Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Ações de Semigrupos: Recorrência por Cadeias em Fibrados e Compactificações de Ellis

Tese de Doutorado

Josiney Alves de Souza †

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Orientador

Campinas, SP, 2008

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq, processo nº 140136/2005-3.

Ações de Semigrupos: Recorrência por Cadeias em Fibrados e Compactificações de Ellis

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Josiney Alves de Souza e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de julho de 2008.

Luiz A. B. San Martin

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (Orientador) (IMECC/UNICAMP)
2. Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC/UNICAMP)
3. Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC/UNICAMP)
4. Prof. Dr. Carlos José Braga Barros (DMA/UEM)
5. Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão (UnB)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Souza, Josiney Alves de

So86a Ações de Semigrupos: Recorrência por Cadeias em Fibrados e Compactificações de Ellis -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Semigrupos. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Fibrados(Matemática). 4. Stone-Cech, Compactificação de. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Semigroup Actions: Chain Recurrence in Fiber Bundles and Ellis Compactifications

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Semigroup. 2. Dynamical systems. 3. Fiber bundles. 4. Stone-Cech compactification.

Área de concentração: Geometria/Topologia

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC - Unicamp)
Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Carlos José Braga Barros (DMA/UEM)
Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão (UnB)

Data da defesa: 15/07/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 15 de julho de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Ketty A. de Rezende.

Prof. (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE

Prof. (a). Dr (a). CARLOS JOSÉ BRAGA BARROS

Prof. (a). Dr (a). MAURO MORAES ALVES PATRÃO

"Quer comais, quer bebais ou façais outra qualquer coisa, fazei tudo para a glória de Deus."

1 Coríntios 10:31

*Este trabalho é dedicado a **Cristo Jesus**.*

Agradecimentos

- Rendo graças a Deus por tudo, pois tudo a Ele pertence. Glórias e honras sejam dadas ao Onisciente.
- Agradeço aos meus pais pela educação e pelo encaminhamento profissional.
- Agradeço a todos os professores que me repassaram conhecimentos por todos os níveis do processo de ensino-aprendizagem.
- Agradeço em especial ao professor Luiz San Martin pela essencial orientação no trabalho.
- Agradeço a todas as pessoas que colaboraram tecnica ou cientificamente com a realização desta tese.
- Agradeço a igreja pelas orações em meu favor.
- Agradeço a minha esposa Priscila pelo apoio e carinho.
- Agradeço ao CNPq pelo necessário e suficiente financiamento de todo o curso.

Resumo

Um semigrupo de transformação consiste de um semigrupo de aplicações contínuas definidas num espaço topológico. A hipótese sobre o semigrupo é a propriedade de reversibilidade, isto é, que a coleção das translações do semigrupo satisfaz a propriedade de intersecção finita. A idéia central é de dinamizar um semigrupo de transformação, sendo isto realizado pela introdução dos correspondentes objetos dinâmicos elementares da teoria de semifluxos, ou seja, os conjuntos limites, atratores e repulsores. O conceito de recorrência por cadeias é abordado de uma forma generalizada, sobre espaços paracompactos, tendo como fundamento certas famílias especiais de coberturas abertas do espaço base chamadas famílias admissíveis. Estudamos também ações de grupos de homeomorfismos sobre espaços compactos. Neste caso, a hipótese sobre o grupo é que ele seja gerado por um subsemigrupo reversível, a partir do qual são definidos todos os objetos dinâmicos elementares. Estudamos dois casos específicos de semigrupos de transformações. No primeiro caso, abordamos semigrupos de transformações em fibrados topológicos, especialmente em fibrados flag, e enfatizamos o estudo sobre transitividade por cadeias fibra a fibra. No segundo caso, estudamos ações de grupos sobre compactificações de Ellis, onde apresentamos uma relação entre o conceito de subsemigrupo semitotal e a transitividade por cadeias. Por último, introduzimos o conceito de função recorrente por cadeias, generalizando o conceito de função recorrente.

Abstract

Transformation semigroups are actions of semigroups of continuous maps on topological spaces. We consider reversible semigroups and study dynamics behaviors by introducing the elementary dynamic objects, originals of the semiflows theory, that is, the limit sets, attractors and repellers. We present the concept of chain recurrence for admissible families on paracompact spaces. We also study homeomorphism group action on compact spaces. In this case, the hypothesis on the group is the Ore's condictions. The elementary dynamics objects are defined from the action of the generator reversible subsemigroup. Then we study two specific cases of transformation semigroups. In the first case, we present results on the actions of endomorphism in flag bundles by emphasizing the chain transitivity in the fibres. Next, we study group actions in Ellis compactifications and relate the concept of semitotal subsemigroup to the chain transitivity. Finally, we introduce the concept of chain recurrent function and generalize the concept of recurrent function.

Sumário

Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos desenvolvida por Conley [8] introduz o assunto de estabilidade definindo os objetos dinâmicos elementares, ou seja, os conceitos de conjuntos limites e seus derivados. Estes autores relacionam o conceito de recorrência por cadeias com os conceitos de atrator e decomposição de Morse mutuamente. O trabalho de tese de doutorado de Patrão [22] estende os resultados da teoria de fluxos para o contexto de semifluxos sobre espaços topológicos.

Sejam X um espaço topológico compacto Hausdorff e $N \subset X$ um subconjunto não vazio. Dado um semifluxo $\sigma : \mathbb{T} \times X \to X$, onde $\mathbb{T}$ é o conjunto $\mathbb{R}^{+}$ ou $\mathbb{Z}^{+}$, o conjunto ω-limite e o conjunto ω^{*}-limite de N são definidos respectivamente por

$$\omega\left(N\right) = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{fe}\left(\bigcup_{s \geq t} \sigma_{s}\left(N\right)\right) \qquad \text{e} \qquad \omega^{*}\left(N\right) = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{fe}\left(\bigcup_{s \geq t} \sigma_{s}^{-1}\left(N\right)\right).$$

Sob o aspecto da ação definida pelo semifluxo, dado um subsemigrupo $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$, define-se os conjuntos

$$\mathbb{S}N = \left\{x \in X : \text{existe } y \in N \text{ e } t \in \mathbb{T} \text{ com } \sigma_{t}\left(y\right) = x\right\}$$

e

$$\mathbb{S}^{*}N = \left\{x \in X : \text{existe } y \in N \text{ e } t \in \mathbb{T} \text{ com } \sigma_{t}\left(x\right) = y\right\}.$$

Assim, temos que

$$\omega\left(N\right) = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{fe}\left(\left(t + \mathbb{T}\right) N\right) \qquad \text{and} \qquad \omega^{*}\left(N\right) = \bigcap_{t \geq 0} \mathrm{fe}\left(\left(t + \mathbb{T}\right)^{*} N\right). \tag{E1.1}$$

As descrições de conjuntos limites pelas translações de $\mathbb{T}$ dadas na equação E1.1 sugeriu a definição desses conceitos para ações de semigrupos. Assim, podemos pensar em dinâmica de semigrupo de transformação olhando para as ações das translações do semigrupo. As relações entre os objetos dinâmicos elementares são a principal motivação para a introdução destes no contexto de semigrupos de transformações.

Certamente, a definição de conjunto limite requer condições especiais do semigrupo $\mathbb{T}$. De fato, os conjuntos limites são não-vazios se, e somente se, as famílias de subconjuntos compactos $\{\text{fe}\left((t+\mathbb{T})\,x\right):t\in\mathbb{T}\}$ e $\{\text{fe}\left((t+\mathbb{T})^{*}\,x\right):t\in\mathbb{T}\}$ satisfazem a propriedade de intersecção finita, para todo ponto $x\in X$. Assim, a reversibilidade de $\mathbb{T}$ é suficiente para termos uma definição de conjuntos limites não vazios. Relembrando a propriedade de reversibilidade, para quaisquer $t,s\in\mathbb{T}$, a translação $t+\mathbb{T}$ intersepta a translação $s+\mathbb{T}$. Portanto, podemos definir conceitos dinâmicos correspondentes para ações de semigrupos reversíveis.

Um subconjunto $A\subset X$ é um atrator do semifluxo se existe uma vizinhança V de A tal que $\omega\left(V\right)=A$. Um subconjunto $R\subset X$ é um repulsor se existe uma vizinhança U de R tal que $\omega^{*}\left(U\right)=R$. Os atratores e repulsores estão relacionados entre si. Dado um atrator A, então, o conjunto $A^{*}=\{x\in X:\omega\left(x\right)\cap A=\emptyset\}$ é um repulsor chamado repulsor complementar de A. A correspondência $A\to A^{*}$ entre o conjunto de todos os atratores e o conjunto de todos os repulsores é bijetiva. Nesta tese, introduzimos os conceitos de atrator e repulsor para ações de semigrupos reversíveis e discutimos a correspondência existente entre eles.

Os atratores do semifluxo se relacionam diretamente com o conceito de recorrência por cadeias. Dados pontos $x,y\in X$, um elemento $t\geq 0$ (ou $t\in\mathbb{T}$) e uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, então, uma $(\mathcal{U},t)$-cadeia de x até y é composta por uma seqüência de pontos $x_0=x,x_1,...,x_n=y\in X$, de elementos $t_0,...,t_{n-1}\geq t$ (ou $t_0,...,t_{n-1}\in t+\mathbb{T}$) e de conjuntos abertos $U_0,...,U_{n-1}\in\mathcal{U}$ tais que $\sigma\left(t_i,x_i\right),x_{i+1}\in U_i$, para $i=1,...,n-1$. Fixando a família $\mathcal{O}$ de todas as coberturas abertas finitas de X, um ponto $x\in X$ é dito $\mathcal{O}$-recorrente por cadeias quando dados quaisquer $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ e $t\geq 0$ existir uma $(\mathcal{U},t)$-cadeia de x para x. Então, o conjunto $\mathfrak{R}$ de todos os pontos recorrentes por cadeias não depende da família $\mathcal{O}$, uma vez que

$$\mathfrak{R}=\bigcap\left\{A\cup A^{*}:A\ \text{ um atrator}\right\}.$$

Nestes estudos importa também a análise dos conjuntos transitivos por cadeias maximais, que consistem de classes de equivalência em $\mathfrak{R}$. Como no caso de fluxos, estes conjuntos se relacionam com os atratores e repulsores do semifluxo.

A definição de recorrência por cadeias para ações de semigrupos reversíveis é análoga à definição para semifluxo, considerando as translações do semigrupo. Nosso principal objetivo na primeira parte desta tese é de relacionar os pontos recorrentes por cadeias com os pares atrator-repulsor para a ação de um semigrupo reversível sobre um espaço compacto Hausdorff.

Introduzimos também o conceito de decomposição de Morse para ações de semigrupos reversíveis como uma generalização natural de par atrator-repulsor. De fato, uma decomposição de Morse é uma coleção finita de subconjuntos compactos de X que tem as mesmas propriedades da coleção composta por um atrator e seu repulsor complementar. Assim, esse conceito também se relaciona com a recorrência por cadeias.

Na seqüência estudamos ações de grupos que contêm subsemigrupos geradores reversíveis. Por exemplo, o grupo de todas as matrizes reais positivas $n \times n$ e os grupos solúveis. Assim, introduzimos os objetos dinâmicos elementares para um grupo de transformação considerando a ação de um subsemigrupo gerador reversível. Com isso, generalizamos os conceitos da teoria de fluxos.

As duas outras partes desta tese apresentam estudos de casos especiais de ações de semigrupos reversíveis: sobre fibrados flag e compactificações de Ellis.

Com respeito a semigrupos de transformações em fibrados flag, nosso objetivo é generalizar os resultados sobre transitividade por cadeias obtidos por Braga Barros-San Martin [4] e Patrão [22]. Nesses trabalhos, os conjuntos de transitividade por cadeias para um fluxo ou semifluxo sobre um fibrado flag são parametrizados pelo grupo de Weyl, e cada um possui uma caracterização específica nas fibras do fibrado. Estes resultados são obtidos a partir dos estudos de conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos em variedades flag apresentados nos trabalhos [2], [3], [26], [28], [31], [32], [34], [35], e de pontos fixos para fluxos introduzidos em [9].

Sejam G um grupo de Lie real, semi-simples e conexo e $\pi : Q \to X$ um fibrado principal localmente trivial com grupo estrutural G e espaço base paracompacto e Hausdorff. Um endomorfismo local de Q é uma aplicação contínua $\phi : dom\,(\phi) \subset Q \to Q$ tal que (i) $dom\,(\phi) = \pi^{-1}(U)$, onde $U \subset X$ é um subconjunto aberto, e (ii) $\phi\,(qg) = \phi\,(q)\,g$, para todos $q \in dom\,(\phi)$ e $g \in G$. Denota-se por $End_l\,(Q)$ o semigrupo dos endomorfismos locais de Q, e por $End_l\,(X)$ e $End_l\,(\mathbb{E}_\Theta)$ os semigrupos locais induzidos em X e em $\mathbb{E}_\Theta = Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$, onde $\mathbb{F}_\Theta$ é a variedade flag de tipo Θ, e Θ é um subconjunto do sitema simples de raízes Σ. Um semifluxo de endomorfismos $\sigma : \mathbb{T} \times Q \to Q$ é tal que $\sigma_t \in End_l\,(Q)$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Assumindo que o semifluxo é transitivo por cadeias na base em relação à família de todas as coberturas abertas de X, Patrão em [22] mostrou que os conjuntos de transitividade por cadeias no fibrado flag são dados por

$$E_\Theta\,(w) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta, t \geq 0} \mathrm{fe}\left(\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}\,(w)_0\right)$$

com w percorrendo o grupo de Weyl W, onde $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}\,(w)$ é o conjunto controlável efetivo do semigrupo de sombreamento $End_l\,(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ e $\mathcal{O}_\Theta$ é uma certa família admissível de coberturas abertas de $\mathbb{E}_\Theta$. A caracterização desses conjuntos de transitividade por cadeias nas fibras provém do conceito de pontos fixos. Dado $q \in Q$, então,

$$E_\Theta\,(w) \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} = q \cdot \mathrm{fix}_\Theta\,(h\,(q)\,, w)$$

onde $h\,(q) \in Ad\,(G)\,H_{\Theta(\sigma)}$ e $\Theta\,(\sigma)$ é o tipo parabólico do semifluxo.

Nesta tese mostramos que para qualquer ação por endomorfismos de um semigrupo reversível sobre um fibrado flag é possível determinar todos os conjuntos de transitividade por cadeias a partir do grupo de Weyl. No caso da caracterização algébrica nas fibras, olhamos para o caso de fluxos e consideramos ações de semigrupos de automorfismos. Para ações desta natureza, mostramos que a transitividade por cadeias nas fibras também é determinada a partir dos pontos fixos de certos elementos $h(q)$ na órbita adjunta $Ad(G)\,H_{\Theta(\sigma)}$, onde $\Theta(\sigma)$ é o tipo parabólico do semigrupo de transformação.

Em particular, um semigrupo de transformação sobre $\mathbb{E}_{\Theta}$ possui um número finito de conjuntos transitivos por cadeias maximais, o qual é igual ao número de órbitas do subgrupo parabólico W_{Θ} de W de tipo Θ no quociente $W/W_{\Theta(\sigma)}$. Em $\mathbb{E}$ este número é $|W|/|W_{\Theta(\sigma)}|$.

O fato do número de conjuntos de transitividade por cadeias ser finito ocorre também em certos semigrupos de transformações sobre compactificações de grupos topológicos, que também são chamadas de compactificações de Ellis. Na terceira e última parte desta tese, apresentamos um estudo sobre este assunto, onde abordamos ações de grupos sobre suas compactificações.

Sejam X um espaço de Hausdorff e BX a coleção de todos os ultrafiltros fechados sobre X. Dado um subconjunto aberto U de X, define-se o subconjunto de BX

$$\mathrm{h}_{\mathrm{o}}(U) = \{u \in BX : \text{existe } A \in u \text{ com } A \subset U\}.$$

A família $\mathfrak{B} = \{\mathrm{h}_{\mathrm{o}}(U) : U \text{ é um subconjunto aberto de } X\}$ é uma base para conjuntos abertos de uma topologia sobre BX. A compactificação de Wallman de X é o conjunto BX provido com tal topologia. O espaço X é normal se, e somente se, o espaço $BX = \beta X$ é a compactificação de Stone-Čech de X. Em especial, a compactificação de Wallman de grupos topológicos normais Hausdorff (T_4) coincide com a compactificação de Ellis. Neste caso, cada grupo age por homeomorfismo sobre a compactificação. Assim, temos específicos grupos de transformações.

A compactificação de Ellis é um assunto clássico de dinâmica topológica. Sobre essa teoria, os trabalhos de Auslander-Furstenberg [1], Ellis [11], [13], Milnes [20] e de Vries [37] centralizam os estudos sobre subconjuntos minimais, onde a universalidade desses objetos justificam a ênfase. Contudo, o comportamento dinâmico se baseia nos estudos dos subconjuntos minimais.

Nesta tese, introduzimos conceitos dinâmicos mais gerais para semigrupos de transformações. Para grupos que contêm subsemigrupos geradores reversíveis, podemos expandir o estudo de dinâmica em compactificações de Ellis. Neste caminho, apresentamos um estudo sobre o comportamento dinâmico na compactificação de grupos T_4 não compactos.

A topologia T_4 favorece as técnicas empregadas no trabalho porque a base para conjuntos abertos na compactificação é estabelecida a partir de subconjuntos abertos do grupo, o que fornece um certo domínio da topologia. Esse fato é apropriado para trabalharmos com as coberturas abertas, o que contribui para obtermos resultados mais exatos sobre recorrência por cadeias. Este é o nosso assunto principal.

É natural pensar que $\beta\mathbb{R}$ possui dois "fins" quando tentamos imaginar o que acontece com as extremidades de $\mathbb{R}$ na compactificação. Assim, a recorrência por cadeias deve acontecer em duas regiões distintas de $\beta\mathbb{R}$. De fato, os conjuntos limites $\omega(0)$ e $\omega^*(0)$ são os únicos conjuntos transitivos por cadeias maximais do fluxo contínuo $(\mathbb{R}, \beta\mathbb{R})$. Nesta tese, mostramos este fato e concluímos que ele acontece em geral para grupos que contém subsemigrupos invariantes e semitotais. Por definição, um subsemigrupo S de um grupo G é semitotal se existe um elemento $s \in S$ tal que $s^{-1}S \cup sS^{-1} = G$. Então, o conceito de subsemigrupo semitotal é uma generalização do conceito de subsemigrupo total. Na verdade, no caso de subsemigrupos invariantes, mostramos que a existência de dois únicos conjuntos transitivos por cadeias maximais é equivalente à semitotalidade. Este caso bastante geral abrange, por exemplo, o grupo linear positivo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^+$ e os grupos nilpotentes.

Também nesta tese estudamos recorrência por cadeias em espaços quocientes de compactificações de Ellis. Em especial, discutimos sobre esse assunto nos espaços de funções cujos domínios são grupos topológicos. Nossa motivação provém do conceito de função recorrente.

