CRITICALIDADE, SUPERLINEARIDADE E SUBLINEARIDADE PARA SISTEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES

Por Marcos da Silva Montenegro

1997

Criticalidade, Superlinearidade e Sublinearidade para Sistemas Elípticos Semilineares

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Marcos da Silva Montenegro e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de Junho de 1997

Prof.Dr. ______________________________
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Montenegro, Marcos da Silva

M764c Criticalidade, superlinearidade e sublinearidade para sistemas elípticos semilineares / Marcos da Silva Montenegro -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1997.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoremas de existência. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Dirichlet, problemas de. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 17 de junho de 1997

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

D G de Figueiredo

Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Prof (a). Dr (a). JEAN PIERRE GOSSEZ

David G. Costa

Prof (a). ~~Dr (a)~~. DAVID GOLDSTEIN COSTA

Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

Elves Alves de Barros e Silva

Prof (a). Dr (a). ELVES ALVES DE BARROS E SILVA

À minha esposa
Lourdes.

Agradecimentos

É com prazer que expresso meu profundo reconhecimento ao orientador Professor Djairo Guedes de Figueiredo por acreditar na realização deste trabalho, por me fornecer alguns dos trabalhos não publicados e relacionados ao tema em questão, por possibilitar-me alguns valiosos contatos com grandes pesquisadores da área e por ser, indubitávelmente e indiscutívelmente, um dos grandes contribuidores para o engrandecimento da matemática do Brasil, sendo, assim, um exemplo de profissional a ser seguido.

Agradeço imensamente à minha esposa pelo apoio e incentivo à elaboração desta dissertação em todos os momentos, assim como, pelo esforço para se adaptar a outra cidade com clima e costume diferentes dos de Campinas, me dando a tranqüilidade necessária para a conclusão da mesma.

Agradeço ao IMECC por viabilizar minha participação no encontro sobre análise funcional não-linear realizado no ICTP (Trieste) em abril de 1997, ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará pelo incentivo e ao CNPq pelo suporte financeiro indispensável.

Agradeço aos companheiros da área Elder, Elves, Marcelo, Orlando, Rafael e Serginho, pela amizade.

Finalmente, agradeço à banca examinadora, formada por Djairo Guedes de Figueiredo, Jean-Pierre Gossez, David Goldstein Costa, Orlando Francisco Lopes e Elves Alves de Barros e Silva, pelo interesse neste trabalho.

Indice

Capítulo 0

0. Introdução

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (u_i)_t - \Delta u_i = f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \mathbf{R}\times\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \mathbf{R}\times\partial\Omega, \ \text{se } \partial\Omega \neq \emptyset, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio, $N \geq 2$, $f_i : \Omega \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$ é uma função, $\forall i = 1, ..., m$, $m \geq 1$.

Sistemas da forma (0.1) aparecem, naturalmente, em alguns modelos físicos, químicos e biológicos (veja, por exemplo, [2],[29],[48],[57]). Portanto, é extremamente importante obter informação sobre a existência de estados estacionários para o sistema (0.1), isto é, existência de solução para

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \text{se } \partial\Omega \neq \emptyset, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{0.2}$$

O sistema acima, é denominado de sistema elíptico semilinear. Quando $m = 1$, (0.2) se reduz ao problema semilinear (caso escalar)

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \text{se } \partial\Omega \neq \emptyset \end{cases} \tag{0.3}$$

Durante os últimos 25 anos, muitos matemáticos têm se dedicado à questão de existência de soluções para (0.3). Em geral, isto é obtido via método monotônico (veja [5],[15],[16],[40]), variacional (veja [1],[6],[39],[53]) e/ou topológico (veja [3],[7],[15],[16],[21]). O método monotônico depende da existência de subsolução (isto é, função que satisfaz (0.3) com desigualdade $\leq$) e de supersolução (isto é, função que satisfaz (0.3) com desigualdade $\geq$). O método variacional consiste em encontrar pontos críticos de um certo funcional I que são soluções, em algum sentido, de (0.3). A aplicabilidade deste método depende de alguma condição de compacidade (como, por exemplo, Palais-Smale, Cerami, etc) e da geometria do funcional. Um problema deste método é sua restrição a problemas semilineares, ou seja, não se aplica quando f depende do gradiente. Finalmente, o método topológico consiste da obtenção de estimativas a priori para soluções de (0.3) e da aplicação da teoria do grau de Leray-Schauder. Em geral, a parte mais delicada deste método é a obtenção de estimativas a priori. São conhecidas, pelo menos, três técnicas para sua obtenção. A primeira é devida a Brézis e Turner[7], e se baseia em desigualdade do tipo Hardy-Sobolev (veja [38]). Esta técnica foi, posteriormente, aplicada a sistemas por Clément-De Figueiredo-Mitidieri[9] e De Morais Filho[25]. A segunda técnica é devida a De Figueiredo-Lions-Nussbaum[21], e se baseia na técnica de "Moving Planes" (veja [31],[42],[60]) e identidade do tipo Pohozâev. Sendo generalizado para sistema por Clément-De Figueiredo-Mitidieri[8]. A terceira técnica é devida a Gidas e Spruck[31]. Esta é denominada de blow-up, e se baseia na redução do problema de obter estimativa a um problema de não-existência. Uma parte deste trabalho trata da extensão desta técnica a certas classes de sistemas (veja [10],[62]).

Quando o domínio Ω é limitado, na aplicação do método variacional ou topológico, notamos a importância do crescimento em u da função f. Suponhamos que $\lim_{u\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u^p} = a(x)$, uniformemente em $x \in \Omega$, onde $p \succ 0$ e $a(x) \geq a \succ 0$. Quando $N \geq 3$ e p é menor que $\frac{N+2}{N-2}$, temos que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ é compacta. Neste caso, as condições de compacidade exigidas por esses métodos são, sob certas hipóteses, atingidas. Por outro lado, na literatura existem vários resultados de existência e não-existência de solução positiva para (??) em domínios limitados e não-limitados, quando $f(x,u) = u^p$ (veja [6],[21],[32],[33],[46]), em que o expoente $p = \frac{N+2}{N-2}$ é divisor para a questão de existência. Assim, o problema (0.3) é denominado subcrítico, se $p \prec \frac{N+2}{N-2}$, crítico, se $p = \frac{N+2}{N-2}$, e supercrítico, se $p \succ \frac{N+2}{N-2}$. Quando Ω é ilimitado, devido à não-compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, dizemos que há falta de compacidade para (0.3) (veja [6],[44]).

O estudo do problema (0.2) é mais delicado que (0.3), pois é mais difícil a aplicação do método monotônico ou topológico devido ao acoplamento do sistema. Além disso, em geral, (0.2) não é um problema variacional, isto é, não existe um funcional associado a (0.2), cujos pontos críticos são soluções, em algum sentido, deste sistema. Este método somente pode ser aplicado em casos excepcionais, como sistemas gradientes, isto é, $\exists G : \Omega \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$ de classe C^1 tal que $\nabla_u G = (f_1, ..., f_m)$, e Hamiltonianos, isto é, $m = 2$ e $\exists H : \Omega \times \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}_+$ de classe C^1 tal que $(H_{u_2}, H_{u_1}) = (f_1, f_2)$. O estudo de sistemas gradientes (veja [12],[13],[26]), via método variacional, é, em geral, menos difícil que sistemas Hamiltonianos (veja [14],[18],[22],[35],[36]). Isto é devido ao fato da parte quadrática do funcional associado a um sistema gradiente ser uma norma, implicando numa geometria mais simples.

Embora o tratamento de sistemas seja mais complexo que de equações, durante os últimos 10 anos, muitos trabalhos relacionados a (0.2) têm sido publicados (veja, por exemplo, [9]-[14],[20],[22],[25]-[27],[37]). Destes, grande parte tem se concentrado na questão de existência de solução positiva para o sistema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -\Delta u = v^{\alpha} \\ -\Delta v = u^{\beta} \end{array}\right. \text{em } \Omega \\ u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ se } \partial\Omega \neq \emptyset, \end{cases} \tag{0.4}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio, $N \geq 2$, $\alpha, \beta \succ 0$.

Muitos resultados interessantes sobre o problema (0.4) foram obtidos ao longo destes anos. Isto se deve, fundamentalmente, ao fato deste sistema ter estrutura variacional. Implicando, em particular, que suas possíveis soluções satisfaçam certas identidades integrais (veja [46],[51],[61]) que são muito úteis no estudo em questão. Os trabalhos desenvolvidos, no decorrer destes anos, foram: [8], [11], [18], [19], [28], [35], [36], [46], [47], [49], [54]-[56], [59] e [61]. Em 1992, Clément-De Figueiredo-Mitidieri[8] e Peletier-van der Vorst[49] introduziram, independentemente, o conceito de criticalidade para (0.4), dado pela hipérbole crítica $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{N-2}{N}$. Além disso, outros conceitos, tais como superlinearidade e sublinearidade para (0.4), são conhecidos. O sistema (0.4) é dito superlinear, se $\alpha\beta \succ 1$, e sublinear, se $\alpha\beta \leq 1$ (veja, por exemplo, [17],[28]). Os trabalhos anteriores e posteriores a estes têm contribuído para firmar estes conceitos como "apropriados" para o sistema (0.4). O significado preciso da palavra "apropriados", é que todos os resultados de existência e não-existência relacionados a estes conceitos coincidem com os do caso escalar. No capítulo 3, descrevemos a evolução e o conteúdo destes trabalhos.

Esta dissertação foi desenvolvida a partir da seguinte indagação:

"Será que existe algum conceito de criticalidade, superlinearidade e sublinearidade para sistemas elípticos semilineares "gerais" ?"

Esta é uma questão importantíssima pois, uma resposta afirmativa sugeriria a existência de uma teoria unificadora. No capítulo 1, damos o significado da palavra "gerais" e procuramos responder afirmativamente à questão colocada. Os conceitos que definiremos, são fortalecidos pelos trabalhos relacionados a (0.4) e os artigos [46], [52] e [58]. Estas noções aparecerão, naturalmente, na demonstração de um resultado do tipo Liouville, o teorema 1.2.1, que generaliza o teorema 1.0.1 devido a Souto[59].

Este trabalho está organizado em 3 capítulos. O primeiro está dividido em quatro seções. Na primeira, enunciamos alguns fatos conhecidos que são utilizados ao longo do capítulo. Na segunda seção, mostramos alguns resultados do tipo Liouville e introduzimos os conceitos de criticalidade, superlinearidade e sublinearidade para sistemas elípticos semilineares. Na terceira seção, nos baseamos nos resultados de não-existência da seção anterior e utilizamos a técnica de blow-up para obter estimativas a priori para alguns sistemas elípticos semilineares com caráter superlinear e subcrítico. Enfim, na quarta seção, utilizamos as estimativas obtidas e teoria do grau em cones para obter existência de soluções para algumas classes de sistemas da forma (0.2). O segundo capítulo está dividido em três seções. Na primeira, enunciamos alguns fatos básicos sobre imersões de espaços de Sobolev fracionários e introduzimos um conceito de solução fraca para sistemas que é útil no decorrer do capítulo. Na segunda seção, obtemos algumas estimativas para sistemas elípticos semilineares com caráter sublinear. Na terceira seção, utilizamos estas estimativas, teoria do grau e iteração monotônica para obter resultados de existência para algumas classes de sistemas elípticos semilineares. No capítulo 3, nos baseamos nos dois capítulos anteriores e nos artigos relacionados a (0.4), e conjecturamos alguns resultados. Alguns destes são, parcialmente, respondidos nos dois primeiros capítulos. O capítulo 3 está dividido em duas seções. A primeira é dedicada à problemas em $\mathbf{R}^N$ (ou $\mathbf{R}^N_+$) e a segunda, à problemas em domínios limitados.

Os dois primeiros capítulos contêm vários exemplos que refletem a importância e a aplicabilidade dos principais resultados deste trabalho.

O final destas notas contém um apêndice com alguns resultados clássicos sobre a teoria das equações elípticas lineares de segunda ordem que são utilizados ao longo da mesma, fazendo com que o texto esteja autocontido.

Esperamos que, a forma com que esta tese foi escrita e organizada, implique em uma agradável leitura.

Capítulo 1

O Conceito de Criticalidade para Sistemas Elípticos

0. Introdução

Durante a última década, problemas de existência e não-existência de soluções de sistemas elípticos semilineares, têm sido fonte de ativa pesquisa. Em particular, tem sido objeto de muito interesse, a investigação de soluções para o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(v) \\ -\Delta v = g(u) \end{cases} \text{em } \Omega \qquad (0.1)$$
$$u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ se } \partial\Omega \neq \phi,$$

onde Ω é um domínio de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 2$.

Existem, basicamente, duas razões que explicam o grande interesse no estudo de sistemas da forma (0.1). A primeira é de ordem física: estes sistemas aparecem, naturalmente, como estados estacionários de alguns modelos de reação-difusão. A segunda é de ordem matemática: estes sistemas têm estrutura variacional, isto é, existe um funcional associado a (0.1), cujos pontos críticos são soluções fracas, em algum sentido, de (0.1). Em particular, suas soluções satisfazem algumas interessantes identidades integrais (veja [46],[51],[61]), como identidade do tipo Pohõzaev (veja [46]).

Em 1992, Clément-De Figueiredo-Mitidieri[8] e Peletier-Van der Vorst[49] introduziram, independentemente, o conceito de criticalidade para o sistema (0.1), através da hipérbole crítica. Nos seus argumentos, certas identidades integrais desempenharam papel fundamental, como, por exemplo, identidades do tipo Pohõzaev. Posteriormente, De Figueiredo-Felmer[18] deram um tratamento variacional ao sistema (0.1) com conceito de criticalidade apropriado. De acordo com estes trabalhos, e outros, tais como [35], [46], [49], [54], [56], [61] é natural colocarmos a seguinte questão:

"O conceito de criticalidade para o sistema (0.1) está relacionado com o fato deste sistema ter estrutura variacional?"

Acreditando na negação desta questão, definiremos uma classe de sistemas que nos possibilitará introduzir um conceito geral de criticalidade. No entanto, estes sistemas não são variacionais, e tão pouco, possuem identidades do tipo Pohõzaev. Portanto, é natural refletirmos sobre a seguinte indagação:

"As identidades integrais utilizadas no estudo do sistema (0.1) são realmente fundamentais?"

A motivação para definição do conceito geral de criticalidade aparecerá, de maneira natural, na demonstração do teorema 1.2.1. Este teorema generaliza o seguinte resultado devido a Souto [59]:

Teorema 1.0.1: Sejam $u, v \in C^2(\mathbf{R}^N)$ funções não-negativas satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u + v^p \leq 0 \\ \Delta v + u^q \leq 0, \end{cases} \quad \text{em } \mathbf{R}^N$$

onde $N \geq 2$, $p, q \succ 0$.

Suponha que $\frac{N-2}{N-1} \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq 1$, se $N \geq 3$, ou $pq \geq 1$, se $N = 2$. Então, $u \equiv 0 \equiv v$ em $\mathbf{R}^N$.

Como em [59], a demonstração do teorema 1.2.1 será baseada em um resultado do tipo Liouville devido a Gidas (veja o lema 1.1.1 da seção 1).

Este capítulo está dividido em 4 seções. Na primeira, enunciaremos alguns resultados bem conhecidos que serão úteis ao longo deste trabalho. Na segunda seção, definiremos uma classe de sistemas para a qual introduziremos um conceito de criticalidade. Em seguida, demonstraremos alguns resultados do tipo Liouville. Baseado na técnica de demonstração destes, definiremos os conceitos de criticalidade, superlinearidade e sublinearidade para a classe em questão. Na terceira seção, utilizaremos a técnica de blow-up para obter estimativas a priori para soluções não-negativas de alguns sistemas elípticos semilineares com caráter superlinear e subcrítico. Enfim, na quarta seção, utilizaremos a teoria do grau para obter alguns resultados de existência.

1. Preliminares

Nesta seção, enunciaremos alguns fatos conhecidos que serão utilizados no decorrer deste capítulo. Comecemos com alguns resultados do tipo Liouville para equações devido a Gidas[30] e Birindelli-Mitidieri[4]:

Lema 1.1.1: Seja $u \in C^2(\mathbf{R}^N)$ uma supersolução não-negativa de $\Delta u + u^p = 0$ em $\mathbf{R}^N$, com $1 \leq p \leq \frac{N}{N-2}$, se $N \geq 3$, e $p \geq 1$, se $N = 2$. Então, $u \equiv 0$ em $\mathbf{R}^N$.

Lema 1.1.2: Seja $u \in C^2(\mathbf{R}^N_+) \cap C(\{x : x_N \geq 0\})$ uma supersolução não-negativa de $\Delta u + u^p = 0$ em $\mathbf{R}^N_+$, com $1 < p \leq \frac{N+1}{N-1}$. Então, $u \equiv 0$ em $\mathbf{R}^N_+$.

OBS 1.1.1: Na realidade, Gidas enunciou o lema 1.1.1 para solução e $p > 1$, embora, com a mesma demonstração, o resultado seja válido para supersolução. O caso $p = 1$ pode ser encontrado em [59]. Além disso, em [4], Birindelli e Mitidieri mostraram que o expoente $p = \frac{N+1}{N-1}$ do lema 1.1.2 é o melhor. •

Para soluções, temos os seguintes resultados devido a Gidas e Spruck ([32],[33]):

Lema 1.1.3: Seja $u \in C^2(\mathbf{R}^N)$ uma solução não-negativa de $\Delta u + u^p = 0$ em $\mathbf{R}^N$, com $1 \prec p \prec \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, e $p \succ 1$, se $N = 2$. Então, $u \equiv 0$ em $\mathbf{R}^N$.

Lema 1.1.4: Seja $u \in C^2(\mathbf{R}^N_+) \cap C(\{x : x_N \geq 0\})$ uma solução não-negativa de $\Delta u + u^p = 0$ em $\mathbf{R}^N_+$, $u = 0$ sobre $x_N = 0$, com $1 \prec p \prec \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, e $p \succ 1$, se $N = 2$. Então, $u \equiv 0$ em $\mathbf{R}^N_+$.

OBS 1.1.2: Através da técnica de "Moving Planes", como utilizada em [19], podemos demonstrar que o lema 1.1.3 é válido para $0 \prec p \prec \frac{N+2}{N-2}$. Além disso, com a mesma demonstração dada em [32], é fácil ver que o lema 1.1.4 ocorre para $0 \prec p \leq \frac{N+2}{N-2}$. •

Sejam $f \in L^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{L} \equiv \sum_{k,j=1}^N A_{kj}(x)D_{kj} + \sum_{k=1}^N b_k(x)D_k$ um operador uniformemente elíptico, isto é, existem $\Lambda, \lambda \succ 0$ tais que $\lambda \mid \xi \mid^2 \leq \sum_{k,j=1}^N A_{kj}(x)\xi_k\xi_j \leq \Lambda \mid \xi \mid^2$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^N$.

O próximo lema trata da existência de uma função barreira.

Lema 1.1.5: Suponha que $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio de classe C^2, satisfazendo a condição da esfera exterior em $x_0 \in \partial\Omega$, isto é, existe uma bola $\mathbf{B} = \mathbf{B}_R(x)$ (ou semi-espaço) tal que $x_0 \in \overline{\Omega} \cap \mathbf{B} = \partial\Omega \cap \mathbf{B}$. Seja $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo $\mathcal{L}u = f$ em Ω. Então, existe uma função barreira ω tal que

$$\omega = 0 \text{ sobre } \partial\mathbf{B},$$
$$\begin{cases} u(x) \leq \omega(x) + \sup\limits_{y \in \partial\Omega} u(y) \\ \mid \nabla\omega(x) \mid \leq c \end{cases}, \quad \forall x \in \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \partial\mathbf{B}) \leq a\},$$

onde a e c dependem apenas de $R, N, \Lambda, \lambda, \| u \|_{L^\infty}, \| f \|_{L^\infty}$.

Dem: Veja [34], páginas 335 e 336.■

Sejam $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $\mathcal{L} \equiv \sum_{k,j=1}^N D_k(A_{kj}(x)D_j)$ um operador uniformemente elíptico e $A(x) = (a_{il}(x))$ uma $m \times m$ matriz simétrica e não-negativa, $\forall x \in \Omega$, onde $A_{kj} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_{il} \in L^\infty(\Omega)$, $\forall k, j = 1, ..., N$, $\forall i, l = 1, ..., m$.

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = \sum_{l=1}^m a_{il}(x)u_l + f_i(x) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \ , \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{1.1}$$

Antes de enunciarmos um resultado sobre príncipio de máximo para o sistema (1.1), fixemos algumas notações. Sejam $\lambda_1 \succ 0$ o primeiro autovalor de $(-\mathcal{L}, H_0^1(\Omega))$ e φ_1 uma autofunção positiva associada a λ_1. Pelos lemas A.3 e A.7, o operador $(-\mathcal{L}) : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ possui inverso contínuo e positivo. Denotemos $S = (-\mathcal{L})^{-1}$, $u = (u_1, ..., u_m)$, $F = (f_1, ..., f_m)$ e $\rho(.)$ a função raio espectral. Dizemos que $u \geq 0$, se $u_i \geq 0$, $\forall i = 1, ..., m$. Considere $(L^2(\Omega))^m$ munido do produto interno $(u, v) = \sum_{i=1}^m (u_i, v_i)_{L^2}$.

Lema 1.1.6: Suponha que $\sup_{x \in \Omega} \rho(A(x)) \prec \lambda_1$. Então, (1.1) satisfaz o príncipio de máximo: Dado $F \in (L^2(\Omega))^m$ tal que $F \geq 0$ em $\text{qtp}(\Omega)$ e $u \in (H_0^1(\Omega))^m \cap (H^2(\Omega))^m$ satisfazendo (1.1), temos $u \geq 0$ em qtp(Ω).

Dem: Seja $T = diag(S,...,S) \circ A : (L^2(\Omega))^m \to (L^2(\Omega))^m$. Inicialmente, mostraremos que $\| T \| \prec 1$. De fato, $\| T \| \leq \| diag(S,...,S) \| . \| A \|$. Afirmamos que $\| diag(S,...,S) \| = \frac{1}{\lambda_1}$ e que $\| A \| \leq \sup_{x\in\Omega} \rho(A(x))$. Para ver isto, observemos que $\| diag(S,...,S)u \|^2 = \sum_{i=1}^m \| Su_i \|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{i=1}^m \| u_i \|_{L^2}^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \| u \|_{L^2}^2$, $\forall u \in (L^2(\Omega))^m$ e $diag(S,...,S)(\varphi_1,...,\varphi_1) = \frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1,...,\varphi_1)$. Por outro lado, como $A(x)$ é simétrica, temos $(Au, u) = \int_\Omega (A(x)u, u)_{\mathbf{R}^m} dx \leq \int_\Omega \rho(A(x))(u, u)_{\mathbf{R}^m} dx \leq \sup_{x\in\Omega} \rho(A(x)) \| u \|^2, \forall u \in (L^2(\Omega))^m$. Portanto, como $A : (L^2(\Omega))^m \to (L^2(\Omega))^m$ é um operador linear, contínuo e simétrico, temos que $\| A \| \leq \sup_{x\in\Omega} \rho(A(x))$. Logo, $\| T \| \leq \frac{1}{\lambda_1} \sup_{x\in\Omega} \rho(A(x)) \prec 1$. Agora, sejam $F \in (L^2(\Omega))^m$ tal que $F \geq 0$ e $u \in (H_0^1(\Omega))^m \cap (H^2(\Omega))^m$ satisfazendo (1.1). Observe que podemos escrever (1.1) como

$$u = Tu + diag(S,...,S)F \tag{1.2}$$

Como T é positivo e $\| T \| < 1$, então $I - T$ é invertível e $(I-T)^{-1}$ é positivo. Portanto, $u = (I-T)^{-1} \circ diag(S,...,S)F \geq 0$.■

OBS 1.1.3: Quando $A(x) = A$, e é apenas não-negativa, a condição $\rho(A) \prec \lambda_1$ é necessária e suficiente para que o sistema (1.1) satisfaça o princípio de máximo (veja o teorema 2.1 em [23] e o teorema 2.6 em [45]).•

Agora, considere o seguinte resultado clássico da teoria do grau em cones:

Lema 1.1.7: Seja C um cone em um espaço de Banach X e $T : C \to C$ uma aplicação compacta com $T(0) = 0$. Assuma que existam $t_0 \succ 0$, $0 \prec r \prec R$ tais que

(i) $u \neq tTu$, $\forall u \in C$ tal que $\| u \|_X = r$, $\forall t \in [0,1]$,

(ii) Existe uma aplicação compacta $H : C \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to C$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
&(ii.1) \quad H(u,0) = Tu,\ \forall u \in C \text{ com } \| u \|_X \leq R,\\
&(ii.2) \quad H(u,t) \neq u,\ \forall u \in C \text{ com } \| u \|_X \leq R,\ \forall t \geq t_0,\\
&(ii.3) \quad H(u,t) \neq u,\ \forall u \in C \text{ com } \| u \|_X = R,\ \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Então, T possui, pelo menos, um ponto fixo $u \in C$ tal que $r \prec \| u \|_X \prec R$.

Dem: Veja [15] ou [41].■

Lema 1.1.8 Seja B uma $m \times m$ matriz não-negativa. Sejam $\lambda \in (0, +\infty)$ e $x \in \mathbf{R}_+^m$ tais que $\lambda x - Bx \in \mathbf{R}_+^m$. Então, $\rho(B) \prec \lambda$.

Dem: Pelo teorema de Perron-Frobenius, $\rho(B)$ é um autovalor de B com um autovetor $x_0 \in \mathbf{R}^m_+$. Para cada $t \succ 0$, temos

$$\lambda(x - tx_0) - B(x - tx_0) = \lambda x - Bx + t(\rho(B) - \lambda)x_0. \tag{1.3}$$

Agora, suponhamos, por absurdo, que $\lambda \leq \rho(B)$. Para $t \succ 0$ suficientemente pequeno, temos que $x - tx_0 \in \mathbf{R}^m_+$, e para $t \succ 0$ suficientemente grande, temos que $x - tx_0 \notin \overline{\mathbf{R}}^m_+$. Assim, seja $t_0 \succ 0$ tal que $x - t_0x_0 \in \partial\mathbf{R}^m_+$. Obviamente, $x \neq t_0x_0$, pois caso contrário, $\lambda x - Bx = t_0(\lambda - \rho(B))x_0 \notin \mathbf{R}^m_+$, absurdo. Logo, $x - t_0x_0 \in \partial\mathbf{R}^m_+\backslash\{0\}$. Por outro lado, (1.3) implica que $\lambda(x - t_0x_0) \in \mathbf{R}^m_+$. Portanto, $x - t_0x_0 \in \mathbf{R}^m_+$, absurdo.■

2. Resultados de Não-Existência e o Conceito de Criticalidade para Sistemas Elípticos

Consideremos o seguinte sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(u_{\sigma_i}) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \text{ , se } \partial\Omega \neq \emptyset, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 2$, $f_i : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função contínua, $\forall i = 1, ..., m$, $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma função.

Um dos principais objetivos desta seção é introduzir um conceito de criticalidade para sistemas da forma (2.1). Para isto, definiremos a seguinte classe de sistemas:

Definição 1.2.1: Diremos que o sistema (2.1) é $m-$acoplado, se $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$.

A introdução do conceito de criticalidade será motivada pela demonstração de resultados de não-existência para os seguintes sistemas

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } I\!R^N, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i &\geq 0 \text{ em } I\!R^N, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } I\!R^N_+, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i &\geq 0 \text{ em } I\!R^N_+, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $N \geq 2$, $\alpha_i > 0, \forall i = 1, ..., m$, e $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma função.

Antes de enunciarmos estes resultados, daremos a seguinte definição:

Definição 1.2.2: Diremos que $(u_1, ..., u_m) \in (C^2(I\!R^N))^m$ é uma supersolução de (2.2), se $u_i \geq 0$ em $I\!R^N$, e $-\Delta u_i \geq u_{\sigma_i}^{\alpha_i}$ em $I\!R^N$, $\forall i = 1, ..., m$. Diremos que $(u_1, ..., u_m) \in (C^2(I\!R^N_+))^m \cap (C(\{x : x_N \geq 0\}))^m$ é uma supersolução de (2.3), se $u_i \geq 0$ em $I\!R^N_+$ e $-\Delta u_i \geq u_{\sigma_i}^{\alpha_i}$ em $I\!R^N_+$, $\forall i = 1, ..., m$.

Teorema 1.2.1: Suponhamos que (2.2) é $m-$acoplado e $0 \leq \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \leq \frac{2}{m(N-2)}$, se $N \geq 3$, ou $\prod_{j=1}^m \alpha_j \geq 1$, se $N = 2$. Seja $(u_1, ..., u_m) \in (C^2(\mathbf{R}^N))^m$ uma supersolução de (2.2). Então, $u_i \equiv 0$ em $\mathbf{R}^N$, $\forall i = 1, ..., m$.

