

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Sobre um Teorema de Bernstein e
Algumas Generalizações**

por

Lien Kuan Min¹

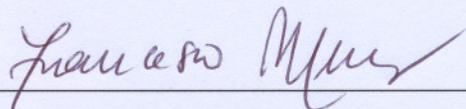
Orientador: Prof. Dr. Francesco Mercuri

¹Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Sobre um Teorema de Bernstein e Algumas Generalizações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Lien Kuan Min** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de fevereiro de 2006.



Prof. Dr. Francesco Mercuri.

Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Francesco Mercuri.
2. Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti.
3. Prof. Dr. Valério Ramos Batista.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **IMECC**, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRADO EM MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Min, Lien Kuan

M66s Sobre um teorema de Bernstein e algumas generalizações / Lien
Kuan Min -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Francesco Mercuri

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfícies mínimas. 2. Bernstein, Teorema de. 3. Geometria
diferencial. I. Mercuri, Francesco. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Título em inglês: On a Bernstein theorem and some generalizations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Minimal surfaces. 2. Bernstein theorem. 3.
Differential geometry.

Área de concentração: Geometria diferencial

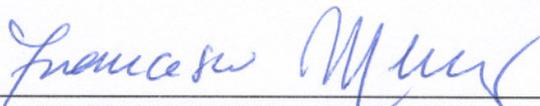
Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti (USP)
Prof. Dr. Francesco Mercuri (IME-UNICAMP)
Prof. Dr. Valério Ramos Batista (IME-UNICAMP)

Data da defesa: 24/02/2006

Dissertação de Mestrado defendida em 24 de fevereiro de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI



Prof. (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI



Prof. (a). Dr (a). VALERIO RAMOS BATISTA

Agradecimento

A Deus, que sempre está abrindo caminhos para mim.

Ao meu pai, Lien Wen Ta e à minha mãe, Wu Yu Hua, pelas constantes confianças e apoios durante todo esse tempo.

Ao prof. Dr. Francesco Mercuri pela orientação, paciência e pela escolha do tema da dissertação.

Aos professores do IMECC/UNICAMP pela minha formação durante a graduação e o mestrado, em especial, quero muito agradecer ao prof. Dr. José Luiz Boldrini pela orientação em iniciação científica durante dois anos na graduação.

À secretaria de Pós-Graduação, em especial a Cidinha, Tânia e Ednaldo.

As turmas da matemática da Unicamp de 2000 e do programa de Pós-graduação pela amizade, companhia e por toda ajuda.

A CNPq, pelo apoio financeiro.

A banca examinadora pelas correções e sugestões valiosas.

*Ao meu pai Lien Wen Ta
À minha mãe Wu Yu Hua*

Resumo

O teorema de Bernstein é um marco importante na teoria das superfícies mínimas. Nesta dissertação apresentaremos três demonstrações deste teorema, cada uma levando a generalizações em diferentes direções.

Abstract

The Bernstein's theorem is an important landmark in the theory of the minimal surfaces. In this dissertation we will present three demonstrations of this theorem, each one leading to generalizations in different directions.

Índice

Agradecimento	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	vii
Capítulo 1. Elementos da Teoria das Subvariedades	1
1. Os conceitos fundamentais	1
2. Exemplos	5
3. A fórmula da primeira variação	8
Capítulo 2. Superfícies Mínimas em Forma não Paramétrica	13
1. Alguns teoremas sobre funções inteiras	13
2. O Teorema de Jörgens	14
3. O Teorema de Bernstein: uma primeira demonstração	18
4. Existência de coordenadas isotérmicas em superfícies mínimas	19
Capítulo 3. Superfícies Mínimas em Forma Paramétrica	21
1. A representação de Weierstrass	21
2. Exemplos	26
3. Geometria dos dados de Weierstrass	28
4. A aplicação normal de Gauss: O Teorema de Ossermann	31
5. O Teorema de Bernstein: uma segunda demonstração.	34
Capítulo 4. Estabilidade	35
1. Superfícies mínimas estáveis	35
2. O Teorema de do Carmo-Peng	36
3. O Teorema de Bernstein: uma terceira demonstração.	39
Apêndice A.	41
1. O Laplaciano	41

2. Desigualdades	48
Índice Remissivo	49
Bibliografia	51

Introdução

É geralmente admitido que o estudo das superfícies mínimas foi iniciado pelo matemático italiano Lagrange em 1760. Ele considerou o seguinte problema:

Dados um aberto limitado $U \subseteq \mathbb{R}^2$ com fronteira ∂U , uma curva diferenciável¹, uma função $g : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável, e o conjunto $\mathcal{F}_g = \{f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável e } f|_{\partial U} = g\}$, achar o(s) mínimo(s) do funcional área:

$$A : \mathcal{F}_g \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A(f) = \int_{\bar{U}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.^2$$

A idéia de Lagrange para resolver o problema foi a seguinte:

Suponhamos que f seja uma solução do problema. Dada uma função diferenciável $\eta : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\eta|_{\partial U} = 0$, consideramos $f^{(t)} = f + t\eta$ e a função da variável real t :

$$A_\eta(t) = A(f^{(t)}).$$

Sendo $f = f^{(0)}$ uma solução do problema, temos

$$A'_\eta(0) = 0.$$

Derivando e integrando por partes a expressão

$$(1) \quad A(t) = \int_{\bar{U}} \sqrt{1 + (f^{(t)})_x^2 + (f^{(t)})_y^2} dx dy$$

e lembrando que $\eta|_{\partial U} = 0$, obtém-se

$$(2) \quad A'_\eta(0) = - \int_{\bar{U}} \left(\operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) \eta = 0,$$

onde ∇f é o gradiente da função f e div é o operador divergência.

¹Assumiremos, por simplicidade, diferenciabilidade de classe C^∞ . Na maioria dos casos seria suficiente muito menos.

² Os subscriptos denotam derivadas parciais em relação às variáveis indicadas.

É fácil ver que a condição $A'_\eta(0) = 0 \quad \forall \eta$, com $\eta|_{\partial U} = 0$, implica que f é solução da equação

$$(3) \quad \operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} = 0.$$

ou ainda, desenvolvendo os cálculos, da equação:

$$(4) \quad f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0,$$

Era o nascimento do *Cálculo das Variações*. A equação (3) é chamada de *equação de Euler-Lagrange do problema variacional, ou também, equação das superfícies mínimas*.

Lagrange abandonou o problema logo depois e não se preocupou nem em demonstrar a existência de soluções nem em dar exemplos, a não ser as funções lineares, que são soluções óbvias da equação.

Vale a pena observar que, *a priori*, ser solução da equação (3) é condição necessária para a função f ser solução do problema, mas não suficiente. De fato, o cálculo acima garante somente que f é ponto crítico do funcional área, não necessariamente um mínimo. Acontece que uma solução de (3) é um mínimo do funcional, mas isso precisa ser demonstrado.

Cerca de quinze anos depois, o matemático francês Meusnier, trabalhando no conceito de curvatura de uma superfície regular do \mathbb{R}^3 , deu uma interpretação geométrica da equação das superfícies mínimas. Mais precisamente, ele considerou uma superfície $M \subseteq \mathbb{R}^3$ e um ponto $x \in M$. Fixado um vetor unitário normal N , para cada vetor unitário tangente $v \in T_x M$ ele considerou o plano paralelo a N e v , passando por x , π_v , e a curva seção $M \cap \pi_v$. Indicando com k_v a curvatura da curva seção, ele demonstrou que k_v tem, ao variar v , um mínimo absoluto k_m e um máximo absoluto k_M . Ele considerou então as duas quantidades:

- $K = k_m k_M$ (curvatura gaussiana),
- $H = \frac{1}{2}(k_m + k_M)$ (curvatura média),

e demonstrou que a superfície tem curvatura média $H = 0$ se, e somente se, considerada (localmente) como gráfico sobre o plano tangente, é solução da equação das superfícies mínimas.

0.1. OBSERVAÇÃO. Gauss também se interessou pelo conceito de curvatura de uma superfície e estava a par dos conceitos de curvatura média e gaussiana. Mas, segundo a sua filosofia, não se deviam introduzir definições a menos que não estivessem *grávidas de teoremas*. Ele tinha muitos resultados importantes sobre a curvatura gaussiana, por exemplo o

Teorema Egregium, o Teorema Elegantissimum (forma local do famoso Teorema de Gauss-Bonnet), mas não tinha teoremas sobre a curvatura média e, por isso, não se interessou muito pelo conceito.

A partir deste momento, superfícies com curvatura média nula foram chamadas de *superfícies mínimas*, mesmo não sendo, em geral, mínimos do funcional área. Este ponto de vista tem a vantagem de permitir considerar, não somente superfícies que são gráficos de funções diferenciáveis, mas mais em geral, superfícies imersas em \mathbb{R}^3 .

No século XVIII, a pesquisa sobre superfícies mínimas foi essencialmente dirigida ao estudo de propriedades locais de tais superfícies, assim como a construção de exemplos. Na segunda metade do século XVIII, o físico belga Plateau considerou o problema das películas de sabão. Mais precisamente, ele considerou uma curva fechada simples, feita de um material rígido, digamos arame. Imergindo esta curva em uma solução de água e sabão, quando retirada, ela é a fronteira de uma superfície (película de sabão) que, pelo princípio de Laplace, deve ser uma superfície mínima.³ Isso era considerada uma prova experimental da existência de soluções da equação (3). Vários matemáticos famosos como Riemann, Weierstrass e Schwarz se envolveram no problema tentando demonstrar “matematicamente” a existência de soluções do problema de Plateau. Os resultados obtidos na época foram muito parciais. Por exemplo, o caso de algumas curvas poligonais. O problema era que se procuravam soluções explícitas, as quais são extremamente difíceis de se obter. O primeiro resultado geral nesta linha foi obtido pelo matemático americano Douglas e pelo matemático húngaro Radó, independentemente, por volta de 1930. Eles demonstraram que dada uma curva simples fechada em \mathbb{R}^3 , existe uma função do disco 2-dimensional em \mathbb{R}^3 , tal que a imagem da fronteira do disco é a curva dada e a imagem do interior é uma superfície mínima. Em geral é bastante complicado saber se existem outras superfícies mínimas, topologicamente distintas do disco, cuja fronteira é a curva dada. Também um problema interessante, e não completamente resolvido, é a regularidade na fronteira de tais soluções.

Um dos primeiros resultados não triviais de natureza global sobre superfícies mínimas foi obtido por Bernstein por volta de 1915:

0.2. TEOREMA. (*Bernstein*) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação das superfícies mínimas, então f é afim⁴.

³Com conceitos que vamos introduzir ao longo deste trabalho, trata-se de uma superfície mínima estável.

⁴Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *afim* se é linear a menos de uma constante aditiva, i. e. se as coordenadas de $f(x_1, \dots, x_n)$ são polinômios de primeiro grau nas variáveis $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Parece que a demonstração original de Bernstein tinha falhas e uma demonstração completa do teorema somente apareceu por volta de 1950.

É interessante observar a analogia do Teorema de Bernstein com outros teoremas sobre soluções de equações diferenciais definidas em todo o plano. Por exemplo o Teorema de Liouville, que garante que funções holomorfas, soluções da equação de Cauchy-Riemann, definidas em todo o plano e limitadas no infinito, são constantes. Porém, no Teorema de Bernstein, *não há condições sobre o comportamento no infinito*. A analogia entre os resultados não é casual: a teoria das superfícies mínimas, como veremos, está estritamente ligada à teoria das funções holomorfas de uma variável complexa.

A finalidade principal desta dissertação é dar algumas provas do Teoremas de Bernstein, assim como demonstrar alguns resultados que generalizam este teorema. De fato, o Teorema de Bernstein sugere algumas generalizações naturais, muitas das quais têm problemas interessantes ainda em aberto. Vamos discutir algumas delas.

1. O problema de Bernstein em dimensão alta

A equação das superfícies mínimas (3) faz sentido para funções de n variáveis. É portanto natural propor o seguinte problema:

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a equação das superfícies mínimas

$$(5) \quad \operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} = 0$$

é necessariamente uma função afim?

0.3. OBSERVAÇÃO. Soluções da equação (5) têm uma interpretação geométrica análoga àquela para $n = 2$. Mais precisamente, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tem gráfico de área n -dimensional mínima em relação aos gráficos de todas as funções que coincidem com f em ∂U , então f é solução da equação (5).

Respostas positivas (parciais) a esta pergunta foram dadas por de Giorgi ($n = 3$) em 1965, por Algrim ($n = 4$) em 1966, e Simons ($n \leq 7$) em 1968. Em um trabalho bastante famoso [4] de 1969, Bombieri, De Giorgi e Giusti mostraram a existência de soluções não afins de (5) para $n \geq 8$.

Em 1970, Giusti escreveu um artigo [13] relatando os resultados do artigo com Bombieri e de Giorgi, assim como alguns resultado sobre o Teorema de Bernstein n -dimensional, com

hipóteses adicionais. Ele deu o seguinte título ao trabalho: “*Vida e morte do problema de Bernstein*”. Nesta dissertação queremos também discutir as “reencarnações” do problema!

De fato, mesmo nesta linha de pensamento, temos um problema óbvio ainda em aberto. No trabalho em questão é demonstrada a existência de soluções não afins da equação (5) para $n \geq 8$. A idéia é demonstrar que existem sub e super soluções que convergem a uma solução não afim. *Ainda não se conhecem soluções explícitas (não afim) da equação (5)*.

Vale a pena observar que as técnicas nos casos $n = 2$ e $n \geq 3$ são completamente diferentes. No primeiro caso pode-se usar técnicas oriundas da teoria das funções holomorfas, técnicas que entretanto não se aplicam ao caso de dimensão maior. No segundo caso são, geralmente, usadas técnicas de teoria geométrica da medida.

2. A aplicação normal de Gauss

Dada uma superfície orientada M imersa em \mathbb{R}^3 , a aplicação de Gauss é a aplicação que associa a cada ponto $x \in M$ o vetor unitário normal positivo $N(x) \in S^2$. Como veremos ao longo do trabalho, M é mínima se e somente se esta aplicação é “holomorfa”, em certo sentido. A tendência das funções holomorfas é de serem sobrejetoras (lembrar do Teorema de Liouville, ou do Teorema de Picard). É portanto natural estudar o “tamanho” da imagem da aplicação normal de Gauss, obviamente sob certas hipóteses de natureza global. Assumiremos portanto que M é uma superfície mínima *completa*. Isto significa que (a imagem de) M é um subconjunto fechado do \mathbb{R}^3 . Sob estas condições, Osserman demonstrou, em 1963, que a imagem da aplicação de Gauss é densa na esfera, ou M é um plano (i.e. a aplicação é constante). Subseqüentemente, Xavier demonstrou, em 1981, que se a aplicação de Gauss omite 7 pontos, então M é um plano. Finalmente Fujimoto demonstrou, em 1988, que se a imagem omite 5 pontos, então M é um plano. O resultado de Fujimoto é o melhor possível pois existem muitas superfícies mínimas completas cuja aplicação normal de Gauss omite exatamente quatro pontos (por exemplo, a superfície de Scherk).

