
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**USO DE EPISÓDIOS HISTÓRICOS E DE
GEOMETRIA DINÂMICA PARA O
DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS DE
INTEGRAL DE RIEMANN E DO TEOREMA
FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA
FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL**

por

Luiz Antonio Jacyntho

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de C. Filho

**USO DE EPISÓDIOS HISTÓRICOS E DE GEOMETRIA DINÂMICA PARA O
DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS DE INTEGRAL DE RIEMANN E DO
TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA FUNÇÕES REAIS DE
VARIÁVEL REAL**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Luiz Antonio Jacyntho** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de agosto de 2008.



Prof. Dr.:Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr.:Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho
- 2 Prof. Dr.:Leônidas de Oliveira Brandão
- 3 Prof. Dr.:Eduardo Sebastiani Ferreira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

.....

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues CRB8a / 2116

Jacyntho, Luiz Antonio

C253u Uso de episódios históricos e de geometria dinâmica para desenvolvimento de conceitos de integral de Riemann e do teorema fundamental do cálculo para funções reais de variável real / Luiz Antonio Jacyntho -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho

Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Geometria. I. Carvalho Filho, Luiz Mariano Paes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Historical events and dynamical geometry used to develop the Riemman integral and the fundamental theorem of calculus concepts.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential calculus. 2. Integral calculus. 3. Geometry.

Área de concentração: Cálculo, Geometria

Titulação: Mestre Profissional em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho (UERJ)

Prof. Dr. Leônidas de Oliveira Brandão (IME-USP)

Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 28/08/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de agosto de 2008 e aprovada

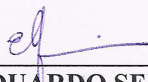
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). LUIZ MARIANO PAES DE CARVALHO FILHO



Prof. (a). Dr (a). LEÔNIDAS DE OLIVEIRA BRANDÃO



Prof. (a). Dr (a). EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA

Àqueles que enxergam nas ciências a possibilidade de construir um mundo melhor.

Agradecimentos

- Aos meus pais pelos ensinamentos que constituem meu caráter e minha humanidade. Por estarem sempre comigo, mesmo à distância.
- A minha esposa Sueide, pela imensa cooaprensão durante todo este trabalho, em particular na etapa final. Pela amizade, incentivo e apoio.
- Ao professor Luiz Mariano, meu orientador. Pela dedicação que me dispensou, pelos estímulos e cobranças.
- A todos meus amigos e parentes, muitos dos quais torceram bastante para que este momento se concretizasse.
- Aos realizadores desse projeto, em especial a Professoras Sueli e Zoraide, por terem lavado adiante este sonho, contribuindo com o crescimento educacional no Estado de Mato Grosso.
- Aos amigos do mestrado, em especial Cleuber, Inédio e Lúdio. O apoio de vocês foi muito importante.

Resumo

Jacyntho, Luiz Antonio. *Uso de Episódios Históricos e de Geometria Dinâmica para Desenvolvimento de Conceitos de Integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo para Funções Reais de Variável Real*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2008. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Este trabalho tem como objetivos estudar algumas realizações de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C., Grécia) e de Isaac Barrow (1630-1677, Inglaterra), e, também, desenvolver atividades no Geogebra para auxiliar no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Apresentamos a construção do conjunto dos números reais, definições e teoremas atuais que antecedem, logicamente, o Teorema Fundamental do Cálculo. Tratamos de algumas das realizações de Arquimedes: a demonstração da medida da área do círculo, utilizando o Método de Eudoxo, o "método mecânico", pelo qual ele descobriu a medida da área do segmento parabólico e a demonstração rigorosa desta medida. São discutidas algumas realizações de Isaac Barrow: o método por ele utilizado para encontrar retas tangentes a uma curva, um estudo sobre o conteúdo da Conferência I e sobre algumas proposições da Conferência X. Nesta última, será dada atenção especial à Proposição 11, que demonstra casos particulares do Teorema Fundamental do Cálculo. O trabalho termina com um conjunto de atividades baseadas no programa Geogebra. Cada atividade tem a sua função numa seqüência didática e aborda os seguintes temas: a representação do conjunto dos números reais, a proposição de Arquimedes sobre a medida da área do círculo, o cálculo de áreas, a construção da função área, o cálculo de primitivas, a interpretação de Barrow para casos particulares do Teorema fundamental do Cálculo e algumas aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-Chave: Cálculo diferencial, Cálculo integral, Geometria dinâmica.

Abstract

Jacyntho, Luiz Antonio. *Uso de Episódios Históricos e de Geometria Dinâmica para Desenvolvimento de Conceitos de Integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo para Funções Reais de Variável Real*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2008. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

This work has as objectives study some realizations of Archimedes (287 BC - 212 BC, Greece) and of Isaac Barrow (1630-1677, UK), and, also, develop activities in Geogebra to aid in the teaching of Differential and Integral Calculus. We present the construction of the set of the real numbers, definitions and actual theorems that precede, logically, the Fundamental Theorem of Calculus. We deal with some of Archimedes' realizations: the demonstration of the measure of the circle's area, using the Eudoxus' Method, the "mechanical method", by which he discovered the measure of the area of the parabolic segment and the rigorous demonstration of it. There are discussed some realizations of Isaac Barrow: the method used by him to find tangent straights to a curve, a study about the content of the Lecture I and about some prepositions of the Lecture X. In this last one, main attention will be given to Proposition 11, which demonstrates particular cases of the Fundamental Theorem of Calculus. The work ends with a group of activities based in the Geogebra. Each activity has its function in a didactic sequence and they are about the following themes: the representation of the set of the real numbers, the proposition of Archimedes about the measure of the area of the circle, the calculation of areas, the construction of the area function, the calculation of primitives, the interpretation of Barrow to particular cases of the Fundamental Theorem of Calculus and some applications of the Fundamental Theorem of Calculus.

Keywords: Differential calculus, Integral calculus, Geometry.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
Introdução	1
2 Definições e Teoremas atuais que antecedem o Teorema Fundamental do Cálculo	4
2.1 Construção dos números reais	4
2.2 Teorema Fundamental do Cálculo	8
3 Algumas realizações de Arquimedes envolvendo conceitos de Cálculo	18
3.1 Método utilizado para demonstrar a fórmula da área do círculo	19
3.2 Método utilizado para conhecer a fórmula da área do segmento parabólico .	24
3.3 Método utilizado para demonstrar a fórmula da área do segmento parabólico	32
4 Algumas realizações de Barrow envolvendo Cálculo	43
4.1 Método para calcular a inclinação de retas tangentes	43
4.2 Considerações sobre as Conferências I e X de Barrow	45
4.3 Demonstração de um caso particular do Teorema Fundamental do Cálculo .	48
5 Atividades no Geogebra para auxiliar nas aulas de Cálculo	55
5.1 Atividade 1: Representação dos números reais no Geogebra	58
5.1.1 Objetivos	58
5.1.2 Roteiro das atividades	58

5.1.3	Comentários	60
5.2	Atividade 2: Arquimedes (Quadratura do círculo)	60
5.2.1	Objetivos	60
5.2.2	Roteiro das atividades	61
5.2.3	Comentários	62
5.3	Atividade 3: Somas superior, inferior e integral	63
5.3.1	Objetivos	63
5.3.2	Roteiro das atividades	63
5.3.3	Comentários	65
5.4	Atividade 4: Integral como função da área de f	65
5.4.1	Objetivos	65
5.4.2	Roteiro das atividades	66
5.4.3	Comentários	67
5.5	Atividade 5: Área da função exponencial	67
5.5.1	Objetivos	67
5.5.2	Roteiro das atividades	68
5.5.3	Comentários	69
5.6	Atividade 6: Primitiva e função integral	70
5.6.1	Objetivos	70
5.6.2	Roteiro das atividades	70
5.6.3	Comentários	71
5.7	Atividade 7 : Barrow e o Teorema Fundamental do Cálculo	71
5.7.1	Objetivos	71
5.7.2	Roteiro das atividades	72
5.7.3	Comentários	72
5.8	Atividade 8 : Barrow e a relação entre F e f	74
5.8.1	Objetivos	74
5.8.2	Roteiro das atividades	75
5.8.3	Comentários	75
5.9	Atividade 9: Motivação geométrica para compreender o Teorema Fundamental do Cálculo	76
5.9.1	Objetivos	76

5.9.2	Roteiro das atividades	77
5.9.3	Comentários	77
5.10	Atividade 10: Segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo	78
5.10.1	Objetivos	78
5.10.2	Roteiro das atividades	78
5.10.3	Comentários	79
5.11	Atividade 11: Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1) . .	80
5.11.1	Objetivos	80
5.11.2	Roteiro das atividades	80
5.11.3	Comentários	82
5.12	Atividade 12: Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2) . .	82
5.12.1	Objetivos	82
5.12.2	Roteiro das atividades	84
5.12.3	Comentários	84
Considerações		85
Referências Bibliográficas		87

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar definições e teoremas atuais que antecedem o Teorema Fundamental do Cálculo, focar dois episódios históricos, sendo que o primeiro constitui-se de algumas realizações de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C., Grécia), o segundo é composto de algumas realizações de Isaac Barrow (1630-1677, Inglaterra) e também desenvolver atividades no Geogebra para auxiliar no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. O capítulo 2 contém algumas definições e teoremas atuais que antecedem o Teorema Fundamental do Cálculo, seguindo quase toda uma seqüência publicada no livro *Analysis by its History* [7], página 242, ver figura 1.1 onde aparece um fluxograma que será reproduzido aqui do modo que está no livro. Em seu início, é construído o conjunto dos números reais, sendo consultados os livros *Análise Real* (volume 1), [10], *Cálculo 1* [1], *The History of the Calculus and its conceptual development* [3] e *Analysis by its History* [7]; no seu final estão definições e teoremas que antecedem o Teorema Fundamental do Cálculo e foram utilizados os livros de *Análise Real* (volume 1) [10], *Cálculo 1* [1], *Analysis by its History* [7] e *Calculus An Intuitive and Physical Approach* [9].

No capítulo 3, o enfoque gira em torno de algumas realizações de Arquimedes. Primeiramente encontra-se a demonstração da medida da área do círculo, onde foram usados as referências *The Works of Archimedes* [8] e *Tópicos de História da Matemática* [2]. Em sua outra divisão, ele contém duas partes, em que a primeira apresenta a maneira pela qual ele descobriu a medida da área do segmento parabólico; e a segunda, a demonstração rigorosa

desta medida; em ambas as partes as referências utilizadas foram The Works of Archimedes [8] e Tópicos de história da Matemática [2].

No capítulo 4 serão destacados alguns estudos Isaac Barrow. No início está o método que ele utilizava para encontrar retas tangentes a uma curva, sendo usadas como referências [2] e [4], depois serão feitas considerações sobre algumas Conferências de sua autoria, a Conferência 1 e a Conferência 10, sendo que nesta última, a Proposição 11, que engloba casos particulares do Teorema Fundamental do Cálculo, será demonstrada separadamente. Os livros utilizados neste capítulo foram The Geometrical Lectures [4] e Tópicos de História da Matemática [2].

No capítulo 5, seguem um conjunto de atividades realizadas no Geogebra, com o intuito de auxiliar os acadêmicos na compreensão do Cálculo; cada atividade tem a sua função numa sequência construída, seguindo um planejamento didático que inicia abordando o conjunto dos números reais, depois, a proposição de Arquimedes sobre a medida da área do círculo, cálculo de áreas, construção da função integral, cálculo de primitivas, interpretação de Barrow para casos particulares do Teorema fundamental do Cálculo e aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

No último capítulo estão as considerações e realizações futuras, que foram elaboradas após a realização deste trabalho.

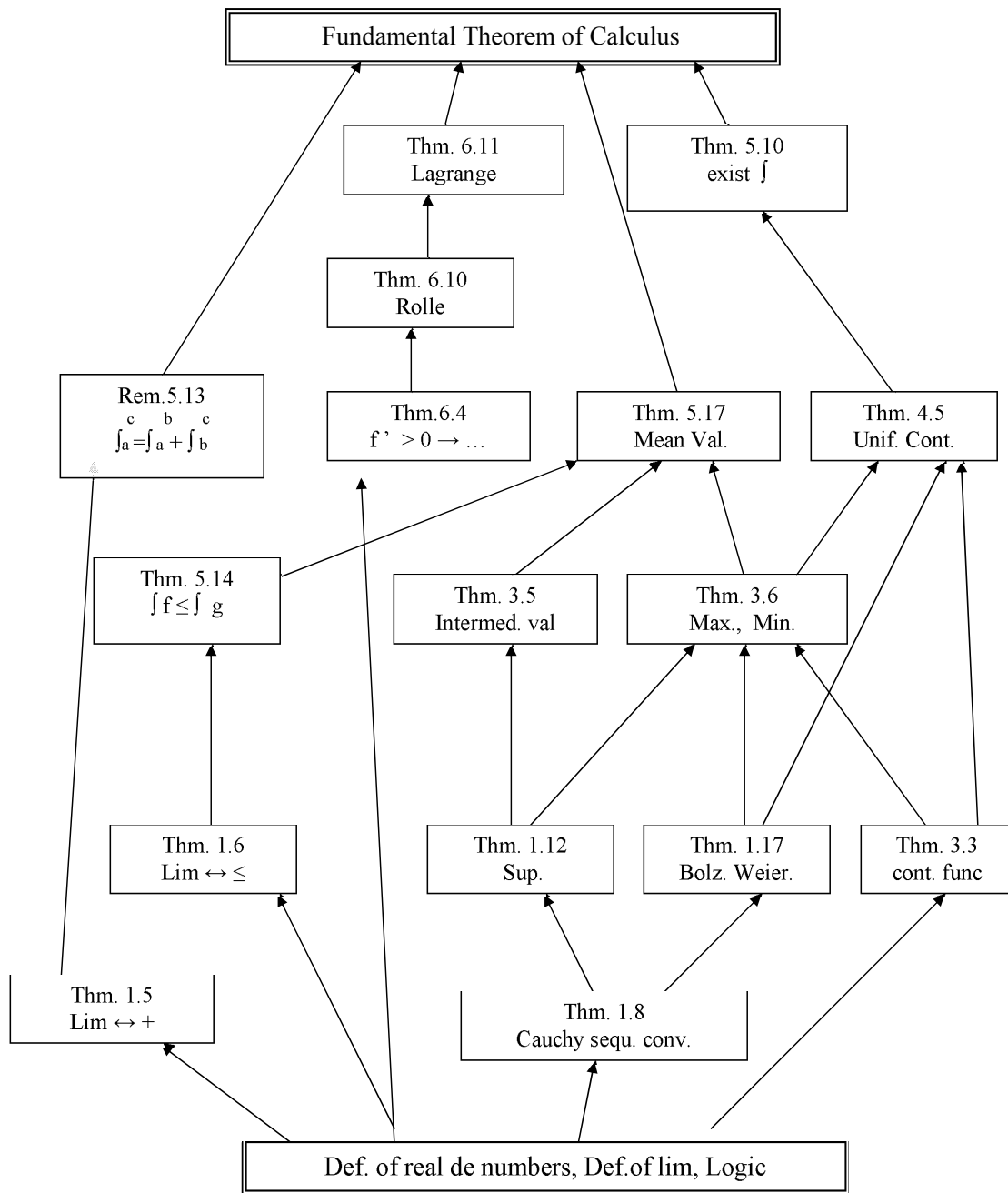


Figura 1.1: Fluxograma retirado do livro Analysis by its History

Definições e Teoremas atuais que antecedem o Teorema Fundamental do Cálculo

Neste capítulo serão destacadas as principais definições e teoremas que atualmente antecedem o Teorema Fundamental do Cálculo. Em sua primeira parte será descrita a construção do conjunto dos números reais (chamado de $\mathbb{R}$) que aborda as definições de corpo, corpo ordenado e corpo ordenado completo. Na segunda parte, serão expostos teoremas mais relacionados com o Teorema Fundamental do Cálculo, porém a maioria não vai ser demonstrada, e caso o leitor queira ter acesso a elas, poderá consultar os seguintes livros de Cálculo, (volume 1), [1] e [11], que irão encontrá-las em detalhe. Quanto à seqüência utilizada neste capítulo, é sugerida no livro *Analysis by its history*, na página 242, [7], e para melhor identificação e compreensão dos conteúdos que aqui serão abordados, ela vai aparecer traduzida e modificada, ver Figura 2.1 com uma referência direta para cada teorema.

2.1 Construção dos números reais

Nesta secção do trabalho, todas as definições que foram utilizadas, seguem o formato adotado no livro de análise, [10] e por este motivo o enfoque dado será parecido com o do autor citado. Antes de definir o conjunto dos números reais, é necessário compreender outras propriedades

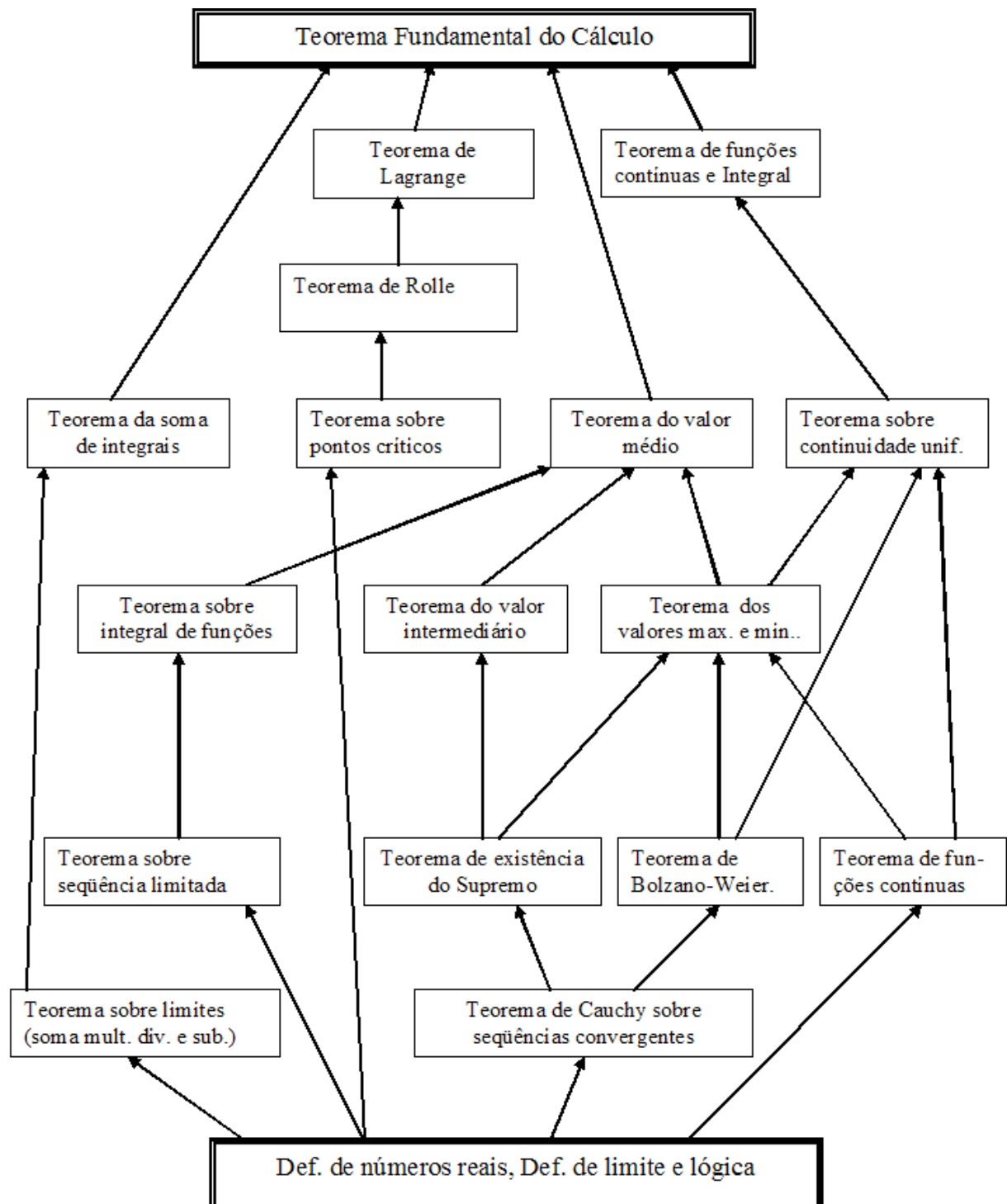


Figura 2.1: Fluxograma traduzido e modificado

suas, que serão úteis posteriormente. Assim, o primeiro fato que iremos abordar é que $\mathbb{R}$ é um corpo, e a sua definição segue adiante.

Definição 2.1 *Um corpo é um conjunto K , munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas de corpo, que são os seguintes :*

Axiomas da adição:

1. Associatividade: Quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Comutatividade: Quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$.
3. Elemento neutro: Existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in K$. O elemento chama-se "zero".
4. Simétrico: Todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$.

Axiomas da multiplicação:

1. Quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2. Quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$.
3. Existe $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in K$. O elemento chama-se "um".
4. Todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} , tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Axioma da distributividade:

1. Dados x, y, z , quaisquer, em K , tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assim, o fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo, significa que nele vão estar definidas duas operações, chamadas de adição e multiplicação, e que obedecem todas as propriedades acima. O segundo ponto que precisa ser abordado é que além de ser um corpo, $\mathbb{R}$ também é um corpo ordenado, e sua definição é a seguinte:

Definição 2.2 *Um corpo ordenado é um corpo $\mathbf{K}$, no qual se destacou um subconjunto $\mathbf{P} \subset \mathbf{K}$, chamado o conjunto dos elementos positivos de $\mathbf{K}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos, ou seja dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{P}$ e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbf{P}$.
2. Dado $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$, exatamente uma das três alternativas ocorre; ou $\mathbf{x} = 0$, ou $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$, ou $-\mathbf{x} \in \mathbf{P}$.

Desta outra definição, segue que existe um subconjunto em $\mathbb{R}$ que chamaremos o conjunto dos números reais positivos (notação: $\mathbb{R}^+$.)

Finalmente para definir $\mathbb{R}$ a última propriedade que é preciso ser considerada é a de corpo ordenado completo, que também necessita de outras quatro definições para ser estabelecida.

Definição 2.3 *Um subconjunto $\mathbf{X}$ de um corpo ordenado $\mathbf{K}$ chama-se limitado superiormente, quando existe $\mathbf{b} \in \mathbf{K}$ tal que $\mathbf{b} \geq \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Cada elemento $\mathbf{b} \in \mathbf{K}$ com esta propriedade chama-se uma cota superior de $\mathbf{X}$.*

Definição 2.4 *Um subconjunto $\mathbf{X}$ de um corpo ordenado $\mathbf{K}$ chama-se limitado inferiormente, quando existe $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$ tal que $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Cada elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$ com esta propriedade chama-se uma cota inferior de $\mathbf{X}$.*

Definição 2.5 *Um elemento $\mathbf{b} \in \mathbf{K}$ chama-se supremo do subconjunto $\mathbf{X}$, quando $\mathbf{b}$ é a menor das cotas superiores de $\mathbf{X}$ em $\mathbf{K}$.*

Definição 2.6 *Um elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$ chama-se ínfimo do subconjunto $\mathbf{X}$, quando $\mathbf{a}$ é a maior das cotas inferiores de $\mathbf{X}$ em $\mathbf{K}$.*

Agora é possível entender o que é um corpo ordenado completo, que tem como definição:

Definição 2.7 *Um corpo ordenado $\mathbf{K}$ chama-se completo, quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, $\mathbf{X} \subset \mathbf{K}$, possui supremo em $\mathbf{K}$.*

Assim terminando de caracterizar $\mathbb{R}$, pode-se dizer que:

Definição 2.8 *O conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.*

Esta definição de ser um corpo ordenado completo é que faz de $\mathbb{R}$ um conjunto diferente e esta diferença é necessária para que definições e teoremas na continuação deste capítulo tenham a sua validade.

2.2 Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta parte, antes de chegar ao Teorema Fundamental do Cálculo, primeiramente será apresentada a definição de seqüência, a noção de limite de uma seqüência e depois alguns teoremas e propriedades relacionadas com estas definições. Para realizar as demonstrações o livro de Cálculo 1, [1], foi utilizado como base na maioria delas.

Definição 2.9 *Uma seqüência de números reais é uma função*

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada número natural n um número real (x_n) , (chamado o n -ésimo termo da seqüência).

Na definição de limite que veremos agora, é possível perceber que a partir de um determinado valor de n , os termos (x_n) , tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto se deseje e ela é muito útil para representar futuros conceitos de análise que aqui serão explorados.