Sejam G um grupo topológico Tychonoff e F um espaço compacto Hausdorff. Dada uma função uniformemente contínua $f : G \to F$, seja $\widetilde{f} : \beta G \to F$ a extensão contínua de f. Dados $u, v \in \beta G$, então $u \sim_f v$ se $\widetilde{f}(ug) = \widetilde{f}(vg)$ para todo $g \in G$. Essa relação é de equivalência em βG. A função f é dita recorrente se o espaço quociente $\beta G / \sim_f$ é minimal. Tal espaço quociente é chamado de espaço da função f. O trabalho de Ellis-Johnson [12] apresenta estudos sobre funções recorrentes reais, e foi este conceito o nosso ponto de partida. Naturalmente, introduzimos o conceito de função recorrente por cadeias requerendo que o espaço quociente $\beta G / \sim_f$ seja recorrente por cadeias. Contudo, sob a hipótese de invariança e semitotalidade, mostramos que existem apenas duas possibilidades para a determinação da dinâmica no espaço de uma função, e podemos apresentar condições suficientes para que a recorrência por cadeias em βG determine completamente a recorrência por cadeias em $\beta G / \sim_f$.

Capítulo 1

Ações de semigrupos reversíveis

Nosso primeiro objetivo nesta tese é apresentar o conceito de recorrência por cadeias para ações de semigrupos dentro de um aspecto de dinâmica topológica. Temos como base a teoria de sistemas dinâmicos segundo Conley [8], e como motivação o trabalho de Patrão-San Martin [24] sobre semifluxos em espaços topológicos. Abordamos ações de semigrupos reversíveis sobre espaços compactos e introduzimos os conceitos originais da teoria de sistemas dinâmicos. Nossa ênfase é relacionar os conceitos de atratores e recorrência por cadeias.

1.1 Semigrupos de transformações

Um semigrupo S é dito reversível à direita se $Ss \cap St \neq \emptyset$, para quaisquer $s, t \in S$, e S é dito reversível à esquerda se $sS \cap tS \neq \emptyset$, para quaisquer $s, t \in S$. Dizemos que um semigrupo é *reversível* se ele é reversível à direita e à esquerda.

Sejam X um espaço topológico e $C(X)$ o espaço das aplicações contínuas de X. Consideremos um semigrupo reversível S agindo à esquerda sobre X como um subsemigrupo de $C(X)$. Para cada $t \in S$, denotemos por $\alpha_t : X \to X$ a correspondente aplicação contínua. Então, $\alpha(t) = \alpha_t$ define um monomorfismo de semigrupo de S em $C(X)$. A tripla (S, X, α) é denominada de **semigrupo de transformação** (à esquerda). A ação de S é dita *sobrejetiva*, ou que S age sobrejetivamente sobre X, se α_t é sobrejetiva, para todo $t \in S$; a ação é dita *aberta* se α_t é uma aplicação aberta, para todo $t \in S$. Por comodidade, usaremos a notação tx para indicar $\alpha_t(x)$, para todo $t \in S$ e todo $x \in X$. Para imagens inversas, usaremos a notação usual, ou seja, $\alpha_t^{-1}(N)$ $(N \subset X)$. Em geral, o monomorfismo α ficará subentendido, e muitas vezes usaremos a notação (S, X) para indicar o semigrupo de transformação. Se um subespaço $M \subset X$ é invariante pelo semigrupo, então, (S, M) é denominado de sub-semigrupo de transformação. Também usaremos esta nomenclatura para (R, M), onde $R \subset S$ é um subsemigrupo.

Para cada $t \in S$ denotemos o subsemigrupo tSt por S_t.

Lembramos que um conjunto D munido com uma relação $\geq$ é *direto* se (i) $x \geq x$, para todo $x \in D$, (ii) se $x \geq y$ e $y \geq z$, então, $x \geq z$ e (iii) dados quaisquer $x, y \in D$, existe $z \in D$ tal que $z \geq x$ e $z \geq y$.

As propriedades fundamentais que obtemos da reversibilidade de S são as seguintes:

1. Para uma seqüência finita de elementos $t_1, ..., t_n \in S$, a intersecção $S_{t_1} \cap ... \cap S_{t_n}$ é não vazia. Basta mostrar para dois elementos $s, t \in S$. Com efeito, tomando $u \in tS \cap sS$ e $v \in St \cap Ss$, temos que $uv \in S_t \cap S_s$.

2. O semigrupo S é um conjunto direto. Com efeito, dados $s, t \in S$, estabelecemos que $t \geqslant_e s$ quando $t = s$ ou $t \in sS$. Claramente, temos que $t \geqslant_e t$ para todo $t \in S$. Se $u \geqslant_e t$ e $t \geqslant_e s$, então $u = t$ ou $u \in tS$ e $t = s$ ou $t \in sS$, donde $u = s$ ou $u \in sS$. Logo $u \geqslant_e s$. Finalmente, dados $s, t \in S$, existe um elemento $u \in sS \cap tS$, donde $u \geqslant_e s$ e $u \geqslant_e t$. Portanto, $(S, \geqslant_e)$ é um conjunto direto. Similarmente, estabelecendo que $t \geqslant_d s$ quando $t = s$ ou $t \in Ss$, então, $(S, \geqslant_d)$ é um conjunto direto.

Os semigrupos reversíveis formam uma classe ampla na teoria de semigrupos. Qualquer subsemigrupo de um grupo nilpotente é um semigrupo reversível e subsemigrupos maximais de grupos solúveis também são reversíveis (c.f. [19]). Em grupos que não são solúveis também temos exemplos. Com efeito, tomando um número real $b \geq 1$, temos que o subsemigrupo

$$S_b = \left\{g \in \mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})^+ : \det g \geq b\right\}$$

do grupo linear positivo $\mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})^+$ é reversível. No caso especial do grupo $\mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})$, existem muitos subsemigrupos reversíveis, visto que este contém subgrupos solúveis e nilpotentes. Assim, podemos estudar ações deste tipo de semigrupos com generalidade. Por exemplo, ações de semigrupos reversíveis em variedades variedades flag, no fibrados das bases de uma variedade, etc..

Dado um subconjunto $N \subset X$, definimos os conjuntos

$$SN = \{y \in X : \text{existe } x \in N \text{ e } s \in S \text{ com } sx = y\}$$

e

$$S^*N = \{y \in X : \text{existe } x \in N \text{ e } s \in S \text{ com } sy = x\}.$$

Dado $x \in X$, os conjuntos Sx e S^*x são denominados respectivamente de *órbita de x* e de *órbita regressiva de x*. Dizemos que um subconjunto $N \subset X$ é *progressivamente invariante* se $SN \subset N$; que N é *regressivamente invariante* se $S^*N \subset N$; que N é *invariante* se $sN = N$, para todo $s \in S$; e que N é *estável* se é progressiva e regressivamente invariante. Se $R \subset S$ é um subsemigrupo, então, dizemos que um subconjunto de X é R-invariante (resp. progressiva e regressivamente invariante, estável) se é invariante (resp. progressiva e regressivamente invariante, estável) por R.

Observemos que se $N \subset X$ é progressivamente invariante, então, $N \subset S^*N$. Se N também é regressivamente invariante, então, $S^*N = N$. Assim, se a ação é sobrejetiva, dado $x \in N$ e $s \in S$, existe $y \in X$ com $sy = x$. Logo, $y \in S^*N = N$, donde $x \in sN$. Portanto, se a ação é sobrejetiva e N é estável, então, N é invariante.

O seguinte lema é válido em geral para qualquer semigrupo em $C(X)$.

Lema 1.1. *Dados $N \subset X$, temos que $\mathrm{fe}\,(SN)$ é um subconjunto progressivamente invariante. Se a ação de S é aberta, então, $\mathrm{fe}\,((S)^* N)$ é regressivamente invariante.*

Demonstração: A primeira afirmação segue imediatamente por continuidade. Assumindo que a ação de S é aberta, tomemos $x \in \mathrm{fe}\,(S^*N)$ e $y \in S^*x$. Então, existe $s \in S$ tal que $sy = x$. Dada uma vizinhança aberta V de y, temos que sV é uma vizinhança aberta de x. Logo, existe $z \in sV \cap S^*N$, donde $tsv \in N$, para algum $t \in S$ e algum $v \in V$. Assim, $v \in V \cap S^*N$, donde concluímos que $y \in \mathrm{fe}\,(S^*N)$. Portanto, $\mathrm{fe}\,(S^*N)$ é regressivamente invariante. □

1.1.1 Subconjuntos minimais

Uma classe especial de subconjunto progressivamente invariante é definida a seguir. Estes conjuntos são importantes para os estudos sobre estabilidade e transitividade de um semigrupo de transformação.

Definição 1.2. *Um subconjunto $M \subset X$ é dito um **subconjunto minimal** de (S, X) ((S, X)-minimal) se:*

1. *M é fechado, não vazio e progressivamente invariante.*

2. *M é minimal com respeito à propriedade (1).*

*Dizemos que M é um **subconjunto minimal forte** de (S, X) se a condição de invariança progressiva no ítem (1) for substituída por estabilidade.*

Um resultado conhecido diz que um subconjunto $M \subset X$ é minimal se, e somente se, $\mathrm{fe}\,(Sx) = M$, para todo $x \in M$ (ver [13]).

Lema 1.3. *Se $N \subset X$ é um conjunto fechado e estável (resp. progressivamente invariante) e $M \subset N$ é (S, N)-minimal forte (resp. (S, N)-minimal), então, M é (S, X)-minimal forte (resp. (S, X)-minimal).*

Demonstração: É claro que M é não vazio, estável e fechado em X. Seja $F \subset X$ um subconjunto fechado, não vazio e estável tal que $F \subset M$. Então, $F = N \cap F$ é um subconjunto fechado e estável de N. Pela minimalidade de M em (S, N) segue que $F = M$, donde concluímos que M é um subconjunto minimal forte de (S, X). O caso de subconjunto minimal é análogo. $\square$

Notemos que o Lema 1.3 não depende da reversibilidade do semigrupo, ao contrário do próximo resultado sobre subconjuntos minimais fortes.

Lema 1.4. *Se a ação é aberta, então, M é (S, X)-minimal forte se, e somente se, $\mathrm{fe}\,(S^*Sx) = M$, para todo $x \in M$.*

Demonstração: Suponhamos que M é (S, X)-minimal forte e tomemos $x \in M$. Visto que M é estável e fechado, temos que $\mathrm{fe}\,(S^*Sx) \subset M$. Pelo Lema 1.1, temos que $\mathrm{fe}\,(S^*Sx)$ é regressivamente invariante. Agora, dado $t \in S$ e $x \in \mathrm{fe}\,(S^*Sx)$, seja V uma vizinhança aberta de $tx = \alpha_t(x)$. Então, $\alpha_t^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de x, donde existe um ponto $y \in \alpha_t^{-1}(V) \cap S^*Sx$. Logo, $ty \in V$ e $sy \in Sx$, para algum $s \in S$. Tomando $\tau \in Ss \cap St$, temos que $\tau y \in Ssy \cap Sty \subset Sx$, donde $ty \in S^*Sx$. Assim, $ty \in V \cap S^*Sx$, donde concluímos que $tx \in \mathrm{fe}\,(S^*Sx)$. Portanto, $\mathrm{fe}\,(S^*Sx)$ é estável. Segue da minimalidade de M que $\mathrm{fe}\,(S^*Sx) = M$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathrm{fe}\,(S^*Sx) = M$, para todo $x \in M$. Então, M é não vazio, fechado e estável. Seja $N \subset M$ um subconjunto não vazio, fechado e estável. Tomando $y \in N$, temos que $\mathrm{fe}\,(S^*Sy) \subset N$. No entanto, como $y \in M$, temos que $\mathrm{fe}\,(S^*Sy) = M$. Logo, $M \subset N$, donde $N = M$. Portanto, M é (S, X)-minimal forte. $\square$

O Lema 1.4 caracteriza um subconjunto minimal de (S, X) como um conjunto de transitividade aproximada fechado e invariante para a ação de S sobre X (ver Apêndice A). Reciprocamente, se $D \subset X$ é um conjunto de transitividade aproximada fechado e invariante, então, D é (S, X)-minimal. Com efeito, temos que $D = \mathrm{fe}\,(D) = \mathrm{fe}\,(Sx)$, para todo $x \in D$, donde segue a afirmação pelo Lema 1.4. Observemos que o resultado deste lema é válido para qualquer subsemigrupo de transformação de (S, X).

Quando o espaço base X é compacto Hausdorff, então, existem subconjuntos minimal e minimal forte de (S, X) (c.f. [13]). A demonstração utiliza o *Lema de Zorn*. Veja a Proposição 2.4 de [11], substituindo grupo por semigrupo.

Definição 1.5. *Sejam (S, X) e (S', X') semigrupos de transformações. Então, um **homomorfismo de semigrupo de transformação** entre (S, X) e (S', X') consiste de uma aplicação contínua $\varphi : X \to X'$ e de um homomorfismo de semigrupo $f : S \to S'$ tais que $\varphi(tx) = f(t)\,\varphi(x)$, para todo $t \in S$ e $x \in X$.*

Os homomorfismos mais comuns são aqueles onde $S = S'$ e $f : S \to S$ é a aplicação identidade. Neste caso, devido a sobrejetividade de f, a imagem de um subconjunto progressivamente invariante (resp. invariante) é um subconjunto progressivamente invariante (resp. invariante), e a imagem de um subconjunto transitivo é um subconjunto transitivo. Estes assuntos são discutidos no Capítulo 3, onde estudamos casos de homomorfismos relacionados com compactificações de grupos topológicos.

1.2 Objetos dinâmicos elementares

A partir desta seção, consideramos um semigrupo de transformação (S, X) com ação sobrejetiva e X um espaço compacto Hausdorff. Nosso objetivo é introduzir os conceitos dinâmicos (originais da teoria de sistemas dinâmicos) que se relacionam com o conceito de transitividade em geral. Em conseqüência, apresentamos uma ligação entre a teoria dinâmica e a teoria de ações de semigrupos.

Observamos que o conteúdo deste capítulo pode ser adaptado para o contexto de ações de semigrupos lateralmente reversíveis (veja a observação no final da Seção 1.4.4). Contudo, o trabalho é praticamente o mesmo, sendo que a reversibilidade fornece propriedades mais adequadas, principalmente para o estudo de estabilidade para ações de grupos, o qual também apresentamos neste capítulo.

Assim, utilizamos a reversibilidade de S para introduzir os objetos dinâmicos elementares ao semigrupo de transformação.

Dado um subconjunto não vazio $N \subset X$, definimos os conjuntos

$$\omega_{\mathrm{e}}(N) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,(tSN) \quad \text{e} \quad \omega_{\mathrm{e}}^{*}(N) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,((tS)^{*} N)$$

denominados respectivamente de **conjunto ω-limite à esquerda** e **conjunto ω^*-limite à esquerda** de N;

$$\omega_{\mathrm{d}}(N) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,(StN) \quad \text{e} \quad \omega_{\mathrm{d}}^{*}(N) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,((St)^{*} N)$$

denominados respectivamente de **conjunto ω-limite à direita** e **conjunto ω^*-limite à direita** de N; e

$$\omega(N) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,(S_t N) \quad \text{e} \quad \omega^{*}(N) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,(S_t^{*} N)$$

denominados respectivamente de **conjunto ω-limite** e **conjunto ω^*-limite** de N.

A ação sobrejetiva garante que os conjuntos $S_t^* N$ são não vazios. Notemos também que $\omega(N) \subset \omega_{\mathrm{e}}(N) \cap \omega_{\mathrm{d}}(N)$ e $\omega^*(N) \subset \omega_{\mathrm{e}}^*(N) \cap \omega_{\mathrm{d}}^*(N)$. No caso específico do semigrupo

S ser *cêntrico* ($tS = St$, para todo $t \in S$), os conjuntos $\omega_{\mathrm{e}}(N)$, $\omega_{\mathrm{d}}(N)$ e $\omega(N)$ coincidem, assim também ocorrendo com os conjuntos $\omega^*_{\mathrm{e}}(N)$, $\omega^*_{\mathrm{d}}(N)$ e $\omega^*(N)$.

O conjunto das vizinhanças de um ponto no espaço X é um conjunto direto quando este é munido com a ordem parcial dada pela inclusão inversa entre as vizinhanças. Dadas duas vizinhanças U e V de um ponto $x \in X$, escrevemos $U \succeq V$ quando $U \subset V$.

Proposição 1.6. *Se $N \subset X$ é não vazio, então*

1. *os conjuntos $\omega(N)$, $\omega_{\mathrm{e}}(N)$ e $\omega_{\mathrm{d}}(N)$ são não vazios e compactos, onde $\omega(N)$ e $\omega_{\mathrm{e}}(N)$ são invariantes e $\omega_{\mathrm{d}}(N)$ é progressivamente invariante;*

2. *os conjuntos $\omega^*(N)$, $\omega^*_{\mathrm{e}}(N)$ e $\omega^*_{\mathrm{d}}(N)$ são não vazios e compactos, onde $\omega^*(N)$ e $\omega^*_{\mathrm{d}}(N)$ são progressivamente invariantes;*

3. *sobre ação aberta, $\omega^*_{\mathrm{e}}(N)$ é regressivamente invariante e $\omega^*(N)$ e $\omega^*_{\mathrm{d}}(N)$ são estáveis.*

Demonstração: A compacidade dos conjuntos mencionados segue pelo fato deles serem fechados. Além disso, a reversibilidade de S garante que as famílias de subconjuntos fechados de X