O Teorema de Osserman implica no Teorema de Bernstein, pois a normal ao gráfico $(x, y) \longrightarrow (x, y, f(x, y))$ é dada, a menos da escolha da orientação, por:

$$N(x, y) = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}},$$

e portanto não pode ser densa, pois cobre no máximo um hemisfério.

No caso de hipersuperfícies $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, muito pouco é conhecido. É claro que os resultados tipo Osserman-Xavier-Fujimoto não podem valer em dimensão alta, pela existência de contra-exemplos ao problema de Bernstein. O único resultado conhecido sobre o problema da imagem da aplicação de Gauss em dimensão alta é um resultado de Solomon (1975). Ele mostrou que se a aplicação normal de Gauss de uma hipersuperfície mínima completa $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ omite uma vizinhança de uma esfera $S^{(n-2)} \subseteq S^n$, então M é um hiperplano.

Aqui, de novo, vale a pena observar que as técnicas usadas no caso $n = 2$ são oriundas da teoria das funções holomorfas, que não podem ser utilizadas no caso $n \geq 3$.

Também os resultados de Salomon nos fornecem, como veremos, provas alternativas dos Teoremas de Bernstein n -dimensionais, sob condições no infinito.

3. Estabilidade

Em geral podemos caracterizar superfícies mínimas $M \subseteq \mathbb{R}^3$ como aquelas superfícies em que dado um domínio relativamente compacto $U \subseteq M$ e uma variação U_t de U tal que $\partial U = \partial U_t$, temos $A'(0) = 0$ com $A(t) = \text{área}(U_t)$.

Diremos que M é uma *superfície mínima estável* se para qualquer tal variação temos $A''(0) > 0$.

Uma das propriedades importantes dos gráficos mínimos é que eles são *estáveis*. É portanto natural perguntar-se se uma superfície mínima completa estável é necessariamente um plano. A esta pergunta foi dada uma resposta afirmativa por do Carmo e Peng em 1981 e por Fischer-Colbrie e Shoen, em um contexto um pouco mais geral, na mesma época.

Isso implica, de novo, no Teorema de Bernstein.

No caso de hipersuperfícies, a afirmação não pode ser verdade em geral pela existência de gráficos mínimos não planos. Porém o problema está ainda em aberto para as dimensões $3 \leq n \leq 8$. Recentemente Nelli e Rosenberg têm provado resultados parciais para $n = 3, 4$ e Santos e outros para $n = 8$.

CAPÍTULO 1

Elementos da Teoria das Subvariedades

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos básicos da teoria das subvariedades do espaço Euclidiano, essencialmente para estabelecer as notações e produzir exemplos que serão importantes para o trabalho.

1. Os conceitos fundamentais

Seja M^n uma variedade n -dimensional e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão. Sendo f localmente um mergulho, vamos identificar, para todas as considerações de caráter local, a variedade com sua imagem.

Vamos considerar duas situações essencialmente equivalentes:

- M^n é uma variedade riemanniana e f é uma *imersão isométrica*, i.e.:

$$\langle df(X), df(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

- f é uma imersão e induz uma métrica riemanniana em M ,

$$\langle X, Y \rangle := \langle df(X), df(Y) \rangle,$$

de tal maneira que f torna-se uma imersão isométrica.

O espaço tangente a \mathbb{R}^N em $f(x)$, $x \in M$, se decompõe como soma direta de $df(T_x M)$ e de seu complemento ortogonal, que denotaremos $\nu_x M$ e chamaremos de *espaço normal a M em x* . Identificando $T_x M$ com sua imagem $df(T_x M)$, escreveremos

$$T_x \mathbb{R}^N = T_x M \oplus \nu_x M.$$

Se $U \subseteq M$ é um aberto, denotaremos por $\mathcal{H}(U)$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis tangentes a M definidos em U . Denotaremos com $\mathcal{H}^\perp(U)$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis definidos em U e normais a M , i.e. aplicações diferenciáveis $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ tais que $\xi(x) \in \nu_x(M)$.

Seja $Y \in T_x M$ e $U \subseteq M$ uma vizinhança de x . Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função diferenciável e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ um campo diferenciável, i.e. $X(x) \in T_{f(x)} \mathbb{R}^N$. Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = Y$. Definimos as *derivadas direcionais*:

- $Y(f) := \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$.
- $\bar{\nabla}_Y X := \frac{d}{dt}|_{t=0} X(\gamma(t))$.

É bem conhecido nos cursos de Cálculo que as quantidades acima não dependem da escolha da curva γ . Além disso, se $Y \in \mathcal{H}(U)$, fazendo x variar em U obtém-se uma função diferenciável $Y(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$ e um campo diferenciável $\bar{\nabla}_Y X : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, respectivamente.

Sejam agora $U \subseteq M$ um aberto e $X, Y \in \mathcal{H}(U)$. Denotamos por $\nabla_Y X$ a projeção de $\bar{\nabla}_Y X$ sobre o espaço tangente a M . O operador

$$\nabla : \mathcal{H}(U) \times \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U), \quad \nabla(X, Y) := \nabla_Y X,$$

chama-se de *conexão de Levi-Civita*, ou *conexão riemanniana*, ou ainda *derivada covariante de X na direção de Y* .

1.1. TEOREMA. *O operador ∇ é o único operador que goza das seguintes propriedades:*

- (1) ∇ é \mathbb{R} -bilinear,
- (2) se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

$$\nabla_{fY} X = f \nabla_Y X, \quad \nabla_Y fX = f \nabla_Y X + Y(f)X,$$

- (3) $Y\langle X, Z \rangle = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle$,
- (4) $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$.

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio que o operador $\bar{\nabla}$ goza das propriedades correspondentes. As propriedades para ∇ obtém-se projetando as propriedades correspondentes para $\bar{\nabla}$. Para a unicidade, vamos considerar campos tangentes X, Y, Z . Pela terceira propriedade temos:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$Y\langle X, Z \rangle = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle,$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Somando as primeiras duas identidades e subtraindo a terceira, obtemos, pela quarta propriedade:

$$(6) \quad 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

Portanto $\nabla_X Y$ é univocamente determinado em termos do produto escalar e do produto de Lie.

■

1.2. OBSERVAÇÃO. A fórmula (6) chama-se de *fórmula de Kozul*. Ela nos diz que ∇ depende somente da métrica em M e não da imersão. Isso é essencialmente o conteúdo do famoso Teorema Egregium de Gauss.

Sejam, de novo, $X, Y \in \mathcal{H}(U)$. Denotaremos por $\alpha(X, Y)$ a projeção de $\bar{\nabla}_Y X$ sobre o espaço normal a U . Chamaremos α de *segunda forma fundamental*.

1.3. LEMA. α é simétrica e bilinear em relação às funções.

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que, se $X, Y \in \mathcal{H}(M)$, então $[X, Y] \in \mathcal{H}(M)$. A simetria segue-se então da propriedade (4) em 1.1. Seja agora $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Pela definição de α e pela linearidade de ∇ e $\bar{\nabla}$ em relação às funções na primeira variável (por (2) em 1.1), temos $\alpha(fX, Y) = f\alpha(X, Y)$. ■

Sejam agora $X \in \mathcal{H}(U)$, $\xi \in \mathcal{H}^\perp(U)$. Denotaremos por $-A_\xi X$ e $\nabla_X^\perp \xi$, as projeções tangente e normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, respectivamente. O operador A_ξ chama-se *operador de Weingarten na direção ξ* ou também *operador de forma*. É fácil ver que este operador é linear em relação às funções. O operador ∇^\perp é chamado de *conexão normal* e goza das propriedades análogas às três primeiras propriedades da conexão de Levi-Civita.

Resumindo temos:

$$(7) \quad \bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \alpha(X, Y) \quad (\text{Fórmula de Gauss}),$$

$$(8) \quad \bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \quad (\text{Fórmula de Weingarten}).$$

Os operadores α e A_ξ são relacionados pelo seguinte resultado¹:

1.4. LEMA. Se $X, Y \in \mathcal{H}(U)$, $\xi \in \mathcal{H}^\perp(U)$, então:

$$\langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle = \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y \rangle = \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle,$$

onde, na segunda igualdade, usamos o fato que $\langle Z, W \rangle = 0$ implica $0 = X\langle Z, W \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Z, W \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_X W \rangle$. ■

¹Isso justifica a escolha do sinal menos na definição de A_ξ .

Sendo α uma forma bilinear simétrica, A_ξ é um operador simétrico e portanto diagonalizável. Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de A_ξ , $A_\xi(E_i) = k_i E_i$. Os vetores E_i são chamados de *direções principais (na direção ξ)* e os autovalores k_i de *curvaturas principais (na direção ξ)*.

Consideramos agora $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ uma base ortonormal de $\nu_x M$ com, $p = N - n$.

1.5. LEMA. *O vetor:*

$$H := \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^p \text{traço}(A_{\xi_i}) \xi_i$$

é bem definido, i.e. não depende da base escolhida, e diferenciável.

DEMONSTRAÇÃO. Usando o lema anterior temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \langle \alpha(E_i, E_i), \xi_j \rangle \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \langle A_{\xi_j} E_i, E_i \rangle \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^p \text{traço}(A_{\xi_j}) \xi_j. \end{aligned}$$

Agora $\text{traço}(A_{\xi_j}) = \sum_{i=1}^n \langle A_{\xi_j} E_i, E_i \rangle$ não depende da escolha da base $\{E_i\}$ e portanto $\sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i)$ também não depende desta escolha, o que mostra a primeira parte do lema. A diferenciabilidade segue-se da linearidade de α e da diferenciabilidade dos E_i 's. ■

1.6. DEFINIÇÃO.

- *O vetor H definido no lema anterior chama-se vetor curvatura média.*
- *$f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma imersão mínima ou uma subvariedade mínima se $H = 0$.*

Um caso particular é o caso de hipersuperfícies, i.e. $N = n + 1$. Neste caso existem, exatamente dois vetores normais unitários em $\nu_x M$, $\forall x \in M$. Supondo M orientada, podemos escolher um deles, digamos $\underline{\mathbf{n}}(x)$, tal que se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é uma base positiva de $T_x M$, então $\{E_1, \dots, E_n, \underline{\mathbf{n}}(x)\}$ é uma base positiva de $T_{f(x)} \mathbb{R}^N$. Assim fica definida uma aplicação diferenciável

$$\underline{\mathbf{n}} : M \rightarrow S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \|z\| = 1\}.$$

A aplicação $\underline{\mathbf{n}}$ chama-se *aplicação normal de Gauss*.

Observamos que os hiperplanos $T_x M$ e $T_{\underline{\mathbf{n}}(x)} S^n$ são paralelos pois têm o mesmo vetor normal. A menos de identificar estes hiperplanos temos:

1.7. LEMA.

$$d\underline{\mathbf{n}}(x) = -A_\xi.$$

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que $\langle \xi, \xi \rangle = 1$ implica $0 = X \langle \xi, \xi \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle$. Portanto $\bar{\nabla}_X \xi \in T_x M$. Pela fórmula de Weingarten (8) temos

$$d\underline{\mathbf{n}}(X) = \bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

■

Ainda no caso de hipersuperfícies podemos introduzir a *função curvatura média*:

$$h(x) = \langle H(x), \underline{\mathbf{n}}(x) \rangle.$$

Observamos que o sinal da curvatura média depende da escolha de $\underline{\mathbf{n}}$, mas o vetor curvatura média $H = h\underline{\mathbf{n}}$ não depende desta escolha.

2. Exemplos

Nesta seção vamos discutir os conceitos apresentados na seção anterior em alguns exemplos básicos.

Consideremos, em \mathbb{R}^{n+1} , a base canônica $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ e as coordenadas canônicas associadas $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$.

2.1. Subvariedades totalmente geodésicas. Lembramos que uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma geodésica se $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Estas curvas são as que têm comprimento mínimo entre todas as curvas que unem os mesmos pontos extremos, se os extremos são suficientemente próximos. Além disso, elas são parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, i.e., $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{const.}$

É muito simples ver que no caso de um subespaço afim de \mathbb{R}^N as geodésicas são segmentos de retas.

Uma subvariabilidade será dita *totalmente geodésica* se suas geodésicas são geodésicas do espaço ambiente, i.e. segmentos de retas. O fato a seguir é bem conhecido e de fácil demonstração:

1.8. PROPOSIÇÃO. *Uma subvariedade M^n de \mathbb{R}^N é totalmente geodésica se, e somente se, a segunda forma fundamental é identicamente nula. Neste caso, se M for conexa, é um aberto de um subespaço afim.*

2.2. Hipersuperfícies totalmente umbílicas. Consideremos a esfera de raio r , $S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$. Temos então:

- $T_x S^n(r) = x^\perp = \{Y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle Y, x \rangle = 0\}$,
- $\nu_x S^n(r) = \text{ger}\{x\}$.

A aplicação normal de Gauss é dada por:

$$\underline{\mathbf{n}}(x) = -r^{-1}x$$

e o operador de Weingarten é dado por:

$$A_{\underline{\mathbf{n}}(x)} = -d\underline{\mathbf{n}}(x) = r^{-1}\mathbb{1}.$$

Dada uma hipersuperfície $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, um ponto $x \in M$ é dito *umbílico* se o operador de Weingarten é um múltiplo de $\mathbb{1}$. Se todos os pontos são umbílicos, M é dita totalmente umbílica. Para tais hipersuperfícies temos o seguinte resultado²:

1.9. PROPOSIÇÃO. *Se $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é conexa e totalmente umbílica, então é um aberto de um hiperplano ou de uma esfera.*

2.3. Hipersuperfícies de revolução. No plano $\pi = \text{ger}\{e_1, e_{n+1}\}$ consideremos uma curva regular $\gamma(t) = (x_1(t), 0, \dots, 0, x_{n+1}(t))$, $t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Suponhamos $x_1(t) \neq 0 \ \forall t \in (a, b)$. Consideramos o grupo $G = SO(n)_{(n+1)}$ das isometrias lineares de \mathbb{R}^{n+1} que fixam o ponto e_{n+1} . O grupo G é então o grupo das rotações ao redor do eixo $\{te_{n+1}\}$. Deixando G atuar em γ obtém-se uma hipersuperfície $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, chamada *hipersuperfície de revolução gerada por γ* .