Definição 2.10 *Um número real a é o limite da seqüência (x_n) quando para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, |x_n - a| < \varepsilon$.*

O teorema seguinte apresentará algumas propriedades relativas a operações com limites, usando diretamente a sua definição.

Teorema 2.1 *Consideremos duas seqüências convergentes, onde $s_n \rightarrow s$ e $v_n \rightarrow v$. Então a soma, o produto e o quociente das duas seqüências tomados termo a termo satisfazem:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = s + v$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = s - v$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = s \cdot v$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{s}{v}, v \neq 0 \text{ e } y_n \neq 0.$

Nos próximos teoremas, será abordado o conceito de convergência de uma seqüência.

Definição 2.11 *Uma seqüência (s_n) de números reais é de Cauchy quando cumpre a seguinte condição :*

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implicam $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

(2.1)

Teorema 2.2 (Cauchy 1821) *Uma seqüência (s_n) de números reais é convergente (com a um número real como seu limite) se e somente se é uma seqüência de Cauchy.*

Teorema 2.3 *Assumindo que a seqüência (x_n) converge para s e que $s_n \geq B$ para n suficientemente grande, então o limite também satisfaz $s \geq B$.*

Teorema 2.4 *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente (isto é, $\exists B, \forall x \in X, x \leq B$.) Então, existe um número real ε tal que $\varepsilon = \sup(X)$.*

Definição 2.12 *Um conjunto $V \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança de x , se existir um intervalo aberto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in A \subseteq V$.*

Definição 2.13 *Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de um subconjunto X de $\mathbb{R}$, quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente de a .*

Observação 2.1 *Indica-se X' o conjunto dos pontos de acumulação de X .*

Teorema 2.5 (Bolzano-Weierstrass) *Uma seqüência limitada (s_n) possui ao menos um ponto de acumulação.*

Deste ponto para frente, a noção de limite que vimos nos casos relacionados com seqüências será estendida para situações mais gerais que envolverão funções, assim trabalharemos com a definição de limite de uma função, que é a seguinte:

Definição 2.14 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X . Diz-se que o número L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.*

Teorema 2.6 *Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in A$ se e somente se, para toda seqüência (x_n) com $x_n \in A$, tem-se que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

No caminho rumo ao Teorema Fundamental do Cálculo, outros conceitos que serão necessários para os próximos teoremas é o de derivada em um determinado ponto, de função derivável, integral de uma função escada e de integral, assim a seguir vamos escrever estas definições.

Definição 2.15 *A derivada de uma função f em um ponto $x \in [a, b]$ é dada por $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, se este limite existir.*

Definição 2.16 *Dizemos que uma função é derivável, quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.*

Definição 2.17 *Uma função s , cujo domínio é um intervalo fechado $[a, b]$, diz-se uma função em escada, se existe uma partição $P = x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[a, b]$ tal que seja constante em qualquer subintervalo fechado de P . Quer dizer que para cada $k = 1, 2, \dots, n$ existe um número real s_k tal que $s(x) = s_k$ se $x_{k-1} < x < x_k$.*

Definição 2.18 Seja s uma função escada definida em $[a, b]$ e seja $\mathbf{P} = x_0, x_1, \dots, x_n$ a partição de $[a, b]$ tal que s seja constante nos subintervalos abertos de $\mathbf{P}$. Designemos por s_k o valor constante de s no subintervalo aberto de ordem k , ou seja

$$s(k) = s_k, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

A integral de uma função escada s de a até b , representada pelo símbolo

$$\int_a^b s(x) \, dx$$

é definida pela fórmula

$$\int_a^b s(x) \, dx = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad (2.3)$$

Definição 2.19 Seja f uma função definida e limitada em $[a, b]$ e sejam s e t , funções escada arbitrárias definidas em $[a, b]$ tais que $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$, para cada $x \in [a, b]$. Se existir um e só um número I , tal que

$$\int_a^b s(x) \, dx \leq I \leq \int_a^b t(x) \, dx$$

para cada par de funções escada s e t , então esse número chama-se a integral de f de a até b e representa-se pelo símbolo

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Definição 2.20 Uma função F diz-se uma primitiva de uma função f em um intervalo aberto I , se a derivada de F é f , isto é, se $F'(x) = f(x)$ para todo x de I .

Teorema 2.7 Se $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a, b]$ (com $a < b$), e se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Teorema 2.8 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio, então ela é limitada em $[a, b]$, isto é existe um número $C \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in [a, b]$.

Teorema 2.9 (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < c < f(b)$, então existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = c$.

Teorema 2.10 (Teorema do Valor Extremo) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio, então ela é limitada em $[a, b]$ e admite um máximo e um mínimo, isto é, existe $u \in [a, b]$ e $U \in [a, b]$ tal que $f(u) \leq f(x) \leq f(U)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração: Basta provar que f assume o seu supremo em $[a, b]$. A demonstração para o ínfimo é uma consequência da anterior porque o ínfimo de f é o supremo de $-f$. Seja $M = \sup(f)$. Suponhamos que não existe nenhum x em $[a, b]$ para o qual $f(x) = M$, assim seja $g(x) = M - f(x)$. Então $g(x) > 0$ para todo x em $[a, b]$, de modo que a função recíproca $\frac{1}{g}$ é contínua em $[a, b]$. Usando o resultado do teorema 2.8, $\frac{1}{g}$ é limitada em $[a, b]$, isto é $\frac{1}{g} < C$ para todo x em $[a, b]$, com $C > 0$. Isto implica que $M - f(x) > \frac{1}{C}$ de tal modo que $f(x) < M - \frac{1}{C}$ para todo x em $[a, b]$, o que contradiz o fato de que M é o menor limite superior de f em $[a, b]$. Por conseguinte, $f(x) = M$ para, pelo menos um x em $[a, b]$.

Observação 2.2 Seja $a < b < c$ e considerando que $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função na qual é integrável em suas restrições $[a, b]$ e em $[a, c]$, assim temos que

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx \quad (2.4)$$

Teorema 2.11 Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que:

1. $f(x) > f(x_0)$ para todo x , satisfazendo $x_0 < x_0 + \delta$
2. $f(x) < f(x_0)$ para todo x , satisfazendo $x_0 - \delta < x < x_0$

Teorema 2.12 (Teorema do Valor Médio para Integral) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração: Sejam m e M , respectivamente, os valores mínimo e máximo de f em $[a, b]$. Então $m \leq f(x) \leq M$, para todo o x de $[a, b]$. Integrando estas desigualdades e dividindo por $b - a$, encontramos $A(f) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$. Mas o teorema do valor intermediário assegura-nos que $A(f) = f(c)$, para certo c de $[a, b]$, o que completa a demonstração.

Para o próximo teorema, é necessário a definição de continuidade uniforme, assim:

Definição 2.21 *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uniformemente contínua no conjunto X quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que:*

$$x, y \in X, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (2.5)$$

Teorema 2.13 *Seja I um intervalo fechado $[a, b]$ e seja a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua sobre a ; então f é uniformemente contínua sobre I .*

Teorema 2.14 (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Então existe um $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Teorema 2.15 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) . Então existe um $\xi \in (a, b)$ tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (2.6)$$

Demonstração: Consideremos a função auxiliar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - dx$, onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é,

$$f'(c) = d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.7)$$

o que completa a demonstração.

Teorema 2.16 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, então f é integrável.*

Agora depois de passar por todas estas definições e teoremas, estamos aptos para enunciar um teorema que estabelece uma conexão entre os dois ramos do Cálculo: o Cálculo diferencial e o Cálculo integral, mostrando que a diferenciação e a integração são, em certo sentido, processos inversos. Para o seu melhor entendimento dividiremos este teorema em duas partes e assim segue abaixo a sua primeira parte.

Teorema 2.17 *(Teorema Fundamental do Cálculo) Parte 1*

Considere f uma função integrável em $[a, x]$, para qualquer $x \in [a, b]$. Seja c tal que $a \leq c \leq b$ e definida uma nova função A como segue:

$$A(x) = \int_c^x f(t) dt,$$

se $a \leq x \leq b$.

Então a derivada $A'(x)$ existe em cada ponto do intervalo aberto (a, b) em que f é contínua e, para tal x , tem-se
 $A'(x) = f(x).$

Demonstração: Seja x um ponto de continuidade de f , suposto fixo, e formemos a razão incremental

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \quad (2.8)$$

Para demonstrarmos o teorema provaremos que este quociente tende para o limite $f(x)$ quando $h \rightarrow 0$. O numerador vale

$$A(x+h) - A(x) = \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (2.9)$$

Se na última integral escrevermos $f(t) = f(x) + [f(t) - f(x)]$, obtemos

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(x) \, dt + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] \, dt = h \cdot f(x) + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] \, dt \quad (2.10)$$

onde se conclui:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] \, dt \quad (2.11)$$

Mostremos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] \, dx \quad (2.12)$$

Nesta fase faremos uso da continuidade de f em x . Representando o segundo termo do segundo membro de 2.12 por $G(h)$, pretendemos provar que $G(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Usando a definição de limite, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, $\exists$ um $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |h| < \delta \implies |G(h)| < \epsilon \quad (2.13)$$

em virtude da continuidade de f em x , dado um ϵ existe um $\delta > 0$ tal que:

$$|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon \quad (2.14)$$

sempre que

$$x - \delta < t < x + \delta \quad (2.15)$$

Se escolhermos h de maneira que $0 < h < \delta$, então cada t no intervalo $[x, x+h]$ satisfaz 2.15 e por isso 2.14 é válida para cada t desse intervalo. Recorrendo à propriedade

$$\left| \int_x^{x+h} g(t) \, dt \right| \leq \int_x^{x+h} |g(t)| \, dt \quad (2.16)$$

com $g(t) = f(t) - f(x)$,

vê-se que a desigualdade 2.14 conduz à relação

$$\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] \, dt \right| \leq \int_x^{x+h} |[f(t) - f(x)]| \, dt \leq \int_x^{x+h} \frac{1}{2}\epsilon \, dt = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \epsilon < h \cdot \epsilon \quad (2.17)$$

Se dividirmos por h , vemos que 2.13 é válida para $0 < h < \delta$. Se $h < 0$, um raciocínio análogo prova que 2.13 é válida sempre que $0 < |h| < \delta$, estando assim completa a prova.

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais simples para o cálculo de integrais e será enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2.18 *Teorema Fundamental do Cálculo Parte 2*

Considere f uma função integrável em $[a, x]$, para qualquer $x \in [a, b]$. Se F é uma função tal que $F'(x) = f(x)$, para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Seja

$$g(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Sabemos da parte 1 que $g'(x) = f(x)$; isto é, g é uma primitiva de f . Se F for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então sabemos que F e g diferem apenas por uma constante e assim:

$$g(x) = F(x) + C \Rightarrow g(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad (2.18)$$

para $a \leq x \leq b$. considerando agora $x = a$ e $x = b$ sucessivamente, na equação 2.18, obtemos:

$$g(b) = \int_a^b f(t) \, dt + C \quad (2.19)$$

$$g(a) = \int_a^a f(t) \, dt + C \quad (2.20)$$

Das equações 2.19 e 2.20 temos:

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) \, dt + C - \int_a^a f(t) \, dt - C \quad (2.21)$$

Daí, como

$$\int_a^a f(t) \, dt = 0,$$

a equação 2.21 fica:

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) \, dt \quad (2.22)$$

como queríamos demonstrar.

Algumas realizações de Arquimedes envolvendo conceitos de Cálculo

Este capítulo abrange o primeiro episódio histórico estudado neste trabalho e ele enfatizará os trabalhos de Arquimedes referentes ao cálculo da área do círculo, cálculo da área do segmento parabólico e está dividido em em três partes. Na primeira parte será descrita a Proposição 1 do trabalho "Measurement of a Circle", página 91 do livro The Works of Arquimedes [8] e também será feita a sua demonstração na qual foi utilizado o "Método de Eudoxo" (390 a.C. - 338 a.C., Cnido), com algumas modificações na original que encontra-se na referida obra. Foram acrescentadas algumas passagens adicionais e também algumas figuras, para melhor entendimento do raciocínio utilizado por Arquimedes.

Na segunda parte, iremos abordar o método que Arquimedes utilizou para descobrir a fórmula do segmento parabólico, no qual ele construiu uma alavanca para equilibrar figuras geométricas e verificar de uma maneira mecânica a validade da fórmula em questão. Novamente achamos útil o acréscimo de figuras, passo a passo, no decorrer de sua demonstração. Para escrevê-la foram consultados os livros The Works of Arquimedes, [8] e Tópicos de História da Matemática, [2].

Na terceira parte deste episódio histórico, serão vistas as sete últimas proposições da parte da introdução do trabalho "Quadrature of the Parabola", com início na página 233, do livro The Works of Archimedes [8], necessárias para compreender sua argumentação teórica baseada no método de Eudoxo para demonstrar de uma maneira formal de acordo com os rigores da época a fórmula do segmento parabólico.

3.1 Método utilizado para demonstrar a fórmula da área do círculo

Uma das aplicações que Arquimedes fez usando o método de Eudoxo, proposição **I** no Livro **X** dos Elementos de Euclides, foi para demonstrar, por uma dupla redução ao absurdo, a medida da área do círculo, sua demonstração é considerada como a primeira a estar de acordo com os rigores da época, conforme [5] "... Arquimedes apresentou uma primeira prova "rigorosa" de que a área do círculo é igual à área de um triângulo, cuja base é a medida da sua circunferência e a altura é o raio...", e ela pode ser encontrada em [8], página 91. Nesta seção vamos iniciar expondo as definições e proposições utilizadas no decorrer de sua demonstração e por último, o método de Eudoxo. Na parte final, passaremos para a proposição e a demonstração da medida da área do círculo.

Proposição 3.1 *Método de Eudoxo*

Sejam duas grandezas diferentes, se da maior é subtraída uma grandeza maior que sua metade, e do que sobrar, uma grandeza maior que sua metade, e se este processo for repetido continuamente, então sobrá uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas. E o teorema pode ser provado de forma semelhante mesmo se as partes subtraídas forem iguais às metades.

Agora, enunciaremos a proposição referente à medida da área do círculo.

Proposição 3.2 *A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo reto, no qual um dos lados sobre o ângulo reto é igual ao raio, e o outro à circunferência do círculo.*

Demonstração:

Seja **C** a medida da área do círculo **ABCD**, e **T** a medida da área do triângulo que nomearemos de **K**, ambos descritos na proposição, então, se **C** não for igual a **T**, ou é maior ou menor do que **T**. Suponha que **C** é maior do que **T**, Assim, inscrevendo no círculo **ABCD** um quadrado que possui medida de área igual a **P4** e com os vértices em **ABCD**, conforme a Figura 3.2,

Para utilizar o método de exaustão mais adiante, provemos que ao subtrairmos de **C** o valor **P4**, será retirada, uma grandeza maior que a sua metade. Considerando o quadrado que circunscreve o círculo e dividindo-o em quatro partes conforme a figura 3.3, verifica-se

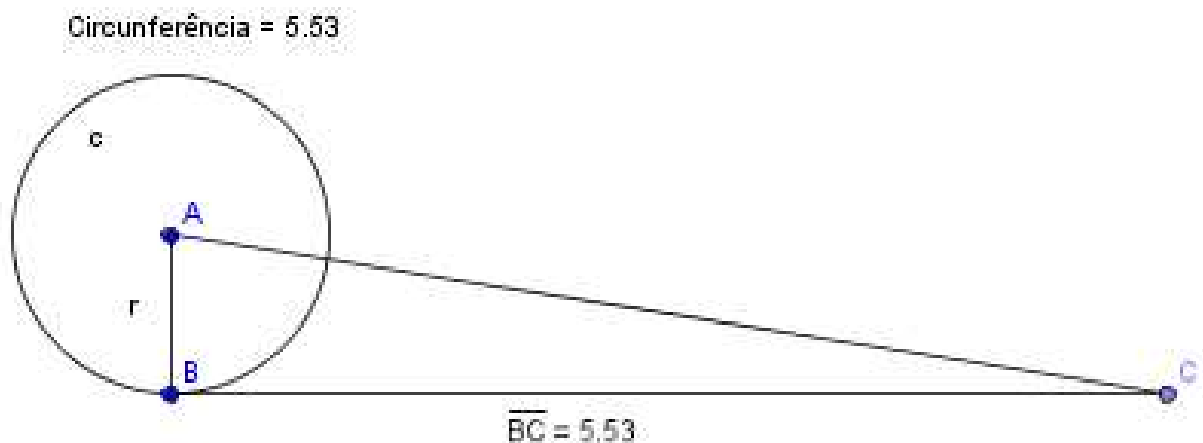


Figura 3.1: Representação gráfica da Proposição 3.2

que a sua área é igual a oito vezes a área do triângulo **EON** e o dobro da área do quadrado que tem medida de área igual a **P4**. Por outro lado, **C** é menor que a medida de área do quadrado o circunscreve, Assim metade de **C** será menor do que metade da medida de área deste quadrado. Portanto podemos afirmar que metade da área do círculo é menor do que metade da área do quadrado inscrito, isto é, **P4** é maior do que metade de **C**. Dividindo agora ao meio os arcos **AB**, **AC**, **CD**, **DA** que originaram-se a partir do quadrado que foi inscrito no círculo, marcando os seus pontos médios na circunferência e unindo os pontos adjacentes, tem-se agora um novo polígono regular inscrito, mas agora com oito lados, conforme a Figura 3.4.

Então divida de novo os arcos na metade, conforme foi feito anteriormente e assim por diante, repetindo este processo continuamente, até encontrar um polígono **P** regular inscrito no círculo tal que a diferença de **C** com a sua área seja menor que a diferença de **C** com **T**. Mostremos que para qualquer polígono inscrito no círculo que for considerado depois do quadrado até **P**, inclusive, que se subtrairmos de **C** a área deste polígono considerado, retiraremos mais que a metade da área de **C**. Com efeito, analisando este polígono apenas em torno de dois de seus lados, unindo com um segmento de reta os dois vértices que não são adjacentes, então teremos a Figura 3.5 Traçando agora um segmento de reta passando por F, paralelo ao segmento EM e construindo um retângulo, teremos a Figura 3.6. Consideremos,

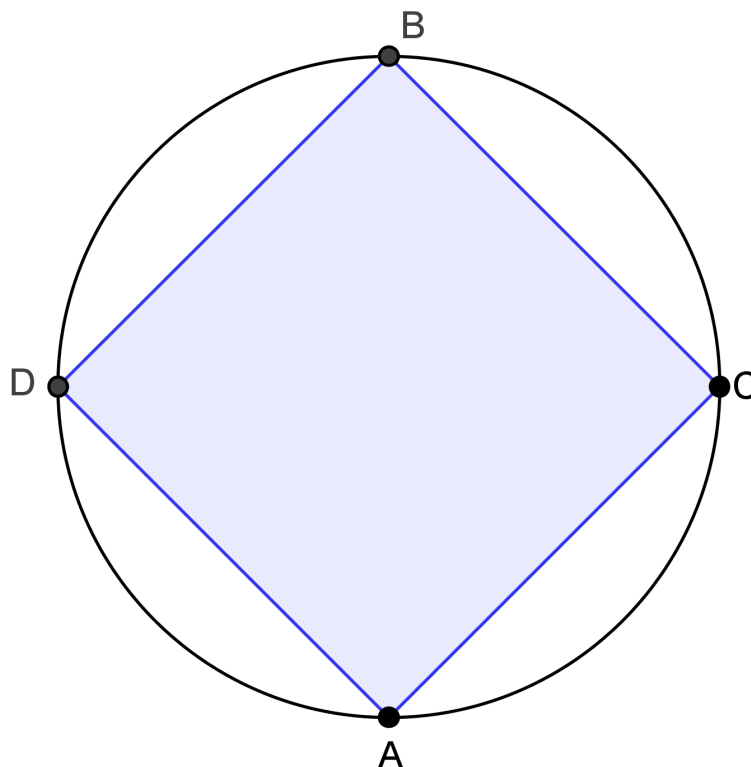


Figura 3.2: Quadrado inscrito com vértices ABCD

o "segmento de arco" **EFN** e provemos que ao retirar a área do triângulo **EFN** estamos retirando mais do que metade da área do "segmento de arco" em questão. Seja o retângulo **EFN** cuja altura e base são as mesmas do triângulo **EFN**. Uma vez que a área do retângulo **EFN** é igual ao dobro da área do triângulo **EFN** (pois o ponto **F** é o ponto médio do segmento **EN**) e também maior do que a área do "segmento de arco", podemos afirmar que a área do triângulo **EFN** é maior do que metade da área do "segmento de arco". Provamos assim, que da área do "segmento de arco" foi subtraída uma área (a área do triângulo **EFN**) que é mais do que a sua metade. Daí basta considerar cada outros dois lados do polígono em questão e fazer a mesma coisa que foi feita acima (pois o polígono é regular), então concluímos que a diferença **C - P** com um número qualquer de lados, inscrito em **C**, nesta subtração retira mais que a metade da área remanescente. Logo concluímos que a área deste polígono é maior que **T** (aqui é usado o Método de Eudoxo, Proposição 3.1). Mas, seja **AE** qualquer lado deste polígono e **ON** a perpendicular sobre **AE**, onde **O** é o centro de **ABCD**.

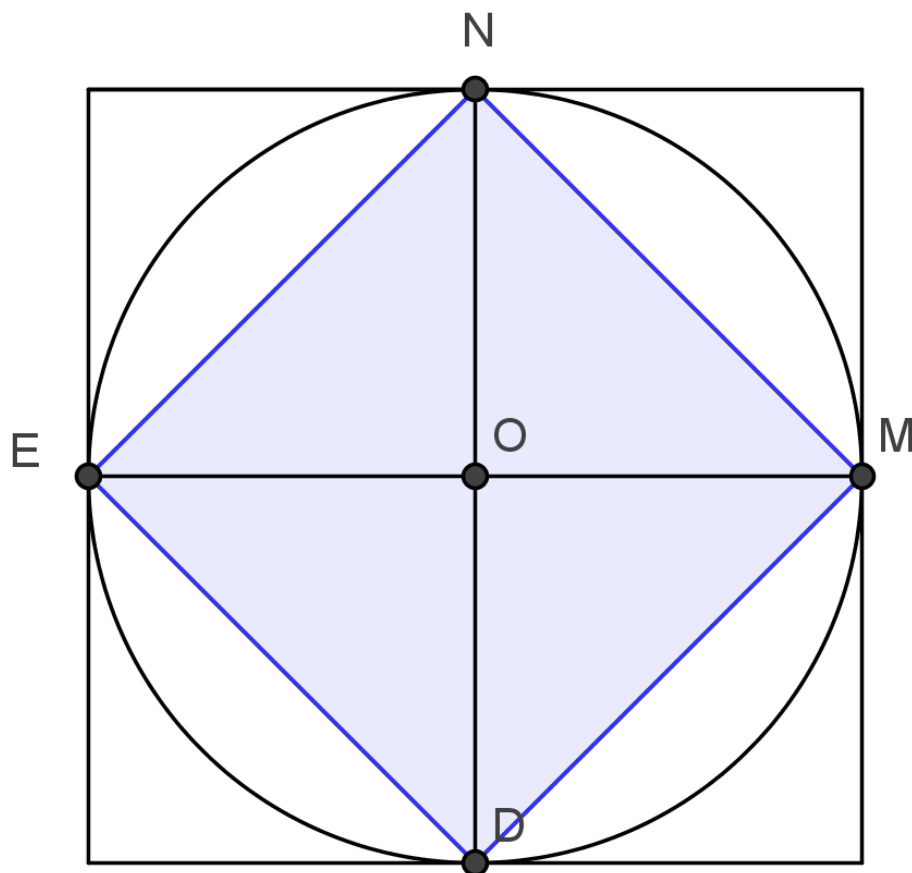


Figura 3.3: Quadrado circunscrito dividido em quatro partes

Então **ON** é menor que o raio de **ABCD**, conforme Figura 3.7, e, portanto, menor que um dos lados do triângulo **K**. O perímetro deste polígono pelo fato de estar inscrito no círculo, também é menor que a circunferência do círculo e conseqüentemente menor que o outro lado do triângulo **K**, ambos os lados que formam o ângulo reto de **K**. Daí calculando a área deste polígono regular e pelos motivos citados acima, concluímos que sua área é menor que **T**; o que contraria a hipótese inicial, portanto **C** é menor ou igual a **T**.

Supondo agora que **C** é menor que **T**, então consideremos o quadrado que circunscreve o círculo, dois lados adjacentes seus que tangenciam-no nos pontos **E**, **H** e se encontram no ponto **T**, **A** o ponto médio do arco **EH**, assim traçando o segmento **FAG** teremos a Figura 3.8.

