Resolução do Problema Assimétrico de Inequações Variacionais em Dimensão Finita, Usando Problemas de Otimização Equivalentes

TESE
apresentada por

Roberto Andreani

Orientador
José Mario Martínez

Para
Requerimento do Grau
Doutor em Matemática Aplicada

DMA - IMECC - UNICAMP
22/10/96

Resolução do Problema Assimétrico de Inequações Variacionais em Dimensão Finita, Usando Problemas de Otimização Equivalentes

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corregida e defendida pelo Sr. **Roberto Andreani** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 22 de Outubro de 1996.

Prof. Dr. José Mario Martínez.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR em Matemática Aplicada.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Andreani, Roberto

An25r Resolução do problema assimétrico de inequações variacionais em dimensão finita, usando problemas de otimização equivalentes / Roberto Andreani -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : José Mario Martinez

Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Desigualdades variacionais (Matemática). 2. Otimização matemática. 3. Programação não linear. 4. Sistemas não lineares. I. Martinez, José Mario. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese defendida e aprovada em, 22 de 10 de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCIO TUNES DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Prof(a). Dr(a). NELSON FILHO MACULAN

Prof(a). Dr(a). CLOVIS CAESAR GONZAGA

Prof(a). Dr(a). JOSÉ MÁRIO MARTÍNEZ PÉREZ

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Mario Martínez, pela orientação exemplar.

À Prof. Dra. Ana Friedlander, pelas importantes contribuções e pela colaboração permanente.

À FAPESP, pelo suporte financeiro.

Aos professores do IMECC, em especial a Sandra, Lúcio, Moretti e Marko.

Ao Prof. Dr. Hugo Daniel Scolnik, pela oportunidade de fazer este doutorado.

Aos meus colegas de pós-graduação.

À Irene e a todo o pesoal do Depto. de Computação da Universidade de Buenos Aires.

Às secretárias do DMA-IMECC e em especial à Fátima.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Apresentação

Os problemas estudados nesta tese são os seguintes:

O Problema de Inequações Variacionais

Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e fechado, encontrar $x_* \in \Omega$ tal que

$$\langle F(x_*), w - x_* \rangle \geq 0, \text{ para todo } w \in \Omega. \tag{1.1}$$

Este problema é denotado por $VIP(F, \Omega)$.

O Problema da Complementaridade

Este problema, que é o caso particular mais importante do $VIP(F, \Omega)$, $(\Omega = \mathbb{R}^n_+)$. Consiste em encontrar $x_* \in \mathbb{R}^n_+$ tal que

$$F(x_*) \geq 0, \ x_* \geq 0, \ x_*^T F(x_*) = 0. \tag{1.2}$$

Este problema é denotado por $NCP(F)$. Quando a função F do problema é linear (i.e.: $F(x) = Mx + q$) o problema chama-se de complementaridade linear e é denotado por $LCP(M, q)$.

Os problemas NCP e LCP serão estudados como parte de um problema mais geral: o problema misto, onde o conjunto Ω é uma caixa.

Também estudaremos dois problemas que não são casos particulares do problema de inequações variacionais:

O Problema Horizontal

Dadas $Q,\ R \in R^{n\times n}$, encontrar $x,\ z \in I\!R^n_+$, tal que

$$Qx + Pz = b,\ \ x^T z = 0.$$

Este problema será denotado por $HLCP(Q, R, b)$.

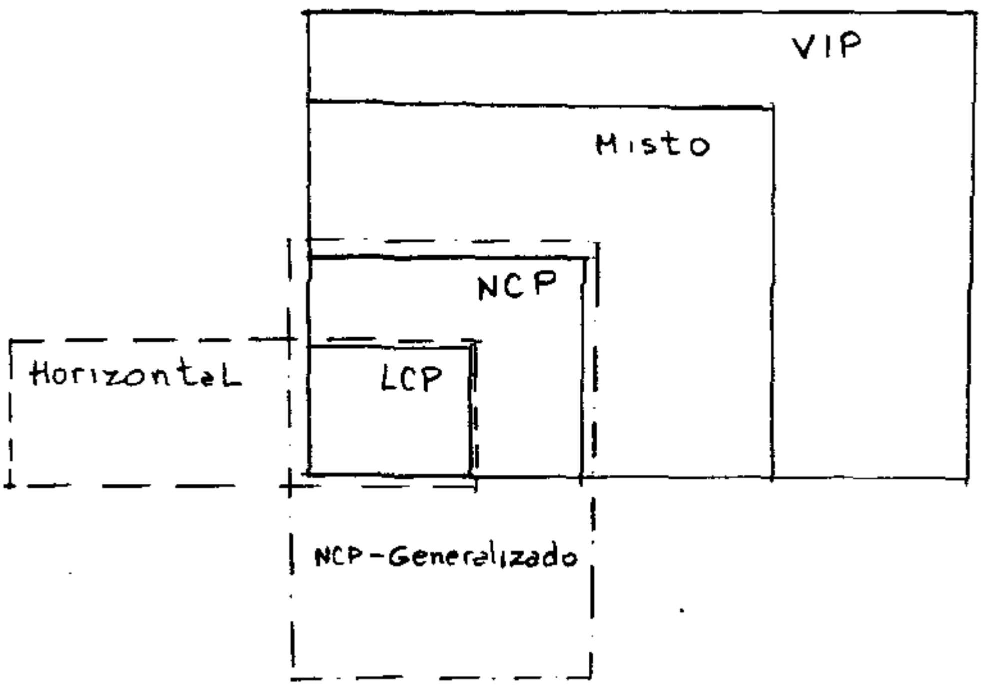
O Problema NCP-Generalizado

Dadas $G, F : I\!R^n \to I\!R^n$, encontrar $x_* \in I\!R^n$, tal que

$$F(x_*) \geq 0,\ G(x_*) \geq 0,\ F(x_*)^T G(x_*) = 0 \tag{1.3}$$

Este problema será denotado $GNCP(F, G)$.

O seguinte diagrama ilustra as relações entre os problemas



A motivação para estudar os problemas de inequações variacionais e seus casos particulares provém em princípio da necessidade de dar uma resposta eficiente à resolução do problema do equilíbrio geral e suas aplicações: teoria de jogos, produção, consumo, taxação e subsídios, emprego e salário, "spatial price equilibrium", "invariant capital stock", o problema de produção de Nash-Courton, " traffic equilibrium problem", etc. Em todos estes problemas as condições de equilíbrio podem ser formuladas como um problema de inequações variacionais ou como um problema de complementaridade. Além disso, em um trabalho recente, Ferris e Pang [26](1996) apresentam aplicações importantes em engenharia, como problemas de contacto mecânico, problemas de estrutura mecânica, "nonlinear obstacle problems", problemas de lubrificação eletrodinâmica, etc. Gabriel e Kydes [46](1995) aplicam o problema da complementaridade não linear ao modelo matemático para a computação do equilíbrio entre preço e quantidade de combustível no sistema energético dos E.U.A., chamado projeto NEMS (The National Energy Modeling System).

Inicialmente, os métodos para resolver os problemas de equilíbrio geral basearam-se nos resultados obtidos no trabalho de Lemke e Howson [82](1964). Estes métodos chamaram-se de ponto fixo ou homotópicos, pela estratégia usada. Ainda hoje, muitas aplicações são resolvidas de forma eficiente por estes métodos (ver [54],[114],[121]). Mas o crescimento da economia e as planificações industriais sofisticadas requerem a resolução de problemas de grande porte. O melhor exemplo disto é o projeto PIES (Project Independence Evaluations System) ([57]). Nestes casos os métodos tradicionais são ineficientes, e ainda no caso de problemas de porte médio eles já apresentam dificuldades.

Outra estratégia tradicional para resolver modelos de equilíbrio está baseada na possibilidade de que o problema de inequações variacionais venha a constituir o conjunto de condições de primeira ordem de um problema de minimização, cuja função a minimizar seria da seguinte forma:

$$f(x) = \int_0^1 F(x_0 + t(x - x_0))^T (x - x_0) dt$$

onde $x_0 \in I\!R^n$ é um vetor arbitrário e a função F é continuamente diferenciável.

Para que isto seja possível é necessário que o Jacobiano de F seja simétrico (ver [101]). Esta condição é muito restritiva e difícil de ser satisfeita em muitos exemplos práticos (ver [7], [18]). Logo, esta estratégia não é uma boa alternativa aos métodos de ponto fixo ou homotópicos.

Diante da ineficiência provada para resolver problemas de grande porte dos métodos homotópicos ou de ponto fixo e da falta de generalidade da estratégia de integração, fica justificada a asserção de Harker e Pang em ([57]): " Os problemas de inequações variacionais em dimensão finita e de complementaridade emergem como os candidatos a encher o vazio deixado pelas estratégias de otimização e de ponto fixo".

O problema horizontal serve de marco para a maioria dos algoritmos de pontos interiores do tipo primal dual, e caracteriza as condições de Karush-Kuhn-Tucker do problema de programação quadrática, como está explicitado em [6], [41], [53].

O problema NCP-Generalizado, proposto por Fukushima e Kanzow em [70], é uma generalização do problema de Quasi-Complementaridade ou também chamado problema de complementaridade implícito, e tem suas aplicações nas versões discretizadas do problemas de controle impulsional e parada ótima. Estes problemas estão descritos nos trabalhos de Pang [104], [105] e de Noor [99], [100].

Os fatos citados acima revelam a necessidade de encontrar formas eficientes de resolver diretamente o problema de inequações variacionais e complementaridade. Esta é a principal motivação desta tese.

Para alcançar o objetivo proposto, estabelecemos uma equivalência dos problemas que nos propomos resolver neste trabalho (que chamaramos de originais), com problemas de otimização equivalentes com restrições simples (caixa), não pela integração da função F (cuja limitação já foi indicada), mas pela formulação de um problema de otimização com função objetivo tal que seus minimizadores globais forneçam as condições para que o problema

$$\min_{x\in\Omega}\langle F(x_*), x - x_*\rangle$$

tenha como solução x_*, solução do problema original. A função objetivo do novo problema constitui uma função de mérito para o problema original.

Com isto conseguimos a equivalência dos minimizadores globais do problema de otimização associado com as soluções do $VIP(F,\Omega)$, sem colocar nenhuma condição sobre a função F do problema original.

Embora existam bons métodos para resolver o problema de otimização global em alguns casos particulares (por exemplo o problema de programação quadrática (ver [35], [60], [108])), este é sempre um problema difícil. Encontrar pontos estacionários é muito mais simples e todos os métodos tradicionais de otimização fazem isto com sucesso comprovado na prática. Isto justifica a busca de condições sobre F para que os minimizadores locais (ou outros pontos críticos) do problema de otimização associado sejam minimizadores globais, de maneira a conseguir a equivalência entre os pontos estacionários e as soluções do problema $VIP(F, \Omega)$.

Resumindo, os passos seguidos para atingir nosso objetivo são os seguintes:

(1) Formular uma função de mérito;

(2) Formular o problema de otimização equivalente;.

(3) Encontrar a equivalência com os minimizadores globais;

(4) Encontrar a equivalência com os pontos estacionários.

Embora os problemas horizontal e NCP-generalizado não sejam casos particulares do $VIP(F, \Omega)$, estes também podem ser resolvidos usando a estratégia anterior.

A principal contribução deste trabalho é a formulação, para todos os casos, de um problema de otimização equivalente, cuja função de mérito tem o mesmo grau de diferenciabilidade que as funções envolvidas no problema original. Além disso, as propriedades teóricas que obtivemos fazem que na maioria dos casos, as exigências feitas ao Jacobiano de F para obter a equivalência com os pontos estacionários, sejam iguais ou menores às exigidas nos trabalhos existentes para solucionar os mesmos problemas.

Além disso, o problema de otimização equivalente é simples e computável (e o que não sempre se verifica nas outras estratégias conhecidas).

No capítulo 2 apresentamos a equivalência do $VIP(F, \Omega)$ com problemas de otimização com restrições de caixa ou restrições lineares(politopo) e as diferentes condições que tem que ser pedidas á função F do $VIP(F, \Omega)$ para obter a equivalencia com os pontos KKT. No Capítulo 3 fazemos uma particularização dos resultados para o caso em que Ω é uma caixa, definiendo para isto uma noção de regularidade. No capítulo 4 apresentamos a resolução dos problemas horizontal e NCP-generalizado. No capítulo 5 desenvolvemos uma teoria de pertubações que nos permite estender os resultados para o caso em que a função F é monótona. Baseado nesta teoria apresentamos um algoritmo de tipo homotópico, a teoria perturbações tem resultados teóricos e práticos originais muito interessantes. No capítulo 6 apresentamos também um algoritmo para a resolução de sistemas não lineares indeterminados com restrições, que têm uma aplicação imediata na resolução dos problemas analisados nesta tese. Para este algoritmo desenvolvemos uma teoria completa de convergência.

A seguir daremos a notação usada nesta tese e algumas definições e resultados basicos.

1.2 Notação.

- Denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana de $I\!R^n$ e a norma matricial associada.

- Seja $\beta \in I\!R_+$ e $x_0 \in I\!R^n$, chamaremos

$$B_\beta(x_0) = \{x \in I\!R^n \mid \|x - x_0\| \leq \beta\}$$

  á bola com centro em x_0 e raio β.

- Se $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))^T$, denotaremos

$$g_i'(x) = \nabla g_i(x)^T$$

  para todo $i = 1, \ldots, n$ e

$$g'(x) = (\nabla g_1(x), \ldots, \nabla g_m(x))^T.$$

  Como é usual, $\nabla^2 g_i$ denota a matriz Hessiana de g_i.

- Se $B \in I\!R^{n\times n}$, $B \geq 0$ ($B > 0$) indica que B é semi-definida (definida) positiva.

- Chamaremos
$$I\!R^n_+ = \{x \in I\!R^n \mid x \geq 0\}.$$

- A i-ésima componente do vetor x será denotada $[x]_i$. No entanto, se não houver ambiguidade, será denotada simplesmente por x_i. O mesmo acontece com as matrizes, $[A]_{i,j}$ é a componente que representa a linha i e a coluna j de A, também neste caso usaremos $a_{i,j}$ quando o contexto o permita.

- Denotaremos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $I\!R^n$.

- Dado um vetor $y \in I\!R^n$, a matriz diagonal de $I\!R^{n\times n}$ gerada pelo vetor y será denotada por Y, ou seja,
$$Y = diag(y)$$
onde
$$[Y]_{i,i} = y_i \quad \text{para todo } i, \text{ e } [Y]_{i,j} = 0, \text{ se } i \neq j.$$
Seja $r \in I\!R$, e $y \in I\!R^n$, definiremos y^r da seguinte forma
$$y^r = (y_1^r, \ldots, y_n^r)^T.$$
Logo,
$$Y^r = diag(y^r)$$

- Seja a seguinte caixa
$$\Omega = \{x \in I\!R^n \mid x_i \geq a_i,\ i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2,\quad x_i \leq t_i,\ i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3\},$$

onde $\mathcal{I}_1 = \{1, ..., s_1\}$ e $\mathcal{I}_2 = \{s_1 + 1, ..., s_2\}$, $\mathcal{I}_3 = \{s_2 + 1, ..., s_3\}$, com $a \in I\!R^{s_2}$ e $t \in I\!R^{s_3 - s_1}$, e também chamaremos $\mathcal{I} = \{1, ..., n\}$ e $\mathcal{I}_4 = \{s_3 + 1, ..., n\}$.

O vetor $x \in I\!R^n$ será composto da seguinte forma:

$$x^T = ((x^1)^T, (x^2)^T, (x^3)^T, (x^4)^T)$$

Onde $x^1 \in I\!R^{s_1}$, $x^2 \in I\!R^{s_2 - s_1}$, $x^3 \in I\!R^{s_3 - s_2}$, $x^4 \in I\!R^{n - s_3}$.

Assim, definimos $\bar{x} \in I\!R^{s_2}$, $\tilde{x} \in I\!R^{s_3 - s_2}$, por

$$\bar{x}^T = ((x^1)^T, (x^2)^T) \quad \tilde{x}^T = ((x^2)^T, (x^3)^T)$$

Associada com o vetor $x \in I\!R^n$, definimos a matriz $X \in I\!R^{n \times n}$, por

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_4 \end{pmatrix}$$

Onde, $X_1 \in I\!R^{s_1 \times s_1}$, $X_2 \in I\!R^{s_2 - s_1 \times s_2 - s_1}$, $X_3 \in I\!R^{s_3 - s_2 \times s_3 - s_2}$,$X_4 \in I\!R^{n - s_3 \times n - s_3}$, onde:

$X_1 = diag(x^1)$, $X_2 = diag(x^2)$, $X_3 = diag(x^3)$, e $X_4 = diag(x^4)$

Conseqüentemente, definimos $\bar{X} \in R^{s_2 \times s_2}$ e $\tilde{X} \in I\!R^{s_3 - s_2 \times s_3 - s_2}$, por

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix}$$

Se $v \in I\!R^{s_2}, \bar{0} = (0, \ldots, 0)^T \in I\!R^{n - s_2}$, denotamos

$$(v, 0)^t = (v^T, \bar{0}^T)^T.$$

Se $\tilde{0} = (0, \ldots, 0)^T \in I\!R^{s_1}, r \in I\!R^{s_3 - s_1}, \bar{0} = (0, \ldots, 0)^T \in I\!R^{n-s_3}$, denotamos

$$(0, r, 0)^t = (\tilde{0}^T, r^T, \bar{0}^T)^T$$

- Dada $A \in I\!R^{q \times n}$ denotaremos por O, a matriz na qual as colunas formam uma base do núcleo de A. Ainda mais, por E denotaremos a matriz na qual as colunas formam uma base do seguinte subespaço:

$$\{x \in I\!R^n \mid Ax = 0, \;\; x_1 = \ldots = x_{s_3} = 0\}.$$

- A submatriz da matriz M, indicada por um conjunto de índices α e β, será denotada

$$[M]_{\alpha,\beta},$$

e seus elementos serão, $m_{i,j}$ com $i \in \alpha$ e $j \in \beta$, e

$$[M]_\alpha = M_{\alpha,\alpha}.$$

Também

$$F'_{\beta,\alpha}(x) = \left[\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right]_{i \in \beta, j \in \alpha}$$

denotará a submatriz do Jacobiano da função F computada em x.

1.3 Definições e resultados

1.3.1 Definições

Definição 1.1. *Dizemos que o problema LCP(M,q) é factível se existe $x \in I\!R^n_+$ tal que $Mx + q \geq 0$.*

Definição 1.2. *$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita uma*

(a) *Q_0-matriz*, se LCP(M,q) é factível para todo q. A esta classe chamaremos de Q_0.

(b) *Q-matriz*, se LCP(M,q) tem solução para todo q. A esta classe chamaremos de Q.

(c) *S_0-matriz* , se existe $0 \neq x \geq 0$ tal que $Mx \geq 0$. A esta classe chamaremos de S_0.

(d) *S-matriz*, se existe $x \geq 0$ tal que $Mx > 0$. A esta classe chamaremos de S.

(e) *P_0-matriz*, se todos os menores principais são não negativos. A esta classe chamaremos de P_0.

(f) *P-matriz*, se todos os menores principais são maiores que zero. A esta classe chamaremos de P.

(g) matriz *semi-definida positiva*, se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumpre $x^T Mx \geq 0$.

(h) matriz *definida positiva* se, para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ se cumpre $x^T Mx > 0$.

(i) matriz *coluna-suficiente*, se dado $z \in \mathbb{R}^n$ se cumpre,

$$\{z_i[Mz]_i \leq 0 \ \text{ para todo } i\} \Rightarrow \{z_i[Mz]_i = 0 \ \text{ para todo } i\}$$

(j) matriz *linha-suficiente*, se M^T é coluna-suficiente.

(k) matriz *suficiente*, se ela é coluna-suficiente e linha-suficiente.

(l) *H-matriz*, se existe $d \in \mathbb{R}^n$ com $d > 0$ tal que para todo $i = 1, ..., n$

$$|m_{ii}| > \sum_{i \neq j} |m_{ij}| d_j.$$

A esta classe chamaremos de H.

(m) ([110]) *M-matriz* se existe $s > 0$ e $B \in I\!R^{n\times n}$ com $B = (b_{ij}), b_{ij} \geq 0$, e $s > \rho(B)$, onde $\rho(B)$ é o raio espectral de B, tal que $M = sI - B$.

Definição 1.3. *Seja $\Omega \subseteq I\!R^n$, fechado e convexo, a função $F : I\!R^n \to I\!R^n$ é dita*

(a) *monótona* sobre Ω se

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega.$$

(b) *estritamente monótona* sobre Ω se

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle > 0 \quad \forall x, y \in \Omega\ x \neq y.$$

(c) *fortemente monótona* de módulo μ sobre Ω, se existe $\mu > 0$, tal que

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq \mu\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \Omega.$$

(d) *Coerciva* sobre Ω se existe um vetor $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\lim_{x\in\Omega, \|x\|\to\infty} \frac{F(x)^T(x - x_0)}{\|x\|} = +\infty.$$

(f) *P_0-função* sobre Ω se

$$\max_{1\leq i\leq n} \{(F_i(x) - F_i(y))(x_i - y_i)\} \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega.$$

(g) *P-função* sobre Ω se

$$\max_{1\leq i\leq n} \{(F_i(x) - F_i(y))(x_i - y_i)\} > 0 \quad \forall x, y \in \Omega, \ \ x \neq y.$$

(h) *função P-uniforme* sobre Ω de módulo μ, se existe um escalar $\mu > 0$ tal que

$$\max_{1\leq i\leq n} \{(F_i(x) - F_i(y))(x_i - y_i)\} \geq \mu\|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

1.3.2 Resultados

Proposição 1.1. [17], [28], [29], [110]. *Seja* $M \in I\!R^{n\times n}$,

(i)

(a) *Se* M *é definida positiva, então* M *é uma* P*-matriz.*
(b) *Se* M *é uma* P*-matriz, então* M *é uma* S*-matriz.*
(c) *Se* M *é uma* S*-matriz, então* M *é uma* Q_0*-matriz.*

(ii)

(a) *Se* M *é semi-definida positiva, então* M *é uma* P_0*-matriz.*
(b) *Se* M *é uma* P_0*-matriz, então* M *é uma* S_0*-matriz.*
(c) *Se* M *é uma* S_0*-matriz, então* M *é uma* Q_0*-matriz.*

(iii)

(a) *Se* M *é definida positiva, então* M *é semi-definida positiva.*
(b) *Se* M *é uma* P*-matriz, então* M *é uma* P_0*-matriz.*
(c) *Se* M *é uma* S*-matriz, então* M *é uma* S_0*-matriz.*
(d) *Se* M *é uma* Q*-matriz, então* M *é uma* Q_0*-matriz.*

(iv)

(a) *Se* M *é uma* P*-matriz ou semi-definida positiva, então* M *é uma matriz suficiente.*
(b) *Se* M *é coluna ou linha-suficiente, então* M *é uma* P_0*-matriz.*
(c) *Se* M *é uma* H*-matriz ou* M*-matriz, então* M *é uma* P*-matriz.*

Proposição 1.2. [17],[28], [94]. *Seja* $M \in I\!R^{m\times n}$
(a) M *é uma* S*-matriz se, e somente se,* $\{y \mid y \geq 0, A^T y \leq 0, y \neq 0\}$ *é vazio.*
(b) M *é uma* S_0*-matriz se, e somente se,* $\{y \mid y \geq 0, A^T y < 0\}$ *é vazio.*

Proposição 1.3. [93], [94], [101]. *Seja* $F : I\!R^n \to I\!R^n$ *e* $F \in C^1(\Omega)$. *Então:*

(i) $F(x)$ *é monótona sobre* Ω *se, e sómente se,* $F'(x)$ *é semi-definida positiva sobre* Ω.

(ii) *Se* $F'(x)$ *é definida positiva sobre* Ω, *então* $F(x)$ *é estritamente monótona sobre* Ω.

(iii) *Se* $F'(x)$ *é uma P-matriz sobre* Ω, *então* $F(x)$ *é P-função sobre* Ω.

(iv) *Se* $F'(x)$ *é* P_0*-matriz sobre* Ω, *então* $F(x)$ *é* P_0*-função sobre* Ω.

Proposição 1.4. [28]. *Seja* $M \in I\!R^{n\times n}$ *uma P-matriz, então para todo* $u \in I\!R^n$ *com* $u \neq 0$, *existe* $D_u > 0$ *matriz diagonal, tal que*

$$u^T D_u M u > 0.$$

Proposição 1.5. [28]. *Seja* $M \in I\!R^{n\times n}$ *uma S-matriz, então para todo* $u \in I\!R^n$ *com* $u > 0$, *existe* i *tal que*

$$[M^T u]_i > 0.$$

Proposição 1.6. [28], [95]. *Seja* $F : I\!R^n \to I\!R^n$ *uma* P_0*-função,* $\varepsilon > 0$, *então* $F(x) + \varepsilon x$ *é uma P-função.*

Proposição 1.7. [57], [93] *Dado* $\Omega \in I\!R^n$, *não vazio, convexo e fechado, se* $F(x)$ *é uma função P-uniforme , então o problema* $VIP(F, \Omega)$ *tem solução e é única.*

Proposição 1.8. [21] *Seja* $F : I\!R^n \to I\!R^n$ *contínua. Se* Ω *é limitado e não vazio, então o problema* $VIP(F, \Omega)$ *tem solução.*

Proposição 1.9. (Teorema Frank-Wolfe) [37], *Se a função* $f : I\!R^n \to I\!R$ *é quadrática, limitada inferiormente sobre o politopo* $\Gamma \in I\!R^n$, *então* f *atinge seu valor mínimo sobre* Γ. *(i.e., existe* $x_* \in \Gamma$, *tal que* $f(x_*) \leq f(x)$, *para todo* $x \in \Gamma$.*)*

CAPÍTULO 2

O problema de inequações variacionais (VIP)

2.1 Apresentação

Neste capítulo, trabalharemos com o problema de inequações variacionais (1.1), para um conjunto Ω definido da seguinte maneira:

$$\Omega = \{x \in I\!R^n \mid g(x) \leq 0,\ Ax = b,$$
$$x_i \geq c_i,\ \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2,\ x_i \leq t_i,\ \text{se } i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3\} \qquad (2.1)$$

onde $g = (g_1, \ldots, g_m)^T$, $g_i \in C^2(I\!R^n)$ é convexa para todo $i = 1, \ldots, m$, $A \in I\!R^{q\times n}$, $\mathcal{I}_1 = \{1, ..., s_1\}$ $\mathcal{I}_2 = \{s_1 + 1, ..., s_2\}$ e $\mathcal{I}_3 = \{s_2 + 1, ..., s_3\}$ com $c \in I\!R^{s_2}$ e $t \in I\!R^{s_3 - s_1}$.

Observe-se que este conjunto inclui os casos particulares já mencionados como NCP, LCP, o problema misto, aquele em que Ω é um politopo e também inclui o VIP quando o conjunto é dado somente por restrições de desigualdade convexas.

Chamaremos

$$\Omega_c = \{x \in I\!R^n \mid x_i \geq c_i,\ i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2,\ x_i \leq t_i,\ i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3\}.$$

Rescrevemos o $VIP(F, \Omega)$ como um problema de otimização equivalente com
(i) Restrições simples (caixa)
(ii) Restrições lineares (politopo).

2.2 Equivalência com um problema de otimização com restrições simples (caixas)

Seguiremos os passos já explicados na introdução.

(a) A Função de Mérito Proposta

Seguindo estratégias similares às feitas em [40] e [41], definimos nossa função de mérito como $f : \Omega_c \times I\!R^m_+ \times I\!R^m_+ \times I\!R^q \times I\!R^{s_2}_+ \times I\!R^{s_3-s_1}_+ \to I\!R_+$, da seguinte maneira

$$f(x,y,z,u,v,r) = \|F(x) + g'(x)^T y + A^T u - (v,0)^t + (0,r,0)^t\|^2$$

$$+\rho_1\|z + g(x)\|^2 + \rho_2\|Ax - b\|^2$$

$$+\rho_3\left[\left(\sum_{i=1}^{m}(y_i z_i)^l\right)^p + \left(\sum_{i=1}^{s_2}((x_i - c_i)v_i)^l\right)^p + \left(\sum_{i=s_1}^{s_3}((t_i - x_i)r_i)^l\right)^p\right]$$

onde $\rho_1, \rho_2, \rho_3, p > 0, l > 0$.

Observe que se $p \geq 1$, $l \geq 1$ e p, $l \in I\!N$, a função de mérito proposta tem o mesmo grau de diferenciabilidade que as funções do problema original (F e g_i).

(b) O Problema de Otimização Equivalente

$$\text{Minimizar } f(x,y,z,u,v,r)$$

$$\text{Sujeito a } \left\{ \begin{array}{lcl} y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \\ v & \geq & 0 \\ r & \geq & 0 \\ x & \in & \Omega_c. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Este problema que estamos propondo, a pesar do aumento no número de variáveis, tem as seguintes propriedades:

(a) A função objetivo proposta não deteriora o grau de diferenciabilidade próprio do problema original.

(b) A função objetivo é totalmente computável.

(c) As restrições são canalizações simples.

As outras estratégias para resolver este problema, propostas por Fukushima ([42] e [43]), nos trabalhos do mesmo autor com Taji, Ibaraki e Yamashita ([71], [118], [126] e [125]), e também no trabalho de Wu, Florian e Marcotte ([122]), possuem uma função de mérito com as mesmas caracteristicas de diferenciabilidade que a nossa, mas nelas o problema de otimização equivalente está baseado em projeções sobre o conjunto Ω. Isto faz com que a função seja computável só em casos muito especiais, como por exemplo no caso em que o conjunto é um politopo. Fukushima e Taji em [116] e [117] tentam usar este fato linearizando as restrições. Mesmo nestes casos a implementação é limitada e de duvidosa eficiência.

Outros trabalhos como os de Jiang [62], Jiang e Kanzow [72], Jiang e Qi [65], Xiao e Harker [123] e [124], Chen e Harker [8], Facchinei, Fischer e Kanzow [22] e [23] usam para resolver este problema a estratégia de colocá-lo como equivalente a um sistema de equações não lineares não diferenciável. Os métodos propostos são do tipo Newton e Newton inexatos em suas versões não diferenciáveis. Embora estas estratégias sejam implementaveis computacionalmente, os métodos usados para resolver estes problemas são muito especializados. Nossa estratégia tem a vantagem de permitir a aplicação de qualquer método de otimizaçãdos conhecido. Além disso, na nossa abordagem as exigência teóricas feitas ao Jacobiano da função F do problema original para se obter a equivalência com os pontos estacionários são iguais ou mais fracas que em qualquer uma das estratégias mencionadas acima.

(c) A Equivalência com o Mínimo Global

Antes de apresentar o teorema de equivalência, daremos uma definição que nos será útil.

Definição 2.1. *Dizemos que Ω satisfaz uma "constraint qualification" (ver [3]) se uma das seguintes condições é verdadeira:*

(i) *g_i são funções lineares para todo $i = 1, \ldots, m$;*
(ii) *(Condição de Slater). Se existe $z \in \Omega$, tal que*

$$\begin{array}{rcll} g_i(z) & < & 0 & \text{para } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ z_i & > & c_i & \text{para } i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2, \\ z_i & < & t_i & \text{para } i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3. \end{array}$$

Teorema 2.1 *Se Ω satisfaz uma "constraint qualification" e x_* é uma solução do $VIP(F, \Omega)$, então existem $z_*, y_* \in I\!R^m_+$, $u_* \in I\!R^q$, $v_* \in I\!R^{s_2}_+$, $r_* \in I\!R^{s_3 - s_1}$ tais que $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ é um minimizador global de (2.2) e $f(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) = 0$. Reciprocamente, se $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ é tal que $x_* \in \Omega_c$, $y_* \geq 0$, $z_* \geq 0$, $v_* \geq 0$, $r_* \geq 0$, e $f(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) = 0$ (i.e., um minimizador global de (2.2)), então x_* é uma solução do $VIP(F, \Omega)$.*

Demonstração. Se $x_* \in \Omega$, é solução do $VIP(F, \Omega)$, então para todo $w \in \Omega$, se cumpre

$$\langle F(x_*), w \rangle \geq \langle F(x_*), x_* \rangle.$$

Logo, x_* é o minimizador global do seguinte problema de programação linear

$$\text{Minimizar } \langle F(x_*), w \rangle \text{ sujeita a } w \in \Omega. \tag{2.3}$$

Dado que Ω satisfaz uma "constraint qualification", as condições de otimalidade do problema 2.3 cumprem-se, e são as seguintes: existem $z_*, y_* \in I\!R^m_+$, $u_* \in I\!R^q$, $v_* \in I\!R^{s_2}_+$, $r_* \in I\!R^{s_3 - s_1}_+$, tais que

$$F(x_*) + g'(x_*)^T y_* + A^T u_* - (v_*, 0)^T + (0, r_*, 0)^t = 0, \;\; x_* \in \Omega_c$$

$$g(x_*) = -z_*, \; Ax_* = b, \; y_*^T z_* = 0. \tag{2.4}$$

Deste modo , $f(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) = 0$, e dado que $f(x, y, z, u, v) \geq 0$, então $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ é um minimizador global do problema 2.2.

Reciprocamente, se $f(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) = 0$, com $x_* \in \Omega_c$, $z_*, y_* \in I\!R^m_+$, $u_* \in I\!R^q$, $v_* \in I\!R^{s_1}_+$, $r_* \in I\!R^{s_3 - s_1}_+$, claramente $x_* \in \Omega$ e se cumprem as condições de primeira ordem para o problema 2.3, em conseqüência, x_* é solução do $VIP(F, \Omega)$. **QED**

É importante notar que no caso da equivalência com o problema de otimização global, não é preciso exigir nenhuma condição sobre a função F do problema original. Com isto podemos dizer que a equivalência verifica-se com qualquer problema $VIP(F, \Omega)$, onde Ω cumpra uma "constraint qualification".

A condição da "constraint qualification" não pode ser removida, Isto fica claro no seguinte exemplo.

Exemplo 2.1: Consideremos $n = m = 1$, $q = s = 0$, $\rho_1 = \rho_3 = 1$, $g(x) = x^2$, $F(x) \equiv 1$. Aqui, o único ponto factível é $x = 0$ e o problema equivalente é:

$$\text{Minimizar } f(x,y,z) = (1 + 2xy)^2 + (x^2 + z)^2 + (yz)^p$$

$$\text{sujeita a } y \geq 0,\ z \geq 0,$$

e é claro que $f(0, y, z) \geq 1$, para todo $y, z \in I\!R_+$.