Em termos de parametrizações locais, esta hipersuperfície pode ser descrita como segue. Consideramos uma parametrização $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n = \text{ger}\{e_1, \dots, e_n\}$. Então

$$\tilde{\psi} : \Omega \times (a, b) \longrightarrow M^n, \quad \tilde{\psi}(s_1, \dots, s_{n-1}, t) = x_{n+1}e_{n+1} + x_1(t)\psi(s_1, \dots, s_{n-1}),$$

é uma parametrização local de M^n .

Vamos agora calcular as direções e curvaturas principais. Seja $T(t) = \dot{\gamma}(t)$ e suponhamos que γ seja parametrizada pelo comprimento de arco, i.e. $\|T(t)\| = 1$. Observamos que o vetor normal unitário $\underline{\mathbf{n}}(t)$, no ponto $\gamma(t)$ é, a menos do sinal, o vetor unitário do plano $\text{ger}\{e_1, e_{n+1}\}$ ortogonal a $T(t)$. Fixada oportunamente a orientação, temos

$$\underline{\mathbf{n}}(t) = (-\dot{x}_{n+1}(t), 0, \dots, 0, \dot{x}_1(t)).$$

²Para uma demonstração veja-se [11].

Sendo $T(t) \in \text{ger}\{e_1, e_{n+1}\}$, $\bar{\nabla}_T T \in \text{ger}\{e_1, e_{n+1}\}$. Como $T(t)$ é unitário, então $\bar{\nabla}_T T$ é perpendicular a $T(t)$. Portanto

$$\bar{\nabla}_T T = \lambda(t)\underline{\mathbf{n}}(t),$$

onde $\lambda = \langle \bar{\nabla}_T T, \underline{\mathbf{n}} \rangle$ é a curvatura da curva γ em $\gamma(t)$. Segue-se então que $T(t)$ é direção principal, com curvatura principal $\lambda(t)$.

Sejam agora $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ campos ortonormais (locais) tangentes à órbita Σ_t , que é uma esfera de raio $r(t) = x_1(t)$ no hiperplano que passa por $\gamma(t)$ e é ortogonal a e_{n+1} , com normal unitária neste hiperplano. Portanto, como exemplo na seção anterior,

$$\bar{\nabla}_{X_i} X_j = -\delta_{ij}r(t)^{-1}e_1 + Y, \quad Y \in T_{\gamma(t)}\Sigma_t.$$

Conseqüentemente,

$$\alpha(X_i, X_j) = -\delta_{ij}r(t)^{-1}\langle e_1, \underline{\mathbf{n}}(t) \rangle \underline{\mathbf{n}}(t).$$

Segue-se então que os X_i são direções principais com a mesma curvatura principal

$$\mu(t) = r(t)^{-1}\langle e_1, \underline{\mathbf{n}}(t) \rangle.$$

Observamos agora que o grupo G atua como grupo de isometrias do ambiente. Isso implica que as curvaturas principais são constantes ao longo da órbitas, assim como a curvatura média. Como conseqüência temos que a hipersuperfície é mínima se e somente se

$$\lambda + (n-1)\mu = 0.$$

Em muitos casos a curva γ é dada como gráfico sobre o eixo de revolução, i.e., $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ com $x_{n+1}(t) = t$. Neste caso a curvatura de γ é dada por $k = \ddot{x}_1(1 + \dot{x}_1^2)^{-\frac{3}{2}}$ (veja por exemplo [10]). Portanto as curvaturas principais da hipersuperfície de revolução escrevem-se como

$$\lambda = k = \ddot{x}_1(1 + \dot{x}_1^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \mu = -(x_1)^{-1}(1 + \dot{x}_1^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Em particular, a hipersuperfície é mínima se, e somente se

$$x_1\ddot{x}_1 - (n-1)(1 + \dot{x}_1^2) = 0.$$

Se $n = 2$, a solução geral da equação é dada por:

$$x_1 = a \cosh(a^{-1}t + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Estas curvas são chamadas de *catenárias*³ e a superfície de revolução obtida é chamada *catenóide n -dimensional* ou simplesmente de *catenóide*. Temos a seguinte caracterização dos catenóides:

1.10. TEOREMA. *Se $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima conexa de revolução, então $f(M)$ é um aberto de um plano ou de um catenóide.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja γ a curva que gera M . Se $\dot{\gamma}(t)$ é paralelo a $e_1 \ \forall t$, obviamente $f(M)$ está contido em um plano perpendicular ao eixo de revolução. Se não for este o caso, $\dot{\gamma}(t_0)$ não é paralelo a e_1 para algum t_0 , e por continuidade, em uma vizinhança de t_0 . Nesta vizinhança γ pode ser parametrizada como gráfico sobre o eixo e_{n+1} . Pelo argumento anterior $f(M)$ coincide, em uma vizinhança de $\gamma(t_0)$, com um catenóide. No capítulo 3 demonstraremos que superfícies mínimas são analíticas. Pela analiticidade e a conexão de M , $f(M)$ coincide com um aberto deste catenóide. ■

2.4. A equação dos gráficos mínimos. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Neste caso a aplicação $x \in \Omega \rightarrow (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é uma parametrização de uma hipersuperfície, denominada *parametrização gráfica*. Não é difícil ver que uma tal hipersuperfície é mínima se e somente se

$$(9) \quad \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) = 0.$$

A equação acima é chamada de *equação das hipersuperfícies mínimas*. Se $n = 2$ a equação reescreve-se como

$$(10) \quad f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0,$$

que é chamada também de *equação das superfícies mínimas*.

3. A fórmula da primeira variação

Seja M^n uma variedade riemanniana orientada, $\{E_i\}$ uma base positiva de campos ortogonais definidos em um aberto $U \subseteq M$ e $\{\phi_i\}$ sua base dual, i.e. $\phi_i(E_j) = \delta_{ij}$. Consideremos em U a n -forma:

$$dM = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

³Elas representam o perfil de uma corrente pendurada em dois pontos.

A forma dM não depende da base escolhida. De fato, se $\{\psi_j\}$ é outra base para as 1-formas, temos

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n = \det(A)\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n,$$

onde A é a matriz da mudança de base. Portanto, se as duas bases são ortonormais e positivas, $A \in SO(n)$ e $\det(A) = 1$.

A observação anterior permite definir dM globalmente. De fato, na intersecção de dois abertos onde podemos realizar a construção acima, as formas correspondentes devem coincidir. Assim dM é definida em toda M e chama-se *forma volume*. Quando $n = 2$ chamaremos a forma volume também de *forma área*.

O volume de uma região $D \subseteq M$ é dado por

$$\text{Vol}(D) = \int_D dM,$$

onde a integral é a usual de n -formas em variedades n -dimensionais.

1.11. LEMA. *Se $U \subseteq M$ é um aberto coordenado com coordenadas $\{x_i\}$, temos em U*

$$dM = [\det(g)]^{\frac{1}{2}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

onde $g = (g_{ij})$ é a matriz da métrica, i.e. $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{E_i\}$ uma base ortonormal. Então $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j a_{ij} E_j$ onde $A = (a_{ij})$ é a matriz mudança de base. Temos também

$$g_{ik} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle = \sum_{j,l} a_{ij} a_{kl} \langle E_j, E_l \rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj}.$$

Em particular,

$$(11) \quad g = (g_{ik}) = AA^t.$$

Se $\{\phi_i\}$ é a base dual de $\{E_i\}$ e $\{dx_j\}$ é a base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$, temos

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n = \det(A^t) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

A conclusão segue-se do fato que, por (11), $\det(A) = [\det(g)]^{\frac{1}{2}}$. ■

1.12. DEFINIÇÃO. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão e $D \subseteq M$ um domínio com fronteira diferenciável. Uma variação de f em D é uma função diferenciável*

$$F : \overline{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

tal que, denotando $F^{(t)} : D \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F^{(t)}(x) := F(x, t)$, temos

- (1) $F^{(0)} = f$,
 (2) $F^{(t)}$ é uma imersão.

Uma variação F é dita própria se $F^{(t)}(y) = f(y) \quad \forall y \in \partial D, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

1.13. OBSERVAÇÃO. Se D é relativamente compacto a condição que $F^{(t)}$ seja uma imersão é sempre verificada para ϵ suficientemente pequeno.

Associado a uma variação temos o *campo variacional*

$$W(x) := W_F(x) := \frac{\partial F}{\partial t}(x, 0) := dF_{(x,0)} \left(\frac{\partial}{\partial t}(x, 0) \right).$$

1.14. OBSERVAÇÃO. Se a variação é própria, então W_F se anula em ∂D .

Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície, $D \subseteq M$ um domínio relativamente compacto com fronteira suave e F uma variação de f em D . Denotamos $A(t)$ o volume de D na métrica induzida por $F^{(t)}$. Denotaremos também por W o campo variacional.

1.15. TEOREMA. (*Fórmula da primeira variação*) Se F é uma variação própria, então

$$\frac{dA(t)}{dt} \Big|_{t=0} = - \int_D \langle H, W \rangle dM.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $p \in D$. Consideramos coordenadas locais $\{x_1, \dots, x_n\}$ em uma vizinhança de p tais que os campos coordenados $X_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ sejam ortonormais em p . Podemos também assumir $[X_i, W] = 0$, introduzindo em \mathbb{R}^{n+1} coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ e a $(n+1)$ -ésima como sendo o parâmetro de curvas integrais de W , onde W não é tangente a M .

Indicamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ a métrica induzida de $F^{(t)}$ e por dM_t a forma volume associada. Temos

$$dM_t(p) = [\det(\langle X_i, X_j \rangle_t)]^{\frac{1}{2}} dM := J(t, p) dM.$$

$$\frac{dA(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \int_D \frac{\partial}{\partial t} J(t, p) \Big|_{t=0} dM.$$

Como os campos X_i são ortonormais, então

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, p) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle X_i, X_i \rangle_t \Big|_{t=0}.$$

Usando a definição de W e o fato de que $[W, X_i] = 0$, temos

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial t} J(t, p) \right|_{t=0} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} W \langle X_i, X_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_W X_i, X_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} W + [W, X_i], X_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} W, X_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i \langle X_i, W \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_i, W \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i \langle X_i, W \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} X_i, W \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \alpha(X_i, X_i), W \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i \langle X_i, W^T \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_i, W^T \rangle - \langle H, W \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} W^T, X_i \rangle - \langle H, W \rangle \\
 &= \operatorname{div}(W^T) - \langle H, W \rangle.
 \end{aligned}$$

Integrando a última expressão obtemos

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = - \int_{\bar{D}} \langle H, W \rangle dA,$$

onde $\int_{\bar{D}} \operatorname{div}(W^T) dA = 0$ pelo teorema de Stokes e pelo fato de que $W = 0$ sobre ∂M . ■

1.16. OBSERVAÇÃO. Se nos restringimos a *variações normais*, i.e. W normal a M , a fórmula da primeira variação continua valendo mesmo para variações que não são próprias.

O resultado acima justifica, pelo menos parcialmente, o fato que chamamos de (hiper)superfícies mínimas aquelas que têm curvatura média nula. De fato, se $\operatorname{Vol}(D)$ é mínimo entre todas as (hiper)superfícies com bordo fixo ∂D , então para todas as variações próprias

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Em particular $H = 0$.

Na verdade a condição $H = 0$ não garante que o volume seja mínimo, somente que D é um ponto crítico da função volume. Em termos um pouco mais precisos isso significa o seguinte. Consideramos o conjunto:

$$\operatorname{Im}(D) = \{g : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : g \text{ é uma imersão e } \partial g(D) = \partial f(D)\}.$$

Pode-se introduzir em $Im(D)$ uma estrutura de “variedade diferenciável de dimensão infinita modelada em um espaço de Hilbert”. O espaço tangente em uma imersão g vai ser exatamente o espaço dos campos variacionais associados a variações próprias de g . Portanto faz sentido falar de funções diferenciáveis definidas em $Im(D)$ a valores reais. A função:

$$Vol : Im(D) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Vol(g) = \int_D g^* dM,$$

é diferenciável neste sentido e seus pontos críticos, por 1.15, são exatamente as superfícies mínimas.

Se estamos interessados em mínimos de Vol , pelo menos em “mínimos relativos”, temos que olhar a segunda derivada de Vol . Isso será feito no Capítulo 4 (fórmula da segunda variação).

CAPÍTULO 2

Superfícies Mínimas em Forma não Paramétrica

1. Alguns teoremas sobre funções inteiras

Seja $\Omega \subseteq \mathcal{C} \cong \mathbb{R}^2$ um aberto com coordenadas reais (u, v) e coordenada complexa $z = u + iv$, $i = \sqrt{-1}$, $u, v \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\bar{z} := u - iv$ o conjugado de z . Seja $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ uma função diferenciável. Se $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$, $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial u} + i \frac{\partial f_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial v} + i \frac{\partial f_2}{\partial v}.$$

Definimos também:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

Lembramos que:

- f é holomorfa se satisfaz as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

- f é harmônica se

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Um cálculo simples nos dá:

2.1. LEMA.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4} \Delta f.$$

Em particular:

- f é harmônica se e somente se $\frac{\partial f}{\partial z}$ é holomorfa.
- As partes real e imaginária de uma função holomorfa são harmônicas.

O lema anterior sugere o seguinte problema: Dada uma função harmônica $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, achar uma função harmônica $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = f_1 + if_2$ seja holomorfa. Uma tal função f_2 chama-se *conjugada harmônica de f_1* . O resultado a seguir é bem conhecido:

2.2. LEMA. *Se Ω é simplesmente conexo, toda função harmônica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma conjugada harmônica.*

Vamos agora lembrar duas outras propriedades importantes das funções harmônicas:

2.3. TEOREMA. *Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica, então é analítica.*

2.4. TEOREMA. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica e Ω conexo. Se f tem um máximo em Ω , f é constante.*

A propriedade das funções harmônicas descrita em 2.4 chama-se *Princípio do Máximo*. Como veremos em 3.3, este princípio tem, como uma das suas inúmeras conseqüências, a inexistência de superfícies mínimas compactas em \mathbb{R}^3 .

Estaremos interessados em funções holomorfas e harmônicas definidas em todo o plano, i.e. $\Omega = \mathcal{C}$. Uma função definida em todo o plano será chamada de *função inteira*.

Para funções holomorfas inteiras, temos um belíssimo resultado devido a Picard, cuja demonstração pode-se encontrar em [1].