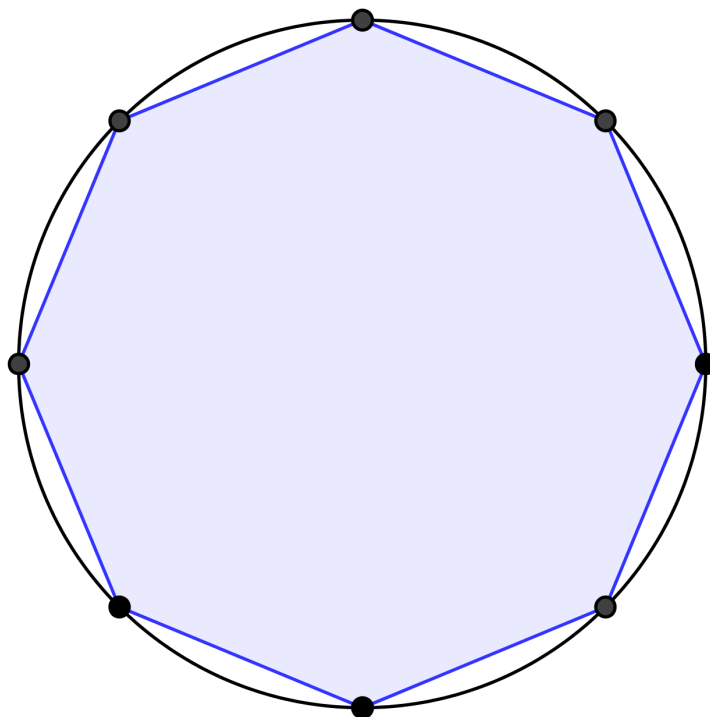


Figura 3.4: Polígono regular de oito lados inscrito

Assim, continuando este processo, constrói-se um novo polígono regular que circunscreve o círculo, mas agora contendo oito lados conforme a Figura 3.9, e no final em um polígono circunscrito tal que o espaço interceptado entre ele e o círculo são juntos menor que o excesso de K sobre a área do círculo.

Continuando a determinar os polígonos regulares circunscritos de forma análoga, semelhante ao caso anterior, Arquimedes chegou em outro absurdo se a área do círculo (C) for menor que a área do triângulo (K), chegando à conclusão da necessidade das áreas do círculo e do triângulo retângulo, propostos acima, serem iguais.

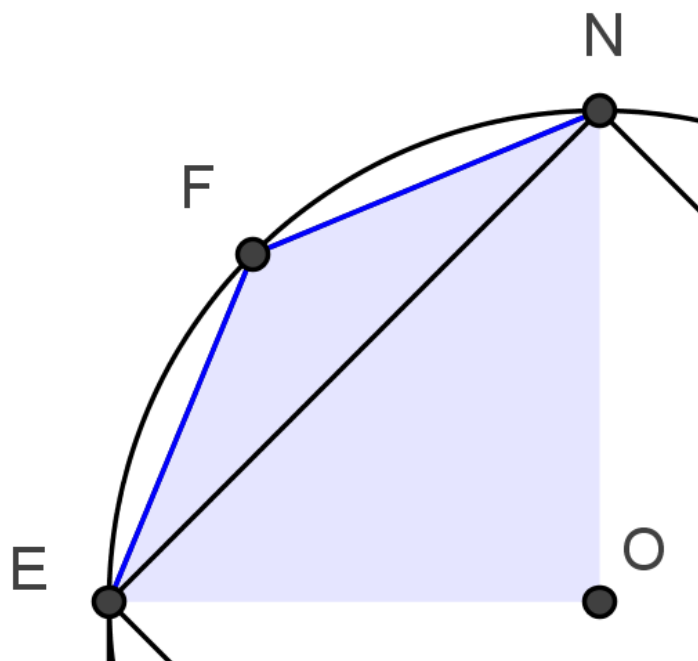


Figura 3.5: Dois lados quaisquer do polígono regular

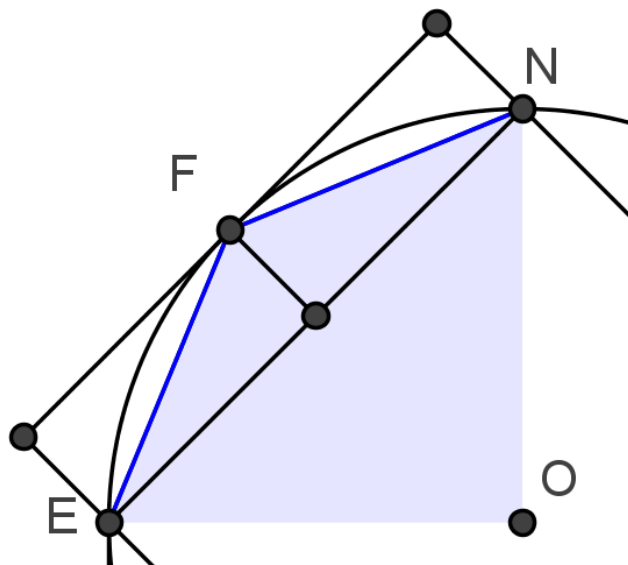


Figura 3.6: Retângulo construído a partir do segmento EN

3.2 Método utilizado para conhecer a fórmula da área do segmento parabólico

Nesta seção, será feita uma exposição do método mecânico que Arquimedes usou para calcular a área do segmento parabólico e, depois, como ele utilizou o método de Eudoxo para construir uma demonstração considerada rigorosa para este fato.

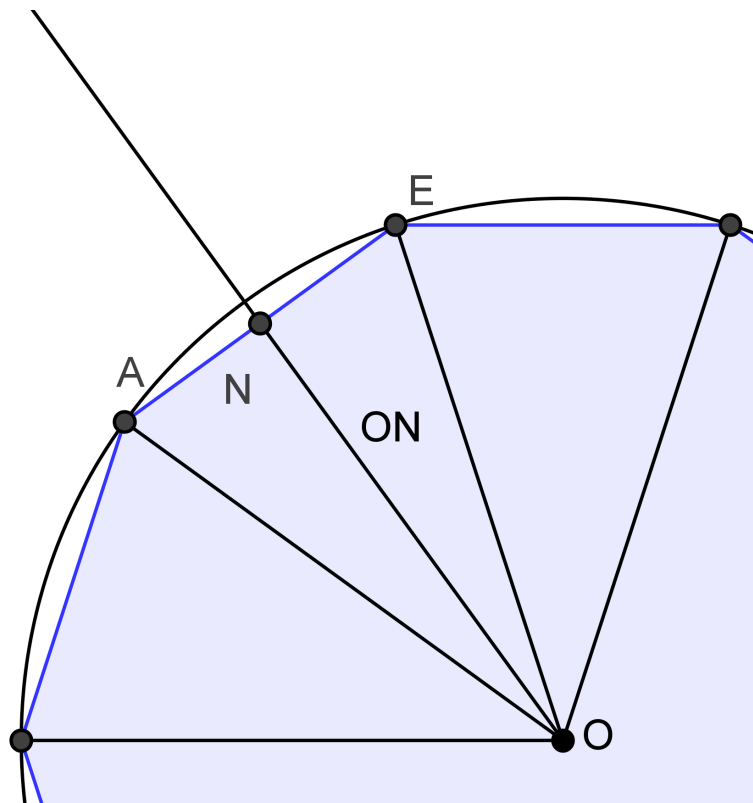


Figura 3.7: ON é menor que o raio do círculo considerado

Arquimedes demonstrou a Proposição 3.7, que a área de um segmento parabólico é igual a quatro terços da área de um triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto em que a tangente é paralela a esta base. O caminho percorrido para provar a igualdade acima foi o método de Eudoxo, mais tarde batizado por “método de exaustão”, e é eficiente, uma vez conhecida a fórmula, mas ele, por si só, não serve para a descoberta inicial do resultado. Por este motivo, Arquimedes descobriu a fórmula do segmento parabólico através de um outro método, chamado por ele de “método mecânico”, que é mencionado em uma carta que enviou a Erastóstenes (276 a.C.-196 a.C.), onde relata “... Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas. Vendo em você, como eu digo um estudante cuidadoso, um homem de considerável eminência em Filosofia e um admirador [da investigação matemática], pensei escrever-lhe para explicar em detalhes as peculiaridades de um certo método, pelo qual é possível iniciá-lo na investigação de alguns problemas na matemática, através da mecânica. Este procedimento é, eu estou convencido, de muita

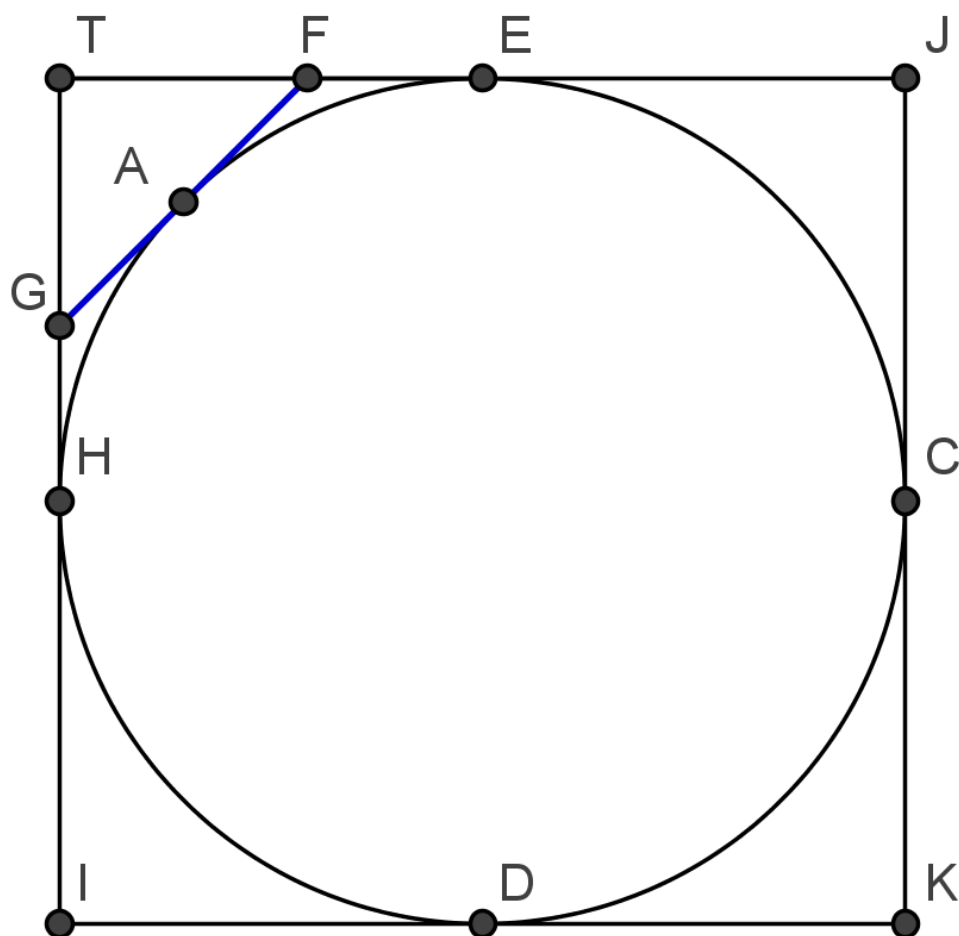


Figura 3.8: O segmento FG tangencia HECD no ponto A

utilidade, mesmo para as demonstrações dos teoremas; certas coisas tornam-se claras para mim, primeiro por um método mecânico, embora elas tenham que ser demonstradas depois por argumentos geométricos porque sua investigação pelo método citado não fornece uma demonstração..."; Assim, neste capítulo, nosso objetivo é elucidar como foi utilizada esta técnica para determinar a igualdade já descrita no início deste parágrafo. Porém antes de partir para este "método mecânico", enunciaremos alguns resultados que Arquimedes utilizou em sua construção.

Definição 3.1 *Dada uma parábola e uma reta qualquer que a intercepte em dois de seus pontos, um segmento parabólico é a região delimitada pela intersecção desta reta com a*

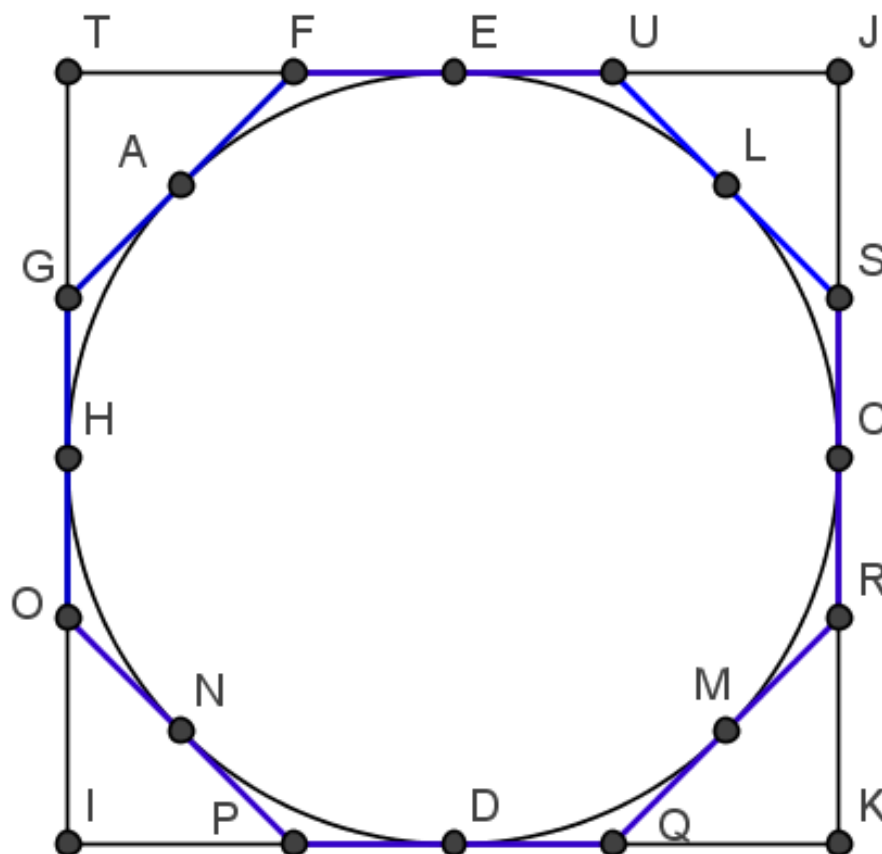


Figura 3.9: Polígono regular contendo oito lados

parábola. Sua base é o segmento de reta que está entre os dois pontos interceptados e a sua altura, o maior segmento de reta que tem um extremo na parábola e o outro perpendicular a sua base.

Proposição 3.3 *Se por um ponto P da parábola for traçado um segmento de reta em cima do eixo ou paralelo ao eixo da parábola, como PV , e se por outros dois pontos Q, Q' sobre a parábola, segmentos de reta forem traçados, paralelos a tangente em P e encontrando PV em V, V' respectivamente, então*

$$\frac{PV}{PV'} = \frac{QV^2}{Q'V'^2} \quad (3.1)$$

Proposição 3.4 Se Qq é a base de qualquer segmento parabólico, P o seu vértice e PV o seu diâmetro, e se o diâmetro da parábola através de qualquer outro ponto R encontrar Qq em O e a reta tangente no ponto Q em E , então

$$\frac{QO}{Oq} = \frac{ER}{RO} \quad (3.2)$$

Proposição 3.5 Duas grandezas, se comensuráveis ou incomensuráveis, equilibram-se reciprocamente a distâncias proporcionais às grandezas.

Proposição 3.6 Em qualquer triângulo o centro de gravidade fica no segmento de reta que une qualquer ângulo ao ponto médio do lado oposto.

Agora estamos preparados para conhecer o método mecânico de Arquimedes e usá-lo na proposição abaixo.

Proposição 3.7 Seja ABC um segmento parabólico limitado por um segmento de reta AC e a parábola ABC , e seja D o ponto médio de AC . Traçando o segmento de reta DBE paralelo ao eixo da parábola e uma AB , BC . Então o segmento parabólico ABC é igual a $\frac{4}{3}\Delta ABC$.

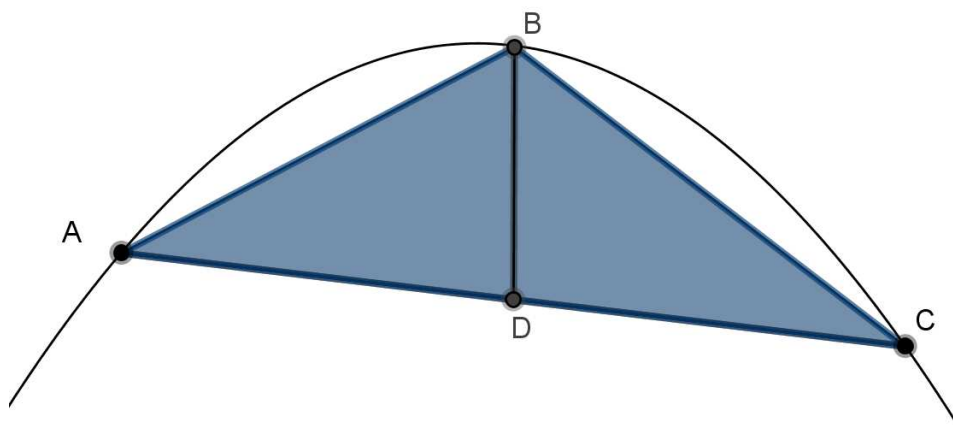


Figura 3.10: Representação gráfica da Proposição 3.7

Demonstração: Do ponto A traçando AKF paralelo à DE , seja a tangente a parábola em C , encontrando DBE em E e AKF em F . construindo CH para encontrar AF em K , e novamente construindo CK fazendo $KH = CK$. Considere CH como o braço da balança, K o seu ponto médio conforme a Figura 3.11.

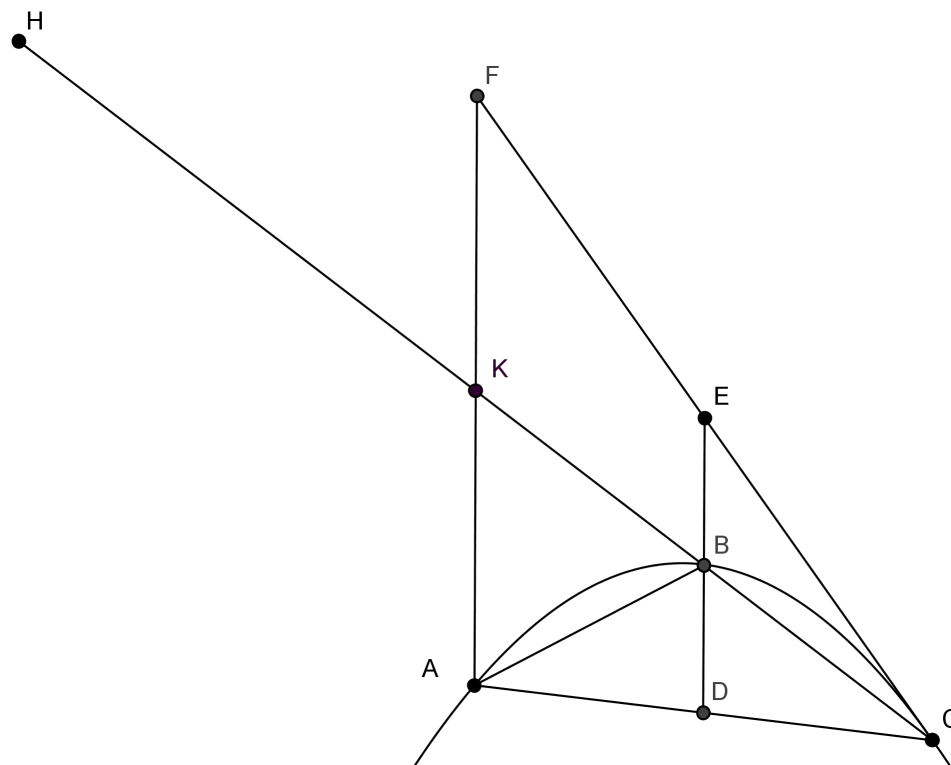


Figura 3.11: Primeira parte da demonstração

Seja **MO** qualquer segmento de reta paralelo à **ED**, e seja este encontrando **CF**, **CK**, **AC** em **M**, **N**, **O** e a curva em **P**. Agora desde que **CE** seja a tangente a parábola e **CD** a semi-ordenada, **EB = BD**, conforme a proposição 3.3, (Elements of Conics). Desde que **FA**, **MO** sejam paralelas a **ED**, segue que **FK = KA** e **MN = NO** conforme a Figura 3.12.

Agora de acordo com a proposição 3.4,

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO} \quad (3.3)$$

Tomando um segmento de reta **TG** igual a **OP**, e traçando o seu centro de gravidade em **H**, tal que **TG = HG**; então, desde que **N** é o centro de gravidade do segmento de reta **MO** e

$$\frac{MO}{TG} = \frac{HK}{KN} \quad (3.4)$$

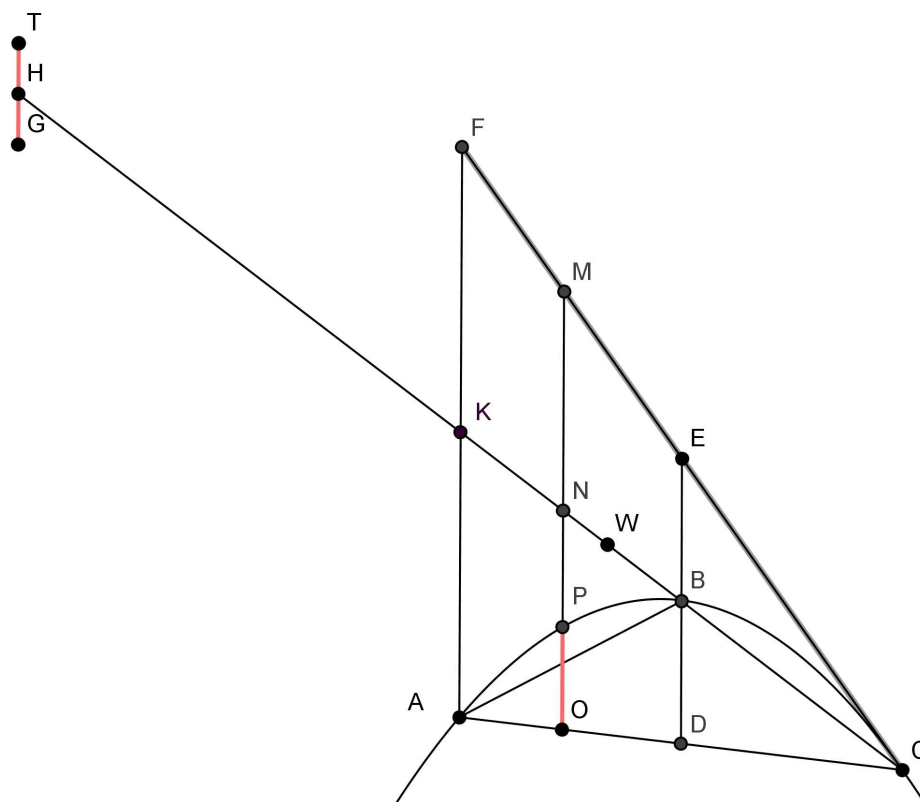


Figura 3.13: $TG \sim OP$ em H e MO estão em equilíbrio em relação a K

W é o centro de gravidade do triângulo **ACF**; de acordo com 3.6(provado em "Equilibrium of Planes I.15"), conforme a Figura 3.15.

