4}{9}$. Donde obtém-se $g^{-1}(n^*) = \frac{375}{19}$. Como $r'(x) = -\frac{1}{19}$ e $s'(x) = \frac{1}{19}$, substituindo estes valores

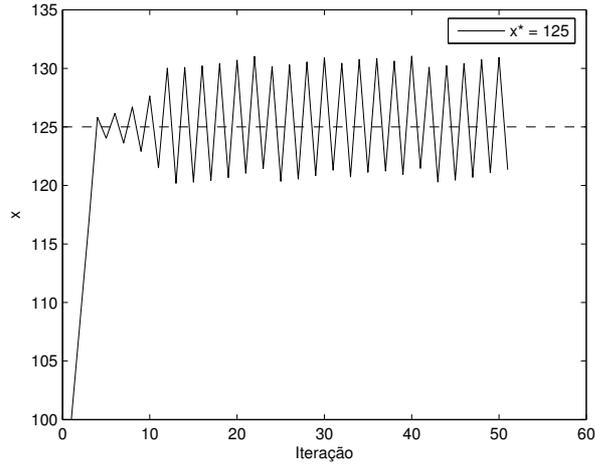


Figura 4.3: $\Delta'(x) = -2.177$.

em (4.5) temos que,

$$\Delta'(x) = \frac{\left[\frac{375}{19}\right]^2 \left[-\frac{1}{19} - \frac{1}{19}\right]}{4 \left(\int_0^{4/19} 25(1-t)dt\right)} = -2.1769 \implies \Delta'(x) < -2$$

Os resultados experimentais podem ser vistos na Figura 4.3, onde pode-se observar que o ponto de equilíbrio é instável, como esperávamos.

Agora vamos considerar dois outros sistemas p-fuzzy: S_2 e S_3 com as mesmas regras e a mesma variável de saída do sistema S_1 (Figura 4.2) e mudemos as entradas. Tomemos S_2 com entrada x dada na Figura 4.4 e S_3 com entrada x dada na Figura 4.5.

As mudanças nas entradas são tais que S_2 e S_3 têm o mesmo ponto de equilíbrio de

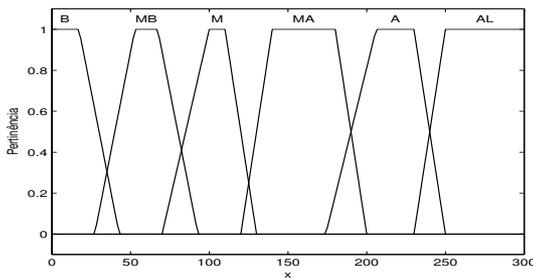


Figura 4.4: $supp(A^*) = [120, 130]$.

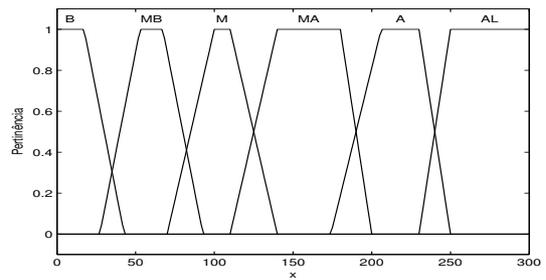


Figura 4.5: $supp(A^*) = [110, 140]$.

S_1 , $x^* = 125$. Fazendo alguns cálculos, de modo análogo ao que fizemos para o sistema S_1 , obtemos para S_2 : $\Delta'_{S_2}(x^*) = -1.607$ e para S_3 : $\Delta'_{S_3}(x^*) = -0.278$. Os resultados experimentais podem ser vistos respectivamente nas Figuras 4.6 e 4.7.

Consideremos também os sistemas S_4 e S_5 com as mesmas regras, variável de entrada

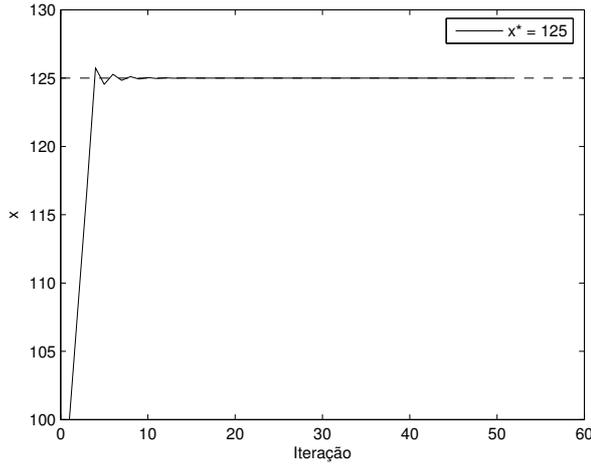


Figura 4.6: $\Delta'(x) = -1.607$.

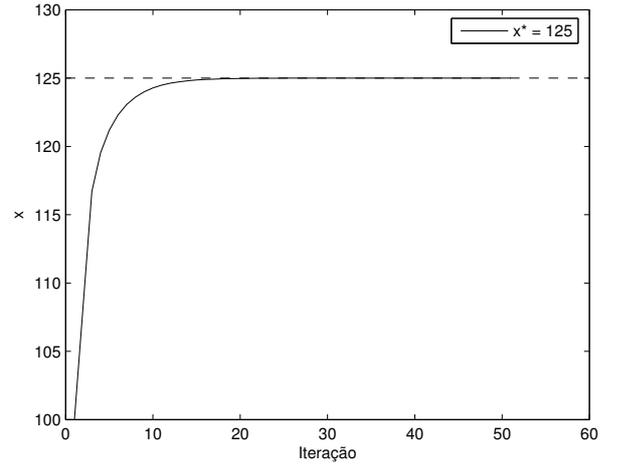


Figura 4.7: $\Delta'(x) = -0.278$.

x dada pela Figura 4.1 e variáveis de saídas respectivamente dadas nas Figuras 4.8 e 4.9. Aqui, mudamos apenas o domínio da variável de saída de S_1 (Figura 4.1), sendo que o domínio da variável de saída de S_4 é metade do domínio da saída de S_1 e o domínio da variável de saída de S_5 é um quinto do domínio da saída de S_1 . Os valores obtidos para S_4 e S_5 foram respectivamente,

$$\Delta_{S_4}(x^*) = -1.0884 = \frac{1}{2} * -2.177 = \frac{1}{2} * \Delta_{S_1}(x^*)$$

e

$$\Delta_{S_5}(x^*) = -1.0884 = \frac{1}{5} * -2.177 = \frac{1}{5} * \Delta_{S_1}(x^*)$$

(veja Figuras 4.10 e 4.11) obviamente não é coincidência! A seguinte proposição esclarece o ocorrido,

Proposição 4.2. *Multiplicar o domínio da variável de saída de um sistema p-fuzzy unidimensional (4.1) por h é equivalente a iterar $x_{n+1} = x_n + h\Delta x_n$.*

4.1.2 Exemplo - análise de estabilidade de sistemas p-fuzzy unidimensionais com saída não simétrica

Nesta seção, vamos analisar a estabilidade do sistema p-fuzzy dado na seção 2.5.6 (Capítulo 2). Neste caso, vamos utilizar $m_1 = 0.1$ $\varepsilon = 0.2$. Temos então, o sistema p-fuzzy com variável de entrada x dada na Figura 4.12 e variável de saída Dx dada na Figura 4.13. Usaremos a seguinte base de regras:

1. Se x é A então Δ é g ;

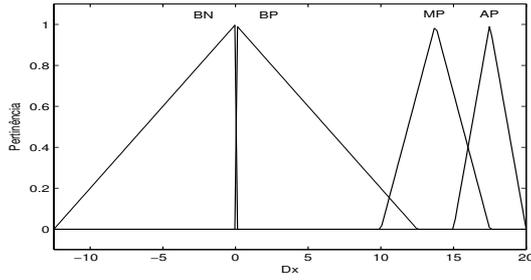


Figura 4.8: Saída: domínio $[-12.5, 20]$.

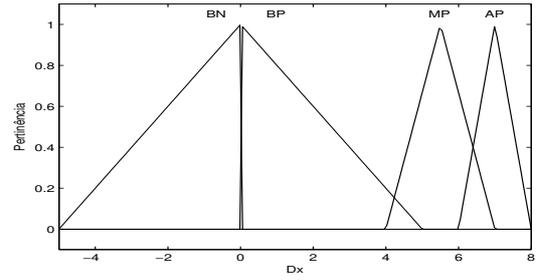


Figura 4.9: Saída: domínio $[-5, 8]$.

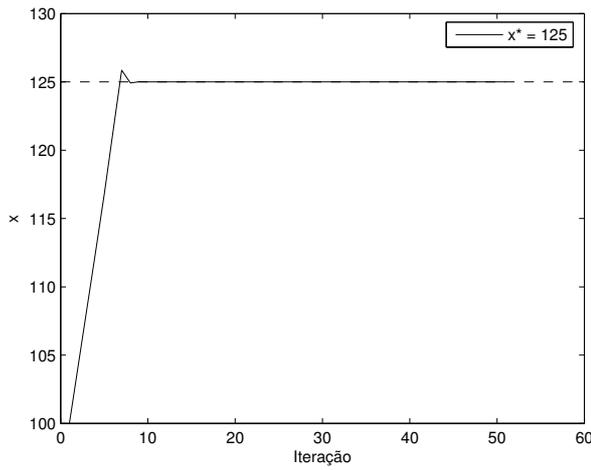


Figura 4.10: $\Delta'(x^*) = -1.088$.

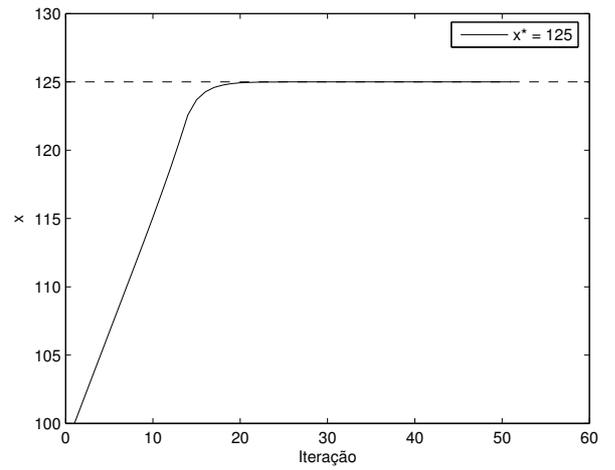


Figura 4.11: $\Delta'(x^*) = -0.435$.

2. Se x é B então Δ é f ;

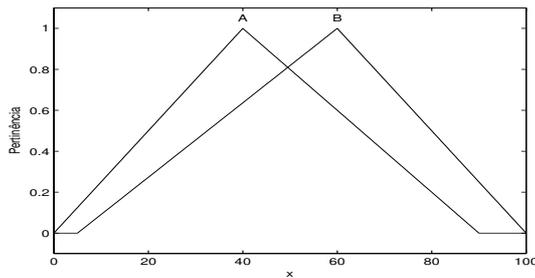


Figura 4.12: Variável x de entrada.

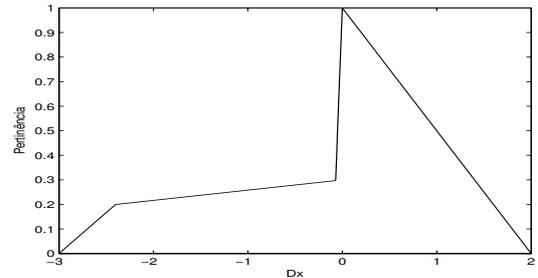


Figura 4.13: Variável Δ de saída.

Este sistema possui três pontos de equilíbrios: $x_1^* = 10.31$, $x_2^* = 19.13$ e $x_3^* = 69.57$ (Figura 4.14). Utilizando o Software Matlab encontramos os seguintes: $\Delta'(x_1^*) = -0.0541$, $\Delta'(x_2^*) = 0.0032$ e $\Delta'(x_3^*) = -0.0127$. Os resultados experimentais podem ser vistos respectivamente nas Figuras 4.15, 4.16 e 4.17. Podemos observar que x_1^* e x_3^* são estáveis e x_2^* é instável.

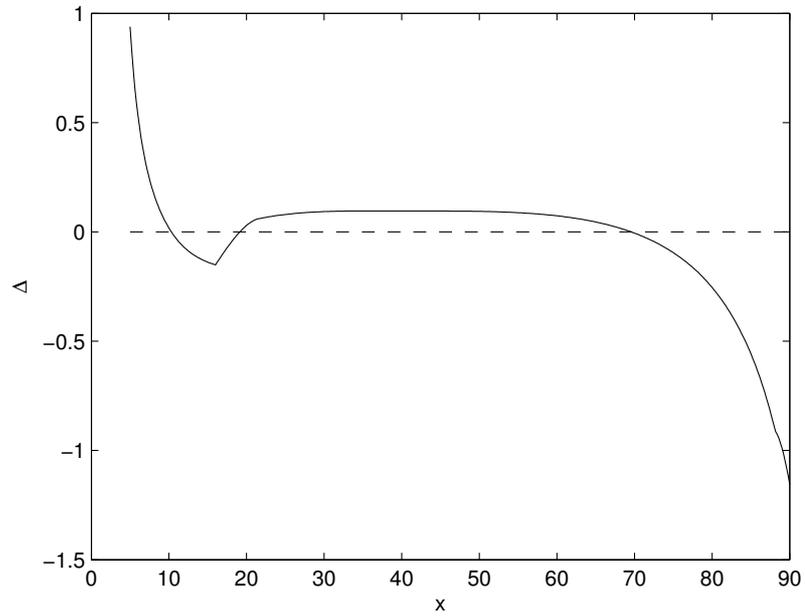


Figura 4.14: Gráfico da função Δ para $x \in \text{supp}(A^*)$.

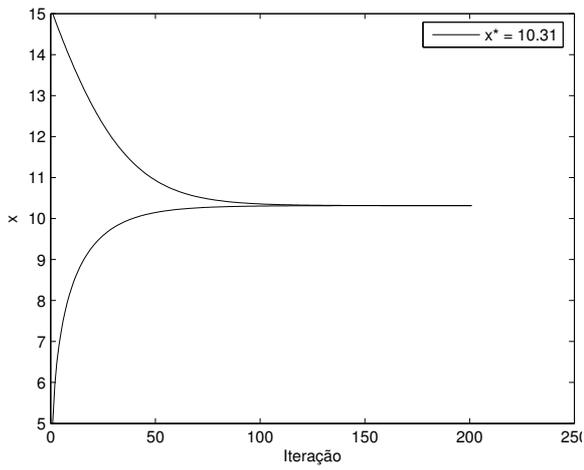


Figura 4.15: Estável: $\Delta'(x^*) = -0.0541$.