2.5. TEOREMA (Picard). *Seja $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ uma função holomorfa. Se $\mathcal{C} \setminus f(\mathcal{C})$ contém mais que um ponto, então f é constante.*

2.6. OBSERVAÇÃO. A função $f(z) = e^z$ omite exatamente o ponto $w = 0$.

Uma forma mais fraca do Teorema de Picard, porém mais conhecida, é o famoso Teorema de Liouville:

2.7. TEOREMA.

- *Uma função $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ holomorfa e limitada é constante.*
- *Uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica e limitada é constante.*

Neste capítulo queremos demonstrar resultados análogos para soluções inteiras de outras equações diferenciais, em particular, o Teorema de Bernstein.

2. O Teorema de Jörgens

2.8. TEOREMA (Jörgens). *Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ solução da equação*

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 1.$$

Então ϕ é um polinômio quadrático em x e y .

DEMONSTRAÇÃO. Para simplificar as notações definimos:

$$p := \phi_x, \quad q := \phi_y, \quad r := \phi_{xx}, \quad s := \phi_{xy}, \quad t := \phi_{yy}.$$

Com estas notações a equação se escreve:

$$(12) \quad rt - s^2 = 1.$$

Em particular $rt = 1 + s^2 > 0$, e portanto r e t têm o mesmo sinal. Sem perda de generalidade, podemos assumir r e t positivos, já que se ϕ é solução da equação, $-\phi$ também o é, e portanto podemos trocar ϕ por $-\phi$ se necessário.

Consideremos a transformação de Lewy:

$$T(x, y) := (\xi(x, y), \eta(x, y)) := (x + \phi_x, y + \phi_y).$$

A matriz jacobiana de T é:

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r & s \\ s & 1 + t \end{pmatrix}$$

com determinante

$$(1 + r)(1 + t) - s^2 = 1 + t + r + rt - s^2 = 2 + t + r \geq 2.$$

Portanto T é localmente invertível. Assumimos, por enquanto, o seguinte fato:

2.9. LEMA. T é um difeomorfismo.

Consideramos a inversa da transformação de Lewy

$$L(\xi, \eta) := T^{-1}(\xi, \eta) := (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

A matriz jacobiana de L é dada por

$$\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r & s \\ s & 1 + t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 + r + t} \begin{pmatrix} 1 + t & -s \\ -s & 1 + r \end{pmatrix},$$

e podemos então determinar as derivadas parciais x_ξ , x_η , y_ξ e y_η em termos de r , s , t .

Definimos agora a função

$$(13) \quad \begin{aligned} F(\xi, \eta) &:= (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) = (x - p, -y + q) \\ &:= (x(\xi, \eta) - p(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), -y(\xi, \eta) + q(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))). \end{aligned}$$

Temos

$$u_\xi = x_\xi - p_x x_\xi - p_y y_\xi = \frac{t-r}{2+r+t}.$$

Analogamente,

$$v_\eta = \frac{t-r}{2+r+t} = u_\xi \quad \text{e} \quad v_\xi = \frac{2s}{2+r+t} = -u_\eta.$$

Segue-se então que a função

$$F(\xi + i\eta) := u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$$

verifica as equações de Cauchy-Riemann e é, portanto, uma função holomorfa.

A derivada de F é

$$(14) \quad F'(\xi + i\eta) = u_\xi + iv_\xi = \frac{t-r+2is}{2+r+t}.$$

Conseqüentemente

$$(15) \quad \begin{aligned} |F'(\xi + i\eta)|^2 &= \frac{(t-r)^2 + 4s^2}{(2+r+t)^2} = \frac{(t-r)^2 + 4rt - 4}{(2+r+t)^2} \\ &= \frac{(t+r)^2 - 4}{(2+r+t)^2} = \frac{-2+r+t}{2+r+t} < 1. \end{aligned}$$

Logo, F' é limitada e portanto constante pelo Teorema de Liouville.

As equações (14) e (15) permitem-nos calcular r , s e t em termos de F' :

$$\begin{cases} s = \frac{2+r+t}{2} \Im F' = \frac{2\Im F'}{1-|F'|^2}, \\ t = \frac{1}{2} \left(\frac{4\Re F'}{1-|F'|^2} + \frac{4}{1-|F'|^2} - 2 \right), \\ r = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{1-|F'|^2} - 2 - \frac{4\Re F'}{1-|F'|^2} \right). \end{cases}$$

onde $\Re z$ e $\Im z$ denotam a parte real e a parte imaginária de z respectivamente.

Como F' é constante, segue que s , t e r também são constantes e o teorema está provado, a menos da demonstração do Lema 2.9. ■

Vamos agora demonstrar o Lemma 2.9.

DEMONSTRAÇÃO. Provaremos que T não diminui distâncias, i.e.

$$(16) \quad |T(z) - T(w)| \geq |z - w|.$$

Supondo isso teremos:

- T é injetora. De fato, $T(z) = T(w)$, implica $z = w$ por (16).

- T é uma aplicação aberta. De fato, pois como já vimos T é um difeomorfismo local.
- T tem imagem fechada. De fato, se $T(z_n) \rightarrow \bar{z}$, $T(z_n)$ é uma seqüência de Cauchy. Por (16), z_n é também uma seqüência de Cauchy e portanto $z_n \rightarrow z$ para algum $z \in \mathcal{C}$. Por continuidade $T(z) = \bar{z}$.

Segue-se então que T é injetora, sobrejetora (pois a imagem é aberta e fechada) e localmente diferenciavelmente invertível, pelo Teorema da Função Inversa. Portanto a inversa é diferenciável.

Vamos então demonstrar (16). Sejam $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ pontos fixos distintos. Seja $z_\tau := \tau z_1 + (1 - \tau)z_0$, $p_\tau := p(z_\tau), \dots, t_\tau := t(z_\tau)$.

Consideramos a função

$$h(\tau) := \phi(z_\tau) := \phi(\tau x_1 + (1 - \tau)x_0, \tau y_1 + (1 - \tau)y_0).$$

Temos então

$$h'(\tau) = p_\tau(x_1 - x_0) + q_\tau(y_1 - y_0),$$

$$h''(\tau) = r_\tau(x_1 - x_0)^2 + 2s_\tau(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + t_\tau(y_1 - y_0)^2.$$

Se $x_1 \neq x_0$, então

$$h''(\tau) = r_\tau + 2s_\tau \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) + t_\tau \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right)^2.$$

Sendo $s_\tau^2 - r_\tau t_\tau = -1 < 0$ e $t_\tau > 0$, segue-se que $h''(\tau) > 0$. Analogamente, $h''(\tau) > 0$ se $y_1 \neq y_0$. Portanto $h'(\tau)$ é crescente e

$$h'(1) - h'(0) = (p_1 - p_0)(x_1 - x_0) + (q_1 - q_0)(y_1 - y_0) \geq 0.$$

Temos então

$$\begin{aligned} |T(z_1) - T(z_0)|^2 &= (x_1 - x_0 + p_1 - p_0)^2 + (y_1 - y_0 + q_1 - q_0)^2 = \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (p_1 - p_0)^2 + (q_1 - q_0)^2 + \\ &+ 2[(p_1 - p_0)(x_1 - x_0) + (q_1 - q_0)(y_1 - y_0)] = \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (p_1 - p_0)^2 + (q_1 - q_0)^2 + 2(h'(1) - h'(0)) \\ &\geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = |z_1 - z_0|^2. \end{aligned}$$

■

3. O Teorema de Bernstein: uma primeira demonstração

Usaremos agora o Teorema de Jörgens para dar uma demonstração simples do Teorema de Bernstein:

2.10. TEOREMA (Bernstein). *Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação das superfícies mínimas*

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0,$$

então $f = ax + by + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes.

DEMONSTRAÇÃO. Usaremos as notações:

$$p := f_x, \quad q := f_y, \quad r := f_{xx}, \quad s := f_{xy}, \quad t := f_{yy}, \quad w := \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Um cálculo direto mostra que as duas equações a seguir são equivalentes à equação das superfícies mínimas:

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + q^2}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{w} \right) = 0,$$

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + p^2}{w} \right) = 0.$$

Sendo \mathbb{R}^2 simplesmente conexo, existem funções $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$(19) \quad \alpha_x = \frac{1 + p^2}{w},$$

$$(20) \quad \alpha_y = \frac{pq}{w},$$

$$(21) \quad \beta_x = \frac{pq}{w},$$

$$(22) \quad \beta_y = \frac{1 + q^2}{w}.$$

De (20) e (21), usando novamente a conectividade simples de \mathbb{R}^2 , segue-se que existe uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $\phi_x = \alpha$ e $\phi_y = \beta$.

Junto com (19) e (22) temos

$$\phi_{xx} = \frac{1 + p^2}{w}, \quad \phi_{xy} = \frac{pq}{w}, \quad \text{e} \quad \phi_{yy} = \frac{1 + q^2}{w}.$$

Isso implica que

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 = 1.$$

Pelo Teorema de Jörgens $\frac{1+p^2}{w}$, $\frac{pq}{w}$, e $\frac{1+q^2}{w}$ são constantes. Resolvendo para p e q , segue-se que também p e q são constantes e isso demonstra o Teorema. ■

4. Existência de coordenadas isotérmicas em superfícies mínimas

Seja M^2 uma superfície riemanniana, i.e., uma variedade riemanniana de dimensão dois. Neste caso temos coordenadas locais especiais no seguinte sentido:

2.11. TEOREMA. *Para todo $p \in M^2$ existe uma vizinhança $U \subseteq M^2$ de p e uma parametrização $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ tais que:*

$$\left\| d\psi\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)(p) \right\| = \left\| d\psi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)(p) \right\| = \lambda(u, v), \quad \left\langle d\psi\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)(p), d\psi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)(p) \right\rangle = 0,$$

onde (u, v) são as coordenadas em Ω .

As coordenadas cuja existência é garantida pelo Teorema 2.11 são chamadas *coordenadas isotérmicas* e a parametrização de *parametrização isotérmica*.

A demonstração do Teorema 2.11 no caso geral é bastante complexa e pode ser achada em [1]. Usando as idéias desenvolvidas nas seções anteriores vamos agora dar uma demonstração de 2.11 no caso de superfícies mínimas de \mathbb{R}^3 .

DEMONSTRAÇÃO. Sem perda de generalidade podemos supor que a superfície seja dada como gráfico de uma função diferenciável $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Usaremos as notações das seções anteriores:

$$p := f_x, \quad q := f_y, \quad r := f_{xx}, \quad s := f_{xy}, \quad t := f_{yy}, \quad w := \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Como na demonstração do Teorema de Bernstein, o fato de f ser solução da equação das superfícies mínimas implica que (localmente) existem funções α, β que verificam as equações (19), (20), (21) e (22).

Consideramos a transformação de Lewy (local):

$$T(x, y) = (x + \alpha(x, y), y + \beta(x, y)),$$

cujas matriz jacobiana $J(T)$ é dada por:

$$J(T)(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{w} & \frac{pq}{w} \\ \frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+q^2}{w} \end{pmatrix}$$

com determinante $2 + \frac{2+p^2+q^2}{w} \geq 2$. Logo, T tem uma inversa local e a matriz jacobiana da inversa é dada por:

$$\begin{aligned} J(T^{-1})(T(x, y)) &= [J(T)(x, y)]^{-1} \\ &= \frac{1}{\det J(T)(x, y)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+q^2}{w} & -\frac{pq}{w} \\ -\frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+p^2}{w} \end{pmatrix} \\ &= c \begin{pmatrix} 1 + w + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + w + p^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para algum $c = c(x, y)$.

Se $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, temos:

$$\begin{aligned} J(F \circ T^{-1})(T(x, y)) &= J(F)(x, y) J(T^{-1})(T(x, y)) \\ &= c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + w + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + w + p^2 \end{pmatrix} \\ &= c \begin{pmatrix} 1 + w + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + w + p^2 \\ p + pw & q + qw \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que as duas colunas desta matriz são ortogonais e que elas têm o mesmo comprimento. Portanto $F \circ T^{-1}$ é a parametrização procurada. ■

CAPÍTULO 3

Superfícies Mínimas em Forma Paramétrica

1. A representação de Weierstrass

Seja M^2 uma superfície riemanniana, i.e., uma variedade riemanniana de dimensão dois.

Como vimos no capítulo anterior, é possível introduzir localmente coordenadas isotérmicas, i.e. parametrizações

$$\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow M,$$

com $\|\psi_u\| = \lambda(u, v) = \|\psi_v\|$, $\langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0$.

Estas parametrizações são também chamadas de *parametrizações conformes* pois preservam os ângulos.

Se M é orientada, podemos escolher parametrizações isotérmicas que preservam a orientação. Portanto as mudanças de coordenadas são funções de um aberto de \mathcal{C} em \mathcal{C} , que preservam ângulos e orientação. É bem conhecido que tais funções são funções holomorfas.

Em geral, uma superfície com um atlas cuja mudança de coordenadas são funções holomorfas é dita uma *superfície de Riemann*.

Sejam M e N superfícies de Riemann e $f : M \longrightarrow N$ uma função. Diremos que f é *holomorfa* se, dadas parametrizações conformes positivas ψ de M e ϕ de N , a composição $\phi^{-1} \circ f \circ \psi$ é, onde definida, uma função holomorfa no sentido usual.

Um exemplo notável é a esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Identificando S^2 com a compactificação de Alexander de \mathcal{C} , $\mathcal{C} \cup \{\infty\}$, as inversas das projeções estereográficas de ∞ e 0 fornecem um atlas holomorfo. Com esta estrutura, S^2 é chamada de *esfera de Riemann*.

Lembramos da teoria elementar das funções holomorfas que uma função $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \subseteq \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é dita *meromorfa* se ela é holomorfa e $\lim_{z \rightarrow z_j} |f(z)| = \infty \forall j = 1, \dots, p$. Uma tal função pode ser vista como uma função holomorfa de Ω em $S^2 = \mathcal{C} \cup \infty$.

Consideramos uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 e uma parametrização conforme $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Seja

- $\psi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$,
- $\Delta_g \psi = \lambda^{-2}(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$,

onde Δ é o operador laplaciano em \mathbb{R}^2 , $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$.

O operador Δ_g é o *operador laplaciano em relação à métrica* $g := ds^2 := \lambda^2(du^2 + dv^2)$.