Então:

$$\frac{\Delta ACF}{\text{Segmento } ABC} = \frac{HK}{KW} \quad (3.5)$$

e também,

$$\frac{HK}{KW} = \frac{3}{1} \quad (3.6)$$

assim,

$$\text{Segmento } ABC = \frac{1}{3} \Delta AFC \quad (3.7)$$

mas,

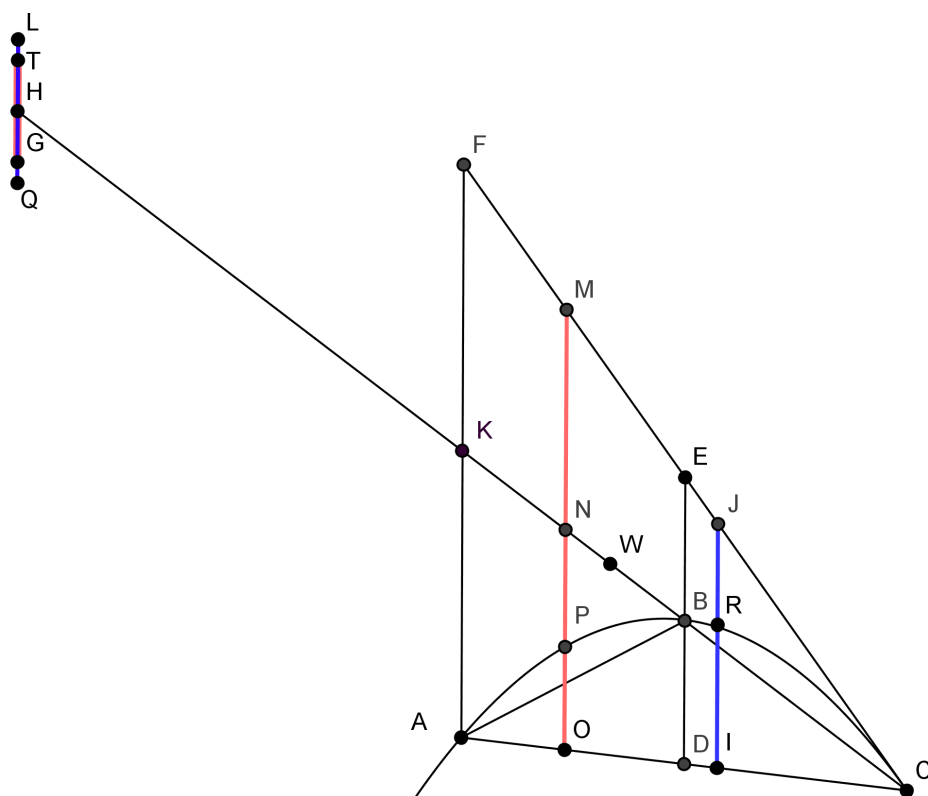


Figura 3.14: Segmento parabólico em equilíbrio com ΔAFC em K

$$\Delta AFC = 4\Delta ABC \quad (3.8)$$

logo conclui-se que:

$$\text{Segmento } ABC = \frac{4}{3}\Delta ABC \quad (3.9)$$

3.3 Método utilizado para demonstrar a fórmula da área do segmento parabólico

Nesta seção, será feita uma exposição de como Arquimedes provou a fórmula da área do segmento parabólico, utilizando o método de Eudoxo e algumas proposições para construir

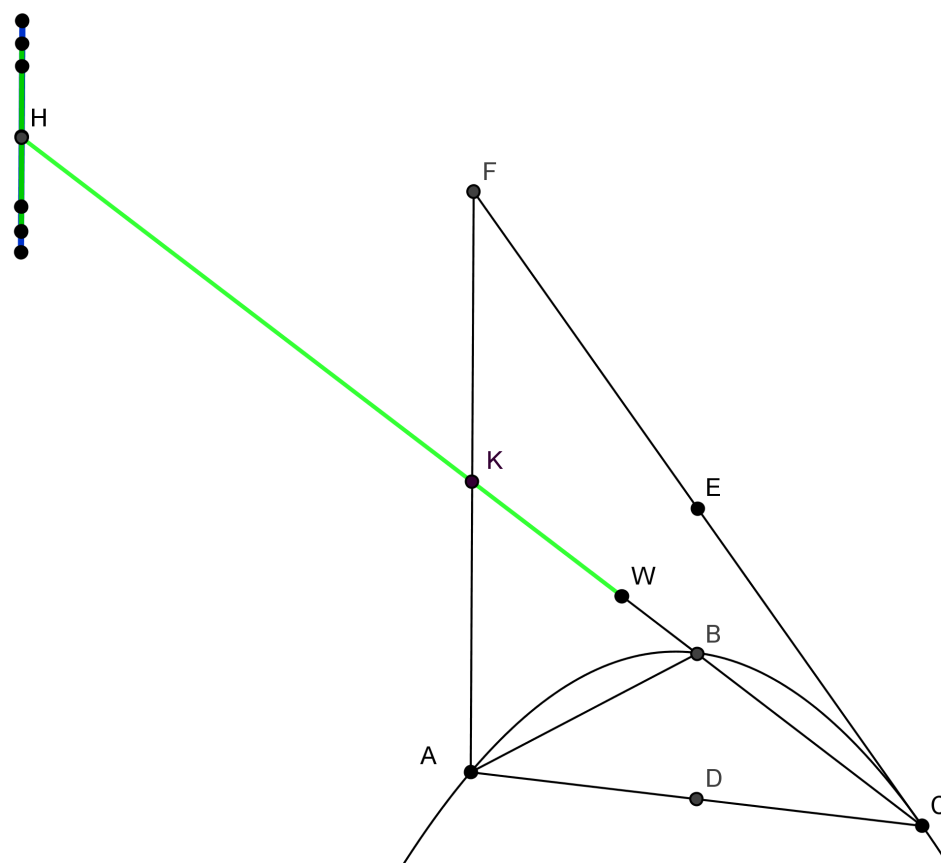


Figura 3.15: Segmento parabólico em equilíbrio com ΔAFC em W

uma demonstração considerada rigorosa para este fato. Todas estas proposições também serão demonstradas e daremos uso de algumas figuras para facilitar o entendimento.

Na introdução de seu livro, no capítulo "Quadrature of the Parabola", página 233, do livro *The Works of Archimedes*, [8], Arquimedes realiza duas demonstrações diferentes para a medida da área do segmento parabólico. Na primeira demonstração ele utiliza as proposições de número 1 até a de número 17, para chegar ao resultado citado acima, fazendo uma mistura de geometria com métodos mecânicos que relacionam o equilíbrio de áreas por intermédio de alavancas. Em sua segunda demonstração, Arquimedes faz uso das proposições de número 18 até o número 24, e nelas elabora uma sequência de passos para executar o Método de Eudoxo no final. Veremos esta última maneira, começando com as proposições que já foram citadas:

Proposição 3.8 Se Qq é a base de um segmento parabólico, e V o ponto médio de Qq , e se o diâmetro através de V encontrar a curva em P , então P é o vértice do segmento parabólico.

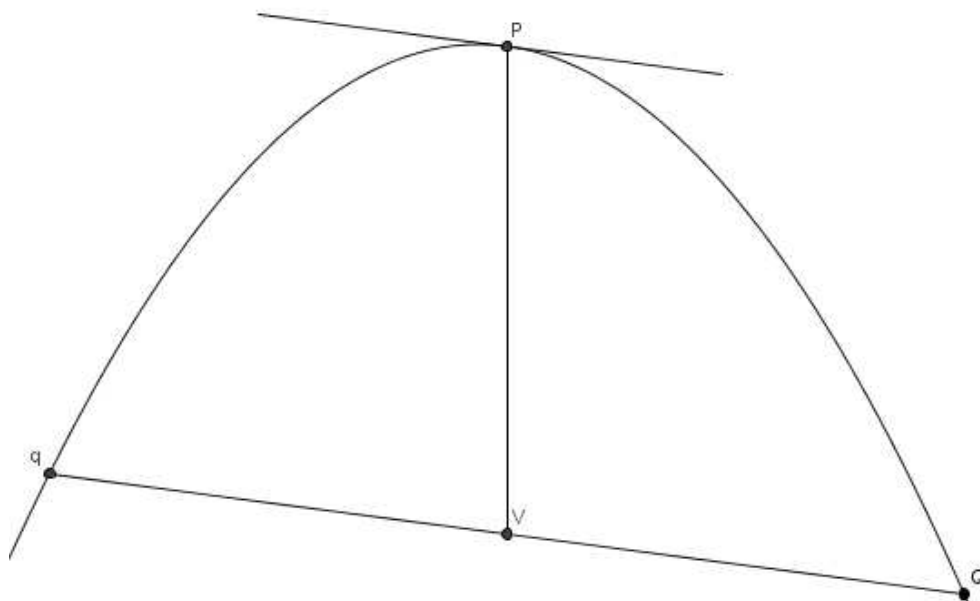


Figura 3.16: Representação gráfica da Proposição 3.8

Demonstração: Qq é paralelo à reta tangente em P por uma proposição do início do capítulo. Portanto de todas as retas perpendiculares que podem ser traçadas de pontos do segmento parabólico para a base Qq , P é a maior. Conseqüentemente, pela definição, P é o vértice do segmento parabólico.

Proposição 3.9 Se Qq é a corda de um segmento parabólico dividida ao meio em V pelo diâmetro PV , e se RM é o diâmetro dividindo QV em M , e RW a ordenada de R até PV então:

$$PV = \frac{4}{3}RM \quad (3.10)$$

Demonstração: Por propriedade de parábola que $y = x^2$,

$$\frac{PV}{PW} = \frac{QV^2}{RW^2} = \frac{4RW^2}{RW^2} \quad (3.11)$$

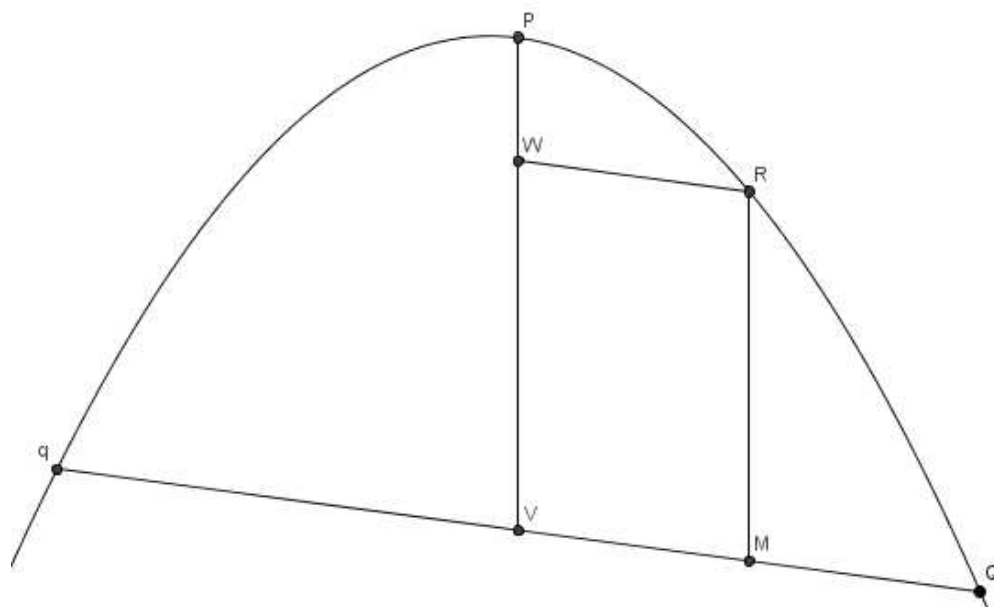


Figura 3.17: Representação gráfica da Proposição 3.9

mas temos que,

$$PV = 4PW \quad (3.12)$$

conseqüentemente:

$$PV = \frac{4}{3}RM \quad (3.13)$$

Nestas duas primeiras proposições, é explicado de que maneira devemos encontrar os pontos chamados de vértices por Arquimedes, que futuramente servirão para construir os triângulos que serão inscritos no segmento parabólico e nos fornece uma relação numérica entre o segmento de reta que inicia no primeiro vértice, com o que inicia no segundo. A próxima proposição já utiliza o triângulo inscrito construído através do vértice do segmento parabólico e fornece o resultado de que a sua área é maior que a metade da área do segmento parabólico, fato que futuramente será essencial na utilização do método de Eudoxo.

Proposição 3.10 *Se Qq é a base e P o vértice de um segmento parabólico, então a área do triângulo PQq é maior que a metade da área do segmento parabólico PQq .*

Demonstração:

Traçando um segmento de reta paralelo a corda Qq e ao mesmo tempo tangente em P , o triângulo PQq é a metade do paralelogramo formado por Qq , o segmento paralelo em P

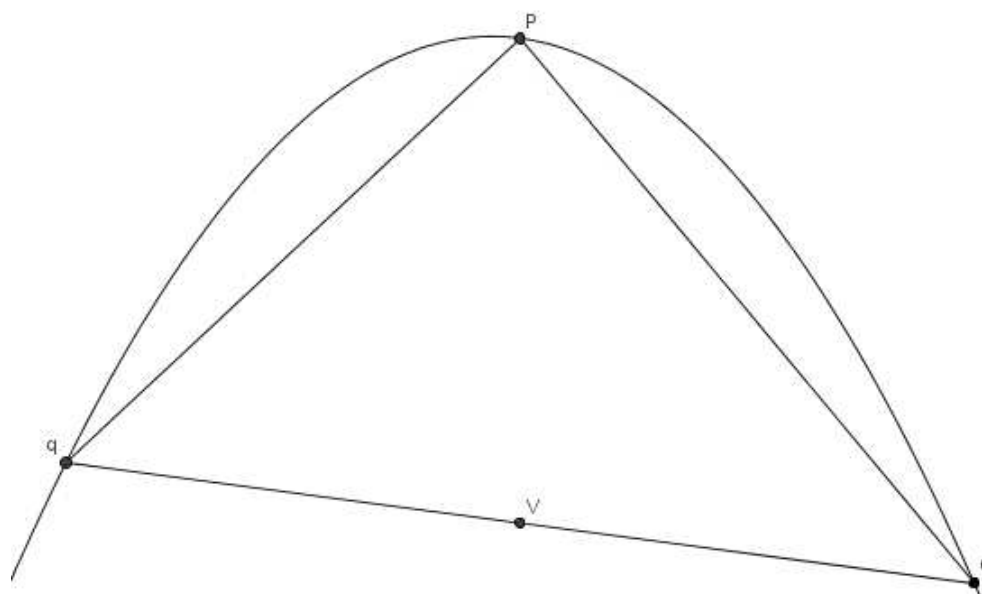


Figura 3.18: Representação gráfica da Proposição 3.10

e os diâmetros através de **Q** e **q**, conforme a figura 3.18.

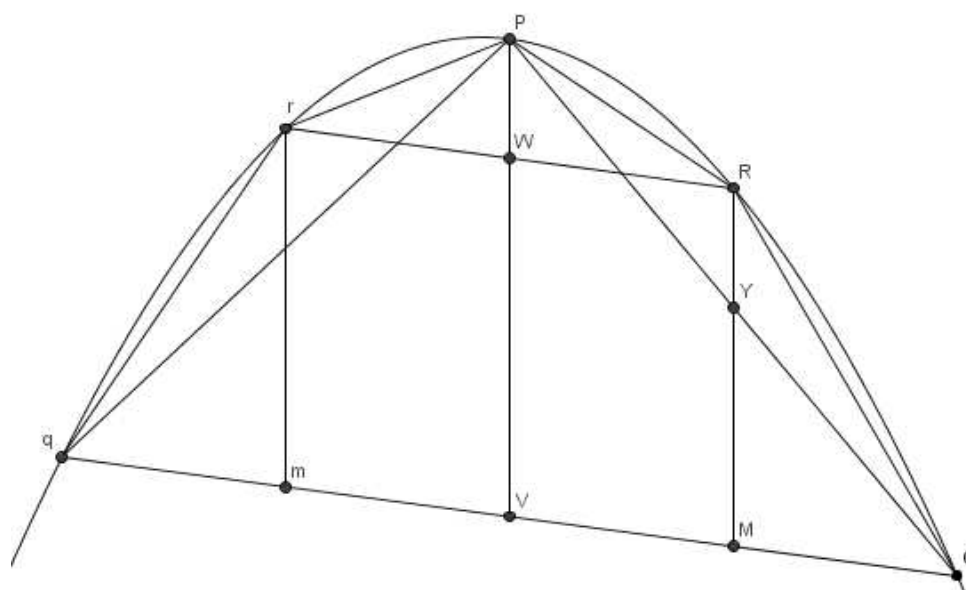


Figura 3.19: Representação gráfica da Proposição 3.11

Nesta próxima proposição, é possível verificar a relação existente entre as áreas dos triângulos inscritos, construídos sempre do mesmo modo e na proposição posterior, descobriremos que a soma da área de todos os triângulos inscritos no segmentos parabólicos remanescentes é menor que a área do segmento parabólico inicial.

Proposição 3.11 Se Qq é a base, e P o vértice de um segmento parabólico, e se R é o vértice do segmento cortado por Qq , então $\triangle PQq = 8\triangle PRQ$.

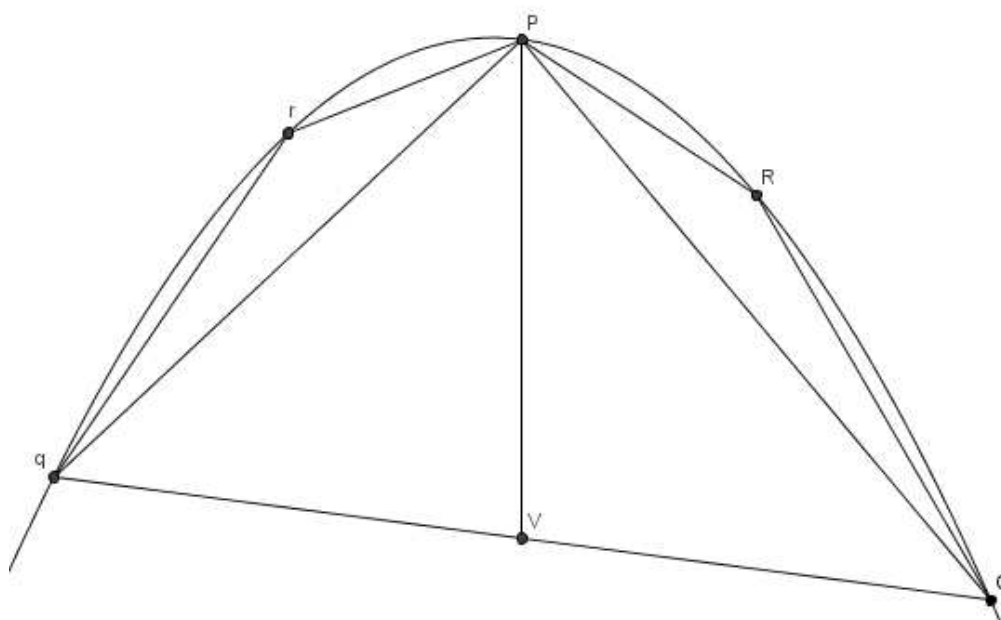


Figura 3.20: Representação gráfica da Proposição 3.12

Demonstração:

Seja o segmento RM que divide ao meio os segmentos QV em M e PQ em Y e também PV que divide ao meio Qq . Unindo PM , por uma proposição anterior, tem-se que:

$$PV = \frac{4}{3} \cdot RM \quad (3.14)$$

e também,

$$PV = 2 \cdot YM. \quad (3.15)$$

Portanto conclui-se que:

$$\Delta PQM = 2\Delta PRQ \quad (3.16)$$

Conseqüentemente,

$$\Delta PQV = 4\Delta PRQ \quad (3.17)$$

$$\Delta PQq = 8\Delta PRQ \quad (3.18)$$

Agora, se **RW**, a ordenada de **R** para **PV**, for traçada para encontrar a curva novamente em **r**, **RW** = **rW**, e a mesma demonstração mostra que:

$$\Delta PQq = 8\Delta Prq \quad (3.19)$$

Proposição 3.12 *Seja a série de áreas **A, B, C, D, ...** na qual cada um de seus elementos é 4 vezes o próximo elemento na ordem, e o maior, **A** é o Triângulo **PQq** inscrito no segmento parabólico **PQq**, ambos tendo a mesma base e a mesma altura, então :*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \dots) < (\text{área do segmento parabólico } \mathbf{PQq}).$$

Demonstração:

Como da proposição anterior,

$$\Delta PQq = 8\Delta PRQ = 8\Delta Prq \quad (3.20)$$

onde **R, r**, são os vértices dos segmentos parabólicos que cortam ao meio **PQ** e **Pq**, tem-se que:

$$\Delta PQq = 4(\Delta PRQ + \Delta Prq) \quad (3.21)$$

Portanto, desde que $\Delta PQq = \mathbf{A}$,

$$\Delta PRQ + \Delta Prq = \mathbf{B} \quad (3.22)$$

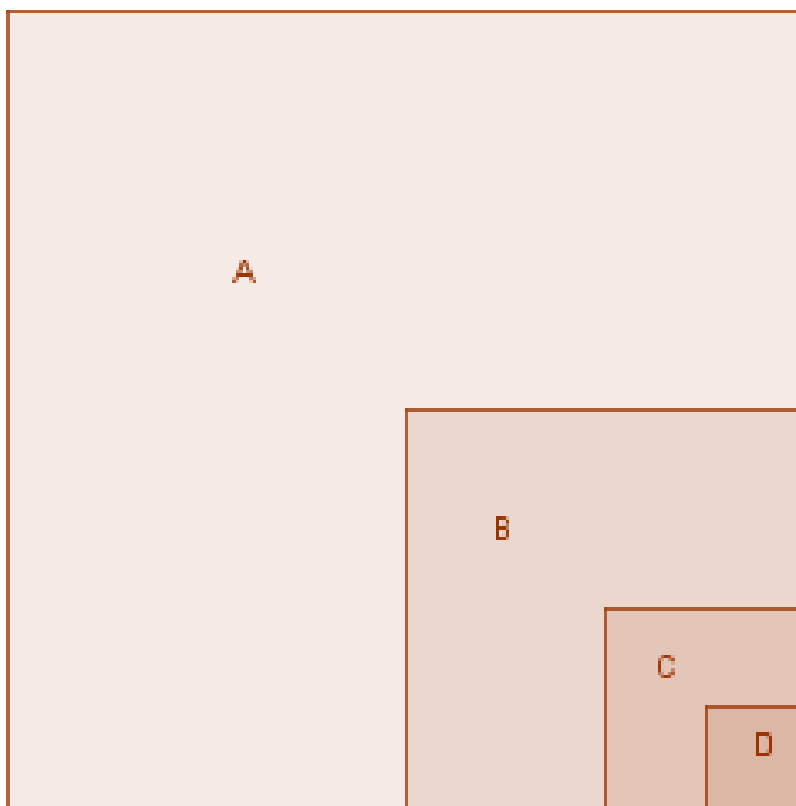


Figura 3.21: Representação gráfica da Proposição 3.13

Do mesmo modo, nós provamos que os triângulos inscritos nos segmentos parabólicos remanescentes são juntos igual a **C**, e assim por diante.

Portanto **A + B + C + D + ...** é igual a área de um certo polígono inscrito, que tem a sua área menor que a área do segmento parabólico.

Continuando com o seu raciocínio, agora Arquimedes prova que esta série de áreas de triângulos inscritos somadas é menor que uma outra série que possui um acréscimo e tem como soma total quatro terços da área do primeiro triângulo que foi inscrito

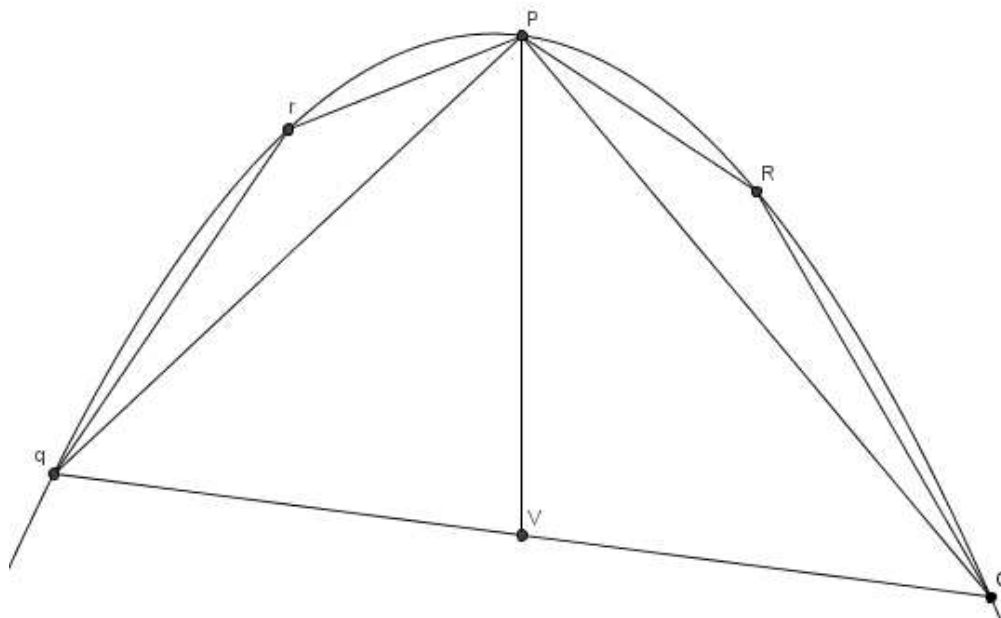


Figura 3.22: Representação gráfica da Proposição 3.14

Proposição 3.13 Dada a série de áreas **A, B, C, D, ... ,Z**, da qual **A** é o maior elemento, e cada um é quatro vezes o próximo elemento na ordem, então $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots + \mathbf{Z} + \frac{1}{3}\mathbf{Z} = \frac{4}{3}\mathbf{A}$.