(c) Equivalência com os Pontos Estacionários

Os resultados de equivalência com os pontos estacionários serão dados para três casos diferentes.

Caso geral

Neste caso não colocaremos nenhuma condição sobre o conjunto Ω. O teorema de equivalência é o seguinte:

Teorema 2.2 *Se $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \in \Omega_c \times I\!R^m_+ \times I\!R^m_+ \times I\!R^q \times I\!R^{s_2}_+ \times I\!R^{s_1 - s_3}$ é um ponto estacionário de (2.2) com $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$ e Ω não vazio, se*

$$O^T \left[F'(x_*) + \sum_{i=1}^{m} [y_*]_i \nabla^2 g_i(x_*) \right] O > 0,$$

então x_* é a solução do VIP.

Demonstração. Seja $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ um ponto estacionário de (2.2). Chamaremos

$$H = F'(x_*) + \sum_{i=1}^{m} [y_*]_i \nabla^2 g_i(x_*), \tag{2.5}$$

$$w_1 = F(x_*) + g'(x_*)^T y_* + A^T u_* - (v_*, 0)^t + (0, r_*, 0)^t, \tag{2.6}$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{0} & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{0} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\hat{V}, \hat{C}, \hat{R}, \hat{T} \in I\!R^{n \times n}$, $V, C \in I\!R^{s_2 \times s_2}$, $R, T \in I\!R^{s_3 - s_1 \times s_3 - s_1}$, $\hat{0} \in I\!R^{s_1 \times s_1}$ e $C = diag(c)$, $V = diag(v_*)$,$R = diag(r)$ e $T = diag(t)$. Além disso, definiremos $Y \in I\!R^{m \times m}$, $Z \in I\!R^{m \times m}$, $X \in I\!R^{n \times n}$ da seguinte maneira:

$$Y = diag(y_*), \quad Z = diag(z_*), \quad X = diag(x_*),$$

e também

$$w_2 = g(x_*) + z_*, \tag{2.7}$$

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{m} ([y_*]_i [z_*]_i)^l, \quad \theta_2 = \sum_{i=1}^{s_2} (([x_*]_i - c_i)[v_*]_i)^l, \quad \theta_3 = \sum_{i=s_1}^{s_3} ((t_i - [x_*]_i)[r_*]_i)^l.$$

As condições KKT são as seguintes:

Existem $\alpha \in I\!R_+^{s_2}$, $\beta \in I\!R_+^{s_2}$, $\eta \in I\!R_+^{s_3-s_1}$, $\nu \in I\!R_+^{s_3-s_1}$, $\gamma \in I\!R_+^m$, $\mu \in I\!R_+^m$, tais que

$$2Hw_1 + 2\rho_1 g'(x_*)^T w_2 + 2\rho_2 A^T(Ax_* - b) + pl\rho_3\theta_2^{p-1}((X - \hat{C})\hat{V})^{l-1}(v_*, 0)^t$$

$$- pl\rho_3\theta_3^{p-1}((\hat{T} - X)\hat{R})^{l-1}(0, r_*, 0)^t - (\alpha, 0)^t + (0, \eta, 0)^t = 0, \qquad (2.8)$$

$$2g'(x_*)w_1 + pl\rho_3\theta_1^{p-1}(YZ)^{l-1}z_* - \gamma = 0, \qquad (2.9)$$

$$2\rho_1 w_2 + pl\rho_3\theta_1^{p-1}(YZ)^{l-1}y_* - \mu = 0, \qquad (2.10)$$

$$Aw_1 = 0, \qquad (2.11)$$

$$- 2\bar{w}_1 + pl\rho_3\theta_2^{p-1}((\bar{X} - C)V)^{l-1}(\bar{x}_* - c) - \beta = 0 \qquad (2.12)$$

$$2\tilde{w}_1 + pl\rho_3\theta_3^{p-1}((T - \tilde{X})R)^{l-1}(t - \tilde{x}_*) - \nu = 0 \qquad (2.13)$$

$$(\bar{x}_* - c)^T\alpha = 0, \qquad (2.14)$$

$$(t - \tilde{x}_*^T)\eta = 0, \qquad (2.15)$$

$$y_*^T\gamma = 0, \qquad (2.16)$$

$$z_*^T\mu = 0, \qquad (2.17)$$

$$v_*^T\beta = 0, \qquad (2.18)$$

$$r_*^T \nu = 0, \tag{2.19}$$

$$x \in \Omega_c, \tag{2.20}$$

$$\bar{x}_* \geq 0, v_* \geq 0, y_* \geq 0, z_* \geq 0, r_* \geq 0, \eta \geq 0,$$

$$\nu \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \mu \geq 0. \tag{2.21}$$

Por (2.9) e (2.10), temos que

$$2g'(x_*)w_1 = -pl\rho_3\theta_1^{p-1}(YZ)^{l-1}z_* + \gamma$$

e

$$2\rho_1 w_2 = -pl\rho_3\theta_1^{p-1}(YZ)^{l-1}y_* + \mu.$$

Desta forma, por (2.16) e (2.17),

$$4\rho_1 w_1^T g'(x_*)^T w_2 =$$

$$[-pl\rho_3\theta_1^{p-1}(YZ)^{l-1}z_* + \gamma]^T[-pl\rho_3\theta_1^{p-1}(YZ)^{l-1}y_* + \mu]$$
$$= p^2l^2\rho_3^2\theta_1^{2p-2}y_*^T(YZ)^{2l-2}z_* + \gamma^T\mu. \tag{2.22}$$

Por outro lado, por (2.12) e (2.13), obtemos

$$2\bar{w}_1 = pl\rho_3\theta_2^{p-1}((\bar{X} - C)V)^{l-1}(\bar{x}_* - c) - \beta, \tag{2.23}$$

$$2\tilde{w}_1 = -pl\rho_3\theta_3^{p-1}((T - \tilde{X})R)^{l-1}(t - \tilde{x}_*) + \nu. \tag{2.24}$$

Usando (2.14), (2.15), (2.18), (2.19) (2.23), (2.24) e (2.21), temos que

$$2w_1^T(pl\rho_3\theta_2^{p-1}((X - \hat{C})\hat{V})^{l-1}(v_*, 0)^t - (\alpha, 0)^t))$$

$$+2w_1^T(-pl\rho_3\theta_3^{p-1}((\hat{T} - X)\hat{R})^{l-1}(0, r_*, 0)^t + (0, \eta, 0)^t)) =$$
$$2\bar{w}_1^T(pl\rho_3\theta_2^{p-1}((\bar{X} - C)V)^{l-1}v_* - \alpha)$$
$$-2\tilde{w}_1^T(pl\rho_3\theta_3^{p-1}((T - \tilde{X})R)^{l-1}r_* + \eta) =$$
$$p^2l^2\theta_2^{2p-2}(\bar{x}_* - c)^T((\bar{X} - C)V)^{2l-2}v_* + \alpha^T\beta +$$

$$p^2 l^2 \theta_3^{2p-2}(t-\tilde{x}_*)^T((T-\tilde{X})R)^{2l-2}r_* + \eta^T\nu. \tag{2.25}$$

Pre-multiplicando (2.8) por $2w_1^T$, e usando (2.22) e (2.25), obtemos

$$4w_1^T H w_1 + p^2 l^2 \rho_3^2 \theta_1^{2p-2} y_*^T (YZ)^{2l-2} z_* + \gamma^T \mu$$

$$+p^2 l^2 \theta_2^{2p-2}(\bar{x}_* - c)^T((\bar{X}-C)V)^{2l-2}v_* + \alpha^T\beta +$$

$$p^2 l^2 \theta_3^{2p-2}(t-\tilde{x}_*)^T((T-\tilde{X})R)^{2l-2}r_* + \eta^T\nu = 0.$$

É claro que

$$(\bar{x}_* - c)^T((\bar{X}-C)V)^{2l-2}v_* = \sum_{i=1}^{s_2}([x_* - c]_i[v_*]_i)^{2l-1},$$

$$(t-\tilde{x}_*)^T((T-\tilde{X})V)^{2l-2}r_* = \sum_{i=s_1}^{s_3}([t-x_*]_i[r_*]_i)^{2l-1},$$

$$y_*^T(YZ)^{2l-2}z_* = \sum_{i=1}^{m}([y_*]_i[z_*]_i)^{2l-1}.$$

Deste modo, por (2.11), (2.21) e $O^T H O \geq 0$,

$$w_1^T H w_1 = 0, \tag{2.26}$$

$$(\sum_{i=1}^{m}([y_*]_i[z_*]_i)^l)^{2p-2}\sum_{i=1}^{m}([y_*]_i[z_*]_i)^{2l-1} = 0, \tag{2.27}$$

$$(\sum_{i=1}^{s_2}([x_* - c]_i[v_*]_i)^l)^{2p-2}\sum_{i=1}^{s_2}([x_* - c_i]_i[v_*]_i)^{2l-1} = 0, \tag{2.28}$$

$$(\sum_{i=s_1}^{s_3}([t-x_*]_i[r_*]_i)^l)^{2p-2}\sum_{i=s_1}^{s_3}([t-x_*]_i[r_*]_i)^{2l-1} = 0, \tag{2.29}$$

$$\mu^T\gamma = 0 \quad \alpha^T\beta = 0 \quad \eta^T\nu = 0. \tag{2.30}$$

Assim por (2.27), (2.28) e levando em conta (2.21) fica (ainda para $p = l = 1$)

$$y_*^T z_* = 0, \tag{2.31}$$

$$(\bar{x}_* - c)^T v_* = 0, \tag{2.32}$$

$$(t - \tilde{x}_*)^T r_* = 0. \tag{2.33}$$

Dado que, $O^THO > 0$, (2.11) e (2.26) implicam que

$$w_1 = 0. \tag{2.34}$$

Por (2.7), (2.8), e (2.34), temos:

$$\begin{aligned} 2\rho_1 g'(x_*)^T(g(x_*) + z_*) + 2\rho_2 A^T(Ax_* - b) \\ + pl\rho_3\theta_2^{p-1}((X - \hat{C})\hat{V})^{l-1}(v_*, 0)^t - (\alpha, 0)^t + \\ - pl\rho_3\theta_3^{p-1}((\hat{T} - X)\hat{R})^{l-1}(0, r_*, 0)^t + (0, \eta, 0)^t = 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Assim, dado que $p + l > 2$, por (2.32) e (2.33), obtemos

$$2\rho_1 g'(x_*)^T(g(x_*) + z_*) + 2\rho_2 A^T(Ax_* - b) - (\alpha, 0)^t + (0, \eta, 0) = 0. \tag{2.36}$$

Agora, por (2.7), (2.10), (2.31) e $p + l > 2$, temos:

$$2\rho_1[g(x_*) + z_*] - \mu = 0. \tag{2.37}$$

Definamos

$$\mathcal{K} = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid [z_*]_i = 0\}.$$

Se $i \notin \mathcal{K}$, então $[z_*]_i \neq 0$. Assim, por (2.17), $\mu_i = 0$. Deste modo, por (2.37),

$$g_i(x_*) + [z_*]_i = 0, \quad \text{para todo } i \notin \mathcal{K}. \tag{2.38}$$

Ainda mais, por (2.37),

$$g_i(x_*) = \frac{\mu_i}{2\rho_1} \geq 0 \text{ for all } i \in \mathcal{K}. \tag{2.39}$$

Por (2.36) e (2.38), obtemos:

$$2\rho_1 \sum_{i\in\mathcal{K}} g_i(x_*)\nabla g_i(x_*) + 2\rho_2 A^T(Ax_* - b) - (\alpha, 0)^t + (0, r_*, 0)^t = 0. \quad (2.40)$$

Seja x_0 um ponto arbitrário do conjunto não vazio Ω. Pre-multiplicando (2.40) por $x_* - x_0$, obtemos:

$$2\rho_1 \sum_{i\in\mathcal{K}} g_i(x_*)g_i'(x_*)(x_* - x_0) + 2\rho_2\|Ax_* - b\|^2 - (\bar{x}_* - \bar{x}_0)^T\alpha + (\tilde{x}_* - \tilde{x}_0)^T\eta = 0.$$

Agora por (2.14) e (2.15) e (2.20), resulta que

$$-(\bar{x}_* - \bar{x}_0)^T\alpha + (\tilde{x}_* - \tilde{x}_0)^T\eta = -((\bar{x}_* - c) + (c - \bar{x}_0))^T\alpha + ((\tilde{x}_* - t) + (t - \tilde{x}_0))^T\eta =$$

$$(\bar{x}_0 - c)^T\alpha + (t - \tilde{x}_0)^T\eta \geq 0.$$

Desta forma

$$2\rho_1 \sum_{i\in\mathcal{K}} g_i(x_*)g_i'(x_*)(x_* - x_0) + 2\rho_2\|Ax_* - b\|^2 \leq 0. \quad (2.41)$$

Mas, como as $g_i(x)$ são convexas , temos que

$$g_i'(x_*)(x_* - x_0) \geq g_i(x_*) - g_i(x_0) \text{ para todo } i.$$

Assim, por (2.41), levando em conta que $g_i(x_*) \geq 0$ se $i \in \mathcal{K}$,

$$2\rho_1 \sum_{i\in\mathcal{K}} g_i(x_*)[g_i(x_*) - g_i(x_0)] + 2\rho_2\|Ax_* - b\|^2 \leq 0.$$

Deste modo, por (2.39), e dado que $g_i(x_0) \leq 0$ para todo i, temos que

$$2\rho_1 \sum_{i\in\mathcal{K}} g_i(x_*)^2 + 2\rho_2\|Ax - b\|^2 \leq 2\rho_1 \sum_{i\in\mathcal{K}} g_i(x_*)g_i(x_0) \leq 0.$$

Portanto,

$$\|Ax_* - b\| = 0, \quad (2.42)$$

e $g_i(x_*) = 0$ para todo $i \in \mathcal{K}$. Isto implica que $g_i(x_*) + [z_*]_i = 0$ para todo $i \in \mathcal{K}$. Assim, por (2.38),

$$g(x_*) + z_* = 0. \tag{2.43}$$

Logo, usando (2.6), (2.34), (2.43), (2.42), (2.31) e (2.32) (2.33), temos que $f(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*) = 0$, com o que fica provado o proposto. **QED**

Temos que observar que a condição $F'(x) > 0$, não garante a existência de solução do problema $VIP(F, \Omega)$. Para mostrar isto apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. Seja $\Omega = I\!R_+$ e $F(x) = -e^{-x}$, neste caso $F'(x) = e^{-x} > 0$ para todo $x \in I\!R$, e o $NCP(F)$ não tem solução.

O Teorema 2.2 nos diz que se $F'(x) > 0$ e o problema 2.2 tem um ponto estacionário, a solução do $VIP(F, \Omega)$ existe e pode ser achada usando nossa estratégia. Mas o fato de $F'(x)$ ser definida positiva, ainda que o $VIP(F, \Omega)$ tenha solução, não implica a existência de um ponto estacionário do problema 2.2, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2: Seja o $VIP(F, \Omega)$, com $F(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $n = m = 1$ e $q = s = 0$. Tomemos no problema de otimização associado $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ e $l = 1$, $p = 2$. O $VIP(F, \Omega)$ tem uma única solução, no único ponto factível $x = 0$.

Neste caso a função de mérito é:

$$f(x, y, z) = (x + 1 + 2xy)^2 + (x^2 + z)^2 + (zy)^2,$$

o problema de otimização equivalente é

$$\text{Minimizar } f(x, y, z), \ \text{ sujeita a } \ y \geq 0, \ z \geq 0.$$

As condições Karush-Kuhn-Tucker são:

$$2(1 + 2y)(x + 1 + 2xy) + 2x(x^2 + z) = 0, \tag{2.44}$$

$$2x(x + 1 + 2xy) + p(zy)^{p-1}z - \alpha = 0, \tag{2.45}$$

$$2(x^2 + z) + p(zy)p - 1y - \beta = 0, \tag{2.46}$$

$$y\alpha = 0, \tag{2.47}$$

$$z\beta = 0, \tag{2.48}$$

$$y \geq 0,\ z \geq 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0. \tag{2.49}$$

Por (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48), temos

$$4x(x+1+2xy)(x^2+z) = p^2(zy)^{2p-1} + \alpha\beta. \tag{2.50}$$

Premultiplicando (2.44), por $2(x+1+2xy)$, e considerando (2.50), obtemos

$$4(1+2y)(x+1+2xy)^2 + p^2(zy)^{2p-1} + \alpha\beta = 0. \tag{2.51}$$

Levando em conta (2.49), temos $(1+2y) > 0$, então por (2.51), temos

$$x + 1 + 2xy = 0, \tag{2.52}$$

$$zy = 0 \quad \alpha\beta = 0.$$

Por (2.52) e (2.44), obtemos

$$x(x^2+z) = 0. \tag{2.53}$$

Então por (2.53), temos que $x = 0$, mas isto é contraditório com (2.52), de onde fica claro que o problema associado não tem pontos estacionários.

A situação em que $p = l = 1$, é interessante de ser analisada porque além de simplificar o problema de otimização associado, no caso em que a função F e as restrições do $VIP(F,\Omega)$ sejam lineares, o problema de otimização associado fica um problema de programação quadrática com restrições simples(caixa) e isto permite analisá-lo com estratégias de otimização global.

Teorema 2.3 *Se* $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \in I\!R^n \times I\!R^m_+ \times I\!R^m_+ \times I\!R^q \times I\!R^{s_1}_+ \times I\!R^{s_3-s_1}_+$ *é um ponto estacionário de (2.2), com* $p = l = 1$,

$$O^T \left[F'(x_*) + \sum_{i=1}^{m} [y_*]_i \nabla^2 g_i(x_*) \right] O > 0,$$

e $\nabla g_1(x_*), \ldots, \nabla g_m(x_*), a_1, \ldots, a_q, e_{i_1}, \ldots, e_{i_\ell}$ *são linearmente independentes, onde* $A^T = (a_1, \ldots, a_q)$, *e* $\{i_1, \ldots, i_\ell\} \in \mathcal{E}$, *onde*

$$\mathcal{E} = \{j \in \mathcal{I} \mid [x_*]_j = c_j \text{ se } j \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \text{ ou } [x_*]_j = t_j \text{ se } j \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3\},$$

então x_* *é a solução do problema* $VIP(F, \Omega)$.

Demonstração. As equações (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34), são obtidas da mesma forma que no Teorema 2.2. Agora por (2.35) com $p = l = 1$, temos que

$$2\rho_1 g'(x_*)^T(g(x_*) + z_*) + 2\rho_2 A^T(Ax_* - b) +$$

$$\rho_3(v_*, 0)^t - \rho_3(0, r_*, 0) - (\alpha, 0)^t + (0, \eta, 0) = 0. \tag{2.54}$$

Então, se $[\bar{x}_* - c]_i > 0$ com $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, temos, por (2.32), que $[v_*]_i = 0$ e, por (2.14), que $\alpha_i = 0$. Se $[t - \bar{x}_*]_i > 0$ com $i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$, temos, por (2.33), que $[r_*]_i = 0$ e por (2.15), que $\eta_i = 0$, de onde, chamando

$$\rho_3[v_*]_i - \alpha_i = \tau_i \quad - \rho_3[r_*]_i + \eta_i = \pi_i,$$

temos

$$\rho_3(v_*, 0)^t - (\alpha, 0)^t - \rho_3(0, r_*, 0)^t + (0, \eta, 0)^t =$$

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} [\tau + \pi]_i e_i. \tag{2.55}$$

Substituindo (2.55) em (2.54), obtemos

$$[\nabla g_1(x_*), \ldots, \nabla g_m(x_*), a_1, \ldots, a_q, e_{i_1}, \ldots, e_{i_\ell}] \begin{pmatrix} 2\rho_1(g(x_*) + z_*) \\ 2\rho_2(Ax_* - b) \\ [\tau - \pi]_{i_1} \\ \vdots \\ [\tau - \pi]_{i_\ell} \end{pmatrix} = 0. \tag{2.56}$$

Pela independência linear dos vetores considerados na hipótese, fica

$$z_* + g(x_*) = 0, \quad Ax_* - b = 0.$$

Isto completa a demonstração. **QED**

Observe que se o conjunto é uma caixa ou $I\!R^n_+$ como no importante problema da complementaridade, as hipóteses de independência linear pedidas pelo teorema são satisfeitas.

O exemplo que damos a seguir mostra que as hipóteses de independência linear pedidas no Teorema 2.3 não podem ser removidas.

Exemplo 2.4. Seja

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 3 \\ x_2 + 3 \end{pmatrix}$$

e o conjunto

$$\Omega = \{x \in I\!R^2 \mid x_1 - x_2 - 1 = 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Note que $F'(x_1, x_2) = I$ e com isto $F(x_1, x_2)$ é fortemente monótona de módulo 1. O conjunto é não vazio e cumpre uma condição de Slater em $(x_1, x_2) = (2, 1)$. O $VIP(F, \Omega)$, tem solução única em $([x_*]_1, [x_*]_2) = (1, 0)$.

Agora, a função de mérito com $p = l = 1$, $\rho_2 = \rho_3 = 1$ é a seguinte:

$$f(x_1, x_2, z_1, z_2, u) = (x_1 + 3 + u - z_1)^2 + (x_2 + 3 - u - z_2)^2 +$$

$$(x_1 - x_2 - 1)^2 + x_1 z_1 + x_2 z_2.$$

O problema de otimização equivalente é:

$$\min_{x \geq 0, z \geq 0} f(x, u, z) \tag{2.57}$$

O ponto $(x_1, x_2, z_1, z_2, u) = (0, 0, 3, 3, 0)$, é um ponto KKT do problema (2.57), já que:

$$2(x_1 + 3 + u - z_1) + 2(x_1 - x_2 - 1) + z_1 = 2(3 - 3) + 2(-1) + 3 = 1,$$

$$2(x_2 + 3 - u - z_2) - 2(x_1 - x_2 - 1) + z_2 = 2(3 - 3) - 2(-1) + 3 = 5,$$

$$2(x_1+3+u-z_1)+2(x_1+3-u-z_2)=2(3-3)+2(3-3)=0,$$
$$-2(x_1+3+u-z_1)+x_1=-2(3-3)+0=0,$$
$$-2(x_2+3+u-z_2)+x_2=-2(3-3)+0=0.$$

Mas $(0,0)$ não é solução do $VIP(F,\Omega)$, já que não é factível.

Caso em que as restrições lineares de Ω geram um politopo limitado

Este caso é uma generalização do trabalho de Friedlander, Martínez e Santos [40].

Definamos o seguinte conjunto:

$$\Upsilon=\{x\in I\!R^n \mid Ax=b,\ \ x\in\Omega_c\}.$$

Agora enunciaremos o teorema de equivalência.

Teorema 2.4 *Seja Υ limitado e não vazio, $(x_*,y_*,z_*,u_*,v_*,r_*)\in I\!R^n\times I\!R^m_+\times I\!R^m_+\times I\!R^q\times I\!R^{s_1}\times I\!R^{s_3-s_1}$ um ponto estacionário de (2.2) com $p\geq 1, l\geq 1,\ \ p+l>2$,*

$$O^T\left[F'(x_*)+\sum_{i=1}^m[y_*]_i\nabla^2 g_i(x_*)\right]O\geq 0,$$

e

$$E^T\left[F'(x_*)+\sum_{i=1}^m[y_*]_i\nabla^2 g_i(x_*)\right]E>0.$$

Então , x_* é a solução do $VIP(F,\Omega)$.

Demonstração. Como no Teorema 2.2, obtemos (2.6)–(2.33). Por (2.11), w_1 está no núcleo de A. Por (2.23) e (2.24), levando em conta (2.21),(2.32) e (2.33), obtemos

$$2[w_1]_i=-\beta_i\leq 0\ \text{ se }\ i\in\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2,$$

$$2[w_1]_i = \nu_i \geq 0 \text{ se } i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3.$$

Com isto fica

$$[w_1]_i \leq 0 \text{ se } i \in \mathcal{I}_1,$$

$$[w_1]_i = 0 \text{ se } i \in \mathcal{I}_2,$$

$$2[w_1]_i \geq 0 \text{ se } i \in \mathcal{I}_3.$$

Já que Υ é não vazio, escolhamos $x_0 \in \Upsilon$. Se fazemos $x_\lambda = x_0 - \lambda w_1^T$ é claro que $x_\lambda \in \Upsilon$ para todo $\lambda \geq 0$, dado que

$$[x_\lambda]_i = [x_0]_i - \lambda[w_1]_i \geq [c]_i \text{ se } i \in \mathcal{I}_1,$$

$$[x_\lambda]_i = [x_0]_i \text{ se } i \in \mathcal{I}_2,$$

$$[x_\lambda]_i = [x_0]_i - \lambda[w_1]_i \leq [t]_i \text{ se } i \in \mathcal{I}_3,$$

$$Ax_\lambda = b.$$

Logo se $[w_1]_i \neq 0$ com $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3$, o conjunto Υ não é limitado, já que $x_\lambda \in \Upsilon$, o qual é uma contradição. Portanto, w_1 está no nucleo de A e $[w_1]_1 = \ldots = [w_1]_{s_3} = 0$. Então w_1 é uma combinação linear das colunas de E, e dado que $E^T H E > 0$, por (2.26), obtemos

$$w_1 = 0$$

Logo, a demonstração se segue como no Teorema 2.2. **QED**

Caso em que a função F é linear e Ω é um politopo

Tomaremos a função $F(x) = Mx + h$ e o seguinte conjunto:

$$\Omega = \{x \in I\!R^n \mid Bx \leq d, \;\; Ax = b, \;\; x \in \Omega_c\}. \tag{2.58}$$

Em [41], Friedlander, Martínez e Santos estabeleceram a equivalência com os pontos estacionários para o LCP, exigindo a monotonia da função F. O que fazemos nesta seção é estender este resultado para o caso geral. Enunciamos o teorema de equivalência neste caso:

Teorema 2.5 *Sejam Ω como em (2.58), $F(x) = Mx + h$ e suponha que $VIP(F,\Omega)$ tem solução. Seja $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \in I\!R^n \times I\!R^m_+ \times I\!R^m_+ \times I\!R^q \times I\!R^{s_2}_+ \times I\!R^{s_1-s_3}$ um ponto estacionário de (2.2) com $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$ e*

$$O^T M O \geq 0.$$

Então x_* é solução do $VIP(F,\Omega)$.

Demonstração. Fazendo $F(x) = Mx + h$, $g(x) = Bx - d$, temos que $H = M^T$, e $g'(x) = B$. As expressões (2.2) (2.8)-(2.33) são obtidas da mesma forma que no Teorema 2.2, e como $p+l > 2$, as condições KKT ficam

$$2M^T w_1 + 2\rho_1 B^T w_2 + 2\rho_2 A^T(Ax_* - b) - (\alpha, 0)^t + (0, \eta, 0)^t = 0,$$

$$2Bw_1 - \gamma = 0,$$

$$2\rho_1 w_2 - \mu = 0,$$

$$Aw_1 = 0,$$

$$-2\bar{w}_1 - \beta = 0,$$

$$2\tilde{w}_1 - \nu = 0,$$

$$(\bar{x}_* - c)^T \alpha = 0,$$

$$(t - \tilde{x}_*^T)\eta = 0,$$

$$y_*^T \gamma = 0,$$

$$z_*^T \mu = 0,$$

$$v_*^T \beta = 0,$$

$$r_*^T \nu = 0,$$

$$x \in \Omega_c,$$

$$\bar{x}_* \geq 0, v_* \geq 0, y_* \geq 0, z_* \geq 0, r_* \geq 0, \eta \geq 0, \nu \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \mu \geq 0.$$

Estas são as condições KKT do seguinte problema convexo

$$\text{Mininimizar} \quad \|Mx + h + B^T y + A^T u - (v, 0)^t + (0, r, 0)^t\|^2$$

$$+\rho_1\|z + Bx + d\|^2 + \rho_2\|Ax - b\|^2$$

$$\text{sujeita a} \begin{cases} y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \\ v & \geq & 0 \\ r & \geq & 0 \\ x & \in & \Omega_c \end{cases} \tag{2.59}$$

Dado que $VIP(F,\Omega)$ tem solução, o problema (2.59) tem solução com valor nulo da função objetivo. Então, já que $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ é também solução de (2.59), o valor da função objetivo neste ponto é zero, de onde

$$w_1 = 0$$

A prova que x_* é factível segue-se como no Teorema 2.2. Com isto temos $f(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) = 0$ com $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \in I\!R^n \times I\!R^m_+ \times I\!R^m_+ \times I\!R^q \times I\!R^{s_2}_+ \times I\!R^{s_1-s_3}$ e $x_* \in \Omega$. Pelo Teorema 2.1 x_* é uma solução do $VIP(F,\Omega)$. **QED**

Os Teoremas 2.4 e 2.5, mostram que se colocamos as condições de que o conjunto Ω seja limitado ou que a F seja linear e Ω um politopo, pode-se estender os resultados quando a função F do $VIP(F,\Omega)$ é monótona. Mas esta extensão não é válida se a função F é não linear e o conjunto Ω ilimitado. O seguinte exemplo mostra isso.

Exemplo 2.5. Seja

$$F(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ (x-1)^n - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

com $n \geq 2$

Esta função é derivável até ordem $n-1$, ela é convexa e monótona.

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ n(x-1)^{n-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

A função de mérito para o problema NCP(F) é a seguinte:

$$f(x,z) = \begin{cases} (-1-z)^2 + (xz)^\alpha & x < 1 \\ ((x-1)^n - 1 - z)^2 + (xz)^\alpha & x \geq 1 \end{cases}$$

com $\alpha = p, l \geq 1$. Nosso problema de otimização equivalente é

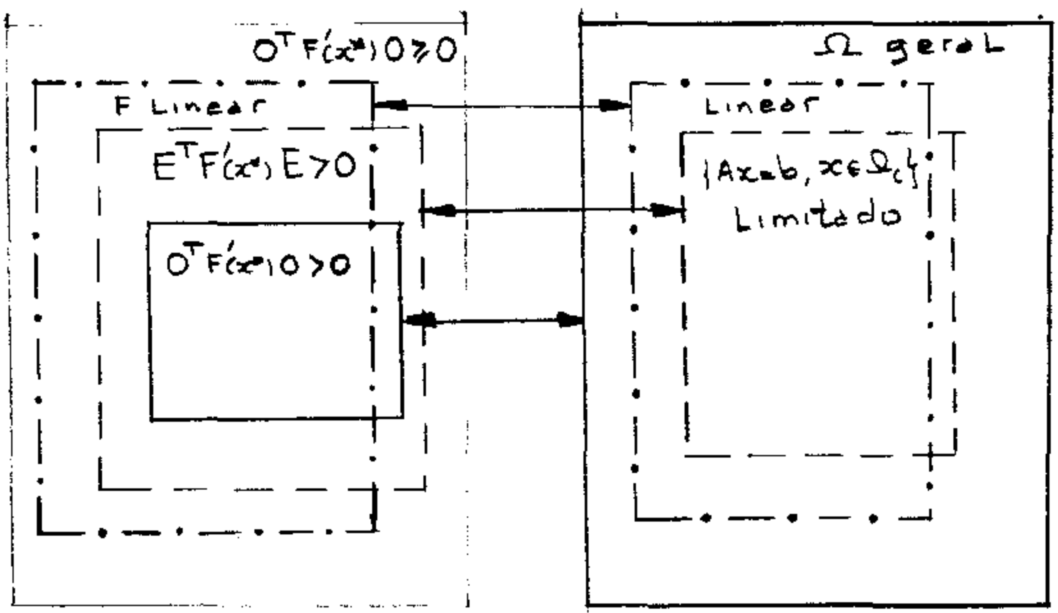
$$\text{Minimizar } f(x,z), \text{ sujeito a } x, z \geq 0$$

O ponto $(0,0)$ é um ponto KKT, já que

$$\begin{gathered} \alpha x^{\alpha-1} z^\alpha = 0 \\ 2(1-z) + \alpha x^\alpha z^{\alpha-1} = 2 > 0. \end{gathered}$$

Mas este ponto não é solução do $NCP(F)$.

O seguinte diagrama ilustra as relações entre as condições pedidas à função F do $VIP(F,\Omega)$ e os conjuntos Ω onde o $VIP(F,\Omega)$ será resolvido.



2.3 Equivalência com um problema de otimização com restrições lineares (Politopo)

Uma das possibilidades ao formularnos o problema de otimização associado é que as restrições sejam um politopo, Assim o problema associado fica mais complexo de se resolver, mas é sempre preferivel trabalhar com restrições lineares de que não lineares. A existência de algoritmos especializados em resolver problemas com restrições lineares (ver [50]) é uma boa razão para estudar nos as vantagens teóricas desta estratégia.

A função de mérito e o problema de otimização equivalente neste caso são:

(a) A função de Mérito

A função de mérito é $f : \Omega_c \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{s_1}_+ \to \mathbb{R}_+$, e está definida da seguinte maneira:

$$f(x,y,z,u,v,r) = \|F(x)+g'(x)^T y + A^T u - (v,0)^t + (0,r,0)^t\|^2 + \rho_1\|g(x)+z\|^2$$

$$+ \rho_3 \left[\left(\sum_{i=1}^{m} (z_i y_i)^l \right)^p + \left(\sum_{i=1}^{s_2} ((x_i - c_i)v_i)^l \right)^p + \left(\sum_{i=s_1}^{s_3} ((t_i - x_i)r_i)^l \right)^p \right], \quad (2.60)$$

onde $\rho_1, \rho_3, p > 0, l > 0$.

(b) O Problema de Otimização Equivalente

$$\text{Minimizar } f(x,y,z,u,v,r)$$

$$\text{sujeita a} \left\{ \begin{array}{rcl} y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \\ v & \geq & 0 \\ r & \geq & 0 \\ x & \in & \Omega_c \\ Ax & = & b \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Note que a expressão $\|Ax - b\|$ foi retirada da função de mérito, e incorporada nas restrições, que neste caso definem um politopo.

O teorema de equivalência com o mínimo global demonstra-se de forma idêntica ao Teorema 2.1.

(c) Equivalência com os pontos estacionários

Daremos os resultados para dois casos:

Caso Geral

Teorema 2.6 *Se* $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \in \Omega_c \times I\!R^m_+ \times I\!R^m_+ \times I\!R^q \times I\!R^{s_1}_+ \times R^{s_3-s_1}_+$ *é um ponto estacionário de (2.2) com* $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$ *e* Ω *e não vazio, se*

$$O^T \left[F'(x_*) + \sum_{i=1}^{m} [y_*]_i \nabla^2 g_i(x_*) \right] O > 0,$$

então x_* *é a solução do* $VIP(F, \Omega)$.