Teorema 1.2.2: Suponhamos que (2.3) é $m-$acoplado e $0 < \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \leq \frac{2}{m(N-1)}$. Seja $(u_1, ..., u_m) \in (C^2(\mathbf{R}^N_+))^m \cap (C(\{x : x_N \geq 0\}))^m$ uma supersolução de (2.3). Então, $u_i \equiv 0$ em $\mathbf{R}^N_+$, $\forall i = 1, ..., m$.

Passemos à demonstração do teorema 1.2.1:

Dem: Suponhamos, por absurdo, que $u_l \not\equiv 0$ em $I\!R^N$, para algum $l \in \{1, ..., m\}$. Então, pelo lema A.2, $u_{\sigma_l^{-1}} \succ 0$ em $\mathbf{R}^N$. Como o sistema (2.2) é $m-$acoplado, aplicando o lema A.2, sucessivamente, temos $u_i \succ 0$ em $\mathbf{R}^N$, $\forall i = 1, ..., m$. Assim, definindo $v = \prod_{j=1}^m u_j$, obtemos

$$\Delta v = \sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} (\nabla u_i, \nabla u_j)_{\mathbf{R}^N} + \sum_{i=1}^m \frac{v}{u_i} \Delta u_i \ . \tag{2.4}$$

Como $(u_1, ..., u_m)$ é uma supersolução de (2.2), e $u_i \succ 0$ em $\mathbf{R}^N$, $\forall i = 1, ..., m$, por (2.4), temos

$$\Delta v \leq \sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} (\nabla u_i, \nabla u_j)_{\mathbf{R}^N} - \sum_{i=1}^m \frac{v}{u_i} u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \ . \tag{2.5}$$

Para estimar o primeiro somatório do lado direito de (2.5), observemos que, em geral, temos as seguintes relações

$$\frac{|\nabla v|^2}{v} = \sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} (\nabla u_i, \nabla u_j)_{\mathbf{R}^N} + \sum_{i=1}^m \frac{v}{u_i^2} |\nabla u_i|^2, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i\prec j} 2\frac{v}{u_i u_j}(\nabla u_i, \nabla u_j)_{\mathbf{R}^N} \leq (m-1)\sum_{i=1}^{m} \frac{v}{u_i^2} \mid \nabla u_i \mid^2 . \tag{2.7}$$

Combinando (2.6) e (2.7), obtemos

$$\sum_{i\prec j} 2\frac{v}{u_i u_j}(\nabla u_i, \nabla u_j)_{\mathbf{R}^N} \leq \frac{m-1}{m}\frac{\mid \nabla v \mid^2}{v} . \tag{2.8}$$

Agora, para estimar o segundo somatório do lado direito de (2.5), mostraremos que existem $\gamma \geq 1$, $s_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, tais que

$$v^\gamma = \prod_{i=1}^{m} (\frac{v}{u_i u_{\sigma_i}})^{\frac{s_i}{\alpha_i+1}} u_{\sigma_i}^{s_i} , \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{\alpha_i + 1} = 1 . \tag{2.10}$$

Igualando os expoentes correspondentes em (2.9), vemos que é suficiente mostrar que existem $\gamma \geq 1$, $s_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, satisfazendo (2.10) e

$$s_i + \sum_{j \neq i, \sigma_i} \frac{s_j}{\alpha_j + 1} = \gamma, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.11}$$

Agora, analisaremos dois casos:

1º Caso: $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \succ 1$.

Combinando (2.10) e (2.11), obtemos

$$s_{\sigma_i} = \frac{\alpha_i(\alpha_{\sigma_i} + 1)}{\alpha_i + 1} s_i - (\gamma - 1)(\alpha_{\sigma_i} + 1), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.12}$$

Utilizando (2.12) e calculando $s_{\sigma_i^2}$ e $s_{\sigma_i^3}$ em termos de s_i, temos

$$s_{\sigma_i^2} = \frac{\alpha_i \alpha_{\sigma_i}(\alpha_{\sigma_i^2} + 1)}{\alpha_i + 1} s_i - (\gamma - 1)(\alpha_{\sigma_i} + 1)(\alpha_{\sigma_i^2} + 1), \ \forall i = 1, ..., m,$$

$$s_{\sigma_i^3} = \frac{\alpha_i \alpha_{\sigma_i} \alpha_{\sigma_i^2}(\alpha_{\sigma_i^3} + 1)}{\alpha_i + 1} s_i - (\gamma - 1)(\alpha_{\sigma_i}\alpha_{\sigma_i^2} + \alpha_{\sigma_i^2} + 1)(\alpha_{\sigma_i^3} + 1),$$

$\forall i = 1, ..., m.$

Assim, procedendo indutivamente, concluímos que

$$s_{\sigma_i^k} = \frac{(\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{\sigma_i^j})(\alpha_{\sigma_i^k} + 1)}{\alpha_i + 1} s_i - (\gamma - 1)(\sum_{j=1}^{k-1}(\prod_{l=j}^{k-1} \alpha_{\sigma_i^l}) + 1)(\alpha_{\sigma_i^k} + 1),$$

$$\forall i = 1, ..., m. \tag{2.13}$$

Como σ é uma bijeção, temos

$$s_i = s_{\sigma_i^m}, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.14}$$

Portanto, como $\sigma_i^l \neq i$, $\forall l = 1, ..., m-1$, por (2.13) e (2.14), temos

$$s_i = (\prod_{j=1}^{m} \alpha_j)s_i - (\gamma - 1)(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}) + 1)(\alpha_i + 1), \ \forall i = 1, ..., m.$$

Conseqüêntemente,

$$s_i = \frac{(\gamma - 1)(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}) + 1)}{(\prod_{j=1}^{m} \alpha_j) - 1}(\alpha_i + 1), \ \forall i = 1, ..., m \ . \tag{2.15}$$

Por outro lado, utilizando (2.10) e (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} m\gamma &= \sum_{i=1}^{m}(s_i + \sum_{j \neq i, \sigma_i} \frac{s_j}{\alpha_j + 1}) = \sum_{i=1}^{m} s_i + (m-2)\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{\alpha_i + 1} \\ &= \sum_{i=1}^{m} s_i + (m-2). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, combinando (2.15) e (2.16), obtemos

$$(\gamma - 1)\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}[(\alpha_i + 1)(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}) + 1)]}{(\prod_{j=1}^{m} \alpha_j) - 1} - m\right) = 2. \tag{2.17}$$

Observemos a seguinte relação

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}[(\alpha_i + 1)(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}) + 1)] + m - m\prod_{j=1}^{m} \alpha_j = \\ &2(\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m) \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Assim, por (2.17) e (2.18), concluímos que

$$\gamma = 1 + \frac{(\prod_{j=1}^{m} \alpha_j) - 1}{\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m}. \tag{2.19}$$

Como estamos supondo que $\prod_{j=1}^{m} \alpha_j \succ 1$, temos, por (2.19), que $\gamma \succ 1$, e, por (2.15), que $s_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$.

2º Caso: $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $n \in \mathbf{N}$, seja $\alpha_i^n \succ \alpha_i$ tal que $\alpha_i^n \to \alpha_i$, $\forall i = 1, ..., m$. Observando que $\prod_{j=1}^m \alpha_j^n \succ 1$, pelo primeiro caso, existem $\gamma_n \geq 1$ e $s_i^n \succ 0$, $i = 1, ..., m$, satisfazendo sistema

$$\begin{cases} s_i^n + \sum_{j \neq i, \sigma_i} \frac{s_j^n}{\alpha_j^n + 1} = \gamma_n, \ \forall i = 1, ..., m \\ \sum_{i=1}^m \frac{s_i^n}{\alpha_i^n + 1} = 1 \end{cases} \tag{2.20}$$

Além disso, temos

$$s_i^n = \frac{(\gamma_n - 1)(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}^n) + 1)}{(\prod_{j=1}^m \alpha_j^n) - 1}(\alpha_i^n + 1), \ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.21}$$

$$\gamma_n = 1 + \frac{(\prod_{j=1}^m \alpha_j^n) - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}^n)) + m}. \tag{2.22}$$

Combinando (2.21) e (2.22), obtemos

$$s_i^n = \frac{\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}^n) + 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}^n)) + m}(\alpha_i^n + 1), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.23}$$

Tomando o limite em (2.22) , (2.23) e (2.20), concluímos que

$$\gamma = 1 \ \text{ e}$$

$$s_i = \frac{\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}) + 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m}(\alpha_i + 1), \ \forall i = 1, ..., m \tag{2.24}$$

satisfazem (2.10) e (2.11). Além disso, por (2.24), $s_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$.
Enfim, mostramos que existem $\gamma \geq 1$, $s_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, satisfazendo (2.10) e (2.11). Agora, utilizando (2.9), (2.10) e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} v^\gamma &= \prod_{i=1}^m (\frac{v}{u_i u_{\sigma_i}})^{\frac{s_i}{\alpha_i + 1}} u_{\sigma_i}^{s_i} \leq \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{\alpha_i + 1}(\frac{v}{u_i u_{\sigma_i}}) u_{\sigma_i}^{\alpha_i + 1} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{\alpha_i + 1} \frac{v}{u_i} u_{\sigma_i}^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Combinando (2.5), (2.8) e (2.25), concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta v + v^\gamma &\leq \sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} (\nabla u_i, \nabla u_j)_{\mathbf{R}^N} - \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{s_i}{\alpha_i + 1}\right) \frac{v}{u_i} u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \\ &\leq \sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} (\nabla u_i, \nabla u_j)_{\mathbf{R}^N} \leq \frac{m-1}{m} \frac{|\nabla v|^2}{v}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Utilizando a mudança de variável $v = w^m$ em (2.26), obtemos

$$\Delta w + \frac{1}{m} w^{m\gamma - m + 1} \leq 0. \tag{2.27}$$

Agora, aplicando o lema 1.1.1, concluímos a demonstração. ∎

A demonstração do teorema 1.2.2 é análoga à acima. Apenas, ao invés do lema 1.1.1, devemos utilizar o lema 1.1.2.

OBS 1.2.1: Quando $m = 2$, o teorema 1.2.1 coincide com o teorema 1.0.1 devido a Souto.•

Agora, nos basearemos na redução ao caso escalar, expressa por (2.27), e nas noções de criticalidade, superlinearidade e sublinearidade para equações, e introduziremos estes conceitos para sistemas da forma (2.1). Para isto, basta comparar o expoente $m\gamma - m + 1$ com $\frac{N+2}{N-2}$ e 1.

Suponhamos que o sistema (2.1) é $m-$acoplado, e que existem $\alpha_i, \mu_i \succ 0, \forall i = 1, ..., m$, tal que

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f_i(u)}{u^{\alpha_i}} = \mu_i, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Definição 1.2.3: Diremos que o sistema (2.1) é crítico, se $N \geq 3$ e $\frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} = \frac{4}{m(N-2)}$.

Definição 1.2.4: Diremos que o sistema (2.1) é subcrítico, se $\frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \prec \frac{4}{m(N-2)}$, quando $N \geq 3$, e $\alpha_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, quando $N = 2$.

Definição 1.2.5: Diremos que o sistema (2.1) é supercrítico, se $N \geq 3$ e $\frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \succ \frac{4}{m(N-2)}$.

Definição 1.2.6: Seja $\mathcal{H}^m$ a $(m-1)$-variedade definida por $\mathcal{H}^m = \{(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbf{R}_+^m : \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} = \frac{4}{m(N-2)}\}$. Denominaremos $\mathcal{H}^m$ de $(m-1)$-hiperbolóide crítico.

Definição 1.2.7: Diremos que o sistema (2.1) é superlinear, se $\prod_{j=1}^m \alpha_j \succ 1$.

Definição 1.2.8: Diremos que o sistema (2.1) é sublinear, se $\prod_{j=1}^{m} \alpha_j \leq 1$.

As três observações abaixo fortalecem os conceitos introduzidos acima.

OBS 1.2.2: Quando $m = 2$, o conceito de criticalidade representado pelas definições 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, se iguala à noção de criticalidade introduzida, independentemente, por Clement-De Figueiredo-Mitidieri e Peletier-Van der Vorst. Em particular, $\mathcal{H}^2$ coincide com a hipérbole crítica.•

OBS 1.2.3: Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + u|u|^{s-1} \text{ em } \mathbf{B} \\ D^k u = 0 \text{ sobre } \partial\mathbf{B}, \forall\, k = 0, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{2.28}$$

onde $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^N$ é a bola unitária, $N \geq 2$.

Em 1990, Pucci e Serrin[52] introduziram o conceito de criticalidade para a equação poliharmônica (2.28) com condições de fronteira de Dirichlet. Na verdade, eles generalizaram o trabalho de Brézis e Nirenberg[6], sobre soluções positivas de equações semilineares involvendo expoente crítico. Supondo que $N > 2m$, o problema (2.28) é crítico, quando $s = \frac{N+2m}{N-2m}$. Posteriormente, Mitidieri[46] obteve o mesmo conceito de criticalidade para equações poliharmônicas com condições de fronteira de Navier. Mais precisamente, foi considerado o problema de não-existência de solução positiva (veja [58], para o problema de existência) para o seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = u|u|^{s-1} \text{ em } \Omega \\ (\Delta)^k u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ \forall k = 0, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{2.29}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado, suave e estrelado, $N > 2m$ e $s \geq \frac{N+2m}{N-2m}$.

À seguir, mostraremos que, quando escrevemos (2.29), equivalentemente, a um sistema da forma (2.1), os dois conceitos de criticalidade, coincidem.

Definindo $u_i = (-\Delta)^{i-1} u, \forall i = 1, \ldots, m$, podemos escrever (2.29), equivalentemente, como

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} (-\Delta) u_i = u_{i+1} \\ (-\Delta) u_m = u_1|u_1|^{s-1} \end{array}\right. \text{ em } \Omega,\ \forall i = 1, \ldots, m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ \forall i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{2.30}$$

Sejam $f_i = id, \forall i = 1, \ldots, m-1$, $f_m(u) = u|u|^{s-1}$ e $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ definida por $\sigma_i = i+1, \forall i = 1, \ldots, m-1$, $\sigma_m = 1$. Com esta notação, (2.30) de reduz a (2.1). Pela definição de σ, temos que (2.30) é m-acoplado. Além disso, temos $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f_i(u)}{u} = 1, \forall i = 1, \ldots, m-1$, e $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f_m(u)}{u^s} = 1$. Conseqüêntemente, $\alpha_i = 1, \forall i = 1, \ldots, m-1$, e $\alpha_m = s$. Para obtermos as definições 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5 em termos de s, necessitamos escrever $\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}))$ em função de s. Para isto, observemos que

$$\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l}) = (m-i)s + (i-1), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.31}$$

Logo, por (2.31), temos

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) = \frac{m(m-1)}{2}s + \frac{m(m-1)}{2}. \tag{2.32}$$

Portanto, substituindo (2.32) nas definições 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, concluímos que o sistema (2.30) é crítico, se $(N-2m)s = N+2m$, subcrítico, se $(N-2m)s \prec N+2m$ e supercrítico, se $(N-2m)s \succ N+2m$. Observe que, se $2m \geq N$, o sistema (2.29) é sempre subcrítico. Além disso, se $2m \prec N$, concluímos que este conceito coincide com o introduzido em [52].•

OBS 1.2.4: Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \mathbf{R}^N, \ \forall i = 1, ..., 2m \\ u_i \succ 0 \text{ em } \mathbf{R}^N, \ \forall i = 1, ..., 2m, \end{cases} \tag{2.33}$$

onde $N \geq 3$, $\alpha_{\sigma_1^{2k}} = \alpha \succ 0$ e $\alpha_{\sigma_1^{2k+1}} = \beta \succ 0$, $\forall k = 1, ..., m$.

Recentemente, Serrin e Zou [56] mostraram que, se $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \leq \frac{N-2}{N}$ então o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v^{\alpha} \\ -\Delta v = u^{\beta} \quad \text{em } \mathbf{R}^N \\ u, v \succ 0 \text{ em } \mathbf{R}^N \end{cases} \tag{2.34}$$

possui solução radial em $(C^2(\mathbf{R}^N))^2$. Portanto, se $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \leq \frac{N-2}{N}$, (2.33) possui solução radial em $(C^2(\mathbf{R}^N))^{2m}$. De fato, seja $(u, v) \in (C^2(\mathbf{R}^N))^2$ solução radial de (2.34). Definindo $u_{\sigma_1^{2k}} = u$ e $u_{\sigma_1^{2k+1}} = v$, obtemos uma solução radial para (2.33). Por outro lado, esperamos que, se o ponto $(\alpha_1, ..., \alpha_{2m})$ com $\alpha_{\sigma_1^{2k}} = \alpha$ e $\alpha_{\sigma_1^{2k+1}} = \beta$, $\forall k = 1, ..., m$, estiver sobre ou acima do $(2m-1)$-hiperbóide crítico, então (2.33) possua solução radial em $(C^2(\mathbf{R}^N))^{2m}$.

De fato, isto ocorre. Para ver isto, basta mostrar que esta última condição é equivalente a (α, β) estar sobre ou acima da hipérbole crítica.

À seguir, mostraremos que

$$\sum_{i=1}^{2m}\Big(\sum_{k=1}^{2m-1}\Big(\prod_{j=k}^{2m-1}\alpha_{\sigma_i^j}\Big)\Big)+2m=m(\alpha+\beta+2)\sum_{k=0}^{m-1}(\alpha\beta)^k. \tag{2.35}$$

Observemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2m}\Big(\sum_{k=1}^{2m-1}\Big(\prod_{j=k}^{2m-1}\alpha_{\sigma_i^j}\Big)\Big)=\sum_{\ell=1}^{2m}\Big(\sum_{k=1}^{2m-1}\Big(\prod_{j=k}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{\ell+j}}\Big)\Big)=\\
&\sum_{\ell=1}^{2m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\prod_{j=2k-1}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{\ell+j}}\Big)\Big)+\sum_{\ell=1}^{2m}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\prod_{j=2k}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{\ell+j}}\Big)\Big)=\\
&\sum_{\ell=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\prod_{j=2k-1}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{2\ell-1+j}}\Big)\Big)+\sum_{\ell=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\prod_{j=2k-1}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{2\ell+j}}\Big)\Big)\\
&+\sum_{\ell=1}^{2m}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\prod_{j=2k}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{\ell+j}}\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Agora, é fácil verificar que

$$\sum_{\ell=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\prod_{j=2k-1}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{2\ell-1+j}}\Big)\Big)=m\alpha\sum_{k=0}^{m-1}(\alpha\beta)^k, \tag{2.37}$$

$$\sum_{\ell=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big(\prod_{j=2k-1}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{2\ell+j}}\Big)\Big)=m\beta\sum_{k=0}^{m-1}(\alpha\beta)^k, \tag{2.38}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2m}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\prod_{j=2k}^{2m-1}\alpha_{\sigma_1^{\ell+j}}\Big)\Big)=2m\sum_{k=1}^{m-1}(\alpha\beta)^k. \tag{2.39}$$

Substituindo (2.37), (2.38) e (2.39) em (2.36), obtemos (2.35).

Seja $(\alpha_1, ..., \alpha_{2m}) \in \mathbf{R}_+^{2m}$ um ponto sobre ou acima do (2m-1)-hiperbolóide crítico. Isto pode ser traduzido matematicamente por

$$\frac{\prod_{i=1}^{2m}\alpha_i-1}{\sum_{i=1}^{2m}\big(\sum_{k=1}^{2m-1}\big(\prod_{j=k}^{2m-1}\alpha_{\sigma_i^j}\big)\big)+2m}\geq\frac{4}{2m(N-2)}. \tag{2.40}$$

Suponhamos que $\alpha_{\sigma_1^{2k}}=\alpha$ e $\alpha_{\sigma_1^{2k+1}}=\beta$, $\forall k=1,...,m$. Então, por (2.35) e (2.40), temos

$$\frac{(\alpha\beta)^m-1}{m(\alpha+\beta+2)\sum_{k=0}^{m-1}(\alpha\beta)^k}\geq\frac{4}{2m(N-2)}. \tag{2.41}$$

Assim, por (2.41), obtemos

$$\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta + 2} \geq \frac{2}{N-2}.$$

Implicando que

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \leq \frac{N-2}{N}.\bullet$$

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u \geq u^\alpha \text{ em } \mathbf{R}^N \\ (-\Delta)^k u \succ 0 \text{ em } \mathbf{R}^N, \ \forall k = 0, ..., m-1 \end{cases}, \tag{2.42}$$

onde $N \geq 2$, $\alpha \succ 0$.

Baseado na observação 1.2.3 acima, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.2.1: Suponhamos que $\alpha \geq 1$ e $(N-m-1)\alpha \leq N+m-1$, se $N \geq 3$. Então, (2.42) não possui solução em $C^{2m}(\mathbf{R}^N)$.

OBS 1.2.5: Utilizando a técnica da média esférica, como em [47], podemos melhorar o teorema 1.2.1, quando $\alpha_i \geq 1, \forall i = 1, ..., m$. Porém, as m-uplas de α_i's obtidas, permanecem estritamente abaixo do $(m-1)$-hiperbolóide crítico. Em particular, o corolário 1.2.1 pode ser melhorado, mas, não até o expoente crítico. Notemos também que, em [58], foi mostrado que, quando $N > 2m$ e $1 \leq \alpha < \frac{N+2m}{N-2m}$, o problema (2.42) não possui solução radial.$\bullet$

3. Estimativas A Priori para Sistemas Elípticos Via Blow-Up

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_i u_i = f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = \phi_i \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $\phi_i \in L^\infty(\partial\Omega), \forall i = 1, ..., m$, $\mathcal{L}_i \equiv \sum_{k,j=1}^N A_{kj}^i(x) D_{kj} + \sum_{k=1}^N b_k^i(x) D_k$ é um operador uniformemente elíptico, $\forall i = 1, ..., m$.

Nesta seção, utilizaremos a técnica de blow-up para obtermos estimativas a priori para algumas classes de sistemas da forma (3.1). Um dos principais resultados que apresentaremos, o teorema 1.3.2, trata da obtenção de estimativas a priori para sistemas com caráter superlinear e subcrítico, segundo as definições da seção anterior.

No que segue, assumiremos as seguintes hipóteses:

(H.1) $A^i_{kj},\ b^i_k \in C(\overline{\Omega}),\ \forall k, j = 1,...,N,\ \forall i = 1,...,m,$

(H.2) Existem funções de Carathéodory $g_i, h_{il} : \Omega \times \mathbf{R}^m_+ \to \mathbf{R},\ i, l = 1,...,m,$ tais que

$$f_i(x,u) = g_i(x,u) + \sum_{l=1}^{m} h_{il}(x,u),\ \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbf{R}^m_+,\ \forall i = 1,...,m,$$

(H.3) Existe $a \succ 0$ tal que $\mid g_i(x, u_1, ..., u_m) \mid \leq a(\sum_{l=1}^{m} u_l^{\beta_{il}} + 1), \forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}^m_+$, $\forall i = 1,...,m$, onde $\beta_{il} \geq 0,\ \forall i, l = 1,...,m,$

(H.4) $\lim_{u_l \to +\infty} \frac{h_{il}(x,u_1,...,u_m)}{u_l^{\alpha_{il}}} = \widetilde{h}_{il}(x)$, uniformemente em $x \in \Omega,\ u_r \in \mathbf{R}_+,\ \forall r = 1,...,m,$ $r \neq l$, onde $\alpha_{il} \geq 0$ e $\widetilde{h}_{il} : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ é contínua, $\forall i, l = 1,...,m,$

(H.5) $h^M_{il}(.) = \sup_{\substack{u_r \in \mathbf{R}^m_+, \\ \forall r=1,...,m,\ r \neq l \\ 0 \prec u_l \prec M}} \mid h_{il}(., u_1, ..., u_m) \mid \in L^\infty(\Omega), \forall M \succ 0,\ \forall i, l = 1,...,m.$

Antes de passarmos aos resultados, destaquemos dois lemas que serão úteis nas demonstrações:

Lema 1.3.1: Seja $(\lambda_n)_n$ uma seqüência de números positivos tal que $\lambda_n \to 0$. Seja $h : \Omega \times \mathbf{R}^m_+ \to \mathbf{R}$ uma função de Carathéodory tal que $\lim_{u_l \to +\infty} \frac{h(x,u_1,...,u_m)}{u_l^\alpha} = \widetilde{h}(x)$, uniformemente em $x \in \Omega,\ u_r \in \mathbf{R}_+,\ \forall r = 1,...,m,\ r \neq l$, onde $\alpha \succ 0,\ \widetilde{h} \in L^\infty(\Omega)$, e $h^M(.) = \sup_{\substack{u_r \in \mathbf{R}^m_+, \\ \forall r=1,...,m,\ r \neq l \\ 0 \prec u_l \prec M}}$ $\mid h(., u_1, ..., u_m) \mid \in L^\infty(\Omega), \forall M \succ 0$. Então,

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n^\alpha h(x, u_1, ..., u_{l-1}, \frac{u_l}{\lambda_n}, u_{l+1}, ..., u_m) - \widetilde{h}(x) u_l^\alpha = 0,$$
uniformemente em $x \in \Omega,\ u_l \in [0,1],\ u_r \in \mathbf{R}_+,$
$\forall r = 1,...,m, r \neq l$.

Dem: Dado $\varepsilon \succ 0$, $\exists M \succ 0$ tal que

$$\mid h(x, u_1, ..., u_m) - \widetilde{h}(x) u_l^\alpha \mid \leq \varepsilon u_l^\alpha,\ \forall x \in \Omega,\ \forall u_r \in \mathbf{R}_+, \qquad (3.2)$$
$$\forall r = 1,...,m, r \neq l,\ \forall u_l \geq M\ .$$

Seja $n_0 \in \mathbf{N}$ tais que

$$\lambda_n^\alpha \parallel h^M \parallel_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_0, \qquad (3.3)$$

$$\lambda_n^\alpha M^\alpha \parallel \widetilde{h} \parallel_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_0\ . \tag{3.4}$$

Agora, suponha que $u_l \in [0,1]$ e $n \geq n_0$. Se $\frac{u_l}{\lambda_n} \geq M$, por (3.2), temos

$$\begin{aligned} &| \lambda_n^\alpha h(x, u_1, ..., u_{l-1}, \frac{u_l}{\lambda_n}, u_{l+1}, ..., u_m) - \widetilde{h}(x) u_l^\alpha \mid \leq \varepsilon u_l^\alpha \leq \varepsilon, \\ &\forall x \in \Omega,\ \forall u_r \in \mathbf{R}_+,\ \forall r = 1, ..., m, r \neq l. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por outro lado, se $\frac{u_l}{\lambda_n} \prec M$, por (3.3) e (3.4), temos

$$\begin{aligned} &| \lambda_n^\alpha h(x, u_1, ..., u_{l-1}, \frac{u_l}{\lambda_n}, u_{l+1}, ..., u_m) - \widetilde{h}(x) u_l^\alpha \mid \\ &\leq \lambda_n^\alpha \parallel h^M \parallel_{L^\infty} + \parallel \widetilde{h} \parallel_{L^\infty} u_l^\alpha \\ &\leq \lambda_n^\alpha \parallel h^M \parallel_{L^\infty} + \lambda_n^\alpha M^\alpha \parallel \widetilde{h} \parallel_{L^\infty} \leq \varepsilon\ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim, concluímos a demonstração. ∎

Lema 1.3.2: Seja $(a_{in})_{n\geq 1}$ uma seqüência de reais positivos e $\beta_i > 0, \forall i = 1, \ldots, m$. Suponhamos que

$$\lim_{n\to+\infty} a_{ln} = +\infty, \tag{3.7}$$

para algum $l \in \{1, ..., m\}$. Então, existe $r \in \{1, \ldots, m\}$ tal que, a menos de subseqüência, temos

$$a_{rn} \to +\infty. \tag{3.8}$$

$$a_{rn}^{\beta_r} \geq a_{in}^{\beta_i}\ ,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall n \in I\!N. \tag{3.9}$$

Dem: Se existe uma subseqüência tal que (3.9) ocorre com $r = l$, a afirmação está demonstrada. Senão, seja $r_2 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que, a menos de subsequência, temos

$$a_{r_2 n}^{\beta_{r_2}} \geq a_{in}^{\beta_i}\ ,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall n \in I\!N. \tag{3.10}$$

Utilizando que $\beta_i > 0, \forall i = 1, \ldots, m$, por (3.7) e (3.10), concluímos que (3.8) ocorre com $r = r_2$. Isto termina a demonstração. ∎

Comecemos estudando a classe de sistemas que satisfaz, além de $(\mathbf{H.1}) - (\mathbf{H.5})$, as seguintes hipóteses:

$(\mathbf{H.6})$ $\widetilde{h}_{ii}(x) \succ 0,\ \forall x \in \overline{\Omega}$, e $\widetilde{h}_{il} \equiv 0$ em Ω, $\forall l = 1, ..., m, l \neq i,\ \forall i = 1, ..., m,$

(H.7) $1 \prec \alpha_{ii} \prec \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, $\forall i = 1, ..., m$, ou $1 \prec \alpha_{ii} \prec +\infty$, se $N = 2$, $\forall i = 1, \ldots, m$,

(H.8) $\frac{\beta_{il}}{\alpha_{ll}-1} \prec \frac{\alpha_{ii}}{\alpha_{ii}-1}$, $\frac{\alpha_{il}}{\alpha_{ll}-1} \leq \frac{\alpha_{ii}}{\alpha_{ii}-1}$, $\forall i, l = 1, ..., m$.