3.1. LEMA. $\Delta\psi = \lambda^2 H$ e $\Delta_g\psi = H$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro vamos observar que $\Delta\psi$ é normal a M . De fato, derivando a expressão $\langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0$, temos que

$$\left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right\rangle = 0.$$

Portanto

$$\left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Analogamente,

$$\left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Segue-se então que $\Delta\psi$ é normal a M . Como M tem codimensão 1, em cada ponto $p \in M$ existe um único normal unitário positivo $\underline{\mathbf{n}}(p)$. Temos portanto a aplicação normal de Gauss $\underline{\mathbf{n}} : M \rightarrow S^2$.

$$\begin{aligned} \langle \Delta_g \psi, \underline{\mathbf{n}} \rangle &= \lambda^{-2} \langle \Delta \psi, \underline{\mathbf{n}} \rangle \\ &= \lambda^{-2} \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}, \underline{\mathbf{n}} \right\rangle \\ &= \lambda^{-2} \left[- \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, d\underline{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, d\underline{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\rangle \right] \\ &= \lambda^{-2} \left[-\lambda^2 \text{traço}(d\underline{\mathbf{n}}) \right] \\ &= \text{traço}(A_{\underline{\mathbf{n}}}). \end{aligned}$$

Juntando os resultados, temos $\Delta_g\psi = \text{traço}(A_{\underline{\mathbf{n}}}) \underline{\mathbf{n}} = H$. ■

3.2. COROLÁRIO. ψ é uma parametrização de uma superfície mínima se, e somente se, ψ é harmônica.

3.3. COROLÁRIO. Não existem superfícies mínimas compactas em \mathbb{R}^3 .

DEMONSTRAÇÃO. Seja M uma superfície mínima compacta imersa em \mathbb{R}^3 . Podemos supor, sem perda de generalidade, que M seja conexa. Existe portanto um ponto $p \in M$ tal que a projeção sobre o eixo e_1 tem um máximo em p . Escolha uma parametrização isotérmica em uma vizinhança de p . Nesta parametrização, a função x_1 é harmônica e tem um máximo, portanto é constante por 2.4. Isso implica que, perto de p , a imagem da superfície está

contida em um plano. Pela analiticidade e conexão toda a superfície está contida em um plano. Mas isso é um absurdo pois não se pode imergir uma variedade compacta em um espaço real da mesma dimensão. ■

As considerações anteriores nos fornecem a *versão local da Representação de Weierstrass*:

3.4. TEOREMA. *Seja $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização conforme de uma superfície mínima e $\alpha_i := \frac{\partial x_i}{\partial z}$. Então:*

- (1) $\sum_1^3 |\alpha_i|^2 \neq 0$, (ψ é regular),
- (2) $\sum_1^3 \alpha_i^2 = 0$, (ψ é conforme),
- (3) $\frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{z}} = 0$ (ψ é mínima).

Além disso, se Ω é simplesmente conexo e $\alpha_i : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$, $i = 1, 2, 3$, são funções que verificam as três condições acima, dado $z_0 \in \Omega$ a função $\psi = (x_1, x_2, x_3)$, com

$$x_i(z) := 2\Re \left(\int_{\gamma} \alpha_i dz \right)$$

e $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ curva diferenciável entre $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = z$, define uma imersão mínima conforme com $\frac{\partial x_i}{\partial z} = \alpha_i$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\alpha_i = \frac{\partial x_i}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - i \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 &= \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2 - 2i \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right\|^2 - \left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\|^2 - 2i \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\rangle \right] \\ &= 0, \quad \text{pois } \psi \text{ é conforme.} \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |\alpha_i|^2 &= \frac{1}{4} \left[\left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right\|^2 + \left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2(u, v) \neq 0, \quad \text{pois } \psi \text{ é uma parametrização regular.} \end{aligned}$$

Agora, como ψ é mínima, do Corolário 3.2 é harmônica. Pelo Lema 2.1 do capítulo anterior, tem-se

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4} \Delta x_i = 0.$$

Reciprocamente, se Ω é simplesmente conexo e existem $\alpha_i : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$, $i = 1, 2, 3$, satisfazendo as condições (1), (2) e (3), esta última condição implica que α_i , $i = 1, 2, 3$, são holomorfas e portanto as integrais $\Re \left(\int_{\gamma} \alpha_i dz \right)$ não dependem do caminho γ . Se definimos

$$x_i(z) := 2\Re \left(\int_{\gamma} \alpha_i dz \right),$$

então x_i serão funções harmônicas que satisfazem $\alpha_i := \frac{\partial x_i}{\partial z}$, $i = 1, 2, 3$. Juntando isso com as condições (1), (2) e (3), segue-se que $\psi = (x_1, x_2, x_3)$ define uma imersão mínima conforme. ■

3.5. OBSERVAÇÃO. O resultado anterior se estende ao caso em que Ω não seja simplesmente conexo ou, mais em geral, seja uma superfície de Riemann. A única coisa que devemos garantir é que a integral seja bem definida no sentido que vamos especificar agora.

Seja M uma superfície de Riemann e ϕ uma (forma) diferencial holomorfa. Isso significa que

- $\phi(x) : T_x M \rightarrow \mathcal{C}$ é \mathcal{C} -linear,¹ $\forall x \in M$.
- Se, em coordenadas holomorfas, $\phi = f dz$, então f é uma função holomorfa.

Diremos que ϕ não tem *períodos reais* se para qualquer curva diferenciável fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, tivermos

$$\Re \int_{\gamma} \phi := \Re \int_0^1 \phi(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) dt = 0.$$

A condição de não ter períodos reais equivale a dizer que, para qualquer curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$, $\Re \int_{\sigma} \phi$ depende somente de $\sigma(0)$ e $\sigma(1)$. Portanto, neste caso a integral

$$F(z) = \Re \int_{z_0}^z \phi$$

é bem definida, i.e. não depende da curva unindo z_0 a z .

A versão global da representação de Weierstrass 3.4, cuja demonstração é essencialmente a mesma, é a seguinte:

3.6. TEOREMA. *Seja M uma superfície de Riemann e sejam ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, diferenciais holomorfas tais que:*

- (1) $\sum \phi_i^2 = 0$ (i.e. se localmente $\phi_i = f_i dz$, então $\sum f_i^2 = 0$),
- (2) $\sum |\phi_i|^2 > 0$,

¹ $T_x M$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial complexo. Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base isotérmica positiva, i.e. $\langle e_i, e_j \rangle = \lambda \delta_{ij}$, então $ie_1 = e_2$, $ie_2 = -e_1$.

(3) as ϕ_i não tem períodos reais,

então a função $\psi = (x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$x_i(z) = 2\Re \int_{z_0}^z \phi_i,$$

é bem definida e é uma imersão mínima conforme.

A condição $\sum \phi_i^2 = 0$ essencialmente permite determinar uma das diferenciais em termo das outras duas. A maneira mais geométrica de fazer isso é, pelas razões que veremos na próxima seção, a seguinte.

Consideramos a diferencial holomorfa

$$\omega = \phi_1 - i\phi_2.$$

Se ω é identicamente nula, ϕ_3 é identicamente nula e, se M é conexa, a superfície associada é um pedaço de plano. Se ω não se anula identicamente, pela condição de holomorfia seus zeros são isolados. Se localmente $\phi_i = f_i dz$, consideramos a função meromorfa:

$$g = \frac{f_3}{f_1 - if_2}.$$

3.7. OBSERVAÇÃO. Como veremos em 3.10, a função g é, a menos de uma projeção estereográfica, a aplicação normal de Gauss. Portanto g é bem definida, i.e. não depende da representação local das ϕ_i .

A partir de ω e g podemos tentar recuperar as diferenciais ϕ_i escrevendo

$$(23) \quad \phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega,$$

$$(24) \quad \phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega,$$

$$(25) \quad \phi_3 = g\omega.$$

Observamos que aparece uma nova condição para que as fórmulas acima façam sentido. Suponhamos que, em z_0 , g tenha um pólo de ordem $m > 0$. Localmente,

$$g = \sum_{i=-m}^{\infty} a_i(z - z_0)^i, \quad a_{-m} \neq 0.$$

Então ω tem que ter, em z_0 , um zero de ordem pelo menos $2m$ para que (23) e (24) façam sentido e exatamente $2m$ para que, tendo em vista (25), $\sum |\phi_i|^2$ seja positiva. Em outras

palavras, se localmente $\omega = f dz$, então

$$f = \sum_{2m}^{\infty} b_i (z - z_0)^i, \quad b_{2m} \neq 0.$$

Resumindo, temos a seguinte versão “reduzida” da Representação de Weierstrass, na sua forma global:

3.8. TEOREMA. *Seja M uma superfície de Riemann, $g : M \rightarrow \mathcal{C}$ uma função meromorfa e ω uma diferencial holomorfa. Suponhamos que os pólos de g coincidam com os zeros de ω e que para cada pólo z_0 de g de ordem m , z_0 seja zero de ω de ordem $2m$. Então as diferenciais ϕ_i dadas em (23), (24) e (25) são bem definidas e holomorfas, $\sum \phi_i^2 = 0$ e $\sum |\phi_i|^2 > 0$. Portanto, se as ϕ_i não têm períodos reais, elas definem uma imersão mínima conforme $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, por 3.6.*

A terna $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ ou o par $\{g, \omega\}$ serão chamados de *dados de Weierstrass da imersão*.

2. Exemplos

O teorema 3.8 dado na seção anterior nos permite construir uma infinidade de exemplos de superfícies mínimas. Vale a pena ressaltar que antes do aparecimento deste teorema (em torno de 1866), os exemplos de superfícies mínimas eram muitos poucos. Classicamente, o plano, o helicóide e o catenóide eram os únicos exemplos conhecidos de superfícies mínimas.

2.1. O catenóide. Um catenóide é uma superfície de revolução M obtida girando-se uma catenária.

$$h(x) = \left(x, a \cosh \left(\frac{x}{a} + b \right) \right),$$

$x \in \mathbb{R}$, em torno do eixo x .

Como mostramos no primeiro capítulo, toda superfície mínima de revolução no \mathbb{R}^3 é parte de um catenóide ou de um plano, a menos de movimento rígido.

Tome $g(z) = -e^z$ e $\omega = -\frac{1}{2}e^{-z}dz$. Observe que g não tem pólos e ω não tem zeros em \mathcal{C} . Utilizando (23), (24) e (25) obtemos

$$(26) \quad \begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2} \sinh z \, dz \\ \phi_2 = -\frac{i}{2} \cosh z \, dz \\ \phi_3 = \frac{1}{2} dz \end{cases}$$

Como $\cosh z$, $-i \cosh z$ e 1 são funções holomorfas em \mathcal{C} , então $\oint_{\gamma} \phi_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, para todo caminho fechado γ . Portanto as formas α_k não possuem períodos. Integrando as α_k

temos

$$(27) \quad \begin{cases} x_1 &= \Re \int_0^z \sinh z \, dz = \Re(\cosh z - 1) = \cos v \cosh u - 1 \\ x_2 &= \Re \int_0^z -i \cosh z \, dz = \Re(-i \sinh z) = \sin v \cosh u \\ x_3 &= \Re \int_0^z dz = \Re(z) = u \end{cases}$$

e $\psi(u, v) = (\cos v \cosh u, \sin v \cosh u, u) - (1, 0, 0)$, que é uma parametrização do catenóide, a menos de translação. Esta parametrização enrola o plano em torno do catenóide um número infinito de vezes.

Uma outra maneira de se obter o catenóide é a seguinte: Tome $g(z) = z$ e $\omega = (1/z^2)dz$. Então

$$(28) \quad \begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) dz \\ \phi_2 = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right) dz \\ \phi_3 = \frac{1}{z} dz \end{cases}$$

As formas α_1 e α_2 não possuem períodos e a forma α_3 possui apenas período puramente imaginário. É então imediato observar-se

$$(29) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{u}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + 1, \\ x_2 = -\frac{v}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right), \\ x_3 = \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2). \end{cases}$$

A menos de translação, estas equações descrevem exatamente o catenóide. Para ver isto faça

$$\rho = \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2) \quad \text{e} \quad \theta = \left(\arctan \frac{v}{u} \right) - \pi.$$

2.2. O helicóide. Um helicóide pode ser parametrizado como

$$(30) \quad \psi(u, v) = (u \cos av, u \sin av, bv).$$

Geometricamente, os helicóides são gerados por um movimento helicoidal atuando sobre uma reta paralela ao plano de rotação do movimento. Portanto, um helicóide também é um exemplo de uma superfície regrada, isto é, de uma superfície descrita geometricamente por uma reta que “desliza suavemente” sobre uma curva. Pode-se mostrar que toda superfície regrada mínima no \mathbb{R}^3 é, a menos de movimento rígido, parte de um helicóide ou de um plano. Para mais informações sobre superfícies regradas e a prova do fato acima, veja [3] e [10].

Tome $g(z) = -ie^z$ e $\omega = \frac{1}{2}e^{-z}dz$. Observe que g não tem pólos e ω não tem zeros em \mathcal{C} . Utilizando (23), (24) e (25) temos

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega = \frac{1}{2} \cosh z dz, \\ \alpha_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega = -\frac{i}{2} \sinh z dz, \\ \alpha_3 = g\omega = -\frac{i}{2} dz. \end{cases}$$

Como $\cosh z$, $-i \sinh z$ e $-i$ são funções holomorfas em \mathcal{C} , então $\oint_{\gamma} \alpha_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, para todo caminho fechado γ . Portanto as formas α_k não possuem períodos. A integração dos α_k fornece

$$(32) \quad \begin{cases} x_1 = \Re \int_0^z \cosh z dz = \Re(\sinh z) = \cos v \sinh u, \\ x_2 = \Re \int_0^z -i \sinh z dz = \Re(-i \cosh z + i) = \sin v \sinh u, \\ x_3 = \Re \int_0^z -i dz = \Re(-iz) = v \end{cases}$$

e $\psi(u, v) = (\cos v \sinh u, \sin v \sinh u, v)$.

2.3. A superfície de Enneper. A escolha mais simples que se pode fazer para g e ω é tomar $g(z) = z$ e $\omega = \frac{1}{2}dz$. Desta escolha resulta a imersão mínima

$$(33) \quad \psi(u, v) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2\right),$$

que é conhecida como a superfície de Enneper. Observe que esta superfície é mais simples no sentido de que sua parametrização só envolve somas e produtos. Note que quando o ponto (u, v) descreve uma região suficientemente pequena de \mathbb{R}^2 , o ponto $\psi(u, v)$ descreve uma superfície regular em \mathbb{R}^3 que é mínima. A sua imagem inteira $\psi(\mathbb{R}^2)$ se intersecta ao longo de duas curvas da superfície.