Demonstração. A demonstração segue como no Teorema 2.2, com as seguintes modificações:

Dado que na função de mérito não existe mais o termo $\|Ax - b\|$, as condições KKT são as mesmas no Teorema 2.2, exceto por (2.8), que fica

$$2Hw_1 + 2\rho_1 g'(x_*)^T w_2 + A^T\lambda + pl\rho_3\theta_2^{p-1}((X - \hat{C})\hat{V})^{l-1}(v_*, 0)^t$$
$$- pl\rho_3\theta_3^{p-1}((\hat{T} - X)\hat{R})^{l-1}(0, r_*, 0)^t - (\alpha, 0)^t + (0, \eta, 0)^t = 0, \qquad (2.62)$$

onde $\lambda \in I\!R^q$ são os multiplicadores da restrição $Ax = b$. Esta restrição também tem que ser acresentada como:

$$Ax_* = b.$$

A demonstração segue como no Teorema 2.2 até a (2.34). Logo (2.35) fica

$$2\rho_1 g'(x_*)^T (g(x_*) + z_*) + A^T\lambda$$

$$+pl\rho_3\theta_2^{p-1}((X-\hat{C})\hat{V})^{l-1}(v_*,0)^t-(\alpha,0)^t+$$
$$-pl\rho_3\theta_3^{p-1}((\hat{T}-X)\hat{R})^{l-1}(0,r_*,0)^t+(0,\eta,0)^t=0. \tag{2.63}$$

Por (2.31), (2.32) e (2.33), temos que (2.63) fica

$$2\rho_1 g'(x_*)^T(g(x_*)+z_*)+A^T\lambda-(\alpha,0)+(0,\eta,0)=0. \tag{2.64}$$

Com um raciocínio idêntico ao do Teorema 2.2, temos que (2.64) fica

$$2\rho_1\sum_{i\in K} g_i(x_*)\nabla g_i(x_*)A^T\lambda-(\alpha,0)^t+(0,\eta,0)=0. \tag{2.65}$$

Agora, se x_0 um ponto arbitrário do conjunto não vazio Ω, é claro que x_*-x_0 está no nucleo de A. Pre-multiplicando (2.65) por x_*-x_0, obtemos:

$$2\rho_1\sum_{i\in I} g_i(x_*)g_i'(x_*)(x_*-x_0)-(\bar{x}_*-\bar{x}_0)^T\alpha+(\hat{x}_*-\hat{x}_0)\eta=0.$$

Desta forma, fazendo o mesmo que no Teorema 2.2, obtemos o resultado proposto. **QED**

Também aqui mostraremos os resultados de equivalência para $p=l=1$.

Teorema 2.7 *Se* $(x_*,y_*,z_*,u_*,v_*,r_*)\in I\!R^n\times I\!R^m_+\times I\!R^m_+\times I\!R^q\times I\!R^{s_1}_+\times I\!R^{s_3-s_1}_+$ *é um ponto estacionário de (2.2), com* $p=l=1$*,*

$$O^T\left[F'(x_*)+\sum_{i=1}^m[y_*]_i\nabla^2 g_i(x_*)\right]O>0,$$

e $\nabla g_1(x_*),\ldots,\nabla g_m(x_*),a_1,\ldots,a_q,e_{i_1},\ldots,e_{i_\ell}$ *são linearmente independentes, onde* $A^T=(a_1,\ldots,a_q)$*, e*

$$\{i_1,\ldots,i_\ell\}=\{j\in\mathcal{I}\mid[x_*]_j=c_j \text{ se } j\in\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2 \text{ ou } [x_*]_j=t_j \text{ se } j\in\mathcal{I}_2\cup\mathcal{I}_3\}$$

Então x_* *é a solução do problema* $VIP(F,\Omega)$.

Demonstração. Até (2.34) a prova é igual à do Teorema 2.2, logo (2.35) fica

$$2\rho_1 g'(x_*)^T(g(x_*)+z_*)+A^T\lambda\rho_3(v_*,0)^t-\rho_3(0,r_*,0)^t-(\alpha,0)^T+(0,\eta,0)^t=0.$$

Agora com o mesmo raciocínio do Teorema 2.3, segue-se a demonstração.
QED

Os outros teoremas da secção anterior, no caso da equivalência com o problema de otimização com restrições simples, podem ser demonstrados com as mesmas hipóteses.

2.4 Caso em que Ω é uma caixa

Trabalharemos com o conjunto

$$\Omega_c=\{x\in I\!R^n \mid x_i\geq c_i,\ i\in\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2,\ x_i\leq t_i,\ i\in\mathcal{I}_2\cup\mathcal{I}_3\}.$$

O fato de trabalhar com uma caixa, faz com que as exigências feitas à função F do problema original para estabelecer a equivalência com os pontos estacionários sejam menores.

Para este caso particular a função de mérito e o problema de otimização ficam:

$$f(x,v,r)=\|F(x)-(v,0)^t+(0,r,0)^t\|^2$$

$$+\rho_3\left[\left(\sum_{i=1}^{s_2}((x_i-c_i)v_i)^l\right)^p+\left(\sum_{i=s_1}^{s_3}((t_i-x_i)r_i)^l\right)^p\right],$$

$$\min_{x\in\Omega_c,v,r\geq 0} f(x,v,r). \tag{2.66}$$

Os resultados de equivalência com os pontos estacionários serão dados para três casos diferentes de acordo com as propriedades de $F(x)$ e do conjunto Ω_c.

Caso $F(x)$ não linear

Neste caso o teorema de equivalência com o ponto estacionário é o seguinte:

Teorema 2.8 *Se (x_*, v_*, r_*) é um ponto estacionário de (2.66) com $p \geq 1$, $l \geq 1$ e $F'(x_*)$ é uma P-matriz, então x_* é solução do $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Seja (x_*, v_*, r_*) um ponto estacionário de (2.66). As condições KKT ficam:

Existem $\alpha \in I\!R_+^{s_1}, \beta \in I\!R_+^{s_1}, \eta \in I\!R_+^{s_2-s_1}, \nu \in I\!R_+^{s_3-s_1}$ tais que

$$2F'(x_*)w_1 + pl\rho_3\theta_2^{p-1}((X - \hat{C})\hat{V})^{l-1}(v_*, 0)^t$$

$$- pl\rho_3\theta_3^{p-1}((\hat{T} - X)\hat{R})^{l-1}(0, r_*, 0)^t - (\alpha, 0)^t + (0, \eta, 0)^t = 0, \tag{2.67}$$

$$- 2\bar{w}_1 + pl\rho_3\theta_2^{p-1}((\bar{X} - C)V)^{l-1}(\bar{x}_* - c) - \beta = 0, \tag{2.68}$$

$$2\tilde{w}_1 + pl\rho_3\theta_3^{p-1}((T - \tilde{X})R)^{l-1}(t - \tilde{x}_*) - \nu = 0, \tag{2.69}$$

$$(\bar{x}_* - c)^T\alpha = 0, \tag{2.70}$$

$$(t - \tilde{x}_*^T)\eta = 0, \tag{2.71}$$

$$v_*^T\beta = 0, \tag{2.72}$$

$$r_*^T\nu = 0, \tag{2.73}$$

$$x \in \Omega_c, \tag{2.74}$$

$$\bar{x}_* \geq 0, v_* \geq 0, r_* \geq 0, \eta \geq 0, \nu \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \tag{2.75}$$

Por outro lado, de (2.68) e (2.69), segue que:

(i) Se $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, então

$$2[w_1]_i = pl\rho_3\theta_2^{p-1}([x_* - c]_i)^l([v_*]_i)^{l-1} - \beta_i. \tag{2.76}$$

(ii) Se $i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$, então

$$2[w_1]_i = -pl\rho_3\theta_3^{p-1}([r_*]_i)^{l-1}([t - x_*]_i)^l + \nu_i. \tag{2.77}$$

Usando (2.70), (2.71), (2.72), (2.73) (2.76), (2.77) e (2.75), temos que

(1) Se $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$,

$$2[w_1]_i(pl\rho_3\theta_2^{p-1}([x_* - c]_i)^{l-1}([v_*]_i)^l - \alpha_i) =$$

$$p^2l^2\theta_2^{2p-2}([x_* - c]_i[v_*]_i)^{2l-1} + \alpha_i^T\beta_i. \tag{2.78}$$

(2) Se $i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$,

$$2[w_1]_i(-pl\rho_3\theta_3^{p-1}([t - x_*]_i)^{l-1}([r_*]_i)^l + \eta_i) =$$
$$p^2l^2\theta_3^{2p-2}([t - x_*][r_*]_i])^{2l-1} + \eta_i\nu_i. \tag{2.79}$$

Usando (2.78),(2.79) e (2.67) temos

(a) Se $i \in \mathcal{I}_1$,

$$4[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i + p^2l^2\theta_2^{2p-2}([x_* - c]_i[v_*]_i)^{2l-1} + \alpha_i^T\beta_i = 0. \tag{2.80}$$

(b) Se $i \in \mathcal{I}_2$,

$$4[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i + p^2l^2\theta_2^{2p-2}([x_* - c]_i[v_*]_i)^{2l-1} + \alpha_i^T\beta_i +$$
$$p^2l^2\theta_3^{2p-2}([t - x_*][r_*]_i])^{2l-1} + \eta_i\nu_i = 0. \tag{2.81}$$

(c) Se $i \in \mathcal{I}_3$,

$$4[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_ip^2l^2\theta_3^{2p-2}([t - x_*][r_*]_i)^{2l-1} + \eta_i\nu_i = 0. \tag{2.82}$$

(d) Se $i \in \mathcal{I}_4$,

$$4[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i = 0. \tag{2.83}$$

Por (2.80),(2.81),(2.82), (2.83), (2.75) (2.74), temos que

$$[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i \leq 0 \ \text{ para todo } \ i. \tag{2.84}$$

Agora se

$$[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i = 0, \tag{2.85}$$

temos que

$$([x_*]_i - c_i)[v_*]_i = 0 \ \text{ se } \ i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2, \tag{2.86}$$

$$(t_i - [x_*]_i)[r_*]_i = 0 \ \text{ se } \ i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3, \tag{2.87}$$

e

$$\alpha_i\beta_i = 0, \quad \eta_i\nu_i = 0. \tag{2.88}$$

Agora, suponhamos que $w_1 \neq 0$. Dado que $F'(x_*)$ é uma P-matriz, pelo resultado dado em [28] temos que existe $D_{w_1} > 0$ matrix diagonal tal que

$$w_1^T D_{w_1} F'(x_*)w_1 > 0.$$

Logo

$$0 < w_1^T D_{w_1} F'(x_*)w_1 = \sum_{i=1}^{n}[d_{w_1}]_{i,i}[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i \leq 0. \tag{2.89}$$

A expressão (2.89) é claramente uma contradição, portanto $w_1 = 0$. Com isto $f(x_*, v_*, r_*) = 0$, logo, (x_*, v_*, r_*) é um minimizador global do problema (2.66) com valor nulo na função objetivo. Pelo Teorema 2.1, x_* é solução do $VIP(F, \Omega_c)$. **QED**

Caso em que Ω_c é limitado

Teorema 2.9 *Se (x_*, v_*, r_*) é um ponto estacionário de (2.66) com $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$, Ω_c limitado, se $F'(x_*)$ é coluna-suficiente então x_* é a solução do $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Como no Teorema 2.8 chegamos a (2.84). Já que $F'(x_*)$ é coluna-suficiente temos que

$$[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i = 0 \text{ para todo } i.$$

Com isto, como no Teorema 2.8, obtemos (2.86) e (2.87). Dado que Ω_c está limitado e $p + l > 2$, por (2.76) e (2.77) temos que

$$w_1 = 0$$

Logo a demonstração segue-se como no Teorema 2.8. **QED**

Notar que as hipóteses pedidas são mais fracas que no caso geral, já que se uma matriz é semi-definida positiva ou P-matriz ela é coluna-suficiente.

Caso $F(x)$ Linear

Neste caso tomaremos $F(x) = Mx + h$.

Teorema 2.10 *Se (x_*, v_*, r_*) é um ponto estacionário de (2.66), $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$, M^T é coluna-suficiente e o problema $VIP(F, \Omega_c)$ tem solução, então x_* é solução do $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. A demonstração é análoga ao Teorema 2.8 até (2.84), pois M^T é coluna-suficiente. Obtemos assim

$$[w_1]_i[F'(x_*)w_1]_i = 0 \text{ para todo } i. \tag{2.90}$$

De (2.90), obtemos (2.85)-(2.87), como no Teorema 2.1. Como $p + l > 2$, as condições KKT ficam

$$2M^T w_1 - (\alpha, 0)^t + (0, \eta, 0)^t = 0,$$

$$-2\bar{w}_1 - \beta = 0,$$

$$2\bar{w}_1 - \nu = 0,$$

$$(\bar{x}_* - c)^T \alpha = 0,$$

$$(t - \tilde{x}_*^T)\eta = 0,$$

$$v_*^T \beta = 0,$$

$$r_*^T \nu = 0,$$
$$x \in \Omega_c,$$
$$\bar{x}_* \geq 0, v_* \geq 0, r_* \geq 0, \eta \geq 0, \nu \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Estas são as condições KKT do seguinte problema convexo

$$\min_{x \in \Omega_L, v, r \geq 0} \|Mx + h - (v,0)^t + (0,r,0)^T\| \tag{2.91}$$

Com um raciocínio idêntico ao do Teorema 2.5, obtemos o resultado proposto. **QED**

Para o caso geral, conseguiu-se estender o resultado de definida positiva para semi-definida positiva quando F é linear. Neste último caso não se pode estender o resultado de P-função para P_0-função, quando a função F é linear. O exemplo seguinte mostra isso.

Exemplo 2.6. Seja

$$F(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 4 \\ x_2 - 2 + \sqrt{5} \\ x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2+\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Com isto

$$F'(x) = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad q = \begin{pmatrix} -4 \\ -2+\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

O Problema $LCP(M,q)$ tem uma solução em $(x_1,x_2,x_3) = (4,0,0)$. A matriz M associada é uma P_0-matriz e a função de mérito é dada por

$$f(x,z) = (x_1+x_2-4-z_1)^2 + (x_2-2+\sqrt{5}-z_2)^2 + (x_1-1-z_3)^2 + (\sum_{i=1}^{3} x_i z_i)^2.$$

O problema de otimização equivalente é

$$\min_{x,z\geq 0} f(x,z). \tag{2.92}$$

O ponto

$$x_* = (2, 1, \frac{2}{\sqrt{5}-1}), \quad z_* = (0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0)$$

cumpre as condições KKT com $\gamma = (0,0,0)$, $\mu = (2\sqrt{5}, 0, 0)$, com

$$x_*^T\gamma = 0, \quad z_*^T\mu = 0, \quad x_*, z_*, \gamma, \mu \geq 0.$$

Logo, x_* é um ponto KKT, mas não é solução do problema $LCP(M,q)$.

CAPÍTULO 3

Extensão dos resultados para uma caixa

3.1 Apresentação

Neste capítulo formularemos o problema de otimização equivalente para resolver o problema misto, isto é solucionar o problema de inequações variacionais no seguinte conjunto:

$$\Omega_c = \{x \in I\!R^n \mid x_i \geq c_i, \ \ i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2, \quad x_i \leq t_i, \ \ i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3\} \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{I}_1 = \{1, ..., s_1\}$, $\mathcal{I}_2 = \{s_1 + 1, ..., s_2\}$, e $\mathcal{I}_3 = \{s_2 + 1, ..., s_3\}$ com $c \in I\!R^{s_2}$ e $t \in I\!R^{s_3 - s_1}$.

Com o objetivo de encontrar as condições mais fracas que se possam pedir à função F do problema original para que os pontos estacionários sejam soluções do problema $VIP(F, \Omega_c)$, nos serviremos de uma versão melhorada da definição de regularidade dada por Moré em [94] para o caso NCP. Com isto procuramos encontrar os limites de nossa estratégia do ponto de vista teórico. Além disso foi analisado o caso $p = l = 1$, que tem importância porque no caso que F é linear o problema associado é um problema de programação quadrática.

Existem outras estratégias associadas à resolução do problema misto como a baseada na função formulada por Fischer em [30], dada por Facchinei, Fischer e Kanzow em [24], a qual consegue melhores resultados teóricos no sentido que fazem exigências menores ao Jacobiano para obter a equivalência com os pontos estacionários, mas trabalha com problemas não diferenciáveis. Também existem as formuladas por Gabriel e Moré em [47] e Chen, Qi e Sun em [10], que também propõem estratégias não diferenciáveis com resultados teóricos similares aos nossos.

O importante problema da complementaridade constitui uma preocupação sempre presente nesta área. Assim, temos os trabalhos baseados na função dada por Fischer como [25], [32], [34], [33], [31], [49], [63], [66], [68], [69], [73] e [83]. Neles propõem-se problemas não diferenciáveis ou com funções de mérito cuja derivabilidade é só de primeira ordem independendo da derivabilidade da função F do problema $VIP(F, \Omega_c)$. Por outro lado temos os trabalhos de Gabriel e Pang [45] e [102], Harker e Xiao [55] e Subramanian [115], baseados em sistemas não lineares B-diferenciáveis, e também o trabalho de Mangasarian e Solodov em [89], cujo problema associado é uma formulação tipo Lagrangeano aumentado.

Embora algumas das propostas baseadas na função dada por Fischer tenham resultados teóricos melhores no sentido de fazerem menos do exigências menores ao Jacobiano da função F para obter a equivalência com os pontos estacionários, devemos observar que as únicas estratégias que são totalmente diferenciáveis são : a de Moré [94], a de Friedlander, Martínez e Santos [41] e a proposta aqui. A falta de diferenciabilidade das outras estratégias invalida a aplicação dos clássicos métodos de Newton e quasi-Newton e faz necessária a criação de métodos especiais para solucionar estes problemas.

A função de mérito e o problema de otimização equivalente que se derivam da formulação geral para este caso são os seguintes:

A função de mérito

$$f(x,y,z) = \|F(x) + (0,y,0)^t - (z,0)^t\|^2 +$$

$$\rho \left[\left(\sum_{i=1}^{s_2} ((x_i - c_i) z_i)^l \right)^p + \left(\sum_{i=s_1}^{s_3} ((t_i - x_i) y_i)^l \right)^p \right]. \tag{3.2}$$

Os vetores $z \in I\!R^{s_2}$ e $y \in I\!R^{s_3 - s_1}$ estão definidos como na introdução (notações) para o caso de uma caixa, e chamaremos

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{s_2}((x_i - a_i)z_i)^l, \quad \theta_2 = \sum_{i=s_1}^{s_3}((t_i - x_i)y_i)^l.$$

O problema de otimização equivalente

$$\text{Minimizar } f(x,y,z)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \\ x & \in & \Omega_c \end{cases} \tag{3.3}$$

Observe-se que para o caso NCP esta formulação tem como casos particulares a de Moré [94] ($p = 1$ e $l = 2$) e a de Friedlander, Martínez e Santos [41] ($l = 1$).

Antes de enunciar as condições KKT do problema associado (3.3), as quais se baseiam na definição de regularidade, esclareceremos algumas questões de notação.

Seja (x_*, y_*, z_*) um ponto KKT do problema (3.3). Vamos definir os seguintes vetores:

$$u = F(x_*) + (0, y_*, 0)^t - (z_*, 0)^t, \tag{3.4}$$

$$w = p\rho l\theta_1^{p-1}((X - \hat{C})\hat{Z})^{l-1}(z_*, 0), \tag{3.5}$$

$$v = p\rho\theta_2^{p-1}((\hat{T} - X)\hat{Y})^{l-1}(0, y_*, 0), \tag{3.6}$$

$$\zeta = w - v - (\gamma, 0)^t + (0, \mu, 0)^t, \tag{3.7}$$

e as seguintes matrices

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{0} & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{0} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\hat{Z}, \hat{C}, \hat{Y}, \hat{T} \in I\!R^{n \times n}$, $Z, C \in I\!R^{s_2 \times s_2}$, $Y, T \in I\!R^{s_3 - s_1 \times s_3 - s_1}$, $\hat{0} \in I\!R^{s_1 \times s_1}$ e $C = diag(c)$, $Z = diag(z_*)$,$Y = diag(y_*)$ e $T = diag(t)$.

Com isto, as condições KKT no ponto (x_*, y_*, z_*) são:

$$2F'(x_*)u + \zeta = 0, \tag{3.8}$$

$$-2\bar{u} + p\rho\theta_1^{p-1}((\bar{X} - C)Z)^{l-1}(\bar{x}_* - c) - \alpha = 0, \tag{3.9}$$

$$2\tilde{u} + p\rho\theta_2^{p-1}(T - \tilde{X})Y)^{l-1}(t - \tilde{x}_*) - \beta = 0, \tag{3.10}$$

$$(\bar{x}_* - c)^T\gamma = 0, \tag{3.11}$$

$$(t - \tilde{x}_*)^T\mu = 0, \tag{3.12}$$

$$z_*^T\alpha = 0, \tag{3.13}$$

$$y_*^T\beta = 0, \tag{3.14}$$

$$x \in \Omega_c, \tag{3.15}$$

$$\gamma \geq 0,\ \mu \geq 0,\ z_* \geq 0,\ y_* \geq 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0. \tag{3.16}$$

3.2 Regularidade

Primeramente, definiremos alguns conjuntos que simplificarão nossa definição de regularidade.

(i) Conjuntos relacionados com Ω_c

$$\mathcal{B}_1 = \{i \in \mathcal{I}_1 \mid [x_*]_i > c_i\},$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_2 &= \{i \in \mathcal{I}_2 \mid c_i < [x_*]_i < t_i\}, \\
\mathcal{B}_3 &= \{i \in \mathcal{I}_3 \mid [x_*]_i < t_i\}, \\
\mathcal{B}_4 &= \{i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \mid [x_*]_i = c_i\}, \\
\mathcal{B}_5 &= \{i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 \mid [x_*]_i = t_i\}.
\end{aligned}
$$

Observe-se que

$$\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{5} \mathcal{B}_i \cup \mathcal{I}_4.$$

(ii) Conjuntos onde se cumprem as condições de complementaridade

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{i \in \mathcal{B}_4 \mid F_i(x_*) \geq 0\}, \\
\mathcal{C}_2 &= \{i \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{I}_4 \mid F_i(x_*) = 0\}, \\
\mathcal{C}_3 &= \{i \in \mathcal{B}_5 \mid F_i(x_*) \leq 0\}, \\
\mathcal{C} &= \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3.
\end{aligned}
$$

(iii) Conjuntos onde não se cumprem as condições de complementaridade
(a) Caso $F_i(x) < 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= \{i \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{I}_4 \mid F_i(x_*) < 0\}, \\
\mathcal{N}_2 &= \{i \in \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4 \mid F_i(x_*) < 0\}, \\
\mathcal{N} &= \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2.
\end{aligned}
$$

(b) Caso $F_i(x) > 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \{i \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_5 \mid F_i(x_*) > 0\}, \\
\mathcal{P}_2 &= \{i \in \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{I}_4 \mid F_i(x_*) > 0\}, \\
\mathcal{P} &= \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2.
\end{aligned}
$$

Agora definimos o conjunto total onde não se cumpre a complementaridade

$$\mathcal{D} = \mathcal{N} \cup \mathcal{P}.$$

Os seguintes lemas são importantes na definição de regularidade e mostram a relação entre os conjuntos definidos acima e os vetores que aparecem no problema (3.3) e nas condições KKT.

Lema 3.1. *Se (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT do problema (3.3) com $p, l \geq 1$, então*

$$u_{\mathcal{C}} = 0, \quad u_{\mathcal{N}} < 0, \quad u_{\mathcal{P}} > 0. \tag{3.17}$$

Demonstração. De (3.8)-(3.14), obtemos
(a) Se $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$,

$$-2u_i + pl\rho\theta_1^{p-1}([x_*]_i - a_i)^l [z_*]_i^{l-1} - \alpha_i = 0, \tag{3.18}$$

$$\begin{array}{c} \text{se } [x_*]_i - c_i > 0, \text{ então } \gamma_i = 0, \\ \text{se } [z_*]_i > 0, \text{ então } \alpha_i = 0. \end{array} \tag{3.19}$$

(b) Se $i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$,

$$2u_i + pl\rho\theta_2^{p-1}(t_i - [x_*]_i)^l [y_*]_i^{l-1} - \beta_i = 0, \tag{3.20}$$

$$\begin{array}{c} \text{se } t_i - [x_*]_i > 0, \text{ então } \mu_i = 0, \\ \text{se } [y_*]_i > 0, \text{ então } \beta_i = 0. \end{array} \tag{3.21}$$

(c) Se $i \in \mathcal{I}_4$,

$$u_i = F_i(x_*). \tag{3.22}$$

Separemos os diferentes casos
(1) Se $i \in \mathcal{C}$

(i) Se $i \in \mathcal{C}_1$, por (3.18), temos que $0 \geq 1/2\ \alpha_i \geq u_i \geq F_i(x_*) - [z_*]_i$. Suponhamos que $u_i < 0$, logo $[z_*]_i > 0$, por (3.19) $\alpha_i = 0$. Com isto $u_i = 0$, contradizendo o suposto.

(ii) Se $i \in \mathcal{C}_2$

(a1) Se $i \in \mathcal{B}_1$, então $u_i = -[z_*]_i \leq 0$. Suponhamos que $u_i < 0$, logo $[z_*]_i > 0$, por (3.19), fica $\alpha_i = 0$. Agora, por (3.18), obtemos $u_i \geq 0$, o que contradiz o suposto.

(a2) Se $i \in \mathcal{B}_2$, por (3.18) e (3.20), temos que $u_i = 0$.

(a3) Se $i \in \mathcal{B}_3$, então $u_i = [y_*]_i \geq 0$. Suponhamos $u_i > 0$, logo $[y_*]_i > 0$, por (3.21), fica $\beta_i = 0$. Agora, por (3.20), fica $u_i < 0$, o que contradiz o suposto.

(a4) Se $i \in \mathcal{I}_4$, por (3.22), temos que $u_i = 0$.

(iii) Se $i \in \mathcal{C}_3$, por (3.20), temos que $0 \leq 1/2\ \alpha_i \leq u_i \leq F_i(x_*) + [y_*]_i$. Suponhamos que $u_i > 0$, logo $[y_*]_i > 0$, por (3.21) $\beta_i = 0$. Com isto $u_i = 0$, contradizendo o suposto.

(2) Se $i \in \mathcal{N}$

(i) Se $i \in \mathcal{N}_1$

(a1) Se $i \in \mathcal{B}_1$, então $u_i = F_i(x_*) - [z_*]_i < 0$.

(a2) Se $i \in \mathcal{I}_4$, por (3.22), obtemos $u_i < 0$.

(iii) Se $i \in \mathcal{N}_2$

(a1) Se $i \in \mathcal{B}_2$, então $u_i = F_i(x_*) + [y_*]_i - [z_*]_i$. Suponhamos que $u_i \geq 0$, logo $[y_*]_i > 0$, por (3.21), obtemos $\beta_i = 0$. Por (3.20), fica $u_i < 0$. Isto contradiz o suposto.

(a2) Se $i \in \mathcal{B}_3$, a prova de que $u_i < 0$ é idêntica ao caso anterior

(a3) Se $i \in \mathcal{B}_4$ e $i \in \mathcal{I}_1$, então $u_i = F_i(x_*) - [z_*]_i < 0$. Se $i \in \mathcal{B}_2$, por (3.18), $0 \geq u_i \geq F_i(x_*) + [y_*]_i$. Suponhamos que $u_i = 0$, logo $[y_*]_i > 0$, por (3.21), obtemos $\beta_i = 0$. Com isto de (3.20), temos que $u_i > 0$, o que contradiz o suposto.

(3) Se $i \in \mathcal{P}$. A prova que $u_{\mathcal{P}} > 0$, se faz usando os mesmos argumentos que em **(2)**, com as mudanças de sinal correspondentes. **QED**

Com o objetivo de analisar as propriedades do problema associado quando os escalares p e l variam, separaremos o lema seguinte em 3 partes: (a) $p = l = 1$, (b) $p = 1$ (função de Moré) e (c) $l = 1$ (função de Friedlander, Martínez e Santos).

Lema 3.2. *Suponhamos que se cumprem as condições KKT.* **(a)** Se $l \geq 1$ e $p \geq 1$, então

$$\zeta_{\mathcal{C}_2} = 0, \ \ \zeta_{\mathcal{N}_1} = 0, \quad \zeta_{\mathcal{N}_2} \leq 0 \ \ \zeta_{\mathcal{P}_1} \geq 0, \ \ \zeta_{\mathcal{P}_2} = 0. \tag{3.23}$$

(b) Se $l > 1$ e $p \geq 1$
ou
(c) Se $l \geq 1$ e $p > 1$, e

$$\begin{array}{ll} ([x_*]_i - a_i)[z_*]_i = 0, & \text{se } \ i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \\ (t_i - [x_*]_i)[y_*]_i = 0, & \text{se } \ i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3, \end{array}$$

então

$$\zeta_{\mathcal{C}_1} \leq 0, \ \ \zeta_{\mathcal{C}_3} \geq 0 \tag{3.24}$$

Demonstração. Definiremos cada um dos termos dados em (3.7)

$$w_i = \begin{cases} pl\rho\theta_1^{p-1}([x_*]_i - a_i)^{l-1}[z_*]_i^l & \text{Se } i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{3.25}$$

$$v_i = \begin{cases} pl\rho\theta_2^{p-1}(t_i - [x_*]_i)^{l-1}[y_*]_i^l & \text{Se } i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{3.26}$$

Como no Lema 3.1, se obtem as expressões (3.18)-(3.21),
(a) $l \geq 1$ e $p \geq 1$

(1) Se $i \in \mathcal{C}_2$

(i) Se $i \in \mathcal{B}_1$, então $\zeta_i = w_i - \gamma_i$. Por (3.17), $u_i = [z_*]_i = 0$, com isto de (3.25), se deduz que $w_i = 0$. Por (3.19), temos que $\gamma_i = 0$.

(ii) Se $i \in \mathcal{B}_2$, então $\zeta_i = w_i - \gamma_i - v_i + \mu_i$. Por (3.17), $u_i = [y_*]_i - [z_*]_i = 0$. Por (3.19) e (3.21), obtemos $\gamma_i = \mu_i = 0$. Agora por (3.17), temos que $u_i = [y_*]_i - [z_*]_i = 0$. Suponhamos que $[z_*]_i > 0$, então de (3.19), fica $\alpha_i = 0$. Logo usando (3.18), resulta $u_i < 0$, isto contradiz o suposto. Portanto $[y_*]_i = [z_*]_i = 0$. Agora por (3.5) e (3.6), obtemos $v_i = w_i = 0$.

(iii) Se $i \in \mathcal{B}_3$, então $\zeta_i = -v_i + \mu_i$. Por (3.17) $u_i = [y_*]_i = 0$, logo por (3.26), $v_i = 0$. Usando (3.21), obtemos $\mu_i = 0$.

(iv) Se $i \in \mathcal{I}_4$, por (3.22), $\zeta_i = 0$.

(2) Se $i \in \mathcal{N}_1$

(i) Se $i \in \mathcal{B}_1$, então $\zeta_i = w_i - \gamma_i$. Suponhamos que $w_i > 0$. Por (3.5), se deduz que $[z_*]_i > 0$, considerando (3.19), obtemos $\alpha_i = 0$. Logo, por (3.18), resulta $u_i > 0$. Isto é uma contradição com (3.17), de onde $w_i = 0$. Agora usando (3.19), obtemos $\gamma_i = 0$.

(ii) Se $i \in \mathcal{I}_4$, por (3.22), obtemos $\zeta_i = 0$.

(3) Se $i \in \mathcal{N}_2$

(i) Se $i \in \mathcal{B}_2$, então $\zeta_i = w_i - v_i - \gamma_i + \mu_i$. Igual que em (2), caso (i), $w_i = 0$. Por (3.19) obtemos $\mu_i = 0$.

(ii) Se $i \in \mathcal{B}_3$, então $\zeta_i = -v_i + \mu_i$. Usando (3.21), obtemos $\mu_i \leq 0$.

(iii) Se $i \in \mathcal{B}_4$. A prova que $\zeta_i \leq 0$, se faz igual que em (i) e (ii), deste item.

(4) Se $i \in \mathcal{P}_1$. A prova que $\zeta_{\mathcal{P}_1} \geq 0$, se faz usando os mesmos argumentos que em (3), com as mudanças de sinal correspondentes.

(5) $i \in \mathcal{P}_2$. Também neste caso a prova que $\zeta_{\mathcal{P}_2} = 0$, se faz usando os mesmos argumentos que em (2), com as mudanças de sinal correspondentes.

(b) $l > 1$ e $p \geq 1$

(1) Se $i \in \mathcal{C}_1$

(i) Se $i \in \mathcal{I}_1$, então $\zeta_i = w_i - \gamma_i$. Já que $l > 1$, por (3.25), $w_i = 0$.

(ii) Se $i \in \mathcal{I}_2$, então $\zeta_i = w_i - \gamma_i - v_i + \mu_i$. igual que em (i) deste item, $w_i = 0$. Usando (3.21), obtemos $\mu_i \leq 0$.

(2) Se $i \in \mathcal{C}_3$. A prova que $\zeta_{\mathcal{C}_3 \geq 0}$ se faz como no item anterior, com as mudanças de sinal correspondentes.

(c) Se $l \geq 1$ e $p > 1$ e

$$([x_*]_i - a_i)[z_*]_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$$

$$(t_i - [x_*]_i)[y_*]_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$$

Neste caso temos que $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Como $p > 1$, das expresões (3.5) e (3.6), temos que $w_i = v_i = 0$. Logo a prova segue-se como em (b). Com isto conclui a demosntração do lema. **QED**

Este lema exprime o sinal do vetor ζ quando temos um ponto KKT. Assim, definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{N}_2$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{P}_1$$

Note que pelo Lema 3.2, se x é um ponto KKT do problema de otimicação associado, temos que $\zeta_{\mathcal{Z}} = 0$, $\zeta_{\mathcal{L}} \leq 0$ e $\zeta_{\mathcal{G}} \geq 0$.

Os lemas a seguir mostram algumas propriedades dos pontos KKT do problema (3.3).