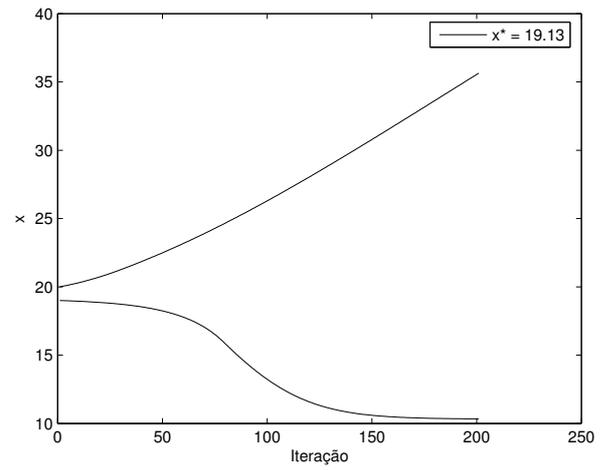


Figura 4.16: Instável: $\Delta'(x^*) = 0.0032$.

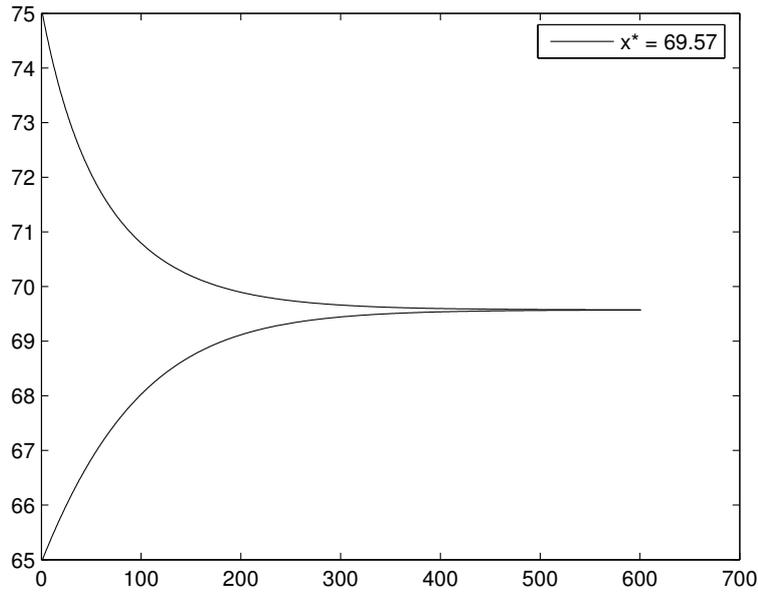


Figura 4.17: Estável: $\Delta'(x^*) = -0.0127$.

Quando um sistema é estável em x^* o teorema do ponto fixo de Banach garante que a seqüência x_n converge para x^* , com isso pode-se encontrar uma aproximação para o x^* . A pergunta óbvia é: Como encontrar uma aproximação para o ponto de equilíbrio quando este é instável? Passamos a respondê-la!

Dado um sistema p-fuzzy normalmente temos que $\Delta'(x)$ é uma função limitada numa vizinhança de x^* . Se x^* é um ponto de equilíbrio de (4.1) então x^* é ponto de equilíbrio de um sistema com a iteração $x_{n+1} = x_n + h\Delta(x_n)$, onde $h \in \mathbb{R}$. Se tomarmos h apropriado, de modo que $-2 < h\Delta'(x^*) < 0$ temos que $x_n \rightarrow x^*$. Assim podemos encontrar uma aproximação do ponto de equilíbrio, x^* . Por exemplo, consideremos o problema acima e tomemos $h = -1$, isto é iteremos $x_{n+1} = x_n - \Delta x_n$. Tomando como condição inicial $x_o = 18$ e $x_o = 20$ vemos que a seqüência converge para $x_2^* = 19.13$ (Figura 4.18) e como já vimos, x_2^* é instável!

Observação 4.2. *É importante notar a necessidade da função Δ' ser limitada numa vizinhança de x^* ([21], pg.305 exerc.12).*

Observação 4.3. *Pela Proposição 4.1 se A^* é tal que $c_1 \leq z_1$ e $c_2 \geq z_2$, então basta iterarmos $x_{n+1} = x_n + h\Delta x_n$ com $h \in (0, 1)$, para encontrar uma aproximação para o ponto de equilíbrio.*

Observação 4.4. *Obviamente, em muitos casos, pode se encontrar o valor exato do ponto*

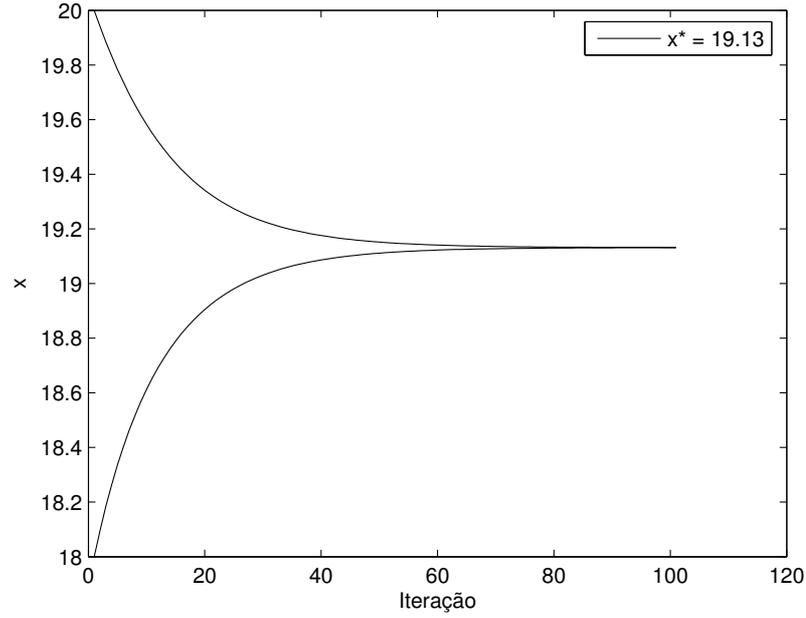


Figura 4.18: Iteração com a seqüência: $x_{n+1} = x_n - \Delta x_n$.

de equilíbrio de um sistema *p*-fuzzy, como acontece no caso em que a saída é simétrica.

4.2 Estabilidade de sistemas *p*-fuzzy bidimensionais

Consideremos um sistema discreto autônomo bidimensional S ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) \end{cases}, \quad (4.6)$$

e suponhamos que (x^*, y^*) seja um ponto de equilíbrio de S . Então, da teoria clássica de equações de diferenças não lineares [14] sabe-se que a análise de estabilidade de S em (x^*, y^*) depende dos autovalores da matriz jacobiana de S , a qual é dada por:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Para determinar a estabilidade de (x^*, y^*) basta encontrar as raízes (autovalores) da equação $\det(\mathbb{J} - \lambda I) = 0$. Sendo λ_1 e λ_2 estas raízes tem-se: (x^*, y^*) é estável se, e somente se, $|\lambda_1|, |\lambda_2| \in (0, 1)$.

Uma outra maneira de testar a estabilidade de (x^*, y^*) , sem determinar explicitamente os autovalores, é verificar se: $2 > 1 + \det(\mathbb{J}) > |\text{tr}(\mathbb{J})|$.

Observação 4.5. $\det(\mathbb{J})$ e $\text{tr}(\mathbb{J})$ são respectivamente determinante e traço da matriz \mathbb{J} .

Sabemos que um sistema p -fuzzy bidimensional, (3.1), é um sistema de equações de diferenças não lineares onde $F(x, y) = x + \Delta_1(x, y)$ e $G(x, y) = y + \Delta_2(x, y)$. Então a matriz jacobiana deste sistema é:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial \Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) & 1 + \frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

onde as derivadas parciais de Δ_1 e de Δ_2 , equações (3.11) e (3.12), são dadas por:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(\beta_2(x^*, y^*))]^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial x}(x^*, y^*) - \frac{1}{2}[f_1^{-1}(\beta_1(x^*, y^*))]^2 (\frac{\partial \beta_1}{\partial x})(x^*, y^*)}{A(\beta_2(x^*, y^*), \beta_1(x^*, y^*))} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(\beta_2(x^*, y^*))]^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial y}(x^*, y^*) - \frac{1}{2}[f_1^{-1}(\beta_1(x^*, y^*))]^2 (\frac{\partial \beta_1}{\partial y})(x^*, y^*)}{A(\beta_2(x^*, y^*), \beta_1(x^*, y^*))} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_2^{-1}(\beta_4(x^*, y^*))]^2 \frac{\partial \beta_4}{\partial x}(x^*, y^*) - \frac{1}{2}[f_2^{-1}(\beta_3(x^*, y^*))]^2 (\frac{\partial \beta_3}{\partial x})(x^*, y^*)}{A(\beta_4(x^*, y^*), \beta_3(x^*, y^*))} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_2^{-1}(\beta_4(x^*, y^*))]^2 \frac{\partial \beta_4}{\partial y}(x^*, y^*) - \frac{1}{2}[f_2^{-1}(\beta_3(x^*, y^*))]^2 (\frac{\partial \beta_3}{\partial y})(x^*, y^*)}{A(\beta_4(x^*, y^*), \beta_3(x^*, y^*))} \quad (4.12)$$

Observação 4.6. Obviamente, nas equações acima, estamos supondo que as funções β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são deriváveis. De fato, estas funções são deriváveis em (x^*, y^*) quando satisfazem a condição *i*) ou *ii*) do Teorema 3.2. Quando (x^*, y^*) satisfaz a condição *iii*) do Teorema 3.2 possivelmente, as funções β_1 , β_2 , β_3 e β_4 não possuem derivadas parciais em (x^*, y^*) .

Observação 4.7. Quando as saídas são simétricas, $A_1(x^*) = A_2(x^*) = B_1(y^*) = B_2(y^*)$ (Teorema 3.3), β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são deriváveis por partes num aberto centrado em (x^*, y^*) .

Como vimos no Capítulo 3, para sistemas p -fuzzy bidimensionais existem apenas 8 tipos de configurações limitando a região viável de equilíbrio. Para fazer uma análise completa da estabilidade dos sistemas p -fuzzy bidimensionais, teríamos que considerar todas as configurações possíveis para existência de região viável de equilíbrio (Figura 4.19). Entretanto, por ser a metodologia análoga para todos os casos vamos considerar apenas dois casos: *Tipo 1* e *Tipo 2* (Figura 4.19).

Inicialmente, observe que se um sistema S satisfaz ao item *i*) do Teorema 3.2, vimos que o ponto de equilíbrio (x^*, y^*) é tal que $x^* \in [A_1]^{B_1(y^*)} \Rightarrow A_1(x^*) > B_1(y^*) > B_2(y^*)$. Daí, pela monotonicidade e continuidade de A_1 , A_2 , B_1 e B_2 existe um $\delta > 0$ tal que, para

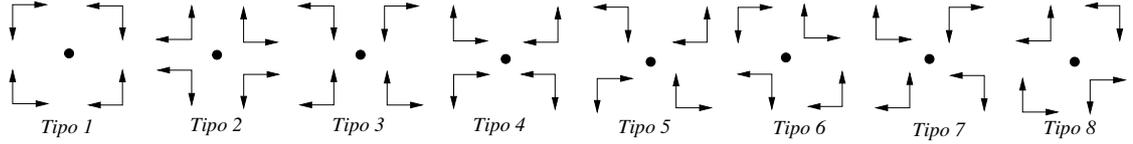


Figura 4.19: Configurações possíveis de regiões viáveis de equilíbrio para sistemas p-fuzzy bidimensionais.

$x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ e $y \in (y^* - \delta, y^* + \delta)$, tem-se:

$$A_1(x) > B_1(y) \quad (4.13)$$

$$A_1(x) > B_2(y) \quad (4.14)$$

$$A_1(x) > A_2(x). \quad (4.15)$$

Se, por outro lado, S satisfaz a condição *ii*) do Teorema 3.2, então $y^* \in [B_1]^{A_1(x^*)} \Rightarrow B_1(y^*) > A_1(x^*) > A_2(x^*)$. Então, pela monotonicidade e continuidade de A_1 , A_2 , B_1 e B_2 existe um $\delta > 0$ tal que, para $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ e $y \in (y^* - \delta, y^* + \delta)$, têm-se,

$$B_1(y) > A_1(x) \quad (4.16)$$

$$B_1(x) > A_2(x) \quad (4.17)$$

$$B_1(y) > B_2(y). \quad (4.18)$$

4.2.1 Análise de estabilidade - Tipo 1

Nesta seção vamos considerar regiões de equilíbrio com a configuração representada pela Figura 4.19 (Tipo 1), a qual é traduzida pelas regras:

1. Se x é A_1 e y é B_1 Então Δ_1 é g_1 e Δ_2 é g_2 ;
2. Se x é A_1 e y é B_2 Então Δ_1 é g_1 e Δ_2 é f_2 ;
3. Se x é A_2 e y é B_1 Então Δ_1 é f_1 e Δ_2 é g_2 ;
4. Se x é A_2 e y é B_2 Então Δ_1 é f_1 e Δ_2 é f_2 ;

então, as funções β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são dadas por:

$$\beta_1(x, y) = \max\{\min\{A_2(x), B_1(y)\}, \min\{A_2(x), B_2(y)\}\} \quad (4.19)$$

$$\beta_2(x, y) = \max\{\min\{A_1(x), B_1(y)\}, \min\{A_1(x), B_2(y)\}\} \quad (4.20)$$

$$\beta_3(x, y) = \max\{\min\{A_1(x), B_2(y)\}, \min\{A_2(x), B_2(y)\}\} \quad (4.21)$$

$$\beta_4(x, y) = \max\{\min\{A_1(x), B_1(y)\}, \min\{A_2(x), B_1(y)\}\} \quad (4.22)$$

pela Proposição 1.1 podemos reescrever estas equações:

$$\beta_1(x, y) = \min\{A_2(x), \max\{B_1(y), B_2(y)\}\} \quad (4.23)$$

$$\beta_2(x, y) = \min\{A_1(x), \max\{B_1(y), B_2(y)\}\} \quad (4.24)$$

$$\beta_3(x, y) = \min\{B_2(y), \max\{A_1(x), A_2(x)\}\} \quad (4.25)$$

$$\beta_4(x, y) = \min\{B_1(y), \max\{A_1(x), A_2(x)\}\} \quad (4.26)$$

Se (x^*, y^*) satisfaz ao **item i) do Teorema 3.2**, usando (4.13)-(4.15) temos que, $\beta_2(x, y) = B_1(y)$, $\beta_3(x, y) = B_2(y)$, $\beta_4(x, y) = B_1(y)$ e pelo Corolário 3.1 tem-se $\beta_1(x, y) = A_2(x)$. Então, usando a Proposição 1.2 ,

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = A'_2(x^*) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_3}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_4}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_4}{\partial y}(x^*, y^*) = B'_1(y^*) \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial y}(x^*, y^*) = B'_2(y^*) \quad (4.30)$$

substituindo estes valores nas Equações (4.9)-(4.12) tem-se:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{-\frac{1}{2}[f_1^{-1}(A_2(x^*))]^2 A'_2(x^*)}{A(B_1(y^*), A_2(x^*))} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(B_1(y^*))]^2 B'_1(y^*)}{A(B_1(y^*), B_2(y^*))} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_2^{-1}(B_1(y^*))]^2 B'_1(y^*) - \frac{1}{2}[f_2^{-1}(B_2(y^*))]^2 B'_2(y^*)}{A(B_1(y^*), B_2(y^*))}. \quad (4.34)$$

Assim, a matriz jacobiana do sistema S é dada por,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial \Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ 0 & 1 + \frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Os autovalores de \mathbb{J} são: $\lambda_1 = 1 + \frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*)$ e $\lambda_2 = 1 + \frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*)$. Se decomposmos este sistema em sistemas unidimensionais obteremos S_1 e S_2 tal que S_2 teria as seguintes regras:

1. Se y é B_1 Então Δ é g_2 ;

2. Se y é B_2 Então Δ é f_2 ;

donde tem-se, $\frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \Delta'(y^*)$ (veja equações (4.34), (4.3) e Teorema 3.2).