3. Geometria dos dados de Weierstrass

Queremos interpretar alguns conceitos geométricos relativos a uma imersão mínima conforme $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ em termos dos seus dados de Weierstrass $\{g, \omega\}$. Assumiremos que, localmente, $\omega = fdz$.

3.9. PROPOSIÇÃO.

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) = |f|^2(1 + |g|^2)^2|dz|^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. De 3.4, segue-se que $\sum_{i=1}^3 |\alpha_i|^2 = \frac{1}{2}\lambda^2$.

Por outro lado, usando (23), (24) e (25) temos

$$\begin{aligned}
 |\alpha_1|^2 = \alpha_1 \overline{\alpha_1} &= \frac{1}{2}(1 - g^2)f \overline{\left[\frac{1}{2}(1 - g^2)f \right]} \\
 &= \frac{1}{4}(1 - \overline{g}^2 - g^2 + |g|^4)|f|^2, \\
 |\alpha_2|^2 = \alpha_2 \overline{\alpha_2} &= \frac{1}{4}(1 + \overline{g}^2 + g^2 + |g|^4)|f|^2, \\
 |\alpha_3|^2 = \alpha_3 \overline{\alpha_3} &= |g|^2|f|^2.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 |\alpha_i|^2 &= \frac{1}{2}(1 + |g|^4)|f|^2 + |g|^2|f|^2 \\
 &= \frac{1}{2}(1 + |g|^2)^2|f|^2.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$(34) \quad \lambda^2 = (1 + |g|^2)^2|f|^2.$$

■

3.10. PROPOSIÇÃO. *Seja $\mathbf{n} : M \rightarrow S^2$ a aplicação normal de Gauss e $\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathcal{C}$, a projeção estereográfica. Então $g = \pi \circ \mathbf{n}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima. Vamos obter a expressão da aplicação normal de Gauss $N : M \rightarrow S^2(1)$ em termos da representação de Weierstrass. Em torno de um ponto, $\phi_k = \alpha_k dz$ define as funções α_k e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -(\Re \alpha_1, \Re \alpha_2, \Re \alpha_3) \times (\Im \alpha_1, \Im \alpha_2, \Im \alpha_3) \\
 &= -(\Re \alpha_2 \Im \alpha_3 - \Re \alpha_3 \Im \alpha_2, \Re \alpha_3 \Im \alpha_1 - \Re \alpha_1 \Im \alpha_3, \\
 &\quad \Re \alpha_1 \Im \alpha_2 - \Re \alpha_2 \Im \alpha_1) \\
 &= (\Im \alpha_2 \overline{\alpha_3}, \Im \alpha_3 \overline{\alpha_1}, \Im \alpha_1 \overline{\alpha_2}).
 \end{aligned}$$

Utilizando os valores de α_k obtidos de (23), (24) e (25), tem-se então

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{|f|^2(1 + |g|^2)}{4}(2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1).$$

Segue-se daí que

$$(35) \quad \mathbf{n} = \left(\frac{2\Re g}{1 + |g|^2}, \frac{2\Im g}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

Se $\pi : S^2(1) - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção estereográfica, definida por

$$(36) \quad \pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right),$$

então $\pi \circ \underline{\mathbf{n}} = (\Re g, \Im g)$ em todos os pontos de M , com exceção dos pólos de g . Se identificamos \mathbb{R}^2 com o plano complexo \mathcal{C} e estendemos π a uma função $\tilde{\pi} : S^2(1) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definindo $\pi((0, 0, 1)) = \infty$, então

$$(37) \quad \tilde{\pi} \circ \underline{\mathbf{n}} = g.$$

■

3.11. PROPOSIÇÃO. *A curvatura gaussiana é dada por:*

$$K = - \left(\frac{2|g'|^2}{|f|(1+|g|^2)^2} \right)^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que em sistemas de coordenadas isotérmicas a curvatura gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda,$$

onde Δ é o laplaciano usual (veja Apêndice A). Se h é uma função real diferenciável de duas variáveis, então

$$\begin{aligned} \Delta \log h &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \\ &= \frac{\Delta h}{h} - \frac{\|\text{grad } h\|^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta \log(1+|g|^2)|f| &= \Delta \left[\log(1+|g|^2) + \frac{1}{2} \log |f|^2 \right] \\ &= \frac{\Delta(1+|g|^2)}{1+|g|^2} - \frac{\|\text{grad}(1+|g|^2)\|^2}{(1+|g|^2)^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta |f|^2}{|f|^2} - \frac{\|\text{grad}(|f|^2)\|^2}{|f|^4} \right] \\ &= \frac{\Delta |g|^2}{1+|g|^2} - \frac{\|\text{grad}(|g|^2)\|^2}{(1+|g|^2)^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta |f|^2}{|f|^2} - \frac{\|\text{grad}(|f|^2)\|^2}{|f|^4} \right]. \end{aligned}$$

Usando o Lema A.14, a expressão acima fica

$$\begin{aligned}\Delta \log(1 + |g|^2)|f| &= \frac{4(1 + |g|^2)|g'|^2 - 4|g|^2|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{4|f|^2|f'|^2 - 4|f|^2|f'|^2}{|f|^4} \right] \\ &= \frac{4|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2}.\end{aligned}$$

A curvatura gaussiana é, portanto

$$(38) \quad K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \right)^2.$$

■

4. A aplicação normal de Gauss: O Teorema de Ossermann

Como vimos no Capítulo 2, uma função holomorfa inteira não constante é “quase sobrejetora” (2.5, 2.7). Sendo a aplicação normal de Gauss uma função holomorfa (veja 3.10), é natural tentar estimar o tamanho da imagem desta aplicação. Claramente necessitamos de uma condição de natureza global sobre a superfície, similar à condição que a função holomorfa, no Teorema de Picard, seja inteira. Vamos então estudar uma tal condição.

Seja M^n uma variedade riemanniana e $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável². Lembramos que o comprimento de γ é definido por

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

É bem conhecido que $L(\gamma)$ não depende da parametrização, i.e. se $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ é um difeomorfismo, $L(\gamma) = L(\gamma \circ \phi^{-1})$.

O conceito de comprimento permite definir, para variedades riemannianas conexas, a função:

$$d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_g(x, y) = \inf \{L(\gamma) : \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

que resulta ser uma distância cuja topologia induzida coincide com a topologia original de M .

Se γ é definida em uma semireta $[a, \infty)$, a função $l(s) = L(\gamma|[a, s])$ é não decrescente e portanto existe, eventualmente infinito, $L(\gamma) := \lim_{s \rightarrow \infty} l(s)$. Este limite é chamado de comprimento de γ .

Uma curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ é dita *divergente* se para todo compacto $K \subseteq M$ existe $t \in [0, \infty)$, tal que $\gamma(s) \notin K, \forall s > t$.

²O conceito se estende facilmente a curvas diferenciáveis por partes.

Uma variedade riemanniana é dita *completa* se toda curva divergente tem comprimento infinito.

3.12. OBSERVAÇÃO. A condição acima é equivalente a outras condições como, por exemplo:

- (1) M é completa na métrica d_g ,
- (2) todo fechado e limitado é compacto,
- (3) M é união não decrescente de compactos,
- (4) se $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma imersão isométrica, M é completa se e somente se $\psi(M)$ é fechado.

Escolhemos a definição acima pois é a forma em que vamos utilizar a completude.

Ante de apresentar resultados sobre a aplicação normal de Gauss de superfícies mínimas completas, vamos enunciar um resultado clássico sobre superfícies de Riemann, conhecido como Teorema de Uniformização, cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

3.13. TEOREMA (Teorema de uniformização). *Seja M uma superfície de Riemann conexa. Então existe um revestimento conforme $p : \tilde{M} \rightarrow M$, onde \tilde{M} é um das seguintes superfícies de Riemann:*

- (1) a esfera S^2 ,
- (2) o plano complexo \mathcal{C} ,
- (3) o disco unitário $D = \{z \in \mathcal{C} : |z| < 1\}$.

3.14. OBSERVAÇÃO. Mesmo sendo difeomorfos, \mathcal{C} e D não são equivalentes do ponto de vista holomorfo pois, pelo teorema de Liouville, 2.7, não existe uma função holomorfa não constante $f : \mathcal{C} \rightarrow D$. Portanto o segundo e terceiro casos no Teorema 3.13 não são equivalentes do ponto de vista conforme.

Demonstraremos agora o resultado prometido, que é devido a Osserman (veja [15]).

3.15. TEOREMA. *Seja $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa conexa³ com aplicação de Gauss $\underline{n} : M \rightarrow S^2$. Se \underline{n} não é constante, $\underline{n}(M)$ é denso em S^2 .*

DEMONSTRAÇÃO. Consideramos o revestimento universal conforme $p : \tilde{M} \rightarrow M$ (veja 3.13). Logo $\psi \circ p : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é ainda uma imersão mínima pois, localmente, suas coordenadas são composição de funções holomorfas e harmônicas, portanto harmônicas. Além disso a imagem é a mesma, portanto $\psi \circ p$ induz uma métrica completa em \tilde{M} (veja 3.12) e a

³i.e. M é conexa e completa na métrica induzida

aplicação de Gauss tem a mesma imagem da aplicação de Gauss de ψ . Portanto podemos supor $M = \tilde{M}$.

Se $\tilde{M} = S^2$, teríamos uma superfície mínima compacta em \mathbb{R}^3 , contradizendo 3.3.

Se $\tilde{M} = \mathcal{C}$, g é uma função holomorfa inteira. Por 2.5, g omite no máximo um ponto de \mathcal{C} . Portanto a aplicação normal \underline{n} omite no máximo dois pontos de S^2 e segue-se a conclusão. O Teorema será consequência do lema a seguir. ■

3.16. LEMA. *Se $\psi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima completa e \underline{n} omite uma vizinhança de um ponto, então $\tilde{M} \neq D$.*

DEMONSTRAÇÃO. Assumindo $\tilde{M} = D$ chegaremos a uma contradição.

A menos de uma rotação em \mathbb{R}^3 , podemos assumir que \underline{n} omite uma vizinhança de $(0, 0, 1) \in S^2$.

Consideramos os dados de Weierstrass g, f da imersão mínima ψ . A condição sobre \underline{n} nos diz que

- $|g(z)| \leq A < \infty$.
- f não tem zeros pois g não tem pólos.

Seja $\gamma : [0, 1) \rightarrow \tilde{M}$ uma curva com $\gamma(0) = 0$. O comprimento de γ é dado por:

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} |f|(1 + |g|^2)|dz| \leq (1 + A^2) \int_{\gamma} |f||dz|.$$

Usando esta estimativa, demonstraremos que existe uma curva γ divergente de comprimento finito.

Consideramos a função $F : \tilde{M} \rightarrow \mathcal{C}$:

$$F(z) = \int_0^z f(\xi)d\xi.$$

F é um difeomorfismo local holomorfo, pois $F'(z) = f(z) \neq 0$, e $F(0) = 0$. Seja G uma inversa de F definida em uma vizinhança de 0. Definimos:

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R} : G \text{ é definida em } |w| < r\}.$$

Pela construção existe $w_0 \in \mathcal{C}$, $|w_0| = R$ tal que G não pode ser estendida a uma vizinhança de w_0 . Consideramos então o segmento $l(t) = tw_0$, $t \in [0, 1)$ e seja $\gamma(t) = G(l(t))$. Temos então:

- γ é divergente. De fato, se não for o caso, existiria uma seqüência $t_n \rightarrow 1$ tal que $\gamma(t_n) \rightarrow \tilde{z} \in \tilde{M}$. Pela continuidade, $F(\tilde{z}) = w_0$. Sendo F localmente invertível em uma vizinhança de \tilde{z} , G seria estendível em uma vizinhança de w_0 .

- γ tem comprimento finito. De fato:

$$\int_{\gamma} |f(z)||dz| = \int_0^1 |f(z)||\frac{dz}{dt}|dt = \int_0^1 \left|\frac{dw}{dt}\right|dt = \int_l |dw| = R < \infty.$$

Portanto a métrica em \tilde{M} não seria completa, uma contradição. ■

O resultado de Ossermann tem sido melhorado sucessivamente por vários autores, até o resultado optimal obtido por Fujimoto em [5]:

3.17. **TEOREMA.** *Seja $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa conexa com aplicação de Gauss $\underline{n} : M \rightarrow S^2$. Se \underline{n} não é constante, $S^2 \setminus \underline{n}(M)$ contém, no máximo, quatro pontos.*

Observamos que o resultado de Fujimoto é optimal no sentido que existem muitos exemplos de superfícies mínimas completas cuja aplicação de Gauss omite quatro pontos.

5. O Teorema de Bernstein: uma segunda demonstração.

Como corolário de 3.15 temos novamente o Teorema de Bernstein. De fato:

- Dada uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, seu gráfico é uma superfície completa, na métrica induzida (veja 3.12).
- A normal de um gráfico $\psi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é dada, com oportuna escolha da orientação, por $\underline{n}(u, v) = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-\frac{1}{2}}(f_u, f_v, -1)$. Portanto cobre no máximo um hemisfério e a imagem de \underline{n} não é densa.
- Se f é inteira e é solução da equação das superfícies mínimas, a aplicação normal de Gauss é constante, pelo Teorema de Ossermann 3.15. Portanto a superfície é um plano e $f = au + bv + c$.

3.18. **OBSERVAÇÃO.** Não podemos aplicar diretamente o Teorema de Liouville à aplicação normal na parametrização $(u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$, pois esta parametrização não é, em geral, conforme⁴. Portanto, nesta parametrização, a aplicação de Gauss não é necessariamente holomorfa.

⁴De fato, uma parametrização de tipo gráfico é conforme se e somente se f é constante.

CAPÍTULO 4

Estabilidade

1. Superfícies mínimas estáveis

Como vimos no primeiro capítulo, as superfícies mínimas são pontos críticos da função área. Para decidir se estes pontos críticos são mínimos (relativos) temos que olhar a segunda derivada da função área. Nesta seção vamos relatar alguns resultados sobre esta questão.

Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e $U \subseteq M$ um domínio relativamente compacto orientável. Seja \underline{n} o vetor normal unitário. Consideramos o espaço vetorial:

$$C_0(U) = \{h : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} : h \text{ é seccionalmente diferenciável e } h|_{\partial U} = 0\}.$$

Para ϵ pequeno, consideramos a variação

$$F(t, x) = f(x) + th(x)\underline{n}(x), \quad h \in C_0(U).$$

Esta variação tem campo variacional $W_F = h(x)\underline{n}(x)$. Denotamos por $A(t)$ a área da superfície $F(t, U)$. A primeira fórmula variacional nos diz que

$$\frac{dA(t)}{dt}\Big|_{t=0} = - \int_{\bar{U}} \langle W, H \rangle dt = 0.$$

Para a derivada segunda temos o resultado a seguir:

4.1. TEOREMA. (*Fórmula da segunda variação*)

$$\frac{d^2A(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \int_{\bar{U}} h(-\Delta h + 2hK)dM,$$

onde K é a curvatura gaussiana, i.e. o produto das curvaturas principais.