Lema 3.3. *Se (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT do problema (3.3), $l \geq 1, p \geq 1$ e $u_i[F'(x_*)u]_i = 0$. Então*

$$\begin{aligned} ([x_*]_i - a_i)[z_*]_i = 0 \quad &\text{se} \quad i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2; \\ (t_i - [x_*]_i)[y_*]_i = 0 \quad &\text{se} \quad i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Demonstração. Como no Teorema 2.8 do Capítulo 2, obtemos (2.86) e (2.87), que são os resultados desejado. **QED**

Lema 3.4. *Seja (x_*, y_*, z_*) um ponto KKT do problema (3.3). Então*

$$u_i[F'(x_*)u]_i \leq 0 \ \textit{ para todo } i, \tag{3.28}$$

$$u_i[[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}u_{\mathcal{D}}]_i = u_i[F'(x_*)u]_i \leq 0 \ \ \textit{para todo } i. \tag{3.29}$$

Ainda mais, se $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ *é coluna-suficiente, então*

$$u_i[F(x_*)^T u]_i = 0 \quad \textit{para todo } \ i, \tag{3.30}$$

e se cumpre (3.27).

Demonstração. Como no Teorema 2.8 do capítulo 2, por (2.84) temos (3.28). Já que $u_i = 0$, se $i \notin \mathcal{D}$, temos (3.29). Logo, se $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ é coluna-suficiente, considerando (3.29), temos o resultado (3.30). E usando o Lema 3.3, temos que se cumpre (3.27). **QED**

Lema 3.5. *Se* (x_*, y_*, z_*), *é um ponto estacionário do problema (3.3) e* $u = 0$, *então* x_* *é solução do problema* $VIP(F, \Omega_c)$.

Demonstração. Dado que $u = 0$, é claro que $u_i[F(x_*)^T u]_i = 0$ para todo i. Logo pelo Lema 3.3, temos que

$$f(x,y,z) = u^2 + \rho((\sum_{i=1}^{q}((x_i - a_i)z_i)^l)^p + (\sum_{i=s+1}^{m}((t_i - x_i)y_i)^l)^p) = 0$$

O fato de ser um ponto KKT faz o ponto x_* factível, e o valor da função de mérito de nosso problema de otimização é zero. Logo, considerando o Teorema 2.1, temos que x_* é a solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$. **QED**

Definição de Regularidade

O ponto x_* *é regular com respeito ao Problema (3.3) se para todo* $0 \neq u \in$ $I\!R^n$ *tal que*

$$u_{\mathcal{C}} = 0, \quad u_{\mathcal{N}} < 0 \ \ e \ \ u_{\mathcal{P}} > 0, \tag{3.31}$$

existe um vetor $h \in I\!R^n$ *com*

$$h_{\mathcal{L}} \leq 0, \ \ h_{\mathcal{G}} \geq 0, \tag{3.32}$$

tal que

$$u^T F'(x_*)^T h > 0. \tag{3.33}$$

Observação. *Para o caso $p > 1$ e $l \geq 1$, o fato que se cumpra (3.27) permite estabelecer a mesma definição de regularidade.*

Para o NCP (i.e., $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1$ e $c = 0$), a definição de regularidade de Moré em [94], considera as mesmas hipóteses que as nossas com a diferença que exige que $h_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}_2} \leq 0$, de onde fica claro que nossa definição é mais geral que a dele.

Teorema 3.1 *Seja $F : I\!R^n \to I\!R^n$ diferenciável. Se (x_*, y_*, z_*), é um ponto estacionário do problema (3.3), com $p \geq 1$ e $l > 1$, então*

$$x_* \text{ é regular se, e somente se, } x_* \text{ é solução do problema } VIP(F, \Omega_c).$$

Demonstração. Se x_* é um ponto KKT, então

$$u^T F'(x_*)^T + \zeta^T = 0. \tag{3.34}$$

Suponhamos u da forma dada em (3.31) e $u \neq 0$. Logo, se x_* é regular existe $h \in I\!R^n$ da forma dada em (3.32) tal que

$$u^T F'(x_*)^T h > 0.$$

Levando em conta o Lema 3.2, e o fato de que $p \geq 1$ e $l > 1$, obtemos

$$\zeta^T h \geq 0$$

Por (3.34), resulta

$$u^T F'(x_*)^T h \leq 0.$$

Isto é uma contradição com a definição de regularidade, Com isto $u = 0$. Logo pelo Lema 3.3 x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.

A recíproca também é verdade, pois se x_* é solução do problema, temos que $u = 0$. **QED**

A regularidade pode ser expressa em termos de vetores não negativos mediante a seguinte transformação. Seja $0 \neq u \in I\!R^n$ cumprindo (3.17) e $W \in I\!R^{n \times n}$ uma matriz diagonal não singular definida por

$$W = \operatorname{diag}(w_i)$$

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{Se } i \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{P} \\ -1 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{3.35}$$

e definamos

$$J(x) = WF'(x)^T W. \tag{3.36}$$

Tomando $\tilde{u} = Wu$ estamos em condições de formular a seguinte definição de regularidade equivalente:

"x é regular se para todo $\tilde{u} = Wu$ tal que $\tilde{u} \geq 0$, existe $\tilde{h} = Wh$ satisfazendo

$$\tilde{u}^T J(x)\tilde{h} > 0, \quad \tilde{h}_i \geq 0 \quad \text{se } i \notin \mathcal{Z}\text{''}. \tag{3.37}$$

3.3 Resultados de Equivalência

Nesta seção enunciaremos as condições que a função F do $VIP(F, \Omega_c)$, deve cumprir para que um ponto estacionário do problema de otimização seja solução do $VIP(F, \Omega_c)$.

Da transformação feita para colocar a regularidade em termos de vetores positivos resulta o seguinte teorema.

Teorema 3.2 *Seja $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ diferenciável para todo $x \in \Omega_c$, e seja a matriz $J(x)$ definida como em (3.35) e (3.36). Se $[J(x)]_{\mathcal{H}}$ é uma S-matriz para um conjunto de índices $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{D}$, então x é regular.*

Demonstração. Se $[J(x)]_{\mathcal{H}}$, é uma $S - matriz$, então existe um vetor $\tilde{h}_{\mathcal{H}}$, tal que $\tilde{h}_{\mathcal{H}} > 0$ e $[J(x)]_{\mathcal{H}}\tilde{h}_{\mathcal{H}} > 0$. Se chamamos

$$\mathcal{Q} = \mathcal{I} \setminus \mathcal{H},$$

temos que

$$\tilde{u}_{\mathcal{H}}^T[J(x)^T\tilde{h}]_{\mathcal{H}} = u_{\mathcal{H}}^T([J(x)]_{\mathcal{H}}^T\tilde{h}_{\mathcal{H}} + [J(x)_{\mathcal{K},\mathcal{Q}}\tilde{h}_{\mathcal{Q}}).$$

Dado que $\tilde{u}_{\mathcal{C}} = 0$ $\tilde{u}_{\mathcal{D}} > 0$ e $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$, e tomando $\tilde{h}_{\mathcal{Q}} = 0$, é claro que $\tilde{h}$ satisfaz (3.37), de onde x é regular. **QED**

Um corolário imediato do Teorema 3.2 é o seguinte:

Corolário 3.1. *Se $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ diferenciável em $x \in I\!R^n_+$ e $[F'(x)]_{\mathcal{D}}$ é uma P-matriz, então x é regular.*

Demonstração. Este resultado segue do Teorema 3.2 de forma imediata pois se $[F'(x)]_{\mathcal{D}}$ é uma P-matriz, então $[J(x)]_{\mathcal{D}}$ é também P-matriz, e portanto uma S-matriz. **QED**

Este resultado mostra que se $[F'(x)]_{\mathcal{D}}$ é uma matriz definida positiva, ou uma M-matriz, ou uma H-matriz, a regularidade está garantida.

O teorema a seguir mostra que o resultado para P-função é valído para $p = l = 1$.

Corolário 3.2. *Seja (x_*, y_*, z_*) um ponto KKT do problema (3.3), $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ diferenciável, $p \geq 1, l \geq 1$ em $x \in I\!R^n_+$ e $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ é uma P-matriz, então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4 temos que

$$[u_{\mathcal{D}}]_i[[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}u_{\mathcal{D}}]_i \leq 0 \ \text{ se } \ i \in \mathcal{D}.$$

De onde, dado que $[F'(x)^T]_{\mathcal{D}}$ é uma P-matriz temos $u_{\mathcal{D}} = 0$, com isto temos $u = 0$, logo levando em conta o Lema 3.5 fica provado o resultado. **QED**

Teorema 3.3 *Seja $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ diferenciável em $x \in I\!R^n_+$ e $[F'(x)]_{\mathcal{D}}$, é uma P_0-matriz não singular, então x é regular.*

Demonstração. Desde que $[F'(x)]_{\mathcal{D}}$ é uma P_0-matriz, $[J(x)]_{\mathcal{D}}$ é também uma P_0-matriz e portanto uma S_0-matriz. Daí existe um vetor $\tilde{h} \neq 0$, com

$\tilde{h}_{\mathcal{C}} = 0$ e $\tilde{h}_{\mathcal{D}} > 0$, tal que $[J(x)]_{\mathcal{D}}\tilde{h}_{\mathcal{D}} \geq 0$. Suponhamos que x não é regular. Dado que $\tilde{u}_{\mathcal{D}} > 0$, resulta $[J(x)]_{\mathcal{D}}\tilde{h}_{\mathcal{D}} = 0$, o que contradiz o fato de $[J(x)]_{\mathcal{D}}$ ser não singular. **QED**

Teorema 3.4 *Seja $\mathcal{Y} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{P}_2$, e $F : I\!R^n \to I\!R^n$ diferenciável. Se $[F'(x)]_{\mathcal{Y}}$ é não singular e o complemento de Schur de $[J(x)]_{\mathcal{Y}}$ em $[J(x)]_{\mathcal{D}}$ é uma S-matriz, então x é regular.*

Demonstração. Chamemos

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{P}_1.$$

Claramente $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$, logo, da definição de regularidade, com os vetores positivos temos que $\tilde{h}_{\mathcal{Y}}$ pode ter qualquer sinal, e $\tilde{h}_{\mathcal{U}} \geq 0$. Agora, escrevemos $[J(x)]_{\mathcal{D}}$, da seguinte forma

$$[J(x)]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

onde $A_{1,1} = [J(x)]_{\mathcal{Y}}$. Vamos mostrar que existem vetores $\tilde{h}_{\mathcal{Y}}$ e $\tilde{h}_{\mathcal{U}} \geq 0$, tais que

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}_{\mathcal{Y}} \\ \tilde{h}_{\mathcal{U}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad q > 0. \tag{3.39}$$

Como $A_{1,1}$ é não singular este sistema é equivalente a

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{\mathcal{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}_{\mathcal{Y}} \\ \tilde{h}_{\mathcal{U}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

onde $A_{\mathcal{S}} = A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}$, é o Complemento de Schur de $[J(x)]_{\mathcal{Y}}$ em $[J(x)]_{\mathcal{D}}$. Como $A_{\mathcal{S}}$ é uma $S - matriz$, existe $\tilde{h}_{\mathcal{U}} > 0$ tal que $A_{\mathcal{S}}\tilde{h}_{\mathcal{U}} = q > 0$, e dado que $[J(x)]_{\mathcal{Y}}$ é não singular, existe $\tilde{h}_{\mathcal{Y}}$ tal que, $A_{1,1}\tilde{h}_{\mathcal{Y}} + A_{1,2}\tilde{h}_{\mathcal{U}} = 0$. Então

$$[J(x)]_{\mathcal{D}}\tilde{h}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Isto sastifaz a regularidade, já que $\tilde{u}_{\mathcal{C}} = 0$ e $\tilde{u}_{\mathcal{D}} > 0$. **QED**

Por enquanto, os resultados dados mostram que com as mesmas hipóteses pode-se estender para caixas os resultados dados por Moré para o NCP em [94].

Agora, expressaremos os resultados que obtivemos para os casos particulares, isto é, quando apenas alguns dos tipos de restrições da caixa estão presentes. Primeiro colocaremos os resultados para o caso sem restrições, onde resolver o problema $VIP(F, \Omega_c)$, é equivalente a resolver o sistema $F(x) = 0$.

Teorema 3.5 *Seja (x_*, y_*, z_*) um ponto KKT do problema (3.3) com $p \geq 1, l \geq 1$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_4$, e $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ não singular. Então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Dado que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_4$, e que (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT, obtemos

$$[F'(x_*)u]_{\mathcal{D}} = [F'(x_*)]^T_{\mathcal{D}} u_{\mathcal{D}} = 0.$$

Como $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ é não singular, então $u_{\mathcal{D}} = 0$, de onde temos $u = 0$. Pelo Lema 3.5 segue o resultado proposto. **QED**

O seguinte corolário é imediato.

Corolário 3.3. *Seja (x_*, y_*, z_*) um ponto KKT do problema (3.3),$p \geq 1$, $l \geq 1$, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_4$ e $[F'(x_*)]_{\mathcal{K}}$ não singular, com $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}$. Então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Dado que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_4$,

$$F'(x_*)u = 0 \tag{3.41}$$

de onde, se $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}$, (3.41) pode ser escrita como

$$[F'(x_*)]_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} = 0.$$

Pelo fato de $[F'(x_*)]_{\mathcal{K}}$ ser não singular temos $u_{\mathcal{K}} = 0$, portanto $u_{\mathcal{D}} = 0$. Logo $u = 0$, e pelo Lema 3.5 temos o resultado proposto. **QED**

Consideremos agora o caso de uma caixa limitada.

Teorema 3.6 *Se (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT do problema (3.3), $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$ e $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ é coluna-suficiente com $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_2$, então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4, temos que se cumpre (3.27). Logo, levando em conta que $p + l > 2$, se $i \in \mathcal{I}_2$, temos

$$2u_i = -\alpha_i \leq 0, \quad 2u_i = \beta_i \geq 0.$$

Logo, $[u]_{\mathcal{I}_2} = 0$, mas como $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_2$, fica $u = 0$. Pelo Lema 3.5 fica provado o proposto. **QED**

O seguinte corolário é evidente:

Corolário 3.4. *Se (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT do problema (3.3), $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$, Ω_c é uma caixa limitada e $F'(x_*)_{\mathcal{D}}$ coluna-suficiente, então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Se Ω_c é uma caixa limitada, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2$, de onde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_2$. Logo estamos nas hipótesis do Teorema 3.6. **QED**

Por último, consideramos o caso em que as restrições são do tipo $x \geq c$ ou $x \leq t$ (aqui está incluído o problema NCP).

Teorema 3.7 *Seja (x_*, y_*, z_*) um ponto KKT do problema (3.3), $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$ e $[F'(x_*)]^T_{\mathcal{D}}$ linha-suficiente e S-matriz. Se*
(a) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$
ou
(b) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_2$.
Então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$

Demonstração. Já $[F'(x_*)]^T_{\mathcal{D}}$ é linha-suficiente, temos que $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ é coluna-suficiente. Procedendo como no Teorema 3.6, temos que em ambos os casos (a) e (b)

$$u_i = 0 \text{ se } i \in \mathcal{I}_2.$$

Logo, como $p + l > 2$, temos que:
No caso **(a)**, tem-se $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_1$, logo

$$2u_i = -\alpha_i \leq 0, \text{ se } i \in \mathcal{D}.$$

Isto implica que $u_{\mathcal{D}} < 0$ e $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}} u_{\mathcal{D}} \geq 0$.
No caso **(b)**, tem-se $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_3$, logo

$$2u_i = \beta_i \leq 0, \text{ se } i \in \mathcal{D}.$$

Isto implica que $u_{\mathcal{D}} > 0$ e $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}} u_{\mathcal{D}} \leq 0$.
Destes análise temos que em ambos os casos existe $\vartheta > 0$ tal que

$$[F(x_*)]_{\mathcal{D}} \vartheta \leq 0.$$

Isto contradiz o fato que $[F'(x_*)^T]_{\mathcal{D}}$ é uma S- matriz. Logo $u_{\mathcal{D}} = 0$, de onde $u = 0$. Usando o Lema 3.5 temos o resultado proposto. **QED**

Corolário 3.5. *Seja (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT do problema (3.3), $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$, $[F'(x_*)^T]_{\mathcal{D}}$ é linha-suficiente e $[F'(x_*)^T]_{\mathcal{H}}$ com $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$ uma S-matriz. Se*
(a) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1$
ou
(b) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_3$

Então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.

Demonstração. Como no teorema anterior chegamos a que, no caso **(a)**, obtemos

$$2u_i = -\alpha_i \leq 0, \quad \text{se} \quad i \in \mathcal{H}.$$

Isto implica que $u_{\mathcal{H}} \leq 0$, e $[F'(x_*)]_{\mathcal{H}} u_{\mathcal{H}} \geq 0$.

No caso **(b)**, obtemos

$$2u_i = \beta_i \leq 0, \quad \text{se} \quad i \in \mathcal{H}.$$

Isto implica que $u_{\mathcal{H}} \geq 0$, e $[F'(x_*)]_{\mathcal{H}} u_{\mathcal{H}} \leq 0$.

Suponhamos agora que $\mathcal{D} \neq \emptyset$, então $u_{\mathcal{H}} \neq 0$. Isto implica que em ambos os casos existe $\vartheta \geq 0$ e $\vartheta \neq 0$, tal que

$$[F(x_*)]_{\mathcal{H}} \vartheta \leq 0.$$

Isto contradiz o fato de que $[F'(x_*)]_{\mathcal{H}}^T$ é uma S- matriz. Logo $u_{\mathcal{H}} = 0$, de onde $u = 0$. Usando o Lema 3.5 temos o resultado proposto. **QED**

Com este resultado fica estendido o resultado dado por Moré em [94], (corolário 3.4). A hipótese pedida por ele é que a matriz $[F'(x_*)]_{\mathcal{D}}$ fosse semi-definida positiva e $[F'(x_*)]_{\mathcal{H}}$ uma S-matriz, sendo que a hipótese pedida em nosso caso é $[F(x_*)]_{\mathcal{D}}$ linha-suficiente e $[F(x_*)]_{\mathcal{H}}$ uma S-matriz. Da proposição 1.2 da introdução, temos que semi-definida positiva implica linha-suficiente, mas a recíproca não é verdadeira, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1. A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é fila-suficiente e $S - matriz$, mas não é semi-definida positiva.

Caso Linear

Tomaremos $F(x) = Mx + q$. O seguinte teorema mostra que neste caso podemos pedir condições mais fracas para estabelecer a equivalência com os pontos estacionários do problema associado.

Teorema 3.8 *Se (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT do problema (3.3), $M_{\mathcal{D}}$ é linha-suficiente, $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$ e o problema $VIP(F, \Omega_c)$ tem solução, então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Já que $[M]_{\mathcal{D}}$ é linha-suficiente, do Lema 3.4, temos que

$$u_i[M^T u]_i = 0 \text{ para todo } i$$

Agora a demonstração segue como no Teorema 2.10. **QED**

O resultado dado no Teorema 3.8, estende o resultado conseguido por Friedlander, Martinez e Santos em [41]. A hipótese pedida por eles para o LCP era que a matriz M fosse semi-definida positiva. Neste caso a hipótese pedida é linha-suficiente que como já vimos no exemplo 3.1. é mais fraca.

Deve-se observar que no trabalho de Moré [94] todos os resultados propostos são para o caso da complementaridade não linear e, de fato, todos os resultados de equivalência com os pontos estacionários que se obtém exigem condições mais fortes para $F'(x_*)$ que a de linha-suficiência. Aqui vimos que no caso linear o resultado é válido para a estrategia de Moré, com a hipótese de linha-suficiente.

CAPÍTULO 4

O problema Horizontal e NCP-Generalizado

Neste capítulo colocaremos como problemas de otimização com restrições simples os problemas horizontal e NCP-generalizado (NCPG).

Como já vimos na introdução o problema horizontal consiste em encontrar (x_*, z_*) tal que

$$Qx_* + Rz_* = b, \quad x_*^T z_* = 0, \quad x_*, z_* \geq 0, \tag{4.1}$$

que denotaremos por $HLCP(Q, R)$.

O problema NCP-Generalizado, que denotaremos por $GCP(F, G)$, consiste em encontrar x_* tal que

$$F(x_*) \geq 0, \quad G(x_*) \geq 0, \quad F(x_*)^T G(x_*) = 0. \tag{4.2}$$

4.1 O Problema Horizontal

O problema que analisaremos será a seguinte generalização do problema horizontal:

Encontrar (x_*, z_*) tal que

$$F(x_*) + G(z_*) = 0, \quad x_*^T z_* = 0, \quad x_*, z_* \geq 0. \tag{4.3}$$

A este problema denotaremos por $HNCP(F, G)$.

Para formular o problema de otimização equivalente seguiremos os passos já explicados na introdução.

(a) A Função de Mérito

$$f(x,z) = \|F(x) + G(z)\|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i z_i)^l\right)^p. \tag{4.4}$$

(b) O problema de otimização equivalente

$$\min_{x,z\geq 0} f(x,z). \tag{4.5}$$

(c) Equivalência com o mínimo global

Teorema 4.1 *Seja (x_*, z_*) um minimizador global de (4.5) com valor nulo da função objetivo. Então (x_*, z_*) é solução do problema $HNCP(F,G)$.*

Reciprocamente, se (x_*, z_*) é solução do problema $HNCP(F,G)$, então (x_*, z_*) é um mínimo global de (4.5) com valor nulo da função objetivo.

Demonstração. Trivial. **QED**

Os resultados de equivalência com os pontos estacionários do problema de otimização associado serão dados para dois casos: não linear e linear.

(d) Equivalência com os pontos estacionários

Os resultados serão dados para dois casos:

Caso não linear

Teorema 4.2 *Sejam $F, G \in C^1(I\!R^n_+)$, (x_*, z_*) um ponto estacionário do problema (4.5), $p \geq 1$ e $l \geq 1$. Sejam $G'(z_*), F'(x_*)$ tais que, para todo $0 \neq u \in I\!R^n$, existe $D(u) \in I\!R^{n\times n}$ diagonal, com $D(u) > 0$ tal que*

$$u^T G'(z_*)^T D(u) F'(x_*) u < 0.$$

Então (x_*, z_*) é solução de $HNCP(F,G)$.

Demonstração. Chamemos

$$u = F(x_*) + G(z_*), \tag{4.6}$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} ([x_*]_i [z_*]_i)^l.$$

Sejam $X \in I\!R^{n\times n}$ e $Z \in I\!R^{n\times n}$ definidos por $X = diag(x_*)$ e $Z = diag(z_*)$.

As condições KKT neste caso são

$$2F'(x_*)u + 2pl\theta^{p-1}(XZ)^{l-1}z_* - \gamma = 0, \tag{4.7}$$

$$2G'(z_*)u + 2pl\theta^{p-1}(XZ)^{l-1}x_* - \mu = 0, \tag{4.8}$$

$$x_*^T\gamma = 0, \tag{4.9}$$

$$z_*^T\mu = 0, \tag{4.10}$$

$$x_* \geq 0 \quad z_* \geq 0 \quad \gamma \geq 0 \quad \mu \geq 0. \tag{4.11}$$

Por (4.7) e (4.8), temos

$$2[F'(x_*)u]_i = -2pl\theta^{p-1}[x_*]_i^{l-1}[z_*]_i^l + \gamma_i \tag{4.12}$$

e

$$2[G'(z_*)u]_i = -2pl\theta^{p-1}[z_*]_i^{l-1}[x_*]_i^l + \mu_i, \tag{4.13}$$

para todo i. Por (4.12),(4.13) e (4.7)-(4.11), temos

$$4[F'(x_*)u]_i[G'(z_*)u]_i$$

$$= (-2pl\theta^{p-1}[x_*]_i^{l-1}[z_*]_i^l + \gamma_i)(-2pl\theta^{p-1}[z_*]_i^{l-1}[x_*]_i^l + \mu_i)$$
$$= 4(pl)^2\theta^{2p-2}([z_*]_i[x_*]_i)^{2l-1} + \gamma_i\mu_i, \tag{4.14}$$

para todo i, de onde fica claro que

$$4[F'(x_*)u]_i[G'(z_*)u]_i \geq 0 \tag{4.15}$$

para todo i. Suponhamos que $u \neq 0$. Logo, dado que por hipótese existe $D(u) = diag\{d_1, \ldots, d_n\}$, com $d_i > 0$ tal que

$$u^T G'(z_*) D(u) F'(x_*)^T u < 0.$$

Por isto e (4.15), temos que

$$0 > u^T G'(z_*) D(u) F'(x_*)^T u = \sum_{i=1}^{n} [F'(x_*)^T u]_i d_i [G'(z_*)^T u]_i \geq 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $u = 0$. Portanto considerando (4.14), obtemos

$$4(pl)^2 \theta^{2p-2} ([z_*]_i [x_*]_i)^{2l-1} + \gamma_i \mu_i = 0 \tag{4.16}$$

para todo i. Por (4.11), temos que

$$[z_*]_i [x_*]_i = \gamma_i \mu_i = 0. \tag{4.17}$$

Por (4.17) e $u = 0$, temos que (x_*, z_*) é solução de $HNCP(F, G)$. **QED.**

Note que neste caso a hipótese colocada, para o caso NCP ($G = -I$), equivale a dizer que $F'(x_*)$ é uma P-matrix (ver [28]).

O caso linear

Teorema 4.3 *Se (x_*, z_*) é um ponto estacionário do problema (4.5), $p \geq 1$, $l \geq 1$, $p + l > 2$ e o problema $HLCP(Q, R)$ tem solução. Se $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são tais que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, se cumpre*

$$\{[R^T u]_i [Q^T u]_i \geq 0, \ \textit{para todo} \ i,\} \ \Rightarrow \{[R^T u]_i [Q^T u]_i = 0, \ \textit{para todo} \ i\}, \tag{4.18}$$

então (x_*, z_*) é solução de $HLCP(Q, R)$.

Demonstração. Aqui, $u = Qx_* + Rz_* - b$, $F(x) = Qx$, $G(z) = Rz - b$, logo (4.7)-(4.15) são obtidas como no Teorema 4.3. Logo,

$$[R^T u]_i [Q^T u]_i \geq 0, \ \text{para todo} \ i.$$

Pela hipótese temos

$$[R^Tu]_i[Q^Tu]_i = 0 \text{ para todo } i.$$

Por (4.14), resulta

$$4(pl)^2\theta^{2p-2}([z_*]_i[x_*]_i)^{2l-1} + \gamma_i\mu_i = 0 \tag{4.19}$$

para todo i. Portanto

$$[z_*]_i[x_*]_i = \gamma_i\mu_i = 0. \tag{4.20}$$

Por (4.20) e o fato $p + l > 2$, as condições KKT ficam:

$$\begin{gathered} 2R^Tu - \gamma = 0, \\ 2Q^Tu - \mu = 0, \\ x_*^T\gamma = 0, \\ z_*^T\mu = 0, \\ x_* \geq 0 \quad z_* \geq 0 \quad \gamma \geq 0 \quad \mu \geq 0. \end{gathered}$$

Estas são as condições KKT do seguinte problema convexo

$$\min_{x\geq 0,\ z\geq 0} \|Qx + Rz - b\|^2. \tag{4.21}$$

Com um raciocínio idêntico ao do Teorema 2.5 do Capítulo 2, obtemos o resultado proposto. **QED.**

Este resultado estende o resultado dado por Friedlander, Martinez e Santos em [41]. Eles pedem que $-R^TQ$, seja semi-definida positiva, o que implica em

$$u^TRQ^Tu = \sum_{i=1}^{n}[R^Tu]_i[Q^Tu]_i \leq 0.$$

Logo se $[R^Tu]_i[Q^Tu]_i \geq 0$ para todo i, então $[R^Tu]_i[Q^Tu]_i = 0$, para todo i, que é nossa hipótese. Com isto temos provado que a hipótese pedida em

[41] implica a nossa. Entretanto a recíproca não é certa. Para vernos isto basta tomarnos o exemplo 3.1, dado no Capítulo 3.

Também é evidente que para o caso LCP (i.e., $R = -I$), esta hipótese equivale a que Q^T seja linha-suficiente.

O resultado obtido no Teorema 4.3 também é válido fazendo-se permutação de linhas. Isto está expresso no Corolário 4.1 a seguir. Primeiramente escreveremos da seguinte maneira as matrizes Q e R:

Seja $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$, logo

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Corolário 4.1. *Se existe alguma partição $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\} = [\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1]$, tal que se definimos:*

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^T \end{pmatrix}, \quad com \ \ \tilde{q}_i = \begin{cases} q_i^T & se \ i \in \mathcal{I}_0 \\ r_i^T & se \ i \in \mathcal{I}_1 \end{cases}$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{r}_n^T \end{pmatrix}, \quad com \ \ \tilde{r}_i = \begin{cases} r_i^T & se \ i \in \mathcal{I}_0 \\ q_i^T & se \ i \in \mathcal{I}_1 \end{cases}$$

se cumpre para todo $u \in I\!R^n$,

$$\{[\tilde{R}^T u]_i[\tilde{Q}^T u]_i \geq 0 \ \ para\ todo\ \ i\} \Rightarrow \{[\tilde{R}^T u]_i[\tilde{Q}^T u]_i = 0 \ \ para\ todo\ i\}$$

e (x_*, z_*) é um ponto estacionário de (4.5), então (x_*, z_*) é solução de $HLCP(Q, R)$.

Demonstração. Definamos

$$\tilde{z}_* = \begin{cases} [z_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ [y_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

$$\tilde{y}_* = \begin{cases} [y_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ [z_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ \mu_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ \gamma_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

e $\tilde{X} = diag(\tilde{x}_*), \tilde{Z} = diag(\tilde{z}_*)$.

As condições de KKT, podem ser escritas da seguinte forma:

$$2\tilde{Q}^T u + 2pl\theta^{p-1}(\tilde{X}\tilde{Z})^{l-1}\tilde{z}_* - \tilde{\gamma} = 0,$$

$$2\tilde{R}^T u + 2pl\theta^{p-1}(\tilde{X}\tilde{Z})^{l-1}\tilde{x}_* - \tilde{\mu} = 0,$$

$$\tilde{x}_*^T\tilde{\gamma} = 0,$$

$$\tilde{z}_*^T\tilde{\mu} = 0,$$

$$\tilde{x}_* \geq 0 \quad \tilde{z}_* \geq 0 \quad \tilde{\gamma} \geq 0 \quad \tilde{\mu} \geq 0.$$

Agora, considerando o Teorema 4.3, temos que

$$u = 0, \;\; \tilde{x}_*^T\tilde{z}_* = 0. \tag{4.22}$$

Por (4.22), usando as definições de $\tilde{x}_*$ e $\tilde{z}_*$, temos que

$$u = 0, \;\; x_*^T z_* = 0,$$

o que conclui a demonstração do corolário. **QED.**

4.2 O NCP-generalizado

Também neste caso para formulamos a equivalência com um problema de otimização seguiremos os passos já indicados na introdução.

(a) A função de mérito

$$f(x,y,z) = \|F(x)-y\|^2 + \|G(x)-z\|^2 + \rho_2 \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i z_i)^l\right)^p . \tag{4.23}$$

(b) O problema de otimização equivalente

$$\min_{y,z\geq 0} f(x,y,z). \tag{4.24}$$

(c) Equivalência com o mínimo global

Teorema 4.4 *Seja (x_*, y_*, z_*) um minimizador global do problema (4.24) com $f(x_*, y_*, z_*) = 0$ então x_* é solução do problema (4.2).*

Reciprocamente, se x_* é solução do problema (4.2), então existem $z_*, y_* \geq 0$ tais que (x_*, y_*, z_*) é um mínimo global de (4.24) e $f(x_*, y_*, z_*) = 0$.

Demonstração. Trivial. **QED**

Também aqui a equivalência dos pontos estacionários do problema de otimização associado e a solução de $GNCP(F,G)$, será analisada em dois casos: o linear e o não linear.