Para um melhor entendimento das hipóteses (**H.6**), (**H.7**) e (**H.8**), vejamos o seguinte exemplo no caso $m = 2$:

Exemplo 3.1: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = a_1 u^{\alpha_1} + b_{11} u^{\beta_{11}} + b_{12} v^{\beta_{12}} & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = a_2 v^{\alpha_2} + b_{21} u^{\beta_{21}} + b_{22} v^{\beta_{22}} & \\ u = 0 = v \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, & \end{cases}$$

onde a_i, b_{ij} são constantes, $\forall i, j = 1, 2$.

Hipótese (**H.6**): $a_1, a_2 \succ 0$.
Hipótese (**H.7**): $1 \prec \alpha_1, \alpha_2 \prec \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, ou $\alpha_1, \alpha_2 \succ 1$, se $N = 2$.
Hipótese (**H.8**): $0 \leq \beta_{11} \prec \alpha_1$, $0 \leq \beta_{22} \prec \alpha_2$, $0 \leq \beta_{12} \prec \frac{\alpha_1(\alpha_2-1)}{\alpha_1-1}$, $0 \leq \beta_{21} \prec \frac{\alpha_2(\alpha_1-1)}{\alpha_2-1}$.

Teorema 1.3.1: Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz (**H.1**) – (**H.8**). Então, existe $c \succ 0$, dependendo apenas de $\Omega, \mathcal{L}_i, f_i$, $\forall i = 1, ..., m$, tal que qualquer solução não-negativa $(u_1, ..., u_m) \in (C^2(\overline{\Omega}))^m$ de (3.1) satisfaz

$$\| u_i \|_{L^\infty} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Dem: Suponhamos, por absurdo, que o teorema é falso. Então, existe uma seqüência $((u_{1n}, ..., u_{mn}))_{n \geq 1} \subset (C^2(\overline{\Omega}))^m$ de soluções não-negativas de (3.1) tal que

$$\| u_{ln} \|_{L^\infty} \to +\infty \ \text{ para algum } \ l \in \{1, ..., m\}. \tag{3.11}$$

Pelo lema 1.3.2, existe $r \in \{1, ..., m\}$ tal que, a menos de subseqüência, temos

$$\| u_{rn} \|_{L^\infty} \to +\infty \ , \tag{3.12}$$

$$\| u_{rn} \|_{L^\infty}^{\alpha_{rr}-1} \geq \| u_{in} \|_{L^\infty}^{\alpha_{ii}-1}, \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N} \ . \tag{3.13}$$

Consideremos a seqüência $(\lambda_n)_n$ definida por

$$\lambda_n^{\frac{2}{\alpha_{rr}-1}} \| u_{rn} \|_{L^\infty} = 1 \ . \tag{3.14}$$

Por **(H.7)** e (3.12), temos

$$\lambda_n \to 0 \; . \tag{3.15}$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, seja $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que

$$u_{rn}(x_n) = \| u_{rn} \|_{L^\infty} \; . \tag{3.16}$$

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $n \in \mathbf{N}$, defina

$$\Omega_n = \{y \in \mathbf{R}^N : \lambda_n y + x_n \in \Omega\} \; , \tag{3.17}$$

$$v_{in}(y) = \lambda_n^{\frac{2}{\alpha_{ii}-1}} u_{in}(\lambda_n y + x_n), \; \forall y \in \Omega_n \; . \tag{3.18}$$

Por (3.13), (3.14), (3.16), (3.17) e (3.18), temos

$$v_{rn}(0) = 1, \; \forall n \in \mathbf{N} \; , \tag{3.19}$$

$$0 \le v_{in} \le 1 \text{ em } \Omega_n, \; \forall i = 1, ..., m, \; \forall n \in \mathbf{N} \; . \tag{3.20}$$

Como Ω é limitado, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que $x_n \to x_0 \in \overline{\Omega}$. Agora, analisaremos dois casos:

1º Caso: $x_0 \in \Omega$.

É fácil verificar que

$$\mathcal{L}_{in} v_{in}(y) + g_{in}(y) + \sum_{j=1}^{m} h_{ijn}(y) = 0, \; \forall y \in \Omega_n, \tag{3.21}$$

$$\forall i = 1, ..., m, \; \forall n \in N,$$

onde

$$\mathcal{L}_{in} u = \sum_{k,j=1}^{N} A^i_{kjn}(y) D_{kj} u + \sum_{k=1}^{N} \lambda_n b^i_{kn}(y) D_k u, \tag{3.22}$$

$$A^i_{kjn}(y) = A^i_{kj}(\lambda_n y + x_n), \; b^i_{kn}(y) = b^i_k(\lambda_n y + x_n) \; ,$$

$$g_{in}(y) = \lambda_n^{\frac{2\alpha_{ii}}{\alpha_{ii}-1}} g_i(\lambda_n y + x_n, u_{1n}(\lambda_n y + x_n), ..., u_{mn}(\lambda_n y + x_n)), \tag{3.23}$$

$$h_{ijn}(y) = \lambda_n^{\frac{2\alpha_{ii}}{\alpha_{ii}-1}} h_{ij}(\lambda_n y + x_n, u_{1n}(\lambda_n y + x_n), ..., u_{mn}(\lambda_n y + x_n)). \tag{3.24}$$

Fixemos $R \succ 0$. Como $x_0 \in \Omega$, por (3.15), temos que, para n suficientemente grande, $\overline{\mathbf{B}_{2R}(0)} \subset \Omega_n$. Assim, podemos analisar a convergência em $\overline{\mathbf{B}_{2R}(0)}$ dos termos que aparecem em

(3.21).

Por (**H.1**) e (3.15), temos

$$\lim_{n\to+\infty} A^i_{kj}(\lambda_n y + x_n) = A^i_{kj}(x_0), \text{ uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0), \tag{3.25}$$
$$\forall k, j = 1, ..., N, \ \forall i = 1, ..., m,$$

$$\lim_{n\to+\infty} b^i_k(\lambda_n y + x_n) = b^i_k(x_0), \text{ uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0), \tag{3.26}$$
$$\forall k = 1, ..., N, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Em particular, por (3.15), temos

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n b^i_k(\lambda_n y + x_n) = 0, \text{ uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0), \tag{3.27}$$
$$\forall k = 1, ..., N, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Por (**H.4**),(**H.5**), (3.15), (3.20), (3.24) e lema 1.3.1, temos

$$\lim_{n\to+\infty} [\lambda_n^{(\frac{2\alpha_{ij}}{\alpha_{jj}-1} - \frac{2\alpha_{ii}}{\alpha_{ii}-1})} h_{ijn}(y) - \widetilde{h}_{ij}(\lambda_n y + x_n) v_{jn}^{\alpha_{ij}}] = 0, \tag{3.28}$$
$$\text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0), \ \forall i, j = 1, ..., m.$$

Em particular, por (**H.8**), existe $c \succ 0$ tal que

$$| h_{ijn}(y) | \le c, \ \forall y \in \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0), \ \forall i, j = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{3.29}$$

Por (**H.3**), (3.13), e (3.14), temos

$$\begin{aligned} | g_i(x, u_{1n}, ..., u_{mn}) | &\le a(\sum_{j=1}^{m} \| u_{jn} \|_{L^\infty}^{\beta_{ij}} + 1) \\ &\le a(\sum_{j=1}^{m} \| u_{rn} \|_{L^\infty}^{\frac{\beta_{ij}(\alpha_{rr}-1)}{\alpha_{jj}-1}} + 1) \\ &= a(\sum_{j=1}^{m} \lambda_n^{-\frac{2\beta_{ij}}{\alpha_{jj}-1}} + 1). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Portanto, por (**H.8**), (3.15) e (3.23), temos

$$\lim_{n\to+\infty} g_{in}(y) = 0, \text{ uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.31}$$

Aplicando o lema A.6, de regularidade L^p, à equação (3.22), obtemos

$$\begin{aligned}\| v_{in} \|_{W^{2,p}(\mathbf{B}_R)} &\leq c(\| v_{in} \|_{L^p(\mathbf{B}_{2R})} + \| g_{in} \|_{L^p(\mathbf{B}_{2R})} \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \| h_{ijn} \|_{L^p(\mathbf{B}_{2R})}), \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N},\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $c \succ 0$ é uma constante independente de n.

Conseqüêntemente, por (3.20), (3.29) e (3.31), concluímos que $(v_{in})_n$ é limitada em $W^{2,p}(\mathbf{B}_R)$, $\forall i = 1, ..., m$. Tomando $p \succ N$, temos, pela compacidade da imersão $W^{2,p}(\mathbf{B}_R) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}}_R)$, que $(v_{in})_n$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}}_R)$ para algum $\alpha \in (0,1)$, $\forall i = 1, ..., m$. Assim, podemos extrair uma subseqüência, que continuaremos a denotar por $(v_{in})_n$, tal que

$$v_{in} \to v_i \text{ em } C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}}_R), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.33}$$

Utilizando, novamente, o lema A.6, temos

$$\begin{aligned}\| v_{in} - v_{i\tilde{n}} \|_{W^{2,p}(\mathbf{B}_{\frac{R}{2}})} &\leq c(\| v_{in} - v_{i\tilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} + \| g_{in} - g_{i\tilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \| h_{ijn} - h_{ij\tilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} + \sum_{k,j=1}^{N} \| A^i_{kjn} - A^i_{kj\tilde{n}} \|_{L^\infty} \| D_{kj} v_{i\tilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \| b^i_{kn} - b^i_{k\tilde{n}} \|_{L^\infty} \| D_k v_{i\tilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)}), \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Agora, por (**H.6**), (**H.8**), (3.25), (3.26), (3.28), (3.31), (3.33) e (3.34), concluímos que $(v_{in})_n$ é Cauchy em $W^{2,p}(\mathbf{B}_{\frac{R}{2}})$, $\forall i = 1, ..., m$, implicando que

$$v_{in} \to v_i \text{ em } W^{2,p}(\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.35}$$

Por (**H.6**), (**H.8**), (3.28) e (3.33), temos

$$\begin{aligned}&\lim_{n \to +\infty} h_{iin}(y) = \widetilde{h}_{ii}(x_0) v_i^{\alpha_{ii}}(y), \\ &\text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_R(0), \ \forall i = 1, ..., m,\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n \to +\infty} h_{ijn}(y) = 0, \\ &\text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_R(0), \ \forall i,j = 1, ..., m, \ j \neq i \ .\end{aligned} \tag{3.37}$$

Finalmente, tomando limite em (3.22), temos, por (3.25), (3.27), (3.31), (3.35), (3.36) e (3.37), que

$$\sum_{k,j=1}^{N} A^r_{kj}(x_0) D_{kj} v_r + \widetilde{h}_{rr}(x_0) v_r^{\alpha_{rr}}(y) = 0, \ qtp(\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}). \tag{3.38}$$

Como $R \succ 0$ é arbitrário, argumentando com subseqüência diagonal, concluímos que existe $v_r \in W^{2,p}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \sum_{k,j=1}^{N} A^r_{kj}(x_0) D_{kj} v_r + \widetilde{h}_{rr}(x_0) v_r^{\alpha_{rr}}(y) = 0 \text{ em } \mathbf{R}^N(\text{qtp}) \\ v_r \geq 0 \text{ em } \mathbf{R}^N \\ v_r(0) = 1 \end{cases} \tag{3.39}$$

Fazendo uma mudança de variável, reduzimos (3.39) a

$$\begin{cases} \Delta v_r + v_r^{\alpha_{rr}}(y) = 0 \text{ em } \mathbf{R}^N(\text{qtp}) \\ v_r \geq 0 \text{ em } \mathbf{R}^N \\ v_r(0) = 1 \end{cases}$$

Utilizando os lemas A.5 e A.7, e argumento de bootstrap, concluímos que $v_r \in C^2(\mathbf{R^N})$. Por **(H.7)**, isto contradiz o lema 1.1.3.

$2^{\underline{o}}$ Caso: $x_0 \in \partial\Omega$.

Como Ω é de classe C^2, podemos, por mudança de coordenada, se necessário, assumir que $\Omega \subset \mathbf{R}^N_+$ e que existe $\delta \succ 0$ tal que $\mathbf{B}_\delta(x_0) \cap \mathbf{R}^N_+ \subset \Omega$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, seja $d_n = dist(x_n, \partial\Omega)$. Observemos que, como $u_{rn} = \phi_r$ sobre $\partial\Omega$ e $\phi_r \in L^\infty(\partial\Omega)$, por (3.12) e (3.16), temos que

$$x_n \in \Omega \text{ para } n \text{ suficientemente grande.} \tag{3.40}$$

Fixemos $R \succ 0$. Para n suficientemente grande, temos

$$\overline{\mathbf{B}}_{2R} \cap \{y \in \mathbf{R}^N : y_N \succ -\frac{d_n}{\lambda_n}\} \subset \Omega_n. \tag{3.41}$$

Se $(\frac{d_n}{\lambda_n})_n$ possui alguma subseqüência convergindo a $+\infty$, argumentando como no $1^{\underline{o}}$ caso, chegamos a uma contradição. Agora, afirmamos que existe $\gamma \succ 0$ tal que $\frac{d_n}{\lambda_n} \geq \gamma$. De fato, pelo lema 1.1.5, existem uma seqüência $(\omega_n)_n$ de funções barreira, e constantes $a, c \succ 0$, independentes de n, tais que

$$\omega_n(y_1, ..., y_{N-1}, -\frac{d_n}{\lambda_n}) = 0, \ \forall (y_1, ..., y_{N-1}) \in \mathbf{R}^{N-1}, \tag{3.42}$$

$$\begin{cases} v_{rn}(y) \leq \omega_n(y) + \lambda_n^{\frac{2}{\alpha_{rr}-1}} \sup_{x \in \partial\Omega} \phi_r(x) \\ \mid \nabla \omega_n(y) \mid \leq c, \end{cases} \tag{3.43}$$

$$\forall y \in \Omega_n \cap \{y \in \mathbf{R}^N : y_N + \frac{d_n}{\lambda_n} \leq a\} \ , \forall n \in \mathbf{N}$$

Suponhamos, por absurdo, que $(\frac{d_n}{\lambda_n})_n$ possui alguma subseqüência, que continuaremos a denotar por $(\frac{d_n}{\lambda_n})_n$, convergindo a zero. Então, por (3.40), para n suficientemente grande, $0 \in \Omega_n \cap \{y \in \mathbf{R}^N : y_N + \frac{d_n}{\lambda_n} \leq a\}$. Logo, por (3.19), (3.42) e (3.43), temos

$$\begin{cases} 1 = v_{rn}(0) \leq \omega_n(0) + \lambda_n^{\frac{2}{\alpha_{rr}-1}} \sup_{x \in \partial\Omega} \phi_r(x) \\ \mid \omega_n(0) \mid = \mid \omega_n(0) - \omega_n(0, -\frac{d_n}{\lambda_n}) \mid \leq c\frac{d_n}{\lambda_n} \end{cases} \tag{3.44}$$

Tomando limite em (3.44), chegamos a uma contradição. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{d_n}{\lambda_n} \to s \succ 0$. Por (3.41), podemos argumentar como no primeiro caso, e concluir que, passando a uma subseqüência convergente, temos

$$v_{in} \to v_i \text{ em } W^{2,p}_{loc}(H_s), \ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.45}$$

onde $H_s = \{y \in \mathbf{R}^N : y_N \succ -s\}$.
Além disso, v_r satisfaz (3.38) em H_s, e por (3.42) e (3.43), temos que v_r se estende continuamente a $\overline{H}_s$ com $v_r = 0$ sobre ∂H_s. Resumindo, obtivemos $v_r \in W^{2,p}_{loc}(H_s) \cap C(\overline{H}_s)$, satisfazendo

$$\begin{cases} \sum_{k,j=1}^N A^r_{kj}(x_0) D_{kj} v_r + \widetilde{h}_{rr}(x_0) v_r^{\alpha_{rr}}(y) = 0 \text{ em } H_s(\text{qtp}) \\ v_r = 0 \text{ sobre } \partial H_s \\ v_r \geq 0 \text{ em } H_s \\ v_r(0) = 1 \end{cases} \tag{3.46}$$

Fazendo uma mudança de variável, reduzimos (3.46) a

$$\begin{cases} \Delta v_r + v_r^{\alpha_{rr}}(y) = 0 \text{ em } H_s(\text{qtp}) \\ v_r = 0 \text{ sobre } \partial H_s \\ v_r \geq 0 \text{ em } H_s \\ v_r(0) = 1 \end{cases}$$

Utilizando os lemas A.5 e A.7, e argumento de bootstrap, concluímos que $v_r \in C^2(H_s) \cap C(\overline{H}_s)$. Por **(H.7)**, isto contradiz o lema 1.1.4.∎

Exemplo 3.2: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = a_i(x) u^{\alpha_i} + \sum_{l=1}^m b_{il}(x) u_l^{\beta_{il}} + f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \\ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{3.47}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $a_i : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}_+$ é uma função contínua, $b_{il} : \Omega \to \mathbf{R}$ e $f_i : \Omega \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ são funções de Carathéodory limitadas, $\forall i, l = 1, ..., m$.

Assuma as seguintes condições

$$1 < \alpha_i < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3, \text{ ou } \alpha_i > 1, \text{ se } N = 2, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.48}$$

$$0 \leq \frac{\beta_{il}}{\alpha_l - 1} < \frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1}, \ \forall i, l = 1, ..., m. \tag{3.49}$$

Então, o sistema (3.47) satisfaz as hipóteses do teorema 1.3.1. Observemos que as condições acima implicam que $\beta_{ii} < \alpha_i, \forall i = 1, ..., m$, e que existem exemplos em que $\beta_{il} \geq \frac{N+2}{N-2}$ para algum $i, l \in \{1, ..., m\}$, quando $N \geq 3$.

Suponha que $b_{il} \equiv 0$ em $\Omega, \forall i, l = 1, ..., m, l \neq i, \sigma_i$, onde $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma função. Assim, podemos escrever (3.47) , como

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_i = a_i(x) u_i^{\alpha_i} + b_{ii}(x) u_i^{\beta_{ii}} + b_{i\sigma_i}(x) u_{\sigma_i}^{\beta_{i\sigma_i}} + f_i(x, u_1, ..., u_m) \\ \text{em } \Omega, \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \forall i = 1, ..., m \end{array} \right. \tag{3.50}$$

Neste caso, a condição (3.49) é equivalente a

$$0 \leq \beta_{ii} < \alpha_i, \ 0 \leq \beta_{i\sigma_i} < \frac{\alpha_i(\alpha_{\sigma_i} - 1)}{\alpha_i - 1}, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.51}$$

OBS 1.3.1: As hipóteses (**H.7**) e (**H.8**) implicam que, eventualmente, a função g_i possa ter crescimento crítico em algumas variáveis diferentes de u_i.•

OBS 1.3.2: Se $h_{ij}(x, u) = 0, \ \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$, então a hipótese $\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{jj} - 1} \leq \frac{\alpha_{ii}}{\alpha_{ii} - 1}$ pode ser eliminada.•

Seja $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1, \ \forall k = 1, ..., m-1$. Consideremos a classe de sistemas que satisfaz, além de (**H.1**) $-$ (**H.5**), as seguintes hipóteses:

(**H.9**) $\tilde{h}_{i\sigma_i}(x) \succ 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \forall i = 1, ..., m, \ \tilde{h}_{ij} \geq 0$ em Ω, se $\alpha_{ij}\gamma_j = \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}, \ \forall i, j = 1, ..., m,$

(**H.10**) $0 \prec \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_{j\sigma_j} - 1}{\sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l \sigma_i^{l+1}})] + m} \leq \frac{2}{m(N-1)},$

(**H.11**) $\beta_{ij}\gamma_j \prec \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}, \ \alpha_{ij}\gamma_j \leq \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}, \ \forall i, j = 1, ..., m,$
onde

$$\gamma_i = \frac{2[\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=0}^{m-1-j} \alpha_{\sigma_i^l \sigma_i^{l+1}}) \ + \ 1]}{\prod_{j=1}^m \alpha_{j\sigma_j} \ - \ 1}, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Para uma melhor visualização das hipóteses $(\mathbf{H.9}), (\mathbf{H.10})$ e $(\mathbf{H.11})$, daremos um exemplo no caso $m = 2$.

Exemplo 3.3: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = a_{11}u^{\alpha_{11}} + a_{12}v^{\alpha_{12}} + b_{11}u^{\beta_{11}} + b_{12}v^{\beta_{12}} \\ -\Delta v = a_{21}u^{\alpha_{21}} + a_{22}v^{\alpha_{22}} + b_{21}u^{\beta_{21}} + b_{22}v^{\beta_{22}} \\ u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{em } \Omega$$

onde a_{ij}, b_{ij} são constantes, $\forall i, j = 1, 2$, $\alpha_{ij} \geq 0$, $\forall i, j = 1, 2$.

Hipótese $(\mathbf{H.9})$: $a_{12}, a_{21} > 0$, $a_{11} \geq 0$, se $\alpha_{11} = \frac{\alpha_{12}(\alpha_{21}+1)}{\alpha_{12}+1}$, e $a_{22} \geq 0$, se $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{21}(\alpha_{12}+1)}{(\alpha_{21}+1)}$.
Hipótese $(\mathbf{H.10})$: $\frac{N-1}{N} \leq \frac{1}{\alpha_{12}+1} + \frac{1}{\alpha_{21}+1} < 1$.
Hipótese $(\mathbf{H.11})$: $0 \leq \beta_{11} < \frac{\alpha_{12}(\alpha_{21}+1)}{\alpha_{12}+1}$, $0 \leq \beta_{22} < \frac{\alpha_{21}(\alpha_{12}+1)}{\alpha_{21}+1}$, $0 \leq \beta_{12} < \alpha_{12}$, $0 \leq \beta_{21} < \alpha_{21}$, $\alpha_{11} \leq \frac{\alpha_{12}(\alpha_{21}+1)}{\alpha_{12}+1}$ e $\alpha_{22} \leq \frac{\alpha_{21}(\alpha_{12}+1)}{\alpha_{21}+1}$.

OBS 1.3.3: As hipóteses $(\mathbf{H.9})$ e $(\mathbf{H.10})$ expressam o caráter superlinear e subcrítico desta classe de sistemas, segundo as definições 1.2.4 e 1.2.7.•

Teorema 1.3.2: Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz $(\mathbf{H.1})-(\mathbf{H.5})$ e $(\mathbf{H.9})-(\mathbf{H.11})$. Seja $\mathcal{L} \equiv \sum_{k,j=1}^{N} A_{kj}(x)D_{kj} + \sum_{k=1}^{N} b_k(x)D_k$ um operador uniformemente elíptico, e assuma que $\mathcal{L}_1 = ... = \mathcal{L}_m = \mathcal{L}$. Então, existe $c \succ 0$, dependendo apenas de Ω, $\mathcal{L}$, f_i, $\forall i = 1, ..., m$, tal que qualquer solução não-negativa $(u_1, ..., u_m) \in (C^2(\overline{\Omega}))^m$ de (3.1) satisfaz

$$\| u_i \|_{L^\infty} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Dem: Suponhamos, por absurdo, que o teorema é falso. Então, existe uma seqüência $((u_{1n}, ..., u_{mn}))_{n\geq 1} \subset (C^2(\overline{\Omega}))^m$ de soluções não-negativas de (3.1) tal que

$$\| u_{ln} \|_{L^\infty} \to +\infty \ \text{ para algum } \ l \in \{1, ..., m\}. \tag{3.52}$$

Pelo lema 1.3.2, temos que $\exists r \in \{1, ..., m\}$ tal que, a menos de subseqüência, temos

$$\| u_{rn} \|_{L^\infty} \to +\infty, \tag{3.53}$$

$$\| u_{rn} \|_{L^\infty}^{\frac{1}{\gamma_r}} \geq \| u_{in} \|_{L^\infty}^{\frac{1}{\gamma_i}}, \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{3.54}$$

Consideremos a seqüência $(\lambda_n)_n$ definida por

$$\lambda_n^{\gamma_r} \parallel u_{rn} \parallel_{L^\infty} = 1. \tag{3.55}$$

Por (**H.10**) e (3.53), temos

$$\lambda_n \to 0. \tag{3.56}$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, seja $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que

$$u_{rn}(x_n) = \parallel u_{rn} \parallel_{L^\infty} . \tag{3.57}$$

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $n \in \mathbf{N}$, defina

$$\Omega_n = \{y \in \mathbf{R}^N : \lambda_n y + x_n \in \Omega\}, \tag{3.58}$$

$$v_{in}(y) = \lambda_n^{\gamma_i} u_{in}(\lambda_n y + x_n), \ \forall y \in \Omega_n. \tag{3.59}$$

Por (3.54), (3.55), (3.57) e (3.59), temos

$$v_{rn}(0) = 1, \ \forall n \in \mathbf{N}, \tag{3.60}$$

$$0 \leq v_{in} \leq 1 \text{ em } \Omega_n, \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{3.61}$$

Como Ω é limitado, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que $x_n \to x_0 \in \overline{\Omega}$. Agora, analisaremos dois casos:

1º Caso: $x_0 \in \Omega$.

É fácil verificar que

$$\mathcal{L}_n v_{in}(y) + g_{in}(y) + \sum_{j=1}^{m} h_{ijn}(y) = 0, \ \forall y \in \Omega_n, \tag{3.62}$$
$$\forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N},$$

onde

$$\mathcal{L}_n u = \sum_{k,j=1}^{N} A_{kjn}(y) D_{kj} u + \sum_{k=1}^{N} \lambda_n b_{kn}(y) D_k u, \tag{3.63}$$

$$A_{kjn}(y) = A_{kj}(\lambda_n y + x_n), \ b_{kn}(y) = b_k(\lambda_n y + x_n),$$

$$g_{in}(y) = \lambda_n^{\gamma_i+2} g_i(\lambda_n y + x_n, u_{1n}(\lambda_n y + x_n), ..., u_{mn}(\lambda_n y + x_n)), \tag{3.64}$$

$$h_{ijn}(y) = \lambda_n^{\gamma_i+2} h_{ij}(\lambda_n y + x_n, u_{1n}(\lambda_n y + x_n), ..., u_{mn}(\lambda_n y + x_n)). \tag{3.65}$$

Observemos que

$$\gamma_i + 2 = \alpha_{i\sigma_i} \gamma_{\sigma_i}, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.66}$$

Fixemos $R \succ 0$. Como $x_0 \in \Omega$, por (3.56), temos que, para n suficientemente grande, $\overline{\mathbf{B}}_{2R}(0) \subset \Omega_n$. Assim, podemos analisar a convergência em $\overline{\mathbf{B}}_{2R}(0)$ dos termos que aparecem em (3.62).

Por $(\mathbf{H.1})$ e (3.56), temos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} A_{kj}(\lambda_n y + x_n) = A_{kj}(x_0),\\ &\text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0),\ \forall k,j = 1,\ldots,N,\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} b_k(\lambda_n y + x_n) = b_k(x_0),\\ &\text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0),\ \forall k = 1,\ldots,N.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Em particular, por (3.56), temos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} \lambda_n b_k(\lambda_n y + x_n) = 0,\\ &\text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0),\ \forall k = 1,\ldots,N.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Por (3.66), $(\mathbf{H.4})$, $(\mathbf{H.5})$, (3.59), (3.61), (3.65) e lema 1.3.1, temos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} [\lambda_n^{(\alpha_{ij}\gamma_j - \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i})} h_{ijn}(y) - \widetilde{h}_{ij}(\lambda_n y + x_n) v_{jn}^{\alpha_{ij}}] = 0,\\ &\text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0),\ \forall i,j = 1,\ldots,m.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Em particular, por $(\mathbf{H.11})$, existe $c \succ 0$ tal que

$$| h_{ijn}(y) | \leq c,\ \forall y \in \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0),\ \forall i,j = 1,\ldots,m,\ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{3.71}$$

Por $(\mathbf{H.3})$, (3.54) e (3.55), temos

$$\begin{aligned}| g_i(x, u_{1n},\ldots,u_{mn}) | &\leq a(\sum_{j=1}^{m} \| u_{jn} \|_{L^\infty}^{\beta_{ij}} + 1)\\ &\leq a(\sum_{j=1}^{m} \| u_{rn} \|_{L^\infty}^{\frac{\gamma_j}{\gamma_r}\beta_{ij}} + 1) = a(\sum_{j=1}^{m} \lambda_n^{-\beta_{ij}\gamma_j} + 1).\end{aligned} \tag{3.72}$$

Portanto, por $(\mathbf{H.11})$, (3.56), (3.64) e (3.66), temos

$$\lim_{n\to+\infty} g_{in}(y) = 0,\ \text{uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_{2R}(0),\ \forall i = 1,\ldots,m. \tag{3.73}$$

Aplicando o lema A.6 à equação (3.62), obtemos

$$\| v_{in} \|_{W^{2,p}(\mathbf{B}_R)} \leq c(\| v_{in} \|_{L^p(\mathbf{B}_{2R})} + \| g_{in} \|_{L^p(\mathbf{B}_{2R})} + \sum_{j=1}^{m} \| h_{ijn} \|_{L^p(\mathbf{B}_{2R})}), \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}, \tag{3.74}$$

onde $c \succ 0$ é uma constante independente de n.