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{fe}(S_t N) : t \in S\} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^* = \{\mathrm{fe}((S_t)^* N) : t \in S\}$$

têm a propriedade de intersecção finita. Como X é compacto Hausdorff, isto implica que $\omega(N) = \bigcap_{t\in S} \mathrm{fe}(S_t N)$ e $\omega^*(N) = \bigcap_{t\in S} \mathrm{fe}((S_t)^* N)$ são não vazios. Conseqüentemente, os conjuntos $\omega_{\mathrm{e}}(N)$ e $\omega_{\mathrm{d}}(N)$ assim como os conjuntos $\omega^*_{\mathrm{e}}(N)$ e $\omega^*_{\mathrm{d}}(N)$ são não vazios. Por continuidade segue imediatamente que $\omega_{\mathrm{d}}(N)$ é progressivamente invariante. Agora, sejam $s, t \in S$, $x \in \omega_{\mathrm{e}}(N)$ e $y \in \omega(N)$. Então, existe $s' \in S$ tal que $ss' \in tS$. Como $x \in \mathrm{fe}(s'SN)$ e $y \in \mathrm{fe}(S_{s't}N)$, segue por continuidade que $sx \in \mathrm{fe}(ss'SN) \subset \mathrm{fe}(tSN)$ e que $sy \in \mathrm{fe}(ss'tSs'tN) \subset \mathrm{fe}(S_t N)$. Como s e t são arbitrários em S, temos que $\omega_{\mathrm{e}}(N)$ e $\omega(N)$ são progressivamente invariantes. Para mostrar a invariança de $\omega_{\mathrm{e}}(N)$, sejam $x \in \omega_{\mathrm{e}}(N)$ e $t \in S$. Consideremos o conjunto $\mathcal{V}_x$ de todas as vizinhanças de x munido com a relação de ordem parcial dada no último parágrafo acima. Para cada $s \in S$ e $V \in \mathcal{V}_x$, tomemos $tx^s_V \in tsSN \cap V$, onde $x^s_V \in sSN$. Podemos munir $\mathcal{V}_x \times S^{\mathcal{V}_x}$ com uma relação que o torna um conjunto direto. De fato, dadas $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in S^{\mathcal{V}_x}$, então, $\mathrm{f}_1 \geqslant \mathrm{f}_2$ se, e somente se, $\mathrm{f}_1(V) \in \mathrm{f}_2(V) S$, para toda $V \in \mathcal{V}_x$. Assim, dados $(V_1, \mathrm{f}_1), (V_2, \mathrm{f}_2) \in \mathcal{V}_x \times S^{\mathcal{V}_x}$, então, $(V_1, \mathrm{f}_1) \geqslant (V_2, \mathrm{f}_2)$ se, e somente se, $V_1 \succeq V_2$ e $\mathrm{f}_1 \geqslant \mathrm{f}_2$. Logo, podemos considerar a rede $\left(x_{(V,\mathrm{f})}\right)_{(V,\mathrm{f}) \in \mathcal{V}_x \times S^{\mathcal{V}_x}}$ em X, onde $x_{(V,\mathrm{f})} = x^{\mathrm{f}(V)}_V$. Como X é compacto Hausdorff, $\left(x_{(V,\mathrm{f})}\right)$ possui uma subrede covergente em X. Seja então $\left(x_{(V_i,\mathrm{f}_i)}\right)_{i \in I}$ tal subrede, com limite $y \in X$. Vamos mostrar que $y \in \omega_{\mathrm{e}}(N)$. Com efeito, dada uma vizinhança U de

y, existe um índice $i_0 \in I$ tal que, para todo $i \geq i_0$, $x_{(V_i,\mathrm{f}_i)} \in \dot{U}$. Dado $s \in S$ arbitrário, tomemos $\mathrm{f}_s \in S^{\mathcal{V}_x}$ tal que $\mathrm{f}_s(V) \in sS \cap \mathrm{f}_0(V)S$, para todo $V \in \mathcal{V}_x$. Então, $\mathrm{f}_s \geqslant \mathrm{f}_0$. Das propriedades de uma subrede segue que existe $j \geq i_0$ tal que $(V_j, \mathrm{f}_j) \geqslant (V_{i_0}, \mathrm{f}_s)$. Logo, $x_{(V_j,\mathrm{f}_j)} \in U$ e $\mathrm{f}_j(V_j) \in sS$, donde $x_{(V_j,\mathrm{f}_j)} \in U \cap \mathrm{f}_j(V_j)SN \subset U \cap sSN$. Portanto, $y \in \omega_{\mathrm{e}}(N)$. Por outro lado, a rede $\left(tx_{(V_i,\mathrm{f}_i)}\right)_{i\in I}$ converge para ty. Dada uma vizinhança qualquer V de x, existe um índice $i_0 \in I$ tal que $V_{i_0} \succeq V$. Desta forma, para todo $i \geq i_0$, temos que $tx_{(V_i,\mathrm{f}_i)} \in t\mathrm{f}_i(V_i)SN \cap V_i \subset V$. Logo, $x = ty$ e, portanto, $x \in t\omega_{\mathrm{e}}(N)$. Assim, $\omega_{\mathrm{e}}(N) \subset t\omega_{\mathrm{e}}(N)$, donde concluímos que $\omega_{\mathrm{e}}(N)$ é invariante. A demonstração para o caso de $\omega(N)$ segue da mesma forma. Agora, tomemos $s, t \in S$, $x \in \omega_{\mathrm{d}}^*(N)$ e $y \in \omega^*(N)$. Então, $y \in \mathrm{fe}((S_{ts})^* N)$. Mas, se $z \in (S_{ts})^* N$, existe $s_0 \in S$ tal que $ts_0tsz \in N$. Logo, $sz \in (S_t)^* N$ e, portanto, $s(S_{ts})^* N \subset (S_t)^* N$. Assim, temos que $sy \in \mathrm{fe}(s(S_{ts})^* N) \subset \mathrm{fe}((S_t)^* N)$, donde concluímos que $\omega^*(N)$ é progressivamente invariante. Semelhantemente, temos que $s(Sts)^* N \subset (St)^* N$, donde segue que $\omega_{\mathrm{d}}^*(N)$ também é progressivamente invariante. Por fim, assumimos que a ação de S é aberta. Vamos mostrar que $\omega_{\mathrm{e}}^*(N)$, $\omega_{\mathrm{d}}^*(N)$ e $\omega^*(N)$ são regressivamente invariantes. Sejam $x \in \omega^*(N)$ e $y \in S^*x$. Então, existem $s \in S$ tal que $sy = x$. Se V é uma vizinhança aberta de y, então, sV é uma vizinhança aberta de x. Logo, $sV \cap (S_t)^* N \neq \emptyset$, para todo $t \in S$. Dado $t \in S$ arbitrário, tomemos $\tau \in Sts \cap St$. Então, $\tau = s_1ts = s_2t$, com $s_1, s_2 \in S$. Agora, existe $sv \in sV \cap (S_{ts_1t})^* N$, com $v \in V$, donde $ts_1ts'ts_1tsv \in N$, ou seja, $ts_1ts'ts_2tv \in N$, para algum $s' \in S$. Logo, $v \in V \cap (S_t)^* N$, donde concluímos que $y \in \mathrm{fe}((S_t)^* N)$. Portanto, $y \in \omega^*(N)$. Assim, $\omega^*(N)$ é regressivamente invariante, donde $\omega^*(N)$ é estável. Agora, sejam $x \in \omega_{\mathrm{d}}^*(N)$ e $y \in S^*x$. Então, existe $s \in S$ tal que $sy = x$. Seja V uma vizinhança aberta de y. Dado $t \in S$, tomemos $s' \in S$ tal que $s's \in St$. Como sV é uma vizinhança de x, temos que $sV \cap (Ss')^* N \neq \emptyset$, donde $Ss'sV \cap N \neq \emptyset$ e, portanto, $V \cap (St)^* N \neq \emptyset$. Assim, $y \in \mathrm{fe}((St)^* N)$, donde concluímos que $y \in \omega_{\mathrm{d}}^*(N)$. Logo, $\omega_{\mathrm{d}}^*(N)$ é regressivamente invariante, donde $\omega_{\mathrm{d}}^*(N)$ é estável. Finalmente, tomemos $x \in \omega_{\mathrm{e}}^*(N)$ e $y \in X$ tal que $sy = x$, para algum $s \in S$. Seja V uma vizinhança aberta de y. Então, $sV \cap (tS)^* N \neq \emptyset$, para todo $t \in S$, donde $tSsV \cap N \neq \emptyset$. Logo, $V \cap (tS)^* N \neq \emptyset$, para todo $t \in S$. Portanto, $y \in \omega_{\mathrm{e}}^*(N)$, donde $\omega_{\mathrm{e}}^*(N)$ é regressivamente invariante. □

Corolário 1.7. *Seja $x \in X$. Se $x \in \omega(x)$ ($x \in \omega_{\mathrm{e}}(x)$, $x \in \omega_{\mathrm{d}}(x)$), então, $\omega(x) = \mathrm{fe}(S_tx)$ ($\omega_{\mathrm{e}}(x) = \mathrm{fe}(tSx)$, $\omega_{\mathrm{d}}(x) = \mathrm{fe}(Stx)$), para todo $t \in S$. Se a ação de S é aberta e $x \in \omega^*(x)$ ($x \in \omega_{\mathrm{e}}^*(x)$, $x \in \omega_{\mathrm{d}}^*(x)$), então, $\omega^*(x) = \mathrm{fe}(S_t^*x)$ ($\omega_{\mathrm{e}}^*(x) = \mathrm{fe}((tS)^* x)$, $\omega_{\mathrm{d}}^*(x) = \mathrm{fe}((St)^* x)$), para todo $t \in S$.*

Demonstração: Se $x \in \omega(x)$, temos que $\mathrm{fe}(Sx) \subset \omega(x) \subset \mathrm{fe}(S_tx)$, para todo $t \in S$. Logo, $\omega(x) = \mathrm{fe}(S_tx)$, para todo $t \in S$. Se a ação de S é aberta e $x \in \omega^*(x)$, então,

$\mathrm{fe}(S^*x) \subset \omega^*(x) \subset \mathrm{fe}((S_t)^* x)$, para todo $t \in S$. Logo, $\omega^*(x) = \mathrm{fe}((S_t)^* x)$, para todo $t \in S$. A demonstração para os outros casos são idênticas. $\square$

Em geral, para $N \subset X$, temos que $\omega(N) = \omega(\mathrm{fe}(N))$, $\omega_{\mathrm{e}}(N) = \omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(N))$ e $\omega_{\mathrm{d}}(N) = \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(N))$. Se a ação é aberta, então, $\omega^*(N) = \omega^*(\mathrm{fe}(N))$, $\omega^*_{\mathrm{e}}(N) = \omega^*_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(N))$ e $\omega^*_{\mathrm{d}}(N) = \omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(N))$. Além disso, vale o seguinte.

Lema 1.8. *Dado um subconjunto não vazio $N \subset X$, seguem as afirmações:*

1. $\omega_{\mathrm{e}}(N) = \omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(SN))$. *Se N é progressivamente invariante, então,* $\omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(N)) = \omega(\mathrm{fe}(N))$.

2. *Se a ação é aberta, então,* $\omega^*_{\mathrm{d}}(N) = \omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(S^*N))$. *Se N é regressivamente invariante, então,* $\omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(N)) = \omega^*(\mathrm{fe}(N))$.

Demonstração: Sejam $x \in \omega_{\mathrm{e}}(N)$ e $t, s \in S$. Dada uma vizinhança V de x, temos que $V \cap tsSN \neq \emptyset$, donde $V \cap tS\mathrm{fe}(SN) \neq \emptyset$. Logo, $x \in \omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(SN))$ e, portanto, $\omega_{\mathrm{e}}(N) \subset \omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(SN))$. Por outro lado, segue por continuidade que $tS\mathrm{fe}(SN) \subset \mathrm{fe}(tSN)$, para todo $t \in S$. Logo, $\omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(SN)) \subset \omega_{\mathrm{e}}(N)$ e, portanto, $\omega_{\mathrm{e}}(N) = \omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(SN))$. Agora, assumindo que N é progressivamente invariante, sejam $x \in \omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(N))$ e $t \in S$. Tomando $s \in S_t$, temos que $x \in \mathrm{fe}(sS\mathrm{fe}(N))$, donde segue por continuidade e pela invariança progressiva de N que $x \in \mathrm{fe}(s\mathrm{fe}(N)) \subset \mathrm{fe}(S_t\mathrm{fe}(N))$. Logo, $\omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(N)) \subset \omega(\mathrm{fe}(N))$ e, portanto, $\omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{fe}(N)) = \omega(\mathrm{fe}(N))$. Assim, demonstramos o ítem (1). Para verificarmos o ítem (2), assumimos que a ação é aberta. Sejam $x \in \omega^*_{\mathrm{d}}(N)$ e $t, s \in S$. Dada uma vizinhança V de x, temos que $V \cap (Sst)^* N \neq \emptyset$, donde $V \cap (St)^* \mathrm{fe}(S^*N) \neq \emptyset$. Logo, $x \in \omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(S^*N))$ e, portanto, $\omega^*_{\mathrm{d}}(N) \subset \omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(S^*N))$. Por outro lado, sejam $y \in \omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(S^*N))$ e $t, s \in S$. Dada uma vizinhança U de y, temos que $U \cap (St)^* \mathrm{fe}(S^*N) \neq \emptyset$, donde $StU \cap \mathrm{fe}(S^*N) \neq \emptyset$. Como StU é aberto, temos que $StU \cap S^*N \neq \emptyset$, donde $U \cap (St)^* N \neq \emptyset$. Logo, $y \in \omega^*_{\mathrm{d}}(N)$, donde segue que $\omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(S^*N)) \subset \omega^*_{\mathrm{d}}(N)$. Portanto, $\omega^*_{\mathrm{d}}(N) = \omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(S^*N))$. Agora, assumimos que N é regressivamente invariante. A ação aberta implica que $\mathrm{fe}(N)$ é também regressivamente invariante. Assim, dados $x \in \omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(N))$ e $t \in S$, seja V uma vizinhança de x e tomemos $s \in S_t$. Como $x \in \mathrm{fe}((Ss)^* \mathrm{fe}(N))$, temos que $SsV \cap \mathrm{fe}(N) \neq \emptyset$, donde $sV \cap \mathrm{fe}(N) \neq \emptyset$, pois $\mathrm{fe}(N)$ é regressivamente invariante. Logo, $V \cap (S_t)^* \mathrm{fe}(N) \neq \emptyset$, donde concluímos que $x \in \mathrm{fe}((S_t)^* \mathrm{fe}(N))$. Assim, $\omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(N)) \subset \omega^*(\mathrm{fe}(N))$ e, portanto, $\omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(N)) = \omega^*(\mathrm{fe}(N))$, donde concluímos a demonstração do lema. $\square$

Se $N \subset X$ é um subconjunto progressivamente invariante e $T \subset S$ é um subsemigrupo, temos que $TN \subset N \subset T^*N$. Se N é estável, então, $T^*N \subset N = TN$, donde $TN = N = T^*N$. Isto demonstra o seguinte lema.

Lema 1.9. *Se $N \subset X$ é um subconjunto não vazio, fechado e estável, então, N coincide com os seus conjuntos limites.*

Em certo sentido, tendo em consideração o próximo resultado, os conjuntos $\omega(x)$ e $\omega^*(x)$ representam os "fins" da órbita de x e da órbita regressiva de x, respectivamente.

Lema 1.10. *Dado $x \in X$, temos as seguintes afirmações:*

1. $\omega_{\mathrm{e}}(y) \subset \omega_{\mathrm{e}}(x)$, $\omega_{\mathrm{d}}(y) = \omega_{\mathrm{d}}(x)$ *e* $\omega(y) = \omega(x)$, *para todo* $y \in Sx$.

2. $\omega^*_{\mathrm{e}}(y) \subset \omega^*_{\mathrm{e}}(x)$, $\omega^*_{\mathrm{d}}(y) \subset \omega^*_{\mathrm{d}}(x)$ *e* $\omega^*(y) \subset \omega^*(x)$, *para todo* $y \in S^*x$.

Demonstração: Sejam $y \in X$ e $s \in S$ tais que $y = sx$. Dado $t \in S$, temos que $\mathrm{fe}(tSy) \subset \mathrm{fe}(tSx)$. Logo, $\omega_{\mathrm{e}}(y) \subset \omega_{\mathrm{e}}(x)$. Além disso, existe $s' \in S$ tal que $s's \in St$. Então, $\mathrm{fe}(Stsx) = \mathrm{fe}(Sty)$ e $\mathrm{fe}(Ss'y) \subset \mathrm{fe}(Stx)$. Logo, $\omega_{\mathrm{d}}(y) = \omega_{\mathrm{d}}(x)$. Agora, $\mathrm{fe}(S_{ts}x) \subset \mathrm{fe}(S_t y)$ e $\mathrm{fe}(S_{ts'}y) \subset \mathrm{fe}(S_t x)$. Logo, $\omega(y) = \omega(x)$, donde concluímos (1). Para verificarmos (2), tomemos $y \in X$ e $s, t \in S$. Como é imediato que $(St)^* y \subset (St)^* sy$, temos que $\omega^*_{\mathrm{d}}(y) \subset \omega^*_{\mathrm{d}}(sy)$. Agora, existe $s' \in S$ tal que $ss' \in tS$. Se $z \in (S_{s't})^* y$, então, $s't'tz = y$, com $t' \in S$. Logo, $ss't'tz = sy$, donde $z \in (S_t)^* sy$. Portanto, $(S_{s't})^* y \subset (S_t)^* sy$. Assim, $\omega^*(y) \subset \mathrm{fe}((S_t)^* sy)$, com $t \in S$ arbitrário, concluindo que $\omega^*(y) \subset \omega^*(sy)$. Enfim, como $(s'S)^* y \subset (tS)^* sy$, temos que $\omega^*_{\mathrm{e}}(y) \subset \omega^*_{\mathrm{e}}(sy)$. Assim, se $y \in S^*x$, então, $x \in Sy$, donde concluímos (2). □

Visto que X é compacto Hausdorff, existe um subconjunto minimal e um subconjunto minimal forte de (S, X). Tais conjuntos estão particularmente relacionados com conjuntos limites. Em geral, dado $x \in X$, o conjunto $\omega(x)$ não é um subconjunto minimal do semigrupo de transformação. Com efeito, se $x \notin \omega_{\mathrm{d}}(x) \cup \omega_{\mathrm{e}}(x)$, então, $\omega(x)$ não é um subconjunto minimal de (S, X). No entanto, a recíproca é sempre verdadeira.

Proposição 1.11. *Um subconjunto não vazio $M \subset X$ é (S, X)-minimal se, e somente se, $M = \omega(x) = \omega_{\mathrm{e}}(x) = \omega_{\mathrm{d}}(x)$, para todo $x \in M$. Se a ação de S é aberta, então, M é (S, X)-minimal forte se, e somente se, $M = \omega^*(x) = \omega^*_{\mathrm{d}}(x)$, para todo $x \in M$.*

Demonstração: Suponhamos que M é (S, X)-minimal. Dado $x \in M$, temos que $\omega(x) \subset M$. Pela Proposição 1.6, temos que $\omega(x)$ é não vazio, compacto e invariante, donde segue que $\omega(x) = M$. Analogamente, $\omega_{\mathrm{e}}(x) = \omega_{\mathrm{d}}(x) = M$. Por outro lado, suponhamos que $\omega(x) = M$, para todo $x \in M$. Então, M é compacto e progressivamente invariante. Seja $N \subset M$ um subconjunto não vazio, compacto e progressivamente invariante. Então, dado $x \in N$, temos que $\omega(x) \subset N$. Mas, como $x \in M$, então, $M = \omega(x) \subset N$, donde $N = M$. Portanto, M é (S, X)-minimal. Assumindo que ação de S é aberta, a segunda parte da proposição segue semelhantemente, usando também a Proposição 1.6. □

Os conjuntos limites são os objetos dinâmicos fundamentais para o estudo de estabilidade de um semigrupo de transformação. Este é o motivo de nossa ênfase referente as suas propriedades. Como na teoria de semifluxos, definimos os conceitos de atrator e repulsor a partir dos conjuntos limites. Estes últimos então se relacionam diretamente com o conceito de recorrência por cadeias. Tal relação é a nossa principal meta neste trabalho.

Definição 1.12. *Um subconjunto $A \subset X$ é um* ***atrator à esquerda (à direita)*** *de (S, X) se existe uma vizinhança V de A em X tal que $\omega_{\mathrm{e}}(V) = A$ ($\omega_{\mathrm{d}}(V) = A$). Neste caso, V é denominada uma* ***vizinhança atratora*** *de A, e $\omega(V)$ é denominado um* ***sub-atrator*** *de A. Um subconjunto $R \subset X$ é um* ***repulsor à esquerda (à direita)*** *de (S, X) se existe uma vizinhança U de R em X tal que $\omega_{\mathrm{e}}^{*}(U) = R$ ($\omega_{\mathrm{d}}^{*}(U) = R$). Neste caso, U é denominada uma* ***vizinhança repulsora*** *de R, e $\omega^{*}(N)$ é denominado um* ***sub-repulsor*** *de R.*

Observemos que a Definição 1.12 não exige que atratores e repulsores sejam não vazios. Assim, o conjunto vazio e o espaço base X são ambos casos triviais tanto de um atrator como de um repulsor. Outra observação é que um atrator pode ter mais de uma vizinhança atratora assim como um repulsor pode ter mais de uma vizinhança repulsora. No entanto, veremos adiante que eles admitem apenas um sub-atrator e um sub-repulsor respectivamente.