4.2.1 Caso não Linear

O teorema de equivalência é o seguinte:

Teorema 4.5 *Seja $F, G \in C^1(I\!R^n)$ e (x_*, y_*, z_*) um ponto estacionário de (4.24). Suponhamos que exista $G'(x_*)^{-1}$ e que $G'(x_*)^{-1}F'(x_*)$ seja uma P-matriz. Então x_* é solução de (4.2).*

Demonstração. Chamando

$$\theta = (\sum_{i=1}^{n}(y_i z_i)^l)^p,$$

as condições KKT do problema (4.24), são

$$2F'(x_*)(F(x_*) - z_*) + 2G'(x_*)(G(x_*) - y_*) = 0, \tag{4.25}$$

$$-2(F(x_*) - z_*) + \rho_2 pl\theta^{p-1}(YZ)^{l-1}y_* - \gamma = 0, \tag{4.26}$$

$$-2(G(x_*) - y_*) + \rho_2 pl\theta^{p-1}(YZ)^{l-1}z_* - \mu = 0, \tag{4.27}$$

$$z_*^T\gamma = 0, \quad y_*^T\mu = 0, \tag{4.28}$$

$$z_* \geq 0, y_* \geq 0, \gamma \geq 0, \mu \geq 0. \tag{4.29}$$

Por (4.25), como $G(x_*)$ é não singular, temos que

$$F'(x_*)(F(x_*) - z_*) = -G'(x_*)(G(x_*) - y_*),$$

$$G'(x_*)^{-1}F'(x_*)(F(x_*) - z_*) = -(G(x_*) - y_*). \tag{4.30}$$

Por (4.26) e (4.27) temos que

$$2[F(x_*) - z_*]_i = \rho_2 pl\theta^{p-1}[z_*]_i^{l-1}[y_*]_i^l - \gamma_i, \tag{4.31}$$

$$2[G(x_*) - y_*]_i = \rho_2 pl\theta^{p-1}[y_*]_i^{l-1}[z_*]_i^l - \mu_i. \tag{4.32}$$

Por (4.26)-(4.32), podemos escrever

$$4[F(x_*) - z_*]_i[G'(x_*)^{-1}F'(x_*)(F(x_*) - z_*)]_i$$

$$-2[(G(x_*) - y_*)]_i 2[F(x_*) - z_*]_i$$

$$= -(4(\rho_2 lp)^2(\theta)^{2p-2}([y_*]_i[z_*]_i)^{2l-1} + \gamma_i\mu_i) \tag{4.33}$$

Portanto,

$$[F(x_*) - z_*]_i[G'(x_*)^{-1}F'(x_*)(F(x_*) - z_*)]_i \leq 0, \tag{4.34}$$

para todo i. Como $G'(x_*)^{-1}F'(x_*)$ é uma P-matriz, temos que

$$F(x_*) - z_* = 0. \tag{4.35}$$

Em conseqüência, voltando a (4.30), obtemos

$$G'(x_*)^T(G(x_*) - y_*) = 0.$$

Como $G'(x_*)$ é não singular, temos que

$$G(x_*) - y_* = 0. \tag{4.36}$$

Agora, por (4.33)

$$4(\rho_2 lp)^2(\theta)^{2p-2}([y_*]_i[z_*]_i)^{2l-1} + \gamma_i\mu_i = 0. \tag{4.37}$$

Finalmente por (4.29), obtemos

$$[y_*]_i[z_*]_i = 0 \tag{4.38}$$

para todo i. Por (4.35),(4.36) e (4.38), e pelo Teorema 4.4 fica provado o proposto. **QED.**

Da demonstração do teorema fica claro que as hipóteses podem ser as mesmas, trocando F por G. Para expressar isto de uma forma mais completa enunciamos o seguinte corolário:

Corolário 4.2. *Sejam*

$$\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\},\ F(x) = (f_i(x), \ldots, f_n(x))^T,\ G(x) = (g_i(x), \ldots, g_n(x))^T.$$

Se existe alguma partição $\mathcal{I} = [\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1]$, tal que definindo

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} f_i(x) & se\ i \in \mathcal{I}_0 \\ g_i(x) & se\ i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

$$\tilde{G}(x) = \begin{cases} g_i(x) & se\ i \in \mathcal{I}_0 \\ f_i(x) & se\ i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

exista $\tilde{G}'(x_*)^{-1}$, $(\tilde{G}'(x_*)^T)^{-1}\tilde{F}'(x_*)^T$ *seja uma P-matriz e* (x_*, y_*, z_*) *seja um ponto estacionário de (4.24), então* x_* *é solução de (4.2).*
Demonstração. É só reescrever as condições KKT chamando

$$\tilde{z}_* = \begin{cases} [z_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ [y_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

$$\tilde{y}_* = \begin{cases} [y_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ [z_*]_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ \mu_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_0 \\ \gamma_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases}.$$

Com esta mudança, temos que

$$F'(x_*)^T(F(x_*) - z_*) + G'(x_*)^T(G(x_*) - y_*) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla f_i(x_*)(f_i(x_*) - [z_*]_i) + \sum_{i=1}^{n} \nabla g_i(x_*)(g_i(x_*) - [z_*]_i) =$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_0} \nabla f_i(x_*)(f_i(x_*) - [z_*]_i) + \sum_{i\in\mathcal{I}_1} \nabla g_i(x_*)(g_i(x_*) - [z_*]_i)+$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_1} \nabla f_i(x_*)(f_i(x_*) - [z_*]_i) + \sum_{i\in\mathcal{I}_0} \nabla g_i(x_*)(g_i(x_*) - [z_*]_i) =$$

$$\tilde{F}'(x_*)^T(\tilde{F}(x_*) - \tilde{z}_*) + \tilde{G}'(x_*)^T(\tilde{G}(x_*) - \tilde{y}_*) = 0. \tag{4.39}$$

As outras equações (4.26)-(4.29) ficam

$$-2(\tilde{F}(x_*) - \tilde{z}_*) + \rho_2 p l \theta^{p-1} (\tilde{Y}\tilde{Z})^{l-1} \tilde{y}_* - \tilde{\gamma} = 0, \tag{4.40}$$

$$-2(\tilde{G}(x_*) - \tilde{y}_*) + \rho_2 p l \theta^{p-1} (\tilde{Y}\tilde{Z})^{l-1} \tilde{z}_* - \tilde{\mu} = 0, \tag{4.41}$$

$$\tilde{z}_*^T \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{y}_*^T \tilde{\mu} = 0, \tag{4.42}$$

$$\tilde{z}_* \geq 0, \tilde{y}_* \geq 0, \tilde{\gamma} \geq 0, \tilde{\mu} \geq 0. \tag{4.43}$$

Com isto, e considerando o Teorema 4.5, obtemos

$$\tilde{F}(x_*) - \tilde{z}_* = 0, \;\; \tilde{G}(x_*) - \tilde{y}_* = 0, \;\; \tilde{x}_*^T \tilde{y}_* = 0. \tag{4.44}$$

Com um simples cálculo, (4.44) nos permite concluir que

$$F(x_*) - z_* = 0, \;\; G(x_*) - y_* = 0, \;\; x_*^T y_* = 0.$$

Portanto, x_* é solução do problema (4.2). **QED.**

4.2.2 O caso linear

Aqui também podemos colocar hipóteses mais fracas. Enunciaremos o teorema que mostra isto.

Seja $F(x) = Mx + d$ e $G(x) = Rx + v$. Chamemos

$$M = \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_n^T \end{pmatrix}, \;\; R = \begin{pmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.6 *Se existe alguma partição de $\mathcal{I} = [\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1]$ tal que, definindo*

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{m}_n^T \end{pmatrix}, \;\; com \;\; \tilde{m}_i = \begin{cases} m_i^T & se\ i \in \mathcal{I}_0 \\ r_i^T & se\ i \in \mathcal{I}_1 \end{cases}$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{r}_n^T \end{pmatrix}, \quad com \ \tilde{r}_i = \begin{cases} r_i^T & se \ i \in \mathcal{I}_0 \\ m_i^T & se \ i \in \mathcal{I}_1 \end{cases},$$

resulta $\tilde{R}$ não singular, $(\tilde{R}^T)^{-1}\tilde{M}^T$ coluna-suficiente e (x_*, y_*, z_*) um ponto estacionário de (4.24), então x_* é solução de (4.2).

Demonstração. Pela definição de $F(x), G(x)$, temos que $\nabla f_i(x) = m_i$ e $\nabla g_i = r_i$. Logo a demonstração é a mesma do Corolário 4.2. até (4.43). Com a hipótese de que $(R^{-1})^T M^T$ é coluna-suficiente temos que:

$$[Mx_* + d - z_*]_i[(R^{-1})^T M^T(Mx_* + d - z_*)]_i = 0, \tag{4.45}$$

para todo i. Por (4.33) e (4.45), obtemos

$$4(\rho_2 lp)^2(\theta)^{2p-2}([y_*]_i[z_*]_i)^{2l-1} + \gamma_i\mu_i \leq 0. \tag{4.46}$$

Portanto,

$$[y_*]_i[z_*]_i = 0, \tag{4.47}$$

para todo i. Por (4.47) e $p + l > 2$, as condições KKT ficam

$$2M^T(Mx_* + d - z_*) + 2R^T(Rx_* + v - y_*) = 0, \tag{4.48}$$

$$-2(Mx_* + d - z_*) - \gamma = 0, \tag{4.49}$$

$$-2(Rx_* + v - y_*) - \mu = 0, \tag{4.50}$$

$$z_*^T\gamma = 0, \quad y_*^T\mu = 0, \tag{4.51}$$

$$z_* \geq 0, y_* \geq 0, \gamma \geq 0, \mu \geq 0. \tag{4.52}$$

As equações (4.48)-(4.52) são as condições KKT do seguinte problema convexo:

$$\min_{z,x \geq 0} \|Mx + d - z\|^2 + \|Rx + v - y\|^2 \tag{4.53}$$

Seguindo um raciocínio idêntico ao do Teorema 2.5 do capítulo 2, obtemos o resultado proposto. **QED.**

As estratégias para resolver o problema linear dadas por Pang em [104] e [105], e por Noor em [100] e [99], usam métodos iterativos e se limitam a dar alguns resultados teóricos sobre convergência no caso LCP. Já a estratégia baseada na função de Fischer [30] dada por Fukushima e Kanzow em [70] e Jiang, Fukushima, Qi and Sun em [64], formulam um problema de otimização associado melhor do ponto de vista teórico, já que as exigências teóricas são mais fracas para obter a equivalência com os pontos estacionários. Com efeito, eles pedem que exista $G'(x)^{-1}$ e que a matriz $G'(x_*)^{-1}F(x_*)$ seja uma P_0-matriz, enquanto que no nosso caso a exigência é P-matriz para o caso não linear e coluna-suficiente para o caso linear. Porém, o problema associado formulado por eles é não diferenciável em [64] e no máximo C^1 em [70]. Esta falta de diferenciabilidade é uma desvantagem com respeito a nossa estrategia, como já foi explicado nos capítulos anteriores.

CAPÍTULO 5

Teoria das Perturbações

5.1 Apresentação

Como já vimos no Capítulo 2, os resultados de equivalência com os pontos estacionários para o caso geral são válidos quando a função F é estritamente monótona. O exemplo 2.5 dado no Capítulo 2 mostrou que estender o resultado para funções monótonas não era possível. O objetivo de desenvolver uma teoria de perturbações é superar esta limitação.

A estratégia usada foi a chamada perturbação regularizante, citada no livro de Cottle, Pang e Stone [17] para o problema da complementaridade linear. Com esta perturbação consegue-se, no caso da monotonia, que os problemas perturbados possam ser resolvidos usando o problema de otimização associado dado nesta tese. A solução do $VIP(F, \Omega)$, que chamaremos de original, será obtida pela aplicação de um método homotópico mediante a resolução sucessiva dos problemas perturbados.

Outros trabalhos propostos para resolver o NCP baseados em métodos homotópicos são os de Watson [119], que utiliza a equivalência com um sistema não linear dada por Mangasarian em [86], e o trabalho de Kojima, Megiddo e Noma [78], que está baseado em um sistema não linear equivalente de $2n$ variáveis.

A justificativa teórica da aplicação de perturbações para resolver o problema original seguirá o seguinte esquema:

Dado o $VIP(F, \Omega)$ que tenha solução, verificar que:

(i) os problemas perturbados tenham solução que possa ser encontrada com a nossa estratégia.
(ii) a seqüência de soluções perturbadas seja limitada (garantindo a existência de um ponto limite).
(iii) todo ponto limite da seqüência de soluções perturbadas seja solução do problema original.

5.2 Definições

Apresentaremos um conjunto de definições que serão usadas em todo este capítulo.

Definição 5.1. *Chamaremos seqüência perturbadora a uma seqüência* $\{\varepsilon_k\}_{k\in \mathbb{N}}$ *com as seguintes características:*

$$\varepsilon_k > 0, \quad \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} \quad \text{e} \quad \varepsilon_k \to 0$$

Definição 5.2. *Dada* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *chamaremos a seqüência de perturbações da* F *à seqüência de funções* $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definida por*

$$F_k(x) = F(x) + \varepsilon_k x,$$

onde $\{\varepsilon_k\}_{k\in \mathbb{N}}$ *é uma seqüência perturbadora.*

Definição 5.3. [57] *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *fechado, não vazio e convexo. Se existe* $x_0 \in \Omega$ *tal que*

$$\mathcal{B} = \{x \in \Omega \mid F(x)^T(x - x_0) \leq 0\}$$

é limitado, dizemos que F *cumpre a condição* **B1** *em* x_0.

Se o conjunto

$$\mathcal{B} = \{x \in \Omega \mid F(x)^T(x - x_0) < 0\}$$

é limitado, dizemos que F *cumpre a condição* **B2** *em* x_0.

Se o conjunto

$$\mathcal{B} = \{x \in I\!R^n \mid F(x)^T(x - x_0) \leq 0\}$$

é limitado, dizemos que F cumpre a condição **B1F** *em x_0. Finalmente, se*

$$\mathcal{B} = \{x \in I\!R^n \mid F(x)^T(x - x_0) < 0\}$$

é limitado, dizemos que F cumpre a condição **B2F** *em x_0.*

As condições **B1** e **B2**, estão dadas em [57] e são suficientes para que o conjunto de soluções do $VIP(F, \Omega)$ seja limitado.

Definição 5.4. *Seja $\Omega \subset I\!R^n$ definido como em (2.1). Os conjuntos a seguir são definidos por*

$$\Omega_g = \{x \in I\!R^n \mid g(x) \leq 0\},$$
$$\Omega_A = \{x \in I\!R^n \mid Ax = b\},$$
$$\Omega_c = \{x \in I\!R^n \mid x_i \geq c_i, \;\; i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2, \quad x_i \leq t_i, \;\; i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3\},$$
$$\Omega_{A,c} = \{x \in I\!R^n \mid x \in \Omega_c \cap \Omega_A\},$$
$$\Omega_{g,c} = \{x \in I\!R^n \mid x \in \Omega_c \cap \Omega_g\},$$
$$\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}, \;\; \mathcal{M} = \{1, \ldots, m\}, \;\; \mathcal{Q} = \{1, \ldots, q\},$$
$$\mathcal{S}_1 = \{1, \ldots, s_2\}, \;\; \mathcal{S}_2 = \{s_1, \ldots, s_3\}.$$

Definição 5.5. *Dizemos que o conjunto Ω_g cumpre uma condição de Slater sobre Ω em $x_0 \in \Omega$ se*

$$g_i(x_0) < 0 \quad \text{para todo} \;\; i \in \mathcal{M}.$$

Definição 5.6. *Consideremos $VIP(F_k, \Omega)$. Chamaremos $P_k(\Omega)$ ao problema de otimização associado, f_k^Ω à função de mérito de $P_k(\Omega)$ e $\Gamma(\Omega)$ ao conjunto de restrições de $P_k(\Omega)$.*

Definimos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{T}_k(\Omega) = \{\phi = (x, \psi) \in \Gamma(\Omega) \mid f_k^\Omega(\phi) \leq \varepsilon^{2+p+l}\beta\},$$

onde $\beta > 0$, e

$$\mathcal{R}_k(\Omega) = \{x \in I\!R^n \mid \phi = (x, \psi) \in \mathcal{T}_k(\Omega)\}.$$

Dizemos que x_k é uma solução inexata do $VIP(F_k, \Omega)$ se $x_k \in \mathcal{R}_k(\Omega)$.

5.3 Soluções Exatas dos Problemas Perturbados

Nesta seção analisaremos o que acontece com as soluções exatas dos problemas perturbados. A questão (iii) da apresentação 5.1 está respondida com o seguinte teorema.

Teorema 5.1 *Se $VIP(F_k, \Omega)$ admite uma solução x_k para todo $k \in \mathbb{N}$, então todo ponto limite da seqüência $\{x_k\}$ é uma solução do $VIP(F, \Omega)$.*

Demonstração. Sejam K_1 um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ e $x_* \in \Omega$ tais que

$$\lim_{k \in K_1} x_k = x_*.$$

Seja $w \in \Omega$. Dado que x_k é uma solução de $VIP(F_k, \Omega)$, temos que

$$\langle F(x_k) + \varepsilon_k x_k, w - x_k \rangle \geq 0 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Então, tomando o limite para $k \in K_1$, obtemos

$$\langle F(x_*), w - x_* \rangle \geq 0.$$

Como $w \in \Omega$ é arbitrario, x_* é uma solução de $VIP(F, \Omega)$. **QED**

Note que neste teorema não há nenhuma condição adicional, além do fato da existência de um ponto limite.

5.3.1 Caso Geral

No caso geral dado no Capítulo 2, os resultados conseguidos exigiam que a função fosse estritamente monótona. Mostraremos em geral que com a hipótese de monotonia as perturbações cumprem o objetivo de estender os resultados teóricos.

Teorema 5.2 *Seja $F(x)$ monótona. Então F_k é fortemente monótona de módulo ε_k.*

Demonstração.

$$\langle F_k(x) - F_k(y), x - y\rangle = \langle F(x) - F(y) + \varepsilon_k(x-y), x-y\rangle =$$

$$\langle F(x) - F(y), x-y\rangle + \varepsilon_k\|x-y\|^2 \geq \varepsilon_k\|x-y\|^2. \quad \textbf{QED}$$

Note que com este teorema e a Proposição 1.7, se Ω é não vazio a monotonicidade da função garante a existência de solução do problema perturbado. Isto responde à questão (i) da apresentação 5.1.

Teorema 5.3 *Sejam F monótona e o conjunto de soluções do $VIP(F,\Omega)$ não vazio. Então, $\{x_k\}$ converge à única solução de norma mínima do $VIP(F,\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\bar{x}$ uma solução do $VIP(F,\Omega)$. Dado que $\bar{x} \in \Omega$ e x_k é a solução de $VIP(F_k,\Omega)$, temos que

$$\langle F(x_k) + \varepsilon_k x_k, \bar{x} - x_k\rangle \geq 0,$$

para todo $k \in I\!N$. Logo, como $\langle F(\bar{x}), x_k - \bar{x}\rangle \geq 0$, obtemos, usando a monotonicidade de F, que

$$0 \leq \langle F(x_k) - F(\bar{x}), x_k - \bar{x}\rangle \leq \varepsilon_k\langle x_k, \bar{x} - x_k\rangle - \langle F(\bar{x}), x_k - \bar{x}\rangle$$

$$\leq \varepsilon_k\langle x_k, \bar{x} - x_k\rangle \leq \varepsilon_k(\|x_k\|\|\bar{x}\| - \|x_k\|^2) = \varepsilon_k\|x_k\|(\|\bar{x}\| - \|x_k\|).$$

Deste modo,

$$\|x_k\| \leq \|\bar{x}\| \quad \text{para todo} \quad k \in I\!N. \tag{5.1}$$

Portanto, a seqüência $\{x_k\}$ é limitada. Pelo Teorema 5.1, qualquer ponto limite de $\{x_k\}$ é uma solução do $VIP(F,\Omega)$. Agora, por (5.1) os pontos limite de $\{x_k\}$ têm que ser soluções de norma mínima do $VIP(F,\Omega)$. Pelo resultado dado em [[57], Proposição 3.1] o conjunto de soluções do VIP é convexo e, portanto, a solução de norma mínima é única. **QED**

Observe que com este teorema a monotonicidade garante algo mais forte que o fato da seqüência de soluções dos problemas perturbados estar limitada: sua própria convergência. Além disso, caracteriza a solução à qual converge. Este resultado é apresentado por Cottle, Pang e Stone em [17], no caso do problema da complementaridade linear.

O teorema que pede uma condição diferente da monotonia, com a qual conseguem-se os resultados pedidos na apresentação.

Teorema 5.4 *Sejam $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo, fechado e não vazio. Se alguma das seguintes condições se cumpre*
(a) *Ω é limitado;*

(b) *F satisfaz a condição* **B1**,
então o problema original e os perturbados têm solução e a seqüência de soluções perturbadas é limitada.

Demonstração.
(a) No teorema básico da complementaridade em [21] temos que se o conjunto Ω é limitado e não vazio o problema original e os perturbados têm solução. Além disso $x_k \in \Omega$, logo a seqüência gerada está limitada.

(b) Se Ω está limitado estamos no caso (a). Suponhamos então que Ω é ilimitado e definamos a seguinte seqüência de conjuntos

$$\Omega_n = B_n(0) \cap \Omega,$$

$$\Gamma_n = \Omega \setminus \Omega_n.$$

Logo, $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ e $\Omega = \Omega_n \cup \Gamma_n$.

Agora existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_0 \in \Omega_n$ para todo $n \geq n_0$. Pelo teorema fundamental da complementaridade, $VIP(F, \Omega_n)$ tem solução x_*^n, para todo $n \geq n_0$.

Suponhamos que $VIP(F, \Omega)$ não tenha solução. Mostraremos que $\|x_*^n\| = n$. Suponhamos o contrário, $\|x_*^n\| < n$. Logo, pela convexidade de Ω, para todo $y \in \Gamma_n$ existem $w \in \Omega$ e $\lambda > 0$ tais que

$$y - x_*^n = \lambda(w - x_*^n),$$

e dado que x_*^n é solução de $VIP(F, \Omega_n)$,

$$F(x_*^n)^T(y - x_*^n) = \lambda F(x_*^n)(w - x_*^n) \geq 0$$

para todo $y \in \Gamma_n$. Logo, x_*^n é solução do $VIP(F, \Omega)$ em contradição com o suposto. De onde fica $\|x_*^n\| = n$, para todo $n \geq n_0$.

Agora, dado que x_*^n é solução do $VIP(F, \Omega_n)$, temos

$$F(x_*^n)^T(x_*^n - x_0) \leq 0, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Isto contradiz a validade da condição **B1**. Logo, $VIP(F, \Omega)$ tem solução.

Agora, vamos provar que F_k cumpre a condição **B1**.

Dado que F cumpre a condição **B1**, temos que se $\{x_j\}$ é uma seqüência tal que $\|x_j\| \to \infty$, então existe j_0 tal que

$$\langle F(x_j) + \varepsilon_k x_j, x_j - x_0\rangle \geq \langle F(x_j), x_j - x_0\rangle + \varepsilon_k\|x_j\|(\|x_j\| - \|x_0\|) > 0$$

para todo $j \geq j_0$, de onde temos que F_k cumpre tambem a condição **B1**.

Com isto está completa a demonstração da existência de solução do problema original e os perturbados.

A prova que $\{x_k\}$, a seqüência de soluções perturbadas, está limitada se faz como segue:

Como x_k é solução do problema perturbado, temos

$$\langle F(x_k) + \varepsilon_k x_k, x_k - x_0\rangle \leq 0.$$

Logo, como F_k satisfaz **B1**,

$$\langle F(x_k), x_k - x_0\rangle \leq -\varepsilon_k\langle x_k, x_k - x_0\rangle \leq -\varepsilon_k\|x_k\|(\|x_k\| - \|x_0\|)$$

Portanto, $\{x_k\}$ tem que estar limitada. **QED**

Agora apresentaremos o teorema que trata a condição **B2**.

Teorema 5.5 *Se F sastifaz a condição* **B2**, *e o problema original e os problemas perturbados têm solução, então a seqüência de problemas perturbados $\{x_k\}$ está limitada.*

Demonstração. A demonstração é idêntica à do Teorema 5.4. **QED**

Que a monotonicidade não implica a condição **B2** fica claro com um exemplo que tenha o conjunto Ω ilimitado e $F(x) = 0$. Por sua vez o seguinte exemplo mostra que a condição **B2** não implica a monotonicidade.

Exemplo 5.1. Seja

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1^2+1} \\ \frac{x_2}{x_2^2+1} \end{pmatrix} .$$

Então, se cumpre a condição **B1** com $x_0 = (0, 0)$, mas

$$F'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1-x_1^2}{x_1^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2+1} \end{pmatrix}$$

não é semi-definida positiva. Isto implica que F não pode ser monótona (ver [101]).

Há de se observar que a condição **B1** é mais fraca que a coercividade definida na introdução (ver [93]). Se a condição **B1** não é valida, então para todo $x_0 \in \Omega$ existe uma seqüência $\{x_k\} \subset \Omega$ com $\|x_k\| \to \infty$, tal que

$$\lim_{k \to \infty} F(x_k)^T (x_k - x_0) \leq 0,$$

de onde está claro que F não pode ser coerciva. A recíproca não é verdadeira. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.2. Seja $F(x) = 1$ e $\Omega = I\!R_+$. A condição **B1** se cumpre em $x = 0$, pois $F(x)(x - 0) = x \geq 0$. Porém a função não é coerciva, dado que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)(x - x_0)}{|x|} = 1,$$

para todo $x_0 \in I\!R_+$.

5.3.2 Caso em que Ω é uma caixa

A motivação para analisar este caso separadamente está no fato de que a condição de equivalência com os pontos estacionários, como já se mostrou no capítulo 3, exige condições mais fracas para Jacobiano da função F do problema original (P-função no caso não linear ou que a M fosse coluna-suficiente no caso linear). Mostramos no exemplo 2.6 que não se podia atingir o resultado com a condição de P_0-função.

Considerando a proposição 1.6, se a função F do problema original é uma P_0-função, a função perturbada F_k se converte em uma P-função e com isto estamos em condições de achar a solução dos problemas perturbados usando nossa estratégia. Isto justifica a idéia de se estender os resultados para P_0-funções.

Antes de começarnos a analisar tal extensão, mostraremos que com a condição de monotonicidade, podemos garantir que os conjuntos de nível do problema de otimização associado ao problema perturbado estão limitados, o que tem uma grande importância do ponto de vista algorítmico.

Teorema 5.6 *Se F é P-uniforme então os conjuntos de nível de*

$$f(x,v,r) = \|F(x) - (v,0)^t + (0,r,0)^t\| +$$

$$\rho\left[\left(\sum_{i=1}^{s_2}((x_i - c_i)v_i)^l\right)^p + \left(\sum_{i=s_1}^{s_3}((t_i - x_i)r_i)^l\right)^p\right], \tag{5.2}$$

definida sobre $\Omega_c \times I\!R_+^{s_2} \times I\!R_+^{s_3-s_1}$, são limitados.

Demonstração. Dado $\beta > 0$, defimos

$$S = \{(x,v,r) \in \Omega_c \times I\!R_+^{s_2} \times I\!R_+^{s_3-s_1} \mid f(x,v,r) \leq \beta\}.$$

Se $(x,v,r) \in S$, então

$$|[F(x) - (v,0)^t + (0,r,0)^t]_i| \leq \sqrt{\beta}, \tag{5.3}$$

$$(x_i - c_i)v_i \leq (\frac{\beta}{\rho})^{\frac{1}{pl}} \text{ se } i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2, \tag{5.4}$$

$$(t_i - x_i)r_i \leq (\frac{\beta}{\rho})^{\frac{1}{pl}} \text{ se } i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3. \tag{5.5}$$

Dado que F é P-uniforme e $x_0 \in \Omega_c$, temos que para todo $x \in \Omega_c$, vale

$$\varepsilon\|x - x_0\|^2 \leq \max_i\{(F_i(x) - F_i(x_0))[x - x_0]_i\}$$

$$= \max_i\{[F(x) - F(x_0) - (v,0)^t + (0,r,0)^t]_i[x - x_0]_i$$

$$+[(v,0) - (0,r,0)^t]_i[x - x_0]_i\}$$

$$\leq \|x - x_0\|(\|F(x_0)\| + \sqrt{\beta}) + \max_i\{[\bar{x} - \bar{x}_0]_i v_i + [\tilde{x} - \tilde{x}_0]_i r_i\}$$

$$\leq \|x - x_0\|(\|F(x_0)\| + \sqrt{\beta}) + \max_i\{[\bar{x} - c]_i v_i\} + \max_i\{[t - \tilde{x}]_i]r_i\}$$

$$\leq \|x - x_0\| \left(\|F(x_0)\| + \sqrt{\beta} + \frac{2(\frac{\beta}{\rho})^{\frac{1}{pl}}}{\|x - x_0\|}\right).$$

Logo

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\|F(x_0)\| + \sqrt{\beta} + \frac{2(\frac{\beta}{\rho})^{\frac{1}{pl}}}{\|x - x_0\|}}{\varepsilon}.$$

Isto implica que para todo $(x,v,r) \in \mathcal{S}$, x está limitado. Com isto e (5.3), temos que existe $\sigma > 0$ tal que

$$\|-(v,0)^t + (0,r,0)^t\|^2 = \sum_{i=1}^{s_1} v_i^2 + \sum_{i=s_1}^{s_2}(v_i - r_i)^2 + \sum_{i=s_2}^{s_3} r_i^2 \leq \sigma. \tag{5.6}$$

Logo, as únicas componentes de v ou r que podem não estar limitadas são as $i \in \mathcal{I}_2$. Mas se isto acontecer, $v_i \to \infty$ e $r_i \to \infty$. Logo, de (5.4) e (5.3) temos que $x_i = a_i = t_i$ e então esta seria uma restrição de igualdade, que não se considera neste caso. Portanto r e v estão limitadas. **QED**

Extensão para uma P_0-função.

O primeiro ponto a observar é que o fato de se perturbar o problema original não garante a existência de solução do problema perturbado, ainda que o problema original tenha solução. Vejamos o seguinte exemplo

Exemplo 5.3. Seja

$$F(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução de $LCP(M, q)$ é o seguinte

$$S = \{x \in I\!R^2 \ \mid \ \{x^T = (0,1)+\lambda(0,1)\} \text{ ou } \{x^T = (0,1)+\lambda(1,1)\}, \text{ e } \lambda > 0\}.$$

A função perturbada fica

$$F_\varepsilon(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varepsilon - 1)x_1 + x_2 - 1 \\ \varepsilon x_2 \end{bmatrix}.$$

Se o problema LCP perturbado tivese solução, teria que satisfazer

$$[F_\varepsilon(x(\varepsilon))]_2 x_2(\varepsilon) = \varepsilon x_2(\varepsilon)^2 = 0.$$

Logo,

$$x_2(\varepsilon) = 0.$$

Com este valor de $x_2(\varepsilon)$, para $x_1(\varepsilon) \geq 0$ temos que

$$[F_\varepsilon(x)]_1 = (\varepsilon - 1)x_1(\varepsilon) - 1 < 0,$$

se $0 < \varepsilon \leq 1$. Isto mostra que o problema perturbado não tem solução se $0 < \varepsilon \leq 1$.

Por isso, para darnos uma resposta adequada ao ponto (i) da apresentação deste capítulo, tería que demonstrar o seguinte:

"Se a função F do problema original é uma P_0 função, e ele tem solução, os problemas perturbados também têm solução."

Tal resposta foi obtida no caso linear. Mas para o caso não linear, não se conseguiu nem uma demonstração nem um contra-exemplo. Há de se observar que também não foi achado na literatura nenhum resultado a respeito. Logo, isto se constitui em um interessante problema aberto.

Para o caso não linear encontrou-se um resultado importante do ponto de vista prático, que diz que se as soluções dos problemas perturbados existem, elas são únicas.

Lema 5.1. *Se F é uma P-função e o problema $VIP(F, \Omega_c)$ tem solução, então ela é única.*

Demonstração. Seja x_* solução do $VIP(F, \Omega_c)$, então

$$\text{para } i \in \mathcal{I}_1 \quad \begin{cases} \text{se} \quad [x_*]_i = c_i \quad \text{então} \quad F_i(x_*) \geq 0 \\ \text{se} \quad [x_*]_i > c_i \quad \text{então} \quad F_i(x_*) = 0 \end{cases}; \tag{5.7}$$

$$\text{para } i \in \mathcal{I}_2 \quad \begin{cases} \text{se} \quad [x_*]_i = c_i & \text{então} \quad F_i(x_*) \geq 0 \\ \text{se} \quad c_i < [x_*]_i < t_i & \text{então} \quad F_i(x_*) = 0 \\ \text{se} \quad [x_*]_i = t_i & \text{então} \quad F_i(x_*) \leq 0 \end{cases}; \tag{5.8}$$

$$\text{para } i \in \mathcal{I}_3 \quad \begin{cases} \text{se} \quad [x_*]_i = t_i \quad \text{então} \quad F_i(x_*) \leq 0 \\ \text{se} \quad [x_*]_i < t_i \quad \text{então} \quad F_i(x_*) = 0 \end{cases}; \tag{5.9}$$

$$\text{para } i \in \mathcal{I}_4 \text{ então } F_i(x_*) = 0. \tag{5.10}$$

Suponhamos agora que existem x_*, y_* soluções do problema $VIP(F, \Omega)$ com $x_* \neq y_*$, e chamemos

$$\omega_i = (F_i(x_*) - F_i(y_*))([x_*]_i - [y_*]_i).$$

Analisaremos o valor de ω_i, em todos os casos:

(1) Se $i \in \mathcal{I}_1$

(a) Se $[x_*]_i = c_i$, então

$$\omega_i \begin{cases} = 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = c_i \\ \leq F_i(x_*)(c_i - [y_*]_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i > c_i \end{cases}$$

(b) Se $[x_*]_i > c_i$, então

$$\omega_i \begin{cases} = 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i > c_i \\ \leq -F_i(y_*)([x_*]_i - c_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = c_i \end{cases}$$

Portanto, se $i \in \mathcal{I}_1$, temos que $w_i \leq 0$.

(2) Se $i \in \mathcal{I}_2$
(a) Se $[x_*]_i = c_i$, então

$$\omega_i \begin{cases} = 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = c_i \\ \leq F_i(x_*)(c_i - [y_*]_i) \leq 0 & \text{Se} \quad c_i < [y_*]_i < t_i \\ \leq (F_i(x_*) - F_i(y_*))(c_i - t_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = t_i \end{cases}$$

(b) $c_i < [x_*]_i < t_i$, então

$$\omega_i \begin{cases} \leq -F_i(y_*)([x_*]_i - c_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = c_i \\ = 0 & \text{Se} \quad c_i < [y_*]_i < t_i \\ \leq -F_i(y_*)([x_*]_i - t_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = t_i \end{cases}$$

(c) $[x_*]_i = t_i$, então

$$\omega_i \begin{cases} \leq (F_i(x_*) - F_i(y_*))(t_i - c_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = c_i \\ \leq F_i(x_*)([t_i - [y_*]_i) \leq 0 & \text{Se} \quad c_i < [y_*]_i < t_i \\ = 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = t_i \end{cases}$$

Portanto, se $i \in \mathcal{I}_2$, temos que $w_i \leq 0$.

(3) Se $i \in \mathcal{I}_3$

(a) Se $[x_*]_i < c_i$, então

$$\omega_i \begin{cases} = 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i < t_i \\ \leq -F_i(y_*)([x_*]_i - t_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = t_i \end{cases}$$

(b) Se $[x_*]_i = t_i$, então

$$\omega_i \begin{cases} \leq F_i(x_*)(t_i - [y_*]_i) \leq 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i < t_i \\ = 0 & \text{Se} \quad [y_*]_i = t_i \end{cases}$$

Portanto, se $i \in \mathcal{I}_3$, temos que $w_i \leq 0$.

(4) $i \in \mathcal{I}_4$

$$F_i(x_*) = F_i(y_*) = 0, \text{ então } \omega_i = 0$$

Com isto fica

$$\omega_i = (F_i(x_*) - F_i(y_*))([x_*]_i - [y_*]_i) \leq 0,$$

para todo i.

Como F é uma P-função, isto implica que $x_* = y_*$, e com isto conclui a demonstração. **QED**

Este resultado é a extensão para uma caixa, do dado por Moré em [92], para o NCP.

O ponto (ii) da apresentação, propunha verificar que a seqüência de soluções dos problemas perturbados era limitada. O exemplo que daremos a seguir, mostra que se a função F do problema original é uma P_0-função, ainda que este e os problemas perturbados tenham solução, não está garantido que a seqüência de soluções dos problemas perturbados seja limitada.