Conseqüêntemente, por (3.61), (3.71) e (3.73), concluímos que $(v_{in})_n$ é limitada em $W^{2,p}(\mathbf{B}_R)$, $\forall i = 1, ..., m$. Tomando $p \succ N$, temos, pela compacidade da imersão $W^{2,p}(\mathbf{B}_R) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}}_R)$, que $(v_{in})_n$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}}_R)$ para algum $\alpha \in (0,1)$, $\forall i = 1, ..., m$. Assim, podemos extrair uma subseqüência, que continuaremos a denotar por $(v_{in})_n$, tal que

$$v_{in} \to v_i \text{ em } C^{1,\alpha}(\overline{\mathbf{B}}_R), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.75}$$

Utilizando, novamente, o lema A.6, temos

$$\| v_{in} - v_{i\widetilde{n}} \|_{W^{2,p}(\mathbf{B}_{\frac{R}{2}})} \leq c(\| v_{in} - v_{i\widetilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} + \| g_{in} - g_{i\widetilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} + \sum_{j=1}^{m} \| h_{ijn} - h_{ij\widetilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} + \sum_{k,j=1}^{N} \| A_{kjn} - A_{kj\widetilde{n}} \|_{L^\infty} \| D_{kj} v_{i\widetilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)} + \sum_{k=1}^{N} \| b_{kn} - b_{k\widetilde{n}} \|_{L^\infty} \| D_k v_{i\widetilde{n}} \|_{L^p(\mathbf{B}_R)}), \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{3.76}$$

Agora, por (**H.9**), (**H.11**), (3.67), (3.68), (3.70), (3.73), (3.75) e (3.76), concluímos que $(v_{in})_n$ é Cauchy em $W^{2,p}(\mathbf{B}_{\frac{R}{2}})$, $\forall i = 1, ..., m$, implicando que

$$v_{in} \to v_i \text{ em } W^{2,p}(\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.77}$$

Defina $\delta_{ij} = 1$, se $\alpha_{ij}\gamma_j = \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}$, ou $\delta_{ij} = 0$, se $\alpha_{ij}\gamma_j < \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}$, $\forall i, j = 1, ..., m$. Por (**H.9**), (**H.11**), (3.70) e (3.75), temos

$$\lim_{n \to +\infty} h_{ijn}(y) = \delta_{ij} \widetilde{h}_{ij}(x_0) v_j^{\alpha_{ij}}(y), \text{ uniformemente em } \overline{\mathbf{B}}_R(0), \ \forall i, j = 1, ..., m, \tag{3.78}$$

$$\delta_{ij} \widetilde{h}_{ij}(x_0) \geq 0, \ \forall i, j = 1, ..., m, \ j \neq \sigma_i. \tag{3.79}$$

Finalmente, tomando limite em (3.62), temos, por (3.67), (3.69), (3.73), (3.77), (3.78) e (3.79), que

$$\sum_{k,j=1}^{N} A_{kj}(x_0) D_{kj} v_i + \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} \widetilde{h}_{ij}(x_0) v_j^{\alpha_{ij}} = 0 \ qtp \ (\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.80}$$

Como $R \succ 0$ é arbitrário, argumentando com subseqüência diagonal, concluímos que existe $(v_1, ..., v_m) \in (W^{2,p}_{loc}(\mathbf{R}^N))^m$ satisfazendo

$$\begin{cases} \sum_{k,j=1}^N A_{kj}(x_0) D_{kj} v_i + \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \widetilde{h}_{ij}(x_0) v_j^{\alpha_{ij}} = 0 \text{ em } \mathbf{R}^N(\text{qtp}),\ \forall i = 1, ..., m \\ v_i \geq 0 \text{ em } \mathbf{R}^N,\ \forall i = 1, ..., m \\ v_r(0) = 1 \end{cases}$$

Utilizando os lemas A.5 e A.7, e argumentando por bootstrap, concluímos que $(v_1, ..., v_m) \in (C^2(\mathbf{R}^N))^m$. Além disso, por (3.79), temos

$$\begin{cases} \sum_{k,j=1}^N A_{kj}(x_0) D_{kj} v_i + \widetilde{h}_{i\sigma_i}(x_0) v_{\sigma_i}^{\alpha_{i\sigma_i}} \leq 0 \text{ em } \mathbf{R}^N, \\ \forall i = 1, ..., m \\ v_i \geq 0 \text{ em } \mathbf{R}^N,\ \forall i = 1, ..., m \\ v_r(0) = 1 \end{cases} \tag{3.81}$$

Fazendo uma mudança de variável, reduzimos (3.81) a

$$\begin{cases} \Delta v_i + v_{\sigma_i}^{\alpha_{i\sigma_i}}(y) \leq 0 \text{ em } \mathbf{R}^N(\text{qtp}),\ \forall i = 1, ..., m \\ v_i \geq 0 \text{ em } \mathbf{R}^N,\ \forall i = 1, ..., m \\ v_r(0) = 1 \end{cases}$$

Por (**H.10**), isto contradiz o teorema 1.2.1.

2º Caso: $x_0 \in \partial\Omega$.

Como Ω é de classe C^2, podemos, por mudança de coordenada, se necessário, assumir que $\Omega \subset \mathbf{R}^N_+$ e que existe $\delta \succ 0$ tal que $\mathbf{B}_\delta(x_0) \cap \mathbf{R}^N_+ \subset \Omega$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, seja $d_n = dist(x_n, \partial\Omega)$. Observemos que, como $u_{rn} = \phi_r$ sobre $\partial\Omega$ e $\phi_r \in L^\infty(\partial\Omega)$, por (3.53) e (3.57), temos que

$$x_n \in \Omega \text{ para } n \text{ suficientemente grande.} \tag{3.82}$$

Fixemos $R \succ 0$. Para n suficientemente grande, temos

$$\overline{\mathbf{B}}_{2R} \cap \{y \in \mathbf{R}^N : y_N \succ -\frac{d_n}{\lambda_n}\} \subset \Omega_n. \tag{3.83}$$

Se $(\frac{d_n}{\lambda_n})_n$ possui alguma subseqüência convergindo a $+\infty$, argumentando como no primeiro caso, chegamos a uma contradição. Agora, afirmamos que existe $\gamma \succ 0$ tal que $\frac{d_n}{\lambda_n} \geq \gamma$. De fato, pelo lema 1.1.5, existem, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, uma seqüência $(\omega_{in})_n$ de funções barreira, e constantes $a, c \succ 0$, independentes de n, tais que

$$\omega_{in}(y_1, ..., y_{N-1}, -\frac{d_n}{\lambda_n}) = 0,\ \forall (y_1, ..., y_{N-1}) \in \mathbf{R}^{N-1}\ , \tag{3.84}$$

$$\left\{\begin{array}{l} v_{in}(y) \leq \omega_{in}(y) + \lambda_n^{\gamma_i} \sup_{x\in\partial\Omega} \phi_i(x) \\ \mid \nabla\omega_{in}(y) \mid \leq c, \end{array}\right.$$

$$\forall y \in \Omega_n \cap \{y \in \mathbf{R}^N : y_N + \frac{d_n}{\lambda_n} \leq a\}, \tag{3.85}$$
$$\forall i = 1, ..., m,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Suponhamos, por absurdo, que $(\frac{d_n}{\lambda_n})_n$ possui alguma subseqüência, que continuaremos a denotar por $(\frac{d_n}{\lambda_n})_n$, convergindo a zero. Então, por (3.82), para n suficientemente grande, $0 \in \Omega_n \cap \{y \in \mathbf{R}^N : y_N + \frac{d_n}{\lambda_n} \leq a\}$. Logo, por (3.60), (3.84) e (3.85), temos

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = v_{rn}(0) \leq \omega_n(0) + \lambda_n^{\frac{2}{\alpha_{rr}-1}} \sup_{x\in\partial\Omega} \phi_r(x) \\ \mid \omega_n(0) \mid = \mid \omega_n(0) - \omega_n(0, -\frac{d_n}{\lambda_n}) \mid \leq c\frac{d_n}{\lambda_n} \end{array}\right. \tag{3.86}$$

Tomando limite em (3.86), chegamos a uma contradição. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{d_n}{\lambda_n} \to s \succ 0$. Por (3.83), podemos argumentar como no primeiro caso, e concluir que, passando a uma subseqüência convergente, temos

$$v_{in} \to v_i \in\ W^{2,p}_{loc}(H_s),\ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.87}$$

onde $H_s = \{y \in \mathbf{R}^N : y_N \succ -s\}$.

Além disso, $(v_1, ..., v_m)$ satisfaz (3.80) em H_s, e por (3.84) e (3.85), temos que $(v_1, ..., v_m)$ se estende continuamente a $\overline{H}_s$ com $v_i = 0$ sobre ∂H_s, $\forall i = 1, ..., m$. Resumindo, obtivemos $(v_1, ..., v_m) \in (W^{2,p}_{loc}(H_s))^m \cap (C(\overline{H}_s))^m$ satisfazendo

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{k,j=1}^N A_{kj}(x_0)D_{kj}v_i + \sum_{j=1}^m \delta_{ij}\widetilde{h}_{ij}(x_0)v_j^{\alpha_{ij}} = 0 \text{ em } H_s(\text{qtp}), \\ \forall i = 1, ..., m \\ v_i = 0 \text{ sobre } \partial H_s,\ \forall i = 1, ..., m \\ v_i \geq 0 \text{ em } H_s,\ \forall i = 1, ..., m \\ v_r(0) = 1 \end{array}\right.$$

Utilizando os lemas A.5 e A.7, e argumentando por bootstrap, concluímos que $(v_1, ..., v_m) \in (C^2(H_s))^m \cap (C(\overline{H}_s))^m$. Além disso, por (3.79), temos

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{k,j=1}^N A_{kj}(x_0)D_{kj}v_i + \widetilde{h}_{i\sigma_i}(x_0)v_{\sigma_i}^{\alpha_{i\sigma_i}} \leq 0 \text{ em } H_s, \\ \forall i = 1, ..., m \\ v_i \geq 0 \text{ em } H_s,\ \forall i = 1, ..., m \\ v_r(0) = 1 \end{array}\right. \tag{3.88}$$

Fazendo uma mudança de variável, reduzimos (3.88) a

$$\begin{cases} \Delta v_i + v_{\sigma_i}^{\alpha_{i\sigma_i}}(y) \leq 0 \text{ em } H_s(\text{qtp}), \ \forall i = 1, ..., m \\ v_i \geq 0 \text{ em } H_s, \ \forall i = 1, ..., m \\ v_r(0) = 1 \end{cases}$$

Por (**H.10**), isto contradiz o teorema 1.2.2.■

Exemplo 3.4: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \sum_{l=1}^m a_{il}(x) u_l^{\alpha_{il}} + \sum_{l=1}^m b_{il}(x) u_l^{\beta_{il}} + f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \\ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{3.89}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $a_{il} : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função contínua, $a_{i\sigma_i} > 0$ em $\overline{\Omega}$, $b_{il} : \Omega \to \mathbf{R}$ e $f_i : \Omega \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ são funções de Carathéodory, $\forall i, l = 1, ..., m$, $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1, \forall k = 1, ..., m-1$, e $\alpha_{il} \geq 0$, $\forall i, l = 1, ..., m$.

Agora, assumiremos as seguintes condições

$$0 < \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_{j\sigma_j} - 1}{\sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l \sigma_i^{l+1}})] + m} \leq \frac{2}{m(N-1)}, \tag{3.90}$$

$$0 \leq \beta_{il}\gamma_l < \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}, \ \alpha_{il}\gamma_l \leq \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}, \ \forall i, l = 1, ..., m, \tag{3.91}$$

onde

$$\gamma_i = \frac{2[\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=0}^{m-1-j} \alpha_{\sigma_i^l \sigma_i^{l+1}}) + 1]}{\prod_{j=1}^m \alpha_{j\sigma_j} - 1}, \ \forall i = 1, ..., m.$$

Então, o sistema (3.89) satisfaz as hipóteses do teorema 1.3.2. Observemos que as condições acima implicam que $0 \leq \beta_{i\sigma_i} < \alpha_{i\sigma_i}, \forall i = 1, ..., m$. Além disso, é fácil verificar que

$$\frac{\prod_{j=1}^m \beta_{j\sigma_j} - 1}{\sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \beta_{\sigma_i^l \sigma_i^{l+1}})] + m} < \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_{j\sigma_j} - 1}{\sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l \sigma_i^{l+1}})] + m}.$$

Suponha que $a_{il} \equiv 0 \equiv b_{il}$ em Ω, $\forall i, l = 1, ..., m, l \neq i, \sigma_i$. Então, (3.89) se reduz a

$$\begin{cases} -\Delta u_i = a_{ii}(x) u_i^{\alpha_{ii}} + a_{i\sigma_i}(x) u_{\sigma_i}^{\alpha_{i\sigma_i}} + b_{ii}(x) u_i^{\beta_{ii}} + b_{i\sigma_i}(x) u_{\sigma_i}^{\beta_{i\sigma_i}} + f_i(x, u_1, ..., u_m) \\ \text{em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{3.92}$$

Notemos que a condição (3.91) pode ser escrita, como

$$0 \leq \beta_{i\sigma_i} < \alpha_{i\sigma_i},\ 0 \leq \beta_{ii}\gamma_i < \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i},\ \alpha_{ii}\gamma_i \leq \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i},\ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.93}$$

Além disso, ao contrário do exemplo 3.2, (3.90) e (3.93) permitem que α_{ii} ou β_{ii} possa ser maior que $\frac{N+2}{N-2}$, para algum $i \in \{1, ..., m\}$, quando $N \geq 3$.

4. Existência de Soluções para Sistemas Elípticos com Caráter Superlinear

Nesta seção, utilizaremos os resultados sobre príncipio de máximo e teoria do grau em cones enunciados na seção 1, para obtermos existência de soluções positivas para algumas classes de sistemas elípticos da forma (3.1).

Seja $\mathcal{L} \equiv \sum_{k,j=1}^{N} D_k(A_{kj}(x)D_j)$ um operador uniformemente elíptico tal que $A_{kj} \equiv A_{jk}$ em Ω, $\forall k, j = 1, ..., N$. No que segue, assumiremos que $\mathcal{L}_1 \equiv ... \equiv \mathcal{L}_m \equiv \mathcal{L}$.

Comecemos com um resultado de existência para a classe de sistemas que satisfaz as seguintes hipóteses:

(H.12) $A_{kj} \in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall k, j = 1, ..., N$, $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função contínua, $\forall i = 1, ..., m$,

(H.13) Existe $\tilde{R} \succ 0$ tal que $f_i(x, u_1, ..., u_m) \leq u_{\tau_i}^{\beta_i}$, $\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$ satisfazendo $\sum_{j=1}^{m} u_j \leq \tilde{R}, \forall i = 1, ..., m$, onde $\tau : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\tau_1^k \neq 1, \forall k = 1, ..., m-1$, $\beta_i > 0, \forall i = 1, ..., m$, e $\prod_{i=1}^{m} \beta_i \succ 1$,

(H.14) Existe $c > 0$ tal que $f_i(x, u_1, ..., u_m) \geq \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j - c$, $\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $B = (b_{ij})$ é uma $m \times m$ matriz tal que

(a) B é não-negativa, $\rho(B) \succ \lambda_1$ e $b_{i\sigma_i} \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$, ou

(b) B^{-1} é não-negativa e $\rho(B^{-1}) \prec \lambda_1^{-1}$.

Teorema 1.4.1: Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz $(\mathbf{H.2}) - (\mathbf{H.8}), (\mathbf{H.12}), (\mathbf{H.13})$ e $(\mathbf{H.14})_a$ (ou $(\mathbf{H.14})_b$). Então, (3.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: Fixemos $p \succ N$. Consideremos os espaços $X = \{u \in (C(\overline{\Omega}))^m : u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \forall i = 1, ..., m\}$, $Y = (L^p(\Omega))^m$ e $Z = (W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$ munidos das normas $\| u \|_X = \sum_{i=1}^m \| u_i \|_{L^\infty}$, $\| u \|_Y = \sum_{i=1}^m \| u_i \|_{L^p}$ e $\| u \|_Z = \sum_{i=1}^m \| u_i \|_{W^{2,p}}$. Sabemos que X, Y e Z são espaços de Banach. Seja C o cone positivo de X, isto é, $C = \{u \in X : u_i \geq 0$ em Ω, $\forall i = 1, ..., m\}$. Seja $e' = (1, ..., 1)$. Para cada $v \in C$ e $t \in [0, +\infty)$, por **(H.12)**, temos que $(f_1(x, v), ..., f_m(x, v)) + te' \in (C(\overline{\Omega}))^m \subset Y$. Conseqüêntemente, pelo lema A.7, podemos definir a aplicação $H : C \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to Z$ por $H(v, t) = u$, onde u satisfaz

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = f_i(x, v_1, ..., v_m) + t \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{4.1}$$

Pela estimativa fornecida pelo lema A.7, temos que H é contínua e limitada, isto é, a imagem de subconjuntos limitados em $C \times \overline{\mathbf{R}}_+$ é limitada em Z. Por outro lado, como $p \succ N$, a imersão $Z \hookrightarrow X$ é compacta. Portanto, pela limitação, a aplicação $H : C \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to X$ é compacta. Além disso, por **(H.12)**, **(H.13)** e lema A.4, temos que $H(C, .) \subset C$ e $H(0, 0) = 0$. Defina $T : C \to C$ por $Tu = H(u, 0)$. Agora, mostraremos que o operador $T : C \to C$ satisfaz (i) do lema 1.1.7. Fixemos $q \succ \max\limits_{\substack{i \in \{1, ..., m\} \\ k \in \{0, ..., m-1\}}} \{1, (\prod_{j=0}^k \beta_{\tau_i^j})^{-1}\}$. Pelo lema A.7, existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u \|_{L^q} \leq c \| \mathcal{L}u \|_{L^q} , \ \forall u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega), \tag{4.2}$$

$$\| u \|_{L^{q_{ik}}} \leq c \| \mathcal{L}u \|_{L^{q_{ik}}} , \ \forall u \in W^{2,q_{ik}}(\Omega) \cap W_0^{1,q_{ik}}(\Omega), \tag{4.3}$$

$$\forall i = 1, ..., m, \ \forall k = 0, ..., m-1, \text{ onde } q_{ik} = (\prod_{j=0}^k \beta_{\tau_i^j})q.$$

Fixemos $0 \prec r \prec \tilde{R}$ tal que $c^{\sum_{k=0}^{m-2} (\prod_{j=0}^k \beta_{\tau_i^j}) + 1} \cdot r^{(\prod_{j=1}^m \beta_j - 1)q} \prec 1$, $\forall i = 1, ..., m$. Seja $u \in C$ com $\| u \|_X = r$ e $t \in [0, 1]$ tal que $u = tTu$. Pela definição de T, temos que u satisfaz

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = tf_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{4.4}$$

Seja $i_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $u_{i_0} \not\equiv 0$ em Ω. Aplicando **(H.13)** em (4.4), e utilizando (4.2) e (4.3), obtemos

$$\| u_{i_0} \|_{L^q} \leq c \| u_{\tau_{i_0}} \|_{L^{\beta_{i_0} q}}^{\beta_{i_0}} , \tag{4.5}$$

$$\| u_{\tau_{i_0}^k} \|_{L^{q_{i_0(k-1)}}} \leq c \| u_{\tau_{i_0}^{k+1}} \|_{L^{q_{i_0 k}}}^{\beta_{\tau_{i_0}^k}} , \ \forall k = 1, ..., m-1. \tag{4.6}$$

Combinando (4.5) e (4.6), concluímos que

$$\| u_{i_0} \|_{L^q} \leq c^{\sum_{k=0}^{i-2}(\prod_{j=0}^{k} \beta_{\tau_{i_0}^j})+1} \cdot \| u_{\tau_{i_0}^i} \|_{L^{q_{i_0(i-1)}}}^{\prod_{j=0}^{i-1} \beta_{\tau_{i_0}^j}}, \ \forall i = 2, ..., m. \tag{4.7}$$

Tomando $i = m$ em (4.7), obtemos

$$\| u_{i_0} \|_{L^q} \leq c^{\sum_{k=0}^{m-2}(\prod_{j=0}^{k} \beta_{\tau_{i_0}^j})+1} \cdot \| u_{i_0} \|_{L^{(\prod_{j=1}^{m} \beta_j)q}}^{\prod_{j=1}^{m} \beta_j} . \tag{4.8}$$

Agora, como $u_{i_0} \leq r$ em Ω, por (4.8), temos

$$\| u_{i_0} \|_{L^q} \leq c^{\sum_{k=0}^{m-2}(\prod_{j=0}^{k} \beta_{\tau_{i_0}^j})+1} \cdot r^{(\prod_{j=1}^{m} \beta_j - 1)q} \cdot \| u_{i_0} \|_{L^q}. \tag{4.9}$$

Por (4.9) e pela escolha de r, concluímos que $u_{i_0} \equiv 0$ em Ω, absurdo. Assim, $u \neq tTu$, $\forall u \in C$ tal que $\|u\|_X = r$ e $t \in [0, 1]$.

Agora, mostraremos que a aplicação $H : C \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to C$ satisfaz (ii) do lema 1.1.7. Pela definição de T, temos que (ii.1) é satisfeito. Seja $u \in C$ e $t \in [0, +\infty)$ tal que $H(u, t) = u$. Pela definição de H, temos que u satisfaz

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = f_i(x, u_1, ..., u_m) + t \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{4.10}$$

Utilizando (**H.14**) em (4.10), obtemos

$$-\mathcal{L}u_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j + t - c \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{4.11}$$

Suponhamos que $t \succ c$. Então, por (4.11), temos que existe $i_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $u_{i_0} \not\equiv 0$ em Ω. Assuma $(\mathbf{H.14})_a$. Então, por (4.11) e lema A.4, concluímos que $u_i \succ 0$ em $\Omega, \forall i = 1, ..., m$. Em particular,

$$\int_\Omega u_i \varphi_1 dx \succ 0, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{4.12}$$

Seja $\lambda_1 \prec \lambda \prec \rho(B)$. Multiplicando (4.11) por φ_1 e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega u_i \varphi_1 dx - \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \int_\Omega u_j \varphi_1 dx &\geq (\lambda - \lambda_1) \int_\Omega u_i \varphi_1 dx \\ +(t - c) \int_\Omega \varphi_1 dx &\geq (\lambda - \lambda_1) \int_\Omega u_i \varphi_1 dx, \ \forall i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Denotando $x = (\int_\Omega u_i \varphi_1 dx)_{1 \leq i \leq m}$, $y = (\lambda - \lambda_1)x$, podemos escrever (4.13) como

$$(\lambda I - B)x \geq y. \tag{4.14}$$

Como $x, y \in \mathbf{R}_+^m$, pelo lema 1.1.8, concluímos que $\rho(B) \prec \lambda$, absurdo. Agora, assuma $(\mathbf{H.14})_b$. De acordo com a notação acima, podemos escrever (4.14), como

$$(\lambda_1 I - B)x \geq 0. \tag{4.15}$$

Multiplicando (4.15) por B^{-1}, obtemos

$$(I - \lambda_1^{-1} B^{-1})x \leq 0. \tag{4.16}$$

Portanto, como B^{-1} é não-negativa e $\rho(B^{-1}) < \lambda_1^{-1}$, concluímos que $x \leq 0$. Isto implica que $u_i \equiv 0$ em $\Omega, \forall i = 1, ..., m$, absurdo. Então, $t \leq c$. Conseqüentemente, por $(\mathbf{H.2}) - (\mathbf{H.8})$ e $(\mathbf{H.12})$, podemos aplicar o teorema 1.3.1 ao sistema (4.10). Logo, existe $M \succ 0$ tal que $\| u \|_X \leq M$. Tomando $t_0 \succ c$ e $R \succ M$, obtemos (ii.2) e (ii.3) do lema 1.1.7. Portanto, existe $u \in C$ tal que $r \prec \| u \|_X \prec R$ e $Tu = u$, concluíndo a demonstração. ∎

Agora, consideremos as seguintes hipóteses:

$(\mathbf{H.12})'$ $A_{kj} \in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall k, j = 1, ..., N$, $f_i, D_{u_j} f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ são funções contínuas, $\forall i, j = 1, ..., m$,

$(\mathbf{H.15})$ $f_i(x, 0) = 0$, $\forall x \in \Omega$, $\forall i = 1, ..., m$,

$(\mathbf{H.16})$ A $m \times m$ matriz Jacobiana $J_f(x) = (D_{u_j} f_i(x, 0))$ é simétrica e não-negativa, $\forall x \in \Omega$, e $\sup_{x \in \overline{\Omega}} \rho(J_f(x)) \prec \lambda_1$.

Teorema 1.4.2: Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz $(\mathbf{H.2}) - (\mathbf{H.8}), (\mathbf{H.12})', (\mathbf{H.14})_a$ (ou $(\mathbf{H.14})_b$), $(\mathbf{H.15})$ e $(\mathbf{H.16})$. Então, (3.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: Como o sistema (3.1) satisfaz $(\mathbf{H.12})'$, podemos definir as aplicações compactas $H : C \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to C$ e $T : C \to C$, como na demonstração do teorema anterior. Além disso, por $(\mathbf{H.15})$, temos que $T(0) = 0$. Por $(\mathbf{H.12})'$ e $(\mathbf{H.16})$, podemos tomar $\varepsilon \succ 0$, suficientemente pequeno, tal que $\sup_{x \in \Omega} \rho(J_f(x) + \varepsilon Q) \prec \lambda_1$, onde Q é a $m \times m$ matriz cujos elementos são iguais a 1. Por outro lado, por $(\mathbf{H.12})'$ e $(\mathbf{H.15})$, existe $r > 0$ tal que

$$f_i(x, u_1, ..., u_m) \leq \sum_{j=1}^{m} (D_{u_j} f_i(x, 0) + \varepsilon) u_j, \tag{4.17}$$

$$\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m \text{ tal que } \sum_{j=1}^{m} u_j \leq r.$$

Agora, seja $u \in C$ com $\| u \|_X = r$ e $t \in [0,1]$ tal que $u = tTu$. Pela definição de T, temos que u satisfaz

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = tf_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{4.18}$$

Utilizando (4.17) em (4.18), obtemos

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i \leq \sum_{j=1}^{m} (D_{u_j} f_i(x, 0) + \varepsilon) u_j \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{4.19}$$

Aplicando o lema 1.1.6 à (4.19), concluímos que $-u \geq 0$ em Ω. Logo, $u \equiv 0$ em Ω, absurdo. Assim, $u \neq tTu, \forall u \in C$ tal que $\| u \|_X = r$ e $t \in [0,1]$. Para mostrar que a aplicação $H : C \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to C$ satisfaz (ii) do lema 1.1.7, basta proceder como na demonstração do teorema anterior. Portanto, aplicando o lema 1.1.7, concluímos a demonstração. ∎

Teorema 1.4.3: Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz $(\mathbf{H.2}) - (\mathbf{H.5}), (\mathbf{H.9}) - (\mathbf{H.13})$, $(\mathbf{H.14})_a$ (ou $(\mathbf{H.14})_b$). Então, (3.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.
Dem: A demonstração é análoga à do teorema 1.4.1. Observemos apenas, que ao invés de utilizarmos o teorema 1.3.1, devemos aplicar o teorema 1.3.2. ∎

Teorema 1.4.4: Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz $(\mathbf{H.2}) - (\mathbf{H.5}), (\mathbf{H.9}) - (\mathbf{H.11})$, $(\mathbf{H.12})', (\mathbf{H.14})_a$ (ou $(\mathbf{H.14})_b$), $(\mathbf{H.15})$ e $(\mathbf{H.16})$. Então, (3.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.
Dem: A demonstração é análoga à do teorema 1.4.2. ∎

Agora, consideremos a classe de sistemas que satisfaz:

$(\mathbf{H.17})$ Existem funções $b_i \in L^\infty(\Omega)$ tais que $b_i(x) \geq b \succ 0$, $f_i(x, u_1, ..., u_m) \geq b_i(x) u_{\sigma_i}^{\alpha_i} - c$, $\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$, $\forall i = 1, ..., m$, e $\prod_{i=1}^m b_i^{\eta_i}(x) \succ m\lambda_1$, uniformemente para $x \in \Omega$, onde $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$, $\eta_i = \frac{\sum_{k=1}^{m-1} (\prod_{j=k}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^j}) + 1}{\sum_{l=1}^{m} (\sum_{k=1}^{m-1} (\prod_{j=k}^{m-1} \alpha_{\sigma_l^j})) + m}$, $\alpha_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$ e $c \succ 0$.