Atratores e repulsores são conceitos clássicos dentro da teoria de sistemas dinâmicos em geral. Sua importância, como observamos acima, compreende os estudos sobre recorrência por cadeias, sendo esta nossa motivação para sua introdução ao contexto de ações de semigrupos. Um fato importante é a relação existente entre os dois conceitos. Nas teorias de sistemas dinâmicos e semifluxos, atratores e repulsores são relacionados pelo conceito de repulsor complementar para atratores, onde é dada uma correspondência entre eles. Podemos também apresentar uma tal relação em nosso contexto. Para ações à esquerda, relacionamos atratores à direita com repulsores à direita. Para ações á direita, relacionamos atratores à esquerda com repulsores à esquerda. O trabalho é análogo em ambos os casos.

Para apresentarmos uma correspondência entre atratores e repulsores definimos os seguintes conceitos. Se $M \subset X$ é compacto e progressivamente invariante, então, denominamos de *conjunto de atração à esquerda* de M o subconjunto de X definido por

$$\mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(M) = \{y \in X : \omega_{\mathrm{e}}(y) \cap M \neq \emptyset\};$$

e de *conjunto de atração à direita* de M o subconjunto de X definido por

$$\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(M) = \{y \in X : \omega_{\mathrm{d}}(y) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Se $N \subset X$ é compacto e regressivamente invariante, então, denominamos de *conjunto de repulsão à esquerda* de N o subconjunto de X dado por

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(N) = \{y \in X : \omega_{\mathrm{e}}^{*}(y) \cap N \neq \emptyset\};$$

e de *conjunto de repulsão à direita* de N o subconjunto de X dado por

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(N) = \{y \in X : \omega_{\mathrm{d}}^{*}(y) \cap N \neq \emptyset\}.$$

Podemos ver imediatamente que $M \subset \mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(M) \cap \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(M)$ e que $N \subset \mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(N) \cap \mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(N)$. Além disso, pelo Lema 1.10, temos que $\mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(N)$ e $\mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(N)$ são progressivamente invariantes, que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(M)$ é regressivamente invariante e que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(M)$ é estável. Com isso, $X \setminus \mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(N)$ e $X \setminus \mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(N)$ são regressivamente invariantes, $X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(M)$ é progressivamente invariante e $X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(M)$ é estável.

Proposição 1.13. *Sejam A um atrator (à esquerda ou à direita) de (S, X, α) e V uma vizinhança atratora de A. Então,* $\mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(A) = \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A) = \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$, *onde*

$$\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V)) = \{x \in X : \omega(x) \subset \omega(V)\}$$

é um conjunto aberto e estável. Sejam R um repulsor (à esquerda ou à direita) de (S, X, α) e U uma vizinhança repulsora de R. Se a ação é aberta, então, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(R)$ *e* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(R)$ *são conjuntos abertos e progressivamente invariantes,* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(R) = \mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(\omega^{*}(U))$ *e* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(R) = \mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(\omega^{*}(U))$.

Demonstração: É imediato que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(\omega(V)) \subset \mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(A)$. Por outro lado, dado $x \in \mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(A)$, temos que $\omega_{\mathrm{e}}(x) \cap A \neq \emptyset$. Tomando $y \in \omega_{\mathrm{e}}(x) \cap A$, segue da invariança progressiva e compacidade de $\omega_{\mathrm{e}}(x)$ que $\omega(y) \subset \omega_{\mathrm{e}}(x) \cap \omega(V)$. Logo, $x \in \mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(\omega(V))$ e, portanto, $\mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(A) = \mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(\omega(V))$. Analogamente, mostramos que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A) = \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$. Agora, é claro que $\{x \in X : \omega(x) \subset \omega(V)\} \subset \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$. Por outro lado, se $x \in \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$, então, existe $s \in S$ tal que $sx \in \mathrm{int}(V)$, pois $\mathrm{fe}(Sx) \cap \mathrm{int}(V) \neq \emptyset$. Segue do Lema 1.10 que $\omega(x) = \omega(sx) \subset \omega(V)$. Portanto, $\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V)) \subset \{x \in X : \omega(x) \subset \omega(V)\}$, donde segue a igualdade entre esses dois conjuntos. No entanto, o mesmo argumento mostra também que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(\omega(V)) = \{x \in X : \omega(x) \subset \omega(V)\}$. Logo, $\mathrm{Atr}_{\mathrm{e}}(A) = \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A) = \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$. O Lema 1.10 agora se aplica para concluirmos que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$ é estável. Para vermos que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$ é aberto, tomemos $x \in \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$. Seja $s \in S$ tal que $sx \in \mathrm{int}(V)$. Então, $\alpha_s^{-1}(\mathrm{int}(V))$ é uma vizinhança aberta de x. Se $y \in \alpha_s^{-1}(\mathrm{int}(V))$, então, $sy \in \mathrm{int}(V)$, donde $\omega(y) = \omega(sy) \subset \omega(V)$. Portanto, $\alpha_s^{-1}(\mathrm{int}(V)) \subset \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$, donde concluímos que $\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$ é aberto. Agora, assumimos que a ação é aberta. Com a invariança regressiva dos conjuntos ω^{*}-limites (à esquerda e à direita), mostramos semelhantemente como no caso do atrator que $\mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(R) = \mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(\omega^{*}(U))$ e $\mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(R) =$

$\mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(\omega^*(U))$. Além disso, se $x \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(\omega^*(U))$, temos que $\mathrm{fe}(S^*x) \cap \mathrm{int}(U) \neq \emptyset$, donde $x \in \mathrm{int}(sU)$, para algum $s \in S$. Se $z \in \mathrm{int}(sU)$, então, existe $u \in U \cap S^*z$. Pelo Lema 1.10, temos que $\omega^*(u) \subset \omega^*(z)$. Além disso, $\omega^*(u) \subset \omega^*(U)$. Logo, $\omega^*(z) \cap \omega^*(U) \neq \emptyset$ e, portanto, $z \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(\omega^*(U))$. Assim, $\mathrm{int}(sU)$ é uma vizinhança aberta de x contida em $\mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(\omega^*(U))$. Portanto, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(R)$ é aberto. Semelhantemente, mostramos que $\mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(R)$ é aberto. □

Se A é um atrator à direita de (S,X), aplicando semelhantemente o Lema 1.10 podemos também verificar que

$$\mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A) = \{x \in X : \omega_{\mathrm{d}}(x) \subset A\}.$$

O seguinte resultado é imediato a partir da última proposição anterior.

Corolário 1.14. *Se $A \subset X$ é um atrator (à esquerda ou à direita) de (S,X), então, $X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A)$ é um conjunto compacto e estável. Se $R \subset X$ é um repulsor (à esquerda ou à direita) e a ação é aberta, então, $X \setminus \mathrm{Rep}_{\mathrm{e}}(R)$ e $X \setminus \mathrm{Rep}_{\mathrm{d}}(R)$ são conjuntos compactos e regressivamente invariantes.*

Proposição 1.15. *Sejam A um atrator (à esquerda ou à direita) de (S,X) e V uma vizinhança atratora de A. Se $x \notin \omega(V) \cup (X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V)))$, então, $\omega^*(x) \subset X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$ e $\omega(x) \subset \omega(V)$.*

Demonstração: Como $x \notin X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$, então, $x \in \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$, donde $\omega(x) \subset \omega(V)$. Agora, suponhamos por absurdo que existe $y \in \omega^*(x)$ tal que $y \notin X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$. Então, $\omega(y) \subset \omega(V)$. Visto que $\omega^*(x)$ é progressivamente invariante, temos que $\omega(y) \subset \omega^*(x)$, donde $\omega(V) \cap \omega^*(x) \neq \emptyset$. Então, $(S_t)^* x \cap \mathrm{int}(V) \neq \emptyset$, para todo $t \in S$. Logo, $x \in S_t V$, para todo $t \in S$, donde $x \in \omega(V)$, contradizendo a hipótese do enunciado. Portanto, $\omega^*(x) \subset X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(\omega(V))$. □

Especialmente para um atrator à direita, vale também a seguinte versão da Proposição 1.15.

Proposição 1.16. *Sejam A um atrator à direita de (S,X) e $x \notin A \cup (X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A))$, então, $\omega_{\mathrm{d}}^*(x) \subset X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A)$ e $\omega_{\mathrm{d}}(x) \subset A$.*

Demonstração: Como $x \notin X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A)$, então, $\omega_{\mathrm{d}}(x) \subset A$. Agora, suponhamos por absurdo que existe $y \in \omega_{\mathrm{d}}^*(x)$ tal que $y \notin X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A)$. Então, $\omega_{\mathrm{d}}(y) \subset A$. Visto que $\omega_{\mathrm{d}}^*(x)$ é progressivamente invariante, temos que $\omega_{\mathrm{d}}(y) \subset \omega_{\mathrm{d}}^*(x)$, donde $A \cap \omega_{\mathrm{d}}^*(x) \neq \emptyset$. Isto implica que $x \in StV$, para todo $t \in S$, donde $x \in \omega_{\mathrm{d}}(V) = A$, contradizendo a hipótese do enunciado. Portanto, $\omega_{\mathrm{d}}^*(x) \subset X \setminus \mathrm{Atr}_{\mathrm{d}}(A)$. □

Para cada atrator (à esquerda ou à direita) A de (S, X), denotaremos

$$A^* = X \setminus \mathrm{Atr_d}(A).$$

Em geral, temos que $X \setminus \mathrm{Rep_d}(A^*) \subset A$ e $X \setminus \mathrm{Rep_e}(A^*) \subset A$, para todo atrator A de (S, X). Com efeito, se $x \in X \setminus \mathrm{Rep_e}(A^*)$, então, $\omega_{\mathrm{e}}^*(x) \cap A^* = \emptyset$. Visto que A^* é estável, isto significa que $x \notin A^*$. Se também $x \notin A$, então, $x \notin \omega(V)$, onde V é uma vizinhança atratora de A. Desde que $\mathrm{Atr_d}(A) = \mathrm{Atr_d}(\omega(V))$, segue da Proposição 1.15 que $\omega_{\mathrm{e}}^*(x) \cap A^* \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Logo, $x \in A$ e, portanto, $X \setminus \mathrm{Rep}(A^*) \subset A$. A prova da inclusão $X \setminus \mathrm{Rep_d}(A^*) \subset A$ é idêntica.

Proposição 1.17. *Se A é um atrator, então, $X \setminus \mathrm{Rep_e}(A^*) = A$ ($X \setminus \mathrm{Rep_d}(A^*) = A$) se, e somente se, A é estável.*

Demonstração: Suponhamos que A não seja estável, isto é, que A não seja regressivamente invariante. Então, existe $y \in X \setminus A$ e $s \in S$ tal que $sy \in A$. Então, $sy \notin A^*$, donde $y \notin A^*$, pois A^* é estável. Segue da Proposição 1.15 que $\omega^*(y) \subset A^*$. Agora, pelo Lema 1.10, temos que $\omega^*(y) \subset \omega^*(sy)$. Logo, $\omega^*(sy) \cap A^* \neq \emptyset$, donde $sy \in A \setminus (X \setminus \mathrm{Rep}(A^*))$. Assim, se $X \setminus \mathrm{Rep}(A^*) = A$, então, A deve ser estável. Reciprocamente, suponhamos que A é estável e tomemos $x \in A$. Então, $\omega_{\mathrm{e}}^*(x) \subset A$. Logo, $\omega_{\mathrm{e}}^*(x) \cap A^* = \emptyset$, ou seja, $x \in X \setminus \mathrm{Rep}(A^*)$. Assim, $A \subset X \setminus \mathrm{Rep}(A^*)$. Visto que a inclusão contrária é válida em geral, temos que $X \setminus \mathrm{Rep}(A^*) = A$. □

Definição 1.18. *Um subconjunto fechado e progressivamente invariante $N \subset X$ é um* conjunto invariante isolado *se existe uma vizinhança V de N tal que, se $S^*Sx \subset V$, com $x \in V$, então, $x \in N$. Neste caso, a vizinhança V é chamada de* vizinhança isolante *de N.*

Proposição 1.19. *Um atrator (à esquerda ou à direita) e um repulsor à direita de (S, X) são conjuntos invariantes isolados.*

Demonstração: Seja A um atrator à esquerda de (S, X) com vizinhança atratora V. Se $x \in X$ e $S^*x \subset V$, segue do fato da ação ser sobrejetiva que $x \in S_tV$, para todo $t \in S$. Logo, $x \in \omega(V) \subset A$. Assim, se $x \in V$ é tal que $S^*Sx \subset V$, então, $S^*x \subset V$, donde $x \in A$. Visto que A é progressivamente invariante, temos que A é um conjunto invariante isolado. Para o caso do repulsor à direita R de (S, X), a demonstração é semelhante, tomando uma vizinhança repulsora U de R e usando o fato de que $Sx \subset S^*Sx$, para todo $x \in X$. □

1.2.1 Par atrator-repulsor

Agora, introduzimos o conceito de repulsor complementar para atratores do semigrupo de transformação. Com isto, apresentamos uma correspondência entre atratores e repulsores à direita. Neste caminho, mostramos que uma vizinhança atratora deve ser progressivamente invariante por alguma translação do semigrupo, e uma vizinhança repulsora deve ser regressivamente invariante também por alguma translação do semigrupo. Este é o resultado do próximo lema.

Lema 1.20. *Para toda vizinhança atratora V de um atrator à esquerda (à direita) A de (S,X), existe $t_V \in S$ com $\mathrm{fe}\,(t_V SV) \subset \mathrm{int}\,(V)$ ($\mathrm{fe}\,(St_V V) \subset \mathrm{int}\,(V)$). Para toda vizinhança repulsora U de um repulsor à esquerda (à direita) R de (S,X), existe $t_U \in S$ com $\mathrm{fe}\,((t_U S)^* U) \subset \mathrm{int}\,(U)$ ($\mathrm{fe}\,((St_U)^* U) \subset \mathrm{int}\,(U)$).*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que para todo $t \in S$, existe um $x_t \in \mathrm{fe}\,(tSV) \setminus \mathrm{int}\,(V)$. Visto que S é um conjunto direto, temos que $(x_t)_{t\in S}$ é uma rede em $X \setminus \mathrm{int}\,(V)$. Como $X \setminus \mathrm{int}\,(V)$ é compacto, podemos tomar uma subrede $(x_{t_i})_{i\in I}$ de (x_t) que converge para um ponto $x \in X \setminus \mathrm{int}\,(V)$. Agora, dado qualquer $s \in S$, existe um índice $j \in I$ tal que $t_j \geqslant_e s$. Dessa forma, para todo $i \geqslant_I j$, temos que $t_i \geqslant_e t_j \geqslant_e s$, donde

$$x_{t_i} \in \mathrm{fe}\,(t_i SV) \subset \mathrm{fe}\,(sSV)\,.$$

Logo, $x \in \mathrm{fe}\,(sSV)$. Portanto, $x \in \omega_{\mathrm{e}}\,(V) = A \subset \mathrm{int}\,(V)$, o que é uma contradição. Os outros casos se verificam da mesma forma. □

A prova do Lema 1.20 nos conduz a unicidade de sub-atratores e sub-repulsores. Com efeito, sejam U e V vizinhanças atratoras de um atrator à direita A de (S,X). Como no lema acima, existe $t_V \in S$ tal que $\mathrm{fe}\,(St_V V) \subset \mathrm{int}\,(U)$. Dados quaisquer $x \in \omega\,(V)$ e $t \in S$, tomemos $\tau \in tS \cap Stt'$, com $t' \in St_V$. Então, dada uma vizinhança aberta N de x, temos que $N \cap S_\tau V \neq \emptyset$. Mas, $\tau S \tau V \subset tStt'V \subset S_t U$. Logo, $N \cap S_t U \neq \emptyset$, donde concluímos que $x \in \omega\,(U)$. Isto mostra a unicidade dos sub-atratores de A. A prova para o caso de um repulsor à direita é semelhante. Na verdade, veremos adiante que todo repulsor à direita é um conjunto estável. Assim, se R é um repulsor à direita com vizinhança repulsora U, segue do Lema 1.9 que $R = \omega^*\,(R) \subset \omega^*\,(U) \subset R$, donde $R = \omega^*\,(U)$. Logo, um repulsor à direita coincide com seu sub-repulsor.

A invariança parcial de uma vizinhança atratora é a propriedade fundamental para a construção do repulsor complementar de um atrator à direita. Tal construção é dada na seguinte proposição.

Proposição 1.21. *Seja A um atrator à direita de (S,X). Então, A^* é um repulsor à direita de (S,X) disjunto de A.*

Demonstração: Seja V vizinhança atratora de A e $t_V \in S$ tal que $\mathrm{fe}\,(St_V V) \subset \mathrm{int}\,(V)$. Denotando $V^* = X \setminus \mathrm{fe}\,(St_V V)$, temos que V^* é uma vizinhança repulsora de $\omega_{\mathrm{d}}^*\,(V^*)$, pois

$$(St_V)^* V^* \subset X \setminus \mathrm{int}\,(V) \subset X \setminus \mathrm{fe}\,(St_V V)\,.$$

Afirmamos que $\omega_{\mathrm{d}}^*\,(V^*) = A^*$. Com efeito, dado $y \in \omega_{\mathrm{d}}^*\,(V^*)$, temos que $\omega\,(y) \subset \omega_{\mathrm{d}}^*\,(V^*)$, donde $\omega\,(y) \subset X \setminus \mathrm{int}\,(V)$. Logo, $\omega\,(y) \cap A = \emptyset$, ou seja, $y \in A^*$. Portanto, $\omega_{\mathrm{d}}^*\,(V^*) \subset A^*$. Por outro lado, dado qualquer $z \in A^*$, temos que $\omega_{\mathrm{d}}\,(z) \cap V = \emptyset$, pois do contrário, se existisse $w \in \omega_{\mathrm{d}}\,(z) \cap V$, teríamos que $\omega\,(w) \subset \omega_{\mathrm{d}}\,(z)$ e que $\omega\,(w) \subset \omega\,(V)$, o que contradiz $z \in A^*$. Logo, $\omega_{\mathrm{d}}\,(z) \subset V^*$. Isto significa que $V^* \cap Stz \neq \emptyset$, para todo $t \in S$, donde $z \in (St)^* V^*$. Portanto, $z \in \omega_{\mathrm{d}}^*\,(V^*)$, donde $A^* = \omega_{\mathrm{d}}^*\,(V^*)$. □

Assim, dado um atrator à direita A de (S, X), denominamos o repulsor à direita A^* de *repulsor complementar de* A, e o par (A, A^*) denominamos de *par atrator-repulsor* de (S, X).

Para atratores à esquerda temos um resultado semelhante, porém, não conveniente.