Proposição 4.3. *Se tivermos $A_1(x_1) \geq B_1(y^*)$, onde x_1 é o ponto de equilíbrio de S_1 e y^* é o ponto de equilíbrio de S_2 , uma condição necessária para estabilidade do ponto (x^*, y^*) é que y^* seja estável por S_2 .*

Demonstração. Segue direto da Equação (4.3) e Equação (4.34).

Suponhamos agora que o sistema S satisfaça ao **ítem ii) do Teorema 3.2**. Usando (4.16)-(4.18) temos que, $\beta_2(x, y) = A_2(x)$, $\beta_3(x, y) = A_1(x)$, $\beta_4(x, y) = A_1(x)$ e pelo Corolário 3.2 tem-se $\beta_3(x, y) = B_2(x)$. Usando a Proposição 1.2, vem:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = A_2'(x^*) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_4}{\partial x}(x^*, y^*) = A_1'(x) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\partial \beta_4}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial y}(x^*, y^*) = B_1'(y^*). \quad (4.39)$$

Substituindo estes valores nas equações (4.9)-(4.12) tem-se:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(A_1(x^*))]^2 A_1'(x^*) - \frac{1}{2}[f_1^{-1}(A_2(x^*))]^2 A_2'(x^*)}{A(A_1(y^*), A_2(y^*))} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(A_1(x^*))]^2 A_1'(x^*)}{A(B_1(y^*), A_1(x^*))} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{-\frac{1}{2}[f_2^{-1}(B_1(y^*))]^2 B_1'(y^*)}{A(A_1(x^*), B_1(y^*))} \quad (4.43)$$

Neste caso, a matriz jacobiana de S é dada por,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) & 0 \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) & 1 + \frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Decompondo o sistema S em sistemas unidimensionais, obtém-se S_1 e S_2 tal que S_1 tem a seguinte base de regras:

1. Se x é A_1 então Δ é g_1 ;

2. Se x é A_2 então Δ é f_1 ;

donde tem-se, $\frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \Delta'(x^*)$ (veja Equações (4.40), (4.3) e Teorema 3.2).

Proposição 4.4. *Se tivermos $A_1(x^*) \leq B_1(y_1)$, onde x^* é o ponto de equilíbrio de S_1 e y_1 é o ponto de equilíbrio de S_2 , uma condição necessária para estabilidade de (x^*, y^*) é que x^* seja estável por S_1 .*

Demonstração. Segue direto da Equação (4.3) e Equação (4.40).

4.2.2 Exemplos da análise de estabilidade - Tipo 1

Nesta seção apresentaremos os resultados experimentais relativos ao estudo da estabilidade descrito na seção 4.2.1. Inicialmente apresentaremos um sistema que satisfaz à condição i) do Teorema 3.2, isto é, um sistema que ao ser decomposto em sistemas unidimensionais S_1 e S_2 , sendo x_1 ponto de equilíbrio de S_1 e y_1 ponto de equilíbrio de S_2 ; tem-se $A_1(x_1) \geq B_1(y_1)$.

Exemplo 1

Consideremos o sistema bidimensional S com as regras descritas na seção anterior, com as variáveis de entrada x (Figura 4.20) e y (Figura 4.21) e variáveis de saída Δ_1 (Figura 4.22) e Δ_2 (Figura 4.23). As trajetórias resultantes podem ser vistas nas Figuras 4.24-4.26. A Figura 4.24 mostra o gráfico $x \times n$, a Figura 4.25 mostra o gráfico $y \times n$ e a Figura 4.26 mostra o plano de fase de S .

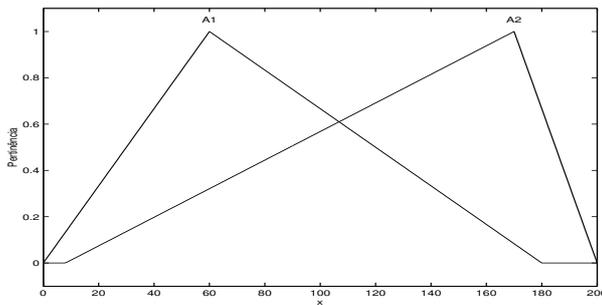


Figura 4.20: Entrada x de S .

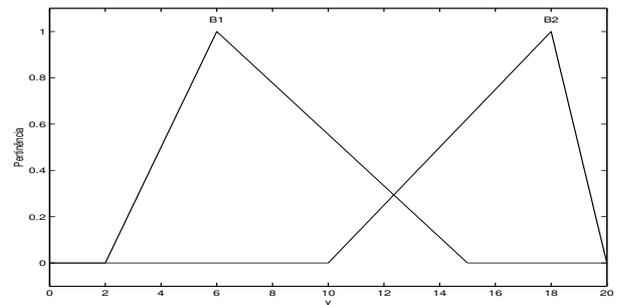


Figura 4.21: Entrada y de S .

Neste caso, temos que o sistema S é instável. Ao decompor S nos sistemas unidimensionais S_1 e S_2 , tem-se que o ponto de equilíbrio de S_2 , y^* , é tal que: $\Delta'(y^*) = -2.0599$, o que explica a instabilidade de S (Proposição 4.1).

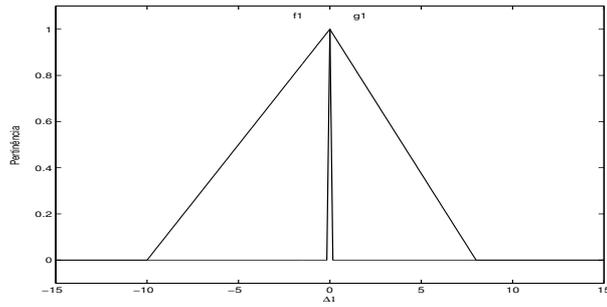


Figura 4.22: Saída Δ_1 de S .

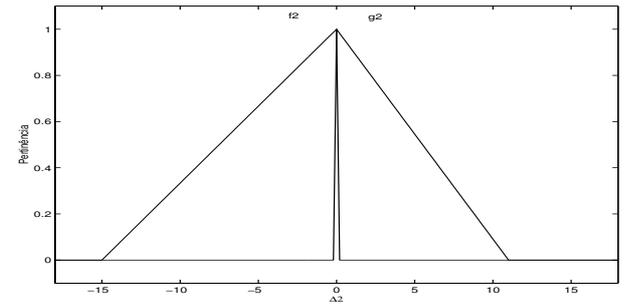


Figura 4.23: Saída Δ_2 de S .

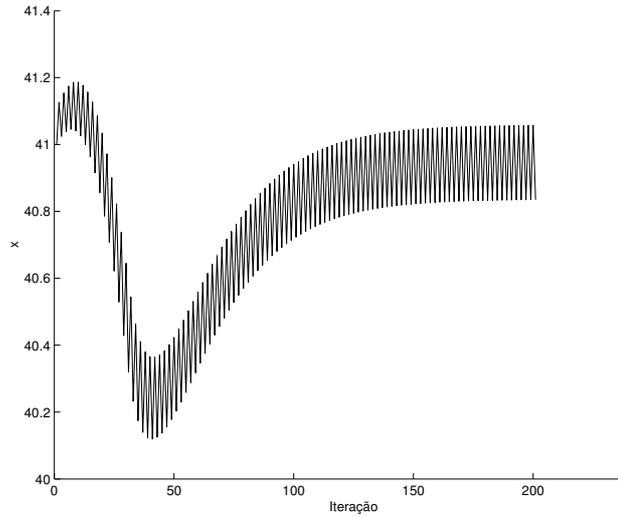


Figura 4.24: Gráfico $x \times n$.

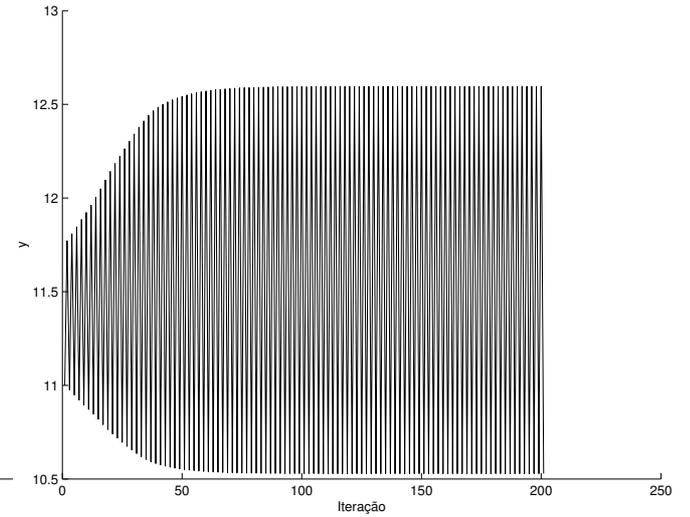


Figura 4.25: Gráfico $y \times n$.

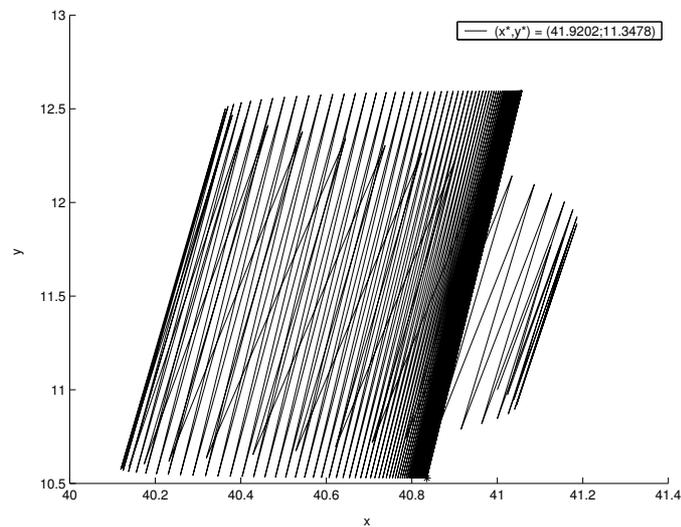


Figura 4.26: Plano de fase do sistema S .

Exemplo 2

Mudamos o sistema S , agora a saída Δ_2 de S será dada pela Figura 4.27. Chamemos este novo sistema de S' . Para este sistema, obtemos os resultados exibidos nas Figuras 4.28-

4.30. A Figura 4.28 mostra o gráfico $x \times n$, a Figura 4.29 mostra o gráfico $y \times n$ e a Figura 4.30 mostra o plano de fase de S' .

Neste caso, o sistema S' é estável. Separando S' em sistemas unidimensionais, temos que o sistema S_2 é tal que, em seu ponto de equilíbrio, $\Delta'(y^*) = -1.7128$.

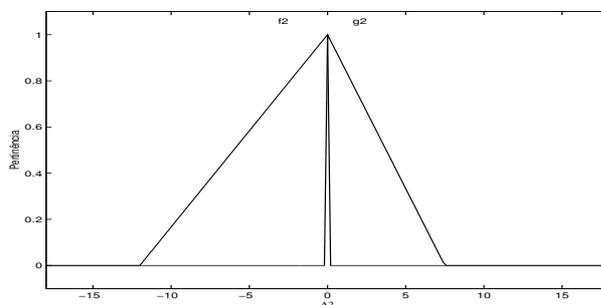


Figura 4.27: Saída Δ_2 do sistema S' .

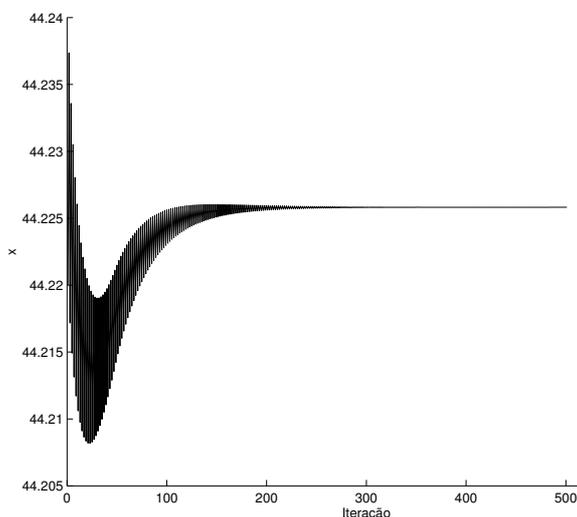


Figura 4.28: Gráfico $x \times n$.

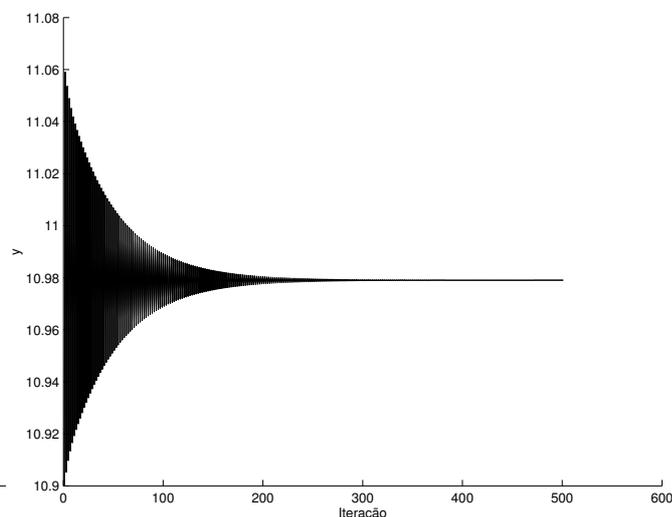


Figura 4.29: Gráfico $y \times n$.

Exemplo 3

Ainda considerando o sistema S , mudamos a saída Δ_2 de S , agora dada na Figura 4.31. Chamemos este novo sistema de S'' . Para este sistema, obtemos os resultados ilustrados nas Figuras 4.32-4.34. A Figura 4.32 mostra o gráfico $x \times n$, a Figura 4.33 mostra o gráfico $y \times n$ e a Figura 4.34 mostra o plano de fase de S'' .

Neste caso, o sistema S'' é estável. Separando S'' em sistemas unidimensionais, o sistema S_2 é tal que, em seu ponto de equilíbrio a função Δ' satisfaz: $\Delta'(y^*) = -0.3045$.