Teorema 1.4.5: Assuma que $\mathcal{L} \equiv \Delta$. Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz (**H.2**) – (**H.5**), (**H.9**) – (**H.13**) e (**H.17**). Então, (3.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: Como o sistema (3.1) satisfaz (**H.12**), podemos definir as aplicacões compactas $H : C \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to C$ e $T : C \to C$, como na demonstração do teorema 1.4.1. Além disso, por (**H.12**) e (**H.13**), sabemos que a condição (i) do lema 1.1.7 é satisfeita e $T(0) = 0$. Por definição, (ii.1) ocorre. Agora, mostraremos as condições (ii.2) e (ii.3). Seja $u \in C$ e $t \in [0, +\infty)$ tal que $H(u,t) = u$. Pela definição de H, temos que u satisfaz

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = f_i(x, u_1, ..., u_m) + t \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{4.20}$$

Utilizando (**H.17**) em (4.20), obtemos

$$-\mathcal{L}u_i \geq b_i(x) u_{\sigma_i}^{\alpha_i} + t - c \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{4.21}$$

Suponhamos que $t > c$. Então, por (4.21), temos

$$-\mathcal{L}u_i \succ b_i(x) u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{4.22}$$

Logo, pela definição de σ e lema A.4, concluímos que $u_i > 0$ em $\Omega, \forall i = 1, ..., m$. Seja $v = \prod_{i=1}^m u_i$. Como $\mathcal{L} \equiv \Delta$, utilizando as idéias contidas na demonstração do teorema 1.2.1 (veja (2.8)-(2.10) na página 12 e (2.24) na página 14), mostramos que

$$\sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} \nabla u_i \cdot \nabla u_j \leq \frac{m-1}{m} \frac{|\nabla v|^2}{v}, \tag{4.23}$$

$$v = \prod_{i=1}^m \left(\frac{v}{u_i u_{\sigma_i}}\right)^{\eta_i} \cdot u_{\sigma_i}^{\eta_i(\alpha_i + 1)}, \tag{4.24}$$

$$\sum_{i=1}^m \eta_i = 1. \tag{4.25}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (4.24), obtemos

$$\left(\prod_{i=1}^m b_i^{\eta_i}(x)\right) v = \prod_{i=1}^m \left(\frac{b_i(x) v}{u_i u_{\sigma_i}}\right)^{\eta_i} \cdot u_{\sigma_i}^{\eta_i(\alpha_i+1)} \leq \sum_{i=1}^m \eta_i b_i(x) \frac{v}{u_i} u_{\sigma_i}^{\alpha_i}. \tag{4.26}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} \nabla u_i \cdot \nabla u_j + \sum_{i=1}^m \frac{v}{u_i} \cdot \Delta u_i \leq \sum_{i \prec j} 2 \frac{v}{u_i u_j} \nabla u_i \cdot \nabla u_j - \\ & \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{v}{u_i} u_{\sigma_i}^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Agora, combinando (4.23), (4.26) e (4.27), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta v+(\prod_{i=1}^{m} b_i^{\eta_i}(x))v &\leq \frac{m-1}{m}\cdot\frac{|\nabla v|^2}{v}+\sum_{i=1}^{m}(\eta_i-1)b_i(x)\frac{v}{u_i}u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \\ &\leq \frac{m-1}{m}\cdot\frac{|\nabla v|^2}{v}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Utilizando a mudança de variável $v=z^m$ em (4.28), concluímos que

$$\Delta z+\frac{1}{m}\prod_{i=1}^{m} b_i^{\eta_i}(x)z\leq 0 \text{ em } \Omega. \tag{4.29}$$

Multiplicando (4.29) por φ_1 e integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega(\frac{1}{m}\prod_{i=1}^{m} b_i^{\eta_i}(x)-\lambda_1)z\varphi_1 dx\leq 0. \tag{4.30}$$

Assim, por $(\mathbf{H.17})$, temos que $z\equiv 0$ em Ω, absurdo. Portanto, $t\leq c$. Conseqüentemente, por $(\mathbf{H.2})-(\mathbf{H.5})$ e $(\mathbf{H.9})-(\mathbf{H.12})$, podemos aplicar o teorema 1.3.2 ao sistema (4.20). Logo, existe $M\succ 0$ tal que $\| u\|_X\leq M$. Tomando $t_0\succ c$ e $R\succ M$, obtemos (ii.2) e (ii.3) do lema 1.1.7. Portanto, existe $u\in C$ tal que $r\prec\| u\|_X\prec R$ e $Tu=u$. Isto termina a demonstração. ∎

Teorema 1.4.6: Assuma que $\mathcal{L}\equiv\Delta$. Suponhamos que o sistema (3.1) satisfaz $(\mathbf{H.2})-(\mathbf{H.5}),(\mathbf{H.9})-(\mathbf{H.11}),(\mathbf{H.12})'$ e $(\mathbf{H.15})-(\mathbf{H.17})$. Então, (3.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m\cap(W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p\in[1,+\infty)$.
Dem: Sejam $H: C\times\overline{\mathbf{R}}_+\to C$ e $T: C\to C$, como na demonstração do teorema 1.4.1. A verificação de que as condições do lema 1.1.7 são satisfeitas, está contida nas demonstrações dos teoremas 1.4.1 e 1.4.5. Assim, aplicando o lema 1.1.7, concluímos a demonstração. ∎

Agora, daremos exemplos que são cobertos por alguns dos teoremas acima.

Seja $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ um domínio limitado de classe C^2, $N\geq 2$.
Exemplo 4.1: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i=a_i(x)u_i^{\alpha_i}+f_i(x,u_1,...,u_m) \text{ em } \Omega,\ \forall i=1,...,m \\ u_i=0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ \forall i=1,...,m, \end{cases} \tag{4.31}$$

onde $a_i : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}_+$ é uma função contínua, $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}_+^m} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função de classe C^1 tal que $f_i(x, u_1, ..., u_m) \leq a(\sum_{l=1}^m u_l^{\beta_{il}} + 1)$, $\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $a \succ 0$ e $\beta_{il} \geq 0$, $\forall i, l = 1, ..., m$.

Suponhamos que $1 < \alpha_i < \frac{N+2}{N-2}$, $\forall i = 1, ..., m$, se $N \geq 3$, ou $\alpha_i > 1$, $\forall i = 1, ..., m$, se $N = 2$, $\beta_{il} \prec \frac{\alpha_i(\alpha_l - 1)}{\alpha_i - 1}$, $\forall i, l = 1, ..., m$, $f_i(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$, $\forall i = 1, ..., m$, $J_f(x)$ é simétrica e não-negativa, $\forall x \in \Omega$, e $\sup_{x \in \Omega} \rho(J_f(x)) < \lambda_1$. Então, pelo teorema 1.4.2, (4.31) possui, pelo menos, uma solução não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m, \forall p \in [1, +\infty)$.

Um modelo que cumpre as condições acima:

$$\begin{cases} -\Delta u_i = a_i(x) u_i^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases}$$

onde $1 \prec \alpha_i \prec \frac{N+2}{N-2}$, $\forall i = 1, ..., m$, se $N \geq 3$, ou $\alpha_i \succ 1$, $\forall i = 1, ..., m$, se $N = 2$, $2\alpha_i < \alpha_i \alpha_l + 1$, $\forall i, l = 1, ..., m$, e $A = (a_{ij})$ é uma $m \times m$ matriz simétrica e não-negativa tal que $\rho(A) \prec \lambda_1$.

Notemos que, pela observação 1.1.3, a simetria de A não é necessária.

Exemplo 4.2: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = a_{ii}(x) u_i^{\alpha_{ii}} + a_{i\sigma_i}(x) u_{\sigma_i}^{\alpha_{i\sigma_i}}(x) + b_{ii}(x) u_i^{\beta_{ii}} + b_{i\sigma_i}(x) u_{\sigma_i}^{\beta_{i\sigma_i}} + f_i(x, u_1, ..., u_m) \\ \text{em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{4.32}$$

onde $a_{ii}, a_{i\sigma_i}, b_{ii}, b_{i\sigma_i} : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ são funções contínuas, $a_{i\sigma_i} > 0$ em $\overline{\Omega}$, $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}_+^m} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função de classe C^1 limitada, $\forall i = 1, ..., m$, $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$.

Suponhamos que $\frac{\prod_{j=1}^m \alpha_{j\sigma_j} - 1}{\sum_{i=1}^m [\sum_{j=i}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l \sigma_i^{l+1}})] + m} \leq \frac{2}{m(N-1)}, \alpha_{ii} > 1$, $\beta_{ii} > 1$, $1 < \beta_{i\sigma_i} < \alpha_{i\sigma_i}$, $0 \leq \beta_{ii}\gamma_i < \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}$, $\alpha_{ii}\gamma_i \leq \alpha_{i\sigma_i}\gamma_{\sigma_i}$, $\forall i = 1, ..., m$. Então, pelo teorema 1.4.4, (4.32) possui, pelo menos, uma solução não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Exemplo 4.3: Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = a_i(x) u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{4.33}$$

onde $a_i : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}_+$ é uma função contínua, $\forall i = 1, ..., m$.

Suponhamos que $\alpha_i \succ 0, \forall i = 1, ..., m$, e $0 < \frac{\prod_{j=1}^{m} \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})] + m} \leq \frac{2}{m(N-1)}$.

Então, pelo teorema 1.4.5 e lema A.4, (4.33) possui, pelo menos, uma solução positiva em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m, \forall p \in [1, +\infty)$. Logo, tomando $a_i \equiv 1$ em Ω, $\forall i = 1, ..., m$, obtemos, para os $\alpha_i's$ acima, solução para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i \succ 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases}$$

Em particular, quando $m = 2$, temos existência de solução para

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -\Delta u = v^{\alpha} \\ -\Delta v = u^{\beta} \end{array}\right. \text{ em } \Omega \\ u, v \succ 0 \ \text{ em } \Omega \\ u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.34}$$

supondo que $\alpha\beta \succ 1$ e $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \geq \frac{N-1}{N}$.

Por outro lado, pela observação 1.2.3, temos existência de solução para

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = u^{\alpha} & \text{em } \Omega \\ u \succ 0 & \text{em } \Omega \\ (-\Delta)^k u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \forall k = 0, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{4.35}$$

supondo que $\alpha \succ 1$ e $(N - m)\alpha \leq N + m$.

OBS 1.4.1: Em [18], De Figueiredo e Felmer mostraram, via método variacional, que se $1 > \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} > \frac{N-2}{N}$, quando $N \geq 3$, e $\alpha, \beta \leq \frac{N+4}{N-4}$, quando $N \geq 5$, então (4.34) possui solução. Observemos que o exemplo 4.3 fornece existência de solução para pares (α, β) não contidos em [18], quando $N \geq 5$. Além disso, em [58], Soranzo mostrou que, se Ω é um domínio limitado, suave e convexo, $N \succ 2m$ e $1 \prec \alpha \prec \frac{N+2m}{N-2m}$, então o problema (4.35) possui solução. Por outro lado, o exemplo 4.3 mostra existência de solução para α's estritamente abaixo de $\frac{N+2m}{N-2m}$, porém, não exigimos convexidade do domínio.$\bullet$

OBS 1.4.2: Suponha que Ω é de classe $C^{2,\alpha}$, $A_{kj} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \forall k, j = 1, ..., N$, e $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função de classe $C^{\alpha}, \forall i = 1, ..., m$. Então, as soluções fornecidas pelos teoremas acima estão em $(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$.$\bullet$

OBS 1.4.3: Assuma, ao invés de (**H**.**16**), que

(**H**.**16**)$'$ $J(x)$ é uma matriz cooperativa (isto é, $D_{u_j} f_i(x,0) \geq 0$, $\forall i,j = 1,...,m$, $i \neq j$), $\forall x \in \Omega$, tal que $\sum_{j=1}^{m} D_{u_j} f_i(x,0) \prec \lambda_1, \forall i = 1,...,m$.

Então, os teoremas acima, permanecem válidos. De fato, basta observar que a hipótese (**H**.**16**) foi usada para garantir um princípio de máximo para sistemas (lema 1.1.6). Por outro lado, (**H**.**16**)$'$ implica em um princípio de máximo (veja o corolário 1.1 em [23]).•

Capítulo 2

Existência de Soluções para Sistemas Elípticos com Caráter Sublinear

0. Introdução

Consideremos o seguinte sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $\mathcal{L} \equiv \sum_{k,j} D_k(A_{kj}(x)D_j)$ é um operador uniformemente elíptico tal que $A_{kj} \equiv A_{jk}$ em Ω, $\forall k, j = 1, ..., N$, e $f_i : \Omega \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$ é uma função de Carathéodory, $\forall i = 1, ..., m$.

No capítulo 1. estudamos o problema de existência de solução não-negativa para sistemas da forma (0.1), com caráter superlinear e subcrítico. Neste capítulo, analisaremos esta questão para sistemas elípticos semilineares com caráter sublinear.

Recentemente, Clément-van der Vorst [11] e Felmer-Martinez [28], via método variacional, mostraram, em particular, a existência de solução clássica positiva para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v^\alpha \\ -\Delta v = u^\beta \end{cases} \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{0.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 2$, $\alpha, \beta \succ 0$ e $\alpha\beta \prec 1$.

O teorema 2.3.6 contém este resultado, quando $m = 2$. Além disso, este teorema e o teorema 2.3.5 tratam não-linearidades não estudadas em [28]. Quando $\alpha\beta = 1$, a questão de existência é mais delicada, pois há problema de ressonância. O caso ressonante é tratado nos teoremas 2.3.1 - 2.3.4. Nossos argumentos são baseados em estimativas L^∞ das soluções de (0.1), teoria do grau e iteração monotônica.

Este capítulo está dividido em 3 seções. Na primeira, introduziremos alguns espaços de interpolação e um conceito de solução fraca. Além disso, enunciaremos um resultado simples de existência, baseado no método de subsoluções e supersoluções. Na segunda seção, obteremos estimativas a priori para soluções fracas e fortes de alguns sistemas elípticos semilineares com caráter sublinear. Finalmente, na terceira seção, utilizaremos teoria do grau e iteração monotônica para obtermos alguns resultados de existência.

1. Preliminares

Nesta seção, formularemos um conceito de solução fraca para certas classes de sistemas da forma (0.1), o qual nos permitirá estudar a existência de solução não-negativa para alguns sistemas com caráter sublinear. Para isto, introduziremos alguns espaços de Sobolev fracionários.

Sejam $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset H_0^1(\Omega)$ uma base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$ formada por autofunções do problema $-\mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi$ em Ω, $\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega$, e $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ os autovalores associados. Tome $\varphi_1 \succ 0$ em Ω. Sabemos que $L^2(\Omega) = \{u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \prec +\infty\}$. Consideremos a seguinte família de espaços $(H^s)_{s\geq 0}$ e operadores $A^s : H^s \to L^2(\Omega)$, $s \geq 0$:

$$H^s = \{u = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^s a_n^2 \prec +\infty\},\ \forall s \geq 0, \tag{1.1}$$

$$A^s : H^s \to L^2(\Omega),\ A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{s}{2}} a_n\varphi_n,\ \forall s \geq 0. \tag{1.2}$$

Pela definição de H^s, temos que o operador A^s está bem definido e é linear. Além disso, como $\lambda_n \to +\infty$, $\exists c \succ 0$ tal que

$$\| A^s u \|_{L^2} \geq c \| u \|_{L^2},\ \forall s \geq 0. \tag{1.3}$$

Seja $(.,.)_{H^s} : H^s \times H^s \to \mathbf{R}$ definido por $(u,v)_{H^s} = \int_\Omega A^s u A^s v dx$. Por (1.3), temos que $(.,.)_{H^s}$ é um produto interno, e que H^s, munido desse produto interno, é um espaço de Hilbert. Denotemos por $\| \,.\, \|_{H^s}$ a norma proveniente desse produto interno. Por (1.1) e pela definição de $(.,.)_{H^s}$, temos que A^s é um isomorfismo isométrico. Observemos que

$H^0 = L^2(\Omega)$ e $H^1 = H_0^1(\Omega)$.

Agora, consideremos uma importante propriedade sobre imersões desses espaços de interpolação:

Lema 2.1.1: Dado $s \succ 0$, temos:

(a) A imersão $H^s \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua, $\forall q \in [1, \frac{2N}{N-2s}]$, se $2s \prec N$, e $\forall q \in [1, +\infty)$, se $2s \geq N$,

(b) A imersão $H^s \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta, $\forall q \in [1, \frac{2N}{N-2s})$, se $2s \prec N$, e $\forall q \in [1, +\infty)$, se $2s \geq N$.

Dem: Veja [50] e as referências lá contidas. ■

Seja $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$. Suponha que o sistema (0.1) satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$| f_i(x, u_1, ..., u_m) | \leq a(u_{\sigma_i}^{\alpha_i} + 1), \ \forall i = 1, ..., m, \tag{1.4}$$

onde $a \succ 0$ e $\alpha_i \succ 0, \forall i = 1, ..., m$.

Suponhamos que existam $s_i \succ 0, \forall i = 1, ..., m$, tais que

$$s_i + s_{\sigma_i} = 2, \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{\alpha_i + 1} \succ \frac{1}{2} - \frac{s_{\sigma_i}}{N}, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{1.6}$$

Assumindo que (0.1) satisfaz (1.4)-(1.6), podemos introduzir um conceito de solução fraca para (0.1), o qual é inspirado no trabalho [18].

Definição 2.1.1: Diremos que $(u_1, ..., u_m) \in \bigoplus_{i=1}^m H^{s_i}$ é uma solução fraca de (0.1), se

$$\int_\Omega A^{s_i} u_i A^{s_{\sigma_i}} \phi_i dx = \int_\Omega f_i(x, u_1, ..., u_m) \phi_i dx, \tag{1.7}$$
$$\forall \phi_i \in H^{s_{\sigma_i}}, \ \forall i = 1, ..., m.$$

No que segue, necessitaremos do seguinte resultado de regularidade:

Lema 2.1.2: Seja $(u_1, ..., u_m) \in \bigoplus_{i=1}^m H^{s_i}$ uma solução fraca de (0.1). Então, $(u_1, ..., u_m) \in \bigoplus_{i=1}^m W^{2,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega) \cap \bigoplus_{i=1}^m W_0^{1,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega)$, e é uma solução forte de (0.1), isto é,

$$-\mathcal{L}u_i = f_i(x, u_1, ..., u_m),\ qtp(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m. \tag{1.8}$$

Dem: Por (1.7), temos

$$\int_\Omega A^{s_i}u_i A^{s\sigma_i}\phi dx = \int_\Omega f_i(x, u_1, ..., u_m)\phi dx, \tag{1.9}$$
$$\forall \phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m.$$

Por outro lado, por (1.5), temos

$$\int_\Omega A^{s_i}u_i A^{s\sigma_i}\phi dx = \int_\Omega u_i A^{s_i+s\sigma_i}\phi dx = -\int_\Omega u_i \mathcal{L}\phi dx, \tag{1.10}$$
$$\forall \phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m.$$

Por (1.4), temos que

$$f_i(x, u_1, ..., u_m) \in L^{\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m. \tag{1.11}$$

Então, pelo lema A.7, existe $v_i \in W^{2,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega)$ tal que

$$-\mathcal{L}v_i = f_i(x, u_1, ..., u_m),\ qtp(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m. \tag{1.12}$$

Além disso, por (1.6), temos que $\frac{1}{2} \succ \frac{\alpha_i}{\alpha_i+1} - \frac{s\sigma_i}{N} \succ \frac{\alpha_i}{\alpha_i+1} - \frac{2}{N}$. Assim, por imersão de Sobolev, temos

$$v_i \in L^2(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m. \tag{1.13}$$

Conseqüêntemente, por (1.9), (1.10) e (1.12), temos

$$-\int_\Omega u_i\mathcal{L}\phi dx = -\int_\Omega \mathcal{L}v_i\phi dx = -\int_\Omega v_i\mathcal{L}\phi dx,\ \forall i = 1, ..., m. \tag{1.14}$$

Seja $w_i = u_i - v_i$, $\forall i = 1, ..., m$. Por (1.14), temos

$$\int_\Omega w_i\mathcal{L}\phi dx = 0,\ \forall \phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m. \tag{1.15}$$

Como $w_i \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., m$, então, por (1.15) e lema A.7, concluímos que $w_i = 0, \forall i = 1, ..., m$. Isto termina a demonstração. ∎

Agora, enunciaremos um resultado de existência. Para isto, necessitaremos da seguinte definição:

Definição 2.1.2: Sejam $u = (u_1, ..., u_m)$, $v = (v_1, ..., v_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$ tal que $u, v \geq 0$ em Ω. Dizemos que u é uma subsolução (supersolução) de (0.1), se $u_i = 0$ sobre $\partial\Omega$, $\forall i = 1, ..., m$, e $-\mathcal{L}u_i \leq (\geq) f_i(x, u_1, ..., u_m)$ em Ω, $\forall i = 1, ..., m$. Dizemos que $u \leq v$ em Ω, se $u_i \leq v_i$ em Ω, $\forall i = 1, ..., m$.

Lema 2.1.3: Sejam $\underline{u} = (\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m)$, $\overline{u} = (\overline{u}_1, ..., \overline{u}_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$, $\underline{u}, \overline{u} \geq 0$ em Ω, uma subsolução e uma supersolução de (0.1), respectivamente. Suponhamos que Ω é de classe $C^{2,\alpha}$ e que $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é de classe C^α tal que, se $u_j \leq v_j$ e $u_j, v_j \in [0, M], \forall j = 1, ..., m$, então $f_i(x, u_1, ..., u_m) \leq f_i(x, v_1, ..., v_m), \forall x \in \Omega, \forall i = 1, ..., m$, onde $M = \max_{i \in \{1,...,m\}} \{\| \underline{u}_i \|_{L^\infty}, \| \overline{u}_i \|_{L^\infty}\}$. Então, (0.1) possui soluções $u^1, u^2 \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$ tais que $\underline{u} \leq u^1 \leq u^2 \leq \overline{u}$ em Ω.

Dem: Pelo Lema A.5, para cada $u = (u_1, ..., u_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$, existe um único $v = (v_1, ..., v_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\mathcal{L}v_i = f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ v_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{1.16}$$

Assim, podemos definir a aplicação

$$T : (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m \to (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m \text{ por } Tu = v.$$

Sejam $u^1, u^2 \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$ tais que $u^1 \leq u^2$ em Ω e $\| u_i^1 \|_{L^\infty}, \| u_i^2 \|_{L^\infty} \leq M, \forall i = 1, ..., m$. Então, $Tu^1 \leq Tu^2$ em Ω. De fato, pela definição de T, temos

$$\begin{cases} -\mathcal{L}[(Tu^1)_i - (Tu^2)_i] = f_i(x, u_1^1, ..., u_m^1) - \\ f_i(x, u_1^2, ..., u_m^2) \leq 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ (Tu_i^1)_i - (Tu_i^2) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{1.17}$$

Portanto, pelo Lema A.2, concluímos que

$$u^1 \leq u^2 \text{ em } \Omega \Rightarrow Tu^1 \leq Tu^2 \text{ em } \Omega. \tag{1.18}$$

Agora, consideremos as seqüências $(u_n^1)_{n\geq 0}, (u_n^2)_{n\geq 0} \subset (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$ definidas por $u_0^1 = \underline{u}$, $u_{n+1}^1 = Tu_n^1, \forall n \geq 0$, e $u_0^2 = \overline{u}$, $u_{n+1}^2 = Tu_n^2, \forall n \geq 0$. Afirmamos que $u_n^1 \leq u_{n+1}^1$, $u_n^2 \geq u_{n+1}^2$ e $u_n^1 \leq u_n^2$ em Ω, $\forall n \geq 0$. De fato, temos

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\underline{u}_i - u_{1i}^1) \leq f_i(x, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_m) - f_i(x, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_m) = 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ \underline{u}_i - u_{1i}^1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{1.19}$$

Aplicando o lema A.2, concluímos que $u_0^1 \leq u_1^1$ em Ω. De forma análoga, temos que $u_0^2 \geq u_1^2$ em Ω. O restante da demonstração segue, utilizando (1.18) e indução. Portanto, temos funções $u^1, u^2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}_+^m}$ definidas por $u_n^1 \to u^1$ e $u_n^2 \to u^2$ em Ω, pontualmente. Pelo teorema da convergência dominada, temos que $u^1, u^2 \in (L^p(\Omega))^m$, $\| u_{ni}^1 - u_i^1 \|_{L^p} \to 0$ e $\| u_{ni}^2 - u_i^2 \|_{L^p} \to 0, \forall i = 1, ..., m$, $\forall p \geq 1$. Fixemos $p \succ \frac{N}{1-\alpha}$. Pelo lema A.7, temos que

$$\| u_{(k+1)i}^1 - u_{(n+1)i}^1 \|_{W^{2,p}} \leq c \, \| f_i(x, u_{k1}^1, ..., u_{km}^1) - f_i(x, u_{n1}^1, ..., u_{nm}^1) \|_{L^p}, \tag{1.20}$$

$$\| u_{(k+1)i}^2 - u_{(n+1)i}^2 \|_{W^{2,p}} \leq c \, \| f_i(x, u_{k1}^2, ..., u_{km}^2) - f_i(x, u_{n1}^2, ..., u_{nm}^2) \|_{L^p}, \tag{1.21}$$

$\forall i = 1, ..., m.$

Utilizando, novamente, o teorema da convergência dominada em (1.20) e (1.21), concluímos que $u^1, u^2 \in (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\| u_{ni}^1 - u_i^1 \|_{W^{2,p}} \to 0$ e $\| u_{ni}^2 - u_i^2 \|_{W^{2,p}} \to 0$, $\forall i = 1, ..., m$. Por imersão de Sobolev, temos que $u^1, u^2 \in (C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$, $\| u_{ni}^1 - u_i^1 \|_{1,\alpha} \to 0$ e $\| u_{ni}^2 - u_i^2 \|_{1,\alpha} \to 0$, $\forall i = 1, ..., m$. Por outro lado, pelo lema A.5, obtemos

$$\| u_{(k+1)i}^1 - u_{(n+1)i}^1 \|_{2,\alpha} \leq c \, \| f_i(x, u_{k1}^1, ..., u_{km}^1) - f_i(x, u_{n1}^1, ..., u_{nm}^1) \|_{\alpha}, \tag{1.22}$$

$$\| u_{(k+1)i}^2 - u_{(n+1)i}^2 \|_{2,\alpha} \leq c \, \| f_i(x, u_{k1}^2, ..., u_{km}^2) - f_i(x, u_{n1}^2, ..., u_{nm}^2) \|_{\alpha}, \tag{1.23}$$

$\forall i = 1, ..., m.$

Conseqüêntemente, $u^1, u^2 \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$, $\| u_{ni}^1 - u_i^1 \|_{2,\alpha} \to 0$ e $\| u_{ni}^2 - u_i^2 \|_{2,\alpha} \to 0$, $\forall i = 1, ..., m$, implicando que u^1 e u^2 são soluções de (0.1). ∎

2. Estimativas A Priori para Sistemas Elípticos

Nesta seção, obteremos algumas estimativas a priori para soluções fracas e fortes de certas classes de sistemas elípticos semilineares com caráter sublinear. Antes de enunciarmos os principais resultados desta seção, consideraremos alguns lemas que serão úteis no decorrer deste capítulo.

Lema 2.2.1: Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_m$ reais positivos, $m \geq 2$, tais que $\prod_{i=1}^m \alpha_i \leq 1$, e $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ uma bijeção satisfazendo $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$. Então, existe $r \in \{1, ..., m\}$ tal que

$$\frac{\prod_{i=0}^k \alpha_{\sigma_r^{m-i}}}{\alpha_r + 1} \leq 1, \; \forall k = 1, ..., m-1. \tag{2.1}$$

Dem: Argumentaremos por indução. Se $m = 2$, então, claramente, o lema se verifica. Suponhamos que existe $m' \geq 2$ tal que o lema ocorre para qualquer $m \in \{2, ..., m'\}$. Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_{m'+1}$ reais positivos tais que $\prod_{i=1}^{m'+1} \alpha_i \leq 1$, e $\sigma : \{1, ..., m'+1\} \to \{1, ..., m'+1\}$ uma bijeção satisfazendo $\sigma_1^k \neq 1, \forall k = 1, ..., m'$. Então, como $\prod_{i=1}^{m'+1} \alpha_i \leq 1$, uma, e apenas uma, das seguintes alternativas ocorre:

(a) $\alpha_i \leq 1, \ \forall i = 1, ..., m'+1$,

(b) $\exists r' \in \{1, ..., m'+1\}$ tal que $\alpha_{r'} \succ 1$ e $\alpha_i \leq 1, \forall i \neq r'$,

(c) $\exists r' \in \{1, ..., m'+1\}$ tal que $\alpha_{r'} \succ 1$ e $\alpha_{\sigma_{r'}} \succ 1$,

(d) (b) e (c) não se verificam, $\exists r' \in \{1, ..., m'+1\}$ e $i_0 \in \{1, ..., m'-2\}$ tais que $\alpha_{\sigma_{r'}^j} \leq 1, \forall j = 1, ..., i_0$, $\alpha_{r'} \succ 1$ e $\prod_{j=0}^{i_0} \alpha_{\sigma_{r'}^j} \leq 1$.

À seguir, estudaremos cada uma destas alternativas:

Alternativa (a): É imediato que (2.1) se verifica para qualquer $r \in \{1, ..., m'+1\}$.