Proposição 1.22. *Seja A um atrator à esquerda de (S, X). Então, A^* é um sub-repulsor de algum repulsor à esquerda de (S, X) disjunto de A.*

Demonstração: Seja V vizinhança atratora de A e $t_V \in S$ como no Lema 1.20. Então, $\mathrm{fe}\,(t_V SV) \subset \mathrm{int}\,(V)$. Denotemos

$$V^* = X \setminus \mathrm{fe}\,(t_V SV)\,.$$

Então, V^* é um conjunto aberto de X. Se $x \in (t_V S)^* V^*$, então, existe $s \in S$ tal que $t_V sx \in X \setminus \mathrm{fe}\,(t_V SV)$, donde $x \in X \setminus V$. Logo, $(t_V S)^* V^* \subset X \setminus V$. Assim,

$$\omega_{\mathrm{e}}^*\,(V^*) \subset \mathrm{fe}\,((t_V S)^* V^*) \subset \mathrm{fe}\,(X \setminus V) = X \setminus \mathrm{int}\,(V) \subset X \setminus \mathrm{fe}\,(t_V SV) = V^*.$$

Então, V^* é uma vizinhança repulsora de $\omega^*\,(V^*)$, donde $\omega_{\mathrm{e}}^*\,(V^*)$ é um repulsor à esquerda. Afirmamos que $\omega^*\,(V^*) = A^*$. Com efeito, dado $y \in \omega^*\,(V^*)$, temos que $\omega\,(y) \subset \omega^*\,(V^*)$, donde $\omega\,(y) \subset X \setminus \mathrm{int}\,(V)$. Logo, $\omega\,(y) \cap A = \emptyset$, ou seja, $y \in A^*$. Portanto, $\omega^*\,(V^*) \subset A^*$. Por outro lado, dado qualquer $z \in A^*$, temos que $\omega\,(z) \cap V = \emptyset$, pois do contrário, se existisse $w \in \omega\,(z) \cap V$, teríamos que $\omega\,(w) \subset \omega\,(z)$ e que $\omega\,(w) \subset \omega\,(V)$, donde $\omega\,(z) \cap A \neq \emptyset$, o que contradiz $z \in A^*$. Assim, temos que

$$\omega\,(z) \subset X \setminus V \subset X \setminus \mathrm{fe}\,(t_V SV) = V^*.$$

Agora, tomemos $z' \in \omega\,(z)$. Então, $z' \in V^*$ e $z' \in \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,(S_t z)$. Como V^* é aberto, $V^* \cap S_t z \neq \emptyset$, para todo $t \in S$. Assim, para cada $t \in S$, tomemos $v_t \in V^* \cap S_t z$. Então,

$$z \in (S_t)^* v_t \subset (S_t)^* V^*.$$

Logo, $z \in \omega^* (V^*)$, donde $A^* \subset \omega^* (V^*)$, concluindo a demonstração. □

O fato de repulsores à esquerda não serem progressiva nem regressivamente invariantes reflete em nossa desconsideração ao conceito de repulsor complementar para atratores á esquerda. Por isso, enfatizamos o estudo sobre os atratores e repulsores à direita. Como observamos supra, tal conveniência é devida propriamente à ação à esquerda.

O seguinte resultado é uma recíproca da Proposição 1.21.

Proposição 1.23. *Seja R um repulsor à direita de (S, X). Então, $R = A^*$ para algum atrator à direita A de (S, X).*

Demonstração: Seja U vizinhança repulsora de R e $t_U \in S$ tal que $\mathrm{fe}\left((St_U)^* U\right) \subset \mathrm{int}(U)$. Denotemos

$$U_* = X \setminus \mathrm{fe}\left((St_U)^* U\right).$$

Então, U_* é um conjunto aberto de X e $St_U U_* \subset X \setminus U$. Assim,

$$\omega_{\mathrm{d}}(U_*) \subset X \setminus \mathrm{int}(U) \subset X \setminus \mathrm{fe}\left((St_U)^* U\right) = U_*.$$

Logo, $\omega_{\mathrm{d}}(U_*)$ é um atrator com vizinhança atratora U_*. Denotemos $A = \omega_{\mathrm{d}}(U_*)$. Se $x \in R$, então, $\omega(x) \subset R$, donde $\omega(x) \cap \omega_{\mathrm{d}}(U_*) = \emptyset$. Logo, $R \subset A^*$. Por outro lado, se $x \notin R$, então, existe $t \in S$ tal que $x \notin (St)^* U$. Logo, $Stx \subset X \setminus U \subset U_*$, donde $\omega_{\mathrm{d}}(x) \subset A$. Logo, $x \notin A^*$ e, portanto, $A^* \subset R$, donde concluímos que $R = A^*$. □

Assim, a correspondência $A \to A^*$ entre o conjunto dos atratores à direita e o conjunto dos repulsores à direita de (S, X) é sobrejetiva. Em particular, todo repulsor à direita de (S, X) é estável.

1.3 Recorrência uniforme

Um ponto no espaço X é dito aproximadamente transitivo para o semigrupo de transformação se este pertence ao fecho de sua órbita. Com referência ao Corolário 1.7, um ponto que pertence ao seu conjunto ω_{d}-limite é um caso muito especial de ponto aproximadamente transitivo, o qual apresenta uma uniformidade com respeito à transitividade pelas translações à direita de S. Essa propriedade chamamos de *recorrência uniforme (à direita)*.

Nesta seção apresentamos uma classe especial de conjuntos que possuem a propriedade de transitividade uniforme. Nesse caminho, estabelecemos uma relação entre os conceitos de conjunto limite e conjunto de transitividade aproximada para ações de semigrupos. Ver Apêndice A.2 para mais detalhes sobre conjunto de transitividade aproximada e, em particular, sobre conjunto controlável para ações de semigrupos.

Definição 1.24. *Um ponto $x \in X$ é dito* ***uniformemente recorrente*** *se $x \in \omega_{\mathrm{d}}(x)$.*

Denotemos por

$$\mathcal{R}_{\mathrm{u}} = \{x \in X : x \in \omega_{\mathrm{d}}(x)\}$$

o conjunto de todos os pontos uniformemente recorrentes de (S, X), o qual denominamos de *conjunto de recorrência uniforme* de (S, X).

Como X é compacto Hausdorff, existe um subconjunto minimal de (S, X). Então, segue da Proposição 1.11 que $\mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ é não vazio.

Podemos definir em $\mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ a seguinte relação de equivalência.

Definição 1.25. *Dados $x, y \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$, então, $x \sim y$ se, e somente se, $x \in \omega_{\mathrm{d}}(y)$ e $y \in \omega_{\mathrm{d}}(x)$.*

Se $x, y, z \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$, então, $x \in \omega_{\mathrm{d}}(x)$, logo, $x \sim x$. Se $x \sim y$, então, é claro que $y \sim x$. Agora, se $x \sim y$ e $y \sim z$, temos que $x \in \omega_{\mathrm{d}}(y)$ e $y \in \omega_{\mathrm{d}}(z)$. Pela invariança progressiva de $\omega_{\mathrm{d}}(z)$, temos que $\omega_{\mathrm{d}}(y) \subset \omega_{\mathrm{d}}(z)$, donde $x \in \omega_{\mathrm{d}}(z)$. Analogamente, visto que $z \in \omega_{\mathrm{d}}(y)$ e $y \in \omega_{\mathrm{d}}(x)$, temos que $z \in \omega_{\mathrm{d}}(x)$. Logo, $x \sim z$. Portanto, a relação da Definição 1.25 é de fato de equivalência.

Para cada $x \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$, denotemos por D_x à classe de equivalência a qual x pertence. Denominaremos cada classe por **conjunto de transitividade uniforme**. Podemos verificar imediatamente que estas classes coincidem com os subconjuntos $D \subset X$ que satisfazem as condições:

1. $D \subset \omega_{\mathrm{d}}(x)$, para todo $x \in D$.

2. D é maximal satisfazendo a propriedade (1).

O interesse dinâmico pela transitividade uniforme é o suporte para a definição do conceito de transitividade por cadeias (veja a Definição 1.37 abaixo). Sejam $x, y \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ tais que $x \sim y$. Então, dada qualquer vizinhança U de y e qualquer $t \in S$, existe $t_0 \in St$ tal que $t_0 x \in U$.

Segue do Lema 1.10 que os conjuntos de transitividade uniforme são progressivamente invariantes. Assim, o fecho $\mathrm{fe}(\mathcal{R}_{\mathrm{u}})$ é um conjunto compacto e progressivamente invariante. Na teoria de dinâmica topológica e de sistemas dinâmicos, $\mathrm{fe}(\mathcal{R}_{\mathrm{u}})$ é denominado de *centro de Birkhoff* (ver [25] e [37]).

Em geral, as classes de equivalência em $\mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ não são necessariamente conjuntos compactos, nem possuem necessariamente interior não vazio. Um conjunto de transitividade uniforme é dito *uniformemente controlável* se este possui pontos interiores. Já um conjunto de transitividade uniforme compacto coincide com um subconjunto minimal de (S, X), e reciprocamente, como afirma a seguinte proposição.

Proposição 1.26. *Um subconjunto $M \subset X$ é um subconjunto minimal de (S,X) se, e somente se, M é um conjunto de transitividade uniforme compacto de (S,X).*

Demonstração: Se $M \subset X$ é (S,X)-minimal, segue da Proposição 1.11 que M está contido em algum conjunto de transitividade uniforme D. No entanto, se $x \in D$ e $y \in M$, temos que $x \in \omega_{\mathrm{d}}(y) = M$. Logo, $D \subset M$ e, portanto, $D = M$. Reciprocamente, seja D um conjunto de transitividade uniforme compacto. Seja $N \subset D$ um subconjunto não vazio, fechado e progressivamente invariante em X. Tomando $x \in D$ e $y \in N$, temos que $x \in \omega_{\mathrm{d}}(y) \subset N$. Logo, $D \subset N$ e, portanto, $N = D$, donde concluímos que D é um subconjunto minimal de (S,X). □

Na seqüência, apresentamos a relação entre os conceitos de transitividade aproximada e transitividade uniforme, estabelecendo uma relação entre as teorias de controle e de sistemas dinâmicos.

Proposição 1.27. *Um subconjunto não vazio $D \subset X$ é um conjunto de transitividade uniforme de (S,X) se, e somente se, para cada $t \in S$, existe um conjunto de transitividade aproximada D_t para a ação de St, com*

$$D = \bigcap_{t\in S} D_t.$$

Demonstração: Seja D um conjunto de transitividade uniforme de (S,X). Para cada $t \in S$, temos que $D \subset \mathrm{fe}(Stx)$, para todo $x \in D$. Assim, existe um conjunto de transitividade aproximada D_t para a ação de St sobre X tal que $D \subset D_t$. Logo, $D \subset \bigcap_{t\in S} D_t$. No entanto, se $x, y \in \bigcap_{t\in S} D_t$, então, $y \in \bigcap_{t\in S} \mathrm{fe}(Stx) = \omega_r(x)$, isto significa que os pontos de $\bigcap_{t\in S} D_t$ são uniformemente recorrentes e estão relacionados com os pontos de D, ou seja, $\bigcap_{t\in S} D_t \subset D$. Portanto, $D = \bigcap_{t\in S} D_t$. Reciprocamente, suponhamos que $D = \bigcap_{t\in S} D_t$, onde D_t é um conjunto de transitividade aproximada para a ação de St, para cada $t \in S$. Se $x \in D$, temos que $D \subset \bigcap_{t\in S} \mathrm{fe}(Stx) = \omega_{\mathrm{d}}(x)$. Seja $y \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ e suponhamos que $y \sim x$, para algum $x \in D$. Então, y é aproximadamente recorrente com respeito a ação de St, para todo $t \in S$. Além disso, $y \in \omega_{\mathrm{d}}(x) \subset \mathrm{fe}(Stx)$ e $x \in \omega_{\mathrm{d}}(y) \subset \mathrm{fe}(Sty)$, para todo $t \in S$. Logo, $y \in D_t$, para todo $t \in S$. Portanto, $y \in D$. Isto é suficiente para concluirmos que D é um conjunto de transitividade uniforme de (S,X). □

Da Proposição 1.27 segue imediatamente o próximo resultado sobre controlabilidade uniforme.

Corolário 1.28. *Um subconjunto de interior não vazio $D \subset X$ é um conjunto uniformemente controlável de (S, X) se, e somente se, para cada $t \in S$, existe um conjunto controlável D_t para a ação de St, com*

$$D = \bigcap_{t \in S} D_t.$$

Definição 1.29. *Seja D um conjunto de transitividade uniforme de (S, X). Denominamos* ***domínio de atração*** *de D o conjunto*

$$\mathcal{A}(D) = \{x \in X : \omega_{\mathrm{d}}(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

É evidente que $D \subset \mathcal{A}(D)$, para todo conjunto de transitividade uniforme D. No caso de um subconjunto minimal M de (S, X), temos que $\mathcal{A}(M) = \{x \in X : M \subset \omega_{\mathrm{d}}(x)\}$.

Podemos definir uma relação de ordem parcial entre os conjuntos de transitividade uniforme.

Definição 1.30. *Se D_1 e D_2 são conjuntos de transitividade uniforme, então,*

$$D_1 \preceq D_2 \text{ se, e somente se, } D_1 \cap \mathcal{A}(D_2) \neq \emptyset.$$

A verificação de que a relação da Definição 1.30 é de ordem parcial segue semelhantemente ao caso de conjuntos de transitividade aproximada (ver Seção 3.2 de [36]).

A partir desta relação, apresentamos uma caracterização alternativa para os subconjuntos minimais de (S, X).

Proposição 1.31. *Os subconjuntos minimais de (S, X) coincidem com os conjuntos de transitividade uniforme maximais para a relação de ordem da Definição 1.30.*

Demonstração: Seja M um subconjunto minimal de (S, X). Suponhamos que D é um conjunto de transitividade uniforme tal que $M \preceq B$. Então, existe $x \in M \cap \mathcal{A}(D)$, donde $\emptyset \neq \omega_{\mathrm{d}}(x) \cap D \subset M$. Logo, $M = D$ e, portanto, M é maximal com respeito à relação "$\preceq$". Reciprocamente, seja D um conjunto de transitividade uniforme maximal com respeito à relação da Definição 1.30 e tomemos $x \in D$. Visto que $\omega_{\mathrm{d}}(x)$ é um conjunto não vazio, compacto e progressivamente invariante, existe um subconjunto $(S, \omega_{\mathrm{d}}(x))$-minimal M. Pelo Lema 1.12, temos que M é um subconjunto (S, X)-minimal. Como $M \subset \omega_{\mathrm{d}}(x)$, temos que $x \in \mathcal{A}(M)$, donde $B \preceq M$. Pela maximalidade de D, temos que $D = M$. Portanto, D é um subconjunto minimal de (S, X). □

Equivalentemente, portanto, os conjuntos de transitividade uniforme maximais com respeito a relação de ordem da Definição 1.30 são os conjuntos de transitividade uniforme fechados de (S, X).

Proposição 1.32. *Se D é um conjunto de transitividade uniforme, então,*

$$\mathcal{A}(D) = \bigcap_{t \in S} \mathcal{A}(D_t)$$

onde D_t é um conjunto de transitividade aproximada para a ação de St e $\mathcal{A}(D_t)$ é o domínio de atração de D_t.

Demonstração: Pela Proposição 1.27, temos que $D = \bigcap_{t \in S} D_t$, com D_t como no enunciado. Se $x \in \mathcal{A}(D)$, então, $\omega_{\mathrm{d}}(x) \cap D \neq \emptyset$, donde $\mathrm{fe}(Stx) \cap D_t \neq \emptyset$, para todo $t \in S$. Logo, $x \in \mathcal{A}(D_t)$, para todo $t \in S$. Reciprocamente, seja $y \in \bigcap_{t \in S} \mathcal{A}(D_t)$. Então, $\mathrm{fe}(Sty) \cap D_t \neq \emptyset$, para todo $t \in S$. Tomemos $x_t \in \mathrm{fe}(Sty) \cap D_t$. Tomando agora $z \in D \subset D_t$, temos que $z \in \mathrm{fe}(Stx_t)$, donde $z \in \mathrm{fe}(Sty) \cap D$, para todo $t \in S$. Logo, $z \in \omega_{\mathrm{d}}(y) \cap D$ e, portanto, $y \in \mathcal{A}(D)$. □

1.3.1 Órbitas fechadas

Nesta parte apresentamos um resultado adicional. Assumimos que as órbitas pelo subsemigrupo S são fechadas. Com esta hipótese, os conjuntos de transitividade uniforme são relacionados diretamente com os conjuntos de transitividade total para a ação das translações de S. Ver Apêndice A.1 para detalhes sobre transitividade total.

Para cada $x \in X$, temos que Stx é um conjunto fechado e progressivamente invariante. Em particular, temos a seguinte caracterização dos conjuntos ω-limites pontuais:

$$\omega_{\mathrm{d}}(x) = \bigcap_{t \in S} Stx.$$

Desta forma, podemos determinar explicitamente os conjuntos de transitividade uniforme de (S, X).

Proposição 1.33. *Com respeito aos pontos uniformemente recorrentes temos as seguintes afirmações:*

1. *Para todo $x \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$, $D_x = \omega_{\mathrm{d}}(x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^{*}(x)$. Em particular*

$$\mathcal{R}_{\mathrm{u}} = \{x \in X : x \in \omega_{\mathrm{d}}(x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^{*}(x)\}.$$

2. *$\omega_{\mathrm{d}}(x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^{*}(x) \neq \emptyset$ se, e somente se, $x \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$.*

Demonstração: Para verificarmos (1), seja $y \in D_x$. Então, $x \in Sty$, para todo $t \in S$, donde $y \in (St)^* x$, para todo $t \in S$. Logo, $y \in \omega_{\mathrm{d}}^* (x)$ e, portanto, $y \in \omega_{\mathrm{d}} (x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^* (x)$. Assim, $D_x \subset \omega_{\mathrm{d}} (x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^* (x)$. A inclusão contrária segue com o mesmo argumento. Para verificarmos (2), suponhamos que $\omega_{\mathrm{d}} (x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^* (x) \neq \emptyset$ e tomemos $z \in \omega_{\mathrm{d}} (x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^* (x)$. Então, $z \in (St)^* x$, para todo $t \in S$, donde $x \in \omega_{\mathrm{d}} (z)$. Como também $z \in \omega_{\mathrm{d}} (x)$, segue que $x \in \omega_{\mathrm{d}} (x)$. Logo, $x \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$. A recíproca é imediata a partir do ítem (1). □

Na verdade, segue da Proposição 1.26 que os conjuntos de transitividade uniforme concidem com os subconjuntos minimais do semigrupo de transformação. Portanto,

$$D_x = \omega_{\mathrm{d}} (x)$$

para todo $x \in \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$.

Podemos então estender a relação " $\sim$ " a todo o espaço X associando a cada ponto $x \in X$ a classe de equivalência

$$D_x = \omega_{\mathrm{d}} (x) \cap \omega_{\mathrm{d}}^* (x) .$$

Os pontos de $x \in X$ tais que $D_x = \emptyset$ são os pontos do complementar de $\mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ em X.

O seguinte resultado se verifica de forma semelhante às demonstrações das Proposições 1.27 e 1.32.

Proposição 1.34. *Um subconjunto não vazio $D \subset X$ é um conjunto de transitividade uniforme de (S, X) se, e somente se, para cada $t \in S$, existe um conjunto de transitividade total T_t para a ação de St, com*

$$D = \bigcap_{t \in S} T_t.$$

Além disso,

$$\mathcal{A} (D) = \bigcap_{t \in S} \mathcal{A} (T_t)$$

onde $\mathcal{A} (T_t)$ é o domínio de atração de T_t.

1.4 Recorrência por cadeias

Nesta seção, introduzimos o assunto central desta tese. Nosso objetivo é apresentar o conceito de recorrência por cadeias via o conceito de par atrator-repulsor.