Observação 4.8. Se, nos sistemas S , S' e S'' discutidos acima, trocarmos as variáveis de entradas x por y e y por x teremos sistemas que satisfazem ao item ii) do Teore-

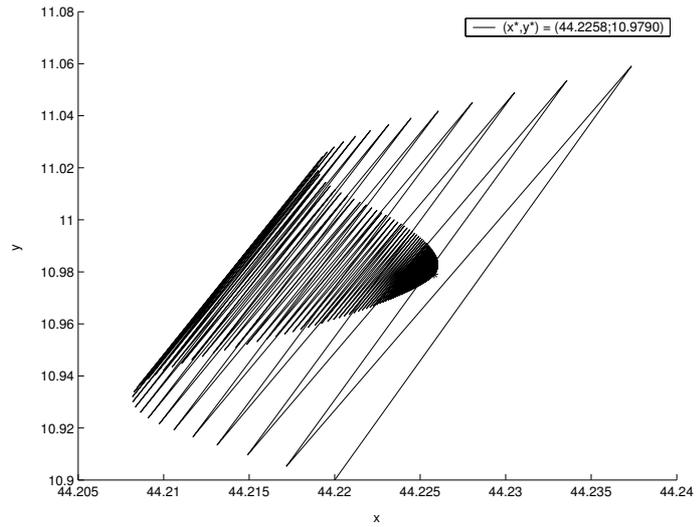


Figura 4.30: Plano de fase do sistema S' .

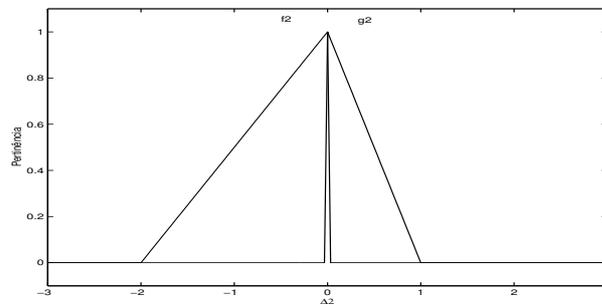


Figura 4.31: Saída Δ_2 do sistema S'' .

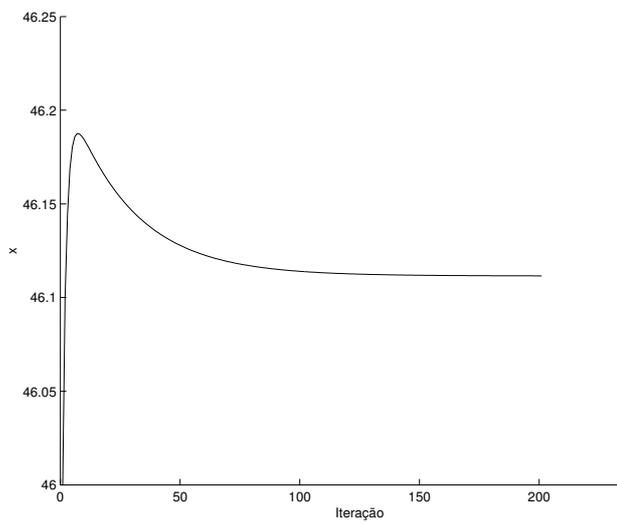


Figura 4.32: Gráfico $x \times n$.

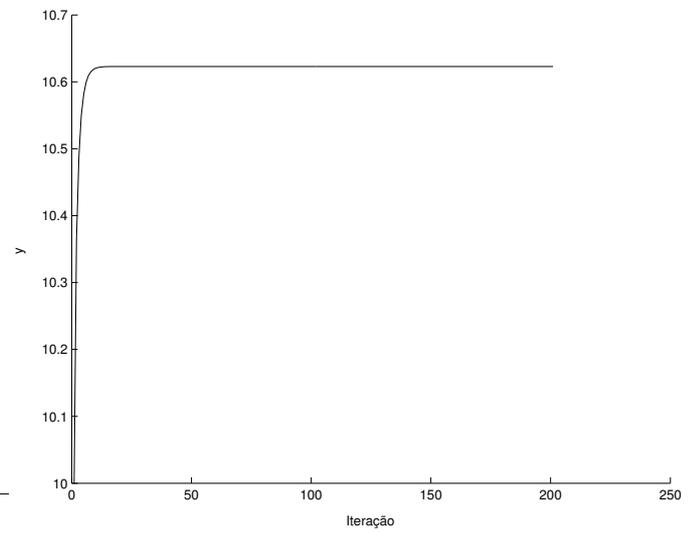


Figura 4.33: Gráfico $y \times n$.

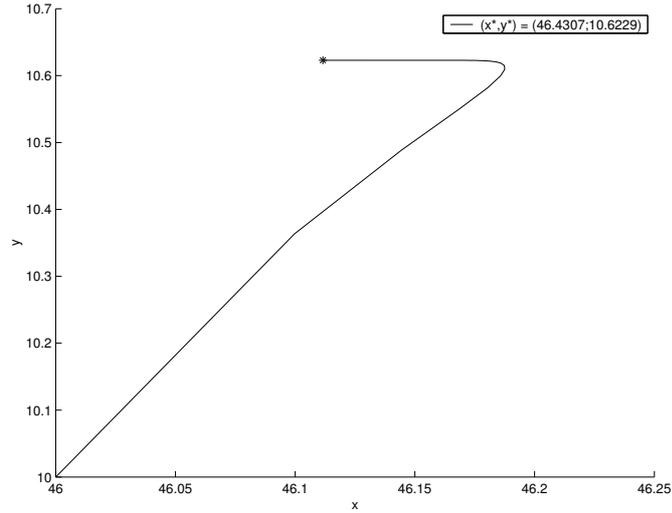


Figura 4.34: Plano de fase do sistema S'' .

ma 3.2. Assim, os resultados exibidos nos exemplos anteriores servem de exemplos para uma análise da estabilidade deste caso.

4.2.3 Análise de estabilidade - Tipo 2

Nesta seção, vamos considerar regiões viáveis de equilíbrio cuja configuração é representada na Figura 4.19 (Tipo 5), e é traduzida pelas regras:

1. Se x é A_1 e y é B_1 Então Δ_1 é g_1 e Δ_2 é f_2 ;
2. Se x é A_1 e y é B_2 Então Δ_1 é f_1 e Δ_2 é f_2 ;
3. Se x é A_2 e y é B_1 Então Δ_1 é g_1 e Δ_2 é g_2 ;
4. Se x é A_2 e y é B_2 Então Δ_1 é f_1 e Δ_2 é g_2 ;

então, as funções β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são dadas por:

$$\beta_1(x, y) = \max\{\min\{A_1(x), B_2(y)\}, \min\{A_2(x), B_2(y)\}\} \quad (4.45)$$

$$\beta_2(x, y) = \max\{\min\{A_1(x), B_1(y)\}, \min\{A_2(x), B_1(y)\}\} \quad (4.46)$$

$$\beta_3(x, y) = \max\{\min\{A_1(x), B_1(y)\}, \min\{A_1(x), B_2(y)\}\} \quad (4.47)$$

$$\beta_4(x, y) = \max\{\min\{A_2(x), B_1(y)\}, \min\{A_2(x), B_2(y)\}\} \quad (4.48)$$

pela Proposição 1.1 podemos reescrever estas equações:

$$\beta_1(x, y) = \min\{B_2(y), \max\{A_1(x), A_2(x)\}\} \quad (4.49)$$

$$\beta_2(x, y) = \min\{B_1(y), \max\{A_1(x), A_2(x)\}\} \quad (4.50)$$

$$\beta_3(x, y) = \min\{A_1(x), \max\{B_1(y), B_2(y)\}\} \quad (4.51)$$

$$\beta_4(x, y) = \min\{A_2(x), \max\{B_1(y), B_2(y)\}\} \quad (4.52)$$

Se (x^*, y^*) satisfaz ao **item i) do Teorema 3.2**, usando (4.13)-(4.15) temos que, $\beta_1(x, y) = B_2(y)$, $\beta_2(x, y) = B_1(y)$, $\beta_3(x, y) = B_1(y)$ e pelo Corolário 3.1 tem-se $\beta_4(x, y) = A_2(x)$. Então, usando a Proposição 1.2 ,

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_3}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_4}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial\beta_4}{\partial x}(x^*, y^*) = A_2(x^*) \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = B_2'(y^*) \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_3}{\partial y}(x^*, y^*) = B_1'(y^*) \quad (4.56)$$

Substituindo estes valores nas equações (4.9)-(4.12) tem-se:

$$\frac{\partial\Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(B_1(y^*))]^2 B_1'(y^*) - \frac{1}{2}[f_1^{-1}(B_2(y^*))]^2 B_2'(y^*)}{A(B_1(y^*), B_2(y^*))} \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial\Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_2^{-1}(A_2(x^*))]^2 A_2'(x^*)}{A(A_2(x^*), B_1(y^*))} \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial\Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{-\frac{1}{2}[f_2^{-1}(B_1(y^*))]^2 B_1'(y^*)}{A(A_2(x^*), B_1(y^*))} \quad (4.60)$$

Então, a matriz jacobiana do sistema S é dada por,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial\Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial\Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) & 1 + \frac{\partial\Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Se (x^*, y^*) satisfaz ao **item ii) do Teorema 3.2**, usando (4.13)-(4.15) temos que, $\beta_2(x, y) = A_1(x)$, $\beta_3(x, y) = A_1(x)$, $\beta_4(x, y) = A_2(x)$ e pelo Corolário 3.2 tem-se $\beta_1(x, y) =$

$B_2(y)$. Então, usando a Proposição 1.2 ,

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_3}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_4}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial\beta_3}{\partial x}(x^*, y^*) = A'_1(x^*) \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial\beta_4}{\partial x}(x^*, y^*) = A'_2(x^*) \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = B'_2(y^*) = B'_2(y^*) \quad (4.65)$$

Substituindo estes valores nas Equações (4.9)-(4.12) tem-se:

$$\frac{\partial\Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(A_1(x^*))]^2 A'_1(x^*)}{A(B_2(y^*), A_1(x^*))} \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{-\frac{1}{2}[f_1^{-1}(B_2(y^*))]^2 B'_2(y^*)}{A(B_2(y^*), A_1(x^*))} \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial\Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_2^{-1}(A_2(x^*))]^2 A'_2(x^*) - \frac{1}{2}[f_2^{-1}(A_1(x^*))]^2 A'_1(x^*)}{A(A_1(x^*), A_2(x^*))} \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial\Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.69)$$

então, a matriz jacobiana do sistema S é dada por,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial\Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial\Delta_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial\Delta_2}{\partial x}(x^*, y^*) & 1 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Observe que, a partir das matrizes em (4.61) e (4.70) não é possível fazer uma análise da estabilidade a priori, como fizemos no caso estudado na seção 4.2.1. Dessa forma, a estabilidade depende de cada problema estudado. Na seção seguinte veremos alguns exemplos, onde poderemos constatar a potencialidade deste de tipo de configuração.

Saídas simétricas

Estudaremos agora a estabilidade do caso em que as saídas do controlador são simétricas. Obviamente, só tem sentido estudar estabilidade de um ponto de equilíbrio quando este é isolado. Sendo assim, para o estudo usaremos como base o Teorema 3.3. A partir deste teorema e da Proposição 1.2 vemos que é necessário calcular as derivadas parciais laterais das funções β_1 , β_2 , β_3 e β_4 , visto que a derivada destas funções podem não existir no ponto

de equilíbrio. Fazendo isto, obtemos:

$$\frac{\partial \Delta_1^1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial \Delta_1^2}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \Delta_2^1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_2^{-1}(A_2(x^*))]^2 A_2'(x^*)}{A(A_1(y^*), A_2(x^*))} \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \Delta_2^2}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{-\frac{1}{2}[f_2^{-1}(A_1(x^*))]^2 A_1'(x^*)}{A(A_1(y^*), A_2(x^*))} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial \Delta_1^1}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{-\frac{1}{2}[f_1^{-1}(B_2(y^*))]^2 B_2'(y^*)}{A(B_1(y^*), B_2(y^*))} \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial \Delta_1^2}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\frac{1}{2}[g_1^{-1}(B_1(y^*))]^2 B_1'(y^*)}{A(B_2(y^*), B_1(y^*))} \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial \Delta_2^1}{\partial y}(x^*, y^*) = \frac{\partial \Delta_2^2}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (4.76)$$

Observação 4.9. *Os expoentes que aparecem nas Equações (4.71)-(4.76) têm o seguinte significado: 1 - derivada parcial à esquerda e 2 - derivada parcial à direita.*

Das equações (4.71) e (4.76) tem-se $\frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial \Delta_2}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$. Então, a matriz jacobiana é:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ k_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

onde, k_1 e k_2 dependem das equações (4.72)-(4.75). Um cálculo simples mostra que os autovalores de \mathbb{J} são: $\lambda_1 = 1 - \sqrt{k_1 k_2}$ e $\lambda_2 = 1 + \sqrt{k_1 k_2}$. Então, o sistema é instável, pois, pelo menos um dos autovalores tem módulo maior do que um.

4.2.4 Exemplos - análise de estabilidade - Tipo 2

Nesta seção apresentaremos os resultados experimentais relativos a análise de estabilidade feita na seção 4.2.3, anterior.

Exemplo 1

Consideremos o sistema bidimensional S cujas regras são as mesmas descritas na seção 4.2.3, com variáveis de entrada x (Figura 4.35) e y (Figura 4.36) e variáveis de saída Δ_1 (Figura 4.37) e Δ_2 (Figura 4.38). A matriz jacobiana do sistema S no ponto de equilíbrio $(x^*, y^*) = (32.8109; 6.7511)$ é dada por,

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 & -0.3172 \\ 0.0357 & 0.7856 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Os autovalores da matriz \mathbb{J} são $\lambda_1 = 0.9054$ e $\lambda_2 = 0.8801$, portanto o sistema é estável. Os resultados experimentais podem ser vistos nas Figuras 4.39 e 4.40. A Figura 4.39 mostra a trajetória $x \times n$ (linha mais cheia) e a trajetória $y \times n$ (linha menos cheia) e, a Figura 4.40 mostra o plano de fase de S . Neste exemplo usamos a condição inicial $(x_o, y_o) = (32, 6)$. Podemos observar uma convergência lenta ($n = 3000$), isto se deve ao fato que os autovalores têm magnitudes próximas de 1.

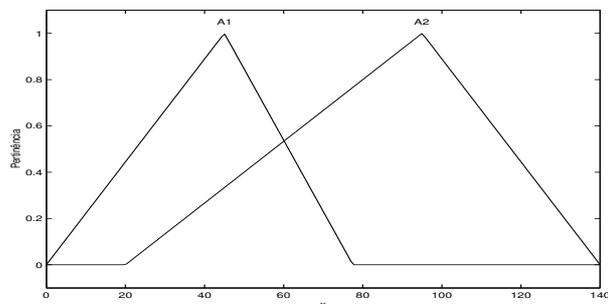


Figura 4.35: Entrada x de S .