Alternativa (b): Basta tomar $r = r'$. A verificação de (2.1) é simples.

Alternativa (c): Sejam $\beta_1 = \alpha_{r'}\alpha_{\sigma_{r'}}$, $\beta_i = \alpha_{\sigma_{r'}^i}$, $\forall i = 2, ..., m'$, e $\tau : \{1, ..., m'\} \to \{1, ..., m'\}$ a aplicação definida por $\tau_i = i+1, \forall i = 1, ..., m'-1$, $\tau_{m'} = 1$. Como $\prod_{i=1}^{m'} \beta_i \leq 1$, pela hipótese de indução, existe $r_1 \in \{1, ..., m'\}$ tal que

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \beta_{\tau_{r_1}^{m'-i}}}{\beta_{r_1} + 1} \leq 1, \ \forall k = 1, ..., m'-1. \tag{2.2}$$

Suponhamos que $r_1 \in \{2, ..., m'\}$. Seja $r = \sigma_{r'}^{m'+2-r_1}$. Para verificar que (2.2) implica em (2.1), basta mostrar que

$$\frac{\prod_{i=0}^{m'+1-r_1} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_r + 1} \leq 1. \tag{2.3}$$

A verificação que (2.1) ocorre para $k \neq m'+1-r_1$, segue imediatamente de (2.2). Por (2.2), temos

$$\frac{\prod_{i=0}^{m'+2-r_1} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_r + 1} = \frac{\prod_{i=0}^{m'+r_1-1} \beta_{\tau_{r_1}^{m'-i}}}{\beta_{r_1} + 1} \leq 1. \tag{2.4}$$

Como $\alpha_{\sigma_r^{r_1-1}} = \alpha_{r'} \succ 1$, por (2.4), concluímos que (2.3) é satisfeito. Agora, suponha que $r_1 = 1$. Seja $r = r'$. Então, temos

$$\frac{\alpha_{\sigma_{r'}} \prod_{i=0}^{k} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_{\sigma_{r'}}\alpha_r + 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k} \beta_{m'+1-i}}{\beta_1 + 1} \leq 1, \ \forall k = 1, ..., m'-1. \tag{2.5}$$

Como $\alpha_{\sigma_{r'}} \succ 1$, por (2.5), temos que

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_r + 1} \leq 1, \ \forall k = 1, ..., m' - 1. \tag{2.6}$$

Resta verificar que (2.6) é satisfeito para $k = m'$. Mas isto é imediato, pois $\prod_{i=1}^{m'+1} \alpha_i \leq 1$.
Alternativa (d): Sejam $\beta_1 = \alpha_{r'}\alpha_{\sigma_{r'}^{m'}}$, $\beta_2 = \prod_{j=1}^{i_0} \alpha_{\sigma_{r'}^{j}}$, $\beta_i = \alpha_{\sigma_{r'}^{i+i_0-2}}$, $\forall i = 3, ..., m'+1-i_0$, e $\tau : \{1, ..., m'+1-i_0\} \to \{1, ..., m'+1-i_0\}$ a aplicação definida por $\tau_i = i+1$, $\forall i = 1, ..., m'-i_0$, $\tau_{m'+1-i_0} = 1$. Como $\prod_{i=1}^{m'+1-i_0} \beta_i \leq 1$, pela hipótese de indução, existe $r_1 \in \{1, ..., m'+1-i_0\}$ tal que

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \beta_{\tau_{r_1}^{m'+1-i_0-i}}}{\beta_{r_1} + 1} \leq 1, \ \forall k = 1, ..., m' - i_0. \tag{2.7}$$

Suponhamos que $r_1 \in \{3, ..., m'+1-i_0\}$. Seja $r = \sigma_{r'}^{r_1+i_0-2}$. Para verificar que (2.7) implica em (2.1), basta mostrar que

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_r + 1} \leq 1, \ \forall k = m' + r_1 - 1, ..., m' + r_1 + i_0 - 3, \tag{2.8}$$
$$m' + r_1 + i_0 - 1.$$

A verificação que (2.1) ocorre para os valores de k restantes, segue de (2.7). Por (2.7), temos $\frac{\prod_{i=0}^{r_1-3} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_r+1} \leq 1$. Portanto, como $\alpha_{\sigma_r^{m'+1-k}} = \alpha_{\sigma_{r'}^{m'+r_1+i_0-1-k}} \leq 1$, $\forall k = m'+r_1-1, ..., m'+r_1+i_0-3$, temos que (2.8) se verifica para $k = m'+r_1-1, ..., m'+r_1+i_0-3$. Além disso, como $\prod_{i=m'+r_1-1}^{m'+r_1+i_0-1} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}} \leq 1$, temos (2.8) para $k = m'+r_1+i_0-1$. Suponha que $r_1 = 2$. Seja $r = \sigma_{r'}^{i_0}$. Então, segue de (2.7), que

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\prod_{i=0}^{i_0-1} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}} + 1} \leq 1, \ \forall k = i_0 + 1, ..., m' - 1. \tag{2.9}$$

Como $\alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}} \leq 1, \forall i = 1, ..., i_0 - 1$, por (2.9), obtemos

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_r + 1} \leq 1, \ \forall k = i_0 + 1, ..., m' - 1. \tag{2.10}$$

Observando que $\prod_{i=0}^{i_0} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}} \leq 1$, concluímos que (2.10) se verifica para os valores restantes de k. Finalmente, suponha que $r_1 = 1$. Seja $r = r'$. Então, por (2.7), temos

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_{\sigma_{r'}^{m'}}\alpha_r + 1} \leq 1, \ \forall k = 2, ..., m' - i_0, m'. \tag{2.11}$$

Como $\alpha_{\sigma_r^{m'}} \leq 1$, por (2.11), segue que

$$\frac{\prod_{i=0}^{k} \alpha_{\sigma_r^{m'+1-i}}}{\alpha_r + 1} \leq 1, \ \forall k = 1, ..., m' - i_0, m'. \tag{2.12}$$

Notando que $\alpha_{\sigma_r^{m'+1-k}} \leq 1, \forall k = m' - i_0 + 1, ..., m' - 1$, temos que (2.12) se verifica para $k = m' - i_0 + 1, ..., m' - 1$. Isto conclui a demonstração. ■

Lema 2.2.2: Assuma que o sistema (0.1) satisfaz (1.4). Seja $r \in \{1, ..., m\}$. Dado $\alpha \geq \alpha_r$, defina

$$q_{0,\alpha} = \frac{1}{\alpha + 1}, \ q_{1,\alpha} = \frac{\alpha_r}{\alpha + 1} - \frac{2}{N},$$
$$q_{k,\alpha} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{\sigma_r^{m-i}}}{\alpha + 1} - \frac{2[\sum_{i=1}^{k-1}(\prod_{j=i}^{k-1} \alpha_{\sigma_r^{m-j}}) \ + \ 1]}{N},$$
$$\forall k = 2, ..., m.$$

Se $0 \prec q_{k,\alpha} \prec 1$, defina $p_{k,\alpha} = \frac{1-q_{k,\alpha}}{q_{k,\alpha}}$. Então, temos:

(a) se $\frac{p_{k,\alpha}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}} \succ 1$ então $\exists c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r^{m-k}} \|_{W^{2, \frac{p_{k,\alpha}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}}}} \leq c(\| u_{\sigma_r^{m+1-k}} \|_{L^{p_{k,\alpha}+1}}^{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}} + 1),$$

$\forall$ solução forte $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,q}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,q}(\Omega))^m$ de (0.1) tal que $u_{\sigma_r^{m+1-k}} \in L^{p_{k,\alpha}+1}(\Omega)$, onde $q \in [1, +\infty)$,

(b) Existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_i} \|_{L^\infty}^{\alpha_i} + 1), \ \forall i = 1, ..., m,$$

$\forall$ solução forte $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,q}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,q}(\Omega))^m$ de (0.1) tal que $u_{\sigma_r} \in L^\infty(\Omega)$, onde $q \in [1, +\infty)$ e $r \in \{1, ..., m\}$.

Dem: (a) Como $\frac{p_{k,\alpha}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}} \succ 1$, pela lema A.7, temos

$$\| u_{\sigma_r^{m-k}} \|_{W^{2, \frac{p_{k,\alpha}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}}}} \leq c \, \| f_{\sigma_r^{m-k}}(x, u_1, ..., u_m) \|_{L^{\frac{p_{k,\alpha}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}}}} . \tag{2.13}$$

Utilizando (1.4) em (2.13), obtemos

$$\| u_{\sigma_r^{m-k}} \|_{W^{2, \frac{p_{k,\alpha}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}}}} \leq c(\| u_{\sigma_r^{m+1-k}} \|_{L^{p_{k,\alpha}+1}}^{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}} + 1). \tag{2.14}$$

(b) Seja $p \succ N\alpha_r$. Pelo lema A.7, temos

$$\| u_r \|_{W^{2,\frac{p}{\alpha_r}}} \leq c \| f_r(x, u_1, ..., u_m) \|_{L^{\frac{p}{\alpha_r}}}. \tag{2.15}$$

Utilizando (1.4), obtemos

$$\| u_r \|_{W^{2,\frac{p}{\alpha_r}}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^p}^{\alpha_r} + 1) \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty}^{\alpha_r} + 1). \tag{2.16}$$

Como $p \succ N\alpha_r$, por imersão de Sobolev, concluímos que

$$\| u_r \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty}^{\alpha_r} + 1).$$

Agora, argumentando indutivamente, concluímos a demonstração.■

Lema 2.2.3: Assuma que o sistema (0.1) satisfaz (1.4) e $\prod_{i=1}^m \alpha_i \leq 1$. Sejam $r \in \{1, ..., m\}$, como no lema 2.2.1 e $\alpha \geq \alpha_r$. Suponhamos que $q_{k,\alpha} \succ 0, \forall k = 1, ..., m$. Então, $\exists c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta+1}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha+1}}^{\prod_{i=1}^m \alpha_i} + 1),$$

$\forall$ solução forte $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,q}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,q}(\Omega))^m$ de (0.1) tal que $u_{\sigma_r} \in L^{\alpha+1}(\Omega)$, onde $\beta \geq \alpha + (\alpha_r + 1)^2\mu$, $\mu = \frac{2[\sum_{i=1}^{m-1}(\prod_{j=i}^{m-1} \alpha_{\sigma_r^{m-j}}) + 1]}{N} \succ 0$, $q \in [1, +\infty)$.

Dem: Como $\frac{p_{0,\alpha}+1}{\alpha_r} = \frac{\alpha+1}{\alpha_r} \succ 1$, pelo lema 2.2.2(a), existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_r \|_{W^{2,\frac{p_{0,\alpha}+1}{\alpha_r}}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha_r} + 1). \tag{2.17}$$

Observemos que, como $q_{k,\alpha} \succ 0, \forall k = 1, ..., m$, pelo lema 2.2.1, concluímos que

$$\frac{p_{k,\alpha}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m-k}}} \succ 1 \text{ e } 2(p_{k,\alpha}+1) \prec N\alpha_{\sigma_r^{m-k}}, \quad \forall k = 0, ..., m-1. \tag{2.18}$$

Utilizando (2.18) e imersão de Sobolev em (2.17), obtemos

$$\| u_r \|_{L^{p_{1,\alpha}+1}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha_r} + 1). \tag{2.19}$$

Por (2.18), podemos proceder indutivamente com o lema 2.2.2(a) e concluir que existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r^{m+1-k}} \|_{L^{p_{k,\alpha}+1}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha+1}}^{\prod_{j=1}^k \alpha_{\sigma_r^{m+1-j}}} + 1). \tag{2.20}$$

Em particular, tomando $k = m$ e $\beta = p_{m,\alpha}$, obtemos

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta+1}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha+1}}^{\prod_{i=1}^{m} \alpha_i} + 1). \tag{2.21}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1} &= \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{p_{m,\alpha}+1} \\ &= \frac{1 - \prod_{i=1}^{m} \alpha_i}{\alpha+1} \\ &+ \frac{2[\sum_{i=1}^{k-1}(\prod_{j=i}^{k-1} \alpha_{\sigma_r^{m-j}}) + 1]}{N}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Como $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \leq 1$, concluímos que $\beta \geq \alpha + (\alpha_r + 1)^2 \mu$. ■

Lema 2.2.4: Suponha que o sistema (0.1) satisfaz (1.4) e $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \leq 1$. Sejam $r \in \{1, ..., m\}$, como no lema 2.2.1, e $\alpha \geq \alpha_r$. Então, existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha_r+1}}^{\prod_{i=1}^{m} \alpha_i} + 1), \tag{2.23}$$

$\forall$ solução forte $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,q}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,q}(\Omega))^m$ de (0.1) tal que $u_{\sigma_r} \in L^{\alpha_r+1}(\Omega)$, onde $q \in [1, +\infty)$. Em particular, $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: A demonstração será dividida em dois casos:

1º caso: Existe $k' \in \{1, ..., m\}$ tal que

$$q_{j,\alpha_r} \succ 0, \ \forall j = 0, ..., k' - 1, \ \text{e} \ \ q_{k',\alpha_r} \leq 0. \tag{2.24}$$

Utilizando o lema 2.2.1 e argumentando como no lema 2.2.2(a), concluímos que

$$\| u_{\sigma_r^{m+1-k'}} \|_{W^{2, \frac{p_{k'-1,\alpha_r}+1}{\alpha_{\sigma_r^{m+1-k'}}}}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha_r+1}}^{\prod_{j=1}^{k'} \alpha_{\sigma_r^{m+1-j}}} + 1). \tag{2.25}$$

Como $q_{k',\alpha_r} \leq 0$, então $2(p_{k'-1,\alpha_r} + 1) \geq N\alpha_{\sigma_r^{m+1-k'}}$. Conseqüêntemente, por imersão de Sobolev, temos

$$\| u_{\sigma_r^{m+1-k'}} \|_{L^p} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha_r+1}}^{\prod_{j=1}^{k'} \alpha_{\sigma_r^{m+1-j}}} + 1), \ \forall p \in [1, +\infty), \tag{2.26}$$

onde $c \succ 0$ depende de p.

Seja $p \succ N\alpha_{\sigma_r^{m-k'}}$. Por uma estimativa análoga a obtida no lema 2.2.2(a), temos

$$\| u_{\sigma_r^{m-k'}} \|_{W^{2, \frac{p}{\alpha_{\sigma_r^{m-k'}}}}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha_r+1}}^{\prod_{j=1}^{k'+1} \alpha_{\sigma_r^{m+1-j}}} + 1). \tag{2.27}$$

Assim, por imersão, temos

$$\| u_{\sigma_r^{m-k'}} \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha_r+1}}^{\prod_{j=1}^{k'+1} \alpha_{\sigma_r^{m+1-j}}} + 1). \tag{2.28}$$

Agora, como $\prod_{i=1}^m \alpha_i \leq 1$, utilizando (2.28) e o lema 2.2.2(b), sucessivamente, concluímos que existe $c \succ 0$ tal que (2.23) ocorre.

2º caso: $q_{j,\alpha_r} \succ 0,\ \forall j = 0, ..., m.$

Em particular, temos

$$\frac{p_{j,\alpha_r} + 1}{\alpha_{\sigma_r^{m-j}}} \succ 1,\ 2(p_{j,\alpha_r} + 1) \prec N\alpha_{\sigma_r^{m-j}},\ \forall j = 0, ..., m. \tag{2.29}$$

Aplicando o lema 2.2.3, temos que existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta+1}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha_r+1}}^{\prod_{i=1}^m \alpha_i} + 1)\ , \tag{2.30}$$

onde $\beta \geq \alpha_r + (\alpha_r + 1)^2\mu$.

Agora, defina $\beta_0 = \alpha_r$, $\beta_1 = \beta$ e $\beta_{n+1} = p_{m,\beta_n}$, se $n \geq 1$. Se existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $q_{j,\beta_n} \succ 0, \forall j = 0, ..., k' - 1$, e $q_{k',\beta_n} \leq 0$ para algum $k' \in \{1, ..., m\}$, então argumentando como no 1º caso, concluímos que existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_n+1}}^{\prod_{i=1}^m \alpha_i} + 1), \tag{2.31}$$

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_j+1}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_{j-1}+1}}^{\prod_{i=1}^m \alpha_i} + 1),\ \forall j = 1, ..., n. \tag{2.32}$$

Como $\prod_{i=1}^m \alpha_i \leq 1$, isto implica que existe $c \succ 0$ tal que (2.23) é satisfeito. Caso contrário, pelo lema 2.2.3, $\beta_n \geq \alpha_r + n(\alpha_r + 1)^2\mu$. Assim, podemos tomar $n \in \mathbf{N}$ tal que $\beta_n + 1 \succ N\alpha_r$. Utilizando o lema 2.2.2(a), temos

$$\| u_r \|_{W^{2,\frac{\beta_n+1}{\alpha_r}}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_n+1}}^{\alpha_r} + 1). \tag{2.33}$$

Utilizando imersão, obtemos

$$\| u_r \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_n+1}}^{\alpha_r} + 1). \tag{2.34}$$

Portanto, aplicando o lema 2.2.2(b) sucessivamente, concluímos que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_n+1}}^{\prod_{i=1}^m \alpha_i} + 1). \tag{2.35}$$

Por outro lado, pelo lema 2.2.3, temos

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_j+1}} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\beta_{j-1}+1}}^{\prod_{i=1}^m \alpha_i} + 1), \ \forall j = 1, ..., n. \tag{2.36}$$

Como $\prod_{i=1}^m \alpha_i \leq 1$, combinando (2.35) e (2.36), concluímos que existe $c \succ 0$ tal que (2.23) ocorre. Isto conclui o segundo caso. Logo, em particular, mostramos que $u_{\sigma_r} \in L^\infty(\Omega)$. Pelo lema 2.2.2(b), temos que $(u_1, ..., u_m) \in (L^\infty(\Omega))^m$. Assim, aplicando o lema A.7, concluímos que $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m, \ \forall p \in [1, +\infty)$.■

Seja $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1, \forall k = 1, ..., m-1$. Primeiramente, estudaremos a classe de sistemas que satisfaz as seguintes hipóteses:

(H.1) $A_{kj} \in C^1(\overline{\Omega}), \forall k, j = 1, ..., N$. e $f_i : \Omega \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$ é uma função de Carathéodory, $\forall i = 1, ..., m$,

(H.2) Existem funções $b_i \in L^\infty(\Omega), \forall i = 1, ..., m$, tais que $b_i(x) \geq b \succ 0$ e $\lim_{u_{\sigma_i} \to +\infty} \frac{f_i(x, u_1, ..., u_m)}{u_{\sigma_i}^{\alpha_i}} = b_i(x)$, uniformemente em $x \in \Omega$, $u_j \in \mathbf{R}_+, \forall j = 1, ..., m$, $j \neq \sigma_i$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $\alpha_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$,

(H.3) $\forall M \succ 0$, $f_i^M(.) = Sup_{\substack{u_j \in \mathbf{R}_+, \\ \forall j = 1, ..., m, \ j \neq \sigma_i \\ 0 \prec u_{\sigma_i} \prec M}} f_i(., u_1, ..., u_m) \in L^\infty(\Omega)$, $\forall i = 1, ..., m$,

(H.4) $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$,

(H.5) $\alpha_i \prec \frac{N+2}{N-2}$, $\forall i = 1, ..., m$, se m é ímpar, e $(N-2s)\alpha_{\sigma_1^{2k-1}} \prec N + 2s$, $(N-2t)\alpha_{\sigma_1^{2k}} \prec N + 2t$, $\forall k = 1, ..., \frac{m}{2}$, se m é par, onde $s, t \succ 0$ e $s + t = 2$,

(H.6) $\prod_{i=1}^m b_i^{\eta_i}(x) \succ m\lambda_1$, $qtp(\Omega)$, onde $\eta_i = \frac{\sum_{k=1}^{m-1}(\prod_{j=k}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^j}) + 1}{\sum_{l=1}^m(\sum_{k=1}^{m-1}(\prod_{j=k}^{m-1} \alpha_{\sigma_l^j})) + m}$.

Por **(H.5)** e lema 2.1.1, existem $s_i \succ 0, \forall i = 1, ..., m$, tais que

$$s_i + s_{\sigma_i} = 2, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.37}$$

$$H^{s_{\sigma_i}} \hookrightarrow L^{\alpha_i + 1}(\Omega) \ \text{ é contínua e compacta}, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.38}$$

Para ver isto, basta tomar $s_i = 1, \forall i = 1, ..., m$, se m é ímpar e $s_{\sigma_1^{2k-1}} = s$ e $s_{\sigma_1^{2k}} = t, \forall k = 1, ..., \frac{m}{2}$, se m é par. Além disso, observemos que **(H.2)** e **(H.3)** implicam em (1.4). Portanto, se o sistema (0.1) satisfaz (**H**.**2**), (**H**.**3**) e (**H**.**5**), podemos considerar o conceito de solução fraca introduzido na seção 1.

Para uma melhor visualização da hipótese (**H**.**6**), vejamos um exemplo no caso $m = 2$.

Exemplo 2.1: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = b_1(x)v^\alpha & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b_2(x)u^\beta & \\ u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $b_i(x) > b > 0$ em $\Omega, \forall i = 1, 2,\ \alpha, \beta \geq 0$.

Hipótese (**H**.**6**): $(b_1(x))^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} \cdot (b_2(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}} \succ 2\lambda_1$, qtp (Ω).

Observemos que, se $0 \prec \alpha, \beta \prec \frac{N+4}{N-4}$, quando $N \geq 5$, então (**H**.**5**) é satisfeito. Por outro lado, se $\alpha\beta = 1$ então (**H**.**6**) se reduz a $(b_1(x))^{\frac{1}{\alpha+1}} \cdot (b_2(x))^{\frac{1}{\beta+1}} > 2\lambda_1$, qtp (Ω).

Teorema 2.2.1: Assuma que $\mathcal{L} \equiv \Delta$. Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz (**H**.**1**) – (**H**.**6**). Então, existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{H^{s_i}} \leq c,\ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.39}$$

$\forall$ solução fraca e não-negativa $(u_1, ..., u_m) \in \bigoplus_{i=1}^m H^{s_i}$ de (0.1).

Dem: Suponhamos, por absurdo, que o teorema é falso. Então, existe uma seqüência $((u_{1n}, ..., u_{mn}))_{n\geq 1} \subset \bigoplus_{i=1}^m H^{s_i}$ de soluções fracas e não-negativas de (0.1) tal que

$$\| u_{ln} \|_{H^{s_l}} \longrightarrow +\infty \text{ para algum } l \in \{1, ..., m\}. \tag{2.40}$$

Sejam $\beta_1 = 1$ e $\beta_{\sigma_1^k} = \prod_{i=1}^k \alpha_{\sigma_1^{i-1}}, \forall k = 1, ..., m-1$. Pelo lema 1.3.2, sabemos que existe $r \in \{1, ..., m\}$ tal que, a menos de subseqüência, temos

$$\| u_{rn} \|_{H^{s_r}} \longrightarrow +\infty, \tag{2.41}$$

$$\| u_{rn} \|_{H^{s_r}}^{\beta_r} \geq \| u_{in} \|_{H^{s_i}}^{\beta_i},\ \forall i = 1, ..., m,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $n \in \mathbb{N}$, defina

$$v_{in} = \frac{u_{in}}{\| u_{rn} \|_{H^{s_r}}^{\frac{\beta_r}{\beta_i}}}. \tag{2.43}$$

Por (2.42), temos

$$\| v_{in} \|_{H^{s_i}} \leq \| v_{rn} \|_{H^{s_r}} = 1, \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{2.44}$$

Portanto, por (2.38) e lema 2.1.1, passando a uma subseqüência, se necessário, temos

$$v_{in} \rightharpoonup v_i \in H^{s_i}, \ \forall i = 1, ..., m, \text{ e} \tag{2.45}$$

$$v_{in} \to v_i \text{ em } L^{\alpha_{\sigma_i^{-1}}+1}(\Omega), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.46}$$

Por outro lado, $(v_{1n}, ..., v_{mn})$ é solução fraca do sistema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}v_{in} = \| u_{rn} \|_{H^{s_r}}^{-\frac{\beta_r}{\beta_i}} f_i(x, \| u_{rn} \|_{H^{s_r}}^{\frac{\beta_r}{\beta_1}} v_{1n}, ..., \| u_{rn} \|_{H^{s_r}}^{\frac{\beta_r}{\beta_m}} v_{mn}) \\ \hfill \text{em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ v_{in} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{2.47}$$

Assim, $(v_{1n}, ..., v_{mn})$ satisfaz

$$\begin{aligned} &\int_\Omega A^{s_i} v_{in} A^{s_{\sigma_i}} \phi_i dx = \\ &\int_\Omega \| u_{rn} \|_{H^{s_i}}^{-\frac{\beta_r}{\beta_i}} f_i(x, \| u_{rn} \|_{H^{s_r}}^{\frac{\beta_r}{\beta_1}} v_{1n}, ..., \| u_{rn} \|_{H^{s_r}}^{\frac{\beta_r}{\beta_m}} v_{mn}) \phi_i dx, \\ &\forall \phi_i \in H^{s_{\sigma_i}}, \ \forall i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Por (2.46), passando a uma subseqüência, se necessário, obtemos

$$v_{in} \to v_i \ qtp(\Omega), \ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.49}$$

$$| v_{in} | \leq h_i, \ qtp(\Omega), \ \forall n \in \mathbf{N}, \tag{2.50}$$

onde $h_i \in L^{\alpha_{\sigma_i^{-1}}+1}(\Omega)$, $\forall i = 1, ..., m$.

Observemos que, por (**H.4**), temos

$$\beta_{\sigma_i} = \alpha_i \beta_i, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.51}$$

Utilizando (**H.2**), (**H.3**), (2.45), (2.49)-(2.51) e o teorema da convergência dominada, temos que (2.48) converge a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega A^{s_i} v_i A^{s_{\sigma_i}} \phi_i dx = \int_\Omega b_i(x) v_{\sigma_i}^{\alpha_i} \phi_i dx, \\ &\forall \phi_i \in H^{s_{\sigma_i}}, \ \forall i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Pelo lema 2.1.1, $(v_1,...,v_m) \in \bigoplus_{i=1}^m W^{2,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega) \cap \bigoplus_{i=1}^m W_0^{1,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega)$ e satisfaz

$$-\mathcal{L}v_i = b_i(x)v_{\sigma_i}^{\alpha_i},\ qtp(\Omega),\ \forall i = 1,...,m. \tag{2.53}$$

Pelo lema 2.2.4, temos que

$$(v_1,...,v_m) \in (W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m,\ \forall p \in [1,+\infty). \tag{2.54}$$

Pela definição de σ e lema A.4, concluímos que $v_i \equiv 0$ em $\Omega, \forall i = 1,...,m$, ou $v_i \succ 0$ em $\Omega, \forall i = 1,....,m$. Agora, analisaremos estes dois casos.

1º caso: $v_i \equiv 0$ em Ω, $\forall i = 1,...,m$.

Por (**H.2**), (**H.3**) e (2.51), podemos estimar (2.48), como

$$\begin{aligned} \mid \int_\Omega A^{s_r} v_{rn} A^{s_{\sigma_r}} \phi_r dx \mid &\leq c \int_\Omega v_{\sigma_r n}^{\alpha_r} \mid \phi_r \mid dx + \\ c \parallel u_{rn} \parallel_{H^{s_r}}^{-1} &\int_\Omega \mid \phi_r \mid dx,\ \forall \phi_r \in H^{s_{\sigma_r}}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em (2.55) e utilizando (2.38), obtemos $c \succ 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\mid \int_\Omega A^{s_r} v_{rn} A^{s_{\sigma_r}} \phi_r dx \mid \leq c(\parallel v_{\sigma_r n} \parallel_{L^{\alpha_r+1}}^{\alpha_r} + \parallel u_{rn} \parallel_{H^{s_r}}^{-1}) \parallel \phi_r \parallel_{H^{s_{\sigma_r}}}, \\ &\forall \phi_r \in H^{s_{\sigma_r}}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Isto implica que

$$1 = \parallel v_{rn} \parallel_{H^{s_r}} \leq c(\parallel v_{\sigma_r n} \parallel_{L^{\alpha_r+1}}^{\alpha_r} + \parallel u_{rn} \parallel_{H^{s_r}}^{-1}). \tag{2.57}$$

Agora, tomando o limite em (2.57), obtemos uma contradição.

2º caso: $v_i \succ 0$ em Ω, $\forall i = 1,...,m$.

Seja $z = (\prod_{i=1}^m v_i)^{\frac{1}{m}}$. Como $\mathcal{L} \equiv \Delta$, podemos argumentar como na demonstração do teorema 1.4.5, e concluir que

$$\int_\Omega (\frac{1}{m} \prod_{i=1}^m b_i^{\eta_i}(x) - \lambda_1) z \varphi_1 dx \leq 0.$$

Por (**H.6**), isto implica que $z \equiv 0$ em Ω, absurdo. Logo, existe $c \succ 0$ tal que (2.39) ocorre.∎

Corolario 2.2.1: Assuma que $\mathcal{L} \equiv \Delta$. Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz (**H.1**) − (**H.6**). Então, existe $c \succ 0$ tal que

$$\parallel u_i \parallel_{L^\infty} \leq c,\ \forall i = 1,...,m, \tag{2.58}$$

$\forall$ solução fraca não-negativa $(u_1,...,u_m) \in \bigoplus_{i=1}^m H^{s_i}$ de (0.1). Em particular, $(u_1,...,u_m) \in (W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m, \forall p \in [1,+\infty)$.