Não sendo indicada a topologia, o espaço base X de um semigrupo de transformação (S, X) é considerado paracompacto Hausdorff. Esta condição garante que a família de todas as coberturas abertas de X é uma família admissível (ver Definição 1.36 abaixo), o que é fundamental para a introdução do conceito de recorrência por cadeias.

Considerando duas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de X, escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$. Também escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ se para todo $V, V' \in \mathcal{V}$ com $V \cap V' \neq \emptyset$, existe $U \in \mathcal{U}$ com $V \cup V' \subset U$. Indutivamente, escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$ se $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\mathcal{U}$.

Dadas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de X e um subconjunto compacto $K \subset X$ denotamos as seguintes coleções:

$$[\mathcal{U}, K] = \{U \in \mathcal{U} : K \cap U \neq \emptyset\}.$$

e

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V \neq \emptyset : U \in \mathcal{U} \text{ e } V \in \mathcal{V}\}.$$

Então, $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ também é uma cobertura aberta de X.

Definição 1.35. *Se $N \subset X$ é aberto e $K \subset N$ é compacto, dizemos que uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X é K*-subordinada *a N se, para cada $U \in [\mathcal{U}, K]$ tem-se $U \subset N$.*

Definição 1.36. *Seja $\mathcal{O}$ uma família de coberturas abertas de X. Dizemos que $\mathcal{O}$ é* admissível *se*

1. *para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$.*
2. *$N \subset X$ é um conjunto aberto e $K \subset N$ é compacto, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ o qual é K-subordinado a N.*
3. *Dadas $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ que refina ambas as coberturas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.*

O Apêndice A.3 apresenta exemplos de família admissível.

Definição 1.37. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Dados $x, y \in X$ e $t \in S$, então, uma* **$(\mathcal{U}, t)$-*cadeia*** *de x para y consiste de uma seqüência de pontos $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y \in X$, de elementos $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e de abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $t_i x_i, x_{i+1} \in U_i$, para $i = 0, ..., n-1$.*

Dada uma família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X, um subconjunto $N \subset X$ é dito *$\mathcal{O}$-transitivo por cadeias* se, para quaisquer $x, y \in N$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, existe uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para y. Mais geralmente, N é dito *$\mathcal{O}$-recorrente por cadeias* se, para todo $x \in N$, existe uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para x, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Denotaremos por $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ o conjunto de todos os pontos de X que são $\mathcal{O}$-recorrentes por cadeias, o qual denominamos de *conjunto de recorrência por cadeias*.

Como já observamos na seção anterior, todo conjunto de transitividade uniforme é transitivo por cadeias, o que inclui os subconjuntos minimais. Portanto, no caso de X

ser compacto Hausdorff, garantimos a existência de subconjuntos minimais de (S, X), donde $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ é não vazio, para qualquer família admissível $\mathcal{O}$. Este fato, no entanto, pode ser visto de forma mais ampla, como segue.

Proposição 1.38. *Sejam $\mathcal{O}$ uma família de cobertura abertas de X e $x \in X$. Assuma que $\omega_{\mathrm{d}}(x)$ é não vazio. Então, $\omega_{\mathrm{d}}(x)$ é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias.*

Demonstração: Sejam $a, b \in \omega_{\mathrm{d}}(x)$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Então, $a \in \mathrm{fe}(Sx)$. Escolhamos $t_0 \in St$. Por continuidade temos que $t_0 a \in \mathrm{fe}(Sx)$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $t_0 a \in U_0$. Então, existe $s_0 \in S$ tal que $s_0 x \in U_0$. Agora, seja $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $b \in U_1$. Como $b \in \mathrm{fe}(Sts_0 x)$, existe $t_1 \in St$ tal que $t_1 s_0 x \in U_1$. Assim, os pontos $x_0 = a, x_1 = s_0 x, x_2 = b \in X$, os elementos $t_0, t_1 \in St$ e os abertos $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ formam uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de a para b. Logo, $\omega_{\mathrm{d}}(x)$ é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias. □

O mesmo não podemos dizer de $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(x)$. No entanto, se o espaço X é compacto, vimos que $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(x)$ é não vazio, compacto e progressivamente invariante. Assim, $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(x)$ deve conter um subconjunto minimal de (S, X) e, portanto, existe um subconjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias contido em $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(x)$.

O seguinte resultado mostra que recorrência e transitividade por cadeias são equivalentes quando assumidas num espaço conexo e compacto.

Proposição 1.39. *Se um subconjunto conexo e compacto $N \subset X$ é $\mathcal{O}$-recorrente por cadeias, então, N é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias.*

Demonstração: Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, sejam $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Tomando uma cobertura aberta de N dada por conjuntos de $\mathcal{V}$, podemos obter $V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}$ tais que $N \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, onde V_i é uma vizinhança aberta de algum $x_i \in N$, $i = 1, ..., n$. Para cada i, tomemos uma $(\mathcal{V}, t)$-cadeia de x_i para x_i, ou seja, pontos $x_0^i = x_i, x_1^i, ..., x_m^i = x_i \in X$, elementos $t_0, ..., t_{m-1} \in St$ e abertos $V_0^i, ..., V_{m-1}^i \in \mathcal{V}$ tais que $t_j x_j^i, x_{j+1}^i \in V_j^i$, $j = 0, ..., m-1$. Então, $x_i \in V_i \cap V_{m-1}^i$, donde existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $V_i \cup V_{m-1}^i \subset W$. Além disso, visto que N é conexo, temos que V_i intersepta algum V_j, com $j \neq i$. Logo, $V_j \cap W \neq \emptyset$, donde existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_j \cup W \subset U$. Portanto, $t_{m-1} x_{m-1}^i, x_j \in U$, donde obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x_i para x_j. Fixando i e considerando qualquer seqüência de índices $i_0 = i, i_1, ..., i_k$ tais que $V_{i_{j-1}} \cap V_{i_j} \neq \emptyset$, para $j = 1, ..., k$, podemos tomar concatenações de $(\mathcal{U}, t)$-cadeias para construir $(\mathcal{U}, t)$-cadeias ligando x_i a qualquer x_{i_j}, onde $x_{i_j} \in V_{i_j}$. Agora, dado qualquer x_j, o fato de N ser conexo implica que existe uma seqüência de índices $i_0 = i, i_1, ..., i_k = j$ tais que $V_{i_{j-1}} \cap V_{i_j} \neq \emptyset$, para $j = 1, ..., k$. Logo, existe uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia ligando x_i a x_j. Portanto, podemos construir $(\mathcal{U}, t)$-cadeias ligando quaisquer x_i e x_j, com $i, j = 1, ..., n$. Visto que $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ é uma cobertura de N, podemos construir $(\mathcal{U}, t)$-cadeias ligando quaisquer $x, y \in N$. Logo, N é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias. $\square$

Na seqüência, vamos determinar as propriedades do conjunto de recorrência por cadeias assim como as características de um conjunto transitivo por cadeias maximal. Para tanto, introduziremos o conceito de conjunto Ω-limite por cadeias, o qual é uma generalização do conceito de conjunto ω-limite à direita em (S, X).

Para $N \subset X$ não vazio, $t \in S$ e uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, definimos os conjuntos

$$\Omega(N, \mathcal{U}, t) = \Omega(N, \mathcal{U}, St) = \{y \in X : \text{existem } x \in N \text{ e uma } (\mathcal{U}, t)\text{-cadeia de } x \text{ para } y\}$$

e

$$\Omega^*(N, \mathcal{U}, t) = \Omega^*(N, \mathcal{U}, St) = \{y \in X : \text{existem } x \in N \text{ e uma } (\mathcal{U}, t)\text{-cadeia de } y \text{ para } x\}.$$

Dada uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X, denominamos de **conjunto Ω-limite por cadeias** e de **conjunto Ω^*-limite por cadeias** de N os subconjuntos de X dados respectivamente por

$$\Omega_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \Omega(N, \mathcal{U}, t)$$

e

$$\Omega^*_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \Omega^*(N, \mathcal{U}, t).$$

Assim,

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{O}} = \{x \in X : x \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)\} = \{x \in X : x \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)\}.$$

Se $x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$, então, $\Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$ é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias. Com efeito, se $y, z \in \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$, então, $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$ e $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(y)$, donde $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(y)$. Por outro lado, se $N \subset X$ é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias, então, $N \subset \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$, para todo $x \in N$. Logo, um subconjunto não vazio $E \subset X$ é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias maximal de (S, X) se, e somente se,

$$E = \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$$

para todo $x \in E$.

Os conjuntos $\mathcal{O}$-transitivos por cadeias maximais de (S, X) determinam uma partição do conjunto de recorrência por cadeias $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$. Assim, estes conjuntos podem ser vistos como classes de equivalência para alguma relação de equivalência em $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$. De fato, dados $x, y \in \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$, então, $x \approx y$ se, e somente se, $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(y)$ e $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$. Evidentemente, esta relação é de equivalência em $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$, onde as classes de equivalência são dadas exatamente por $E_x = \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$, para cada $x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$. Logo, os conjuntos $\mathcal{O}$-transitivos por cadeias maximais de (S, X) coincidem com as classes de equivalência da relação definida acima. Ou seja, um subconjunto $E \subset X$ é uma classe de equivalência da relação " $\approx$ " se, e somente se, ele satisfaz as seguintes propriedades:

1. $E \subset \Omega_{\mathcal{O}}(x)$, para todo $x \in E$;

2. E é maximal satisfazendo a propriedade (1).

Cada classe de equivalência em $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ é denominada de *conjunto de transitividade por cadeias relativo a* $\mathcal{O}$, observando que este conceito generaliza o de conjunto de transitividade uniforme apresentado na seção anterior. Em particular, se uma classe de equivalência E tem interior não vazio, então, dizemos que E é um *conjunto controlável por cadeias relativo a* $\mathcal{O}$.

A relação cadeia " $\approx$ " pode ser estendida para todo o espaço X associando a cada ponto $x \in X$ a classe $E_x = \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$. Os pontos $x \in X$ tais que $\Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x) = \emptyset$ correspondem exatamente ao complementar de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ em X.

Proposição 1.40. *Seja $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Então, o conjunto $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ é fechado.*

Demonstração: Se $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ é vazio, então, não há o que demonstrar. Suponhamos que $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \neq \emptyset$. Sejam $x \in \mathrm{fe}(\mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Consideremos $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $t^2 x \in U_0$. Então, $\alpha_{t^2}^{-1}(U_0)$ é uma vizinhança aberta de x. Como $\mathcal{O}$ é admissível, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Considere $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$. Então, $\alpha_{t^2}^{-1}(U_0) \cap V$ é uma vizinhança aberta de x, donde existe um ponto

$$y \in \alpha_{t^2}^{-1}(U_0) \cap V \cap \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}.$$

Denotando $t_0 = t^2$ e $x_1 = t^2 y$, temos que $t_0 x, x_1 \in U_0$. Agora, tomemos uma $(\mathcal{V}, t^3)$-cadeia de y para y, isto é, pontos $y_1 = y, ..., y_n = y \in X$, elementos $t'_1, ..., t'_{n-1} \in St^3$ e abertos $V_1, ..., V_{n-1} \in \mathcal{V}$ tais que $t'_i y_i, y_{i+1} \in V_i$, $i = 1, ..., n-1$. Escrevendo $t'_1 = s_1 t^3$, com $s_1 \in S$, denotemos também $t_1 = s_1 t \in St$. Então, $t_1 x_1 = t'_1 y \in V_1$, donde $t_1 x_1, y_2 \in V_1$. Enfim, como $y \in V \cap V_{n-1}$, existe $U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V_{n-1} \subset U_{n-1}$, logo,

$$t'_{n-1} y_{n-1}, x \in V_{n-1} \cup V \subset U_{n-1}.$$

Denotemos ainda $x_j = y_j$, $t_j = t'_j$, para $j = 2, ..., n-1$, $x_n = x$ e $U_i = V_i$, $i = 1, ..., n-2$. Então, os pontos $x_0, ..., x_n \in X$, os elementos $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e os abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ formam uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para x. Logo, $x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ e, portanto, $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ é fechado. $\square$

Proposição 1.41. *Seja $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Se $N \subset X$ é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias, então,* $\mathrm{fe}(N)$ *também é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias.*

Demonstração: Visto que $N \subset \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$, segue da Proposição 1.40 que $\mathrm{fe}(N) \subset \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$. Dados $x, y \in \mathrm{fe}(N)$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Tomemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para x, ou seja, pontos $x_0, ..., x_n = x \in X$, $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $t_i x_i, x_{i+1} \in U_i$, $i = 0, ..., n-1$. Como $x \in U_{n-1}$, podemos tomar $x' \in U_{n-1} \cap N$. Daí, $t_{n-1}x_{n-1}, x' \in U_{n-1}$. Assim, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para x'. Por outro lado, seja $V_y \in \mathcal{V}$ vizinhança aberta de y e tomemos $y' \in N \cap V_y$. Consideremos uma $(\mathcal{V}, t)$-cadeia de x' para y', ou seja, pontos $x'_0 = x', ..., x'_m = y' \in X$, $t'_0, ..., t'_{m-1} \in St$ e $V'_0, ..., V'_{m-1} \in \mathcal{V}$ tais que $t'_j x'_j, x'_{j+1} \in V'_j$, $j = 0, ..., m-1$. Como $y' \in V_y \cap V'_{m-1}$, existe $U_{m-1} \in \mathcal{U}$ tal que

$$V_y \cup V'_{m-1} \subset U_{m-1}.$$

Assim, temos que

$$t'_{m-1}x'_{m-1}, y \in V'_{m-1} \cup V_y \subset U_{m-1}.$$

Logo, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x' para y. Enfim, tomamos a concatenação das $(\mathcal{U}, t)$-cadeias de x para x' e de x' para y, obtendo $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para y. Portanto, $\mathrm{fe}(N)$ é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias. □

O seguinte resultado segue imediatamente da última proposição anterior.

Corolário 1.42. *Se $M \subset X$ é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias maximal, então, M é fechado.*

A partir daqui, fixamos uma família admissível $\mathcal{O}$ e assumimos que o conjunto de recorrência por cadeias $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ é não vazio.

Proposição 1.43. *Dado $N \subset X$, o conjunto $\Omega_{\mathcal{O}}(N)$ é fechado e progressivamente invariante e o conjunto $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ é fechado e estável. Além disso, $\omega_{\mathrm{d}}(N) \subset \Omega_{\mathcal{O}}(N)$ e $\omega^*_{\mathrm{d}}(N) \subset \Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$.*

Demonstração: Suponhamos que $\Omega_{\mathcal{O}}(N) \neq \emptyset$. Sejam $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(N)$ e $s \in S$. Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, seja $U \in \mathcal{U}$ tal que $sx \in U$. Então, $x \in \alpha_s^{-1}(U)$. Sejam $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ cobertura $\{x\}$-subordinada à $\alpha_s^{-1}(U)$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ um refinamento de ambas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Tomemos uma $(\mathcal{W}, t)$-cadeia de um ponto $y \in N$ para x, isto é, pontos $x_0 = y, ..., x_n = x \in X$, elementos $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e abertos $W_0, ..., W_{n-1} \in \mathcal{W}$ tais que $t_i x_i, x_{i+1} \in W_i$. Como $x \in W_{n-1}$, temos que $W_{n-1} \subset \alpha_s^{-1}(U)$, donde $st_{n-1}x_{n-1}, sx \in U$, com $st_{n-1} \in St$. Assim, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de y para sx. Portanto, $sx \in \Omega_{\mathcal{O}}(N)$, donde concluímos que $\Omega_{\mathcal{O}}(N)$ é progressivamente invariante. Agora, tomemos $\mathcal{U}' \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U}' \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Se $z \in \mathrm{fe}(\Omega_{\mathcal{O}}(N))$, tomemos $U' \in \mathcal{U}'$ tal que $z \in U'$. Então, existe $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(N) \cap U'$. Se

$x \in V' \in \mathcal{U}'$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U' \cup V' \subset U$. Usando este fato, a partir de uma $(\mathcal{U}', t)$-cadeia de um ponto $y \in N$ até x, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de y até z. Logo, $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(N)$ e, portanto, $\Omega_{\mathcal{O}}(N)$ é fechado. Vamos mostrar que $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ é progressivamente invariante. Sejam $x \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ e $s \in S$. Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, tomemos $s' \in S$ tal que $s'ts \in St$. Sejam $x_0 = x, ..., x_n \in X$, $x_n \in N$, $t_0, ..., t_{n-1} \in Ss'ts$ e $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, s'ts)$-cadeia de x para x_n. Escrevendo $t_0 = s_0 s'ts$, temos que $s_0 s'tsx, x_1 \in U_0$, com $s_0 s't \in St$. Como $Ss'ts \subset St$, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de sx para x_n. Logo, $sx \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$, donde concluímos que $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ é progressivamente invariante. Agora, sejam $x \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ e $y \in S^*x$. Então, existe $s \in S$ tal que $sy = x$. Seja $s' \in S$ tal que $s'ts \in St$. Tomemos pontos $x_0 = x, ..., x_n \in X$, $x_n \in N$, $t_0, ..., t_{n-1} \in Ss't$ e $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, s't)$-cadeia de x para x_n. Então, $t_0 sy = t_0 x, x_1 \in U_0$, onde $t_0 s \in St$. Assim, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de y para x_n. Logo, $y \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$, donde concluímos que $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ é regressivamente invariante. Portanto, $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ é estável. Agora, dado $z \in \mathrm{fe}(\Omega^*_{\mathcal{O}}(N))$, tomemos arbitrários $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Escolhendo $t_0 \in St$, temos que $t_0 z \in \mathrm{fe}(\Omega^*_{\mathcal{O}}(N))$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $t_0 z \in U_0$. Então, existe $x \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(N) \cap U_0$. Tomando uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia ligando x a um ponto $y \in N$, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de z até y. Logo, $z \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ e, portanto, $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ é fechado. Enfim, vamos mostrar a segunda parte da proposição. Sejam $x \in X$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Tomemos $U_0 \in \mathcal{U}$ com $x \in U_0$. Se $x \in \omega_{\mathrm{d}}(N)$, então, $x \in \mathrm{fe}(StN)$, donde $t_0 y, x \in U_0$, para algum $y \in N$ e algum $t_0 \in St$. Logo, $x \in \Omega(N, \mathcal{U}, t)$. Portanto, $\omega_{\mathrm{d}}(N) \subset \Omega_{\mathcal{O}}(N)$. Se $x \in \omega^*(N)$, tomamos $t_0 \in St$. Visto que $\omega^*_{\mathrm{d}}(N)$ é progressivamente invariante, temos que $t_0 x \in \omega^*_{\mathrm{d}}(N)$. Seja $U'_0 \in \mathcal{U}$ tal que $t_0 x \in U'_0$. Como $t_0 x \in \mathrm{fe}((St)^* N)$, existe $x_1 \in U'_0$ e $t_1 \in St$ tais que $t_1 x_1 \in N$. Logo, $x \in \Omega^*(N, \mathcal{U}, t)$. Portanto, $\omega^*_{\mathrm{d}}(N) \subset \Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$. □