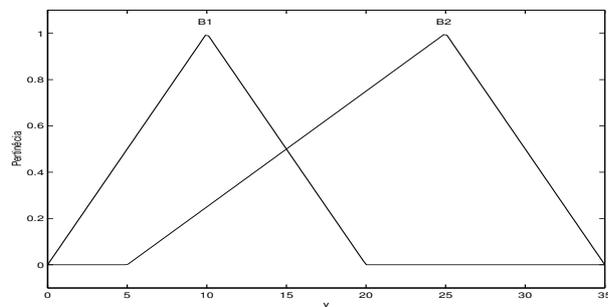


Figura 4.36: Entrada y de S .

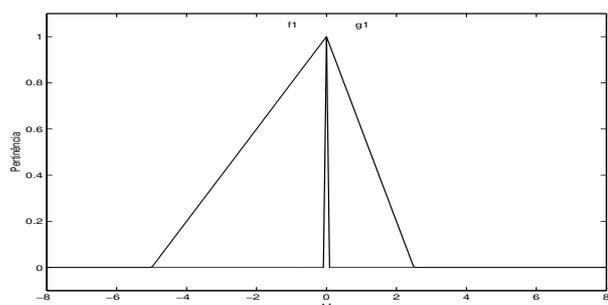


Figura 4.37: Saída Δ_1 de S .

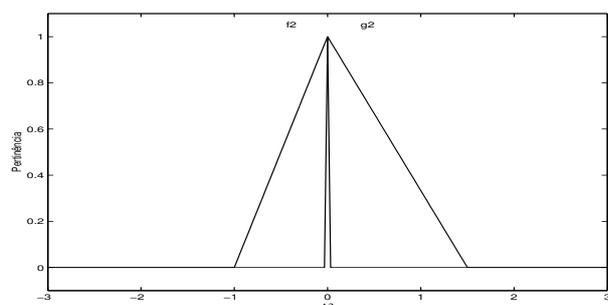


Figura 4.38: Saída Δ_2 de S .

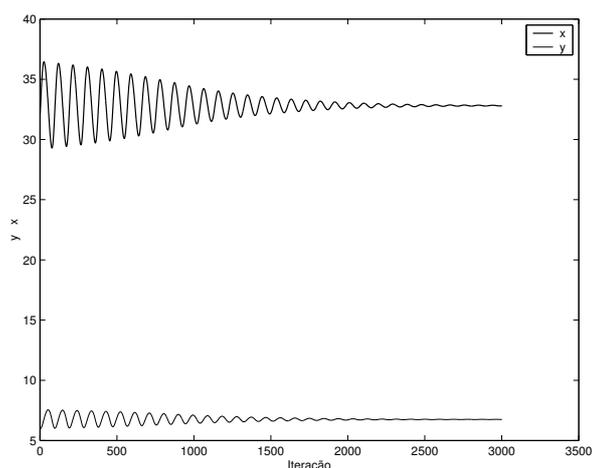


Figura 4.39: Trajetórias de x e y .

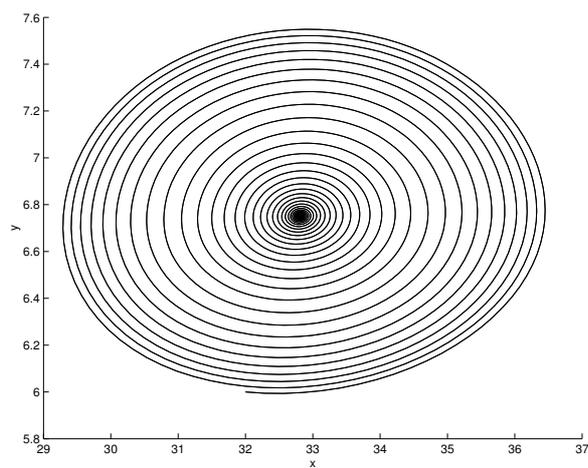


Figura 4.40: Plano de fase: $(x_o, y_o) = (32, 6)$.

Exemplo 2

Mudamos o sistema S , agora a saída Δ_1 e Δ_2 de S serão dadas respectivamente pelas Figuras 4.41 e 4.42. Chamemos este novo sistema de S' . Para este sistema, o ponto de equilíbrio é $(x^*, y^*) = (32.9957; 8.4653)$ e, neste ponto a matriz jacobiana é:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1.0045 & -0.7594 \\ 0.3742 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Os autovalores da matriz \mathbb{J} são os números complexos $\lambda_1 = 1.0023 + 0.533i$ e $\lambda_2 = 1.0023 - 0.533i$, portanto $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.1352$ o que mostra que o sistema S' é instável. Os resultados experimentais obtidos podem ser vistos nas Figuras 4.43 e 4.44, onde podemos observar a existência de um ciclo limite. Neste caso, usamos $(x_o, y_o) = (32, 8)$ como condição inicial.

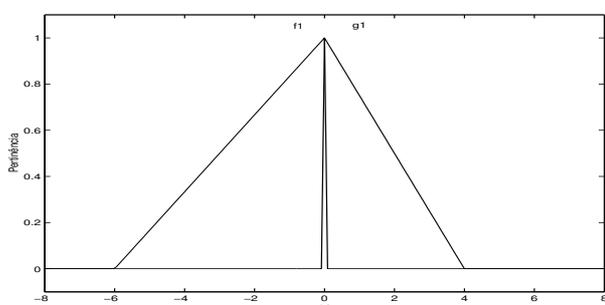


Figura 4.41: Saída Δ_1 de S' .

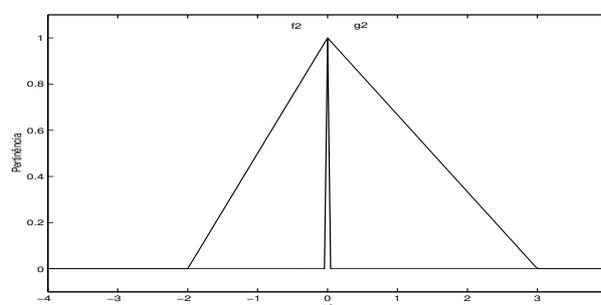


Figura 4.42: Saída Δ_2 de S' .

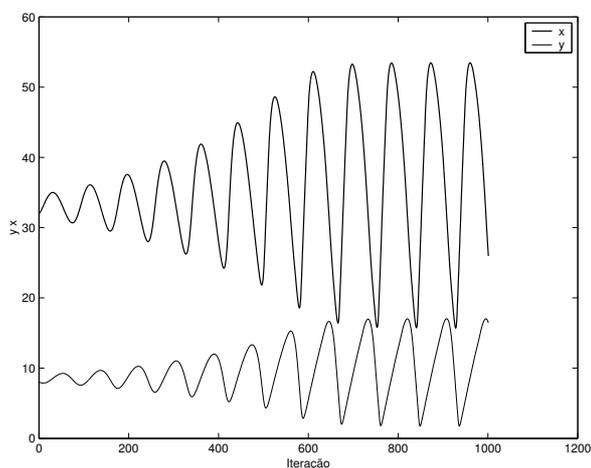


Figura 4.43: Trajetórias de x e y .

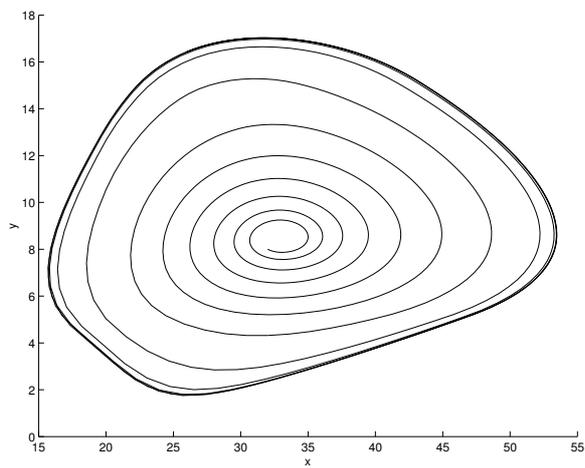


Figura 4.44: Plano de fase: $(x_o, y_o) = (32, 8)$.

Exemplo 3 - saídas simétricas

Mostraremos agora um exemplo onde as saídas são simétricas. Considere o sistema com variáveis de entrada x (Figura 4.45) e y (Figura 4.46) e variáveis de saída Δ_1 (Figura 4.47) e Δ_2 (Figura 4.48). O ponto de equilíbrio deste sistema é único, $(x^*, y^*) = (70, 17.5)$ e o sistema é divergente. Os resultados experimentais podem ser vistos nas Figuras 4.49 e 4.50

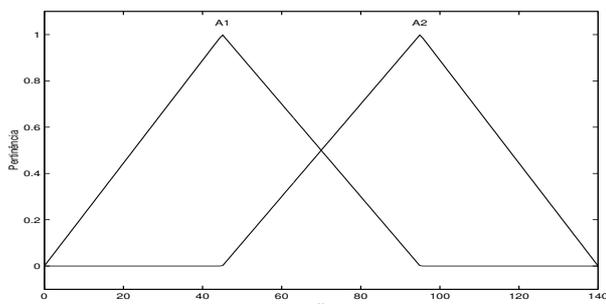


Figura 4.45: Entrada x .

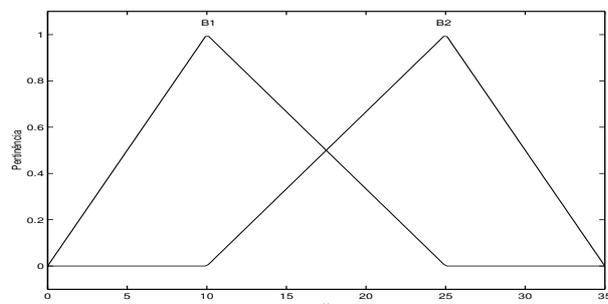


Figura 4.46: Entrada y .

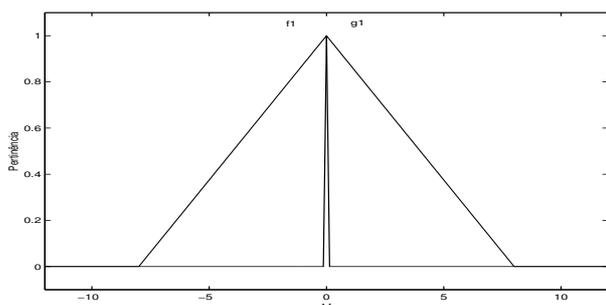


Figura 4.47: Saída Δ_1 .

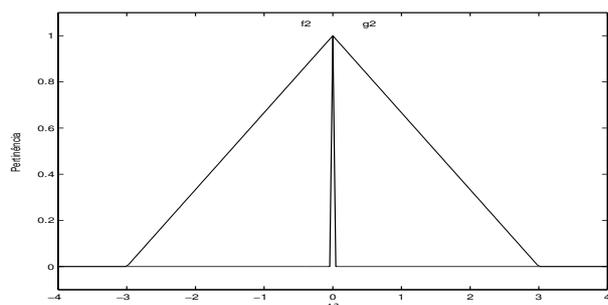


Figura 4.48: Saída Δ_2 .

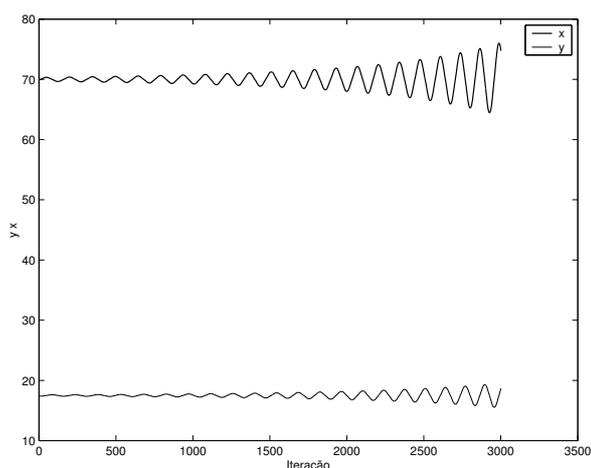


Figura 4.49: Trajetórias de x e y .

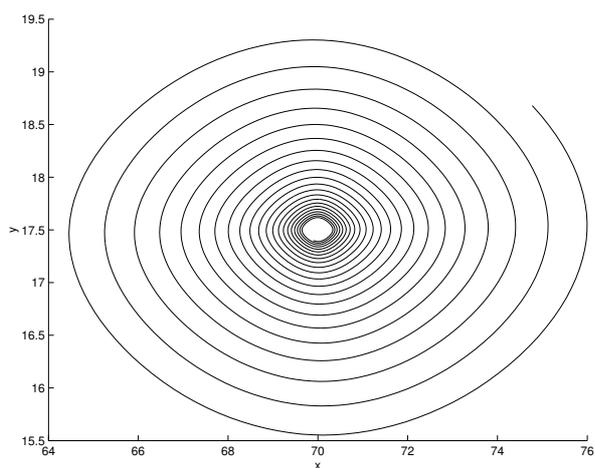


Figura 4.50: Plano de fase: $(x_o, y_o) = (69.9, 17.4)$

4.3 Resumo do capítulo

Neste Capítulo, apresentamos a análise de estabilidade dos sistemas p-fuzzy unidimensionais e bidimensionais. Vimos que as regras estão fixadas a estabilidade de um ponto de equilíbrio está associada à mudança do domínio da variável de saída do controlador ou à mudança das funções de pertinências associadas a estas variáveis.

No caso bidimensional, não fizemos a análise de estabilidade de todas as configurações ilustradas na Figura 4.19, mas acreditamos que a partir dos resultados apresentados é simples fazer a análise dos outros casos (Figura 4.19). Mostramos também que quando as funções associadas às variáveis de saídas são simétricas, os sistemas p-fuzzy bidimensionais do *Tipo 2* são instáveis.

Alguns dos resultados práticos, interessantes, deste capítulo são: a estabilidade de um sistema p-fuzzy bidimensional S depende da estabilidade do sistema unidimensional que fornece a coordenada para o ponto de equilíbrio de S , Proposições 4.3 e 4.4. Além disso, para sistemas unidimensionais a Proposição 4.1 fornece um algoritmo para encontrar o ponto de equilíbrio.

Capítulo 5

Aplicações em Biomatemática

Acreditamos que os sistemas dinâmicos p-fuzzy possam ser utilizados nas mais variadas áreas do conhecimento humano. Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações em Biomatemática. A partir das aplicações apresentadas poderemos constatar a eficácia, versatilidade e robustez da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. Além das aplicações contidas neste capítulo podemos citar trabalhos recentes do grupo de Biomatemática da Unicamp, como [7], [10], [13],[19], [24] e [28].

5.1 Sistemas p-fuzzy unidimensionais inibidos

Os sistemas p-fuzzy unidimensionais podem ser utilizados para modelar situações em que a variável de estado é crescente (respectivamente decrescente) com uma capacidade suporte (respectivamente limiar inferior). Por exemplo, consideremos o sistema p-fuzzy com as variáveis “população” (Figura 5.1) e “Variação” (Figura 5.2). Um sistema p-fuzzy unidimensional inibido tem como base de regra geral:

1. Se população é *Baixa*(B) então variação é *Baixa positiva*(Bp);
2. Se população é *Média baixa*(Mb) então variação é *Média positiva*(Mp);
3. Se população é *Média*(M) então variação é *Alta positiva*(Ap);
4. Se população é *Média alta*(Ma) então variação é *Média positiva*(Mp);
5. Se população é *Alta*(A) então variação é *Baixa positiva*(Bp);
6. Se população é *Altíssima*(Al) então variação é *Baixa negativa*(Bn);

Este sistema p-fuzzy pode ser utilizado para modelar situações que, na matemática clássica são descritas por modelos inibidos tais como: o de Gompertz, o de Verhulst, o de Von Bertalanffy, o Exponencial Assintótico etc. Além disso, a modelagem p-fuzzy pode

ser utilizada também para estimar parâmetros destes modelos clássicos.