Dem: Pelo teorema 2.2.1, temos que existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{H^{s_i}} \leq c, \ \forall i = 1,...,m. \tag{2.59}$$

Por (2.38), temos, em particular, que

$$\| u_i \|_{L^{\alpha_{\sigma_i^{-1}}+1}} \leq c, \ \forall i = 1,...,m. \tag{2.60}$$

Além disso, pelo lema 2.1.2, sabemos que $(u_1,...,u_m) \in \bigoplus_{i=1}^m W^{2,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega) \cap \bigoplus_{i=1}^m W_0^{1,\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}}(\Omega)$. Portanto, aplicando o lema 2.2.4, obtemos $r \in \{1,...,m\}$ e $c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty} \leq c. \tag{2.61}$$

Finalmente, utilizando o lema 2.2.2(b), concluímos a demonstração. ∎

Exemplo 2.2: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = b_i(x) u_{\sigma_i}^{\alpha_i} + f_i(x,u_1,...,u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1,...,m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1,...,m, \end{cases} \tag{2.62}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $\sigma : \{1,...,m\} \to \{1,...,m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1, \forall k = 1,...,m-1$, $b_i : \Omega \to \mathbf{R}_+$ e $f_i : \Omega \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ são funções de Carathéodory tais que $b_i(x) \geq b > 0$, $\forall x \in \Omega$, e f_i é limitada, $\forall i = 1,...,m$.

Suponhamos que as hipóteses (**H**.4), (**H**.5) e (**H**.6) sejam satisfeitas. Então, o corolário 2.2.1 fornece estimativa a priori em $(L^\infty(\Omega))^m$ para (2.62).

OBS 2.2.1: A hipótese (**H**.4) expressa o caráter sublinear e ressonante do sistema (0.1). Além disso, a hipótese (**H**.5) permite que alguns dos α_i 's possa ter crescimento maior que $\frac{N+2}{N-2}$, quando m é par.•

OBS 2.2.2: Quando $\alpha_i = 1, \forall i = 1,...,m$, podemos melhorar (**H**.6). Isto segue como caso particular do teorema 2.2.2.•

Para a próxima classe de sistemas, assumiremos as seguintes hipóteses:

(**H**.7) Existe $a \succ 0$ tal que $f_i(x,u_1,...,u_m) \leq a(\sum_{j=1}^m u_j + 1), \forall (x,u_1,...,u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$, $\forall i =$

$1, ..., m$.

(H.8) Existe $c > 0$ tal que $f_i(x, u_1, ..., u_m) \geq \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j - c$, $\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $B = (b_{ij})$ é uma $m \times m$ matriz tal que
(a) B é não-negativa, $\rho(B) \succ \lambda_1$ e $b_{i\sigma_i} \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$, ou
(b) B^{-1} é não-negativa e $\rho(B^{-1}) \prec \lambda_1^{-1}$.

Teorema 2.2.2: Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.1}), (\mathbf{H.7})$ e $(\mathbf{H.8})_a$ (ou $(\mathbf{H.8})_b$). Então, existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{H_0^1} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.63}$$

$\forall$ solução fraca e não-negativa $(u_1, ..., u_m) \in (H_0^1(\Omega))^m$ de (0.1).
Dem: Suponhamos, por absurdo, que o teorema é falso. Então, existe uma seqüência $((u_{1n}, ..., u_{mn}))_{n \geq 1} \subset (H_0^1(\Omega))^m$ de soluções fracas e não-negativas de (0.1) tal que

$$\| u_{ln} \|_{H_0^1} \to +\infty \ \text{ para algum } \ l \in \{1, ..., m\}. \tag{2.64}$$

Pelo lema 1.3.2, sabemos que existe $r \in \{1, ..., m\}$ tal que, a menos de subseqüência, temos

$$\| u_{rn} \|_{H_0^1} \to +\infty, \tag{2.65}$$

$$\| u_{rn} \|_{H_0^1} \geq \| u_{in} \|_{H_0^1}, \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{2.66}$$

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $n \in \mathbf{N}$, defina

$$v_{in} = \frac{u_{in}}{\| u_{rn} \|_{H_0^1}}. \tag{2.67}$$

Por (2.66), temos

$$\| v_{in} \|_{H_0^1} \leq \| v_{rn} \|_{H_0^1} = 1, \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{2.68}$$

Portanto, passando a uma subseqüência, se necessário, temos

$$v_{in} \rightharpoonup v_i \in H_0^1(\Omega), \ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.69}$$

$$v_{in} \to v_i \text{ em } L^2(\Omega), \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.70}$$

Por outro lado, $(v_{1n}, ..., v_{mn})$ é solução fraca do sistema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}v_{in} = \| u_{rn} \|_{H_0^1}^{-1} f_i(x, \| u_{rn} \|_{H_0^1} v_{1n}, ..., \| u_{rn} \|_{H_0^1} v_{mn}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \Omega,\ \forall i = 1, ..., m \\ v_{in} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{2.71}$$

Assim, $(v_{1n}, ..., v_{mn})$ satisfaz

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{k,j} A_{kj}(x) D_k v_{in} D_j \phi dx = \\ &\int_\Omega \| u_{rn} \|_{H_0^1}^{-1} f_i(x, \| u_{rn} \|_{H_0^1} v_{1n}, ..., \| u_{rn} \|_{H_0^1} v_{mn}) \phi dx, \\ &\forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Tomando $\phi = \varphi_1$ em (2.72) e utilizando $(\mathbf{H.8})$, obtemos

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \int_\Omega v_{in}\varphi_1 dx \geq \sum_{j=1}^m b_{ij} \int_\Omega v_{jn}\varphi_1 dx - c \| u_{rn} \|_{H_0^1}^{-1} \int_\Omega \varphi_1 dx, \\ &\forall i = 1, ..., m,\ \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Agora, tomando o limite em (2.73), concluímos que

$$\lambda_1 \int_\Omega v_i\varphi_1 dx \geq \sum_{j=1}^m b_{ij} \int_\Omega v_j\varphi_1 dx,\ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.74}$$

Além disso, afirmamos que existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que v_i não é identicamente zero. De fato, suponhamos, por absurdo, que $v_i \equiv 0, \forall i = 1, ..., m$. Tomando $\phi = v_{rn}$ na r-ésima equação de (2.72) e utilizando $(\mathbf{H.7})$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 = \| v_{rn} \|_{H_0^1}^2 &\leq c \int_\Omega \sum_{k,j} A_{kj}(x) D_k v_{rn} D_j v_{rn} dx \\ &\leq ca\left(\sum_{j=1}^m \int_\Omega v_{jn} v_{rn} dx + \int_\Omega v_{rn} dx\right). \end{aligned} \tag{2.75}$$

Tomando o limite em (2.75), obtemos uma contradição. Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.8})_a$. Então, como B é não-negativa e $b_{i\sigma_i} \succ 0, \forall i = 1, ..., m$, por (2.74) e pela definição de σ, concluímos que

$$\int_\Omega v_i\varphi_1 dx \succ 0,\ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.76}$$

Seja $\lambda_1 \prec \lambda \prec \rho(B)$. Por (2.74), temos que

$$\lambda \int_\Omega v_i\varphi_1 dx - \sum_{j=1}^m b_{ij} \int_\Omega v_j\varphi_1 dx \geq (\lambda - \lambda_1) \int_\Omega v_i\varphi_1 dx, \tag{2.77}$$
$\forall i = 1, ..., m.$

Denotando $x = (\int_\Omega v_i\varphi_1 dx)_{1\leq i\leq m}$, $y = (\lambda - \lambda_1)x$, podemos escrever (2.77) como

$$(\lambda I - B)x \geq y. \tag{2.78}$$

Como $x, y \in \mathbf{R}_+^m$, pelo lema 1.1.8, concluímos que $\rho(B) \prec \lambda$, absurdo. Logo, neste caso, o teorema está provado. Suponha agora, que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.8})_b$. De acordo com a notação acima, podemos escrever (2.74) como

$$(\lambda_1 I - B)x \geq 0. \tag{2.79}$$

Multiplicando (2.79) por B^{-1}, obtemos

$$(I - \lambda_1 B^{-1})x \leq 0. \tag{2.80}$$

Portanto, como $\rho(B^{-1}) \prec \lambda_1^{-1}$ e B^{-1} é não-negativa, concluímos que $x \leq 0$. Isto implica que $v_i \equiv 0$ em $\Omega, \forall i = 1, ..., m$, absurdo. Assim, terminamos a demonstração do teorema. ■

OBS 2.2.3: Quando $\alpha_i = 1, \forall i = 1, ..., m$, a hipótese $(\mathbf{H.6})$ se reduz a $\prod_{i=1}^m b_i(x) \succ (m\lambda_1)^m$. Se as funções b_i's são constantes, a hipótese $(\mathbf{H.8})_a$ melhora $(\mathbf{H.6})$. Basta ver que, neste caso, $(\mathbf{H.8})_a$ se reduz a $\prod_{i=1}^m b_i \succ \lambda_1^m$, pois $\rho(B) = (\prod_{i=1}^m b_i)^{1/m}$.•

Corolário 2.2.2: Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.1}), (\mathbf{H.7})$ e $(\mathbf{H.8})_a$(ou $(\mathbf{H.8})_b$). Então, existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{L^\infty} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.81}$$

$\forall$ solução fraca e não-negativa $(u_1, ..., u_m) \in (H_0^1(\Omega))^m$ de (0.1). Em particular, $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m, \forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: Pelo teorema 2.2.2, sabemos que existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{H_0^1} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.82}$$

Suponhamos que $N=2$. Então, por imersão de Sobolev, existe $c \succ 0$, dependendo de p, tal que

$$\| u_i \|_{L^p} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m, \ \forall p \in [1, +\infty). \tag{2.83}$$

Seja $p \succ N$. Por (**H.7**), temos que

$$\| f_i(x, u_1, ..., u_m) \|_{L^p} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.84}$$

Utilizando o lema A.7 e (2.84), concluímos que existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{W^{2,p}} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.85}$$

Assim, por imersão, obtemos (2.81). Suponhamos, agora, que $N \geq 3$. Por (2.82) e imersão de Sobolev, temos

$$\| u_i \|_{L^{p_0}} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m, \text{ onde } \frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}. \tag{2.86}$$

De forma análoga, utilizando (**H.7**) e lema A.7, obtemos $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{W^{2,p_0}} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.87}$$

Se $2p_0 \prec N$ então, por imersão, temos

$$\| u_i \|_{L^{p_1}} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m, \text{ onde } \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N}. \tag{2.88}$$

Suponha que

$$\| u_i \|_{L^{p_n}} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m, \text{ e } \ 2p_n \prec N. \tag{2.89}$$

Então, de maneira análoga, temos

$$\| u_i \|_{W^{2,p_n}} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{2.90}$$

Por imersão, obtemos

$$\| u_i \|_{L^{p_{n+1}}} \leq c, \ \forall i = 1, ..., m, \text{ onde } \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p_n} - \frac{2}{N}. \tag{2.91}$$

Se $2p_0 \prec N$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $2p_{n_0} \geq N$. De fato, como $\frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p_n} - \frac{2}{N}$, concluímos que

$$\frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p_0} - \frac{2(n+1)}{N}, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Então, $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $p_{n_0} \succ 0$ e $p_{n_0+1} \leq 0$. Portanto, $\frac{1}{p_{n_0}} - \frac{2}{N} \leq 0$, implicando que $2p_{n_0} \geq N$. Por (2.90) e imersão, concluímos que existe $c \succ 0$, dependendo de p, tal que (2.83) é satisfeito. Finalmente, argumentando como no caso $N = 2$, obtemos (2.81).■

Exemplo 2.3: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j + f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega,\ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{2.92}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $f_i : \Omega \times \mathbf{R}^m_+ \to \mathbf{R}_+$ é uma função de Carathéodory limitada, $\forall i = 1, ..., m$.

Assuma que a $m \times m$ matriz $B = (b_{ij})$ satisfaz (a) ou (b) de (**H.8**). Então, pelo corolário 2.2.2, temos estimativa a priori em $(L^\infty(\Omega))^m$ para (2.92).

Finalizaremos esta seção com um resultado de estimativa a priori para a classe de sistemas que satisfaz, além de (1.4) e (**H.1**), a seguinte condição de sublinearidade:
(**H.9**) $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \prec 1$.

Teorema 2.2.3: Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz (1.4), (**H.1**) e (**H.9**). Então, existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_i \|_{L^\infty} \leq c,\ \forall i = 1, ..., m, \tag{2.93}$$

$\forall$ solução forte e não-negativa $(u_1, ..., u_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} W^{2, \alpha_{\sigma_i^{-1}}+1}(\Omega) \cap \bigoplus_{i=1}^{m} W_0^{1, \alpha_{\sigma_i^{-1}}+1}(\Omega)$ de (0.1). Em particular, $(u_1, ..., u_m) \in (W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.
Dem: Pelo lema 2.2.4, temos que existe $r \in \{1, ..., m\}$ tal que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^{\alpha_r+1}}^{\prod_{i=1}^{m} \alpha_i} + 1). \tag{2.94}$$

Portanto, $u_{\sigma_r} \in L^\infty(\Omega)$ e por (2.94), temos

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty} \leq c(\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty}^{\prod_{i=1}^{m} \alpha_i} + 1). \tag{2.95}$$

Como $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \prec 1$, por (2.95), concluímos que existe $c \succ 0$ tal que

$$\| u_{\sigma_r} \|_{L^\infty} \leq c. \tag{2.96}$$

Agora, aplicando o lema 2.2.2(b), obtemos (2.93). ■

Exemplo 2.4: Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = b_i(x)u_{\sigma_i}^{\alpha_i} + f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{2.97}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$, $b_i : \Omega \to \mathbf{R}_+$ e $f_i : \Omega \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$ são funções de Carathéodory limitadas, $\forall i = 1, ..., m$.

Assumindo **(H.9)**, obtemos, pelo teorema 2.2.3, estimativa a priori em $(L^\infty(\Omega))^m$ para (2.97).

OBS 2.2.4: Na realidade, na seção 3 mostraremos existência de solução forte para (0.1) em $(W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m$ com p suficientemente grande. Assim, neste caso, podemos dar uma demonstração bem simples para o teorema 2.2.3, sem recorrer ao lema 2.2.1. Porém, este lema é fundamental nas demonstrações do teorema 2.2.1 e corolário 2.2.1.•

3. Existência de Soluções para Sistemas Elípticos com Caráter Sublinear

Nesta seção, utilizaremos teoria do grau em cones e iteração monotônica para obter existência de soluções não-negativas para alguns sistemas elípticos da forma (0.1).

Comecemos analisando a existência de solução para sistemas que satisfazem as seguintes hipóteses:

(H.10) $A_{kj} \in C^1(\overline{\Omega}), \forall k, j = 1, ..., N$, $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função contínua, $\forall i = 1, ..., m$.

(H.11) Existe $\tilde{R} \succ 0$ tal que $f_i(x, u_1, ..., u_m) \leq u_{\tau_i}^{\beta_i}$, $\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$ satisfazendo $\sum_{j=1}^m u_j \leq \tilde{R}$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $\tau : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\tau_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$, $\beta_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, e $\prod_{i=1}^m \beta_i \succ 1$,

(H.12) A função b_i em **(H.2)** é contínua em $\overline{\Omega}, \forall i = 1, ..., m$.

Teorema 2.3.1: Assuma que $\mathcal{L} \equiv \Delta$. Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.2})$–$(\mathbf{H.6})$ e $(\mathbf{H.10}) - (\mathbf{H.12})$. Então, (0.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: Observemos que, por $(\mathbf{H.2}), (\mathbf{H.3}), (\mathbf{H.6})$ e $(\mathbf{H.12})$, existem $\varepsilon \succ 0$ e $c \succ 0$ tais que

$$f_i(x, u_1, ..., u_m) \geq (b_i(x) - \varepsilon) u_{\sigma_i}^{\alpha_i} - c, \ \forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m, \tag{3.1}$$

$$\prod_{i=1}^{m} (b_i(x) - \varepsilon)^{\eta_i} \succ m\lambda_1, \ \forall x \in \Omega. \tag{3.2}$$

A demonstração é análoga à do teorema 1.4.5. Notemos que, ao invés de utilizarmos o teorema 1.3.2, devemos utilizar o corolário 2.2.1. ■

Teorema 2.3.2: Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.7}), (\mathbf{H.8})_a$(ou $(\mathbf{H.8})_b$) e $(\mathbf{H.10}) - (\mathbf{H.11})$. Então, (0.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: Basta proceder como na demonstração do teorema 1.4.1. Note que devemos utilizar o corolário 2.2.2, no lugar do teorema 1.3.1. ■

Agora, consideremos as seguintes hipóteses:

$(\mathbf{H.10})'$ $A_{kj} \in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall k, j = 1, ..., N$, $f_i, D_{u_j} f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ são funções contínuas, $\forall i, j = 1, ..., m$,

$(\mathbf{H.13})$ $f_i(x, 0) = 0$, $\forall x \in \Omega$, $\forall i = 1, ..., m$,

$(\mathbf{H.14})$ A $m \times m$ matrix Jacobiana $J(x) = (D_j f_i(x, 0))$ é simétrica e não-negativa, $\forall x \in \Omega$, e $\sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} \rho(J(x)) \prec \lambda_1$.

Teorema 2.3.3: Assuma que $\mathcal{L} \equiv \Delta$. Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.2}) - (\mathbf{H.6}), (\mathbf{H.10})'$ e $(\mathbf{H.12}) - (\mathbf{H.14})$. Então, (0.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega)) \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: A demonstração é análoga à do teorema 1.4.6. ■

Teorema 2.3.4: Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz $(\mathbf{H.7}), (\mathbf{H.8})_a$ (ou $(\mathbf{H.8})_b$), $(\mathbf{H.10})'$, $(\mathbf{H.13})$ e $(\mathbf{H.14})$. Então, (0.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: A demonstração é análoga à do teorema 1.4.2. ∎

Teorema 2.3.5: Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz (1.4), (**H.9**) e (**H.10**). Então, (0.1) possui, pelo menos, uma solução forte não-negativa em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Dem: Fixemos $p \succ N$. Denote $u = (u_1, ..., u_m)$. Como na demonstração do teorema 1.4.1, consideremos os espaços $X = \{u \in (C(\overline{\Omega}))^m : u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \forall i = 1, ..., m\}$, $Y = (L^p(\Omega))^m$ e $Z = (W^{2,p}(\Omega))^m \cap (W_0^{1,p}(\Omega))^m$ munidos das normas $\| u \|_X = \sum_{i=1}^m \| u_i \|_{L^\infty}$, $\| u \|_Y = \sum_{i=1}^m \| u_i \|_{L^p}$ e $\| u \|_Z = \sum_{i=1}^m \| u_i \|_{W^{2,p}}$. Seja $C = \{u \in X : u_i \geq 0 \text{ em } \Omega, \forall i = 1, ..., m\}$. Para cada $v \in C$ e $t \in [0, 1]$, por (**H.10**), temos que $(tf_1(x, v), ..., tf_m(x, v)) \in (C(\overline{\Omega}))^m \subset (L^p(\Omega))^m$. Logo, por (**H.10**), podemos aplicar o lema A.7 e definir a aplicação $H : C \times [0, 1] \to Z$ por $H(v, t) = u$, onde u satisfaz

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = tf_i(x, v_1, ..., v_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.3}$$

Pela estimativa L^p contida no lema A.7, temos que H é contínua e limitada. Como $p \succ N$, a imersão $Z \hookrightarrow X$ é compacta. Portanto, pela limitação, a aplicação $H : C \times [0, 1] \to X$ é compacta. Além disso, por (**H.10**) e lema A.4, $H(C, .) \subset C$ e $H(C, 0) = 0$. Seja $u \in C$ tal que $H(u, t) = u$ para algum $t \in [0, 1]$. Então, pela definição de H, temos

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u_i = tf_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.4}$$

Aplicando o teorema 2.2.3 ao sistema (3.4), obtemos $c \succ 0$ tal que $\| u \|_X \leq c$. Observe que, de acordo com a demonstração do teorema 2.2.3, c independe de $t \in [0, 1]$. Seja $M \succ c$. Assim, se $u \in C$ e $\| u \|_X = M$ então $H(u, t) \neq u$, $\forall t \in [0, 1]$. Portanto, pela invariância homotópica da teoria do grau de Leray-Schauder, obtemos

$$\begin{aligned} d(I - H(., 1), \mathbf{B}_M, 0) &= d(I - H(., 0), \mathbf{B}_M, 0) \\ &= d(I, \mathbf{B}_M, 0) = 1 \neq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Conseqüentemente, existe $u \in C$ tal que $H(u, 1) = u$. ∎

OBS 2.3.1: O teorema 2.3.5 é interessante no caso em que $f_i(x, 0)$ não é identicamente zero para algum $i \in \{1, ..., m\}$, pois, caso contrário, $u \equiv 0$ em Ω é solução de (0.1).•

OBS 2.3.2: Supondo que Ω é de classe $C^{2,\alpha}$, $A_{kj} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \forall k, j = 1, ..., N$, e $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função de classe $C^{\alpha}, \forall i = 1, ..., m$, temos que as soluções dadas nos teoremas acima, estão em $(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$.•

Como dissemos na introdução, em [11] e [28], foi mostrado, via método variacional, que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v^{\alpha} \\ -\Delta v = u^{\beta} \end{cases} \text{em } \Omega \quad \begin{cases} \\ u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 2$, $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha\beta < 1$, possui solução clássica positiva.

Agora, utilizaremos iteração monotônica para obter um resultado de existência de solução positiva que contém o resultado acima, quando $m = 2$. Além disso, consideramos não-linearidades não contidas em [28].

Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz as seguintes hipóteses:

(H.15) $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função de classe C^{α} tal que, se $0 \leq u_j \leq v_j$, $\forall j = 1, ..., m$, então $f_i(x, u_1, ..., u_m) \leq f_i(x, v_1, ..., v_m)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall i = 1, ..., m$.

(H.16) Existe $u_0 \succ 0$ tal que $f_i(x, u_1, ..., u_m) \geq u_{\tau_i}^{\beta_i}$, $\forall (x, u_1, ..., u_m) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^m$, satisfazendo $u_j \leq u_0$, $\forall j = 1, ..., m$, $\forall i = 1, ..., m$, onde $\beta_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, $\prod_{i=1}^m \beta_i \prec 1$ e $\tau : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ é uma bijeção tal que $\tau_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$.

Teorema 2.3.6: Assuma que Ω é de classe $C^{2,\alpha}$ e que $\mathcal{L} \equiv \Delta$. Suponhamos que o sistema (0.1) satisfaz (1.4), **(H.9)**, **(H.10)**, **(H.15)** e **(H.16)**. Então, (0.1) possui, pelo menos, uma solução $(u_1, ..., u_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$ tal que $u_i \succ 0$ em $\Omega, \forall i = 1, ..., m$.

Dem: Pelo teorema 2.3.5 e observação 2.3.2, existe $\overline{u} = (\overline{u}_1, ..., \overline{u}_m) \in (C^{2,\beta}(\overline{\Omega}))^m$ para algum $\beta \in (0, 1)$, satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u}_i = a(\overline{u}_{\sigma_i}^{\alpha_i} + 1) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ \overline{u}_i \succ 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ \overline{u}_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.6}$$

Por (1.4), $\overline{u}$ é uma supersolução de (0.1). Além disso, pelo lema A.1, sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\overline{u}_i \prec 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.7}$$

Agora, construiremos uma subsolução $\underline{u} \in (C^{2,\beta}(\overline{\Omega}))^m$ de (0.1) tal que $0 \prec \underline{u} \prec \overline{u}$ em Ω. Defina $\gamma_{\tau_1^k} = \beta_{\tau_1^k}, \forall k = 0, ..., m-2$, e $\gamma_{\tau_1^{m-1}} = \gamma$, onde $\gamma \succ 0$ é escolhido tal que

$$0 \prec \frac{\prod_{j=1}^{m} \gamma_j - 1}{\sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \gamma_{\tau_i^l})] + m} \leq \frac{2}{m(N-1)}.$$

Pelo teorema 1.4.5, lema A.2 e observação 1.4.2, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\tau_i}^{\gamma_i} \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i \succ 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.8}$$

possui solução em $(C^{2,\beta}(\overline{\Omega}))^m$. Seja $v = (v_1, ..., v_m) \in (C^{2,\beta}(\overline{\Omega}))^m$ uma solução de (3.8). Agora, para cada $t \succ 0$, defina as funções $w_1 = tv_1$, $w_{\tau_1^k} = t^{\frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} \gamma_{\tau_1^j}}} \cdot v_{\tau_1^k}$, $\forall k = 1, ..., m-1$. É fácil verificar que

$$-\Delta w_{\tau_1^k} = w_{\tau_1^{k+1}}^{\beta_{\tau_1^k}} \text{ em } \Omega, \ \forall k = 0, ..., m-2. \tag{3.9}$$

Além disso, para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$-\Delta\left(t^{\frac{1}{\prod_{j=0}^{m-2} \gamma_{\tau_1^j}}} \cdot v_{\tau_1^{m-1}}\right) = t^{\frac{1}{\prod_{j=0}^{m-2} \beta_{\tau_1^j}}} \cdot v_1^{\gamma_{\tau_1^{m-1}}} \leq (tv_1)^{\beta_{\tau_1^{m-1}}}.$$

Implicando que

$$-\Delta w_{\tau_1^{m-1}} \leq w_1^{\beta_{\tau_1^{m-1}}} \text{ em } \Omega. \tag{3.10}$$

Agora, tomando $t > 0$ menor, se necessário, concluímos, por (**H.16**), (3.7), (3.9) e (3.10), que

$$w_i \prec \overline{u}_i \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.11}$$

$$-\Delta w_i \leq f_i(x, w_1, ..., w_m) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.12}$$

Portanto, $\underline{u} = (w_1, ..., w_m)$ é uma subsolução de (0.1) satisfazendo $0 \prec \underline{u} \prec \overline{u}$ em Ω. Finalmente, utilizando o lema 2.1.3, concluímos que (0.1) possui solução positiva em $(C^{2,\beta}(\overline{\Omega}))^m$. Agora, utilizando o lema A.5, terminamos a demonstração. ■

Finalizaremos este capítulo com alguns exemplos em que se aplicam os resultados acima.

Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ um domínio limitado de classe C^2, $N \geq 2$, e $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\}$ uma bijeção tal que $\sigma_1^k \neq 1$, $\forall k = 1, ..., m-1$.

Exemplo 3.1: Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(x, u_{\sigma_i}) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.13}$$

Suponhamos que

$$f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+ \ \text{ é uma função contínua, } \forall i = 1, ..., m, \tag{3.14}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f_i(x, u)}{u^{\alpha_i}} = b_i(x), \ \text{ uniformemente em } x \in \Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.15}$$

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f_i(x, u)}{u^{\beta_i}} = 0, \ \text{ uniformemente em } x \in \Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.16}$$

onde $b_i : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}_+$ é uma função contínua, $\alpha_i, \beta_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$.

Assumindo $(\mathbf{H.4}), (\mathbf{H.5}), (\mathbf{H.6})$ e que $\prod_{i=1}^m \beta_i \succ 1$, concluímos, pelo teorema 2.3.1, que (3.13) possui, pelo menos, uma solução não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Agora, ao invés de (3.14) e (3.16), suponha que

$$f_i, D_u f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+ \ \text{ são funções contínuas, } \forall i = 1, ..., m, \tag{3.17}$$

$$f_i(x, 0) = 0, \ D_u f_i(x, 0) \geq 0, \ \forall x \in \Omega, \ \forall i = 1, ..., m. \tag{3.18}$$

Assim, se $(\mathbf{H.4}), (\mathbf{H.5}), (\mathbf{H.6})$ e $\sup_{x \in \overline{\Omega}} \prod_{i=1}^m (D_u f_i(x, 0)) \prec \lambda_1^m$ são satisfeitos, temos, pelo teorema 2.3.3, a existência de, pelo menos, uma solução não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Exemplo 3.2: Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(u_{\sigma_i}) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.19}$$

Suponhamos que

$$f_i : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+ \ \text{ é uma função contínua, } \forall i = 1, ..., m, \tag{3.20}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f_i(u)}{u} = b_i, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.21}$$

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f_i(u)}{u^{\beta_i}} = 0, \ \forall i = 1, ..., m, \tag{3.22}$$

onde $b_i, \beta_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$.