Exemplo 5.4. Seja

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Claramente a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma P_0-matrix. E o conjunto solução de $LCP(F)$ é o seguinte

$$S = \{x \in I\!R^2 \mid \{x^T = (0,1) + \lambda(1,0)\} \text{ ou } \{x^T = (0,1) + \lambda(0,1)\} \text{ e } \lambda > 0\}.$$

A função perturbada é dada por

$$F_\varepsilon(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon x_1 + x_2 - 1 \\ \varepsilon x_2 \end{bmatrix},$$

e a solução do $LCP(M + \varepsilon I, (-1,0)^T)$ é

$$x_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad x_2(\varepsilon) = 0$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|x(\varepsilon)\| = \infty.$$

Com este exemplo, mostramos que a seqüência de soluções perturbadas não está limitada mesmo no caso linear.

Este exemplo obriga a encontrar as condições que deve cumprir a função F do problema original para que as soluções dos problemas perturbados sejam limitadas.

No caso não linear as condições encontradas estão dadas nos Teoremas 5.4 e 5.5, que como já vimos garantem também a existência de soluções. Isto será expressado nos seguintes corolários.

Corolário 5.1. *Sejam $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e Ω_c não vazio. Se algumas das seguintes condições se cumprem*
(a) *Ω_c é limitado;*

(b) *F satisfaz a condição* **B1**,
então o problema original e os perturbados têm solução e a seqüência de soluções perturbadas é limitada.

Demonstração. Igual à do Teorema 5.4. **QED**

Corolário 5.2. *Se a função F satisfaz a condição* **B2**, *e o problema original e os problemas perturbados têm solução, então a seqüência de problemas perturbados $\{x_k\}$ está limitada.*

Demonstração. Igual à do Teorema 5.5. **QED**

Caso Linear

No caso que a função F seja linear, daremos uma resposta completa ao ponto (i) da apresentação, que pedia verificar que a solução dos problemas perturbados existissem. Isto está apresentado no seguinte teorema.

Teorema 5.7 *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, da forma $F(x) = Mx + q$ e seja M uma P-função. Então o problema $VIP(F, \Omega_c)$, tem solução e é unica.*

Demonstração. Seja o seguinte problema

$$\text{Minimizar } \|Mx + q + (0, r, 0)^t - (v, 0)^t\|^2 + \sum_{i=1}^{s_2}(x_i - c_i) + \sum_{i=s_1}^{s_3}(t_i - x_i)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} x \in \Omega_c \\ r \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} . \qquad (5.11)$$

De acordo com o Corolário 3.2, se (x_*, r_*, v_*) é um ponto KKT do problema (5.11) e M é uma P-matriz, então x_* é uma solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$. Dado que Ω_c é não vazio, pelo teorema Frank-Wolfe, o problema (5.11) tem solução e esta é um ponto KKT. Logo, ela é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$ e a unicidade está dada pelo Lema 5.6. **QED**

O exemplo 5.4 mostra que ainda no caso linear, o fato de M ser uma P_0-matriz não garante que a seqüência de soluções dos problemas perturbados seja limitada. No seguinte teorema daremos as condições para que isto aconteça.

Teorema 5.8 *Seja $F : I\!R^n \to I\!R^n$, $F(x) = Mx + q$, e o seguinte conjunto*

$$\Lambda = \{x \in I\!R^n \mid x_i \geq 0 \; i \in \mathcal{I}_1, \;\; x_i = 0 \;\; i \in \mathcal{I}_2 \;\; x_i \leq 0 \;\; i \in \mathcal{I}_3\}$$

e seja $\tilde{F}(x) = Mx$. Se o problema $VIP(\tilde{F}, \Lambda)$ tem solução única, $x = 0$, então $\{x_k\}$, a seqüência dos problemas perturbados do problema $VIP(F, \Omega_c)$, está limitada.

Demonstração. Seja $\hat{x} \in \Omega_c$ da seguinte forma

$$\hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_i = c_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \\ \hat{x}_i = \frac{t_i - c_i}{2} & \text{se } i \in \mathcal{I}_2 \\ \hat{x}_i = t_i & \text{se } i \in \mathcal{I}_3 \\ \hat{x}_i = 0 & \text{se } i \in \mathcal{I}_4. \end{cases}$$

Dado que x_k é solução de $VIP(F_k, \Omega_c)$, obtemos

$$[F_k(x_k)]_i([x_k]_i - [\hat{x}]_i) = 0, \;\; [F_k(x_k)]_i \geq 0, \;\; [x_k]_i - [\hat{x}]_i \geq 0 \quad \text{se } i \in \mathcal{I}_1 \tag{5.12}$$

$$([x_k]_i - [\hat{x}]_i) \text{ é limitada se } i \in \mathcal{I}_2, \tag{5.13}$$

$$[F_k(x_k)]_i([x_k]_i - [\hat{x}]_i) = 0, \;\; [F_k(x_k)]_i \leq 0, \;\; [x_k]_i - [\hat{x}]_i \leq 0 \text{ se } i \in \mathcal{I}_3, \tag{5.14}$$

$$[F_k(x_k)]_i = 0 \text{ se } i \in \mathcal{I}_4. \tag{5.15}$$

Suponhamos que $\|x_k\| \to \infty$. Logo, existe uma subseqüência de $\{x_k\}$ tal que

$$\frac{x_k - \hat{x}}{\|x_k - \hat{x}\|} \to p \quad .$$

com $\|p\| = 1$.

Agora, dividamos por $\|x_k - \hat{x}\|$ cada componente de $F_k(x_k)$. Então

$$\frac{[F_k(x_k)]_i}{\|x_k - \hat{x}\|} = \frac{[(M + \varepsilon_k I)(x_k - \hat{x}) + (q - M\hat{x} - \varepsilon_k \hat{x})]_i}{\|x_k - \hat{x}\|} =$$

$$\left[(M + \varepsilon_k I)\frac{(x_k - \hat{x})}{\|x_k - \hat{x}\|} + \frac{q - M\hat{x} - \varepsilon_k \hat{x}}{\|x_k - \hat{x}\|}\right]_i \to [Mp]_i. \tag{5.16}$$

Atendendo a (5.12)-(5.16), obtemos

$$[Mp]_i[p]_i = 0, \ \ [Mp]_i \geq 0, \ \ [p]_i \geq 0 \ \text{ se } \ i \in \mathcal{I}_1. \tag{5.17}$$

$$[p]_i = 0 \ \text{ se } \ i \in \mathcal{I}_2, \tag{5.18}$$

$$[Mp]_i[p]_i = 0, \ \ [Mp]_i \leq 0 \ \ [p]_i \leq 0 \ \text{ se } \ i \in \mathcal{I}_3, \tag{5.19}$$

$$[Mp]_i = 0 \ \text{ se } \ i \in \mathcal{I}_4. \tag{5.20}$$

De (5.17)-(5.20) é claro que p é solução do problema $VIP(\hat{F}, \Lambda)$, o que contradiz a hipótese. **QED**

Observe-se que a condição dada no Teorema 5.8 é uma extensão para uma caixa, da dada por Cottle, Pang e Stone em [17] para o caso $LCP(M, q)$, onde a condição pedida é que $LCP(M, 0)$ tenha solução única.

5.4 Soluções Inexatas dos Problemas Perturbados

Do ponto de vista computacional, é muito interessante analisar o comportamento teórico e prático de nossa estratégia no caso dos problemas perturbados serem resolvidos de forma inexata. O que faremos nesta secção será dar uma resposta a esta questão.

Antes de apresentarnos os resultados, propomos o seguinte lema que nos sera útil para as demonstrações.

Lema 5.2. *Seja Z um conjunto não vazio da seguinte forma*

$$Z = \{x \in I\!R^n \mid Bx \geq 0\}$$

e seja $\{x_k\}_{k \in N} \subset Z$ uma seqüência tal que

$$Ax_k \to b.$$

Então existe $x_* \in Z$ tal que

$$Ax_* = b.$$

Demonstração. Pelo teorema Frank-Wolfe (proposição 1.9.) o problema:

$$\min_{x \in Z} \|Ax - b\| \tag{5.21}$$

tem solução. Seja x_* a solução de norma mínima de (5.21). Então $\|Ax_* - b\| \leq \|Ax_k - b\|$ para todo $k \in I\!N$. Tomando limite

$$\|Ax_* - b\| = 0,$$

o que conclui demonstração do lema. **QED**

Primeiramente vamos verificar que se a seqüência de soluções inexatas dos problemas perturbados está limitada, então seus os pontos limites são soluções do problema original. O seguinte teorema mostra isto.

Teorema 5.9 *Seja* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência limitada de soluções inexatas do problema* $P_k(\Omega)$*. Suponhamos que o conjunto* Ω_g *satisfaz uma condição de Slater sobre* Ω*. Então todo ponto limite de* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *é solução de* $VIP(F,\Omega)$*.*

Demonstração. Seja x_* um ponto limite da seqüência $\{x_k\}$ e a seguinte seqüência $(x_k, y_k, z_k, u_k, v_k, r_k) \in \mathcal{T}_k(\Omega)$. Definamos os seguintes conjuntos associados com esta seqüência:

$$\mathbb{K}_1 = \{i \in \mathcal{M} \mid [y_k]_i \to \infty\},$$

$$\mathbb{K}_2 = \{i \in \mathcal{Q} \mid [u_k]_i \to \infty\},$$

$$\mathbb{K}_3 = \{i \in \mathcal{S}_1 \mid [v_k]_i \to \infty\},$$

$$\mathbb{K}_4 = \{i \in \mathcal{S}_2 \mid [r_k]_i \to \infty\}.$$

Dado que $(x_k, y_k, z_k, u_k, v_k, r_k) \in \mathcal{T}_k(\Omega)$ temos que existem $\{\vartheta_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\varrho_k\}$, $\{\delta_k\}$ e $\{\gamma_k\}$ tais que

$$F(x_k) + \varepsilon_k x_k + g'(x_k)^T y_k + A^T u_k - (v_k, 0)^T + (0, r_k, 0) = \vartheta_k, \tag{5.22}$$

$$z_k + g(x_k) = \alpha_k, \tag{5.23}$$

$$Ax_k + b = \nu_k, \tag{5.24}$$

$$y_k^T z_k = \delta_k, \tag{5.25}$$

$$(\bar{x}_k - c)^T v_k = \gamma_k, \tag{5.26}$$

$$(t - \tilde{x}_k)^T r_k = \varrho_k, \tag{5.27}$$

$$x_k \in \Omega_c, \tag{5.28}$$

$$y_k \geq 0, z_k \geq 0, v_k \geq 0, r_k \geq 0, \tag{5.29}$$

onde

$$\|\vartheta_k\| \leq \beta\varepsilon_k, \;\; \|\nu_k\| \leq \beta\varepsilon_k, \;\; \|\alpha_k\| \leq \beta\varepsilon_k, \;\; \delta_k, \; \gamma_k, \; \varrho_k \leq \beta\varepsilon_k \tag{5.30}$$

Logo, a equação (5.22) pode ser escrita como

$$\sum_{i\in \mathbb{K}_1} \nabla g_i(x_k)[y_k]_i + \sum_{i\in \mathbb{K}_2} a_i[u_k]_i - \sum_{i\in \mathbb{K}_3} [v_k]_i e_i + \sum_{i\in \mathbb{K}_4} [r_k]_i e_i =$$

$$\sum_{i\in \mathcal{M}\setminus \mathbb{K}_1} \nabla g_i(x_k)[y_k]_i + \sum_{i\in \mathcal{Q}\setminus \mathbb{K}_2} a_i[u_k]_i - \sum_{i\in \mathcal{S}_1\setminus \mathbb{K}_3} [v_k]_i e_i +$$

$$\sum_{i\in \mathcal{S}_2\setminus \mathbb{K}_4} [r_k]_i e_i - F(x_k) - \varepsilon_k x_k + \vartheta_k. \tag{5.31}$$

Dado que o segundo termo da igualdade (5.31) está limitado, existe uma subseqüência de $\{x_k\}$ que chamaremos também $\{x_k\}$, tal que

$$\sum_{i\in \mathbb{K}_1} \nabla g_i(x_k)[y_k]_i + \sum_{i\in \mathbb{K}_2} a_i[u_k]_i - \sum_{i\in \mathbb{K}_3} [v_k]_i e_i + \sum_{i\in \mathbb{K}_4} [r_k]_i e_i \to \eta. \tag{5.32}$$

Chamemos

$$\hat{y}_k = ([y_k]_{i_1}, \ldots, [y_k]_{i_s}) \;\; \text{com} \;\; i_j \in \mathbb{K}_1.$$

Suponhamos $\mathbb{K}_1 \neq \emptyset$. Dividamos a expressão (5.32) por $\|\hat{y}_k\|$. Logo, existe uma subseqüência de $\{x_k\}$ que chamaremos $\{x_k\}$ tal que

$$\sum_{i\in \mathbb{K}_2} \frac{[u_k]_i}{\|\hat{y}_k\|} a_i - \sum_{i\in \mathbb{K}_3} \frac{[v_k]_i}{\|\hat{y}_k\|} e_i + \sum_{i\in \mathbb{K}_4} \frac{[r_k]_i}{\|\hat{y}_k\|} e_i \to \sigma, \tag{5.33}$$

com

$$\sigma = -\sum_{i\in \mathbb{K}_1} \nabla g_i(x_*)\mu_i,$$

$\mu \neq 0$ e $\mu_i \geq 0$.

Agora, chamemos

$$[\hat{u}_k]_i = \frac{[u_k]_i}{\|\hat{y}_k\|}, \ \ [\hat{v}_k]_i = \frac{[v_k]_i}{\|\hat{y}_k\|}, \ \ [\hat{r}_k]_i = \frac{[r_k]_i}{\|\hat{y}_k\|}.$$

Por (5.29) temos que $\hat{v}_k \geq 0$, $\hat{r}_k \geq 0$. Logo podemos escrever (5.33) da seguinte forma

$$\sum_{i \in \mathbb{K}_2} [\hat{u}_k]_i a_i - \sum_{i \in \mathbb{K}_3} [\hat{v}_k]_i e_i + \sum_{i \in \mathbb{K}_4} [\hat{r}_k]_i e_i \to \sigma. \tag{5.34}$$

Com isto, se $l_i =$ cardinal $(\mathbb{K}_i)$, aplicando o Lema 5.2, temos que existe $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{r}) \in \mathbb{R}^{l_1} \times \mathbb{R}_+^{l_2} \times \mathbb{R}_+^{l_3}$, tal que

$$\sum_{i \in \mathbb{K}_2} a_i [\hat{u}]_i - \sum_{i \in \mathbb{K}_3} [\hat{v}]_i e_i + \sum_{i \in \mathbb{K}_4} [\hat{r}]_i e_i = - \sum_{i \in \mathbb{K}_1} \nabla g_i(x_*) \mu_i. \tag{5.35}$$

Por outro lado, por (5.23)-(5.27), temos que:

$$g_i(x_*) = 0 \ \text{ para todo } \ i \in \mathbb{K}_1, \tag{5.36}$$

$$[x_*]_i = c_i \ \text{ para todo } \ i \in \mathbb{K}_3, \tag{5.37}$$

$$[x_*]_i = t_i \ \text{ para todo } \ i \in \mathbb{K}_4. \tag{5.38}$$

Como x_* está limitado, levando em conta (5.23), (5.24) (5.26) e (5.27) temos que $x_* \in \Omega$. Logo se $x \in \Omega$, de (5.37) e (5.38) obtemos

$$\begin{array}{ll} a_i^T(x - x_*) = 0 & \text{se } i \in \mathbb{K}_1, \\ [x - x_*]_i \geq 0 & \text{se } i \in \mathbb{K}_3, \\ [x - x_*]_i \leq 0 & \text{se } i \in \mathbb{K}_4. \end{array} \tag{5.39}$$

Por (5.39), multiplicando (5.35) por $-(x - x_*)$, obtemos

$$(x - x_*)^T \sum_{i \in \mathbb{K}_1} \nabla g_i(x_*) \mu_i \geq 0. \tag{5.40}$$

Logo, pela convexidade das g_i como $\mu_i \geq 0$ e por (5.36) temos que para todo $x \in \Omega$

$$0 \leq (x - x_*)^T \sum_{i \in \mathbb{K}_1} \nabla g_i(x_*)\mu_i \leq \sum_{i \in \mathbb{K}_1} (g_i(x) - g_i(x_*))\mu_i = \sum_{i \in \mathbb{K}_1} g_i(x)\mu_i. \quad (5.41)$$

Já que $x \in \Omega$ e $g_i(x) \leq 0$, por (5.41) e $\mu \neq 0$, temos que existe $i \in \mathcal{M}$, tal que $g_i(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Isto contradiz o fato que o conjunto Ω_c satisfazer a condição de Slater sobre Ω. Logo $\mathbb{K}_1 = \emptyset$. Com isto (5.32) fica

$$\sum_{i \in \mathbb{K}_2} a_i[u_k]_i - \sum_{i \in \mathbb{K}_3} [v_k]_i e_i + \sum_{i \in \mathbb{K}_4} [r_k]_i e_i \to \eta. \quad (5.42)$$

De (5.42), aplicando o Lema 5.2, existe $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{r}) \in \mathbb{R}^{l_1} \times \mathbb{R}^{l_2}_+ \times \mathbb{R}^{l_3}_+$ tal que

$$\sum_{i \in \mathbb{K}_2} a_i[\hat{u}]_i - \sum_{i \in \mathbb{K}_3} [\hat{v}]_i e_i + \sum_{i \in \mathbb{K}_4} [\hat{r}]_i e_i = \eta. \quad (5.43)$$

Logo, podemos afirmar que estamos nas condições do Teorema 2.1, isto é, existem $y_* \geq 0$, $z_* \geq 0$, $v_* \geq 0$, $r_* \geq 0$, $x \in \Omega_c$, tais que $f(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) = 0$. Logo x_* é solução do $VIP(F, \Omega)$. **QED**

Observe-se que a única condição pedida no Teorema 5.9 é uma condição de Slater sobre o conjunto. No seguinte teorema colocamos as condições que têm de se verificar para que uma seqüência de soluções seja limitada.

Teorema 5.10 *Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de soluções inexatas do problema $P_k(\Omega)$ com restrições simples, que cumpre $Ax_k = b$, e suponhamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que:*

(i) *A condição* **B2F** *se cumpre em x_0;*

(ii) *O conjunto Ω_g sastifaz uma condição de Slater sobre Ω em x_0.*
Então $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Demonstração. Como no Teorema 5.9, temos que se cumprem as equações (5.22)-(5.30) e

$$Ax_k - b = 0. \tag{5.44}$$

Com isto,

$$\langle F(x_k), x_k - x_0\rangle = \langle -\varepsilon_k x_k - g'(x_k)^T y_k - A^T u_k + (v_k, 0)^T$$

$$-(0, r_k, 0) + \vartheta_k, x_k - x_0\rangle \leq -\varepsilon_k\langle x_k, x_k - x_0\rangle + (x_0 - x_k)^T g'(x_k)^T y_k$$

$$+ u_k^T(Ax_k - b) + (\bar{x}_k - \bar{x}_0)^T v_k - r_k^T(\tilde{x}_k - \tilde{x}_0) - \vartheta_k^T(x_k - x_0). \tag{5.45}$$

Agora, analisaremos os diferentes termos de (5.45). Definamos

$$I\!\!K_1 = \{i \in \mathcal{M} \mid [y_k]_i \to \infty\}.$$

Pela convexidade das g_i e $y_k \geq 0$, temos que

$$(x_0 - x_k)^T g'(x_k)^T y_k \leq (g(x_0) - g(x_k))^T y_k$$

$$= \sum_{i \in I\!\!K_1} [g(x_0) - g(x_k)]_i [y_k]_i + \sum_{i \notin I\!\!K_1} [g(x_0) - g(x_k)]_i [y_k]_i.$$

Por (5.23) se $i \in I\!\!K_1$, então $g_i(x_k) \to 0$, e pela hipótese, $g_i(x_0) < 0$. Isto implica que existe k_0 tal que

$$\sum_{i \in I\!\!K_1} [g(x_0) - g(x_k)]_i [y_k]_i \leq 0 \tag{5.46}$$

para todo $k \geq k_0$.

Agora, chamemos

$$M = \max_{i \notin I\!\!K_1} [y_k]_i.$$

Este valor existe dado que se $i \notin I\!\!K_1$, as seqüências $\{[y_k]_i\}$ são limitadas. Logo por (5.23), temos

$$\sum_{i \notin I\!\!K_1} [g(x_0) - g(x_k)]_i [y_k]_i \leq \sum_{i \notin I\!\!K_1} [z_k - \alpha_k]_i [y_k]_i$$

$$\leq \delta_k + |\alpha_k| M \leq \varepsilon_k(1+M)\beta. \tag{5.47}$$

Por (5.26) e (5.27), resulta que

$$(\bar{x}_k - \bar{x}_0)^T v_k - r_k^T(\tilde{x}_k - \tilde{x}_0) \leq (\bar{x}_k - c)^T v_k - (t - \tilde{x}_k)^T r_k \leq$$

$$\gamma_k + \varrho_k \leq 2\varepsilon_k \beta. \tag{5.48}$$

Por (5.46),(5.47) e (5.48), a expressão (5.45) fica

$$\langle F(x_k), x_k - x_0 \rangle \leq -\varepsilon_k \langle x_k, x_k - x_0 \rangle + (1+M)\varepsilon_k \beta + 2\varepsilon_k \beta$$

$$+\vartheta_k^T(x_k - x_0) \leq -\beta \varepsilon_k \|x_k\| \left(\|x_k\| - \|x_0\| - 1 - \frac{3 + m + \|x_0\|}{\|x_k\|} \right).$$

Claramente, se $\|x_k\| \to \infty$, existe $k_1 \geq k_0$ tal que $x_k \in \mathcal{B}(x_0)$ para todo $k \geq k_0$, o que contradiz o fato de se cumprir a condição **B2F**. Então $\{x_k\}$ está limitada. **QED**

O seguinte teorema é uma conseqüência dos Teoremas 5.9 e 5.10.

Teorema 5.11 *Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de soluções inexatas de $P_k(\Omega)$, com $Ax_k = b$, e suponhamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que:*

(i) *A condição* **B2F** *se cumpre em x_0;*

(ii) *O conjunto Ω_g sastifaz uma condição de Slater sobre Ω em x_0.*
Então todo ponto limite de $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é solução de $VIP(F, \Omega)$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.9, fica claro que a seqüência $\{x_k\}$ está limitada. Usando o Teorema 5.10, se x_* é um ponto limite de $\{x_k\}$, temos que x_* é solução do $VIP(F, \Omega)$. **QED**

Observe-se que no caso que $VIP(F, \Omega)$ seja resolvido com um problema associado com restrições lineares(politopo), a condição $Ax_k = b$ é cumprida automaticamente.

Os corolários a seguir mostram os resultados para casos particulares do conjunto Ω.

Corolário 5.4. *Seja $\{x_k\}_{k\in N}$ uma seqüência de soluções inexatas de $P_k(\Omega_{g,c})$, e suponhamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que:*

(i) *A condição* **B2F** *se cumpre em x_0;*

(ii) *O conjunto Ω_g sastifaz uma condição de Slater sobre Ω em x_0.*
Então todo ponto limite de $\{x_k\}_{k\in N}$ é solução de $VIP(F, \Omega_{g,c})$.

Demonstração. Claramente tomando $A = 0$, $b = 0$ na demonstração dos Teoremas 5.9 e 5.10 resulta o proposto. **QED**

Corolário 5.6. *Seja $\{x_k\}_{k\in N}$ uma seqüência de soluções inexatas de $P_k(\Omega_c)$. Se a condição* **B2** *é satisfeita, então todo ponto limite de $\{x_k\}_{k\in N}$ é solução de $VIP(F, \Omega_c)$.*

Demonstração. Neste caso não existem as restrições $g(x) \leq 0$, $Ax = b$ e $x_k \in \Omega_c$. Colocando a condição **B2**, a demonstração se segue como no Teorema 5.11. **QED.**

Se o conjunto é limitado, não se precisa pedir nenhuma hipótese sobre F. Isto está expresso no seguinte teorema.

Teorema 5.12 *Seja $\{x_k\}_{k\in N}$ uma seqüência de soluções inexatas de $P_k(\Omega)$, suponhamos que Ω seja limitado e que Ω_g cumpre uma condição de Slater sobre Ω. Então todo ponto limite de $\{x_k\}_{k\in N}$ é solução de $VIP(F, \Omega)$.*

Demonstração. De (5.23), (5.24) e (5.28), temos que

$$g(x_k) + z_k \to 0,$$

$$Ax_k + b \to 0,$$

$$x_k \in \Omega_c.$$

Dado que Ω é fechado e limitado, ele é compacto. Portanto a distância entre x_k e Ω tende a zero, ou seja

$$d(x_k, \Omega) \to 0.$$

Logo, a seqüência $\{x_k\}$ está limitada. A demonstração segue-se como no Teorema 5.11. **QED**

Agora enunciaremos o teorema que mostra que no caso de uma caixa, a condição de monotonia é suficiente para garantir que as soluções inexatas dos problemas perturbados estejam limitadas.

Teorema 5.13 *Seja $\{x_k\}$ uma seqüência de soluções inexatas dos problemas $VIP(F_k, \Omega_c)$ e suponhamos que o $VIP(F, \Omega_c)$ tem solução. Se F é monótona, então $\{x_k\}$ é limitada.*

Demonstração. Como $\{x_k\}$ é uma seqüência de soluções inexatas, existem $\delta_k \in I\!R^n$, $\gamma_k, \alpha_k \in I\!R_+$ e $k_0 \in I\!N$ com $\|\delta_k\|, \gamma_k, \alpha_k \leq \beta \varepsilon_k$ tais que para todo $k \geq k_0$ cumpre-se

$$F(x_k) + \varepsilon_k x_k + (0, y_k, 0)^t - (z_k, 0)^t = \delta_k, \tag{5.49}$$

$$y_k^T (t - \tilde{x}_k) = \gamma_k, \tag{5.50}$$

$$z_k^T (\bar{x}_k - c) = \alpha_k, \tag{5.51}$$

$$y_k^T \geq 0, x_k \in \Omega_c, z_k \geq 0. \tag{5.52}$$

Por (5.49)-(5.52), temos que

$$\langle F(x_k) - F(x_0), x_k - x_0 \rangle \leq \langle F(x_k), x_k - x_0 \rangle \leq$$

$$\langle -\varepsilon_k x_k + (z_k, 0)^t - (0, y_k, 0)^t + \delta_k, x_k - x_0 \rangle \leq$$

$$-\varepsilon_k \langle x_k, x_k - x_0 \rangle + +\|\delta_k\| \|x_k - x_0\| + \langle \bar{x}_k - \bar{x}_0, z_k \rangle + \langle \tilde{x}_0 - \tilde{x}_k, y_k \rangle \leq$$

$$-\varepsilon_k\|x_k\|\left(\|x_k\| - \|x_0\| - \beta\left(1 + \frac{\|x_0\|}{\|x_k\|}\right)\right) + \langle \bar{x}_k - c, z_k\rangle + \langle t - \tilde{x}_k, y_k\rangle \leq$$

$$-\varepsilon_k\|x_k\|\left(\|x_k\| - \|x_0\| - \beta\left(3 + \frac{\|x_0\|}{\|x_k\|}\right)\right).$$

Logo se $\|x_k\| \to \infty$, existe $k_0 \in I\!N$, tal que

$$\langle F(x_k) - F(x_0), x_k - x_0\rangle < 0$$

para todo $k \geq k_0$. Isto contradiz a hipótese da monotonia. Logo, $\{x_k\}$ está limitada. **QED**

No caso em que Ω é úma caixa, este resultado completa a extensão para a monotonia. Com efeito, os resultados dos Teoremas 5.2 e 5.6 garantem a existência e a possibilidade de se encontrar com a precisão desejada as soluções dos problemas perturbados, e este último o Teorema 5.13 mostra que a seqüência de soluções inexatas está limitada.

5.5 Um Algoritmo

O algoritmo apresentado nesta secção está motivado pelos resultados obtidos na teoria de perturbações. Vamos supor que se $r = \max \lambda(F'(x))$, existe $b \leq 0$ tal que $r \geq b$ para todo $x \in I\!R^n$. Assim, se $T > -b$, a função $F(x) + T(x-a)$ é fortemente monótona. Com isto, se $T \gg 0$ o problema de inequações associado a esta função tem uma solução que está perto de a. Desta maneira, usando qualquer algoritmo de minimização com restrições simples, encontra-se a solução $(x(T), y(T), z(T), u(T), v(T), r(T))$ do problema perturbado com a precisão desejada. Esta situação afortunada pode ser estendida para todo $t \leq T$ tal que $F(x)+t(x-a)$ seja fortemente monótona, e para cada t a solução $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), r(t))$ pode ser achada com algoritmos clássicos.

A idéia é a seguinte: se T_0 é o ínfimo t tal que $F(x)+t(x-a)$ é fortemente monótona, os pontos $\{x(t), t > T_0\}$ provavelmnete geram uma curva que pode ser computacionalmente traçada. Muitas vezes, a solução do problema de otimização associado ao problema de inequações variacionais para $t < T_0$

pode ser obtida usando minimização. Chamaremos T_1 ao ínfimo t tal que a "curva" de soluções $X(T)$ possa ser traçada. Se $T_1 = 0$, o algoritmo funciona sem problemas. Se $T_1 > 0$, são possíveis várias alternativas, a maioria delas ligadas a "métodos de traçado homótopico para resolução de sistemas não lineares".Ver [36], [111], [120].

No algoritmo apresentado está sugerida uma mudança de homotopia quando uma aproximação de um ponto singular é computada. Isto é feito usando a última iteração que foi computada como o vetor da nova homotopia e trabalhando com um novo T.

Antes de descrevernos o algoritmo, definiremos a notação utilizada.

Chamaremos $P(a,t)$ ao problema de minimização associado ao $VIP(F,\Omega)$, definido por (2.1) e o operador $F(a,t,x) \equiv F(x) + t(x-a)$, isto é, $P(a,t)$ é dado por

$$\text{Minimizar } f_{a,t}(x,y,z,u,v,r)$$

$$\text{sujeita a} \quad x \in \Omega_c, y \geq 0, z \geq 0, v \geq 0, r \geq 0$$

onde

$$f_{a,t}(x,y,z,u,v,r) = \|F(x) + t(x-a) + g'(x)^T y + A^T u - (v,0)^t + (0,r,0)^T\|^2$$

$$+\rho_1\|z + g(x)\|^2 + \rho_2\|Ax - b\|^2 + \rho_3[(y^T z)^p + (\bar{x}^T v)^p],$$

e $\rho_1, \rho_2, \rho_3, p > 0$. Claramente, $P(a,0)$ é o problema (2.2).

Algoritmo 5.1.

Seja $T \gg 0$ e $a \in \Omega$.

$$x_0 \leftarrow a, \ \ y_0 \leftarrow 0, \ \ z_0 \leftarrow -g(x_0), \ \ u_0 \leftarrow 0, \ \ v_0 \leftarrow 0, \ \ r_0 \leftarrow 0.$$

Fase 1

Passo 1: *Tentar resolver (2.2)*

Usando um algoritmo de minimização com restrições simples, com a aproximação inicial $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, r_0)$, encontrar um ponto estacionário $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{r})$ de (2.2) tal que

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) \leq f(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, r_0). \tag{5.53}$$

Passo 2: *Critério de Parada*

Se $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) = 0$, então parar. O mínimo global de (2.2) foi encontrado.

Caso contrário, começamos o processo homótopico, fazendo $t \leftarrow T$.

Fase 2

Passo 3: *Tentar resolver $P(a, t)$*

Usando um algoritmo de minimização com restrições simples, com aproximação inicial $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, r_0)$, encontrar um ponto estacionário $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{v})$ de $P(a, t)$.

Passo 4: *Se o Passo 3 fracassa, aumentar t*

Se $f_{a,t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) > 0$, então tomar $t \leftarrow 2t$ e repetir o Passo 3.

Senão, fazer

$$(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \leftarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{r}),$$

$$t_c \leftarrow t, \quad t_- \leftarrow 0$$

e continuar com a fase 3 .

Fase 3

Passo 5: *Solucionar o problema de minimização para t_-*

Usando um algoritmo de otimização com restrições simples, com $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, r_0) \leftarrow (x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ como aproximação inicial, encontrar um ponto estacionário $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{r})$ de P_{a,t_-}.

Passo 6: *Testar se a solução de (2.2) foi achada*

Se $f_{a,t_-}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) = 0$ e $t_- = 0$, a solução global de (2.2) foi achada. Parar.

Passo 7: *Testar se um novo ponto sobre a curva homotópica foi achado*
Se $f_{a,t_-}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u},\bar{v},\bar{r}) = 0$, mas $t_- > 0$, fazer

$$(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \leftarrow (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u},\bar{v},\bar{r})$$

$$t_c \leftarrow t_-, \quad t_- \leftarrow 0,$$

e ir ao Passo 5.

Passo 8: *Incrementar t_-*
Se $f_{a,t_-}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u},\bar{v},\bar{r}) > 0$ e $t_c - t_- > 0.01t_c$, fazer

$$t_- \leftarrow \frac{t_c + t_-}{2}$$

e ir ao Passo 5.

Passo 9: *Mudança de Homotopia*
Se $f_{a,t_-}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u},\bar{v},\bar{r}) > 0$ mas $t_c - t_- \leq 0.01t_c$, fazer

$$a \leftarrow x_*, \quad (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, r_0) \leftarrow (x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$$

e retornar ao Passo 1.

Este algoritmo foi aplicado em [1] ao problema chamado "Singular Broyden", o qual segundo as provas feitas em [52] e [25], é um problema difícil de se resolver, porque tem muitos mínimos locais que não são solução do problema. Os resultados obtidos com esta estratégia foram satisfatórios, mostrando que ela é muito competitiva, já que este problema não pode ser resolvido por aquelas estratégias, mas foi resolvido em muitos casos pela nossa em um tempo razoavel.

CAPÍTULO 6

Sistemas Indeterminados com Restrições

Neste capítulo apresentaremos um algoritmo para resolver o seguinte problema:

Encontrar $x_* \in \Gamma \subseteq I\!R^n$, tal que

$$F(x_*) = 0, \tag{6.1}$$

onde $\Gamma \subset I\!R^n$ é fechado, convexo e $F : I\!R^n \to I\!R^m$, $F \in C^1(\Gamma)$.

Se $m = n$, temos a resolução de um sistema não linear quadrado com restrições, estudado em [79]. Quando $\Gamma = I\!R^n$ temos um sistema indeterminado.