Proposição 1.44. *Seja $N \subset X$ um subconjunto não vazio. Para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, temos $\Omega_{\mathcal{O}}(N) \subset \omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))$ e $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N) \subset \omega^*(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t))$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Visto que $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)$ é fechado e estável, temos que $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N) = \omega^*(\Omega^*_{\mathcal{O}}(N)) \subset \omega^*(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t))$. No outro caso, tomemos $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(N)$ e $s \in S$ arbitrários. Dada uma vizinhança aberta V de z, seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ uma cobertura $\{z\}$-subordinada à V e tomememos um refinamento $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ de ambas $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$. Dado $\tau \in St \cap Ss$, existem $x_0, ..., x_n = z \in X$, $x_0 \in N$, $t_0, ..., t_{n-1} \in S\tau$ e $V_0, ..., V_{n-1} \in \mathcal{W}$ formando uma $(\mathcal{W}, \tau)$-cadeia de x_0 até z. Como $z \in V_{n-1}$, segue que $V_{n-1} \subset V$, donde $t_{n-1} x_{n-1} \in V$. Agora, visto que $S\tau \subset St \cap Ss$, temos que $x_{n-1} \in \Omega(N, \mathcal{U}, t)$ e $t_{n-1} x_{n-1} \in Ss\Omega(N, \mathcal{U}, t)$. Logo, $z \in \mathrm{fe}(Ss\Omega(N, \mathcal{U}, t))$, donde concluímos que $z \in \omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))$. Portanto, $\Omega_{\mathcal{O}}(N) \subset \omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))$. □

Lema 1.45. *Dado $x \in X$, temos as seguintes afirmações:*

1. $\Omega_{\mathcal{O}}(x) = \Omega_{\mathcal{O}}(y)$*, para todo* $y \in Sx$*.*

2. $\Omega^*_{\mathcal{O}}(y) \subset \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$*, para todo* $y \in S^*x$*.*

Demonstração: Sejam $s, t \in S$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ arbitrários. Para vermos (1), tomemos $s' \in S$ tal que $s'ts \in S_t$. Se $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$, então, existem $x_0 = x, ..., x_n = z \in X$, $t_0, ..., t_{n-1} \in Ss'ts$ e $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, s'ts)$-cadeia de x para z. Escrevendo $t_0 = s_0 s'ts$, temos que $s_0 s'tsx, x_1 \in U_0$, com $s_0 s't \in S_t$. Visto que $Ss'ts \subset St$, temos que os pontos $sx, x_1, ..., x_m = z \in X$ formam uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de sx para z. Logo, $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(sx)$. Por outro lado, se $w \in \Omega_{\mathcal{O}}(sx)$, tomemos pontos $x_0 = sx, ..., x_n = w \in X$, $t_0, ..., t_{n-1} \in Ss't$ e $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, s't)$-cadeia de sx para w. Temos que $t_0 s, t_1, ..., t_{n-1} \in St$. Assim, os pontos $x, x_1, ..., x_n = w \in X$ formam uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para w. Logo, $w \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$ e, portanto, $\Omega_{\mathcal{O}}(x) = \Omega_{\mathcal{O}}(y)$. Para verificarmos o ítem (2), seja $U \in \mathcal{U}$ tal que $sy = x \in U$ e tomemos $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ a qual é $\{y\}$-subordinada à $\alpha_s^{-1}(U)$. Agora, tomemos um refinamento $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ de ambas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Dado $z \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(y)$, temos que existem $x_0 = z, ..., x_n = y \in X$, $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e $W_0, ..., W_{n-1} \in \mathcal{W}$ formando uma $(\mathcal{W}, t)$-cadeia de z para x. Como $y \in W_{n-1}$, temos que $W_{n-1} \subset \alpha_s^{-1}(U)$, donde $st_{n-1}x_{n-1}, sy \in U$, com $st_{n-1} \in St$. Assim, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de z para $sy = x$. Logo, $z \in \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$ e, portanto, $\Omega^*_{\mathcal{O}}(y) \subset \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$. □

Corolário 1.46. *O conjunto* $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ *é progressivamente invariante.*

Demonstração: Se $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$ e $s \in S$, temos que $sx \in \Omega_{\mathcal{O}}(x) = \Omega_{\mathcal{O}}(sx)$. □

Observamos que as definições de conjuntos limites e limites por cadeias relacionam intrinsicamente o comportamento dinâmico do semigrupo de transformação com as ações das translações do semigrupo. Portanto, a reversibilidade é fundamental para essa abordagem dinâmica.

1.4.1 Semigrupos de sombreamento

Uma outra maneira de caracterizar um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias maximal de (S, X, α) é dada a partir do conceito de semigrupo de sombreamento. A idéia envolvida é de perturbar o semigrupo de transformação de forma a se obter semigrupos cujas órbitas realizam as $(\mathcal{U}, t)$-cadeias a partir de um ponto.

Denotemos por $C_l(X)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas entre subconjuntos abertos de X.

Um subconjunto $\mathcal{S} \subset C_l(X)$ é dito um *semigrupo local* se é fechado para a operação de composição (quando admitida).

Um semigrupo local $\mathcal{S}$ é dito *acessível* sobre um subconjunto $N \subset X$ se $\operatorname{int}(\mathcal{S}x) \neq \emptyset$, para todo $x \in N$. Ele é dito *regressivamente acessível* sobre N se $\operatorname{int}(\mathcal{S}^* x) \neq \emptyset$, para todo $x \in N$. O semigrupo é simplesmente dito acessível se o for sobre todo o espaço X.

Se $id \in C_l(X)$ é a aplicação identidade e $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X, definimos a *$\mathcal{S}-$vizinhança da aplicação identidade relativa a $\mathcal{U}$* como

$$V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U}) = \{\phi \in \mathcal{S} : \text{para todo } x \in dom(\phi), \text{ existe } U_x \in \mathcal{U} \text{ tal que } x, \phi(x) \in U_x\}.$$

Dizemos que um semigrupo local $\mathcal{S}$ é *$\mathcal{O}$-localmente transitivo* se dada uma cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e um aberto $U \in \mathcal{U}$, então, para todo $x, y \in U$, existe $\phi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$ tal que $\phi(x) = y$.

Um exemplo de semigrupo local $\mathcal{O}$-localmente transitivo é o conjunto $c_l(X)$ de todas as aplicações constantes cujos domínios são conjuntos abertos de X. Com efeito, sejam $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $U \in \mathcal{U}$. Dados $x, y \in U$, tomemos $\phi \in c_l(X)$ tal que $x \in dom(\phi)$, que $dom(\phi) \subset U$ e que $\phi(z) = y$, para todo $z \in dom(\phi)$. Então, $\phi(x) = y$. Além disso, dado $z \in dom(\phi)$, temos que $z, \phi(z) = y \in U$, donde concluímos $\phi \in V_{c_l(X)}(id, \mathcal{U})$. Portanto, $c_l(X)$ é $\mathcal{O}$-localmente transitivo.

Em particular, o semigrupo local $C_l(X)$ é $\mathcal{O}$-localmente transitivo.

Fixemos um semigrupo local $\mathcal{S} \subset C_l(X)$ o qual é $\mathcal{O}$-localmente transitivo. Dado $t \in S$, definimos

$$V_{\mathcal{S}}(St, \mathcal{U}) = \{\phi \circ \alpha_s : \phi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U}), s \in St\}.$$

Definição 1.47. *Dados $t \in S$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, definimos o conjunto*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U},t} = \{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n : \varphi_i \in V_{\mathcal{S}}(St, \mathcal{U}), n \in \mathbb{N}\}$$

denominado $(\mathcal{U}, t)$-semigrupo de sombreamento (ou $(\mathcal{U}, t)$-semigrupo sombreado).

Observemos que $St \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U},t}$, para todos $t \in S$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$.

As ações dos semigrupos de sombreamento estão diretamente relacionadas com a transitividade por cadeias em (S, X), conforme apresenta o seguinte resultado.

Proposição 1.48. *Sejam $x \in X$, $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathcal{O}$, com $\mathcal{U}' \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, e $t \in S$. Então*

1. $\mathcal{S}_{\mathcal{U},t}x = \Omega(x, \mathcal{U}, t)$.

2. $\mathcal{S}^*_{\mathcal{U},t}x = \Omega^*(x, \mathcal{U}, t)$.

3. $\operatorname{fe}(\mathcal{S}_{\mathcal{U}',t}x) \subset \Omega(x, \mathcal{U}, t)$.

Demonstração: Proposições A.15 e A.16 do Apêndice A.3. □

De certa forma, os saltos em uma $(\mathcal{U},t)$-cadeia são realizados pelos elementos da $\mathcal{S}$-vizinhança da identidade relativa à cobertura $\mathcal{U}$.

Conforme a demonstração da Proposição 1.55 adiante, os conjuntos $\Omega\left(x,\mathcal{U},t\right)$ e $\Omega^{*}\left(x,\mathcal{U},t\right)$ são abertos (veja também Proposição A.14 do Apêndice A.3). Assim, os semigrupos de sombreamento são acessíveis e regressivamente acessíveis.

Enfim, um conjunto de transitividade por cadeias relativo a $\mathcal{O}$ pode ser caracterizado a partir dos conjuntos controláveis efetivos para os semigrupos de sombreamento.

Teorema 1.49. *Um subconjunto não vazio $E\subset X$ é um conjunto de transitividade por cadeias relativo a $\mathcal{O}$ se, e somente se, para cada $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ e $t\in S$, existe um conjunto controlável efetivo $D_{\mathcal{U},t}$ para a ação do semigrupo de sombreamento $\mathcal{S}_{\mathcal{U},t}$ de forma que*

$$E=\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S}\left(D_{\mathcal{U},t}\right)_{0}=\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S}D_{\mathcal{U},t}=\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S}\mathrm{fe}\left(D_{\mathcal{U},t}\right).$$

Demonstração: Teorema A.17 do Apêndice A.3. □

Podemos fazer uma comparação entre o Teorema 1.49 e a Proposição 1.27. Com efeito, se $B\subset X$ é um conjunto de transitividade uniforme de (S,X), então, para cada $t\in S$, existe um conjunto de transitividade aproximada D_t para a ação de St, com $B=\bigcap\limits_{t\in S}D_t$. Dado $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$, temos que $St\subset\mathcal{S}_{\mathcal{U},t}$, donde existe um conjunto de transitividade aproximada $D_{\mathcal{U},t}$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{U},t}$ tal que $D_t\subset D_{\mathcal{U},t}$. Logo, $E=\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S}D_{\mathcal{U},t}$ é o conjunto de transitividade por cadeias que contém B. Portanto, o processo básico para se determinar o conjunto de transitividade por cadeias que contém um dado conjunto de transitividade uniforme é de executar uma perturbação adequada nos subsemigrupos St de S $(t\in S)$. Contudo, em algumas literaturas, um semigrupo de sombreamento é chamado de semigrupo perturbado ou de semigrupo de perturbação.

Considerando a família $\mathcal{F}=\{St:t\in S\}$ de subsemigrupos de S, o conceito de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias definido no Apêndice A.3 coincide com o conceito de transitividade por cadeias definido nesta seção. Entretanto, é importante observarmos que a propriedade de intersecção finita da família das translações de S foi essencial para as definições dos objetos dinâmicos introduzidos neste trabalho. Assim, num contexto mais geral, temos a possibilidade de estudar conceitos dinâmicos considerando uma família de subconjuntos do semigrupo que satisfaz a propriedade de intersecção finita, não exigindo a reversibilidade. No entanto, seria necessário assumir que uma tal família fosse invariante pelo semigrupo, de forma a termos uma boa compreensão do comportamento dinâmico do semigrupo de transformação.

Enfim, com o objetivo principal de se estabelecer uma relação de ordem entre os conjuntos de trasitividade por cadeias, introduzimos o conceito de domínio de atração por cadeias.

Definição 1.50. *Seja E um conjunto de transitividade por cadeias relativo a $\mathcal{O}$. Então, o* domínio de atração por cadeias de E *é dado pelo conjunto*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E) = \{x \in X : \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap E \neq \emptyset\} = \{x \in X : E \subset \Omega_{\mathcal{O}}(x)\}$$

e o domínio de repulsão por cadeias de E *é dado pelo conjunto*

$$\mathcal{A}^*_{\mathcal{O}}(E) = \{x \in X : \Omega^*_{\mathcal{O}}(x) \cap E \neq \emptyset\} = \{x \in X : E \subset \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)\}.$$

Notemos que $E_x = \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E_x) \cap \mathcal{A}^*_{\mathcal{O}}(E_x)$, para todo $x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

Na seqüência apresentamos a definição de uma relação de ordem parcial entre as classes de equivalência em $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$. Esta ordem será indicada como a ordem dinâmica entre os conjuntos de transitividade por cadeias.

Definição 1.51. *Dados $x, y \in \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$, então, $E_x \precsim E_y$ se, e somente se, $E_x \cap \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E_y) \neq \emptyset$.*

Da Proposição A.20 do Apêndice A.3 segue o seguinte resultado que relaciona os domínios de atração por cadeias com os domínios de atração dos conjuntos controláveis dos semigrupos de sombreamento.

Proposição 1.52. *Se E é um conjunto de transitividade por cadeias relativo a $\mathcal{O}$, então*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \mathcal{A}(D_{\mathcal{U},t}) \qquad e \qquad \mathcal{A}^*_{\mathcal{O}}(E) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \mathcal{A}^*(D_{\mathcal{U},t})$$

onde $D_{\mathcal{U},t}$ é um conjunto controlável efetivo de $\mathcal{S}_{\mathcal{U},t}$.

Corolário 1.53. *Seja E conjunto de transitividade por cadeias relativo a $\mathcal{O}$ dado por $E = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} D_{\mathcal{U},t}$, onde $D_{\mathcal{U},t}$ é um conjunto controlável efetivo invariante de $\mathcal{S}_{\mathcal{U},t}$. Então, E é maximal com respeito a relação de ordem da Definição 1.51.*

Demonstração: Corolário A.21 do Apêndice A.3. □

1.4.2 Espaço compacto

A partir de agora assumimos que o espaço base de um semigrupo de transformação é compacto. Neste caso podemos apresentar a relação entre recorrência por cadeias e par atrator-repulsor, donde concluímos que a recorrência por cadeias não depende da família admissível adotada sobre o espaço base.

Segue imediatamente da Proposição 1.39 que uma componente conexa de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias. Assim, um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias maximal de (S, X) é uma união de componentes conexas de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

Dizemos que um subconjunto fechado e progressivamente invariante $N \subset X$ é *internamente $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias* se o sub-semigrupo de transformação (S, N) é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias. Neste caso, consideramos as coberturas abertas induzidas das coberturas em $\mathcal{O}$. Um conjunto de transitividade uniforme é evidentemente um subconjunto internamente $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias.

Proposição 1.54. *Assuma que os pontos de X são aproximadamente transitivos e que as órbitas de S têm fechos conexos. Com estas hipóteses, todo subconjunto fechado e internamente $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias de (S, X) é conexo.*

Demonstração: Seja $N \subset X$ um subconjunto fechado e internamente $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias de (S, X). Suponhamos por absurdo que N não é conexo. Então, existem dois subconjuntos abertos e fechados $A, B \subset N$ tais que $A \cap B = \emptyset$ e que $A \cup B = N$. Seja V uma vizinhança aberta de A tal que $V \cap B = \emptyset$. Tomemos $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ uma cobertura aberta A-subordinada a V. Dados $x \in A$ e $y \in B$, existe uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia em N de x para y, ou seja, existem pontos $x_0 = x, ..., x_n = y \in N$, elementos $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $t_i x_i, x_{i+1} \in U_i \cap N$, $i = 0, ..., n-1$. Então, existe um j tal que $x_j \in A$ e $x_{j+1} \in B$. Visto que $\mathrm{fe}\,(Sx_j)$ é conexo e x_j é aproximadamente transitivo, temos que $\mathrm{fe}\,(Sx_j) \subset A$. Logo, $t_j x_j \in U_j \cap A$, donde $U_j \subset V$. Assim, $x_{j+1} \in B \cap U_j = \emptyset$, o que é um absurdo. Portanto, N é conexo. □

O resultado seguinte relaciona todos os objetos dinâmicos apresentados até aqui.

Proposição 1.55. *Seja $N \subset X$ um subconjunto não vazio. Então, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, tem-se que $\omega_{\mathrm{d}}\left(\mathrm{fe}\left(\Omega\left(N, \mathcal{U}, t\right)\right)\right)$ é um atrator à direita contendo $\omega_{\mathrm{d}}\left(N\right)$, que $\omega^*\left(\mathrm{fe}\left(\Omega^*\left(N, \mathcal{U}, t\right)\right)\right)$ é um repulsor à direita contendo $\omega^*_{\mathrm{d}}\left(N\right)$, onde*

$$\Omega_{\mathcal{O}}\left(N\right) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega_{\mathrm{d}}\left(\Omega\left(N, \mathcal{U}, t\right)\right) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega_{\mathrm{d}}\left(\mathrm{fe}\left(\Omega\left(N, \mathcal{U}, t\right)\right)\right)$$

e

$$\Omega^*_{\mathcal{O}}\left(N\right) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega^*\left(\Omega^*\left(N, \mathcal{U}, t\right)\right) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega^*\left(\mathrm{fe}\left(\Omega^*\left(N, \mathcal{U}, t\right)\right)\right).$$

Demonstração: Primeiramente, vejamos que os conjuntos $\Omega\left(N, \mathcal{U}, t\right)$ e $\Omega^*\left(N, \mathcal{U}, t\right)$ são abertos, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Seja $y \in \Omega\left(N, \mathcal{U}, t\right)$. Então, existem pontos $x_0 = x, ..., x_n = y \in X$, $x \in N$, elementos $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$

tais que $t_i x_i, x_{i+1} \in U_i$, $i = 0, ..., n-1$. Se $z \in U_{n-1}$, então, $t_{n-1}x_{n-1}, z \in U_{n-1}$, donde obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x para z. Logo, $U_{n-1} \subset \Omega(N, \mathcal{U}, t)$ é uma vizinhança aberta de y e, portanto, $\Omega(N, \mathcal{U}, t)$ é aberto. Agora, seja $y \in \Omega^*(N, \mathcal{U}, t)$ e $x_0 = y, ..., x_n = x \in X$, $x \in N$, $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de y para x. O conjunto aberto $\alpha_{t_0}^{-1}(U_0)$ é tal que $y \in \alpha_{t_0}^{-1}(U_0) \subset \Omega^*(N, \mathcal{U}, t)$. Portanto, $\Omega^*(N, \mathcal{U}, t)$ é aberto. Agora, seja $y \in \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)))$ e tome $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U$. Então, existem $\tau \in St$ e $x \in \mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))$ tais que $\tau x \in U$, pois $y \in \mathrm{fe}(St\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)))$. Como $\alpha_\tau^{-1}(U)$ é uma vizinhança aberta de x e $x \in \mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))$, existe $z \in \alpha_\tau^{-1}(U) \cap \Omega(N, \mathcal{U}, t)$. Logo, $\tau z, y \in U$. Enfim, tomando $x' \in N$ e uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x' para z, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de x' para y. Logo, $y \in \Omega(N, \mathcal{U}, t)$ e, portanto,

$$\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))) \subset \Omega(N, \mathcal{U}, t).$$

Visto que $\Omega(N, \mathcal{U}, t)$ é aberto, temos que $\Omega(N, \mathcal{U}, t) \subset \mathrm{int}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)))$, donde

$$\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))) \subset \mathrm{int}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))).$$

Portanto, $\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)))$ é um atrator à direita com vizinhança atratora $\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))$. Além disso, pelas Proposições 1.43 e 1.44, temos que

$$\omega_{\mathrm{d}}(N) \subset \Omega_{\mathcal{O}}(N) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))).$$