Há várias demonstrações de 4.1, nenhuma muito simples. Uma boa demonstração, mesmo em um contexto mais geral, pode ser encontrada em [14].

É conveniente considerar a forma quadrática, denominada a *forma do índice*:

$$(39) \quad I_U : C_0(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_U(h) := \int_{\bar{U}} h(-\Delta h + 2hK)dM.$$

4.2. DEFINIÇÃO. Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e $U \subseteq M$ um domínio relativamente compacto.

- (1) Diremos que U é estável se a forma do índice I_U é definida positiva.
- (2) Diremos que a superfície M é estável se todos os domínios relativamente compactos em M são estáveis.
- (3) Um campo da forma $h\underline{\mathbf{n}}$, $h \in C_0(U)$, que satisfaz

$$-\Delta h + 2hK = 0$$

é chamado campo de Jacobi.

Seja $U \subseteq M$ um domínio. Da teoria geral do índice temos o resultado a seguir:

4.3. TEOREMA (Critério de instabilidade). Um domínio U não é estável se, e somente se, existe um subdomínio U' relativamente compacto que admite um campo de Jacobi não identicamente nulo em $C_0(U')$ com $I_U(h) \leq 0$.

2. O Teorema de do Carmo-Peng

Nesta seção demonstraremos um teorema, devido a do Carmo e Peng, sobre superfícies mínimas completas estáveis em \mathbb{R}^3 . Como veremos na próxima seção, este teorema é também uma generalização do Teorema de Bernstein.

4.4. TEOREMA. Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima, completa e estável. Então $f(M^2)$ é um plano.

A demonstração será dividida em três etapas. Primeiramente demonstraremos que não é restritivo reduzir-se ao caso em que M é simplesmente conexa, e em seguida analisaremos os casos em que $M = \mathcal{C}$ e $M = D$.

4.5. LEMA. Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima, completa e estável e $\pi : \tilde{M} \rightarrow M^2$ o revestimento universal conforme. Se f é estável, então $f \circ \pi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é estável.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $f \circ \pi$ não seja estável. Existe então um domínio relativamente compacto $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ que é instável. Em particular, por 4.3, existe uma função $\tilde{h} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $\tilde{h} = 0$ em $\partial\tilde{U}$,
- $I_U(\tilde{h}) \leq 0$.

Seja $U = \pi(\tilde{U})$. Consideramos uma decomposição de U em subdomínios U_i uniformemente recobertos cujo fechos se intersectam somente em conjuntos de medida nula (por exemplo uma triangulação suficientemente fina). Pela compacidade relativa de U podemos assumir um número finito de tais subdomínios.

Pela compacidade relativa, \tilde{U} encontra somente um número finito de folhas, digamos N . Seja $\tilde{U}_1 = \bigcup\{\pi^{-1}U_i : \pi^{-1}U_i \cap \tilde{U} \neq \emptyset\}$. Então $\tilde{U} \subseteq \tilde{U}_1$ e portanto \tilde{U}_1 é instável. Sem perda de generalidade podemos assumir $\tilde{U}_1 = \tilde{U}$. Definimos então uma função:

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(p) = \sum_{q \in \pi^{-1}(p) \cap \tilde{U}} \tilde{h}(q).$$

A soma acima faz sentido, pois é finita, e é uma função diferenciável, nula em ∂U . Mas então:

$$I(h, h) = N^{-1}I(\tilde{h}, \tilde{h}) \leq 0.$$

Portanto U é instável, uma contradição. ■

Analisaremos agora os casos $\tilde{M} = D$ e $\tilde{M} = \mathcal{C}$.

4.6. LEMA. *Não existe $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ imersão conforme mínima completa e estável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$ a métrica induzida. Por contradição, cada subdomínio relativamente compacto $U \subset M$ é estável. Logo

$$(40) \quad \int_M (h\Delta_M h - 2h^2 K) dM \leq 0$$

para todas as funções seccionalmente diferenciáveis h que têm suporte compacto em M . Seja Δ o laplaciano e dA o elemento de área na métrica plana. Então pela Proposição A.11 e A.12 temos

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta \log \lambda, \quad dM = \lambda^2 dA, \quad \Delta_M = \frac{1}{\lambda^2}\Delta.$$

Logo (40) pode ser reescrito como

$$(41) \quad \int_D (h\Delta h + h^2\Delta \log \lambda^2) dA \leq 0.$$

Tomando $\phi = 1/\lambda$ e trocando h por ϕh em (40), obtemos

$$(42) \quad \begin{aligned} 3 \int_D |\nabla \phi|^2 h^2 dA &\leq \int_D \phi^2 |\nabla h|^2 dA - 2 \int_D \phi h \langle \nabla h, \nabla \phi \rangle dA \\ &\leq \int_D \phi^2 |\nabla h|^2 dA + 2 \int_D |\phi h \langle \nabla h, \nabla \phi \rangle| dA. \end{aligned}$$

Pela proposição A.15, para qualquer $\epsilon > 0$ vale

$$|\phi h \langle \nabla h, \nabla \phi \rangle| \leq 2|h \nabla \phi| |\phi \nabla h| \leq \epsilon |\nabla \phi|^2 h^2 + \frac{1}{\epsilon} \phi^2 |\nabla h|^2.$$

A expressão (42) implica que existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$(43) \quad \int_D |\nabla \phi|^2 h^2 dA \leq \beta \int_D \phi^2 |\nabla h|^2 dA.$$

Como $\nabla_M = \frac{1}{\lambda} \nabla$, finalmente temos

$$(44) \quad \int_M |\nabla_M \phi|^2 h^2 dM \leq \beta \int_M \phi^2 |\nabla_M h|^2 dM.$$

Agora escolha uma família de bolas geodésicas B_R de raio R que exausta M . Fixe $\theta \in (0, 1)$ e seja $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua que vale um sobre $B_{\theta R}$, zero fora de B_R e linear em $B_R \setminus B_{\theta R}$. De (44) obtemos

$$(45) \quad \int_{\theta B_R} |\nabla_M \phi|^2 dM \leq \frac{\beta}{(1-\theta)^2 R^2} \int_M \phi^2 dM$$

$$(46) \quad = \frac{\beta}{(1-\theta)^2 R^2} \int_D dA = \frac{\pi \beta}{(1-\theta)^2 R^2}.$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, podemos concluir que $|\nabla \phi| = 0$, isto é, $\lambda = \text{const}$, e isso contradiz a completude de $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$. ■

4.7. LEMA. *Seja $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa estável. Então $f(\mathcal{C})$ é um plano.*

DEMONSTRAÇÃO. Tomando $\psi = \Delta \log \lambda^2$, podemos escrever (40) como

$$(47) \quad \int_C \psi h^2 dA \leq \int_C |\nabla h|^2 dA.$$

Trocando h por ψh em (47) obtemos

$$(48) \quad \begin{aligned} \int_C \psi^3 h^2 dA &\leq \int_C \psi^2 |\nabla h|^2 dA \\ &+ \int_C h^2 |\nabla \psi|^2 dA + 2 \int_C \psi h \langle \nabla h, \nabla \psi \rangle dA. \end{aligned}$$

Por outro lado, se K não é identicamente nulo, por A.13 sabemos que

$$\Delta_M \log(-K) = 4K.$$

Isso implica $\Delta \log \psi + \psi = 0$, portanto

$$(49) \quad \psi \Delta \psi + \psi^3 = |\nabla \psi|^2.$$

Por outro lado, multiplicando (49) por h^2 , integrando sobre \mathcal{C} e adicionando o resultado a (48), obtemos

$$(50) \quad \int_{\mathcal{C}} |\nabla\psi|^2 h^2 dA \leq \int_{\mathcal{C}} \psi^2 |\nabla h|^2 dA.$$

Usando no último somando de (48) o fato que $2ab \leq \epsilon a^2 + (1/\epsilon)b^2$ para qualquer $\epsilon > 0$, e introduzindo (48) em (47), obtemos

$$(51) \quad \int_{\mathcal{C}} \psi^3 h^2 dA \leq \beta_1 \int_{\mathcal{C}} \psi^2 |\nabla h|^2 dA, \quad \beta_1 = \text{const.}$$

Agora usando a desigualdade de Young A.16 em (51), segue-se que

$$(52) \quad \psi^2 |\nabla h|^2 = h^2 \left(\psi^2 \frac{|\nabla h|^2}{h^2} \right) \leq h^2 \left(\frac{\alpha^s}{s} \psi^{2s} + \frac{\alpha^{-t}}{t} \left(\frac{|\nabla h|}{h} \right)^{2t} \right),$$

que vale para todo $\alpha > 0$ e todo $1 < s, t < \infty$, com $(1/s) + (1/t) = 1$. Escolhendo $s = 3/2$, $t = 3$ e α pequeno obtém-se uma constante β_2 tal que

$$\int_{\mathcal{C}} \psi^3 h^2 dA \leq \beta_2 \int_{\mathcal{C}} \frac{|\nabla h|^6}{h^4} dA.$$

Trocando h por h^3 na desigualdade acima, chegamos a

$$(53) \quad \int_{\mathcal{C}} \psi^3 h^6 dA \leq \beta_3 \int_{\mathcal{C}} |\nabla h|^6 dA, \quad \beta_3 = \text{const.}$$

A desigualdade (53) implica, escolhendo h como feito na demonstração anterior, que $\psi^3 = 0$. Portanto $K = 0$ e $f(\mathcal{C})$ é um plano. Isso conclui a prova do Teorema. ■

3. O Teorema de Bernstein: uma terceira demonstração.

Nesta seção vamos ver como o Teorema de Bernstein é consequência do Teorema de do Carmo-Peng demonstrado na seção anterior. De fato vamos demonstrar o seguinte:

4.8. TEOREMA. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, solução da equação das superfícies mínimas. Então o gráfico de f é uma superfície mínima estável. Em particular, se $U = \mathbb{R}^2$ o gráfico é uma superfície mínima completa estável, e portanto um plano pelo Teorema de do Carmo-Peng.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere o domínio U , a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e a superfície S definida pela função $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. E Considere uma variação $f + th$, $t \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, $h(x, y) \in C^2$ em U e $h|_{\partial U} = 0$. Temos

$$A(t) = \iint_U \sqrt{a + bt + ct^2} dx dy,$$

onde $a = 1 + f_x^2 + f_y^2$, $b = 2(f_x h_x + f_y h_y)$ e $c = h_x^2 + h_y^2$. A série de Taylor de $\sqrt{a + bt + ct^2}$ em $t = 0$ é dada por

$$\sqrt{a + bt + ct^2} = \sqrt{a} + \frac{bt}{2\sqrt{a}} - \frac{(b^2 - 4ac)t^2}{8\sqrt{a}^3} + Mt^3,$$

onde M é uma função de classe C^∞ de a , b , c e t . Portanto, a segunda variação de $A(t)$ escreve-se

$$A''(0) = \frac{1}{4} \iint_U \frac{4ac - b^2}{\sqrt{a}^3} dx dy,$$

onde $4ac - b^2 = 4(f_x h_y - f_y h_x)^2 + 4h_x^2 + 4h_y^2 \geq 0$. Mas $4ac - b^2 = 0$ se e somente se $h_x = h_y = 0$, ou seja, $h = 0$. Logo, é ponto de mínimo local, como queríamos demonstrar. ■

APÊNDICE A

1. O Laplaciano

Os operadores grad, div e o laplaciano Δ têm uma generalização natural para uma variedade riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Apresentaremos de forma resumida algumas propriedades importantes sobre eles que são utilizados nos capítulos precedentes. Para outros detalhes, veja [16].

A.1. DEFINIÇÃO. *Sejam $f \in D(M)$ e $X \in \mathcal{H}(M)$. Definimos o gradiente de f (com respeito a dada métrica) como um campo de vetores $\text{grad}_M f$ sobre M tal que*

$$\langle f, Y \rangle = df(Y) = Y(f), \quad p \in M, \quad \forall Y \in \mathcal{H}(M),$$

e a divergência como uma função $\text{div}_M X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\text{div } X)(p) = \text{traço}[Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)].$$

É fácil verificar que

$$\text{grad}(fg) = f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f, \quad \text{e}$$

$$\text{div}(fX) = X(f) + f \cdot \text{div } X = df(X) + f \cdot \text{div } X.$$

Num sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n sobre M , temos que

$$(54) \quad \text{grad}_M f = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

e

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \implies \text{div}_M X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n a_j \Gamma_{ji}^i \right),$$

onde g^{ij} com $1 \leq i, j \leq n$ são tais que (g^{ij}) é a matriz inversa de (g_{ij}) com $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$, e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel dadas pela fórmula

$$(55) \quad \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right] g^{km}.$$

A.2. PROPOSIÇÃO (Referencial geodésico). *Seja M uma variedade riemanniana de dimensão n e seja $p \in M$. Existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{H}(U)$, ortonormais em cada ponto de U , tais que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.*

Um simples cálculo mostra que num referencial geodésico temos

$$\text{grad}_M f(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i(p) \text{ e}$$

$$\text{div}_M X(P) = \sum_{i=1}^n E_i(a_i)(p), \text{ onde } X = \sum_{i=1}^n a_i E_i.$$

A.3. DEFINIÇÃO. *Definimos o laplaciano $\Delta_M f$ de f sobre M por*

$$\Delta_M f = \text{div}_M(\text{grad}_M f).$$

Num sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n sobre M , temos

$$(56) \quad \Delta_M f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k \right).$$

e num referencial geodésico E_1, \dots, E_n , o laplaciano escreve-se como

$$\Delta_M f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f))(p).$$

A.4. PROPOSIÇÃO.

$$\Delta_M(f \cdot g) = f \cdot \Delta_M g + g \cdot \Delta_M f + 2\langle \text{grad}_M f, \text{grad}_M g \rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam E_1, \dots, E_n um referencial geodésico. Então

$$\begin{aligned} \Delta_M(f \cdot g)(p) &= \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f \cdot g))(p) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i[gE_i(f) + fE_i(g)](p) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(g)E_i(f) + \sum_{i=1}^n gE_iE_i(f) + \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i(g) + \sum_{i=1}^n fE_iE_i(g) \\ (57) \quad &= g\Delta_M f(p) + f\Delta_M g(p) + 2 \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i(g)(p). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \langle \text{grad}_M f, \text{grad}_M g \rangle(p) &= \left\langle \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i, \sum_{j=1}^n E_j(g) E_j \right\rangle(p) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i(f) E_j(g) \delta_{ij}(p) \\
 (58) \qquad &= \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i(g)(p).
 \end{aligned}$$