Isto se relaciona com os problemas de inequações variacionais pelo fato dos problemas de otimização equivalentes, propostos nos capítulos anteriores (associados aos problema de inequações variacionais, problema horizontal e problema NCP-generalizado) serem facilmente transformados em um sistema indeterminado com restrições, onde o conjunto Γ é uma caixa ou um politopo.

6.1 Definições

Daremos aqui definições relacionadas com propriedades do sistema $F(x) = 0$ e com o conjunto Γ.

Definição 6.1. *Seja $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado e convexo. Dizemos que $x_* \in \Gamma$ é um ponto estacionário do problema (6.1) se é um minimizador global do seguinte problema*

$$\min_{x \in \Gamma} \|F(x_*) + F'(x_*)(x - x_*)\|^2. \tag{6.2}$$

Definição 6.2. *Suponhamos que $x_* \in \Gamma$ e $F(x_*) = 0$. Se existem $\varepsilon > 0$ e $c > 0$ tais que:*

$$\|x - x_*\| \leq c\|F(x)\| \text{ para todo } x \in \Gamma,$$

com $\|x - x_*\| \leq \varepsilon$, dizemos que F cumpre a condição de unicidade forte em x_* sobre Γ.

Definição 6.3. ([4]) *Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e x no fecho de Γ. O cone tangente de Γ em x, denotado $T(\Gamma, x)$ é o conjunto de todas as direções $d \in \mathbb{R}^n$ tais que*

$$d = \lim_{k \to \infty} \lambda_k (x_k - x),$$

onde $\lambda_k > 0$, $x_k \in \Gamma$ para todo k e $x_k \to x$.

Definição 6.4. *Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e x no fecho de Γ. O conjunto de direções com norma unitárias do cone tangente de Γ em x, denotado $\mathcal{V}(\Gamma, x)$, é:*

$$\mathcal{V}(\Gamma, x) = \{d \in T(\Gamma, x) \mid \|d\| = 1\}.$$

6.2 Um Algoritmo Newton-Inexato

Antes de apresentar o algoritmo, propomos o seguinte lema que será importante na sua construção.

Lema 6.1. *Se x_* é um ponto estacionário de (6.1), então x_* sastifaz as condições de primeira ordem do seguinte problema*

$$\min_{x \in \Gamma} \|F(x)\|^2. \tag{6.3}$$

Demonstração. Se x_* é a solução de (6.2), temos que para todo $x \in \Gamma$ se cumpre

$$\|F(x_*) + F'(x_*)(x - x_*)\|^2 \geq \|F(x_*)\|^2.$$

Então, podemos escrever

$$\langle 2F'(x_*)^T F(x_*) + F'(x_*)^T F'(x_*)(x - x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \Gamma.$$

Logo, para toda direção no cone tangente, temos que

$$\langle F'(x_*)^T F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \Gamma.$$

Estas são as condições de primeira ordem do problema (6.3). **QED.**

Observe-se que é equivalente achar o minimizador global ou local de (6.2), já que este é um problema convexo.

Ter a equivalência entre os mínimos locais do problema (6.2) e as condições de primeira ordem do problema (6.3) nos leva a formular o seguinte algoritmo:

Algoritmo 6.1.

Sejam $\theta_0 \in [0,1)$, $\beta > 0$, $\sigma \in (0,1)$, $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$, $\eta_1 \leq \eta_2$ dados. Sejam $x_0 \in \Gamma$ um ponto inicial arbitrário e $\alpha_0 = 1$. Dados $x_k \in \Gamma$, α_k e θ_k, os passos para obter x_{k+1}, α_{k+1} e θ_{k+1}, são os seguintes:

Passo 0. Se $F(x_k) = 0$, parar. (A solução foi encontrada.)

Passo 1. Encontrar $d_k \in I\!R^n$ tal que

$$x_k + d_k \in \Gamma, \quad \|d_k\| \leq \beta \|F(x_k)\|$$

e

$$\|F'(x_k)d_k + F(x_k)\| \leq \theta_k \|F(x_k)\|. \tag{6.4}$$

Se a direção d_k que sastifaz (6.4) não existe, definir $x_{k+1} = x_k$, $\theta_{k+1} = (1+\theta_k)/2$, e ir ao **Passo 1**. Se a direção d_k que satifaz (6.4) é encontrada, definir $\theta_{k+1} = \theta_k$.

Passo 2. Se

$$\|F(x_k + \alpha_k d_k)\| < \|F(x_k)\| \tag{6.5}$$

definir $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$. Senão, definir $x_{k+1} = x_k$.

Passo 3. Definir $\gamma_k = 1 - \theta_k^2$. Se

$$\|F(x_{k+1})\| \leq \left(1 - \frac{\sigma \gamma_k \alpha_k}{2}\right) \|F(x_k)\| \tag{6.6}$$

definir $\alpha_{k+1} = 1$.

Senão, escolher

$$\alpha_{k+1} \in [\eta_1 \alpha_k, \eta_2 \alpha_k]. \tag{6.7}$$

Ir ao **Passo 1.**

Um antecedente deste algoritmo para o caso quadrado pode-se encontrar no trabalho de Kozakevich, Martínez e Santos (ver [79]).

Na prática, podemos achar ou determinar se não existe a direção d_k que sastifaça (6.4) pela resolução do seguinte subproblema:

$$\text{Minimize } \|F'(x_k)d + F(x_k)\|^2$$

$$\text{sujeito a } x_k + d \in \Gamma, \qquad \|d\| \leq \beta \|F(x_k)\| \tag{6.8}$$

A função objetivo do problema (6.8) é convexa e quadrática. Desta forma, (6.8) pode ser resolvido de maneira eficiente em algumas situações, por exemplo quando Γ é um politopo e $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

6.3 Resultados de Convergência

No primeiro teorema desta seção prova-se que se θ_k é incrementado um número finito de vezes, então o Algoritmo 6.1 encontra a solução de (6.1).

Teorema 6.1 *Sejam*

$$\{x \in \Gamma \mid \|F(x)\| \leq \|F(x_0)\|\}. \tag{6.9}$$

limitado e $\{x_k\}$ *uma seqüência infinita gerada pelo Algoritmo 6.1 com* $\theta_k \leq \bar{\theta} < 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. *Então, todo ponto limite de* $\{x_k\}$ *é uma solução de (6.1).*

Demonstração. Vamos chamar

$$K_1 = \{k \in \{0,1,2,\ldots\} \text{ tal que (6.6) seja verdadeiro } \}.$$

Suponhamos primeiro que K_1 é infinito e $\limsup_{k \in K_1} \alpha_k > 0$. Seja K_2 um subconjunto infinito de K_1 tal que

$$\alpha_k \geq \overline{\alpha} > 0$$

para todo $k \in K_2$. Então, definimos $\bar{\gamma} = 1 - \bar{\theta}^2$, obtemos

$$1 - \frac{\sigma\bar{\gamma}\alpha_k}{2} \leq 1 - \frac{\sigma\bar{\gamma}\overline{\alpha}}{2} \equiv r < 1$$

para todo $k \in K_2$. De onde $\{\|F(x_k)\|\}$ é uma seqüência não decrescente tal que $\|F(x_{k+1})\| \leq r\|F(x_k)\|$ para todo $k \in K_2$. Isto implica que $\|F(x_k)\| \to 0$, e desta forma todo ponto de acumulação é solução.

De (6.4) temos que

$$\|F'(x_k)d_k + F(x_k)\|^2 \leq \theta_k^2\|F(x_k)\|^2,$$

de onde

$$\|F'(x_k)d_k\|^2 + 2\langle F'(x_k)d_k, F(x_k)\rangle \leq (\theta_k^2 - 1)\|F(x_k)\|^2.$$

Logo, chamando $\bar{\gamma} = 1 - \bar{\theta}^2$, temos que

$$\langle F'(x_k)d_k, F(x_k)\rangle \leq -\frac{\gamma_k}{2}\|F(x_k)\|^2 \leq -\frac{\bar{\gamma}}{2}\|F(x_k)\|^2$$

Definimos $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$. Logo $\nabla\varphi(x) = F'(x)^T F(x)$, de onde obtemos

$$\langle \nabla\varphi(x_k), d_k\rangle \leq -\frac{\gamma_k}{2}\|F(x_k)\|^2 \leq -\frac{\bar{\gamma}}{2}\|F(x_k)\|^2 \tag{6.10}$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Ficam por considerar as seguintes possibilidades:

(i)

$$K_1 \text{ é infinito mas } \lim_{k\in K_1} \alpha_k = 0; \tag{6.11}$$

(ii)

$$K_1 \text{ é finito.} \tag{6.12}$$

Vamos considerar primeiro (i). Por (6.9) existe $x_* \in \Gamma$ e K_2, um subconjunto infinito de K_1 tal que

$$\lim_{k\in K_2} x_k = x_*.$$

Suponhamos que $F(x_*) \neq 0$. Logo , $F(x_k) \neq 0$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$. Sem perda de generalidade suponhamos que $\alpha_k < 1$ para todo $k \in K_2$. Logo, de (6.7) e (6.6), temos que , para todo $k \in K_2$,

$$\alpha_k \in [\eta_1\alpha_{k-1}, \eta_2\alpha_{k-1}] \tag{6.13}$$

e

$$\|F(x_{k-1} + \alpha_{k-1}d_{k-1})\|^2 > \left(1 - \frac{\sigma\gamma_k\alpha_{k-1}}{2}\right)^2 \|F(x_{k-1})\|^2. \tag{6.14}$$

Por (6.11) e (6.13)

$$\lim_{k\in K_2} \alpha_{k-1} = 0.$$

Desta forma, já que $\|d_k\|$ é limitada, obtemos

$$\lim_{k \in K_2} x_{k-1} = x_*.$$

Agora, por (6.14),

$$\frac{\varphi(x_{k-1} + \alpha_{k-1} d_{k-1}) - \varphi(x_{k-1})}{\alpha_{k-1}} > -\frac{\sigma\bar{\gamma}\|F(x_{k-1})\|^2}{2} + \frac{\sigma^2\bar{\gamma}^2\alpha_{k-1}\|F(x_{k-1})\|^2}{8}$$

para todo $k \in K_2$. Dado que $\alpha_{k-1} \to 0$ e $\|d_{k-1}\|$ é limitada, temos que $x_{k-1} + \alpha_{k-1}d_{k-1} \to x_*$ para $k \in K_2$. Mas $F(x_*) \neq 0$ assim $F'(x)$ existe e é contínua em uma vizinhança de x_*. Para um $k \in K_2$ suficientemente grande temos que ambos x_{k-1} e $x_{k-1} + \alpha_{k-1}d_{k-1}$ estão nesta vizinhança. Assim, podemos aplicar o teorema do valor médio, o qual implica que para um $k \in K_2$ suficientemente grande, existe $\xi_{k-1} \in [0, 1]$ tal que

$$\langle \nabla\varphi(x_{k-1} + \xi_{k-1}\alpha_{k-1}d_{k-1}), d_{k-1}\rangle >$$

$$-\frac{\sigma\bar{\gamma}\|F(x_{k-1})\|^2}{2} + \frac{\sigma^2\bar{\gamma}^2\alpha_{k-1}\|F(x_{k-1})\|^2}{8}. \tag{6.15}$$

Dado que $\|d_k\| \leq \beta\|F(x_0)\|$ para todo k, existe K_3, um subconjunto infinito de K_2, tal que

$$\lim_{k \in K_3} d_{k-1} = d.$$

Tomando limite para $k \in K_3$ sobre ambos os membros em (6.15), obtemos

$$\langle \nabla\varphi(x_*), d\rangle \geq -\frac{\sigma\bar{\gamma}\|F(x_*)\|^2}{2}.$$

Assim, para $k \in K_3$ suficientemente grande, definindo $\sigma' = \frac{\sigma+1}{2}$, temos que

$$\langle \nabla\varphi(x_{k-1}), d_{k-1}\rangle \geq -\frac{\sigma'\bar{\gamma}\|F(x_{k-1})\|^2}{2} > -\frac{\bar{\gamma}\|F(x_{k-1})\|^2}{2}. \tag{6.16}$$

Desta maneira, (6.16) contradiz (6.10). Isto prova que $F(x_*) = 0$. Logo, dado que $\{\|F(x_k)\|\}$ é monótona, qualquer outro ponto limite de $\{x_k\}$ tem que ser solução de (6.1).

Vejamos (ii). Dado que K_1 é finito, existe $k_0 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que (6.6) não é verdade para todo $k \geq k_0$. Assim , $\alpha_k \to 0$, e a demonstração é igual ao item (i), com isto está provado que todo ponto limite tem que ser solução de (6.1). **QED.**

Teorema 6.2 *Suponhamos que no Algoritmo 6.1 θ_k é incrementado um número infinito de vezes e seja*

$$K_3 = \{k \in \{0, 1, 2, \ldots\} \mid \theta_{k+1} >.\theta_k\}.$$

Então, todo ponto limite da seqüência $\{x_k\}_{k \in K_3}$ é estacionário.

Demonstração. Seja $x_* \in \Gamma$ um ponto limite de $\{x_k\}_{k \in K_3}$. Se $F(x_*) = 0$ o resultado está provado. Assim, suponhamos que $\|F(x_*)\| > 0$. dado que $F'(x)$ existe e é contínua em x_*. Suponhamos que x_* não é estacionário. Desta forma existe, $d \in I\!R^n$ tal que $\|d\| \leq \beta\|F(x_*)\|/2$, $x_* + d \in \Gamma$, tal que

$$\|F'(x_*)d + F(x_*)\| < \|F(x_*)\|.$$

Logo,

$$\frac{\|F'(x_*)d + F(x_*)\|}{\|F(x_*)\|} = r < 1.$$

Escolhendo $r' \in (r, 1)$, pela continuidade de F e F', temos que

$$\frac{\|F'(x_k)(x_* + d - x_k) + F(x_k)\|}{\|F(x_k)\|} \leq r' \tag{6.17}$$

para $k \in K_3$ suficientemente grande. Mas, dado que $\|d\| \leq \beta\|F(x_*)\|/2$ para $k \in K_3$ suficientemente grande, $\|x_* + d - x_k\| \leq \beta\|F(x_k)\|$. Assim, (6.17) contradiz o fato de (6.4) não poder ser atingida em $k \in K_3$ e $\theta_k \to 1$. **QED.**

Lema 6.2. *Se* $F(x_k) \neq 0$ *e (6.4) é verdade, então* $\|F'(x_k)\| \neq 0$ *e*

$$\|d_k\| \geq \frac{1-\theta_k}{\|F'(x_k)\|}\|F(x_k)\|. \tag{6.18}$$

Demonstração. Dado que $\theta_k < 1$ é $F(x_k) \neq 0$, temos que $F'(x_k) \neq 0$. Agora , por (6.4),

$$\|F(x_k)\| - \|F'(x_k)\|\|d_k\| \leq \|F'(x_k)d_k + F(x_k)\| \leq \theta_k\|F(x_k)\|.$$

Assim,

$$\|F'(x_k)\|\|d_k\| \geq (1-\theta_k)\|F(x_k)\|$$

e da hipótese se segue a desigualdade. **QED.**

Lema 6.3. *Seja* $\{x_k\}_{k\geq 0}$, *uma seqüência em* $\mathbb{R}^n$ *e suponhamos que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|} = 0. \tag{6.19}$$

Então, a seqüência converge R-superlinearmente a algum $x_* \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Por (6.19), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\|x_{k+1}-x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|} \leq \frac{1}{2} \quad \text{para todo} \quad k \geq k_0. \tag{6.20}$$

Assim,

$$\|x_{k+1}-x_k\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-k_0} \|x_{k_0+1} - x_{k_0}\| \tag{6.21}$$

para todo $k \geq k_0$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_{k+1}-x_k\| \leq \varepsilon \text{ para todo } \quad k \geq k_1.$$

Definamos $k_2 = \max\{k_1, k_0\}$. Para todo $l, j \geq k_2$ temos que

$$\|x_j - x_l\| \leq \sum_{i=l}^{j-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \left[\sum_{i=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-l+1}\right] \|x_l - x_{l-1}\| \leq 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Então, $\{x_k\}$ é uma seqüência de Cauchy, o que implica convergência para algum $x_* \in I\!R^n$.

Agora, se $k \geq k_2$, temos que

$$\|x_k - x_*\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_{i+1} - x_i\| \leq 2\|x_{k+1} - x_k\|. \tag{6.22}$$

Deste modo, a seqüência $\{\|x_k - x_*\|\}$ está limitada pela seqüência Q-superlinear $\{2\|x_{k+1} - x_k\|\}$. Isto implica que a convergência de $\{x_k\}$ é R-superlinear.
QED.

Teorema 6.3 *Seja $F \in C^1(\Gamma)$ e suponhamos que se cumpre (6.9) e a seguinte condição de Lipschitz sobre $F'(x)$*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\| \tag{6.23}$$

para todo $x, y \in \Gamma$.

Suponhamos que para a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo Algoritmo 6.1, existe $t_k \to 0$ tal que

$$\|F'(x_k)d_k + F(x_k)\| \leq t_k\|F(x_k)\| \tag{6.24}$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então, existe $k_0 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que

$$x_{k+1} = x_k + d_k \tag{6.25}$$

para todo $k \geq k_0$. Mais ainda,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|F(x_{k+1})\|}{\|F(x_k)\|} = 0, \tag{6.26}$$

e a seqüência é R-superlinearmente convergente a algum $x_* \in \Gamma$ tal que $F(x_*) = 0$. Finalmente, se F cumpre uma condição de unicidade forte em x_* sobre Γ, a convergência é Q-superlinear.

Demonstração. Por (6.23) e (6.24), temos que

$$\|F(x_k + \alpha_k d_k)\| \leq \|F(x_k) + \alpha_k F'(x_k) d_k\| + \frac{L}{2}\alpha_k^2 \|d_k\|^2$$

$$\leq \|\alpha_k [F(x_k) + F'(x_k) d_k]\| + (1 - \alpha_k)\|F(x_k)\| + \frac{L}{2}\alpha_k^2 \|d_k\|^2$$

$$\leq \alpha_k t_k \|F(x_k)\| + (1 - \alpha_k)\|F(x_k)\| + \frac{L}{2}\alpha_k^2 \|d_k\|^2$$

$$\leq \alpha_k t_k \|F(x_k)\| + (1 - \alpha_k)\|F(x_k)\| + \frac{L}{2}\alpha_k^2 \beta_1^2 \|F(x_k)\|^2$$

$$= \left(\alpha_k t_k + 1 - \alpha_k + \frac{L}{2}\alpha_k^2 \beta_1^2 \|F(x_k)\|\right) \|F(x_k)\|$$

$$= \left[1 - \alpha_k \left(1 - t_k - \frac{L}{2}\alpha_k \beta_1^2 \|F(x_k)\|\right)\right] \|F(x_k)\|. \qquad (6.27)$$

Assim, dado que $t_k \to 0$, $\sigma\gamma_k/2 \in (0,1)$ e usando o Teorema 6.1, $\|F(x_k)\| \to 0$. Logo, existe $k_1 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que

$$\|F(x_k + \alpha_k d_k)\| \leq \left(1 - \frac{\sigma\gamma_k\alpha_k}{2}\right) \|F(x_k)\|$$

para $k \geq k_1$. Pela definição do algoritmo 6.1, $\alpha_k = 1$ para todo $k \geq k_0 \equiv k_1 + 1$. Desta maneira, (6.25) se cumpre para todo $k \geq k_0$. Por (6.27) com $\alpha_k = 1$ para $k \geq k_0$, obtemos

$$\frac{\|F(x_{k+1})\|}{\|F(x_k)\|} \le \left[1 - \alpha_k \left(1 - t_k - \frac{L}{2}\alpha_k \beta_1^2 \|F(x_k)\|\right)\right] \to 0. \tag{6.28}$$

Pela hipótese de compacidade, existe $\vartheta \in I\!R_+$ tal que $\|F'(x_k)\| \le \vartheta$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$. Então , pelo Lema 6.2 existe $k_0 \in I\!N$ tal que

$$\|d_k\| \ge \frac{1 - t_k}{\|F'(x_k)\|}\|F(x_k)\| \ge \frac{1}{2\vartheta}\|F(x_k)\| \ge \delta\|F(x_k)\| \tag{6.29}$$

com $\delta = \frac{1}{2\vartheta}$. Por (6.4), (6.29) e (6.26), para todo $k > k_0$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le \beta\|F(x_k)\| \le \beta\left(\frac{\|F(x_k)\|}{\|F(x_{k-1})\|}\right)\|F(x_{k-1})\|$$

$$\le \frac{\beta}{\delta} u_k \|x_k - x_{k-1}\|,$$

onde $u_k \to 0$. Desta forma

$$\frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|} \to 0$$

Pelo Lema 6.3, x_k converge R-superlinearmente a alguma solução $x_* \in \Gamma$. Dado que F cumpre uma condição de unicidade forte em x_* sobre Γ, existe $k_1 \in I\!N$ tal que para todo $k \ge k_1$,

$$\|x_{k+1} - x_*\| \le c\|F(x_{k+1})\|. \tag{6.30}$$

Mas, por (6.23), existe $L_1 > 0$ tal que

$$\|x_k - x_*\| \ge \frac{1}{L_1}\|F(x_k)\| \tag{6.31}$$

De (6.30) e (6.31), obtemos

$$\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|} \leq cL_1 \frac{\|F(x_{k+1})\|}{\|F(x_k)\|}.$$

Desta forma , por (6.26), x_k converge Q-Superlinearmente para x_*. **QED.**

O teorema a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para que se cumpra a condição de unicidade forte.

Teorema 6.4 *Seja $F : I\!R^n \to I\!R^m$, $F \in C^1(\Gamma)$. As seguintes proposições são equivalentes:*
(i)

$$\min_{v \in \mathcal{V}(\Gamma, x_*)} \|F'(x_*)v\| = \zeta > 0$$

(ii) *Existem $c, \varepsilon > 0$, tais que*

$$c\|F(x) - F(x_*)\| \geq \|x - x_*\|$$

para todo $x \in B_\varepsilon(x_*) \cap \Gamma$.

Demonstração. Vamos provar inicialmente que (i) $\Rightarrow$ (ii). Como $F \in C^1(\Gamma)$, existe $0 < \varepsilon \leq \frac{\zeta}{2}$, tal que

$$\|F(x) - F(x_*) - F'(x_*)(x - x_*)\| \leq \varepsilon \|x - x_*\|$$

para todo $x \in B_\varepsilon(x_*)$. Logo,

$$\|F'(x_*)(x - x_*)\| - \|F(x) - F(x_*)\| \leq \varepsilon \|x - x_*\|.$$

Então, se $x \neq x_*$ e $x \in B_\varepsilon(x_*) \cap \Gamma$, temos que

$$\zeta \leq \left\| F'(x_*) \frac{x - x_*}{\|x - x_*\|} \right\| \leq \frac{\|F(x) - F(x_*)\|}{\|x - x_*\|} + \frac{\zeta}{2}.$$

Desta maneira, tomando $c = \frac{2}{\zeta}$

$$\|x - x_*\| \leq c\|F(x) - F(x_*)\|$$

para todo $x \in B_\varepsilon(x_*) \cap \Gamma$.

Vejamos agora que (ii) $\Rightarrow$ (i). Suponhamos $\zeta = 0$. Então existe $\{x_k\} \subset \Gamma$, $x_k \to x_*$ e $\{\lambda_k\} \subset I\!R_+$, com $\lambda_k = (\|x - x_*\|)^{-1}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \left\| F'(x_*) \frac{x_k - x_*}{\|x - x_*\|} \right\| = 0. \qquad (6.32)$$

Dado que $F \in C^1(\Gamma)$, existe $\varepsilon_1 < \varepsilon$, tal que

$$\|F(x) - F(x_*) - F'(x_*)(x - x_*)\| < \varepsilon_1\|x - x_*\|$$

para todo $x \in B_{\varepsilon_1}(x_*)$. Por (6.32) existe $k_0 \in I\!N$, tal que

$$\left\| F'(x_*) \frac{x_k - x_*}{\|x_k - x_*\|} \right\| < \varepsilon_1$$

para todo $k \geq k_0$. Desta maneira,

$$\frac{\|F(x_k) - F(x_*)\|}{\|x_k - x_*\|} < 2\varepsilon_1.$$

Escolhendo $\varepsilon_1 = \frac{1}{2c}$, temos a contradição do fato de (ii) ser verdadeira . **QED.**

6.4 Aplicação ao Problema de Inequações Variacionais

Nosso algoritmo soluciona o problema

$$\|F(x)\| = 0.$$

Nos capítulos anteriores encontraram-se condições para que um ponto KKT fosse um minimizador global com o valor da função objetivo igual a zero. Nestes casos nosso algoritmo chega à solução do problema $VIP(F,\Omega)$. Isto não implica, teoricamente, uma velocidade de convergência boa. Portanto procuraremos as condições para que uma solução de nosso sistema tenha a condição de unicidade forte.

O $VIP(F,\Omega)$, neste capítulo, será colocado como um sistema da seguinte forma:

$$\mathcal{F}(x,y,z,u,v,r) = \begin{bmatrix} F(x) + g'(x)y + A^T u - (v,0)^t + (0,r,0)^t \\ z + g(x) \\ Ax - b \\ y^t z \\ (\bar{x} - c)^T v \\ (t - \tilde{x})^T r \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ v \geq 0 \\ r \geq 0 \\ x \in \Omega_c \end{cases} \tag{6.33}$$

No Capítulo 2, demonstramos que se $\mathcal{F}(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) = 0$, então x_* é a solução do $VIP(F,\Omega)$. Agora, queremos achar as condições para estabelecer a unicidade forte para o sistema (6.33).

Notemos que neste caso o conjunto Γ é o seguinte:

$$\Gamma = \{(x,y,z,u,v,r) \in \Omega_c \times I\!R^m_+ \times I\!R^m_+ \times I\!R^q \times I\!R^{s_2}_+ \times I\!R^{s_1 - s_3}\},$$

com Ω_c como na Definição 5.4.

Agora vamos definir uma condição de não degeneração para este problema.

Definição 6.5. *Dizemos que* $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ *é uma solução não degenerada do sistema (6.33), se*

$$z_* + y_* > 0, \;\; \bar{x}_* - c + v_* > 0, \;\; t - \tilde{x}_* + r_* > 0.$$

Agora definiremos alguns conjuntos em função desta definição de não degeneração.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \{1, \ldots, n\},\\
\mathcal{M} &= \{1, \ldots, m\},\\
\mathcal{Q} &= \{1, \ldots, q\},\\
\mathcal{P} &= \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2,\\
\mathcal{U} &= \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3,\\
\mathcal{J}_1 &= \{i \in \mathcal{I}_1 \;\mid\; [x_*]_i - c_i > 0\},\\
\mathcal{N}_1 &= \{i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \;\mid\; [x_*]_i - c_i = 0\},\\
\mathcal{J}_2 &= \{i \in \mathcal{I}_2 \;\mid\; 0 < [x_*]_i - c_i \text{ ou } t_i - [x_*]_i > 0\},\\
\mathcal{J}_3 &= \{i \in \mathcal{I}_3 \;\mid\; t_i - [x_*]_i > 0\},\\
\mathcal{N}_3 &= \{i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 \;\mid\; t_i - [x_*]_i = 0\},\\
\mathcal{R} &= \{i \in \mathcal{M} \;\mid\; [y_*]_i > 0\},\\
\mathcal{S} &= \{i \in \mathcal{M} \;\mid\; [z_*]_i > 0\}.
\end{aligned}$$

E, para facilitar a notação, definimos

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3 \cup \mathcal{I}_4$$

e

$$H = F'(x_*) + \sum_{i=1}^{m} \nabla g_i(x_*)[y_*]_i,$$

como no Capítulo 1.

Enunciamos abaixo o teorema que garante a condição de unicidade forte.

Teorema 6.5 *Sejam F, g diferenciáveis e $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ uma solução não degenerada do problema (6.33). Sejam os conjuntos $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$, e $\mathcal{Q}$ definidos como acima. Se a matriz*

$$\begin{bmatrix} H_{\mathcal{J},\mathcal{J}} & \left[g'(x_*)^T\right]_{\mathcal{J},\mathcal{R}} & [A^T]_{\mathcal{J},\mathcal{Q}} \\ [g'(x_*)]_{\mathcal{R},\mathcal{J}} & 0 & 0 \\ [A]_{\mathcal{Q},\mathcal{J}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.34)$$

é não singular, então $\mathcal{F}$ cumpre uma condição de unicidade forte em $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ sobre Γ.

Demonstração. O plano tangente ao conjunto de restrições Γ em $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ é dado por

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z, u, v, r) \in I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^m \times I\!R^{s_2} \times I\!R^{s_3 - s_1} \mid x_{\mathcal{N}_1} \geq 0,$$

$$x_{\mathcal{N}_3} \leq 0,\ y_{\mathcal{S}} \geq 0,\ z_{\mathcal{R}} \geq 0,\ v_{\mathcal{J}_1} \geq 0,\ v_{\mathcal{J}_2} \geq 0,\ r_{\mathcal{J}_2} \geq 0,\ r_{\mathcal{J}_3} \geq 0\}$$

e

$$\mathcal{V} = \{d \in \mathcal{T} \mid \|d\| = 1\}.$$

A derivada do sistema $\mathcal{F}$ em $(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)$ é

$$\mathcal{F}'(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) =$$

$$\begin{bmatrix} H & g'(x_*)^T & 0 & A^T & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{P}} & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{U}} \\ g'(x_*) & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_*^T & y_*^T & 0 & 0 & 0 \\ (v_*^T, 0^T) & 0 & 0 & 0 & (\tilde{x}_* - c)^T & 0 \\ -(0^T, r_*^T, 0^T) & 0 & 0 & 0 & 0 & (t - \tilde{x}_*)^T \end{bmatrix} \qquad (6.35)$$

Seja $(x, y, z, u, v, r) \in \mathcal{T}$ tal que

$$\mathcal{F}'(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ r \end{bmatrix} = 0. \tag{6.36}$$

De (6.36) temos que

(a)

$$z_*^T y + y_*^t z = \sum_{i \in \mathcal{S}} [z_*]_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{R}} [y_*]_i z_i = 0.$$

Já que $(x, y, z, u, v, r) \in \mathcal{T}$ e pela definição de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ temos que $y_{\mathcal{S}} = 0$ e $z_{\mathcal{R}} = 0$.

(b)

$$v_*^T \bar{x} + (\bar{x}_* - c)^t v = \sum_{i \in \mathcal{N}_1} [v_*]_i x_i + \sum_{i \in \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2} ([x_*]_i - c_i) v_i.$$

Já que $(x, y, z, u, v, r) \in \mathcal{T}$ e pela definição de $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$, temos que $v_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2} = 0$ e $x_{\mathcal{N}_1} = 0$.

(c)

$$-r_*^T \tilde{x} + (t - \tilde{x}_*)^t r = -\sum_{i \in \mathcal{N}_2} [r_*]_i x_i + \sum_{i \in \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3} (t_i - [x_*]_i) r_i.$$

Já que $(x, y, z, u, v, r) \in \mathcal{T}$ e pela definição de $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_3$, temos que $r_{\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3} = 0$ e $x_{\mathcal{N}_2} = 0$.

Considerando (a),(b) e (c), podemos reescrever (6.36) como escrever da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} H_{\mathcal{I},\mathcal{J}} & \left[g'(x_*)^T\right]_{\mathcal{I},\mathcal{R}} & 0 & A^T & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{N}_1} & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{N}_3} \\ [g'(x_*)]_{\mathcal{M},\mathcal{J}} & 0 & [I]_{\mathcal{M},\mathcal{S}} & 0 & 0 & 0 \\ \left[A^T\right]_{\mathcal{Q},\mathcal{J}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{J}} \\ y_{\mathcal{R}} \\ z_{\mathcal{S}} \\ u \\ v_{\mathcal{N}_1} \\ r_{\mathcal{N}_2} \end{bmatrix} = 0. \tag{6.37}$$

Agora, como a matriz

$$\begin{bmatrix} H_{\mathcal{J},\mathcal{J}} & \left[g'(x_*)^T\right]_{\mathcal{J},\mathcal{R}} & [A^T]_{\mathcal{J},\mathcal{Q}} \\ [g'(x_*)]_{\mathcal{R},\mathcal{J}} & 0 & 0 \\ [A]_{\mathcal{Q},\mathcal{J}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é não singular, considerando os termos, $[I]_{\mathcal{I},\mathcal{N}_1}$, $[I]_{\mathcal{I},\mathcal{N}_3}$ e $[I]_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ obtemos que a matriz

$$\begin{bmatrix} H_{\mathcal{I},\mathcal{J}} & \left[g'(x_*)^T\right]_{\mathcal{I},\mathcal{R}} & 0 & A^T & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{N}_1} & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{N}_3} \\ [g'(x_*)]_{\mathcal{M},\mathcal{J}} & 0 & [I]_{\mathcal{M},\mathcal{S}} & 0 & 0 & 0 \\ \left[A^T\right]_{\mathcal{Q},\mathcal{J}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é não singular. Assim,

$$\begin{bmatrix} x_{\mathcal{J}} \\ y_{\mathcal{R}} \\ z_{\mathcal{S}} \\ u \\ v_{\mathcal{N}_1} \\ r_{\mathcal{N}_2} \end{bmatrix} = 0.$$

Por (a), (b) e (c), temos que $(x, y, z, u, v, r) = 0$.

Alisemos o seguinte problema

$$\min_{d \in \mathcal{V}} \|\mathcal{F}'(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)d\| = \beta. \tag{6.38}$$

Dado que o conjunto $\mathcal{V}$ é fechado e limitado e de dimensão finita, ele é compacto. Logo, existe o mínimo do problema (6.38). Se $\beta = 0$, existe $d \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{F}'(x_*, y_*, z_*, u_*, v_*, r_*)\ d = 0$. Mas, pelo antes demonstrado deveríamos ter $d = 0$ o que é uma contradição com o fato de $d \in \mathcal{V}$. Logo, estamos na hipótese do Teorema 6.4, de onde se deduz o resultado proposto. **QED.**

Analisando a hipótese colocada no Teorema 6.5 em relação ao problema $VIP(F, \Omega)$, observando os termos $[g'(x_*)^T]_{\mathcal{J},\mathcal{R}}$ e $[A^T]_{\mathcal{J},\mathcal{Q}}$ de (6.34) e levando em conta que se $i \in \mathcal{R}$ se cumpre que $g_i(x_*) = 0$, temos que a condição de regularidade do conjunto Ω no ponto x_* é uma condição necessária para que se cumpra a condição de unicidade forte. Mas, como era de se esperar não é uma condição suficiente, já que com ela estamos considerando soamente o conjunto Ω. Já a matriz $[H]_{\mathcal{J},\mathcal{J}}$, leva em consideração a função F do problema $VIP(F, \Omega)$.