Demonstração:

Tomando as áreas **b, c, d, ...** tais que :

$$\mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{B}, \mathbf{c} = \frac{1}{3}\mathbf{C}, \mathbf{d} = \frac{1}{3}\mathbf{D}, \text{ e assim por diante.}$$

$$\text{Então, desde que } \mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{B} \text{ e } \mathbf{B} = \frac{1}{4}\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{A}.$$

$$\text{Similarmente, } \mathbf{C} + \mathbf{c} = \frac{1}{3}\mathbf{B} \text{ e assim por diante.}$$

Portanto :

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \dots + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \dots + \mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots + \mathbf{Y}) \quad (3.23)$$

Mas,

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \cdots + \mathbf{y} = \frac{1}{3}(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \cdots + \mathbf{Y}) \quad (3.24)$$

Portanto, subtraindo as equações, o resultado fica:

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \cdots + \mathbf{Z} + \mathbf{z} = \frac{1}{3}\mathbf{A} \quad (3.25)$$

ou

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \cdots + \mathbf{Z} + \frac{1}{3}\mathbf{Z} = \frac{4}{3}\mathbf{A} \quad (3.26)$$

Por último, Arquimedes, usando todos os resultados provados até agora, faz a demonstração da próxima proposição que é o objetivo deste capítulo.

Proposição 3.14 *Todo segmento limitado por uma parábola e uma corda **Qq** possui área igual a quatro terços de um triângulo que tem a mesma base e altura do segmento parabólico.*

Demonstração: Seja

$$\mathbf{K} = \frac{4}{3}\Delta PQq \quad (3.27)$$

onde **P** é o vértice do segmento; então mostremos que a área do segmento é igual a **K**.

Para que a área do segmento não seja igual a **K**, esta deve ser maior ou menor que **K**.

I. Supondo que a área do segmento seja maior que **K**.

Se for inscrito no segmento parabólico o triângulo **PQq** com base igual a corda **Qq**, vértice **P** e altura igual ao segmento, depois triângulos com base **PQ** e **Pq**, com a mesma base e alturas iguais aos segmentos parabólicos remanescentes e com os vértices **R** e **r**, e com os segmentos parabólicos restantes nós inscrevermos triângulos da mesma maneira, e assim por diante, então a soma da área destes triângulos é menor que a área do segmento parabólico **PQq** que é maior que **K**.

Mas aplicando o método de Eudoxo, é possível afirmar que a área deste polígono inscrito no segmento também é maior que **K**, o que é impossível, (conforme foi provado nas proposições anteriores):

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \cdots + \mathbf{Z} < \frac{4}{3}\mathbf{A} \quad (3.28)$$

onde $\mathbf{A} = \Delta PQq$

Portanto a área do segmento parabólico não pode ser maior que $\mathbf{K}$.

Supondo, então que a área do segmento parabólico seja menor que $\mathbf{K}$.

Daí, tomando

$\Delta PQq = \mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \frac{1}{4}\mathbf{A}$, $\mathbf{C} = \frac{1}{4}\mathbf{B}$, e assim por diante, até chegar em uma área $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{X}$ é menor que a diferença entre $\mathbf{K}$ e a área do segmento parabólico, logo:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \cdots + \mathbf{X} + \frac{1}{3}\mathbf{X} = \frac{4}{3}\mathbf{A} = \mathbf{K} \quad (3.29)$$

de acordo com uma proposição anterior.

Agora, como $\mathbf{K}$ é maior que $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \cdots + \mathbf{X}$ com uma área maior que $\mathbf{X}$, segue que :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \cdots + \mathbf{X} > (\text{segmento}) \quad (3.30)$$

o que é impossível, por uma proposição anterior e conseqüentemente a área do segmento parabólico também não é menor que $\mathbf{K}$.

portanto como a área do segmento não é maior e nem menor que $\mathbf{K}$, então a área do segmento é igual a $\mathbf{K}$, que é igual a $\frac{4}{3}\Delta PQq$.

Algumas realizações de Barrow envolvendo Cálculo

Este capítulo está dividido em três seções, na primeira iremos apresentar o método de Barrow para construir tangentes a curvas pelo uso do “triângulo diferencial”, sendo que as obras consultadas foram, Tópicos de História da Matemática [2], em sua cápsula 7, com início na página 42 e The Geometrical Lectures [4], conferência **X**, na página 120. Na segunda seção serão vistas as conferências **I** e **X** de Barrow, onde serão apresentados detalhes referentes a proposições e definições de ambas e a bibliografia consultada foi o livro The Geometrical Lectures [4]. Na última seção abordaremos com um destaque especial a proposição 11 da conferência **X**, que pode ser entendida como um caso especial do Teorema Fundamental do Cálculo, será feita uma demonstração usando figuras para sua melhor compreensão e a fonte consultada também foi o livro The Geometrical Lectures [4], com início na página 117. Por último, é preciso ressaltar que as duas primeiras seções não abordam diretamente o assunto aqui estudado, mas mesmo assim, contribuíram na compreensão deste.

4.1 Método para calcular a inclinação de retas tangentes

O método de Barrow para a determinação de retas tangentes a curvas pelo uso do triângulo diferencial, às vezes chamado de “triângulo de Barrow”, foi significativo para os desenvolvimentos posteriores do cálculo, conforme o trecho da página 43, do livro Tópicos da História da Matemática, [2], “. . . Extremamente significativo para os desenvolvimentos posteriores do

cálculo foi o método de Barrow para determinação de tangentes a curvas pelo uso do “triângulo diferencial”, às vezes chamado “triângulo de Barrow”. Para construir a reta tangente t à curva no ponto P , Barrow determinava um outro ponto T em t do seguinte modo: Seja Q um ponto da curva; então como P e Q são vizinhos, $\triangle PTM$ e $\triangle PQR$ podem ser considerados semelhantes, principalmente quando o menor torna-se infinitamente pequeno, de tal forma que escrever:

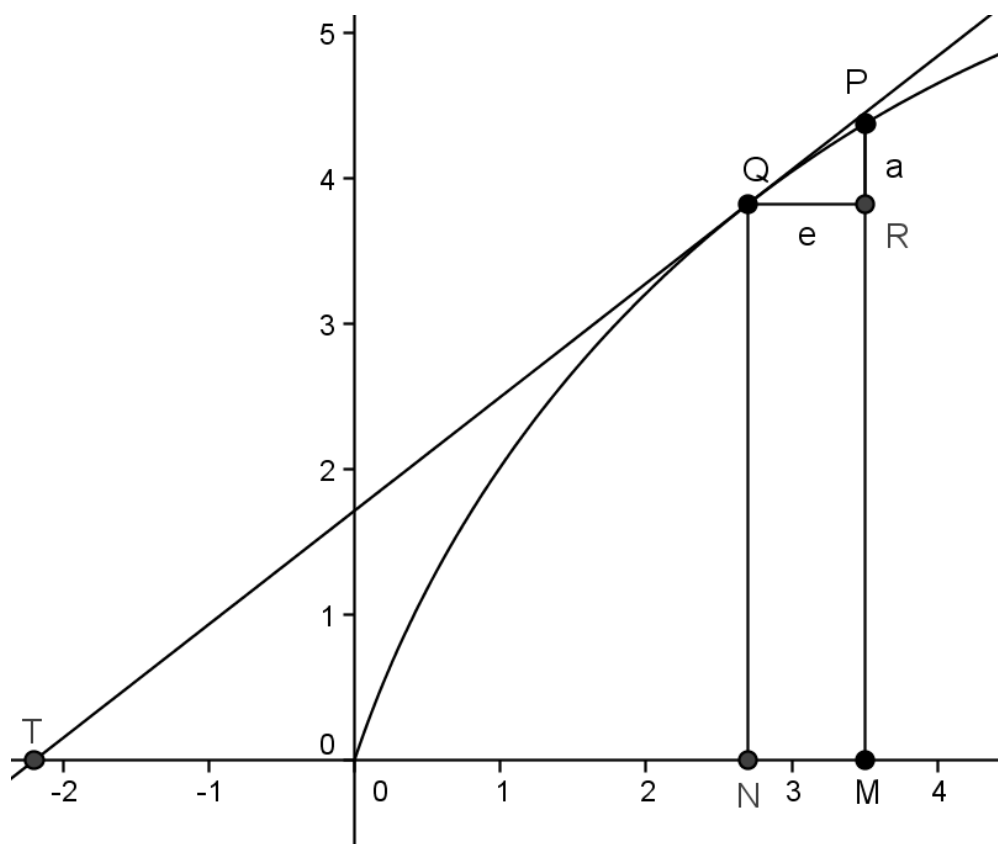


Figura 4.1: Método de Barrow para achar a inclinação da reta tangente

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM} \quad (4.1)$$

(aproximadamente). Chamando as coordenadas de P e Q de (x,y) e $(x - e, y - a)$ respectivamente, substituindo estes valores na equação da curva que é conhecida e desprezando os termos envolvendo potências de a e de e e de expoentes maiores que 1, é possível achar a

razão $\frac{a}{e}$. Como **M** é um ponto conhecido, podemos agora achar **T** (sobre o eixo x) usando o comprimento do segmento **TM**, dado por $y(\frac{a}{e})$, consequência direta de 4.1.

4.2 Considerações sobre as Conferências I e X de Barrow

No livro *The Geometrical Lectures*, [4], são exploradas treze Conferências que Barrow escreveu, foram feitas com uma natureza filosófica e apresentam conceitos gerais de espaço, tempo e movimento. Pode-se dizer que as conferências são uma coleção de definições, proposições e teoremas, principalmente relativos ao cálculo de tangentes, áreas e comprimentos de arcos. Nesta seção serão abordadas somente as conferências **I** e **X**. Assim começando com a conferência número **I**, Barrow discorre sobre a natureza do Tempo e do Movimento, e da relação existente entre eles e a representação geométrica de tais variáveis. Afirma também que Tempo e Movimento medem-se naturalmente de forma mútua. Alguns pontos importantes que Barrow cita nesta conferência são:

1. O Tempo é feito ou de uma adição simples de movimentos ou do fluxo contínuo de um movimento.
2. Uma reta, sendo o traço de um ponto que se move para a frente, pode ser concebida como o traço de um movimento fluindo continuamente.
3. Cada instante de Tempo, ou partícula indefinidamente pequena de tempo pode, assim, ser representado por um pequeno segmento de reta uniforme.
4. A divisibilidade é sempre possível, infinitamente ou indefinidamente.
5. Os instantes são partes do tempo que são infinitamente pequenas e nas quais se percorrem distâncias infinitamente pequenas.
6. Sem movimento, nós não podemos perceber a passagem do tempo.
7. A velocidade em cada instante de tempo pode ser representada por retas perpendiculares à reta que representa o Tempo, onde o espaço representa a união das distâncias percorridas durante o movimento.

Na página 41, do livro *The Geometrical Lectures*[4], no final desta conferência, Barrow a termina com exemplos e faz uma ilustração para melhor compreensão dos conceitos apresentados e ela foi reproduzida na figura 4.2. Neste exemplo, a velocidade é sempre a mesma, o paralelogramo **AZZE** representa a velocidade alcançada em qualquer espaço de tempo definido, seu lado **AE** representa o tempo definido, **BZ**, **CZ**, **DZ**, **EZ**, são os graus de velocidade em instantes separados de tempo e **AZZB**, **AZZC**, **AZZD** e **AZZE** representam os espaços percorridos em diferentes instantes de tempo.

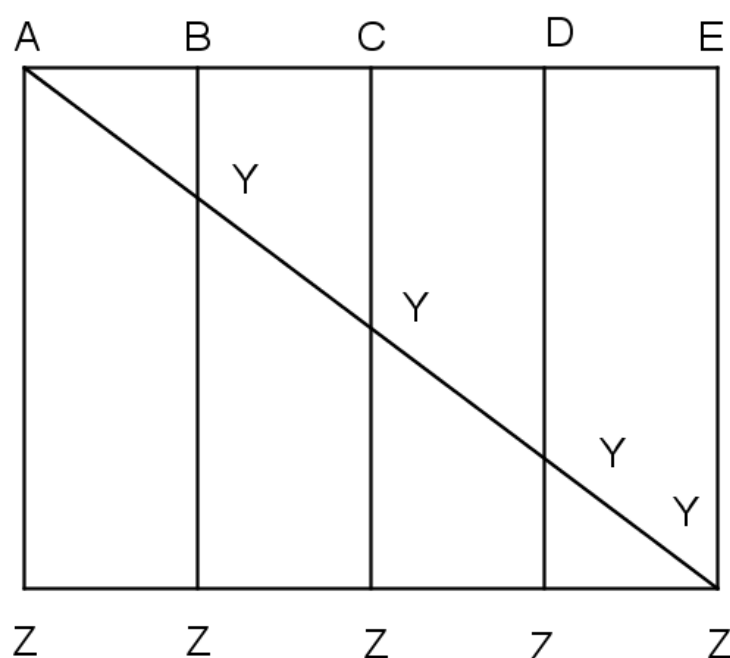


Figura 4.2: AZZE representa a velocidade num espaço de tempo definido

Na conferência **X**, Barrow inicia com proposições referentes à retificação de arcos, e as posteriores, até a proposição 8, apresentam pequenas variações que tratam deste assunto. Por este motivo escolhemos a proposição 5 que está na página número 114 para representar todas elas.

Proposição 4.1 *Seja o segmento de reta **AP** e duas curvas **AEG**, **AFI** tão relacionadas que, se qualquer segmento de reta **DEF** é traçado (paralelo a **AB**, um segmento de reta na posição dada), corta **AP**, **AEG**, **AFI**, nos pontos **D**, **E**, **F** respectivamente e **DF** sempre é*

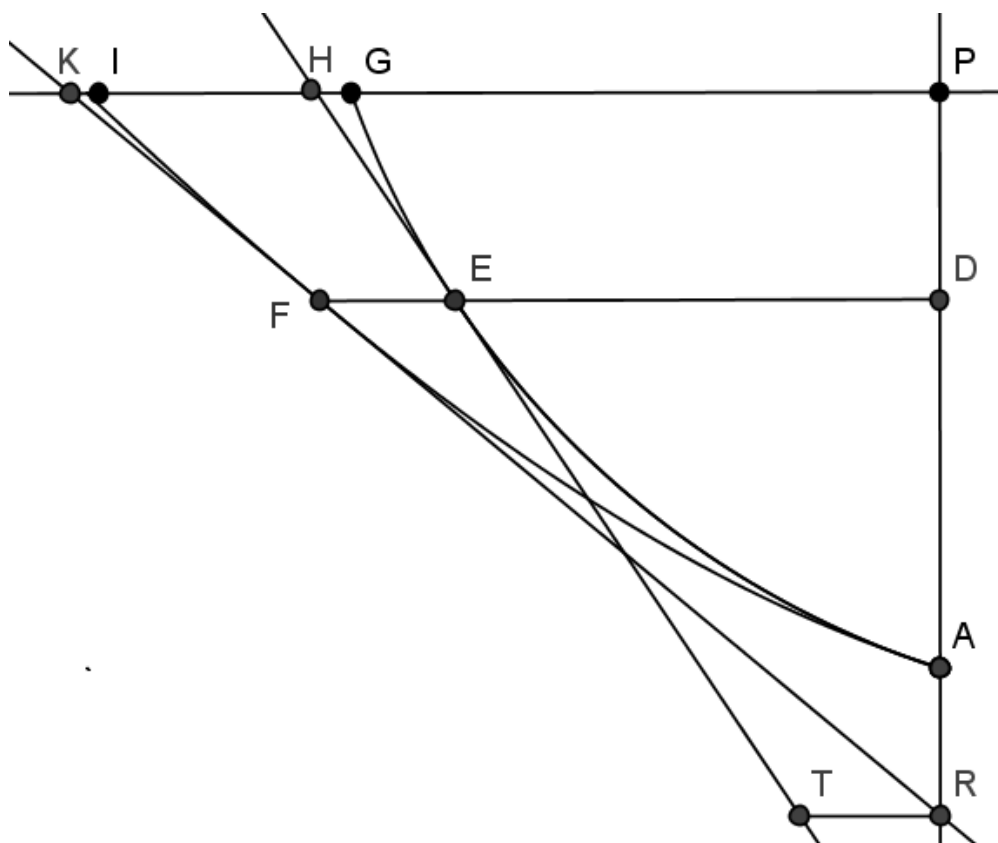


Figura 4.3: Representação gráfica original da Proposição 4.1

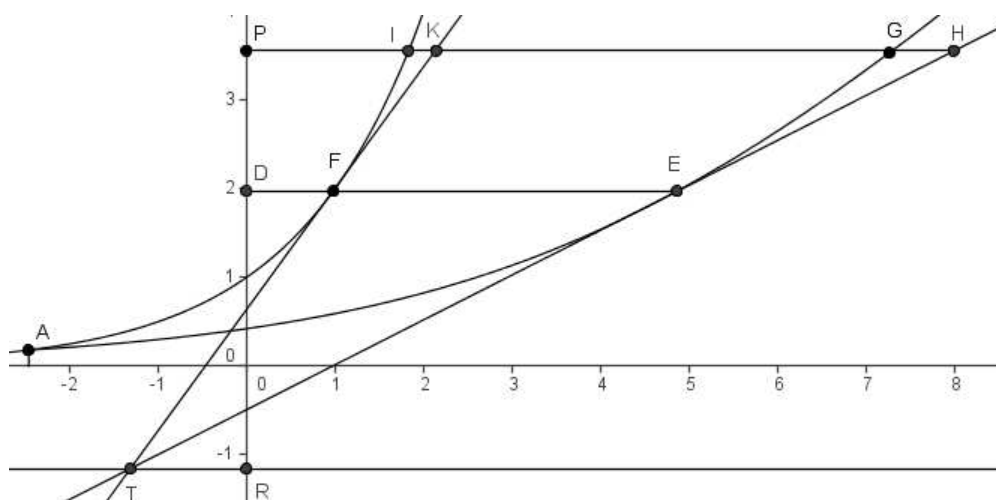


Figura 4.4: Representação gráfica atualizada da Proposição 4.1

4.3 Demonstração de um caso particular do Teorema Fundamental do Cálculo

Antes de iniciar esta seção, vamos fazer alguns comentários sobre a proposição que encontra-se logo a seguir. Nessa proposição, ao contrário do que estamos acostumados atualmente, no gráfico que Barrow usou em sua época, o eixo vertical não é utilizado, sendo assim os valores abaixo do eixo horizontal (que contém o segmento **AD**) não são considerados negativos. Barrow não trabalhou com o conceito de função conhecido atualmente, no lugar dele utilizava curvas. Levando em consideração o que foi citado, em sua demonstração, Barrow escolhe um determinado valor **R**, e através dele faz uma equivalência da área calculada entre a curva **ZGE**, o eixo **AD** e as ordenadas paralelas **AZ** e **DE**, com a área do retângulo que tem como lados **R** e **DF**. A partir desta relação, a curva **AIF** da parte de cima do eixo **AD**, representa a área da curva **ZGE** e então Barrow escolhe um ponto **F** qualquer na curva **AIF**, traça uma reta que passa por este ponto e termina a demonstração, provando que esta reta é tangente a curva **AIF** em **F** e que a sua inclinação é igual a **DE**, que é a ordenada da curva **ZGE**. Terminada as considerações, vejamos então a proposição de Barrow e a sua demonstração.

Proposição 4.2 “Seja **ZGE** qualquer curva na qual o eixo é **AD**; e seja as ordenadas aplicadas a este eixo, **AZ**, **PG**, **DE**, crescendo continuamente em relação à ordenada inicial **AZ**; também seja **AIF** uma curva tal que, se qualquer segmento de reta **EDF** é traçado perpen-

dicular a **AD**, cortando as curvas nos pontos **E**, **F**, e **AD** em **D**, o retângulo contido por **DF** e um dado comprimento **R** é igual ao espaço interceptado **ADEZ**; seja também $\frac{DE}{DF} = \frac{R}{DT}$, e una **DT**. Então **TF** é tangente à curva **AIF** no ponto **F**." (Conferencia **X**, proposição 11, parágrafo 2 pág. 116, [4].

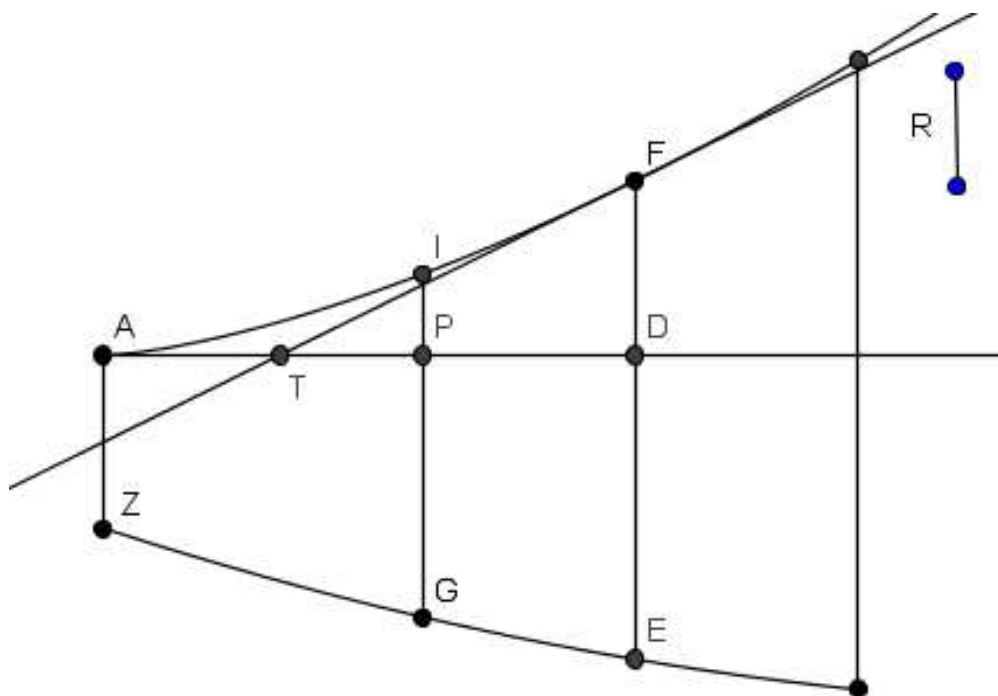


Figura 4.5: Representação gráfica da Proposição 4.2

Demonstração:

Seja qualquer ponto **I** é tomado na curva **AIF** (primeiro entre de **F** e **A**), e através dele, **IG** é traçado paralelo a **AZ**, e **KL** é paralelo a **AD**, cortando as retas dadas como é mostrado na Figura 4.6;

Então por semelhança de triângulos conclui-se que:

$$\frac{\text{LF}}{\text{LK}} = \frac{\text{DF}}{\text{DT}} \quad (4.2)$$

Como por hipótese,

$$\frac{DE}{DF} = \frac{R}{DT} \quad (4.3)$$

Daí vem que:

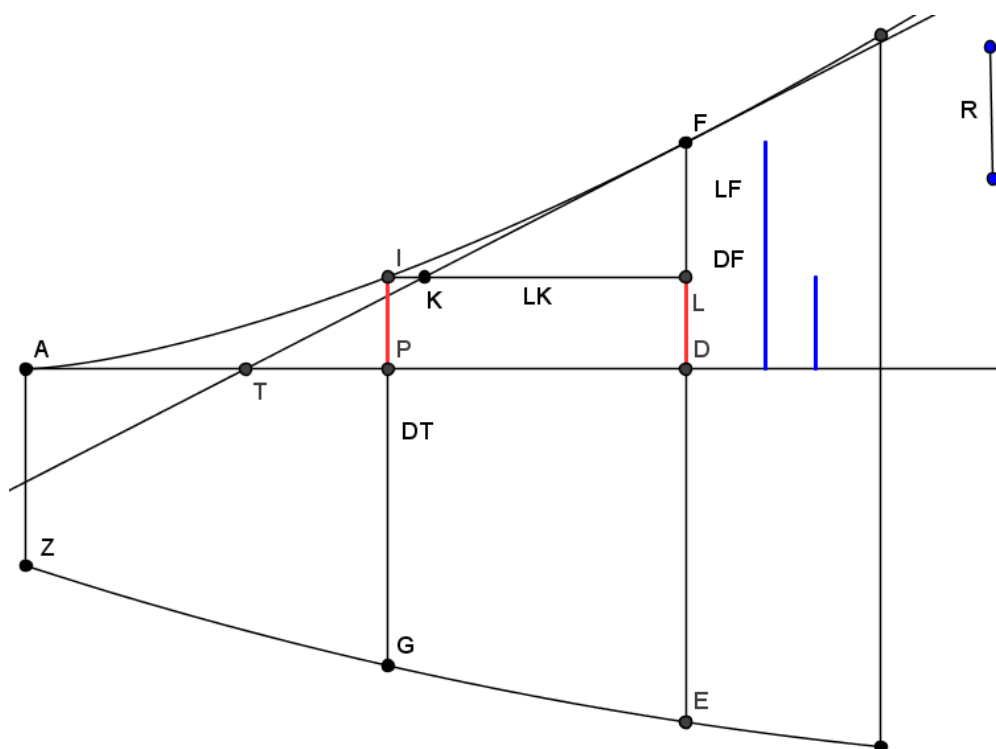


Figura 4.7: Como $DL=PI$ e $LF=DF-PI$, $LF=DF-DL$

Daí por 4.5, 4.6 e 4.7, temos que: $DE.LK = LF.R = (DF - PI).R =$ área **ADEZ**- área **APGZ** = área **PDEG** (na Figura 4.8 pode-se conferir esta igualdade).