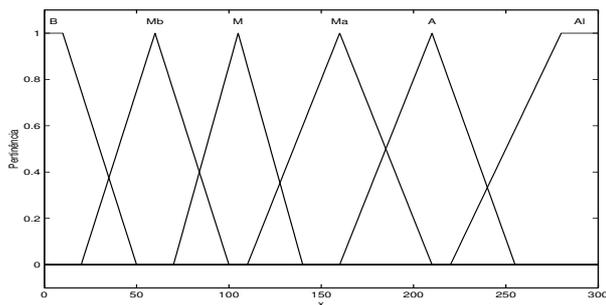


Figura 5.1: Variável fuzzy: população.

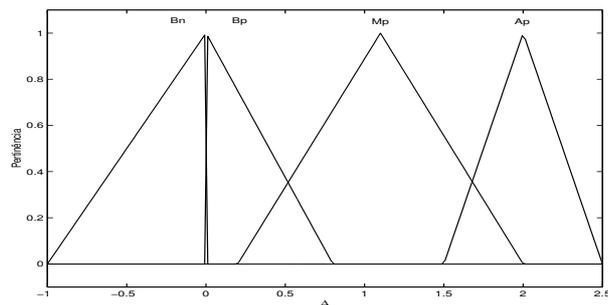


Figura 5.2: Variável fuzzy: variação.

Desenvolvemos um software [30], na linguagem de programação C++, que pode ser utilizado para estimar parâmetros a partir de um conjunto de dados tabelados. Na Figura 5.3, fornecida pelo software, podemos observar: no lado esquerdo, a tabela obtida a partir do modelo p-fuzzy (pontos amarelos), no centro da figura podem ser vistos, o gráfico dos dados tabelados e os gráficos dos modelos Verhulst (cor rosa), o de Von Bertalanffy (cor azul), o Exponencial Assintótico (cor verde), Gompertz (cor verde claro) e abaixo do gráfico aparece o nome do modelo imediatamente utilizado no software (neste caso o Exponencial Assintótico) seguido pela sua solução analítica, e na parte inferior direita da figura os valores dos parâmetros.

Como pode ser visto na Figura 5.3, neste caso, o modelo p-fuzzy (pontos amarelos) e o modelo Logístico (cor rosa) são muito “próximos”. Mas, obviamente com pequenas mudanças no modelo p-fuzzy poderíamos obter modelos próximos a qualquer um dos modelos aqui mencionados.

5.2 Sistemas interativos - p-fuzzy

Nesta seção, vamos apresentar sistemas p-fuzzy bidimensionais que podem ser utilizados para modelar interações entre duas populações. Veremos que os sistemas p-fuzzy bidimensionais podem ser utilizados tanto para modelar situações discretas quanto contínuas, a partir de uma base de regras fixa.

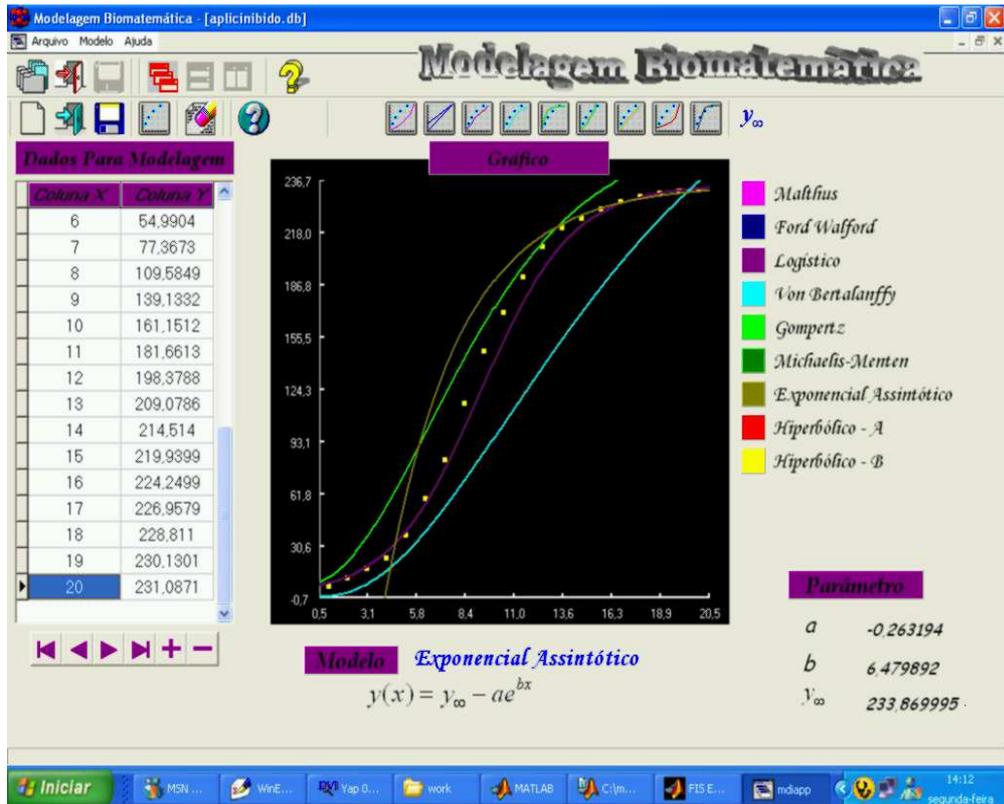


Figura 5.3: Saída do software.

5.2.1 Sistema presa-predador discreto

Sistema presa-predador discreto sem inibição

O modelo presa predador discreto, clássico, sem inibição é dado por:

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) + ax(n) - \alpha x(n)y(n) \\ y(n+1) = y(n) + by(n) - \beta x(n)y(n) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde x representa a população de presas e y a de predadores. As trajetórias deste sistema no plano de fase são curvas não fechadas, chamadas de ciclo ecológico discreto [4] (Figura 5.4) e o ponto de equilíbrio é um nó instável.

Então, para simular algo que possa ser descrito por este modelo, presa predador discreto, podemos utilizar, um sistema p-fuzzy que seja instável. Por exemplo, consideremos o sistema p-fuzzy com entradas x (presa, Figura 5.5) e y (predador, Figura 5.6) e saídas Vx (Variação de x , Figura 5.7) e Vy (Variação de y , Figura 5.8) e a base de regras:

1. Se x é Baixo e y é Baixo Então Vx é Médio Alto positivo e Vy é Médio Alto negativo;
2. Se x é Baixo e y é Médio alto Então Vx é Médio Baixo positivo e Vy é Alto negativo;
3. Se x é Baixo e y é Médio alto Então Vx é Baixo negativo e Vy é Alto negativo;

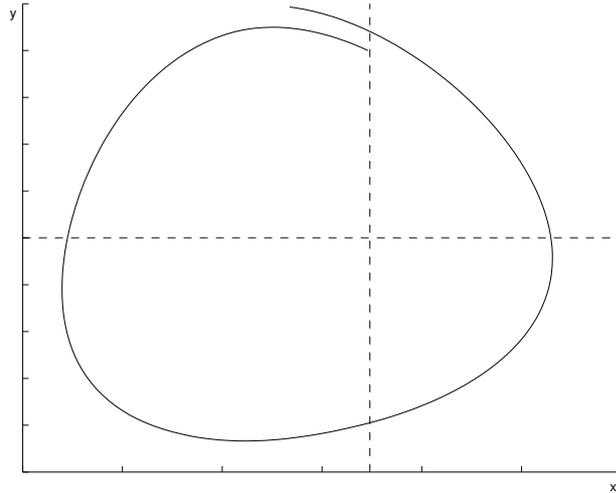


Figura 5.4: Plano de Fase: ciclo ecológico.

4. Se x é *Baixo* e y é *Alto* Então Vx é *Médio Alto negativo* e Vy é *Médio Alto negativo*;
5. Se x é *Médio baixo* e y é *Baixo* Então Vx é *Alto positivo* e Vy é *Baixo negativo*;
6. Se x é *Médio baixo* e y é *Médio baixo* Então Vx é *Baixo positivo* e Vy é *Baixo negativo*;
7. Se x é *Médio baixo* e y é *Médio alto* Então Vx é *Baixo negativo* e Vy é *Baixo negativo*;
8. Se x é *Médio baixo* e y é *Alto* Então Vx é *Médio Baixo negativo* e Vy é *Baixo negativo*;
9. Se x é *Médio alto* e y é *Baixo* Então Vx é *Alto positivo* e Vy é *Baixo negativo*
10. Se x é *Médio alto* e y é *Médio baixo* Então Vx é *Baixo positivo* e Vy é *Baixo positivo*;
11. Se x é *Médio alto* e y é *Médio alto* Então Vx é *Baixo negativo* e Vy é *Baixo positivo*;
12. Se x é *Médio alto* e y é *Alto* Então Vx é *Médio Baixo negativo* e Vy é *Baixo positivo*;
13. Se x é *Alto* e y é *Baixo* Então Vx é *Médio Alto positivo* e Vy é *Médio Alto positivo*;
14. Se x é *Alto* e y é *Médio baixo* Então Vx é *Baixo positivo* e Vy é *Médio Baixo positivo*;
15. Se x é *Alto* e y é *Médio alto* Então Vx é *Baixo positivo* e Vy é *Médio Baixo positivo*;
16. Se x é *Alto* e y é *Alto* Então Vx é *Médio Alto negativo* e Vy é *Baixo positivo*.

As trajetórias do modelo p-fuzzy podem ser vistas nas Figuras 5.9 e 5.10, onde pode-se observar as semelhanças com o modelo discreto clássico.

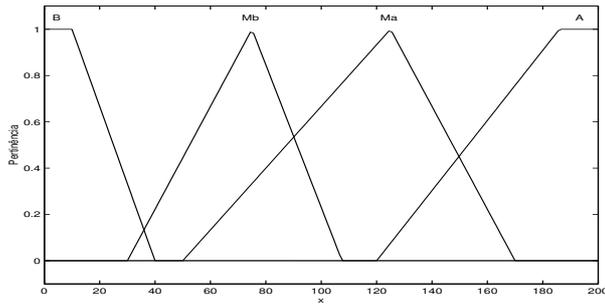


Figura 5.5: Entrada x - presas

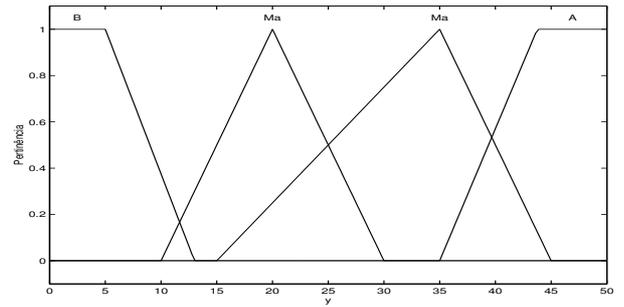


Figura 5.6: Entrada y - predadores.

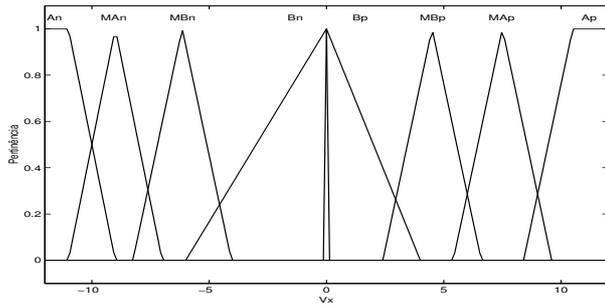


Figura 5.7: Variável de saída Vx .

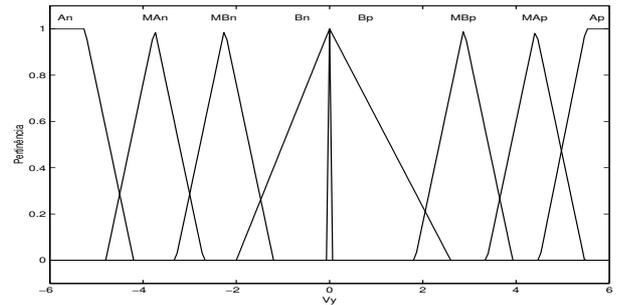


Figura 5.8: Variável de saída Vy .

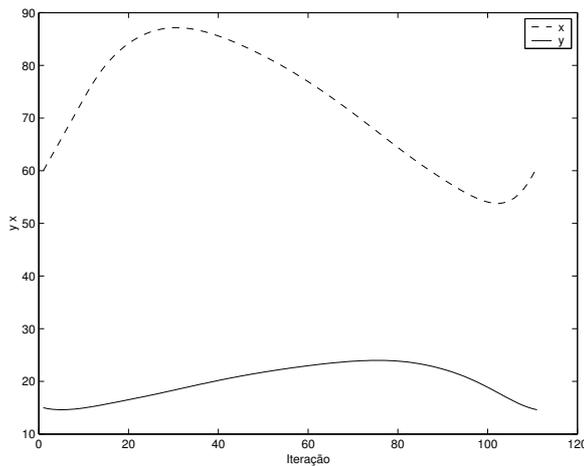


Figura 5.9: Gráfico $x \times n$ e $y \times n$.

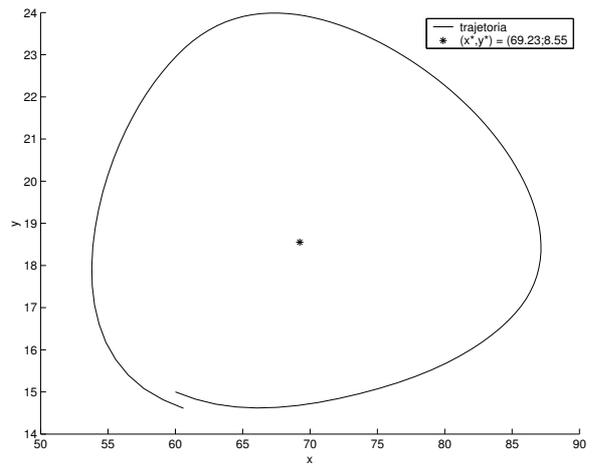


Figura 5.10: Plano de fase

Sistema presa-predador discreto inibido

No sistema presa predador discreto sem inibição, Equação 5.2, o crescimento intrínseco da população de presas é descrito pelo modelo de Malthus. Quando consideramos um modelo presa-predador inibido, tal como:

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) + \frac{ax(n)(K-x(n))}{K} - \alpha x(n)y(n) \\ y(n+1) = y(n) + by(n) - \beta x(n)y(n) \end{cases} \quad (5.2)$$

onde K é capacidade suporte. As trajetórias deste sistema, no plano de fase, convergem para um ciclo limite [14].