Enunciaremos a seguir os teoremas que se derivam do teorema geral para os casos particulares.

Caso (a) $\Omega_g = \{x \in I\!R^n \ \| \ g(x) \leq 0\}$

Corolário 6.1. *Sejam F, g diferenciáveis e (x_*, y_*, z_*) uma solução do problema $VIP(F, \Omega_g)$. Suponhamos que a solução é não degenerada e os conjuntos $\mathcal{J}$ e $\mathcal{R}$ são definidos como acima. Se a matriz*

$$\begin{bmatrix} H_{\mathcal{J},\mathcal{J}} & \left[g'(x_*)^T\right]_{\mathcal{J},\mathcal{R}} \\ [g'(x_*)]_{\mathcal{R},\mathcal{J}} & 0 \end{bmatrix}$$

é não singular, então a função $\mathcal{F}$ do sistema associado ao problema $VIP(F, \Omega_g)$ cumpre uma condição de unicidade forte em (x_*, y_*, z_*) para Γ_g.

Demonstração. É um caso particular da feita no Teorema 6.5. **QED.**

Caso (b) $\Omega_{A,c} = \{x \in I\!R^n \mid Ax = b, \ x \in \Omega_c\}$

Corolário 6.2. *Sejam F, g diferenciáveis e (x_*, u_*, v_*, r_*) uma solução do problema $VIP(F, \Omega_{A,c})$. Suponhamos que a solução é não degenerada e os conjuntos $\mathcal{J}$, e $\mathcal{Q}$ são definidos como acima. Se a matriz*

$$\begin{bmatrix} H_{\mathcal{J},\mathcal{J}} & [A^T]_{\mathcal{J},\mathcal{Q}} \\ [A]_{\mathcal{Q},\mathcal{J}} & 0 \end{bmatrix}$$

é não singular, então a função $\mathcal{F}$ cumpre uma condição de unicidade forte em (x_*, u_*, v_*, r_*) sobre Γ.

Demonstração. É um caso particular da feita no Teorema 6.5. **QED.**

Caso (c)

O caso NCP ($\Omega = I\!R^n_+$), onde temos que

$$\mathcal{J} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid [x_*]_i > 0\}, \quad H = F'(x_*). \tag{6.39}$$

Corolário 6.3. *Seja $F : I\!R^n \to I\!R^n$ derivável em x_*, solução não degenerada do problema $NCP(F)$. Se $F'(x_*)_{\mathcal{J},\mathcal{J}}$ é não singular então o sistema*

$$\mathcal{F}(x, z) = \begin{bmatrix} F(x) - z \\ x^T z \end{bmatrix} = 0$$

$$\textit{sujeita a } x \geq 0, z \geq 0,$$

cumpre uma condição de unicidade forte em (x_*, z_*).

Demonstração. Por (6.39), o Teorema 6.5, se reduz a este teorema. **QED.**

Esta condição está dada em [88] para garantir a unicidade da solução do problema NCP no caso não degenerado. Também garante a convergência superlinear de diversos métodos para resolver o problema NCP com um sistema não linear. Ver por exemplo [94], [9], [45] e [52].

6.5 Caso Horizontal

Este problema não é um caso particular do problema geral, mas pode ser resolvido aplicando sistemas indeterminados. Veremos em que condições podemos garantir unicidade forte.

Consideremos o sistema

$$\mathcal{F}(x,z) = \begin{bmatrix} F(x)+G(z) \\ x^T z \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{sujeito a } \; x \geq 0, z \geq 0. \tag{6.40}$$

Suponhamos como antes a hipótese de não degeneração na solução (x_*, z_*), isto é

$$x_* + z_* > 0.$$

Além disso, definiremos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\},$$

$$\mathcal{J} = \{i \in \mathcal{I} \mid [x_*]_i > 0\},$$
$$\mathcal{K} = \{i \in \mathcal{I} \mid [z_*]_i > 0\}.$$

Com isto enunciaremos o teorema que dá as condições para que uma solução do sistema (6.40) cumpra a condição de unicidade forte.

Teorema 6.6 *Sejam $F, G : I\!R^n \to I\!R^n$ diferenciáveis, seja (x_*, z_*) uma solução não degenerada do problema $HNCP(F,G)$, e sejam $\mathcal{J}, \mathcal{K}$ e $\mathcal{I}$ definidos como acima. Se*

$$\begin{bmatrix} F'_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(x_*) & G'_{\mathcal{I},\mathcal{K}}(z_*) \end{bmatrix}$$

é não singular, então o sistema (6.40) cumpre uma condição de unicidade forte em (x_*, z_*).

Demonstração. Claramente, o cone tangente no ponto (x_*, z_*) é:

$$\mathcal{T} = \{(x, z) \in I\!R^n \times I\!R^n \mid x_{\mathcal{K}} \geq 0, z_{\mathcal{J}} \geq 0\}$$

e

$$\mathcal{V} = \{d \in \mathcal{T} \mid \|d\| = 1\}.$$

A derivada da função do sistema (6.40) em (x_*, z_*) é:

$$\mathcal{F}'(x_*, z_*) = \begin{bmatrix} F'(x_*) & G'(z_*) \\ z_*^T & x_*^T \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

Agora, seja $(x, z) \in \mathcal{T}$ tal que

$$\mathcal{F}'(x_*, z_*) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0. \tag{6.42}$$

Por (6.41) e (6.42), temos que

$$z_*^T x + x_*^T z = \sum_{i \in \mathcal{J}} [z_*]_i x_i + \sum_{i \in \mathcal{K}} [x_*]_i z_i = 0.$$

Já que $(x, z) \in \mathcal{T}$, obtemos que

$$x_{\mathcal{K}} = 0, \quad z_{\mathcal{J}} = 0. \tag{6.43}$$

Levando em conta (6.43), podemos reescrever (6.42) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} F'_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(x_*) & G'_{\mathcal{I},\mathcal{K}}(z_*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{J}} \\ z_{\mathcal{K}} \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto, em virtude da hipótese, temos $x_{\mathcal{J}} = 0$ e $z_{\mathcal{K}} = 0$. Logo, por (6.43), $x = z = 0$, repetindo os argumentos do Teorema 6.5, temos o resultado proposto. **QED.**

Observe-se que a matriz

$$[F'_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(x_*) \;\; G'_{\mathcal{I},\mathcal{K}}(z_*)]$$

é quadrada, dado que (x_*, z_*) é um ponto não degenerado, e em conseqüência $cardinal(\mathcal{I}) = cardinal(\mathcal{J}) + cardinal(\mathcal{K})$.

6.6 O problema NCP-Generalizado

Também neste caso queremos encontrar as condições para obter a unicidade forte.

Vamos considerar o sistema

$$\mathcal{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F(x) - y \\ G(x) - z \\ y^T z \end{bmatrix}$$

$$\text{sujeito a} \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \tag{6.44}$$

Suponhamos também neste caso a hipótese de não degeneração na solução (x_*, y_*, z_*), isto é

$$y_* + z_* > 0.$$

Além disso, definamos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{J} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid [y_*]_i > 0\}$$

$$\mathcal{K} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid [z_*]_i > 0\}$$

Com isto enunciaremos o teorema que nos dá as condições para que uma solução do sistema (6.44) cumpra a condição de unicidade forte.

Teorema 6.7 *Seja $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis, seja (x_*, y_*, z_*) uma solução não degenerada do problema (6.44) e sejam $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{I}$ definidos como acima. Se*

$$\begin{bmatrix} F'_{\mathcal{J},\mathcal{I}}(x_*) \\ G'_{\mathcal{K},\mathcal{I}}(x_*) \end{bmatrix}$$

é não singular então o sistema (6.44) cumpre uma condição de unicidade forte em (x_*, y_*, z_*).

Demonstração. Claramente, o cone tangente em (x_*, y_*, z_*) é:

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid y_{\mathcal{K}} \geq 0, z_{\mathcal{J}} \geq 0\}$$

e

$$\mathcal{V} = \{d \in \mathcal{T} \mid \|d\| = 1\}.$$

A derivada do sistema (6.44) em (x_*, y_*, z_*), é a seguinte:

$$\mathcal{F}'(x_*, y_*, z_*) = \begin{bmatrix} F'(x_*) & -I & 0 \\ G'(x_*) & 0 & -I \\ 0 & z_*^T & y_*^T \end{bmatrix}. \tag{6.45}$$

Seja $(x, y, z) \in \mathcal{T}$ tal que

$$\mathcal{F}'(x_*, y_*, z_*) \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix} = 0. \tag{6.46}$$

Por (6.45) e (6.46), temos que

$$z_*^T y + y_*^T z = \sum_{i \in \mathcal{J}} [z_*]_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{K}} [y_*]_i z_i = 0.$$

Como $(x, y, z) \in \mathcal{T}$, temos

$$y_{\mathcal{K}} = 0, \quad z_{\mathcal{J}} = 0. \tag{6.47}$$

Por (6.47), pode-se escrever (6.46) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} F'_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(x_*) & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{J}} & 0 \\ G'_{\mathcal{K}}(z_*) & 0 & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y_{\mathcal{J}} \\ z_{\mathcal{K}} \end{bmatrix} = 0$$

Agora, se

$$\begin{bmatrix} F'_{\mathcal{J},\mathcal{I}}(x_*) \\ G'_{\mathcal{K},\mathcal{I}}(z_*) \end{bmatrix}$$

é não singular, então

$$\begin{bmatrix} F'_{\mathcal{J}}(x_*) & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{J}} & 0 \\ G'_{\mathcal{K}}(z_*) & 0 & [I]_{\mathcal{I},\mathcal{K}} \end{bmatrix}$$

é não singular. Logo, $x = 0$, $y_{\mathcal{J}} = 0$ e $z_{\mathcal{K}} = 0$. Com isto e (6.47) temos que $x = y = z = 0$. Repetindo os argumentos do Teorema 6.5, temos o resultado proposto. **QED.**

Observe-se que a matriz

$$\begin{bmatrix} F'_{\mathcal{J},\mathcal{I}}(x_*) \\ G'_{\mathcal{K},\mathcal{I}}(x_*) \end{bmatrix}$$

é quadrada, dado que (x_*, y_*, z_*) é um ponto não degenerado, e em conseqüência, $cardinal(\mathcal{I}) = cardinal(\mathcal{J}) + cardinal(\mathcal{K})$.

CAPÍTULO 7

Conclusões

Nesta tese formulamos os problemas de inequações variacionais, horizontal e NCP-generalizado (que chamamos de originais) como problemas de otimização. Estabelecemos condições para que os pontos estacionários destes problemas sejam soluções dos respectivos problemas originais.

Os problemas de otimização associados têm as seguintes vantagens:

(a) Têm o mesmo grau de diferenciabilidade que as funções envolvidas no problema original.

(b) São totalmente computáveis.

(c) As restrições são do tipo caixa.

(d) As exigências teóricas para estabelecer a equivalência com os pontos estacionários são iguais ou menores que nas outras estratégias propostas para resolver os mesmos problemas.

No caso do problema de inequações variacionais, para um conjunto Ω geral, a única estratégia que cumpre as condições (a) e (b) em forma conjunta é a nossa.

No Capítulo 3, propomos uma definição de regularidade que é melhor que a dada por Moré, no sentido que a inclui, obtendo-se melhores resultados teóricos.

Com o objetivo de ampliar teoricamente nosso campo de atuação, desenvolveu-se uma teoria de perturbações. Com isto conseguimos estender de forma completa os resultados, para o caso em que a função F no problema original seja monótona. Observemos que para o $VIP(F,\Omega)$ com Ω geral, este fato constitui uma importante vantagem de nossa estratégia. Além disso, a teoria de perturbações proporciona um algoritmo de tipo homotópico, testado em [1] com bons resultados.

Também, para resolver sistemas indeterminados com restrições, propomos um algoritmo, para o qual desenvolvemos uma teoria completa de convergência. Com respeito às aplicações de tal algoritmo aos problemas de inequações variacionais, horizontal e NCP-generalizado, estabelecemos condições para a convergência Q-superlinear, com as mesmas exigências que em outros trabalhos, que conseguem resultados similares.

Um resultado não explorado nesta tese é o da equivalência das soluções dos problemas de inequações variacionais, horizontal e NCP-generalizado, com os minimizadores globais dos problemas de otimização associados. Aqui a única exigência que se faz é que o conjunto Ω cumpra uma "constraint qualification". De fato, não colocar nenhuma condição sobre a função F, nos permite afirmar: se for encontrada uma forma eficiente de resolver o problema de otimização global, pode-se resolver qualquer problema $VIP(F,\Omega)$, cujo conjunto Ω cumpra uma "constraint qualification".

Esta linha de pesquisa já foi explorada para resolver o $LCP(M,q)$.

As primeiras estratégias basearam-se no fato que as soluções do $LCP(M,q)$, se existiam, eram algun vértice do seguinte politopo

$$S = \{x \in I\!R^n \mid Mx + q \geq 0, \; x \geq 0\}.$$

Também, existem as estratégias baseadas no resultado de Mangasarian em [87], que estabeleceram a equivalência de $LCP(M,q)$ com um problema de minimização côncavo, cuja função é linear por partes. Pardalos e Rosen em [109] usam um problema côncavo de programação quadrática e Júdice em [67] propõe métodos enumerativos.

Para o $NCP(F)$, Pang em [103] propõe uma estratégia não diferenciável de otimização global, com uma função de mérito baseada em projeções.

No nosso caso, a simplicidade e as propriedades já explicadas do problema associado sugerem a aplicação de uma estratégia de otimização global. Alguns fatos devem ser levados em consideração:

- No caso que o conjunto Ω é geral, se um ponto KKT é tal que

$$w = F(x_*) + g'(x_*)^T y_* + A^T u_* - (v_*, 0)^T + (0, r_*, 0)^t = 0,$$

então, este ponto é um minimizador global.

Este é um resultado interessante, já que indica que, se um dos termos da função de mérito é nulo, foi achado o minimizador global.

- Na elaboração de algoritmos para achar diretamente os minimizadores globais, também exite a vantagem de conhecer o valor da função objetivo nestes pontos.

- Se Ω é um politopo e a função F é linear, para $p = l = 1$, o problema de otimização associado é um problema de programação quadrática, cuja resolução está extensivamente tratada na literatura.

- Se Ω é uma caixa e a função F é linear, a função de mérito pode-se escrever

$$\lambda \ \|F(x) + (0, y, 0)^t - (z, 0)^t\|^2 +$$

$$(1-\lambda) \ \left(\left(\sum_{i=1}^{s_2}((x_i - c_i)z_i)^l\right)^p + \left(\sum_{i=s_1}^{s_3}((t_i - x_i)y_i)^l\right)^p\right) =$$

$$\lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2,$$

onde

$$\lambda \in [0, 1],$$

$$\sigma_1 = \|F(x) + (0, y, 0)^t - (z, 0)^t\|^2 \geq 0,$$

$$\sigma_2 = \left(\left(\sum_{i=1}^{s_2}((x_i - c_i)z_i)^l\right)^p + \left(\sum_{i=s_1}^{s_3}((t_i - x_i)y_i)^l\right)^p\right) \geq 0.$$

Neste caso temos o seguinte resultado: se (x_*, y_*, z_*) é um ponto KKT do problema de otimização associado, e σ_1 ou σ_2 são nulos, então x_* é solução do problema $VIP(F, \Omega_c)$. Portanto (x_*, y_*, z_*) é um minimizador global.

Este resultado sugere a possibilidade de usar o parâmetro λ como penalizador dos termos da função de mérito.

Com isto e os resultados obtidos na teoria de perturbações, pode-se elaborar estratégias para se tentar escapar dos pontos estacionários não desejados.

Pelo exposto acima acreditamos que esta é uma linha de pesquisa que tem perspectivas de sucesso.

REFERÊNCIAS

[1] R. Andreani, A. Friedlander, and J.M. Martínez. On the solution of finite-dimensional variational inequalities using smoooth optimization with simple bounds. *Relatório de Pesquisa*, RP 32/96, Avril 1996. DMA-IMECC-UNICAMP, Brasil.

[2] G. Auchmuty. Variational principles for variational inequalities. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 10:863–874, 1989.

[3] M. Avriel. *Nonlinear Programming*. Prentice Hall, 1976.

[4] M. Bazaraa and C. Shetty. *Foundations of Optimization*, volume 122 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, 1975.

[5] A. Berman and R.J. Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, volume 9 of *CLASSICS in Applied Mathematics*. SIAM, first edition, 1994.

[6] J.F. Bonnans and C.C. Gonzaga. Convergence of interior point algorithms for the monotone linear complementarity. *Mathematics of Operations Research*, 21(1):1–25, 1996.

[7] M. Carey. Integrabitity and mathematical programming models: a survey and parametric approach. *Econometrica*, 45:1957–1976, 1977.

[8] B. Chen and P.T. Harker. A continuation methods for monotone variational inequalities. *Mathematical Programming*, 69:237–253, 1995.

[9] C. Chen and O.L. Mangasarian. A class of smoothing function for nonlinear and mixed complementarity problems. *Technical Report 94-11*, February 1995. To appear in Computational Optimization and Applications.

[10] X. Chen, L. Qi, and D. Sun. Global and superlinear convergence of the smoothing Newton methods and its applications to general box constraint variational problem. *Preprint*, 1996. School of Mathematics University of New South Wales - Australia.

[11] G. P. Mc Cormick. Second order conditions for constrained minima. *SIAM, Journal on Applied Mathematics*, 15:641–652, 1967.

[12] G.P. Mc Cormick. *Nonlinear Programming*. Wiley-Interscience, 1983.

[13] R. W. Cottle. Nonlinear programming whit positively bounded Jacobians. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 14:147–158, 1966.

[14] R.W. Cottle. Note on a fundamental theorem in quadratic programming. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 12(3):663–665, 1964.

[15] R.W. Cottle. Manifestations of the Schur complement. *Linear Algebra and its Applications*, 8:189–211, 1974.

[16] R.W. Cottle, J.P. Pang, and V. Venkateswaran. Sufficient matrices and the linear complementarity problem. *Linear Algebra and its Applications*, 114/115:231–249, 1989.

[17] R.W. Cottle, J.S. Pang, and R.E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, first edition, 1992.

[18] S. Dafermos. Traffic equilibra and variational inequalities. *Transportation Science*, 14:42–54, 1980.

[19] S. Dafermos. An iterative scheme for variational inequalities. *Mathematical Programming*, 26:40–47, 1983.

[20] J.E. Dennis and R.B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*, volume 16 of *Classic in Applied Mathematics*. SIAM, 1992.

[21] B.C. Eaves. On basic theorem of complementarity. *Mathematical Programming*, 1:68–75, 1971.

[22] F. Facchinei, A. Fischer, and C. Kanzow. Inexact Newton methods semismooth equations with appications to variational inequalities problems. *Preprint*, August 1995. Technical University of Dresden, Dresden, Germany.

[23] F. Facchinei, A. Fischer, and C. Kanzow. A semismooth Newton methods for variational inequalities: Theoretical results and preliminary numerical experience. *Preprint*, December 1995. Technical University of Dresden, Dresden, Germany.

[24] F. Facchinei, A. Fischer, and C. Kanzow. A semismooth Newton methods for variational inequalities: The case box constraint. *Preprint*, August 1995. Technical University of Dresden, Dresden, Germany.

[25] F. Facchinei and C. Kanzow. A nonsmooth inexact Newton methods for the solution large-scale nonlinear complementarity problems. *Preprint*, 1995. Universitá di Roma la Sapienza.

[26] M.C. Ferris and J.S. Pang. Engineering and economic applications of complementarity problems. *Preprint*, Janeiro 1996. Computer Sciences Departament, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin.

[27] M. Fiedler and V. Pták. On matrices whit nonpositive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czechoslovak Mathematics Journal*, 12:382–400, 1962.

[28] M. Fiedler and V. Pták. Some generalizations of positive definiteness and monotonicity. *Numerische Mathematik*, 9:163–172, 1966.

[29] M. Fiedler and V. Pták. Some results on matrices of class k and their applications to the convergence rate of iteration procedures. *Czechoslovak Mathematics Journal*, 16:260–273, 1966.

[30] A. Fischer. A special Newton-type optimization methods. *Optimization*, 24:269–284, 1992.

[31] A. Fischer. A NCP-function for the solution of complementarity problem. *Recent Advances in Nonsmooth Otimization*, pages 88–105, 1995. D- Z. Du, L.Qi, and R. Womersley eds.

[32] A. Fischer. An new constraint optimization reformulation for complementarity problem. *Preprint*, 1995. Technical University of Dresden, Dresden, Germany.

[33] A. Fischer. Solution of monotone complementarity problem with locally Lipschitzian functions. *Preprint*, 1995. Technical University of Dresden, Dresden, Germany.

[34] A. Fischer and C. Kanzow. On finite termination of iterative methods for linear complementarity problem. *Preprint*, 1994. Technical University of Dresden, Dresden, Germany.

[35] C.A. Floudas and V. Visweswaran. Quadratic optimization. *Handbook of Global Otimization*, 2:217–270, 1995. Kluwer Academics Publishers.

[36] W. Forster. Homotopy methods. *Handbook of Global Optimization*, pages 669–750, 1995. Kluwer Academics Publisher.

[37] M. Frank and P. Wolfe. An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3:95–110, 1956.

[38] A. Friedlander, J.J. Martínez, and S.A. Santos. A new algorithm for bound constrained minimization. *Journal of Applied Mathematics and Optimization*, 30:235–266, 1994.

[39] A. Friedlander, J.J. Martínez, and S.A. Santos. On resolution of large scale linearly constrained convex minimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 4:331–339, 1994.

[40] A. Friedlander, J.J. Martínez, and S.A. Santos. A new strategy for solving variational inequalities on bounded polytopes. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 16(5):653–668, 1995.

[41] A. Friedlander, J.J. Martínez, and S.A. Santos. Solution of linear complementarity problems using minimization with simple bounds. *Journal of Global Optimization*, 6:1–15, 1995.

[42] M. Fukushima. A relaxed projection method for variational inequalities. *Mathematical Programming*, 35:58–70, 1986.

[43] M. Fukushima. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymetric variational inequality problems. *Mathematical Programming*, 53:99–110, 1992.

[44] M. Fukushima. Merit functions for variational inequality and complementarity problems. *Technical Report, IS-95022*, 1995. Nara Institute of Science and Technology, Japan.

[45] S. Gabriel and J. Pang. An inexact NE/SQP method for solving nonlinear complementarity problem. *Computional Optimization and Applications*, 1:67–91, 1992.

[46] S.A. Gabriel and A.S. Kydes. A nonlinear complementarity approach for the national energy modeling system. *Technical Report, MCS-P504-0395*, 1995. Argonne National Laboratory.

[47] S.A. Gabriel and J.J. Moré. Smoothing of mixed complementarity problem. *Technical Report, MCS-P541-0995*, 1995. Argonne National Laboratory.

[48] D. Gale and H. Nikaido. The Jacobian matrix and global univalence of mappings. *Math. Annalen*, 159:81–93, 1965.

[49] C. Geiger and C. Kanzow. On the resolution of monotone complementarity problems. *Preprint*, 1994. Hamburger Beitr ge zur Angewandtten Mathematik.

[50] P.E. Gill and W. Murray. Newton-type methods for unconstrained and lineary constrained optimization. *Mathematical Programming*, 7:311–350, 1974.

[51] G. H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 2nd edition, 1987.

[52] M.A. Gomes-Ruggiero, J.M. Martínez, and S.A. Santos. Solving nonsmooth equation by means of means of quasi-Newton methods with globalization. *Recent Advances in Nonsmooth Optimization*, pages 121–140, 1995. D- Z. Du, L.Qi, and R. Womersley eds.

[53] C.C. Gonzaga. Path following methods for linear programming. *SIAM Review*, 34:167–227, 1992.

[54] T.H. Hansen and H. Scarf. On the approximation of nash equilibrium points in an N-persons noncoperative games. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 26:622–637, 1974.

[55] P.H. Harker and B. Xiao. Newton methods for the complementarity problem: A B-diferentiable equation approach. *Mathematical Programming*, 48:339–357, 1990.

[56] P.H. Harker and B. Xiao. A nonsmooth Newton method for variational inequalities, I: Theory, II: Numerical results. *Mathematical Programming*, 65:151–194, 1994.

[57] P.T. Harker and J.S. Pang. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications. *Mathematical Programming*, 48:161–220, 1990.

[58] P. Hartman and G. Stampacchia. On some nonlinear eliptic differential funtional equation. *Acta Mathematica*, 115:153–188, 1966.

[59] D. W. Hearn. The gap function of convex programming. *Operations Research Letters*, 1:67–71, 1982.

[60] R. Horst and H. Tuy. *Global Optimization*. Springer-Verlag, second edition, 1993.

[61] G. Isac. *Complementarity Problems*, volume 1528 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.

[62] H. Jiang. Local properties of solution of nonsmooth variational inequalities. *Preprint*, 1994. School of Mathematics, University of New South Wales - Australia.

[63] H. Jiang. Unconstrained minimization approaches to nonlinear complementarities. *Preprint*, October 1994. School of Mathematics, University of New South Wales - Australia.

[64] H. Jiang, M. Fukushima, L. Qi, and D. Sun. A trust region method for solving generalized complementarity problems. *Preprint*, December 1995. School of Mathematics, University of New South Wales - Australia.

[65] H. Jiang and L. Qi. Local uniqueness and convergence of iterative methods for nonsmooth variational inequalities. *Preprint*, December 1994. School of Mathematics, University of New South Wales - Australia.

[66] H. Jiang and L. Qi. A new nonsmooth equations approach to nonlinear complementarities. *Preprint*, October 1994. School of Mathematics, University of New South Wales - Australia.

[67] J. J. Júdice. Algorithms for linear complementarity problems. *Algorithms for Continuous Optimization*, pages 435–474, 1994. Kluwer Academics Publisher.

[68] C. Kanzow. Global convergence properties of some methods for linear complementarity problems. *Preprint*, 1994. Institute of Applied Mathematics University of Hamburg- Germany.

[69] C. Kanzow. Nonlinear complementarity as unconstraint optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 88(1), 1996.

[70] C. Kanzow and M. Fukushima. Equivalence of the generalized complementarity problems to differentiable unconstrained minimization. *Preprint*, 1995. Hamburger Beitr ge zur Angewandten Mathematik.

[71] C. Kanzow and M. Fukushima. Theoretical and numerical investigation of the D-Gap function for box constrained variational problem. *Preprint*, March 1996. Nara Institute od Science and Technology, Japan.

[72] C. Kanzow and H. Jiang. A continuation method for the solution of monotone variational inequality problems. *Preprint*, 1995. Nara Institute od Science and Technology -Japan.

[73] C. Kanzow, N. Yamashita, and M. Fukushima. A NCP-fuction and their properties. *Preprint*, 1996. Nara Institute od Science and Technology, Japan.

[74] S. Karamardian. The nonlinear complementarity problem with applications, part I and II. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4(87–98 and 167–181), 1969.

[75] S. Karamardian. The complementarity problem. *Mathematical Programming*, 2:107–109, 1972.

[76] S. Karamardian. An existence theorem for the complementarity problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 19:227–232, 1976.

[77] M. Kojima. A unification of the existence theorems of the nonlinear complementarity problem. *Mathematical Programming*, 9:257–277, 1975.

[78] M. Kojima, N. Megiddo, and T. Noma. Homotopy continuation methods for nonlinear complementarity problems. *Mathematics of Operations Research*, 16(4):754–774, 1991.

[79] D.N. Kozakevich, J.M. Martínez, and S.A. Santos. Solving nonlinear systems of equations with simple constraits. *Preprint*, 1996. DMA-IMECC-UNICAMP, Brasil.

[80] J. Kyparisis. Sensitivity analysis framework for variational inequalities. *Mathematical Programming*, 38:203–213, 1987.

[81] T. Larson and M. Pactrikson. A class of gap functions for variational inequalities. *Mathematical Programming*, 64:53–79, 1994.

[82] C.E. Lemke and J.T. Howson. Equilibrium points bimatrix game. *Journal of the Society of Industrial Applied Mathematics*, 12(2), June 1964.

[83] T. De Luca, F. Facchinei, and C. Kanzow. A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems. *Preprint*, 1995. Universitá di Roma la Sapienza.

[84] D.G. Luemberger. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming.* Addison-Wesley, 1973.

[85] O.L. Mangasarian. *Nonlinear Programming.* Mc Graw-Hill, 1969.

[86] O.L. Mangasarian. Equivalence of the complementarity problems to a system of nonlinear equations. *SIAM J. Applied Mathematics*, 31:89–92, 1976.

[87] O.L. Mangasarian. Characterization of linear complementarity problem as linear programs. *Mathematical Programming*, 7:74–87, 1978.

[88] O.L. Mangasarian. Locally unique solution of quadratic programs linear and nonlinear problems. *Mathematical Programming*, 19:200–212, 1980.

[89] O.L. Mangasarian and M.V. Solodov. Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization. *Mathematical Programming*, 62:277–297, 1993.

[90] N. Megiddo. A monotone complementarity problem with feasible solution but no complementarity solution. *Mathematical Programming*, 12:131–132, 1977.

[91] N. Megiddo and M. Kojima. On the existence and uniqueness of solution in nonlinear complementarity theory. *Mathematical Programming*, 12:110–130, 1977.

[92] J.J. Moré. Classes of function and feasibility conditions in nonlinear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 6:327–338, 1974.

[93] J.J. Moré. Coercivity conditions in nonlinear complementarity problems. *SIAM Review*, 16:1–16, 1974.

[94] J.J. Moré. Global methods for nonlinear complementarity problems. *Technical Report, MCS-P429-0494*, 1994. Argone National Laboratory,Mathematics and Computation Science Division.

[95] J.J. Moré and W.C. Rheinboldt. On P-function and S-functions and related classes of n-dimensional nonlinear mapping. *Linear Algebra and its Applications*, 6:45–68, 1973.

[96] P.J. Moylan. Matrices with positive principal minors. *Linear Algebra and its Applications*, 17:53–53, 1977.

[97] K. G. Murty. *Linear complementarity, linear and nonlinear programming*, volume 3 of *Sigma Series in Applied Mathematics*. Heldermann Verlag, 1988.

[98] K.G. Murty and S.N. Kabadi. Some NP-complete problems in quadratics nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 39:117–129, 1987.

[99] M.A. Noor. Generalized quasi-complementarity problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 120:321–327, 1986.

[100] M.A. Noor. The quasi-complementarity problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 130:334–353, 1988.

[101] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in Several variables*. Academic Press, 1970.

[102] J. Pang and S. Gabriel. NE/SQP: a robust algorithms for the nonlinear complemntarity problem. *Mathematical Programming*, 60:295–337, 1993.

[103] J. S. Pang. Complementarity problems. *Handbook of Global Optimization*, pages 271–338, 1995. Kluwer Academics Publisher.

[104] J.S. Pang. The implicit complementarity problem. *Nonlinear Programming*, pages 487–518, 1981.

[105] J.S. Pang. On the convergence of basic iterative methods for the implicit complementarity problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 37:149–162, 1982.

[106] J.S. Pang. Two caracterization theorems in complementarity theory. *Operations Research Letters*, 7:27–31, 1988.

[107] J.S. Pang. Solution differentiability and continuation of Newton methods for variational problems problems over polyhedral sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 66(1):121–135, July 1990.

[108] P.M. Pardalos and J.B. Rosen. *Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications*, volume 268 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1987.

[109] P.M. Pardalos and J.B. Rosen. Global optimization approach to the linear complementarity problem. *SIAM Scientific and Statistics Computation*, 9:341–353, 1988.

[110] R.J. Plemmons. M-matrix characterizations. I-nonsingular M-matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 18:175–188, 1977.

[111] W.C. Rheinboldt. *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equation.* Interscience. J. Wiley, 1986.

[112] U.G. Rothblum. An index classification of M-matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 23:1–12, 1979.

[113] S.A. Santos. *Regiões de Confiança em Programação Matemática.* DMA-IMECC-UNICAMP, Brasil, 1994. Tese de Doutorado.

[114] J.B. Shoven. The application of fixed point methods to economics. *Homotopy Methods and Global Convergence*, pages 249–262, 1977.

[115] P.K. Subramanian. Gauss-Newton methods for the complementarity problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 77(3):467–482, 1993.

[116] K. Taji and M. Fukushima. A globally convergent Newton methods for solving varational inequality problems with inequality constraint. *D.Z. Du, L. Qi and R. Womersley*, pages 405–417, 1994. Recent Advances in Nonsmooth Optimization.

[117] K. Taji and M. Fukushima. A new function and sussecive quadratic programming algorithms for variational problems. *Preprint*, January 1995. Nara Institute od Science and Technology, Japan.

[118] K. Taji, M. Fukushima, and T. Ibaraki. A globally convergent Newton methods for solving strongly monotone variational inequalities. *Mathematical Programming*, 58:369–383, 1993.

[119] L.T. Watson. Solving the nonlinear complementarity problem by a homotopy methods. *SIAM J. Control and Optimization*, 17(1):36–46, 1979.

[120] L.T. Watson. Algorithm 652: HOMPACK: a suite of codes for globally convergent homotopy algorithms. *ACM Transations on Mathematical Software*, 13:281-310, 1987.

[121] J. Whalley. Fiscal harmonization in the EEC: some preliminary findings of the fixed point calculations. *Fixed Point: Algorithms and Applications*, pages 435–472, 1977.

[122] J.H. Wu, M. Florian, and P. Marcotte. A general descent framework for the monotone variational inequality problem. *Mathematical Programming*, 61:281–300, 1993.

[123] B. Xiao and P.T. Harker. A nonsmooth Newton methods for variational inequalities, I: theory. *Mathematical Programming*, 65:151–194, 1994.

[124] B. Xiao and P.T. Harker. A nonsmooth Newton methods for variational inequalities, II: Numerical results. *Mathematical Programming*, 65:195–216, 1994.

[125] N. Yamashita and M. Fukushima. Equivalent unconstrained minimization and global error bound for variational inequality problems. *Preprint*, November 1994. Nara Institute od Science and Technology, Japan.

[126] N. Yamashita, K. Taji, and M. Fukushima. Unconstrained optimization reformulations of variational inequality problems. *Preprint*, August 1995. Nara Institute od Science and Technology, Japan.