Como a área **PDEG** < **DP.DE**, (ver Figura 4.9)

novamente usando a hipótese, temos que as ordenadas são continuamente crescentes, então $DE.LK < DP.DE$ e conseqüentemente $LK < DP$. Assim como $DP = LI$ (ver figura 4.10).

Conclui-se que **K** não pode ser um ponto da curva **AIF**; logo a reta em questão é tangente no ponto **F**. De forma análoga, se o ponto **I** for tomado depois de **F**, e a mesma construção for feita como antes, analogamente prova-se que $LK > DP$. Assim ficou demonstrado que a reta **TF** tangencia a curva **AIF** no ponto **F**.

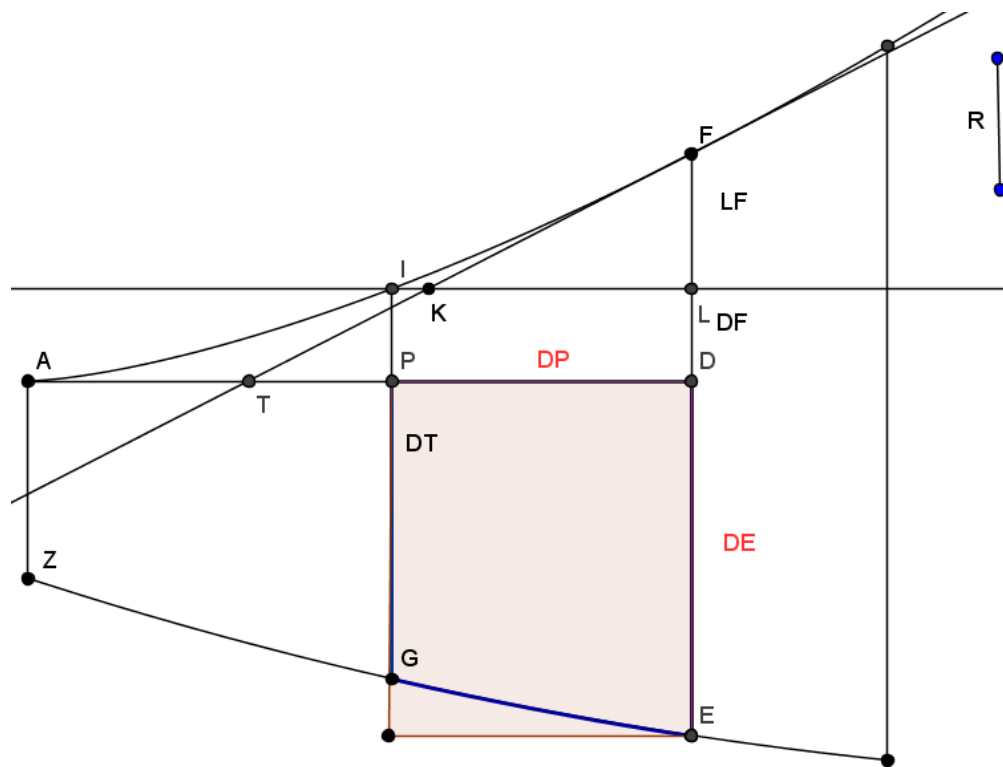


Figura 4.9: Área PDGE é menor que $DP \cdot DE$

Atividades no Geogebra para auxiliar nas aulas de Cálculo

Este capítulo possui um conjunto de atividades elaboradas no Geogebra para apoio nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral, em particular para o ensino do conceito de integral e do Teorema Fundamental do Cálculo. Em todas elas propomos passos que levem o estudante à reflexão sobre conceitos que de uma certa forma aparecem implícitos ou obscuros nas definições e teoremas ou sobre experimentar conflitos (Giraldo, 2004) entre os conceitos que ele terá aprendido nas aulas teóricas e as respostas do computador aos comandos do Geogebra. Quanto à estrutura destas atividades, para facilitar a compreensão do que cada uma deve transmitir ao leitor, elas foram divididas em três partes, a primeira parte chama-se objetivos, e indica a matéria que está sendo enfocada na atividade e a sua principal finalidade, a segunda parte chama-se roteiro de atividades, que é constituída dos passos para construir a atividade no Geogebra e de perguntas para levar o aluno a refletir sobre pontos importantes do Cálculo e a última parte chama-se comentários, que esclarece o leitor sobre algumas limitações da máquina que aparecem ao utilizar o Geogebra e também apresenta algumas reflexões e sugestões para lidar com os conflitos que elas proporcionam com a teoria aprendida em sala de aula. Estas atividades ainda não foram testadas em sala de aula, mas pretendemos fazer experimentos no futuro. Queremos ressaltar também que elas possuem uma seqüência didática de aprendizado, construída da seguinte maneira:

1. A primeira atividade será realizada para mostrar a representação do conjunto dos números reais no Geogebra;
2. A segunda mostra como Arquimedes trabalhou com o Método de Exaustão e sua idéia em trabalhar com áreas de polígonos maiores e menores inscritos e circunscritos em um círculo qualquer para o cálculo de sua área;
3. A terceira apresenta a maneira pela qual a idéia de Arquimedes foi adaptada para o cálculo de áreas de regiões curvas através de somas superiores e somas inferiores;
4. A quarta, destaca a definição da função integral, que depende das medidas de áreas que são calculadas de regiões curvas em relação a determinados intervalos;
5. A quinta apresenta um caso particular de uma função integral $\mathbf{F}$, calculada de uma função $\mathbf{f}$, tomando intervalos variando de $x = 0$ até infinito;
6. A sexta evidencia que a função integral $\mathbf{F}$, de uma função $\mathbf{f}$, pode ser calculada pelo limite da soma inferior ou da soma superior, ou pelo cálculo de sua primitiva;
7. A sétima representa a idéia de Barrow para demonstrar geometricamente a validade do Teorema Fundamental do Cálculo para casos particulares que a função $\mathbf{f}$ é contínua, crescente ou decrescente;
8. A oitava também é baseada em Barrow, porém na idéia da unicidade da reta tangente para qualquer ponto da função integral $\mathbf{F}$ e da inclinação desta reta ser igual à ordenada da função $\mathbf{f}$, da qual foi calculada $\mathbf{F}$;
9. A nona sugere uma motivação geométrica para a compreensão da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo;
10. A décima explora a idéia da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo;
11. A décima primeira é direcionada para a relação existente entre o número usado para o início do cálculo da função integral $\mathbf{F}$ e a constante $\mathbf{c}$ que aparece na família da primitivas da função $\mathbf{f}$;

12. A décima segunda atividade mostra que a constante **c** adicionada a cada primitiva pode ser determinada pela igualdade **c = -F(a)**, onde:

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, dx.$$

Por último, teceremos alguns comentários básicos que serão úteis na realização das atividades realizadas em Geogebra. A versão que foi instalada no computador para a construção das atividades foi a "Geogebra 3.0.0.0" e todas as instruções que faremos, serão referentes a ela. Ao abrir o programa, na parte superior da tela, localiza-se na horizontal a janela de geometria e quando alguma função sua é selecionada, aparece uma mensagem orientando o usuário a respeito do que aquela função realiza. Na parte esquerda da tela na vertical, encontra-se a janela de álgebra, onde a cada comando realizado aparecem as fórmulas, equações, coordenadas dos pontos e também a informação de quais objetos são livres e quais são independentes e na parte inferior está o campo de entrada, que serve para que o usuário digite fórmulas e comandos algébricos. Nas atividades que serão apresentadas logo na sequência, caso exista a necessidade de conhecer o que foi feito na atividade passo a passo, o programa oferece a função **protocolo de construção** que pode ser acessado no comando **exibir**. Em relação as funções que foram mais utilizadas na maioria das atividades, faremos um comentário dos procedimentos para operará-las.

1. Função **Novo ponto**: Para criar um novo ponto, selecione na janela de geometria, **novo ponto**, depois clique no local que você deseja colocar o ponto;
2. Função **Zoom in**: Para ampliar a imagem em torno de um local desejado, mantenha o mouse apertado do lado direito, selecione o local que deseja ampliar a imagem e desaperte o mouse;
3. Função **Seletor**: Para inserir um seletor, vá na janela de geometria, escolha o modo **seletor**, clique no local que deseja colocá-lo, depois na janela que aparecer na tela, digite o nome da letra, os valores mínimo e máximo de variação e o incremento que desejar;
4. Função **Mover**: Para mover um objeto, selecione na janela de geometria o modo **mover**, depois clique com o mouse em cima do objeto segurando o lado esquerdo apertado para arrastá-lo para onde desejar.

Caso o leitor apresente alguma dificuldade em manusear estas atividades que utilizam o software Geogebra, poderá consultar o endereço eletrônico www.geogebra.org e se não possuir o software instalado em sua máquina, anexo ao final deste trabalho, existe um cd contendo todas as atividades numeradas para serem instaladas e também o software Geogebra versão 3.0.0.0.

5.1 Atividade 1: Representação dos números reais no Geogebra

5.1.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Trabalhar a representação geométrica dos números reais por meio de pontos de uma reta, feita no computador com o auxílio do Geogebra;
2. Indicar que só é possível fazer uma representação algébrica finita do conjunto dos números reais no computador, usando o Geogebra;
3. Identificar essa impossibilidade de representação algébrica infinita e expor a necessidade de trabalhar com uma outra representação, que não a computacional, para os números reais: axiomática, simbólica ou geométrica.

5.1.2 Roteiro das atividades

1. Na janela de geometria, clique na função **novo ponto**, depois insira um ponto no eixo x entre os números 1 e 2;
2. Agora selecione uma região em torno deste ponto realizando **zoom in**;
3. Continue fazendo este processo de ampliar a imagem e caso necessite, arraste o ponto até o centro da tela e continue com o processo de ampliação;
4. Quando não for possível ampliar mais a imagem, verifique em que local o ponto está localizado;

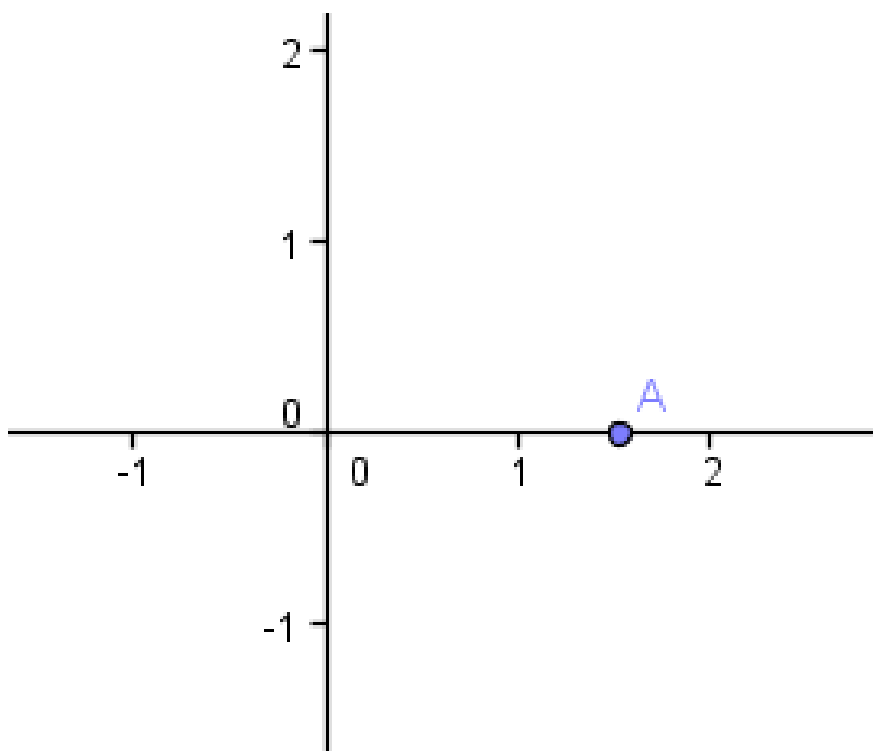


Figura 5.1: Representação gráfica da atividade 1

5. Qual é o valor da abscissa do ponto **A**?
6. Quantos pontos com representação algébrica existem próximos do ponto **A**?
7. Que número está à sua esquerda e que número está à sua direita?
8. Clique em cima do ponto **A**, arraste-o entre estes dois números e veja qual valor ele assume;
9. Por que existe na reta um espaço sem nenhum número entre estes dois números?
10. Agora vá em opções, mude o número de casas decimais para cinco e veja quantas casas decimais estão aparecendo na tela.
11. É possível representar qualquer número real no computador?

5.1.3 Comentários

Esta atividade pretende colocar em evidência a origem de um dos problemas que os estudantes irão se defrontar ao trabalhar com o computador, que é a representação infinita dos números reais. No Geogebra isto não é possível conforme podemos observar na Figura 5.2.

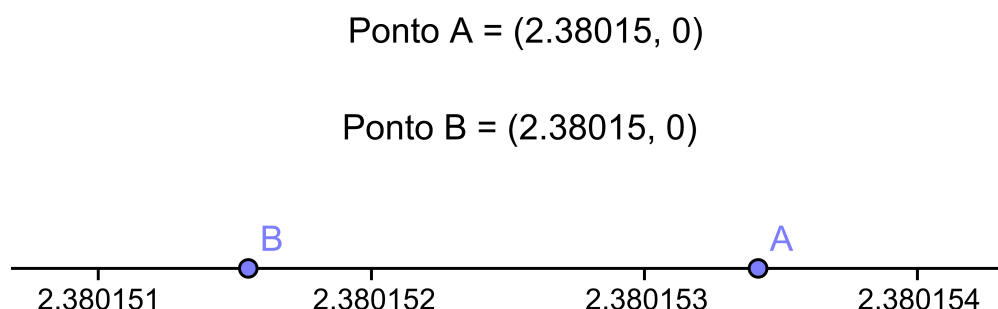


Figura 5.2: Representação de dois pontos no Geogebra

Os pontos **A** e **B** são representados pelo mesmo número racional que tem cinco casas depois da vírgula, sendo que cada um está bem longe do outro. O motivo é que somente para visualização aparecem números racionais na reta contendo seis casas depois da vírgula, e todos os pontos entre **A** e **B** para operações algébricas são representados pelo número 2.38015.

5.2 Atividade 2: Arquimedes (Quadratura do círculo)

5.2.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Explorar a idéia de Arquimedes para demonstrar que a área do círculo é igual ao limite de uma seqüência de áreas de polígonos regulares inscritos, quando o número de lados aumenta indefinidamente;

2. Evidenciar que cada vez que for construído um polígono inscrito no círculo, com número de lados maior que os considerados anteriormente, a diferença entre a sua área e a área do círculo, cada vez mais se aproxima da 0;
3. Indicar que se o número de lados destes polígonos for aumentando indefinidamente, então a medida da área do círculo é o limite das medidas das áreas destes polígonos.

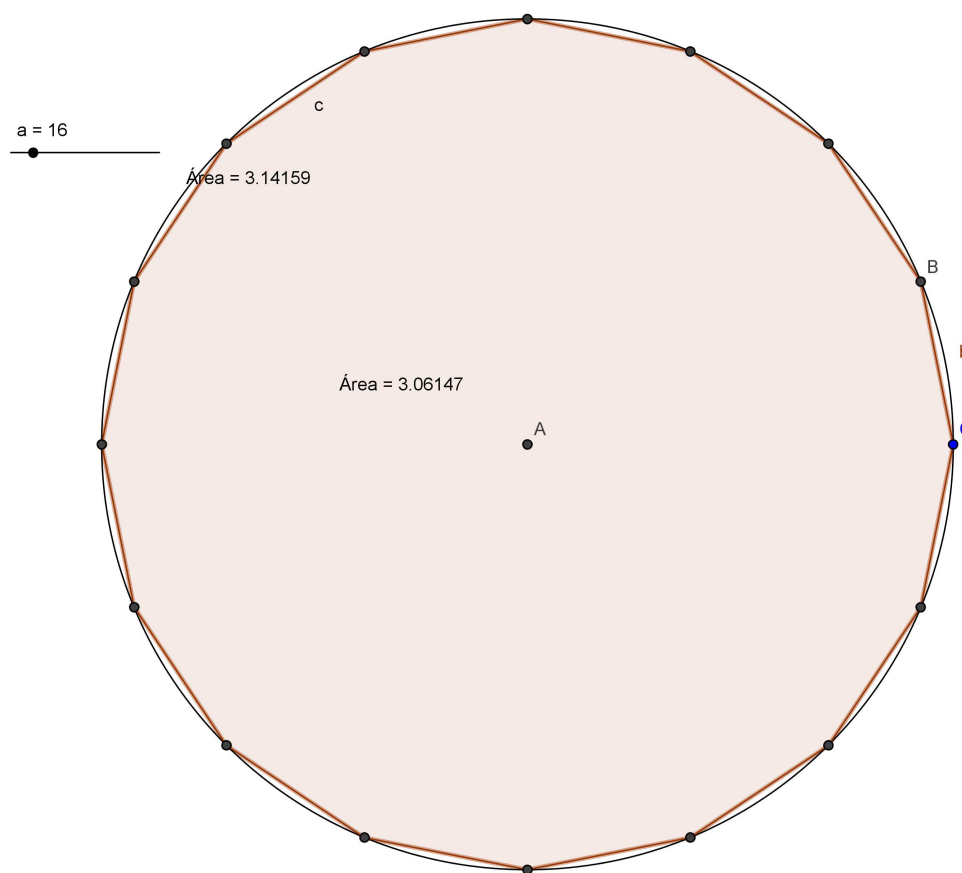


Figura 5.3: Representação gráfica da atividade 2

5.2.2 Roteiro das atividades

1. Na janela de geometria selecione a função **círculo dados centro e raio** e faça uma circunferência com centro na origem e raio igual a 1;

2. Na função **seletor**, defina **a** variando de 4 até 8000, depois insira um ponto em cima da circunferência e usando o lado direito do mouse, redefina suas coordenadas para $x = \frac{\cos 2\pi i}{a}$ e $y = \frac{\sin 2\pi i}{a}$;
3. Agora no seletor que aparece na tela, arraste **a** até que assuma valor igual a 50 , depois igual a 100, observe os valores das áreas do polígono regular inscrito e do círculo, depois vá em opções, e aumente para 5 o número de casas decimais;
4. Volte para o seletor e continue aumentando o valor de **a** até que a medida da área de ambos fique igual;
5. Use a função **zoom in** e amplie em cima de um lado do polígono até que a figura fique do tamanho de sua tela;
6. Se, para o polígono selecionado existir diferença visual entre sua área e a área do círculo, qual é a sua explicação para este fato?
7. Qual é a sua conclusão após realizar as etapas acima?

5.2.3 Comentários

Nesta atividade, o estudante irá experimentar uma contradição entre a informação dada pelo computador de que as áreas do círculo e do polígono são iguais após ser escolhido um número finito de lados, por um lado, e a demonstração de que elas são diferentes. Através de atividades de magnificação e de variação do número das casas decimais, queremos colocar o estudante diante do fato de que a informação do computador é limitada à precisão utilizada e de que a justificativa de a área do círculo ser maior pode se dar através do conceito de limite de uma seqüência infinita de números reais (áreas dos polígonos). Outro procedimento que vale a pena destacar é que para construir a seqüência de polígonos regulares inscritos no círculo, foi utilizada as soluções da equação $z^n = |z^n| \cdot \exp^{n\theta}$, para o caso particular que $z = 1$. Estas raízes n-ésimas da unidade distribuem-se sobre o círculo inteiro (centrado na origem), correspondendo aos vértices de um polígono regular de n lados inscrito no círculo, conforme descrito na atividade.

5.3 Atividade 3: Somas superior, inferior e integral

5.3.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Calcular a área de uma região curva **S** limitada pelo eixo x , uma função **f** contínua, positiva e não constante e as retas $x = a$ e $x = b$, através da soma inferior e soma superior de áreas de retângulos;
2. Indicar que ao aumentar indefinidamente a quantidade inicial de retângulos para calcular a medida da área desta região, existe um limite superior para a soma das áreas inferiores e um limite inferior para a soma das áreas superiores, e que estes limites são iguais a medida da área da região **S**;
3. Concretizar a noção intuitiva de que uma região com lados curvos, possui uma medida de área.

5.3.2 Roteiro das atividades

1. Na janela de geometria, selecione a função **novo ponto**, clique em cima do gráfico e acrescente dois pontos nele;
2. Vá para o seletor que aparece ao lado do eixo **y**, e aumente bem devagar o valor de **n** até que ele fique igual a 50;
3. Observe o que acontece com os valores das medidas das áreas determinadas pelas soma inferior, superior e integral;
4. Agora vá aumentando o valor de **n** até 1000 e veja o que acontece com cada método de cálculo de área e também o valor numérico de cada um;
5. Porque cada vez que **n** aumenta, o valor da área calculada através da soma superior diminui e o da Soma inferior aumenta?

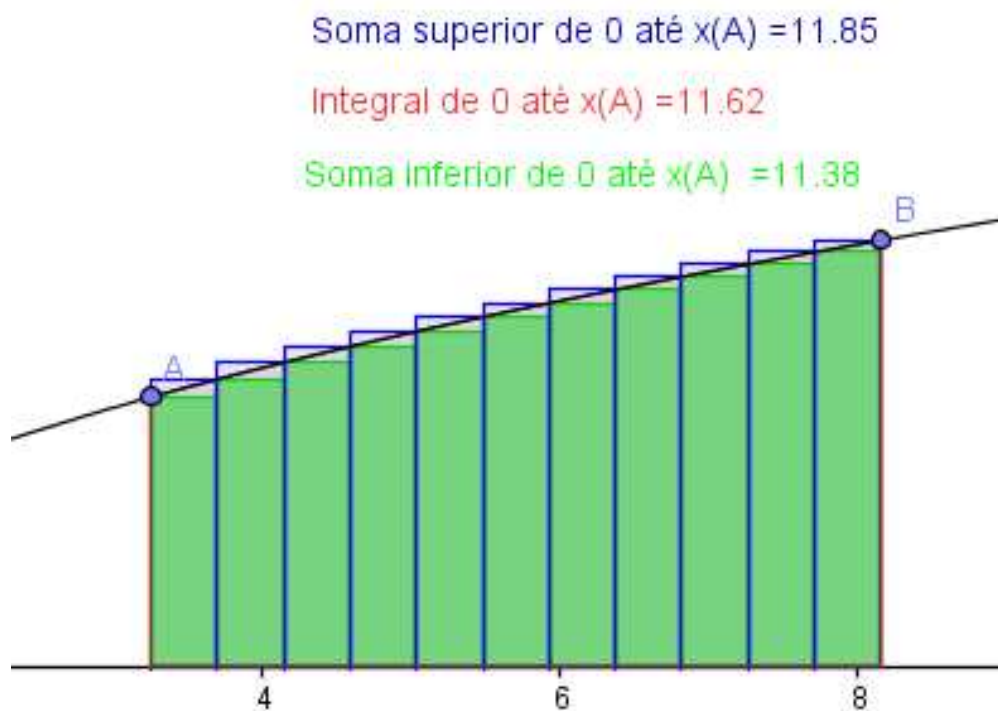


Figura 5.4: Representação gráfica da atividade 3

6. Deixando **n** igual a 1000, selecione uma área em volta do ponto **A** e utilize a função **zoom in**, fazendo este mesmo processo mais duas vezes e compare as áreas determinadas pelos três métodos;
7. Depois vá em opções e mude o número de casas decimais para 5 e observe os valores da soma inferior, superior e da integral;
8. Aumente agora o valor de **n** para 8000, depois para 10000 e veja o que acontece com as medidas das áreas calculadas entre estes valores;
9. Existe algum valor de **n** em que a soma inferior ou superior ou as duas terão valor igual ao valor calculado na integral?