Para propor um modelo p-fuzzy para essa situação, faremos uma pequena mudança nos conjuntos fuzzy das variáveis de saídas do sistema presa-predador p-fuzzy sem inibição (dado anteriormente). Isto é, Vx será dado pela Figura 5.11 e Vy dado pela Figura 5.12. As Figuras 5.13 e 5.14 mostram os resultados experimentais, onde podemos observar a trajetória com condição inicial $(x_o, y_o) = (100, 20)$ convergindo para um ciclo limite.

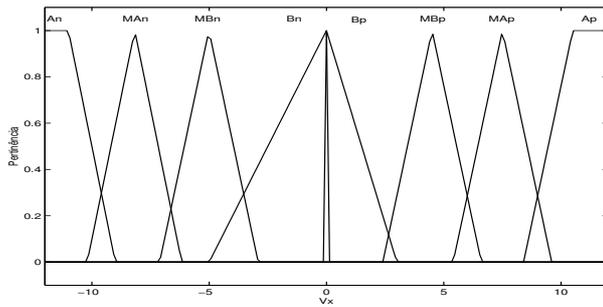


Figura 5.11: Saída Vx

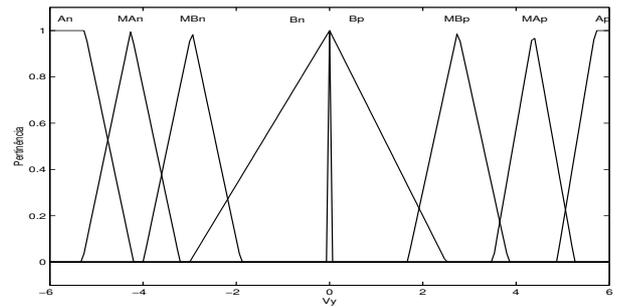


Figura 5.12: Saída Vy

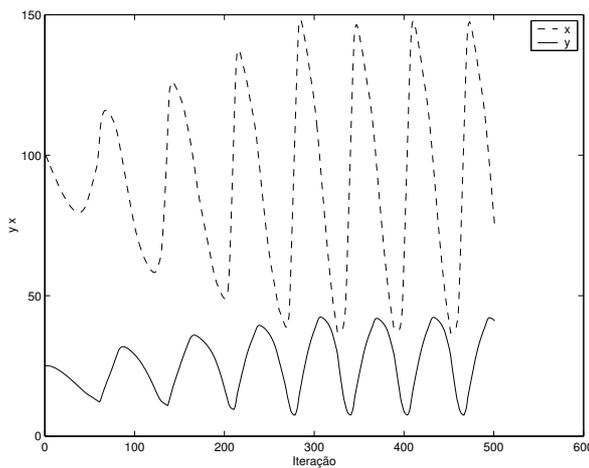


Figura 5.13: Trajetória do modelo

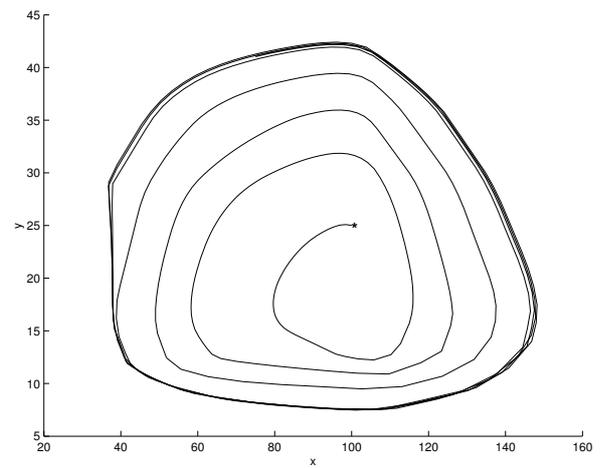


Figura 5.14: Plano de fase do modelo

5.2.2 Sistema presa-predador contínuo

Acreditamos que uma das grandes vantagens do modelo bidimensional p-fuzzy é sua versatilidade, apesar de ser discreto veremos que é possível utilizá-lo para simular situações descritas por modelos contínuos.

Sistema presa-predador contínuo sem inibição

O modelo clássico de Lotka-Volterra é dado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \quad (5.3)$$

onde x é a quantidade de presas, y é a quantidade de predadores. As trajetórias deste modelo no plano de fase são órbitas fechadas em volta do ponto de equilíbrio $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ [4] e duas trajetórias distintas não se interceptam. Com estas características, podemos propor o seguinte sistema p-fuzzy: considerando ainda, o sistema p-fuzzy dado no início desta seção, mudamos as saídas, agora Vx e Vy são dadas respectivamente pelas Figuras 5.15 e 5.16.

As Figuras 5.17 e 5.18 mostram as trajetórias obtidas. Podemos observar as órbitas fechadas igualmente como ocorre com o modelo clássico.

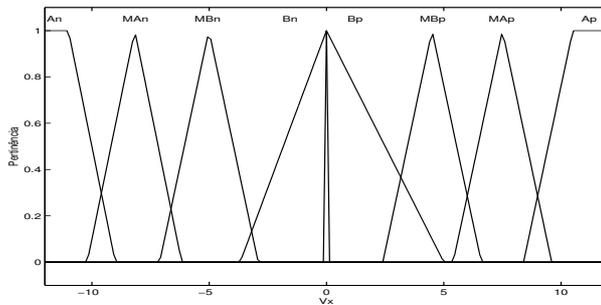


Figura 5.15: Saída Vx

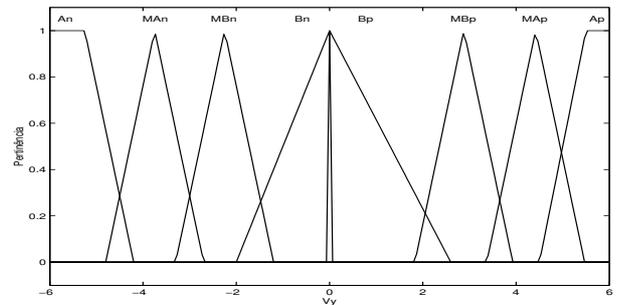


Figura 5.16: Saída Vy

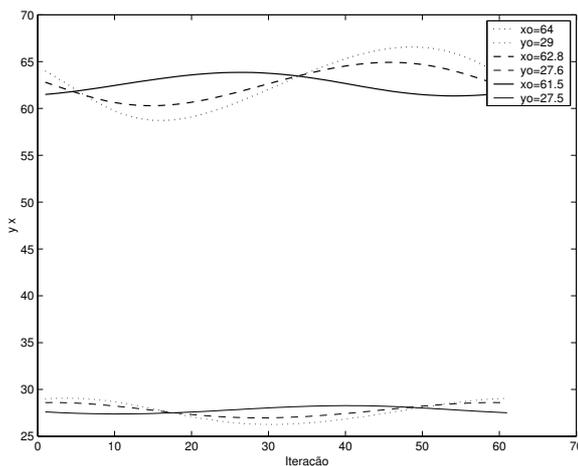


Figura 5.17: Gráfico $x \times n$ e $y \times n$

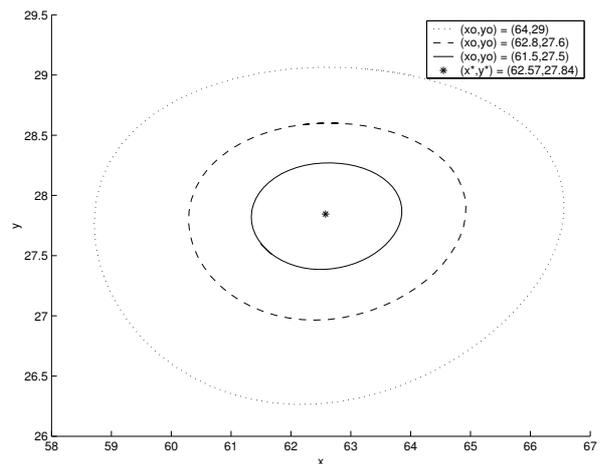


Figura 5.18: Plano de fase

Observação 5.1. *Uma observação interessante é que para obter os diferentes sistemas p-fuzzy desta seção, fizemos apenas pequenas modificações nas entradas e saídas do controlador. Ou seja, não foi necessário modificar a base regras destes sistemas.*

Após todos os exemplos dados até aqui, não é difícil acreditar que é possível modelar qualquer sistema clássico de interações entre duas espécies, por meio de sistemas p-fuzzy. Entretanto, para que não pareça qualquer dúvida sobre isto e presunção alguma, faremos mais dois exemplos na seção seguinte, estes em Epidemiologia.

5.2.3 Epidemiologia

O estudo de uma epidemia é fundamental para compreender sua evolução, estabilidade e controle [5]. Os modelos epidemiológicos mais simples são aqueles em que a população é dividida em apenas dois compartimentos: S - suscetíveis e I - infecciosos. Tais modelos são conhecidos na literatura como SI e SIS [29] e podem ter ou não dinâmica vital. Aqui vamos trabalhar apenas com os mais simples - sem dinâmica vital.

Sistema SI

O diagrama compartimentalizado do modelo SI é dado na Figura 5.19, onde β é o coeficiente de transmissão da doença.

O sistema de equações que descreve este modelo, normalizado, é dado por

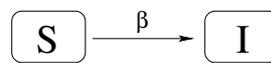


Figura 5.19: Diagrama compartimentalizado do modelo SI

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI \\ I_o \text{ dado} \end{cases}, \quad (5.4)$$

onde $S + I = 1$. Dada uma condição inicial (S_o, I_o) a solução analítica deste modelo é:

$$\begin{cases} S(t) = 1 - I(t) \\ I(t) = \frac{I_o e^{\beta t}}{S_o + I_o e^{\beta t}} \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (5.5)$$

Os pontos de equilíbrios deste modelo são $(0, 1)$ e $(1, 0)$, sendo que $(0, 1)$ é instável e $(1, 0)$ é assintoticamente estável [29]. Assim, propomos o seguinte modelo SI p-fuzzy: variável de entrada I com funções de pertinências dadas na Figura 5.20 e variável de saída VI , Figura 5.21 e base de regras (típica de um sistema p-fuzzy unidimensional inibido):

1. Se I é Baixo Então VI é Baixa
2. Se I é Médio baixo Então VI é Média baixa
3. Se I é Médio alto Então VI é Média Baixa
4. Se I é Média Então VI é Alta
5. Se I é Alto Então VI é Baixo

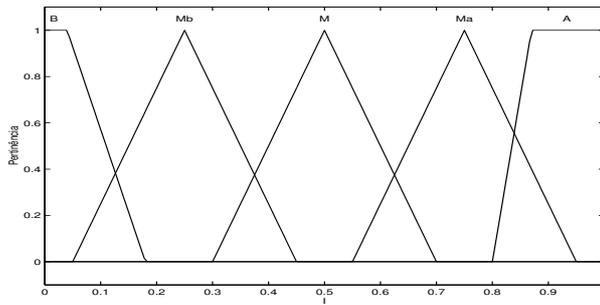


Figura 5.20: Entrada I do modelo SI

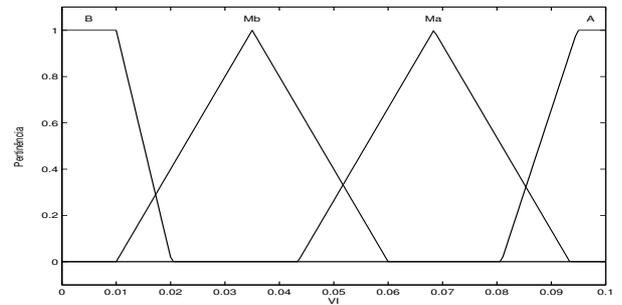


Figura 5.21: Saída VI do modelo SI

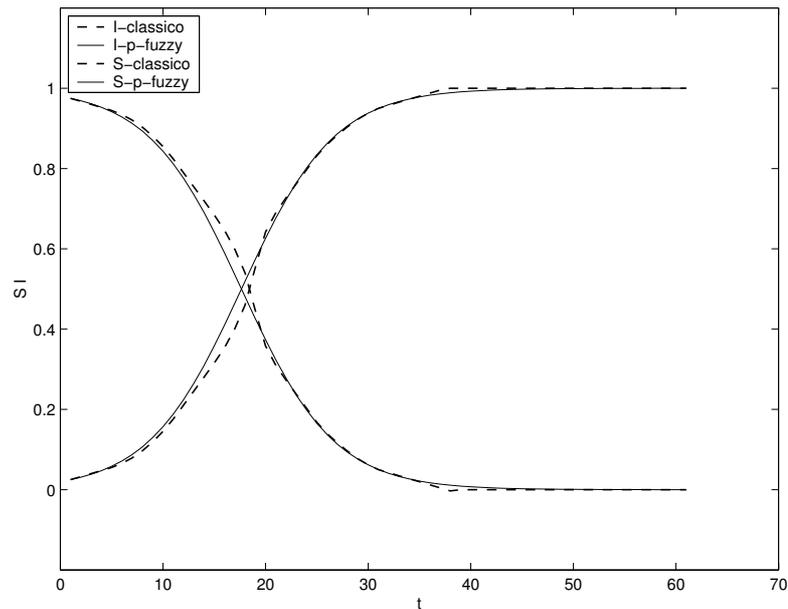


Figura 5.22: Soluções do modelo SI determinístico e p-fuzzy

A partir do modelo p-fuzzy, utilizamos o software [30] e obtivemos $\beta = 0.22$ (Equação 5.5). Daí, usando o software Matlab obtivemos a Figura 5.22 que mostra os gráficos das curvas S e I determinísticos (linha contínua) e os gráficos de S e I p-fuzzy (linha tracejada), onde pode-se observar as semelhanças entre as soluções dos modelos.

No modelo SI determinístico o ponto estável é $(1, 0)$. Observe que o valor 1 é máximo

do domínio da variável fuzzy I (Figura 5.20). Então, não é possível utilizar um conjunto viável de equilíbrio (conforme Definição 2.3), cujo número 1 seja ponto de equilíbrio deste conjunto. Em situações extremas como esta, propomos as duas alternativas: aumentamos o domínio da variável I e procedemos como nos casos anteriores ou, como a estabilidade é assintótica, fixamos $VI = 0$ quando tivermos $I > 1$, o que forçará a convergência para 1. Optamos pela última alternativa.

Sistema SIS

O diagrama compartimentalizado do modelo SIS é dado na Figura 5.23, onde β é o coeficiente de transmissão da doença e γ é o coeficiente de recuperação dos infecciosos.