Assumindo que $\prod_{i=1}^{m} \beta_i \succ 1$ e que $\prod_{i=1}^{m} b_i \succ \lambda_1^m$, temos, pelo teorema 2.3.2, a existência de, pelo menos, uma solução não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Por outro lado, se em vez de (3.20) e (3.22), assumirmos que

$$f_i : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+ \text{ é diferenciável, } \forall i = 1, ..., m, \tag{3.23}$$

$$f_i(0) = 0, \; D_u f_i(0) \geq 0, \; \forall i = 1, ..., m, \tag{3.24}$$

concluímos que as condições $\prod_{i=1}^{m}(D_u f_i(0)) \prec \lambda_1^m$ e $\prod_{i=1}^{m} b_i \succ \lambda_1^m$ implicam, pelo teorema 2.3.4, a existência de, pelo menos, uma solução não-negativa e não-trivial em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$. $\forall p \in [1, +\infty)$.

Exemplo 3.3: Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} + f_i(x, u_1, ..., u_m) \text{ em } \Omega, \; \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \; \forall i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.25}$$

Suponhamos que $f_i : \overline{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}}_+^m \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função contínua e limitada, $\alpha_i \succ 0, \forall i = 1, ..., m$, e $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \prec 1$.

Se existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $f_i(\cdot, 0) \not\equiv 0$ em Ω, então, pelo teorema 2.3.5 e lema A.4, (3.25) possui, pelo menos, uma solução positiva em $(W_0^{1,p}(\Omega))^m \cap (W^{2,p}(\Omega))^m$, $\forall p \in [1, +\infty)$. Por outro lado, se Ω é de classe $C^{2,\alpha}$, $f_i(\cdot, 0) \equiv 0$ em Ω e f_i satisfaz (**H.15**), $\forall i = 1, ..., m$, concluímos, pelo teorema 2.3.6, que (3.25) possui, pelo menos, uma solução positiva em $(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$. Em particular, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \Omega, \; \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \; \forall i = 1, ..., m \end{cases}$$

possui solução positiva, se $\alpha_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$, e $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \prec 1$.

Capítulo 3

Algumas Conjecturas para Sistemas Elípticos

0. Introdução

Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(u_{\sigma_i}) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \ \text{ se } \partial\Omega \neq \emptyset, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio, $N \geq 2$, $f_i : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é contínua, $\forall i = 1, ..., m$.

O fato do sistema (0.1) não ter estrutura variacional, quando $m \geq 3$, o torna bastante interessante e nos leva a questionarmos sobre a validade de alguns resultados que são extensões do caso escalar.

Neste capítulo, nos basearemos em vários trabalhos desta década sobre sistemas da forma (0.1) com $m = 2$, e nos capítulos 1 e 2, para conjecturarmos alguns resultados de existência e não-existência para (0.1) relacionados aos conceitos de criticalidade, superlinearidade e sublinearidade para sistemas introduzidos no primeiro capítulo. Alguns destes resultados são bem conhecidos, quando $m = 2$. Além disso, algumas destas questões são, parcialmente, respondidas nos capítulos 1 e 2.

Este capítulo está dividido em 2 seções. Na primeira, enunciaremos alguns resultados de existência e não-existência de solução positiva para (0.1), supondo $\Omega = \mathbf{R}^N$ ou $\Omega = \mathbf{R}^N_+$. Na segunda, faremos o mesmo para Ω limitado.

1. Algumas Conjecturas para Sistemas Elípticos em $\mathbf{R}^N$ e $\mathbf{R}^N_+$

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -\Delta u = v^\alpha \\ -\Delta v = u^\beta \end{array}\right. \text{ em } \mathbf{R}^N \\ u, v \succ 0 \ \text{ em } \mathbf{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $N \geq 2$, $\alpha, \beta \succ 0$.

Em 1992, Souto[59] obteve não-existência de solução para (1.1), quando $\frac{N-2}{N-1} \leq \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \leq 1$, se $N \geq 3$, e $\alpha\beta \geq 1$, se $N = 2$. Posteriormente, Mitidieri[46] mostrou não-existência de solução radial, quando $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \succ \frac{N-2}{N}$ (isto é, abaixo da hipérbole crítica) e $\alpha, \beta \succ 1$, sendo a segunda hipótese melhorada por Serrin e Zou[55] para $\alpha, \beta \succ 0$. Em 1994, De Figueiredo e Felmer[19] utilizaram a técnica de "Moving Planes" para obter não-existência de solução, quando $\alpha, \beta \prec \frac{N+2}{N-2}$. Finalmente, em 1996, Serrin e Zou[54] mostraram não-existência de solução, quando $\alpha\beta \prec 1$, em geral, e $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \succ \frac{N-2}{N}$, quando $N = 3$. Em 1985, Lions[44] mostrou existência de solução radial, quando $N \geq 3$ e $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{N-2}{N}$. Recentemente, Serrin e Zou[56] obtiveram o mesmo resultado, quando $N \geq 3$ e $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \prec \frac{N-2}{N}$. Todos estes trabalhos sugerem que, quando $N \geq 3$, a hipérbole crítica $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{N-2}{N}$ seja divisora para existência e não-existência. Assim, temos a seguinte conjectura:

Conjectura 3.1.1 (da hipérbole): Suponhamos que $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \succ \frac{N-2}{N}$, se $N \geq 3$. Então, (1.1) não possui solução em $(C^2(\mathbf{R}^N))^2$.

Agora, considere o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \mathbf{R}^N, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i \succ 0 \ \text{ em } \mathbf{R}^N, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $N \geq 2$ e $\alpha_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$.

Utilizando a técnica da média esférica como em [54], concluímos que se $\prod_{i=1}^m \alpha_i \prec 1$ então o sistema (1.2) não possui solução. Por outro lado, Felmer[27] obteve, em particular, não-existência de solução, quando $\alpha_i \prec \frac{N+2}{N-2}$, $\forall i = 1, ..., m$. Como o ponto $(\frac{N+2}{N-2}, ..., \frac{N+2}{N-2})$ pertence ao $(m-1)$-hiperbolóide crítico, temos não-existência de solução para pontos suficientemente próximos desta $(m-1)$-variedade. Além disso, o teorema 1.2.1 nos fornece não-existência de solução para m-uplas de α_i's ilimitadas (isto é, com algumas das coordenadas, suficientemente grandes), porém, estritamente abaixo do $(m-1)$-hiperbolóide crítico.

De acordo com tudo que foi dito acima, é natural fazermos as seguintes conjecturas:

Conjectura 3.1.2: (do $(m-1)$-hiperbolóide): Suponhamos que $\frac{\prod_{j=1}^{m} \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \prec \frac{4}{m(N-2)}$, se $N \geq 3$. Então, (1.2) não possui solução em $(C^2(\mathbf{R}^N))^m$.

Conjectura 3.1.3: Suponhamos que $N \geq 3$ e $\frac{\prod_{j=1}^{m} \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \geq \frac{4}{m(N-2)}$. Então, (1.2) possui solução radial $(u_1, ..., u_m) \in (C^2(\mathbf{R}^N))^m$.

OBS 3.1.1: Como foi dito acima, a conjectura 3.1.2 está provada, quando $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i \prec 1$. O caso $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ está contido no teorema 1.2.1. Além disso, pela observação 1.2.4, a conjectura 3.1.3 está provada para o sistema (2.33) do capítulo 1.•

Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \mathbf{R}_+^N, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i \succ 0 \text{ em } \mathbf{R}_+^N, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } x_N = 0, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $N \geq 2$ e $\alpha_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$.

Em [32], Gidas e Spruck obtiveram não-existência de solução para (1.3), quando $m = 1$ e $0 \prec \alpha_1 \leq \frac{N+2}{N-2}$ (veja o lema 1.1.4 e a observação 1.1.2). Recentemente, Felmer[27] mostrou não-existência de solução, quando $\alpha_i \leq \frac{N+2}{N-2}$, $\forall i = 1, ..., m$. Conseqüentemente, temos não-existência de solução para m-uplas de α_i's suficientemente próximas do $(m-1)$-hiperbolóide crítico e inclusive tocando esta $(m-1)$-variedade. Por outro lado, pelo teorema 1.2.2, temos não-existência para m-uplas de α_i's ilimitadas, porém, estritamente abaixo do $(m-1)$-hiperbolóide crítico. Assim, é razoável conjecturarmos o seguinte resultado:

Conjectura 3.1.4: Suponhamos que $\frac{\prod_{j=1}^{m} \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \leq \frac{4}{m(N-2)}$, se $N \geq 3$. Então, (1.3) não possui solução em $(C^2(\mathbf{R}_+^N))^m \cap (C(\{x : x_N \geq 0\}))^m$.

2. Algumas Conjecturas para Sistemas Elípticos em Domínios Limitados

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v^{\alpha} \\ -\Delta v = u^{\beta} \end{cases} \text{em } \Omega \qquad\qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} u, v \succ 0 \ \text{ em } \Omega \\ u = 0 = v \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 2$, $\alpha, \beta \succ 0$.

Em 1992, Clément, De Figueiredo e Mitidieri[8], utilizando método topológico, mostraram que, se $\alpha, \beta \in [1, +\infty)$, mas não ambos iguais a 1, e $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \succ \frac{N-2}{N}$, se $N \geq 3$, então (2.1) possui solução. Posteriormente, De Figueiredo e Felmer[18], via método variacional, melhoraram este resultado, porém, quando $N \geq 5$, tem-se a restrição $\alpha, \beta \leq \frac{N+4}{N-4}$. Pelo exemplo 4.3, sabemos que, quando $\frac{N-1}{N} \leq \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \prec 1$, (2.1) admite solução. Por outro lado, Mitidieri[46] mostrou que, quando Ω é estrelado, $N \geq 3$ e $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \leq \frac{N-2}{N}$, (2.1) não possui solução. Recentemente, Clément-van der Vorst[11] e Felmer-Martinez[28] mostraram que, se $\alpha\beta \prec 1$ então (2.1) possui uma única solução.

Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i \succ 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \qquad (2.2)$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 2$, $\alpha_i \succ 0$, $\forall i = 1, ..., m$.

Pelos exemplos 4.3 do capítulo 1 e 3.3 do capítulo 2, sabemos que, se $0 \prec \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \leq \frac{2}{m(N-1)}$ ou $\prod_{j=1}^m \alpha_j \prec 1$, então (2.2) possui solução.

Os resultados acima fortalecem as seguintes conjecturas:

Conjectura 3.2.1: Suponhamos que $0 \prec \frac{\prod_{j=1}^m \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^{m-1} (\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} \prec \frac{4}{m(N-2)}$, se $N \geq 3$. Então, (2.2) possui, pelo menos, uma solução $(u_1, ..., u_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$.

Conjectura 3.2.2: Suponhamos que Ω é estrelado, $N \geq 3$ e $\frac{\prod_{j=1}^{m}\alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1}\alpha_{\sigma_i^l})) + m} \geq \frac{4}{m(N-2)}$. Então, (2.2) não possui solução em $(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$.

Conjectura 3.2.3: Suponhamos que $\prod_{i=1}^{m}\alpha_i \prec 1$. Então, (2.2) possui uma única solução $(u_1, ..., u_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$.

OBS 3.2.1: Na verdade, a conjectura 3.2.3 trata da unicidade de solução para (2.2), pois a existência foi mostrada no teorema 2.3.6.•

Agora, consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{\sigma_i}^{\alpha_i} + \mu_i u_{\sigma_i} \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i \succ 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, ..., m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 3$, $\alpha_i, \mu_i \succ 0, \forall i = 1, ..., m$.

Em 1983, Brézis e Nirenberg[6] mostraram que, quando $m = 1$, $N \geq 4$, $\alpha_1 = \frac{N+2}{N-2}$ e $\mu_1 \in (0, \lambda_1)$, (2.3) possui solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Posteriormente, Pucci e Serrin[52] generalizaram este resultado para equação poliharmônica com condição de fronteira de Dirichlet. Recentemente, Hulshof, Mitidieri e van der Vorst[35] analisaram a questão de existência de solução para (2.3). Eles mostraram que, quando $m = 2$, $N \geq 4$, $\frac{1}{\alpha_1+1} + \frac{1}{\alpha_2+1} = \frac{N-2}{N}$ e $\mu_1\mu_2 \prec \lambda_1^2$, (2.3) possui solução em $(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$. Observemos que a condição $\mu_1\mu_2 \prec \lambda_1^2$ é natural. Para ver isto, reescrevemos (2.3) como

$$\begin{cases} -\mathcal{L}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^{\alpha_1} \\ u_2^{\alpha_2} \end{pmatrix} \text{ em } \Omega \\ \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $\mathcal{L} = diag(\Delta, \Delta)$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Agora, a condição em questão pode ser escrita como $\rho(A) \prec \lambda_1$, justificando a afirmação acima. Portanto, pela observação 2.2.3, é razoável esperar o seguinte resultado:

Conjectura 3.2.4: Suponhamos que $N \geq 4$, $\frac{\prod_{j=1}^{m} \alpha_j - 1}{\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m-1}(\prod_{l=j}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^l})) + m} = \frac{4}{m(N-2)}$ e $\prod_{j=1}^{m} \mu_j \prec \lambda_1^m$. Então, (2.3) possui, pelo menos, uma solução $(u_1, \ldots, u_m) \in (C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^m$.

Para finalizar este capítulo, gostaríamos de fazer algumas observações relativas aos teoremas 2.3.1 - 2.3.4.

Consideremos o seguinte sistema m-acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i(u_{\sigma_i}) \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, \ldots, m \\ u_i \succ 0 \text{ em } \Omega, \ \forall i = 1, \ldots, m \\ u_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ \forall i = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 2$, $f_i : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ é uma função contínua, $\forall i = 1, \ldots, m$.

Suponhamos que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f_i(s)}{s^{\alpha_i}} = a_i, \ \lim_{s \to 0^+} \frac{f_i(s)}{s^{\beta_i}} = b_i, \ \forall i = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

onde $a_i, \alpha_i, \beta_i \in (0, +\infty)$, $b_i \in [0, +\infty)$, $\forall i = 1, \ldots, m$, e $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Pelos teoremas 2.3.1 e 2.3.3, sabemos que, se $\prod_{i=1}^{m} \beta_i \succ 1$ e $b_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, ou $\beta_i = 1$, $\forall i = 1, \ldots, m$, e $\prod_{i=1}^{m} b_i \prec \lambda_1^m$, e $\prod_{i=1}^{m} a_i^{\gamma_i} \succ m\lambda_1$, onde $\gamma_i = \frac{\sum_{k=1}^{m-1}(\prod_{j=k}^{m-1} \alpha_{\sigma_i^j}) + 1}{\sum_{l=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m-1}(\prod_{j=k}^{m-1} \alpha_{\sigma_l^j})) + m}$, $\forall i = 1, \ldots, m$, então (2.5) possui solução forte, desde que os α_i's satisfaçam **(H.5)** do capítulo 2. Claramente, **(H.5)** é uma hipótese artificial. Por outro lado, pelos teoremas 2.3.2 e 2.3.4 (ou observação 2.2.3), concluímos que, quando $\alpha_i = 1$, $\forall i = 1, \ldots, m$, a hipótese acima de não-ressonância no infinito pode ser melhorada para $\prod_{i=1}^{m} a_i \succ \lambda_1^m$. Conseqüêntemente, acreditamos que a condição de não-ressonância no infinito utilizada nos teoremas 2.3.1 e 2.3.3 pode ser refinada. Da mesma forma, conjecturamos a existência de condições de não-ressonância na origem para β_i's mais gerais que os tratados acima, ou seja, quando $\prod_{i=1}^{m} \beta_i = 1$. Portanto, condições gerais de não-ressonância para sistemas m-acoplados é uma questão em aberto.

Obviamente, poderíamos conjecturar muitos outros resultados razoáveis. Entretanto, acreditamos que um estudo dos problemas acima, abriria caminho para análise de outras questões.

Apêndice

Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ um domínio limitado, $N \geq 2$. Consideremos os seguintes operadores de segunda ordem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &\equiv \sum_{k,j=1}^{N} A_{kj}(x)D_{kj} + \sum_{k=1}^{N} b_k(x)D_k + c(x).\\
\mathcal{L}_2 &\equiv \sum_{k,j=1}^{N} D_k(A_{kj}(x)D_j) + c(x),\ \forall x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Suponhamos que os operadores $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são estritamente elípticos, isto é, $\exists \alpha \succ 0$ tal que $\sum_{k,j=1}^{N} A_{kj}(x)\xi_k\xi_j \geq \alpha \mid \xi \mid^2$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^N$.

À seguir, enunciaremos alguns resultados clássicos da teoria das equações diferenciais parciais elípticas.

Lema A.1(Hopf): Suponhamos que A_{kj}, b_k, $c \in L^\infty(\Omega), \forall k, j = 1, ..., N$, e $c \leq 0$ em Ω. Assuma que $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz $\mathcal{L}_1 u \leq 0$ em Ω. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que
(i) u é contínua em x_0,
(ii) $u(x_0) \prec u(x), \forall x \in \Omega$,
(iii) $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0.
Então, a derivada normal exterior de u em x_0, se existe, satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(x_0) \prec 0.$$

Dem: Veja o lema 3.4 em [34].■

Lema A.2 (Princípio do máximo clássico): Suponhamos que A_{kj}, b_k, $c \in L^\infty(\Omega), \forall k, j = 1, ..., N$, e $c \leq 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $\mathcal{L}_1 u \geq 0$ em Ω, então $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq$

$\max_{x\in\partial\Omega} u^+(x)$. Além disso, u não pode atingir um máximo não-negativo em Ω, a menos que u seja constante.

Dem: Veja os teoremas 3.1 e 3.5 em [34].■

Lema A.3 (Princípio do máximo generalizado): Suponhamos que A_{kj}, $c \in L^\infty(\Omega)$, $\forall k, j = 1, ..., N$, e $c \leq 0$ em Ω. Se $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz $\mathcal{L}_2 u \geq 0$ em Ω, então $\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u^+(x)$.

Dem: Veja o teorema 8.1 em [34].■

Lema A.4 (Princípio do máximo de Aleksandrof): Suponhamos que A_{kj}, b_k, $c \in L^\infty(\Omega)$, $\forall k, j = 1, ..., N$, e $c \leq 0$ em Ω. Seja $f \in L^N(\Omega)$. Se $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $\mathcal{L}_1 u \geq f$ em $\Omega(qtp)$, então existe $k \succ 0$, independente de f e u, tal que $\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) + k \parallel f \parallel_{L^N}$. Além disso, se $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ satisfaz $\mathcal{L}_1 u \geq 0$ em Ω, então u não pode atingir um máximo não-negativo em Ω, a menos que u seja constante.

Dem: Veja os teoremas 9.1 e 9.6 em [34].■

Lema A.5 Suponhamos que Ω é de classe $C^{2,\alpha}$, A_{kj}, b_k, $c \in C^o(\overline{\Omega})$, $\forall k, j = 1, ..., N$, e $c \leq 0$ em Ω. Se $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ então existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_1 u = f \text{ em } \Omega \\ u = \varphi \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Além disso, existe $k \succ 0$, independente de f e u, tal que $\parallel u \parallel_{2,\alpha} \leq k(\parallel \varphi \parallel_{2,\alpha} + \parallel f \parallel_\alpha)$.

Dem: Veja o teorema 6.14 em [34].■

Lema A.6 Suponhamos que $A_{kj} \in L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$, $b_k, c \in L^\infty(\Omega)$, $\forall k, j = 1, ..., N$. Sejam $p \in (1, +\infty)$ e $f \in L^p(\Omega)$. Se $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ é solução forte de $\mathcal{L}_1 u = f$ em Ω, então para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $k \succ 0$, independente de f e u, tal que $\parallel u \parallel_{W^{2,p}(\Omega')} \leq k(\parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} + \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)})$.

Dem: Veja o teorema 9.11 em [34].■

Lema A.7 Suponhamos que Ω é de classe $C^{1,1}$, $A_{kj} \in C(\overline{\Omega})$, $b_k, c \in L^\infty(\Omega)$, $\forall k, j = 1, ..., N$, e $c \leq 0$ em Ω. Se $p \in (1, +\infty)$ e $f \in L^p(\Omega)$ então existe uma única função

$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_1 u = f \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Além disso, existe $k \succ 0$, independente de f e u, tal que $\| u \|_{W^{2,p}} \leq k \| f \|_{L^p}$.

Dem: Veja o teorema 9.15 em [34]. ■

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz - Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Analysis, 14, 1973, pp. 349-381.

[2] Belousov, B.P. - A periodic reaction and its mechanism, Ref. Radiat. Med., 145, 1959.

[3] Berestycki, H. - Methods topologiques et problemes aux limites nonlineares, Thése, Université de Paris VI, 1975.

[4] I. Birindelli e E. Mitidieri - Liouville theorems for elliptic inequalities and applications, preprint.

[5] H. Brézis e S. Kamin - Sublinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$, Manuscripta Math., 74, 1992, pp. 87-106.

[6] H. Brézis e L. Nirenberg - Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math., 36, 1983, pp. 437-478.

[7] H. Brézis e R.E.L. Turner - On a class of superlinear elliptic problems, Comm. in Partial Diff. Equations, vol. 2, n. 6, 1977, pp. 601-614.

[8] Ph. Clément, D.G. de Figueiredo e E. Mitidieri - Positive solutions of semilinear elliptic systems, Comm. in Partial Diff. Equations, vol. 17, n. 5 e 6, 1992, pp. 923-940.

[9] Ph. Clément, D.G. de Figueiredo e E. Mitidieri - A priori estimates for positive solutions of semilinear elliptic systems via Hardy-Sobolev inequalities, report 20, 1992, Unicamp.

[10] Ph. Clément, R. Manásevich e E. Mitidieri - Positive solutions for a quasilinear system via blow-up, Comm. in Partial Diff. Equations, vol. 18, n. 12, 1993, pp. 2071-2106.

[11] Ph. Clément e R.C.A.M. van der Vorst - On a semilinear elliptic system, Diff. Int. Equations, 8, 1995, pp. 1317-1329.

[12] Costa, D.G. - On a class of elliptic systems in $\mathbf{R}^N$, Electr. J. Diff. Equations, 1994, n. 7, pp. 1-14.

[13] D.G. Costa e C.A. Magalhães - A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems, J. Diff. Equations, 111, 1994, pp. 103-122.

[14] D.G. Costa e C.A. Magalhães - A unified approach to a class of strongly indefinite functionals, J. Diff. Equations, 122, 1996, pp. 521-547.

[15] De Figueiredo, D.G. - Positive solutions of semilinear elliptic problems, Lecture Notes in Math., 957, 1981.

[16] De Figueiredo, D.G. - On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem, MRC Tech Rep # 2522, 1983.

[17] De Figueiredo, D.G. - Semilinear elliptic systems: a survey of superlinear problems, report 58, 1996, Unicamp.

[18] D.G. de Figueiredo e P.L. Felmer - On superquadratic elliptic systems, Trans. Amer. Math. Soc., 343, 1994, pp. 99-116.

[19] D.G. de Figueiredo e P.L Felmer - A Liouville - type theorem for elliptic systems, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XXI, 1994, pp. 387-397.

[20] D.G. de Figueiredo e Y. Jianfu - Decay, symmetry and existence of positive solutions of semilinear elliptic systems, report 59, 1996, Unicamp.

[21] D.G. de Figueiredo, P. L. Lions, R. D Nussbaum - A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, J. Math. Pures et Appl., 61, 1982, pp. 41-63.

[22] D.G. de Figueiredo e C.A. Magalhães - On nonquadratic Hamiltonian elliptic systems, Adv. Diff. Equations, 5, 1996, pp. 881-898.

[23] D.G. de Figueiredo e E. Mitidieri - Maximum principles for linear elliptic systems, Rendiconti di Matematica di Trieste, vol. XXII, Fasc. 1 e 2, 1990, pp. 36-66.

[24] D.G. de Figueiredo e S. Solimini - A variational approach to superlinear elliptic problems, Comm. in Partial Diff. Equations, Vol. 9, n. 8, 1984, pp. 699-717.

[25] De Morais Filho, D.C. - Um problema do tipo Ambrosetti-Prodi para um sistema de equações elípticas, Tese de Doutorado, 1994, Unicamp.

[26] Y. Ding e S. Li - Existence of solutions for some superlinear or sublinear elliptic systems in $\mathbf{R}^N$, preprint.

[27] Felmer, P.L. - Nonexistence and symmetry theorems for elliptic systems in $\mathbf{R}^N$, Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo, série II, tomo XLIII, 1994, pp. 259-284.

[28] P.L. Felmer e S. Martínez - Existence and uniqueness of positive solutions to certain differential systems, preprint.

[29] Fisher, R.A. - The advance of advantageous genes, Ann. Eugenics, 7, 1937, pp. 355-369.

[30] Gidas, B. - Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations, nonlinear partial differential equations in engineering and applied science, pp. 255-273.

[31] B. Gidas, W. Ni e L. Nirenberg - Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68, 1979, pp. 209-243.

[32] B. Gidas e J. Spruck - A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. in Partial Diff. Equations, vol. 6, n. 8, 1981, pp. 883-901.

[33] B. Gidas e J. Spruck - Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. on Pure and Applied Math., 34, 1981, pp. 525-598.

[34] D. Gilbarg e N.S. Trudinger - Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, 1983.

[35] J. Hulshof, E. Mitidieri e R.C.A.M. van der Vorst - Strongly indefinite systems with critical Sobolev exponents, preprint.

[36] J. Hulshof e R.C.A.M. van der Vorst - Differential systems with strongly indefinite variational structure, J. Funct. Analysis, 114, 1993, pp. 32-58.

[37] Jie, Q. - A priori estimates for positive solutions of semilinear elliptic systems, J. Partial Differential Equations, vol. 1, n. 2, série A, 1988, pp. 61-70.

[38] Kavian, O. - Inegalité de Hardy-Sobolev et application, Thése de Doctorat de 3eme cycle, Université de Paris VI, 1978.

[39] Kavian, O. - Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, 1993.

[40] J. Kazdan e F.W. Warner - Remarks on some quasilinear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. XVIII, 1975, pp. 567-597.

[41] Krasnoselskii, M.A. - Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators Sov. Math. Dokl., 1, 1960, pp. 1285-1288.

[42] Y. Li e W. Ni - Radial symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$, Comm. in Partial Diff. Equations, vol. 18, n. 5 e 6, 1993, pp. 1043-1054.

[43] Lions, P. L. - On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, SIAM Review, vol. 24, n. 4, 1982, pp. 441-467.

[44] Lions, P.L. - The concentration-compactness principle in the calculus of variations, part 1, Rev. Mat. Ibero Amer., 1, 1985, pp. 145-201.

[45] M.M. Meyer e J.L. Gómez - The maximum principle for cooperative weakly coupled elliptic systems and some applications, Diff. Int. Equations, vol. 7, n. 2, 1994, pp. 383-398.

[46] Mitidieri, E. - A Rellich type identity and applications, Comm. in Partial Diff. Equations, vol. 18, n. 1 e 2, 1993, pp. 125-151.

[47] Mitidieri, E. - Non-existence of positive solutions of semilinear elliptic systems in $\mathbf{R}^N$, preprint.

[48] Murray, J.D. - Lectures on nonlinear- Differential Equation Models in Biology, Oxford Univ. Press, London, 1977.

[49] L. A. Peletier e R.C.A.M. van der Vorst - Existence and non-existence of positive solutions of nonlinear elliptic systems and the biharmonic equation, Diff. Int. Equation, 5, 1992, pp. 747-767.

[50] Persson, A. - Compact linear mappings between interpolation spaces, Arkiv for Matematik, vol. 5, n. 13, 1964, pp. 215-219.

[51] P. Pucci e J. Serrin - A general variational identity, Indiana University Math. Journal, vol. 35, n. 3, 1986, pp. 681-703.

[52] P. Pucci e J. Serrin - Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operators, J. Math. Pures et Appl., 69, 1990, pp. 55-83.

[53] Rabinowitz, P.H.- On a class of nonlinear Schrödinger equations, ZAMP, 43, 1992, pp. 270-291.

[54] J. Serrin e H. Zou - Non-existence of positive solutions of Lane-Emden systems, Diff. Int. Equations, vol. 9, n. 4, 1996, pp. 635-653.

[55] J. Serrin e H. Zou - Non-existence of positive solutions of semilinear elliptic systems, preprint.

[56] J. Serrin e H. Zou - Existence of positive solutions of the Lane-Emden system, preprint.

[57] Sleeman, B.D. - Small amplitude periodic waves for the Fitz-Hugh-Nagumo equations, J. Math. Biol., 14, 1982, pp. 309-315.

[58] Soranzo, R. - A priori estimates and existence of positive solutions of a superlinear polyharmonic equation, Dynamic Systems and Applications, 3, 1994, pp. 465-487.

[59] Souto, M.A.S. - Sobre a existência de soluções positivas para sistemas cooperativos não-lineares, Tese de Doutorado, 1992, Unicamp.

[60] Troy, W.C. - Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations, J. Diff. Equations, 42, 1981, pp. 400-413.

[61] van der Vorst, R.C.A.M. - Variational identities and applications to differential systems, Arch. Rational Mech. Anal., 116, 1991, pp. 375-398.

[62] X. Wang e Y. Deng - Existence of multiple solutions to nonlinear elliptic equations of nondivergence form, J. Math. Analysis and Applications, 189, 1995, pp. 617-630.