5.3.3 Comentários

Nesta atividade quando é feito o cálculo de área através da soma inferior e da soma superior, vai haver um momento em que mesmo aumentando o número de retângulos, pela limitação constatada na atividade 1 na representação do conjunto dos números reais, estas áreas calculadas por estes dois métodos, permanecerão constantes e não conseguirão atingir a área que é apresentada no cálculo da integral, que utiliza no programa a função primitiva para fornecer este valor. Outra idéia que vale a pena ressaltar é que quando é feito o limite desta somas (inferior ou superior), no processo de cálculo de áreas, está sendo obtido um significado diferente do limite de uma função que aprendemos no Cálculo.

5.4 Atividade 4: Integral como função da área de f

5.4.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Dada uma função f não constante e fixado um ponto a qualquer de seu domínio, construir uma função F que associa 0 para o ponto a e para qualquer b , a área da região curva S , definida na atividade 3;
2. Indicar que independente do valor a fixado, a função F que é construída para representar a função f , difere umas das outras apenas por uma constante C adicionada ou subtraída de F ;
3. Evidenciar que esta constante C citada no item anterior, depende do ponto a fixado no domínio de f ;
4. Indicar que se $b < a$, então a função F construída apresentará valores negativos e não poderá ser chamada de função área;
5. Diferenciar a função área de f da função integral de f .

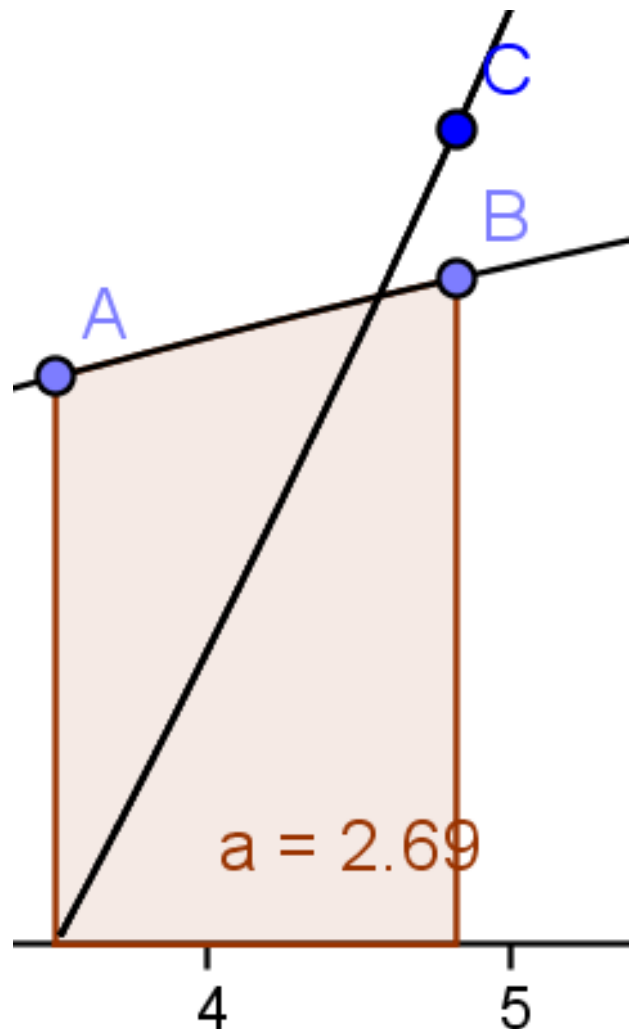


Figura 5.5: Representação gráfica da atividade 4

5.4.2 Roteiro das atividades

1. No campo entrada, digite: $f(x) = \text{sqrt}(x)$;
2. Depois usando a função **novo ponto**, acrescente dois pontos em cima do gráfico de f ;
3. Deixando o ponto **A** fixo, para calcular a área da região que está colorida entre os pontos **A** e **B**, digite no campo entrada: $\text{integral}[f, x(A), x(B)]$;
4. Agora, acrescente um terceiro ponto, mas fora do gráfico da função e redefina suas coordenadas para: $(x(B), a)$;

5. Ainda mantendo o ponto **A** fixo, selecione a função **mover**, e arraste o ponto **B** para a direita de **A** até que ele quase desapareça da tela e depois leve-o bem próximo de **A**, observando sempre o movimento do ponto **C**;
6. É possível saber que função representa a trajetória do ponto **C**?
7. Se o ponto **B** for deslocado para a esquerda de **A** que função vai ser construída?
8. Agora, na janela de geometria, na função **reta perpendicular**, clique com o lado direito do mouse em cima da seta no canto inferior esquerdo do quadrado e escolha a opção **lugar geométrico**, depois clique em cima do ponto **B** e em seguida em cima do ponto **C**, o que acontece?
9. Se você movimentar o ponto **C** em cima da função, mas de seu lado esquerdo, e fazer o procedimento de construção de lugar geométrico, o gráfico fica abaixo do eixo x , qual a explicação?
10. Se, agora movermos o ponto **A** para outro lugar e calcular a área entre **A** e **B** conforme foi feito nesta atividade, que função vai ser construída?

5.4.3 Comentários

A primeira finalidade em realizar esta atividade é compreender que o cálculo da área de uma função pode ser representado através de outra função e que existe uma família de funções que podem representá-la, dependendo do valor a fixado, que é o ponto inicial para o cálculo de todas as áreas. Outras finalidades são, concretizar a noção intuitiva de área de uma região curva que o aluno possui e também trabalhar com a noção de função integral que é mais abrangente que a função área.

5.5 Atividade 5: Área da função exponencial

5.5.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Indicar que é possível calcular a área de uma região curva na qual um dos limites de integração não é um número real;
2. Identificar que a medida desta área é igual ao limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) \, dx$, quando este limite existir;
3. Evidenciar que nestes casos, apenas a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser aplicada para encontrar o valor da área da região citada acima.

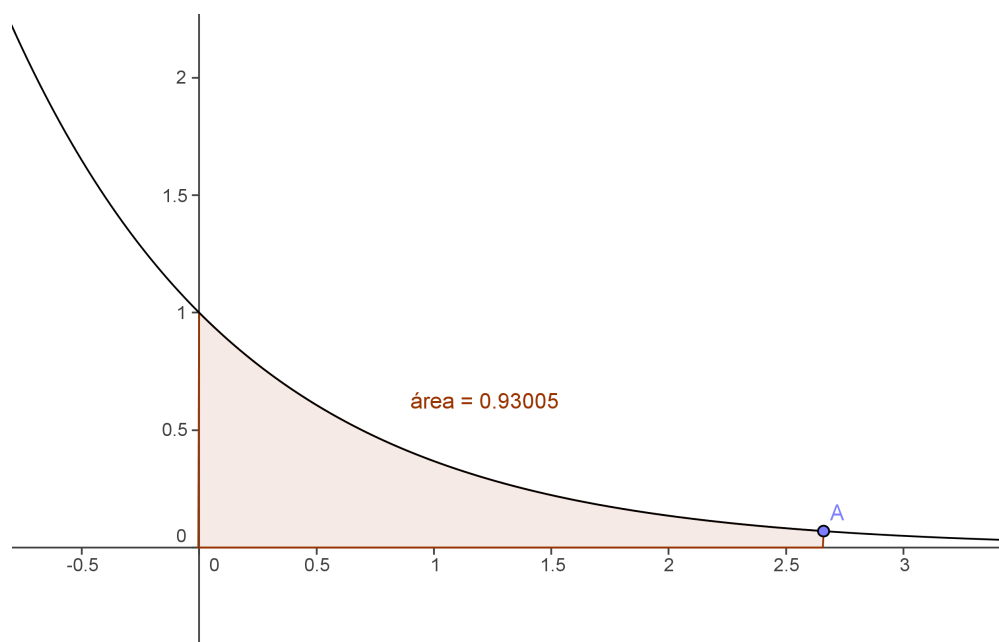


Figura 5.6: Representação gráfica da atividade 5

5.5.2 Roteiro das atividades

1. No campo entrada, digite: $f(x) = e^{-x}$, sendo que a letra **e**, **exponencial** pode ser obtida na primeira janela à direita da janela **entrada**;
2. Na janela de geometria, selecione a função **novo ponto**, depois acrescente um ponto no gráfico da função;
3. No campo entrada, digite: **integral[f, 0, x(A)]**, selecione a função **mover**, clique em cima do ponto **A** e arraste-o até que a área calculada assuma valor igual a 1;

4. Agora vá para opções e mude o número de casas decimais de duas para cinco e observe o valor da área calculada que aparece na tela;
5. Novamente na janela de geometria, clique na função **deslocar eixos**, depois clique em cima do gráfico e arraste-o para a sua esquerda até aparecer no eixo x o número 13;
6. Na janela de geometria, selecione a função **mover**, e arraste novamente o ponto **A** até que ele fique entre os números 12 e 13, e depois pare;
7. O que aconteceu com o valor da área calculada?
8. Selecione uma área em volta do ponto **A** e use a função **zoom in** amplie o gráfico em torno do ponto **A** até que seja visível a distância que existe entre o gráfico da função e o eixo x ;
9. Se for resolver o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) \, dx$, qual será o valor encontrado?
10. Como é possível existir um espaço entre a função e o eixo x e a área calculada ser igual a 1?

5.5.3 Comentários

A finalidade desta atividade é destacar casos particulares do cálculo de áreas que podem ser determinadas em regiões que possuem um lado com comprimento ilimitado. No caso particular para $f(x) = e^{-x}$, desta atividade, podemos observar que para esta função, a integral

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx$$

, é igual a 1 no entanto se atribuirmos para os limites de integração os valores 0 e 13, a integral

$$\int_0^{13} f(x) \, dx$$

também é igual a 1, devido ao fato do Geogebra usar o domínio de acordo com o que foi mostrado na atividade 1.

5.6 Atividade 6: Primitiva e função integral

5.6.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Indicar que a função integral e a função primitiva, embora sejam calculadas através de métodos diferentes, originam a mesma função **F**;
2. Identificar um novo processo para o cálculo de áreas de regiões através da função **f**;

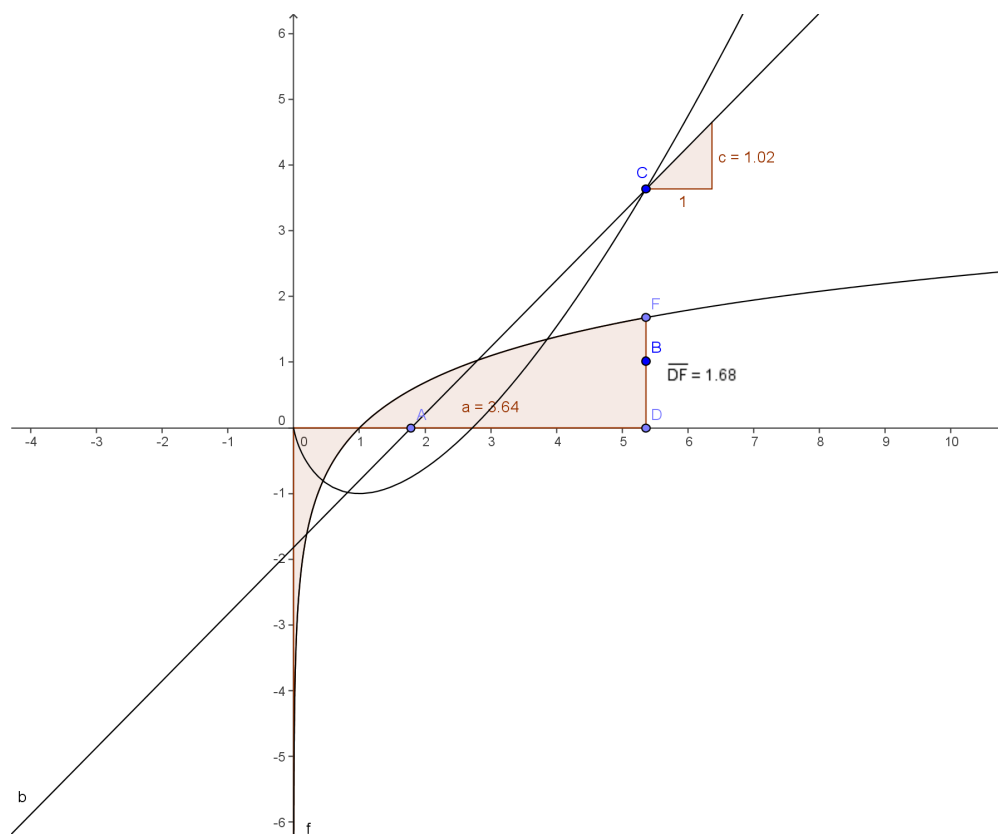


Figura 5.7: Representação gráfica da atividade 6

5.6.2 Roteiro das atividades

1. No campo entrada, digite: $f(x) = \ln(x)$ e depois acrescente um ponto em qualquer parte do gráfico da função **f**;

2. Novamente no campo entrada, digite o comando: **integral [f, 0, x(A)]**;
3. Agora para calcular a função integral de **f**, crie um novo ponto conforme já foi feito, depois clique em cima deste ponto e redefina as suas coordenadas para $(x(A), a)$;
4. Depois vá para a janela de geometria, selecione a opção **lugar geométrico**, clique no ponto fora do gráfico de **f** e depois no ponto que está em **f**;
5. Por último, para calcular a função primitiva de **f**, digite no campo entrada: **integral[f]** (o gráfico da primitiva será gerada e sua fórmula aparecerá na janela de algebra);
6. Agora, crie um novo ponto e redefina-o com as coordenadas $(x(A), g(x(A)))$ e veja onde ele vai aparecer;
7. Existe algum outro ponto com as mesmas coordenadas dele?
8. Por último, selecione a função **mover**, depois clique em cima do ponto **A** e arraste-o até que o valor da área calculada **a** fique igual a 0. O que aconteceu com o outro ponto?

5.6.3 Comentários

O que se deseja ao realizar esta atividade é concluir que a função primitiva de **f** e a função integral de **f** são iguais, em qualquer ponto de seu domínio. Para a função $f(x) = \ln(x)$ utilizada nesta atividade, no programa Geogebra, quando o ponto $(0,0)$ é considerado, existe um problema no cálculo pelos dois processos e o resultado final não é o mesmo, e esta diferença pode ser explicada usando a definição de logaritmo.

5.7 Atividade 7 : Barrow e o Teorema Fundamental do Cálculo

5.7.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Apresentar uma demonstração geométrica para determinados casos particulares do Teorema Fundamental do Cálculo;
2. Desenvolver a relação de igualdade entre a inclinação da reta tangente ao gráfico da função integral e a ordenada da função para a qual se está calculando a integral;
3. Fortalecer a relação entre a área e a função integral.

5.7.2 Roteiro das atividades

1. Clique em cima do ponto **E** e arraste-o até que o ponto **D** que está abaixo dele fique entre 6 e 8;
2. Qual é o valor da inclinação da reta tangente no ponto **F** e qual o valor do comprimento **DE** que representa a ordenada da função **f**;
3. Agora selecione uma região em torno do ponto **F** realizando **zoom in** até que não seja mais possível ampliar a imagem e relate o que você observou;
4. Coloque agora o ponto **E** de tal forma que o ponto **D** fique entre 2 e 4 e faça os procedimentos dos itens anteriores novamente;
5. Nos dois casos em que você ampliou a imagem em torno do ponto **F**, foi possível distinguir o gráfico da reta tangente e o gráfico da função?
6. Qual é a explicação para este fato?

5.7.3 Comentários

A idéia nesta atividade é que o estudante possa refletir sobre a relação entre o conceito de derivada (inclinação da reta tangente) e da integral. Com a utilização de diferentes pontos na curva pretendemos indicar que em todos os casos a reta tangente e a curva serão indistinguíveis. Novamente nesse caso, a limitação da precisão utilizada poderá levar os estudantes a refletirem sobre os conceitos envolvidos.

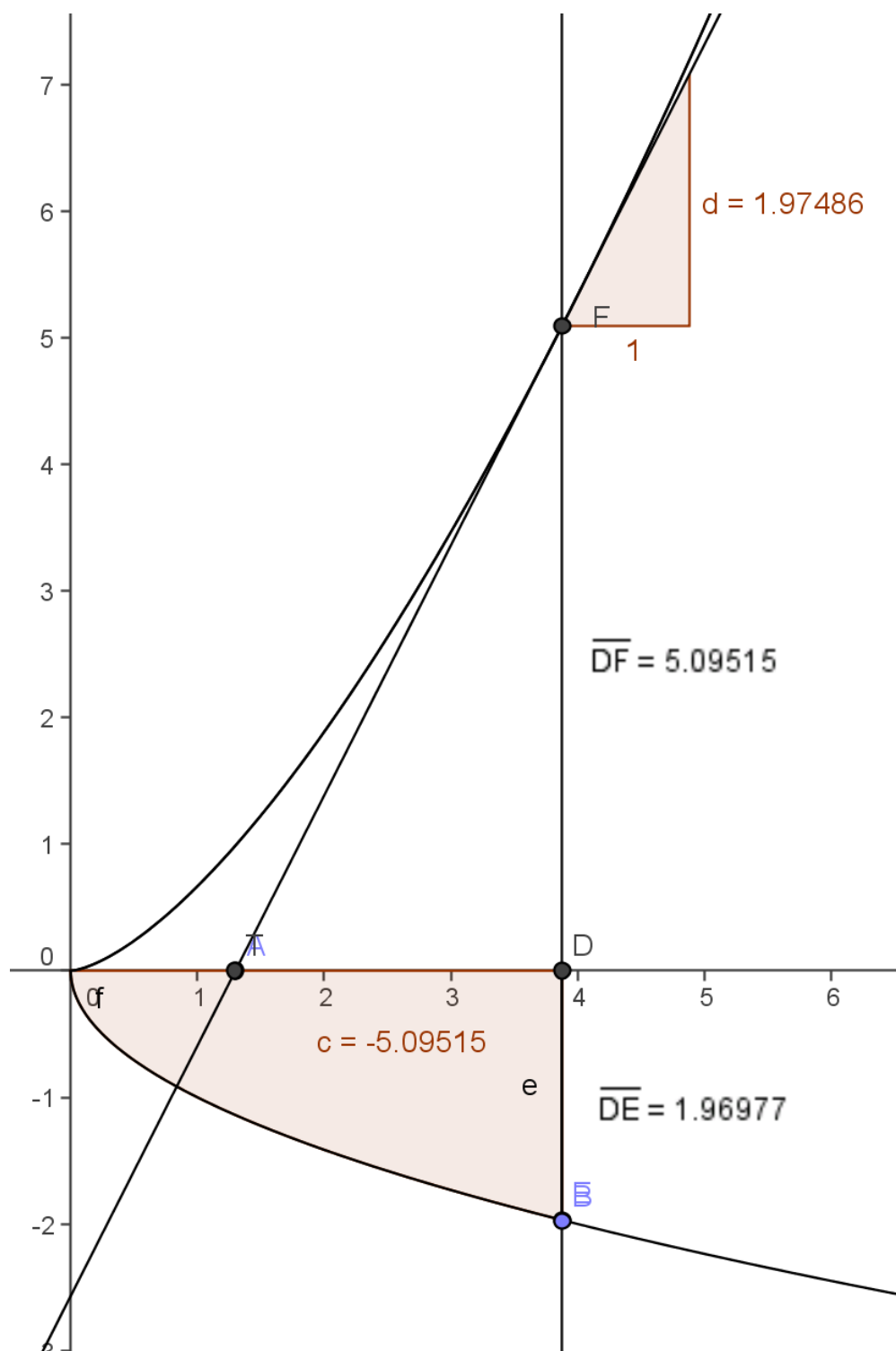


Figura 5.8: Representação gráfica da atividade 7

5.8 Atividade 8 : Barrow e a relação entre F e f

5.8.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Indicar que a reta tangente é a única que atende à condição de corresponder à ordenada da função que se está calculando a integral;
2. Evidenciar a relação existente entre a integral e a derivada;
3. Explorar a veracidade da fórmula $\frac{DE}{DF} = \frac{R}{DT}$ utilizada por Barrow em sua demonstração.

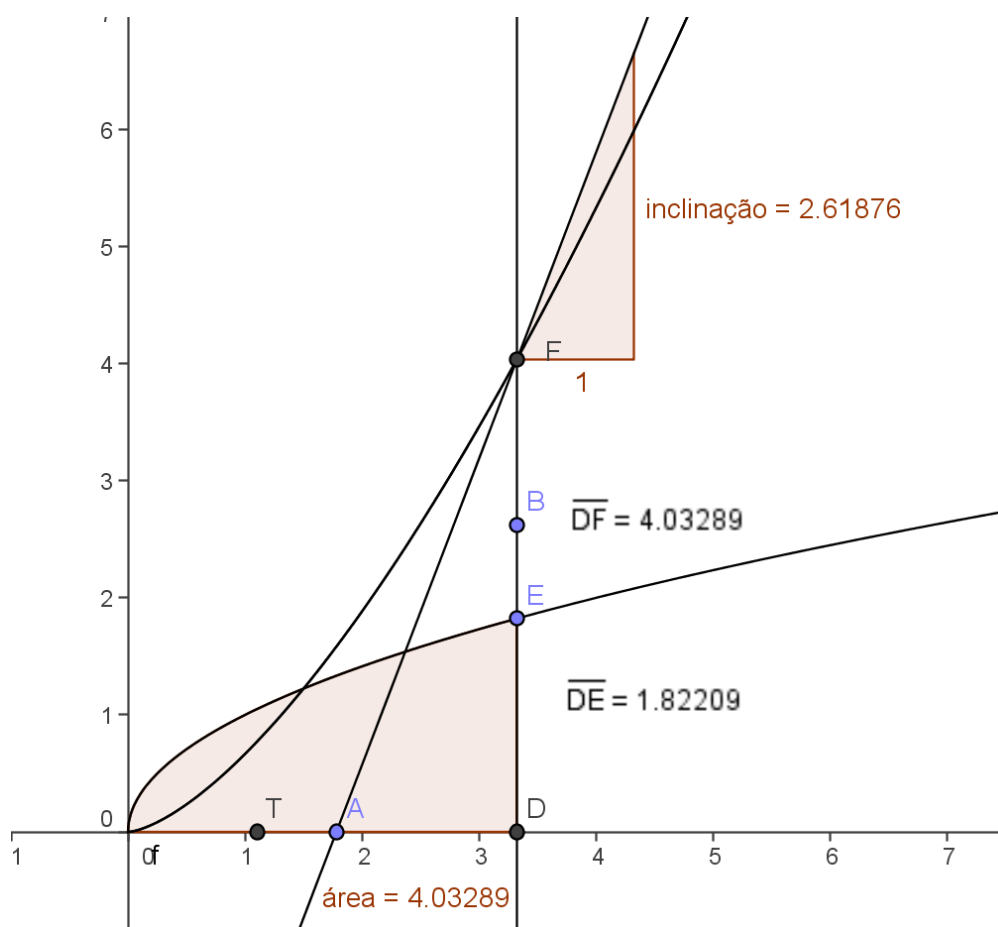


Figura 5.9: Representação gráfica da atividade 8

5.8.2 Roteiro das atividades

1. Clique na reta que passa pelo ponto **F**, em cima do ponto **A** e arraste-o até que ele fique em cima do ponto **T** e observe o que acontece com a inclinação da reta e com o ponto **B**;
2. Compare os valores que estão na inclinação da reta e no comprimento de **DE**, eles são iguais?
3. Se não forem, selecione a função **deslocar eixos**, clique em cima do ponto **A**, e arraste-o para o centro da tela, depois selecione uma região em torno dele, realizando **zoom in**;
4. Faça o mesmo procedimento do item anterior várias vezes e verifique o que acontece;
5. Agora selecionando a função **mover**, arraste o ponto **A** até que ele fique em cima do ponto **T**;
6. Repita o procedimento do item 3 novamente;
7. Depois repita o procedimento do item 4, clique na tela com o lado direito do mouse e selecione a opção visualização padrão;
8. Compare novamente os valores da inclinação da reta tangente e de **DE** e veja se estão iguais;
9. O que você pode concluir?

5.8.3 Comentários

Nesta atividade o aluno ao mover a reta que passa pelo ponto **F** se ela não tangenciar a função integral no referido ponto, deve observar que em qualquer outra posição que ela fique, a sua inclinação (que está sendo medida pelo comprimento do segmento **DB**) resulta em um valor diferente da ordenada de função f no ponto **D**, provando que a reta tangente é a única que possui inclinação igual a ordenada de f . Realizando a atividade é possível verificar uma contradição nesta informação, pois todas as retas que pelo ponto **F** e próximas ao ponto **T** possuem inclinação igual a ordenada de f . É possível também verificar que no ponto **T**, onde a reta tangente corta o eixo x , a seguinte relação: $\frac{DE}{DF} = \frac{R}{DT}$ é verdadeira.