Figura 5.23: Diagrama compartimental do modelo SIS

O sistema de equações que descreve este modelo, normalizado, é dado por

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ I_o \text{ dado} \end{cases}, \quad (5.6)$$

onde $S + I = 1$. Dada uma condição inicial (S_o, I_o) , a solução analítica deste modelo é:

$$\begin{cases} I(t) = \frac{\beta - \gamma}{\beta + (\frac{\beta - \gamma}{I_o} - \beta)e^{-(\beta - \gamma)t}} \\ S(t) = 1 - I(t) \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (5.7)$$

Os pontos de equilíbrios deste modelo SIS são $(\frac{\gamma}{\beta}, 1 - \frac{\gamma}{\beta})$ e $(1, 0)$, sendo que $(1, 0)$ é instável e $(\frac{\gamma}{\beta}, 1 - \frac{\gamma}{\beta})$ é assintoticamente estável. Do ponto de vista biológico, tem-se $\beta \geq \gamma$ [29]. Observe que neste caso, por ser $\beta \geq \gamma$, então $1 - \frac{\gamma}{\beta} < 1$. Portanto, aqui não temos o problema apresentado no modelo SI , estudado anteriormente.

Após análise matemática realizada acima, propomos o seguinte modelo SIS p-fuzzy: variável de entrada I , cujas funções de pertinência são dadas na Figura 5.24 e variável de saída VI , com funções de pertinências dadas na Figura 5.25. Usaremos a mesma base de regras utilizada para o sistema p-fuzzy SI , dada anteriormente. As soluções do modelo p-fuzzy podem ser vistas na Figura 5.26. Pode-se observar a curva contínua representando a solução I e a curva pontilhada representando a solução S . Estas curvas são parecidas com as soluções do modelo SIS clássico (veja, [29]).

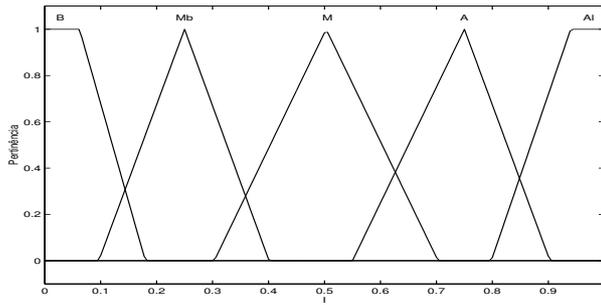


Figura 5.24: Variável I do modelo SIS

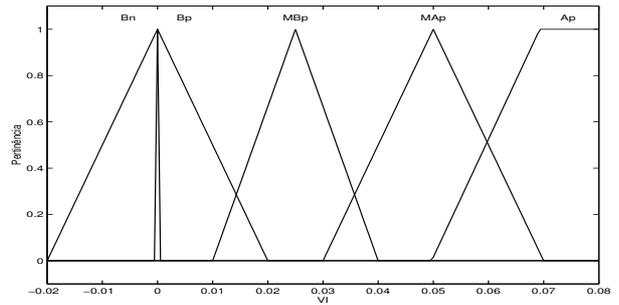


Figura 5.25: Variável VI do modelo SIS

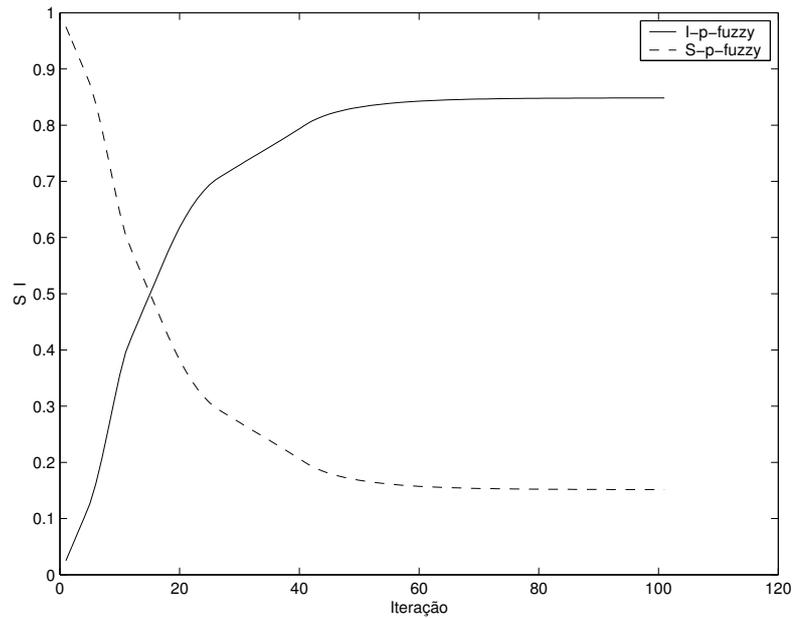


Figura 5.26: Soluções do modelo SIS p-fuzzy

5.3 Conclusões do capítulo

As aplicações contidas neste capítulo mostram a potencialidade dos sistemas p-fuzzy. Obviamente, fizemos poucas aplicações, mas acreditamos que estas possam servir de base para outras aplicações.

Acreditamos ainda que alguns dos resultados apresentados neste capítulo só foram possíveis devido ao estudo realizado nos capítulos anteriores, onde podemos perceber como funciona o sistema baseado em regras fuzzy e então modelarmos com mais convicção e maturidade. Por exemplo, devido a esta maturidade podemos encontrar os resultados descritos nas Figuras 5.17 e 5.18.

Conclusões

Apresentaremos aqui, conclusões gerais sobre o trabalho, visto que as principais conclusões específicas já foram apresentadas nos finais de cada Capítulo.

Desenvolvemos novos conceitos e técnicas para modelagem usando sistemas baseados em regras fuzzy. Encontramos resultados analíticos sobre a estabilidade dos sistemas p-fuzzy unidimensionais e bidimensionais, apresentados nos Capítulos 2, 3 e 4. Enunciamos e demonstramos diversos teoremas que estabelecem condições de existência, unicidade de ponto de equilíbrio e condições para análise de estabilidade deste ponto. Além dos resultados analíticos, fizemos diversos experimentos computacionais dados através de exemplos nos Capítulos 2, 3 e 4. Fizemos ainda algumas aplicações, dadas no Capítulo 5 o que sugere formas possíveis para modelar determinadas situações concretas.

As soluções obtidas dos sistemas p-fuzzy são aparentemente mais grosseiras em comparação com as determinísticas, mas são mais realistas, pois englobam toda a subjetividade descrita por um especialista do fenômeno estudado. Além disso, quanto mais informação se têm sobre o fenômeno, mais próximas da realidade são as soluções. Acreditamos que uma das grandes vantagens do sistema p-fuzzy é sua versatilidade, na medida em que, mesmo sendo discreto, é capaz de modelar situações descritas por modelos clássicos contínuos, como vimos na seção 5.2.2.

Na realização deste trabalho usamos como método de defuzzificação o método centro de gravidade, por ser o mais utilizado na literatura.

Para realizarmos este trabalho usamos o software Matlab. Fizemos vários programas neste ambiente. Mas, algumas dificuldades merecem ser citadas, por exemplo, para simular o contra-exemplo na Seção 2.5.6 tivemos que fazer diversos programas, pois no Toolbox do Matlab não é possível trabalhar com uma função do tipo da função apresentada na Figura 2.25 (lado direito). Uma outra dificuldade é encontrar a região de equilíbrio, achamos que com o “diagrama de fase” essa tarefa torna-se mais fácil.

Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros podemos citar os seguintes:

Sistema dinâmico p-fuzzy com controle

O uso de sistemas p-fuzzy para controle, por exemplo, é feito através de sistemas baseados em regras fuzzy com duas variáveis de entrada e uma variável de saída. Acreditamos que os sistemas p-fuzzy possam ser utilizados para modelar este tipo de problema.

Bifurcações em sistemas dinâmicos p-fuzzy

Quando estudamos a estabilidade dos sistemas p-fuzzy, no Capítulo 4, vimos que uma simples mudança no domínio da variável de saída do controlador ou uma mudança nas funções de pertinências das saídas ou das entradas do controlador mudam a estabilidade do ponto de equilíbrio. Também se mudarmos o método de defuzzificação pode ocorrer mudanças no ponto de equilíbrio (apesar de ainda continuar pertencendo ao mesmo conjunto viável de equilíbrio) e em sua estrutura de estabilidade. Então, seria interessante descobrir em que condições há bifurcações, ou em que condições é melhor usar um ou outro método para que haja estabilidade etc.

Sistemas com mais de um ponto de equilíbrio

Pretendemos usar a teoria desenvolvida aqui para simular aplicações determinísticas que descrevem fenômenos que possuem mais de um ponto de equilíbrio. Sistemas com dois pontos de equilíbrio estáveis são comuns em fenômenos biológicos.

Desenvolvimento de um software que auxilie na modelagem de sistemas p-fuzzy

Acreditamos que para tirar melhor proveito, do ponto de vista computacional, da teoria matemática desenvolvida, é importante construir um software que seja capaz de: gerar os diagramas de fase, identificar pontos de equilíbrio e sua análise de estabilidade, trabalhar com uma diversidade maior de subconjuntos fuzzy, além de realizar todas as tarefas feitas pelo toolbox fuzzy do Matlab.

Pensando nisso, dos vários experimentos feitos no Matlab, sempre que possível, não utilizamos ferramentas prontas deste aplicativo, de forma que estes programas podem ser convertidos para linguagem C++ (ou outra!) muito rapidamente. Já começamos a desenvolver este software, na linguagem C++.

Referências Bibliográficas

- [1] Barros, L. C. *Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos*. Dissertação de mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas-SP.
- [2] Barros, L.C. e Bassanezi, R. C. *Tópicos em Lógica Fuzzy e Aplicações em Biomatemática.*, 2005 - No prelo.
- [3] Bassanezi, R. C. *Ensino aprendizagem com modelagem matemática*, Contexto, 2002.
- [4] Bassanezi, R. C. e Ferreira, W. C. J. *Equações diferenciais com Aplicações*. Ed. Harba, S. Paulo, 1988
- [5] Barros, L. C., Bassanezi, R. C., Oliveira, R. Zotin G., LEITE, M. *A Disease Evolution Model with Uncertain Parameters*. Computers and mathematics, Joint 9° IFSA World Congress and 20° NAFIPS Int. Conference, 2001, Vancouver, 2001. p.1626 - 1630.
- [6] Leite, M. B. F, Bassanezi, R. C. e Barros, L. C. *A Disease Evolution Model with Uncertain Parameters*. An Inter. Journ. Computers and Mathematics with applications. Estados Unidos: v.45, p.1619 - 1628, 2003.
- [7] Bassanezi, R. C. e Pompeu, Jr. G. *Um estudo de modelagens alternativas: Podridão de Maçã*. Biomatemática, XV (2005), pp.97-118.
- [8] Burden, R.L. and Faires, J.D. *Análise Numérica*. Thomson 2003.
- [9] Capra, Fritjof., *The web of Life*, Cultrix, 1996
- [10] Castanho, M. J. P. *Construção e Avaliação de um Modelo Matemático para Predizer a Evolução do Câncer de Próstata e Descrever seu Crescimento Utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy*. Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, Campinas-SP, 2005.
- [11] Cuesta, F. e Gordillo, F. *Stability Analysis of Nonlinear Multivariable Takagi-Sugeno Fuzzy Control Systems*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.7, No.5, Oct. 1999.
- [12] Deitel, H. M. and Deitel, P.J. *C++ How to program*. 3ed. Editora Bookman, 2002.

- [13] Dias, M. R. B. e Barros, L. C. *O Uso de Controladores Fuzzy para Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias*, Biomatemática, XV (2005), 147-156.
- [14] Edelstein-Keshet, L. *Mathematical Models in Biology*, Birkhäuser Mathematics, Macgraw-Hill, México, 1988.
- [15] E. H. Mamdani and S. Assilian, *Applications of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant*, Pro. IEEE, vol.121, No.12, pp.1585-1588, 1974.
- [16] Feng, G. *Stability Analysis of Discrete-Time Fuzzy Dynamic Systems Based on Piecewise Lyapunov Functions*. IEEE, Trans. on Fuzzy Systems, Vol.12, No.1 Feb. 2004
- [17] Fullér, R., *Neural Fuzzy Systems*, Abo, 1995
- [18] Gupta, M. M. *Energetic Stability of Dynamic Systems*. IEEE, Trans. on Fuzzy Systems, Man, and Cybernetics, Vol.smc-15, No.6 Nov/Dec. 1985.
- [19] Jafelice, R. M. *Modelagem Fuzzy para Dinâmica de Transferência de Soropositivos para HIV em Doenças Plenamente Manifestas*. Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, Campinas-SP, 2003.
- [20] Klir, G. and Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.
- [21] Kreyszig, R. *Introduction functional analysis with applications*. Ed. John Wiley & Sons, USA, 1989.
- [22] Lima, E. L., *Curso de análise*, Projeto Euclides, V.1, 2002.
- [23] Lima, E. L., *Curso de análise*, Projeto Euclides, V.2, 1999.
- [24] Magnago, K. F. *Abordagem Fuzzy em Modelos Populacionais Discretos: Metapopulação de Moscas Varejeiras*, Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, Campinas-SP, 2005.
- [25] Mikael, J., Anders, R., and Karl, E. A. *Piecewise Quadratic Stability of Fuzzy Systems*. IEEE, Trans. on Fuzzy Systems, Vol.7, No.6 Dec. 1999.
- [26] Misukoshi, M. T. *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy* . Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas-SP, 2004.
- [27] Murray, J. D. *Mathematical Biology*, Springer, New York, 1989.

- [28] Peixoto, M. Silva. *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um Estudo da Dispersão da Morte dos Citros em São Paulo*, Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, Campinas-SP, 2005.
- [29] Quarteli, M. T. *Estudos de Modelos Epidemiológicos Determinísticos Básicos em Doenças Causadas por Microparasitas*. Tese de Mestrado, PPGMAP-UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [30] Silva, J. D. M. e Bassanezi, R. C. *Um Software para Modelagem de Fenômenos Biológicos*, Biomatemática XIV (2004), 51-53.
- [31] Sugeno, M. e Tanaka, K. *Successive Identification of Fuzzy Model and its Applications to Prediction of a Complex System*. Fuzzy Sets and Systems Vol.42, pp.315-334. 1991.
- [32] T. Takagi and M. Sugeno, *Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control*. IEEE Trans. Syst. Man Cybern, vol. SMC -15, pp.116-132, Jan, 1985.
- [33] Tanaka, K., Griffin, M. F e Wang, H. O. *An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues*. IEEE, Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4, No.1 Feb. 1996.
- [34] Tanaka, K. e Sugeno, M. *Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*. Fuzzy Sets and Systems, vol.45 pp.135-156, 1992.
- [35] Tanaka, K. e Sano, M. *Concept of Stability Margin for Fuzzy Systems and Design of Robust Fuzzy Controllers*. In IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, pp.29-34, San Francisco California, 1993.
- [36] Vries, G. de, et al. *A Short Course in Mathematical Biology*, 2002.
- [37] Ying, H. *Structure and Stability Analysis of General Mamdani Fuzzy Dynamic Models*. International Journal of Intelligent Systems, Vol.20, 2005, pp. 103-125.
- [38] Zadeh, L. A., *Fuzzy sets*. Information and Control **8** (1965), 338-353.
- [39] Ortega, N., Barros, L. C., and Massad, E. *Fuzzy gradual rules in epidemiology* Kybernetes, Vol.32 No.4, 2003, pp.460-477.