Comparando (57) e (58), segue-se o resultado. ■

A.5. DEFINIÇÃO. *Sejam $v \in V$ e $\omega \in \Omega^k(V)$, definimos a contração $v \lrcorner \omega \in \Omega^{k-1}(V)$ por*

$$(v \lrcorner \omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Algumas propriedades do operador \lrcorner podem ser verificadas:

(1) $v \lrcorner (w \lrcorner \omega) = -w \lrcorner (v \lrcorner \omega)$

(2) Se v_1, \dots, v_n for uma base de V com base dual ϕ_1, \dots, ϕ_n , então

$$v_j \lrcorner (\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i_\alpha \forall \alpha, \\ (-1)^{\alpha-1} \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\phi_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} & \text{se } j = i_\alpha. \end{cases}$$

(3) Para $\omega_1 \in \Omega^k(V)$ e $\omega_2 \in \Omega^l(V)$, temos

$$v \lrcorner (\omega_1 \wedge \omega_2) = (v \lrcorner \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (v \lrcorner \omega_2).$$

(4) Se X é um campo de vetores sobre M e ω é uma k -forma sobre M , definimos uma $(k-1)$ -forma $X \lrcorner \omega$ por

$$(X \lrcorner \omega)(p) = X(p) \lrcorner \omega(p).$$

(5) Se ω_1 é uma k -forma, então

$$X \lrcorner (\omega_1 \wedge \omega_2) = (X \lrcorner \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (X \lrcorner \omega_2).$$

A.6. LEMA. *Seja M uma variedade riemanniana orientada n -dimensional com elemento de volume dV (que pode ser considerada como uma n -forma, já que M é orientável). Então para cada campo de vetores X sobre M temos*

$$(59) \qquad d(X \lrcorner dV) = (\text{div } X) \cdot dV$$

DEMONSTRAÇÃO. Se (59) vale para X_1, X_2 então claramente vale para $X_1 + X_2$. Agora

$$\begin{aligned} d(fX \lrcorner dV) &= d(f \cdot (X \lrcorner dV)) \\ &= df \wedge (X \lrcorner dV) + (f \cdot d(X \lrcorner dV)) \\ &= df \wedge (X \lrcorner dV) + f \cdot \operatorname{div} X \cdot dV. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} 0 = X \lrcorner (df \wedge dV) &= (X \lrcorner df) \wedge dV - df \wedge (X \lrcorner dV) \\ &= X(f) \cdot dV - df \wedge (X \lrcorner dV). \end{aligned}$$

Portanto nossa fórmula fica

$$\begin{aligned} d(fX \lrcorner dV) &= X(f) \cdot dV + f \cdot \operatorname{div} X \cdot dV \\ &= (\operatorname{div} fX) \cdot dV. \end{aligned}$$

Portanto (59) vale para fX . Agora seja X_1, \dots, X_n uma base móvel ortonormal orientada positiva com base dual $\theta^1, \dots, \theta^n$. Pelas considerações do parágrafo anterior, é suficiente provar (59) quando X é algum X_i e podemos tomar $X = X_1$. É fácil ver que

$$X_1 \lrcorner dV = X_1(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n) = \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n.$$

Portanto

$$\begin{aligned} d(X_1 \lrcorner dV) &= d(\theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n) = \sum_{j=2}^n (-1)^j \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^j \wedge \dots \wedge \theta^n \\ &= - \sum_{j=2}^n (-1)^j \theta^2 \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^j \wedge \theta^i \right) \wedge \dots \wedge \theta^n \\ &= - \sum_{j=2}^n (-1)^j \theta^2 \wedge \dots \wedge (\omega_1^j \wedge \theta^1) \wedge \dots \wedge \theta^n \\ &= - \sum_{j=2}^n (-1)^j \omega_1^j \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\theta^j} \wedge \dots \wedge \theta^n. \end{aligned}$$

Mas

$$\omega_1^j = \sum_{k=1}^n \omega_1^j(X_k) \cdot \theta^k = \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{X_k} X_1, X_j \rangle \theta^k.$$

Portanto obtemos

$$\begin{aligned} d(X_1 \lrcorner dV) &= \sum_{j=2}^n \langle \nabla_{X_j} X_1, X_j \rangle \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \\ &= (\operatorname{div} X_1) dV. \end{aligned}$$

■

A.7. TEOREMA (de Stokes). *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta n -dimensional, com fronteira e orientável. Seja ω uma $(n-1)$ -forma sobre M^n então*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

A.8. TEOREMA (da divergência). *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta n -dimensional, com fronteira e orientável, com vetor normal positivo ν sobre ∂M . Denote o elemento de volume de M por dV_n e de ∂M por dV_{n-1} . Seja X um campo de vetores sobre M . Então*

$$\int_M \operatorname{div} X dV_n = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dV_{n-1}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do teorema de Stokes e do fato que $X \lrcorner dV_n = \langle X, \nu \rangle dV_{n-1}$ sobre ∂M . ■

A.9. COROLÁRIO (Teorema de Green). *Se M é uma variedade riemanniana compacta orientada n -dimensional sem fronteira e X um campo de vetores sobre M , então*

$$\int_M \operatorname{div}_M X dV_n = 0.$$

A.10. PROPOSIÇÃO. *Seja M uma variedade riemanniana compacta orientada n -dimensional com fronteira e vetor normal positivo ν sobre ∂M . Então*

$$\int_M [f \Delta_M f + \langle \operatorname{grad}_M f, \operatorname{grad}_M f \rangle] dV_n = \int_{\partial M} \langle f \cdot \operatorname{grad}_M f, \nu \rangle dV_{n-1}.$$

Em particular, se $f = 0$ sobre ∂M (e a posterior se $\partial M = \emptyset$), então

$$\int_M f \Delta_M f dV_n = - \int_M \langle \operatorname{grad}_M f, \operatorname{grad}_M f \rangle dV_n.$$

DEMONSTRAÇÃO. Do teorema da divergência A.8 temos

$$\int_M \Delta_M(f^2) dV_n = \int_M \operatorname{div}_M(\operatorname{grad}_M f^2) dV_n = \int_{\partial M} \langle \operatorname{grad}_M f^2, \nu \rangle dV_{n-1}.$$

Por outro lado, da Proposição A.4 tem-se

$$\Delta_M(f^2) = 2f \Delta_M f + 2 \langle \operatorname{grad}_M f, \operatorname{grad}_M f \rangle \quad \text{e} \quad \operatorname{grad}_M(f^2) = 2f \operatorname{grad}_M f.$$

Comparando as duas expressões acima, segue-se o resultado. ■

A.11. PROPOSIÇÃO. Se $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ é uma parametrização conforme, isto é $g_{ij} = \frac{1}{\lambda^2} \delta_{ij}$, então

$$\Delta_M f = \frac{1}{\lambda^2} \Delta f$$

e

$$\text{grad}_M f = \frac{1}{\lambda} \text{grad } f,$$

onde grad e Δ são, respectivamente, os operadores usuais do gradiente e laplaciano.

DEMONSTRAÇÃO. Usando (55) temos que

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} = \Gamma_{ji}^i, \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

e os demais $\Gamma_{ij}^m = 0$. Como ψ é conforme, então (56) escreve-se

$$\Delta_M f = \sum_{i=1}^n g^{ii} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma_{ii}^k \right).$$

Agora tomando $n = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_M f &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{1}{\lambda^3} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\lambda} \Delta f. \end{aligned}$$

Usado (54) segue-se que

$$\text{grad}_M f = \frac{1}{\lambda} \text{grad } f. \quad \blacksquare$$

A.12. PROPOSIÇÃO. Num sistema de coordenadas isotérmicas, a curvatura gaussiana pode ser dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta_M \log \lambda.$$

A.13. PROPOSIÇÃO. Com as mesmas hipóteses da proposição anterior, e $K < 0$ temos a seguinte igualdade

$$\Delta_M \log(-K) = 4K.$$

A.14. LEMA. Se f é holomorfa, então

$$\Delta |f|^2 = 4|f'|^2 \quad e \quad \|\text{grad}(|f|^2)\|^2 = 4|f|^2|f'|^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para simplificar a notação, seja $f_1 = \Re(f)$, $f_2 = \Im(f)$.

$$\begin{aligned} \Delta|f|^2 &= \Delta f_1^2 + \Delta f_2^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \\ &= 2 \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + f_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 + f_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

Usando o fato de que f_1 e f_2 são harmônicas

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} - i \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

a equação acima reescreve-se como

$$\begin{aligned} \Delta|f|^2 &= 2 \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &= 4|f'|^2, \end{aligned}$$

o que prova o primeiro resultado. Agora, como

$$\begin{aligned} \text{grad}(|f|^2) &= \text{grad}(f_1^2 + f_2^2) \\ &= 2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \|\text{grad}(|f|^2)\|^2 &= \langle \text{grad}(|f|^2), \text{grad}(|f|^2) \rangle \\ &= 4 \left[\left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &= 4 \left[f_1^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + 2f_1 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_2^2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + f_1^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + 2f_1 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2^2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Pelo fato de que f_1 e f_2 satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y},$$

podemos rearranjar os termos da última expressão e obtemos

$$\|\text{grad}(|f|^2)\|^2 = (f_1^2 + f_2^2)|f'|^2 = 4|f|^2|f'|^2.$$

■

2. Desigualdades

Agora apresentaremos alguns resultados de análise que são usados na demonstração do teorema 4.4.

A.15. PROPOSIÇÃO. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Para todo $\epsilon > 0$, tem-se*

$$2ab \leq \epsilon a^2 + (1/\epsilon)b^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que

$$(\sqrt{\epsilon}a - (1/\sqrt{\epsilon})b)^2 \geq 0.$$

e segue o resultado. ■

A.16. PROPOSIÇÃO (Desigualdade de Young). *Sejam $1 < s, t < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^s}{s} + \frac{b^t}{t}, \quad \forall a, b > 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação $x \mapsto e^x$ é convexo e conseqüentemente

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{s} \log a^s + \frac{1}{t} \log b^t} \leq \frac{1}{s} e^{\log a^s} + \frac{1}{t} e^{\log b^t} = \frac{a^s}{s} + \frac{b^t}{t}.$$

■

Índice Remissivo

- Aplicação
 - normal de Gauss, 4
- Campo
 - de Jacobi, 36
- Catenária, 8
- Catenóide, 8
- Conexão
 - de Levi-Civita ou Riemanniana, 2
- Coordenadas
 - isotérmicas, 19
- Critério
 - de instabilidade, 36
- Curva
 - comprimento de uma, 31
 - divergente, 31
 - geodésica, 5
- Curvatura
 - média, 5
 - principal, 4
- Dados
 - de Weierstrass, 26
- Derivada
 - covariante, 2
 - direcional de um campo, 2
 - direcional de uma função, 2
- Diferencial
 - holomorfa, 24
- Direção
 - principal, 4
- Domínio
 - estável, 36
- Equação
 - das hipersuperfícies mínimas, 8
 - das superfícies mínimas, 8
- Esfera
 - de Riemann, 21
- Espaço
 - normal, 1
- Fórmula
 - da primeira variação, 10
 - da segunda variação, 35
 - de Gauss, 3
 - de Kozul, 3
 - de Weingarten, 3
- Forma
 - área, 9
 - do índice, 35
 - volume, 9
- Função
 - conjugada harmônica, 13
 - harmônica, 13
 - holomorfa, 13
 - meromorfa, 21
- Hipersuperfície
 - de revolução, 6
- hipersuperfície
 - totalmente umbílica, 6

- Imersão
 - mínima, 4
- Operador
 - de forma, 3
 - de Weingarten, 3
 - laplaciano, 22
- Parametrização
 - conforme, 21
 - gráfica, 8
 - isotérmica, 19
- Períodos
 - reais, 24
- Ponto
 - umbílico, 6
- Princípio
 - do Máximo, 14
- Representação
 - de Weierstrass, versão global, 24
 - de Weierstrass, versão local, 23
 - de Weierstrass, versão reduzida, 26
- Segunda forma fundamental, 3
- Subvariedade
 - mínima, 4
 - totalmente geodésica, 5
- Superfície
 - de Riemann, 21
 - mínima estável, 36
- Teorema
 - de Bernstein, 18, 34
 - de do Carmo-Peng, 36
 - de Fujimoto, 34
 - de Jörgens, 14
 - de Liouville, 14
 - de Ossermann, 32
 - de Picard, 14
 - de Uniformização, 32
 - egregium de Gauss, 3
- Transformação
 - de Lewy, 15
- Varição, 9
 - própria, 10
- Variedade
 - completa, 32
- Vetor
 - curvatura média, 4

Bibliografia

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, second edition, 1966.
- [2] L. V. Ahlfors e L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.
- [3] J. Lucas M. Barbosa e A. Gervásio Colares, *Minimal surfaces in \mathbb{R}^3* , Lecture notes in Mathematics 1195, Springer-Verlag, 1986.
- [4] E. Bombieri, E. de Giorgi e E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math, Vol 7, 1969, 243-268.
- [5] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan, Vol.40, No.2, 1988, 235-247.
- [6] M. do Carmo e A. M. da Silveira, *Globally Stable Complete Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* , Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 79, No. 2, June 1980, 345.
- [7] M. do Carmo e C. K. Peng, *Stable Complete Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3 are Planes*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 1, No. 6, November 1979, 903-906.
- [8] M. do Carmo e C. K. Peg, *Stable Complete Minimal Hypersurfaces*, Proceeding of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equation, Science Press, 1982, 1349-1358.
- [9] M. Perdigão do Carmo, *Superfícies Mínimas*, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.
- [10] M. Perdigão do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [11] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, 1990.
- [12] R. Finn e R. Osserman, *On the Gauss Curvature of Non-parametric Minimal Surfaces*, J. Analyse Math. 12, 1964, 351-364.
- [13] E. Giusti, *Life and Death of the Bernstein Problem*, Lectures Intern. Sem. Course, I.C.T.P., Trieste, 1972.
- [14] B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds*, Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1980.
- [15] R. Osserman, *Complete Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* , College on Differential Geometry (30 October - 1 December 1989).
- [16] M. Spivack, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol.4*, Boston, Mass.:Publish or Perish, 1970-1975.