5.9 Atividade 9: Motivação geométrica para compreender o Teorema Fundamental do Cálculo

5.9.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Indicar que se **h** for um valor próximo de 0, então a área do retângulo que possui lados **h** e **f(x)** é aproximadamente igual ao quociente $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, onde **F** é a função integral de **f**;
2. Indicar que se **h** tender a 0, então a ordenada da função **f** no ponto x é igual a derivada da função **F** no referido ponto, ou seja que $F'(x) = f(x)$.

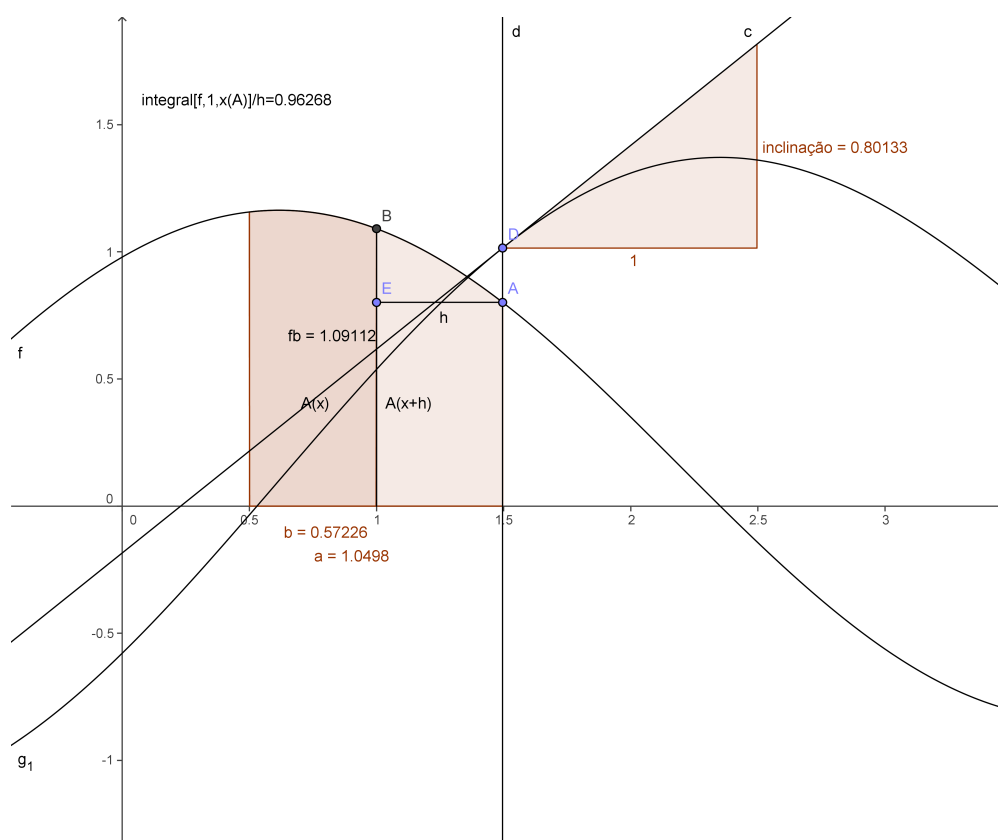


Figura 5.10: Representação gráfica da atividade 9

5.9.2 Roteiro das atividades

1. Clique em cima do ponto **D** e mova-o até que ele fique próximo do ponto **A**, fazendo assim **h** assumir um valor bem próximo de 0;
2. Observe neste trajeto o valor do limite acima do gráfico;
3. Agora coloque o ponto **D** em cima do ponto **A** e acompanhe se **h** ficou igual a 0 e que valor o limite acima do gráfico vai assumir;
4. Se **h** não ficou igual a 0, selecione uma região em torno do ponto **A** realizando **zoom in** e arraste o ponto **D** até que **h** fique igual a 0;
5. Mexa o ponto **D** um pouco para o lado direito observando para que o valor de **h** permaneça igual a 0 e responda;
6. Quando **h** ficar igual a 0, mesmo com o ponto **D** um pouco distante do ponto **A**, qual é o valor do limite?
7. E se o ponto **D** ficar em cima do ponto **A**, o valor do limite irá mudar?
8. Qual é a sua explicação para o que foi observado ?

5.9.3 Comentários

Esta atividade tem como finalidade evidenciar a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, mostrando que, se calculada a derivada da função integral em um ponto qualquer, esta é igual a ordenada de **f** no referido ponto. Neste caso existe um choque de informação ao fazer o cálculo do limite quando **h** tende a 0 no programa, pois vai aparecer na tela a mensagem que ele é indefinido e a justificativa para este fato pode ser dada usando o conceito de limite.

5.10 Atividade 10: Segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo

5.10.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Indicar que é possível o cálculo da área de uma região limitada por **a** e **b**, conhecendo apenas o valor da primitiva de uma função apenas em **a** e **b**;
2. Evidenciar que fixando **a** na função $A(x) = \int_a^x f(x) \, dx$, existe uma relação entre a função **A** e uma primitiva $F(x) + C$, sendo que esta constante **C** vai depender deste valor **a** fixado.

5.10.2 Roteiro das atividades

1. Clique em cima do ponto azul que movimenta as ordenadas **Fb** e **Fb1**, arraste-o e acompanhe o que está acontecendo com o valor da diferença entre **Fb1** e **Fa1** e **Fb** e **Fa**, que estão na tela;
2. Do mesmo modo, arraste também o ponto azul que movimenta as ordenadas **Fa** e **Fa1** e acompanhe também o valor da mesma diferença citada no item anterior;
3. Agora compare o valor destas duas diferenças com a diferença da **área b** com a **área a**, valores que também aparecem na tela, abaixo do eixo **x**;
4. Novamente, clique em cima de um dos pontos azuis, e coloque um em cima do outro fazendo com que a diferença já observada fique igual a 0 e as áreas que estão abaixo do eixo **x** também assumam o mesmo valor;
5. Clique agora na janela de geometria que apresenta a mensagem **arrastar eixos**, depois em cima do ponto azul e arraste-o para o centro da tela;
6. Faça agora o mesmo procedimento de **zoom in** das atividades anteriores em torno do ponto azul e observe se um ponto azul está realmente em cima do outro;

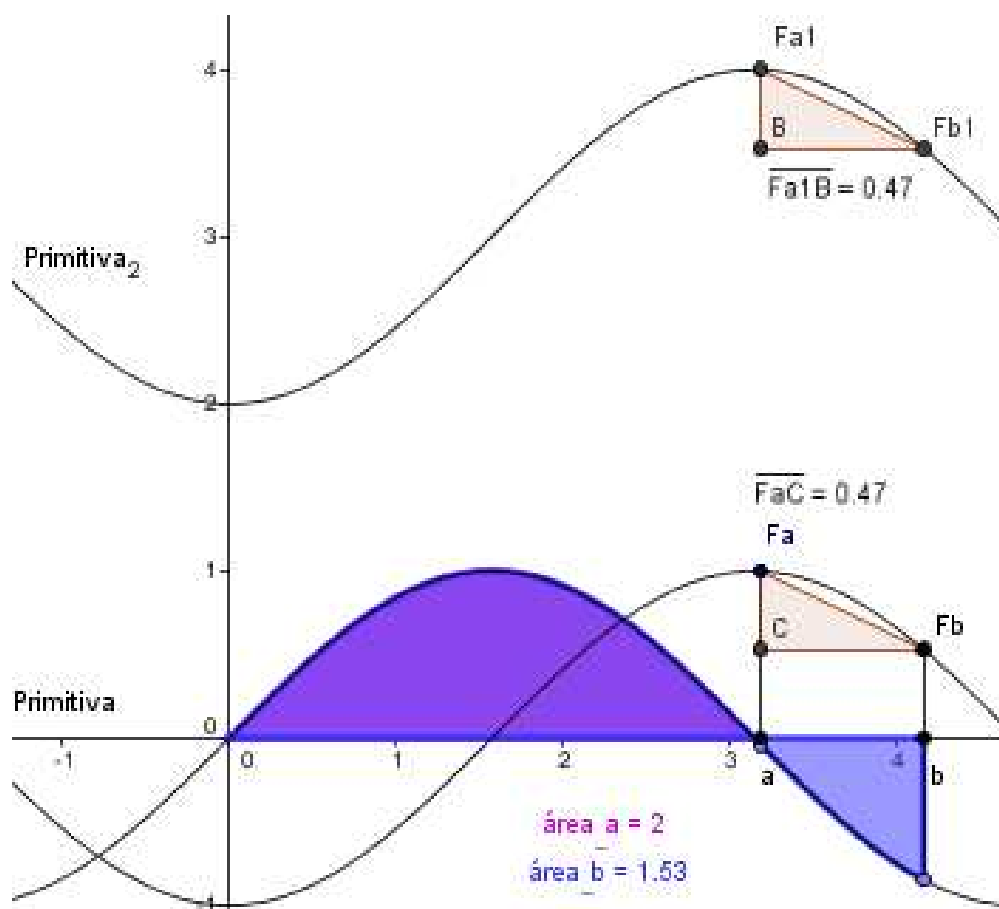


Figura 5.11: Representação gráfica da atividade 10

7. clique com o lado esquerdo do mouse na tela e escolha a opção **visualização padrão** e o gráfico irá voltar no tamanho original;
8. qual a explicação para a diferença das áreas ser igual a 0 mas existir uma área entre os pontos a ser calculada?

5.10.3 Comentários

Esta atividade tem como finalidade indicar que a integral definida

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

na segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo é igual a um valor numérico, que pode ser obtido através da diferença da substituição dos valores **a** e **b** em questão, em qualquer primitiva de **f**. É possível comprovar novamente a limitação do programa na última parte da atividade, onde verifica-se que a área calculada é diferente da área colorida no gráfico, em alguns casos, pelo fato do conjunto que representa os números reais na reta do gráfico utilizado no Geogebra apresentar apenas um número finito de pontos.

5.11 Atividade 11: Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1)

5.11.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Indicar que quando é definida a função $A(x) = \int_a^x f(x) \, dx$ na primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, a escolha deste **a** não é totalmente irrelevante, pois nela determina-se a constante **c** que é adicionada a **F**, personalizando assim uma primitiva da família;
2. Indicar a relação existente entre a função **f**, a função F' e a função **f**.

5.11.2 Roteiro das atividades

1. Considerando a função $f(x) = x^2$, calcule a sua primitiva com três casas depois da vírgula e digite as duas funções no campo entrada;
2. Depois, selecione a função **seletor** e digite **c** para substituir a variável **a** do seletor;
3. Digite agora no campo entrada a função $h(x) = 0.333x^3 + c$, onde **c** é a variável do seletor;
4. Insira um ponto em cima do eixo **x** entre os números 1 e 2 e trace uma reta perpendicular ao eixo que passa por este ponto;

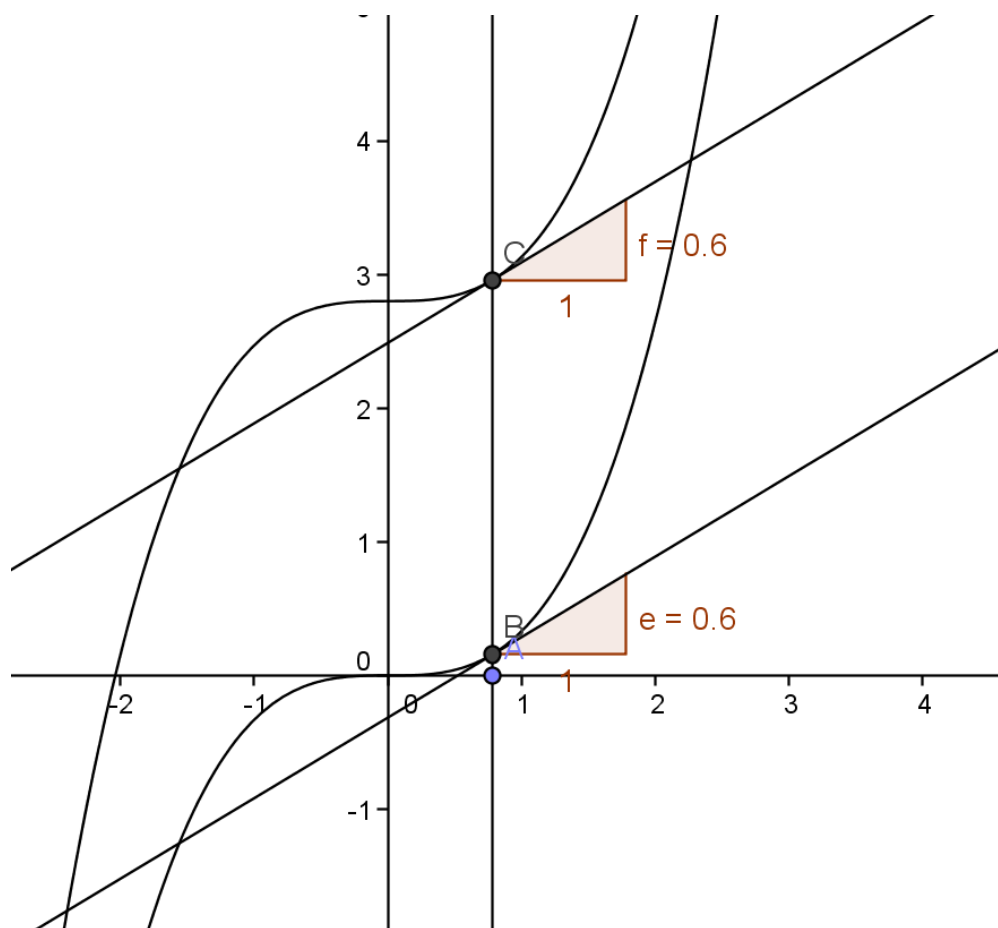


Figura 5.12: Representação gráfica da atividade 11

5. Depois selecione a função **intersecção de dois objetos**, e coloque um ponto na intersecção da reta perpendicular com a função primitiva de f e também na intersecção da reta perpendicular com a função h ;
6. Agora selecione a função **tangentes** e trace uma reta tangente em cada ponto de intersecção da reta perpendicular com as funções citadas acima;
7. No campo entrada digite: **inclinação[b]**, e depois **inclinação[d]** e para calcular a inclinação das retas tangentes que foram traçadas;
8. Agora vá para o seletor que aparece na tela, arraste **c**, observando o movimento da função h que está no gráfico e responda para que valor de **c** as funções coincidem?

9. No seletor faça $c=-2$ e responda; a parte do gráfico da função **h** que corta o eixo **x** é a mesma parte do gráfico de **F** que corta o eixo **x**? Por que?
10. Por último, arraste o ponto **A** até que ele fique igual a 2, observe a inclinação das retas tangentes e responda; qual é a relação deste número com a função **f**?

5.11.3 Comentários

Quando calculamos a função primitiva de **f** e também ao fazer uso do seletor, calculamos uma família de funções que são primitivas de **f** e ao realizar esta atividade é possível perceber que para qualquer uma destas primitivas, o Teorema Fundamental do Cálculo tem a sua validade. Depois quando analisamos o gráfico de cada função primitiva em particular, estamos relacionando cada uma delas com uma função do tipo $A(x) = \int_a^x f(x) \, dx$ e mostrando que cada uma origina uma constante **c** na primitiva. Na última parte da atividade ao deixar evidente a relação existente entre a função **f** e a função **F'**, existe um erro de aproximação no Geogebra fazendo com que esta igualdade não ocorra.

5.12 Atividade 12: Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2)

5.12.1 Objetivos

Esta atividade tem como objetivos:

1. Indicar que os valores **a** e **b** da fórmula

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

são determinados pela igualdade **c = -F(a)**, onde:

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, dx;$$

2. Determinar o valor da constante **c** de uma primitiva através do valor **a** fixado na função $A(x) = \int_a^x f(x) \, dx$.

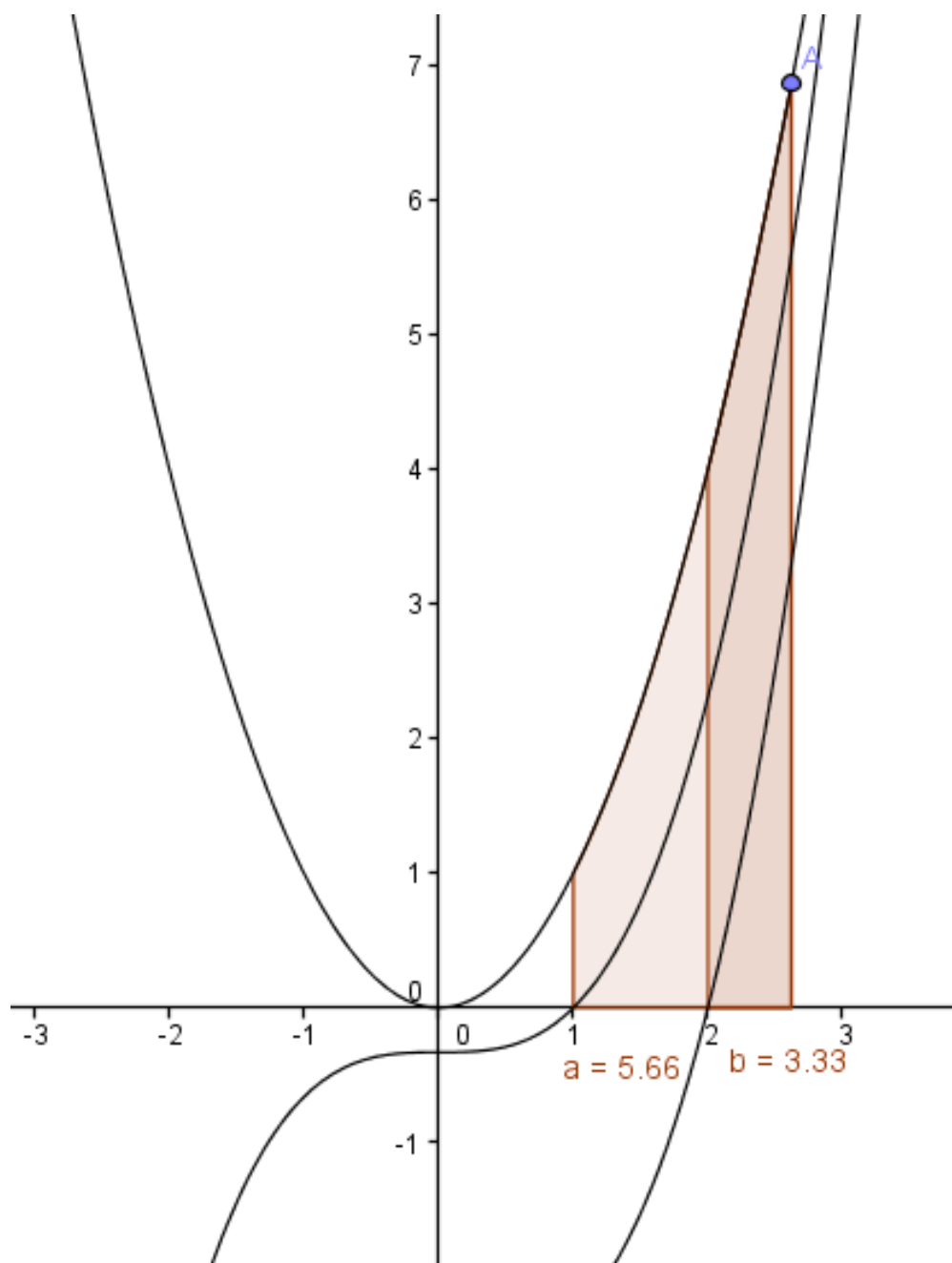


Figura 5.13: Representação gráfica da atividade 12

5.12.2 Roteiro das atividades

1. No campo entrada digite a função: $f(x) = x^2$, selecione na janela de geometria a função **Novo ponto** e insira um ponto no gráfico da função de modo que sua coordenada x seja maior que 2;
2. No campo entrada, primeiro digite: **integral[f,1,x(A)]** para calcular a área de **f** no intervalo de $x = 1$ até o valor de $x(A)$, depois digite: **integral[f,2,x(A)]**, para calcular a área de **f** no intervalo de $x = 2$ até o valor de $x(A)$;
3. Novamente no campo entrada digite: **integral[f]** para achar a primitiva da função **f**;
4. Clique em cima do ponto **A** e arraste-o até que o valor da área **a** seja igual a 0 (medida que corresponde o valor da área entre 1 e $x(A)$), e veja qual ponto da função integral de **f** satisfaz esta condição;
5. Clique em cima do ponto **A** e arraste-o até que o valor da área **b** seja igual 0, (medida que corresponde o valor da área entre 2 e $x(A)$) e veja qual ponto da função integral de **f** satisfaz esta condição;
6. Se a família de primitivas da função $f(x) = x^2$ podem ser encontradas pela fórmula $w(x) = 0.333x^3 + c$ qual é a função desta família que vai representar a função $g(x) = \int_1^x f(x) \, dx$?
7. Se a família de primitivas da função $f(x) = x^2$ podem ser encontradas pela fórmula $w(x) = 0.333x^3 + c$ qual é a função desta família que vai representar a função $g(x) = \int_2^x f(x) \, dx$?
8. Que conclusão você pode tirar para achar o valor de **c** para qualquer caso em geral?

5.12.3 Comentários

Esta atividade serve para esclarecer um ponto obscuro do Teorema Fundamental de Cálculo que ao fixar uma função $A(x) = \int_a^x f(x) \, dx$, não é mencionado que existe uma primitiva $F(x) + C$ que vai ser determinada por este valor **a**, onde teremos $C = -F(a)$ e este fato pode auxiliar na resolução ou entendimento de um exercício.

Considerações Finais e Realizações Futuras

Após a elaboração deste trabalho, muitas considerações podem ser feitas, e assim, tentando destacar os pontos mais importantes, temos as seguintes conclusões:

- O computador ajuda no aprendizado ao possibilitar a materialização de explicações e idéias feitas em sala de aula;
- A representação da teoria no computador propõe uma profunda reflexão de conceitos e definições e também estimula o aprendizado pelos conflitos que aparecem, devido a limitação desta representação na máquina;
- A geometria dinâmica contruibui para uma melhor compreensão do conteúdo;
- O Geogebra possibilita maior participação e interesse ao tornar possível a construção das atividades relacionadas com a teoria;
- Ao construir individualmente as atividades propostas, é possível compreender melhor os pontos obscuros que ficaram implícitos nas explicações;
- Através do Geogebra é possível obter uma intuição geométrica que facilita o aprendizado do Cálculo;
- Os episódios históricos auxiliam na compreensão das definições e teoremas atuais ao apresentar como eram tratados em sua época.

Por último gostaríamos de acrescentar que este trabalho poderia ser escrito numa sequência diferente se fosse utilizado a ordem cronológica dos acontecimentos, iniciando com os episódios históricos e depois partindo para as definições e teoremas atuais.

Também não foi abordado um critério para a avaliação do aprendizado dos acadêmicos, por achar que é muito difícil proceder neste sentido, daí propõe-se que cada um utilize o modo que achar mais conveniente. Encerrando, ressaltamos que as atividades ainda precisam ser testadas e aprimoradas, pois não houve uma oportunidade de aplicá-las. Assim, se forem feitos experimentos para avaliá-las, muitas sugestões irão aparecer e com certeza poderão ser adequadas e os conceitos que abordarem serão melhor explorados, podendo contribuir ainda mais com o ensino do Cálculo diferencial e Integral.

Referências Bibliográficas

- [1] T. M. Apostol. *Cálculo volume 1*. Reverté, 1993.
- [2] C. B. Boyer. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula (Cálculo)*. Atual, 1995.
- [3] C. B. Boyer *The History of the Calculus and its conceptual development*. Dover, 2004.
- [4] J. M. Child. *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. The Open Court Publishing Company, 1916.
- [5] E. S. Ferreira. *Algumas histórias do cálculo diferencial*, 2007.
- [6] V. A. Giraldo. *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*, Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, 2004.
- [7] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by Its History*. Springer, 1996.
- [8] T. L. Heath. *The Works of Archimedes*. Dover, 2002.
- [9] M. Kline. *Calculus An Intuitive and Physical Approach*. Dover, 1998.
- [10] LIMA, Elon Lages. *Análise Real volume 1*. IMPA, 1997.
- [11] J. Stewart. *Cálculo volume 1*. Pioneira, 2001.