Por outro lado, como $\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))) \subset \Omega(N, \mathcal{U}, t)$, temos que

$$\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t))) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \Omega(N, \mathcal{U}, t) = \Omega_{\mathcal{O}}(N).$$

Logo,

$$\Omega_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)))$$

onde cada atrator $\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega(N, \mathcal{U}, t)))$ contém $\omega_{\mathrm{d}}(N)$. Agora, seja $y \in \omega_{\mathrm{d}}^*(\mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t)))$ e tomemos $t_0 \in St$. Então, $t_0 y \in \mathrm{fe}((St)^* \mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t)))$. Tomemos $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $t_0 y \in U_0$. Então, existe $x_1 \in (St)^* \mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t)) \cap U_0$. Logo, $t_1 x_1 \in \mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t))$, para algum $t_1 \in St$. Seja $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $t_1 x_1 \in U_1$. Então, existe $x_2 \in U_1 \cap \Omega^*(N, \mathcal{U}, t)$. Assim, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de y para x_2. Tomando $x \in N$ tal que existe uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia ligando x_2 a x, podemos construir uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de y até x. Portanto, $y \in \Omega^*(N, \mathcal{U}, t)$, donde concluímos que $\omega_{\mathrm{d}}^*(\mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t))) \subset \Omega^*(N, \mathcal{U}, t) \subset \mathrm{int}(\mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t)))$. Assim, $\omega_{\mathrm{d}}^*(\mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t)))$ é um repulsor à direita com vizinhança repulsora $\mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t))$. Além disso, pelas Proposições 1.43 e 1.44, temos que

$$\omega_{\mathrm{d}}^*(N) \subset \Omega_{\mathcal{O}}^*(N) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega^*(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t)) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \omega^*(\mathrm{fe}(\Omega^*(N, \mathcal{U}, t))).$$

Por outro lado, como $\omega^*(\mathrm{fe}(\Omega^*(N,\mathcal{U},t))) \subset \Omega^*(N,\mathcal{U},t)$, temos que

$$\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega^*(\mathrm{fe}(\Omega^*(N,\mathcal{U},t))) \subset \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \Omega^*(N,\mathcal{U},t) = \Omega^*_{\mathcal{O}}(N).$$

Logo,

$$\Omega^*_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega^*(\Omega^*(N,\mathcal{U},t)) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega^*(\mathrm{fe}(\Omega^*(N,\mathcal{U},t)))$$

onde cada repulsor $\omega^*_{\mathrm{d}}(\mathrm{fe}(\Omega^*(N,\mathcal{U},t)))$ contém $\omega^*_{\mathrm{d}}(N)$. □

Corolário 1.56. *Seja $E \subset X$ um subconjunto não vazio e tome $x \in E$. Então, E é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias maximal se, e somente se,*

$$E = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega_{\mathrm{d}}(\Omega(x,\mathcal{U},t)) \cap \omega^*(\Omega^*(x,\mathcal{U},t)).$$

Demonstração: Segue por uma aplicação direta da Proposição 1.55, usando o fato de que $E = \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{O}}(x)$. □

O comportamento dinâmico de (S, X) em uma vizinhança de um atrator à direita expressa significativamente sua rigidez. Com efeito, se um atrator contém o conjunto ω-limite de algum subconjunto $N \subset X$, então, ele também contém o conjunto Ω-limite por cadeias de N. Isto é o que diz o seguinte resultado.

Proposição 1.57. *Sejam $N \subset X$ um subconjunto não vazio e $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Então, o conjunto $\Omega_{\mathcal{O}}(N)$ é a intersecção de todos os atratores à direita contendo $\omega_{\mathrm{d}}(N)$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.55, temos que $\Omega_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N,\mathcal{U},t))$, onde cada $\omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N,\mathcal{U},t))$ é um atrator contendo $\omega_{\mathrm{d}}(N)$. Seja A um atrator à direita contendo $\omega_{\mathrm{d}}(N)$ e tomemos uma vizinhança atratora V de A. Pelo Lema 1.20, existe $t_{\mathrm{v}} \in S$ com $\mathrm{fe}(St_{\mathrm{v}}V) \subset \mathrm{int}(V)$. Seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ a qual é $\mathrm{fe}(St_{\mathrm{v}}V)$-subordinada a $\mathrm{int}(V)$. Como $\omega_{\mathrm{d}}(N) \subset A \subset \mathrm{int}(V)$, existe $t \in S$ tal que $tN \subset V$. Tomemos $\tau \in St_{\mathrm{v}}t \cap St_{\mathrm{v}}$. Então, $S\tau N \subset St_{\mathrm{v}}tN \subset St_{\mathrm{v}}V$. Agora, tomemos $z \in \Omega(N,\mathcal{V},\tau)$ e sejam $x_0 = x, ..., x_n = z \in X$, $x \in N$, $t_0, ..., t_{n-1} \in S\tau$ e $V_0, ..., V_{n-1} \in \mathcal{V}$ formando uma $(\mathcal{V},\tau)$-cadeia de x para z. Como $t_0x \in S\tau N \subset St_{\mathrm{v}}V$, temos que $V_0 \subset \mathrm{int}(V)$, donde $x_1 \in \mathrm{int}(V)$. Dessa forma, $t_1x_1 \in St_{\mathrm{v}}V$, donde $V_1 \subset \mathrm{int}(V)$. Logo, $x_2 \in \mathrm{int}(V)$. Indutivamente, temos que $x_n = z \in \mathrm{int}(V)$. Assim, $\Omega(N,\mathcal{V},\tau) \subset \mathrm{int}(V)$, donde $\omega_{\mathrm{d}}(\Omega(N,\mathcal{V},\tau)) \subset \omega_{\mathrm{d}}(V) = A$. Logo, $\Omega_{\mathcal{O}}(N) \subset A$. Portanto, o atrator A faz parte da intersecção de atratores $\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega_{\mathrm{d}}\left(\Omega\left(N,\mathcal{U},t\right)\right)$, donde segue o resultado. □

Assim, o conjunto $\Omega_{\mathcal{O}}\left(N\right)$ não depende da família admissível $\mathcal{O}$. Com isso, qualquer família admissível que adotemos leva a um mesmo resultado sobre recorrência por cadeias. Em alguns casos é conveniente adotar a família de todas as coberturas abertas de X constituídas por conjuntos abertos da base de topologia sobre X. Isto é o que fazemos no Capítulo 3 onde estudamos recorrência por cadeias sobre compactificações de Ellis. Contudo, o conjunto Ω-limite por cadeias será escrito sem a indicação da família admissível adotada, o mesmo ocorrendo com o conjunto de recorrência por cadeias.

Da Proposição 1.57 segue a seguinte versão mais geral da Proposição 1.16.

Proposição 1.58. *Seja A um atrator à direita de (S,X). Se $x \notin A \cup A^{*}$, então, $\Omega\left(x\right) \subset A$ e $\Omega^{*}\left(x\right) \subset A^{*}$.*

Demonstração: Segue das Proposições 1.16 e 1.57 que $\Omega\left(x\right) \subset A$. Suponhamos por absurdo que existe $y \in \Omega^{*}\left(x\right) \setminus A^{*}$. Se $y \in A$, então, $\Omega\left(y\right) \subset A$, donde $x \in A$, o que contradiz a hipótese. Se $y \notin A$, então, $y \notin A \cup A^{*}$, donde $\Omega\left(y\right) \subset A$, contradizendo novamente a hipótese. Portanto, $\Omega^{*}\left(x\right) \subset A^{*}$. □

Podemos apresentar uma versão mais fraca da Proposição 1.57 para o caso de conjuntos Ω^{*}-limites por cadeias. O enfraquecimento se deve exatamente ao fato dos atratores à direita de (S,X) não serem conjuntos estáveis, o que não nos permite concluir que se x é um ponto num atrator à direita A, então, $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\left(x\right) \subset A$.

Proposição 1.59. *Dado $x \in X$, o conjunto $\Omega^{*}\left(x\right)$ está contido na intersecção de todos os repulsores A^{*}, onde A é um atrator à direita de (S,X) tal que $x \notin A$. A igualdade é válida se x é recorrente por cadeias.*

Demonstração: Seja A um atrator à direita tal que $x \notin A$. Dado $z \in \Omega^{*}\left(x\right)$, temos que $x \in \Omega\left(z\right)$, onde $\Omega\left(z\right)$ é a intersecção de todos os atratores à direita contendo $\omega_{\mathrm{d}}\left(z\right)$. Se $z \notin A \cup A^{*}$, segue da Proposição 1.16 que $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\left(z\right) \subset A^{*}$ e $\omega_{\mathrm{d}}\left(z\right) \subset A$. Logo, $x \in A$, o que contraria a hipótese sobre A. Então, $z \in A \cup A^{*}$. Da mesma forma, $z \notin A$, donde segue que $z \in A^{*}$. Portanto, $\Omega^{*}\left(x\right) \subset A^{*}$, donde provamos a primeira parte da proposição. Para vermos a segunda parte, denotemos por $A_{\mathcal{U},t}$ um atrator à direita de (S,X) tal que $A_{\mathcal{U},t}^{*} = \omega^{*}\left(\Omega^{*}\left(x,\mathcal{U},t\right)\right)$, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Se $x \in \Omega^{*}\left(x\right)$, então, $\omega_{\mathrm{d}}\left(x\right) \subset \Omega^{*}\left(x\right)$, pois $\Omega^{*}\left(x\right)$ é estável. Pela Proposição 1.55, temos que $\omega_{\mathrm{d}}\left(x\right) \subset \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} A_{\mathcal{U},t}^{*}$. Isto significa que $x \notin A_{\mathcal{U},t}$, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Logo, $\bigcap\left\{A^{*} : A \text{ atratora à direita tal que } x \notin A\right\} \subset \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} A_{\mathcal{U},t}^{*} = \Omega^{*}\left(x\right)$, donde concluímos o resultado. □

Uma consequência imediata da Proposição 1.57 é o fato de um atrator e um repulsor à direita de (S, X) conterem todos os conjuntos de transitividade por cadeias que os interseptam.

Proposição 1.60. *Se A é um atrator à direita de (S, X), então,*

$$A \cap \mathfrak{R} = \bigcup_{x \in A} E_x \qquad e \qquad A^* \cap \mathfrak{R} = \bigcup_{x \in A^*} E_x$$

onde $E_x = \Omega(x) \cap \Omega^*(x)$.

Demonstração: Escolha $x \in A$. Então, $\omega_{\mathrm{d}}(x) \subset A$, donde $\Omega(x) \subset A$. Logo, $E_x \subset A \cap \mathfrak{R}$. Por outro lado, se $y \in A \cap \mathfrak{R}$, então, $y \in E_y$, e o resultado está demonstrado para o atrator A. Agora, escolha $x \in A^* \cap \mathfrak{R}$. Então, $x \notin A$, donde segue pela Proposição 1.59 que $\Omega^*(x) \subset A^*$. Logo, $E_x \subset A^* \cap \mathfrak{R}$, e o resultado está demonstrado também para o repulsor complementar A^*. □

A última proposição anterior se reflete na próxima, onde apresentamos enfim a caracterização do conjunto de recorrência por cadeias pelos atratores à direita do semigrupo de transformação.

Teorema 1.61. *O conjunto de recorrência por cadeias é dado por*

$$\mathfrak{R} = \bigcap \{A \cup A^* : A \text{ é um atrator à direita}\}.$$

Demonstração: Se $x \in \mathfrak{R}$, segue da Proposição 1.57 que x pertence a intersecção de todos os atratores à direita contendo $\omega_{\mathrm{d}}(x)$. Seja A um atrator tal que $\omega_{\mathrm{d}}(x) \not\subset A$. Então, $x \notin A$. Da Proposição 1.16 segue que $x \in A^*$. Logo, $x \in A \cup A^*$, para qualquer atrator à direita A de (S, X). Por outro lado, seja $y \in A \cup A^*$, para todo atrator à direita A. Se $\omega_{\mathrm{d}}(y) \subset B$, para algum atrator à direita B, então, $y \notin B^*$. Logo, $y \in B$. Assim, y está contido em todo atrator à direita que contém $\omega_{\mathrm{d}}(y)$. Logo, $y \in \Omega(y)$, ou seja, $y \in \mathfrak{R}$, donde concluímos o resultado. □

Corolário 1.62. *O semigrupo de transformação (S, X) é transitivo por cadeias se, e somente se, o único atrator à direita não vazio é todo o espaço X.*

Demonstração: Assumindo que (S, X) é transitivo por cadeias, sejam $x \in X$ e A um atrator à direita contendo x. Então, $\omega_{\mathrm{d}}(x) \subset A$, donde segue da Proposição 1.57 que $\Omega(x) \subset A$. Mas, $X = \Omega(x)$. Logo, $A = X$. Reciprocamente, suponhamos que X é o único atrator à direita não vazio. Dado $x \in X$, segue da Proposição 1.57 que $\Omega(x) = X$. Portanto, (S, X) é transitivo por cadeias. □

1.4.3 Decomposição de Morse

Notemos que cada conjunto limite intersepta uma componente conexa do conjunto de recorrência por cadeias de (S, X). Nosso objetivo agora é analisar as intersecções dos conjuntos $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(x)$ com $\mathfrak{R}$, considerando as componentes conexas transitivas por cadeias. Neste caminho, introduzimos mais um conceito dinâmico para ações de semigrupos, a saber, o conceito de decomposição de Morse.

Definição 1.63. *Seja $x \in X$. Um subconjunto $M \subset X$ é dito **ω-atingível (ω-atingível à esquerda, ω-atingível à direita)** por x se $\omega(x) \cap M \neq \emptyset$ ($\omega_{\mathrm{e}}(x) \cap M \neq \emptyset$, $\omega_{\mathrm{d}}(x) \cap M \neq \emptyset$); M é dito **ω^{*}-atingível (ω^{*}-atingível à esquerda, ω^{*}-atingível à direita)** por x se $\omega^{*}(x) \cap M \neq \emptyset$ ($\omega_{\mathrm{e}}^{*}(x) \cap M \neq \emptyset$, $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(x) \cap M \neq \emptyset$).*

Dado qualquer $x \in X$, temos que $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(x) \cap \mathfrak{R} \neq \emptyset$. Se C é uma componente conexa de $\mathfrak{R}$ a qual é ω^{*}-atingível à direita por x, denotamos

$$\omega_{C}^{*}(x) = \omega_{\mathrm{d}}^{*}(x) \cap C.$$

Então, $\omega_{C}^{*}(x)$ é um conjunto transitivo por cadeias.

Notemos que no caso de um semifluxo, cada conjunto ω^{*}-limite de um ponto é transitivo por cadeias. Este fato ocorre no caso mais geral onde o semigrupo S é cêntrico. Neste caso, $\omega_{C}^{*}(x) = \omega^{*}(x)$, para todo $x \in X$ e C compontente conexa de $\mathfrak{R}$.

Denotemos por $\mathfrak{C}$ a coleção de todas as componentes conexas de $\mathfrak{R}$.

Dada uma componente $C \in \mathfrak{C}$ e um atrator à direita A de (S, X), temos que $C \subset A \cup A^{*}$. Visto que A e A^{*} são disjuntos, então, $C \subset A$ ou $C \subset A^{*}$. Em particular, se C é ω^{*}-atingível à direita por $x \in X$, então, ou $\omega_{C}^{*}(x) \subset A$ ou $\omega_{C}^{*}(x) \subset A^{*}$. Lembrando que A e A^{*} são conjuntos fechados e progressivamente invariantes, concluímos que $\omega_{\mathrm{d}}(x), \omega_{C}^{*}(x) \subset A \cup A^{*}$, para todo $x \in X$ e $C \in \mathfrak{C}$ componente ω^{*}-atingível à direita por x.

Definição 1.64. *Dado um repulsor (à esquerda ou à direita) R de (S, X), definimos o conjunto*

$$R_{*} = \left\{ \begin{array}{c} x \in X : \textit{existe } C \in \mathfrak{C} \textit{ componente } \omega^{*}\textit{-ating vel direita} \\ \textit{por } x \textit{ tal que } \omega_{C}^{*}(x) \cap R = \emptyset \end{array} \right\}.$$

Proposição 1.65. *Seja A um atrator à direita de (S, X) e V uma vizinhança atratora de A. Então, $\omega(V) = (A^{*})_{*}$.*

Demonstração: Seja $x \in \omega(V)$. Dados quaisquer $t_1, ..., t_n \in S$, tomemos $t \in S_{t_1} \cap ... \cap S_{t_n}$. Pela invariança de $\omega(V)$, existe $y \in \omega(V)$ tal que $ty = x$. Logo, $y \in \omega(V) \cap (S_{t_1})^{*} x \cap ... \cap (S_{t_n})^{*} x$. Assim, a família de subconjuntos fechados

$$\mathcal{F} = \{\omega(V) \cap \mathrm{fe}((S_t)^{*} x) : t \in S\}$$

satisfaz a propriedade da intersecção finita, donde temos que $\omega(V) \cap \omega^*(x) \neq \emptyset$. Visto que $\omega(V) \cap \omega^*(x)$ é compacto e progressivamente invariante, existe uma componente $C \in \mathfrak{C}$ que intersepta $\omega(V) \cap \omega^*(x)$. Como C é conexa e $C \subset A \cup A^*$, temos que $C \subset A$. Assim, $\omega_C^*(x) \cap A^* = \emptyset$, ou seja, $x \in (A^*)_*$. Portanto, $\omega(V) \subset (A^*)_*$. Por outro lado, se $x \in (A^*)_*$, então, existe $C \in \mathfrak{C}$ componente ω^*-atingível por x tal que $\omega_C^*(x) \cap A^* = \emptyset$. Como A^* é estável, isto significa que $x \notin A^*$. Assim, se supormos que também $x \notin \omega(V)$, segue da Proposição 1.15 que $\omega^*(x) \subset A^*$, o que não pode ocorrer. Logo, $x \in \omega(V)$ e, portanto, $(A^*)_* \subset \omega(V)$, donde concluímos a demonstração. □

Corolário 1.66. *Seja A é um atrator à direita de (S, X). Então, $A = (A^*)_*$ se, e somente se, A é invariante.*

Demonstração: Se $A = (A^*)_*$, então, A é invariante, pois seu sub-atrator é invariante. Por outro lado, se A é invariante, então, podemos substituir $\omega(V)$ por A na demonstração da Proposição 1.65, donde obtemos que $A = (A^*)_*$. □

Corolário 1.67. *Seja R um repulsor à direita de (S, X). Então, $R = A^*$ e $R_* \subset A$ para algum atrator à direita A de (S, X). Tem-se a igualdade $R_* = A$ se, e somente se, A é invariante.*

Demonstração: Segue das Proposições 1.23 e 1.65 □

A Proposição 1.65 afirma que um atrator à direita admite um único sub-atrator, e que um atrator à direita é invariante se, e somente se, ele coincide com seu sub-atrator. Assim, por exemplo, no caso de centricidade do semigrupo, todo atrator é invariante. Em particular, a Definição 1.64 corresponde à definição de atrator complementar para semifluxos (ver página 21 de [22]).

Outra consequência que temos diz respeito a correspondência entre atratores e repulsores à direita.

Corolário 1.68. *Se todos os atratores à direita de (S, X) são invariantes, então, a correspondência $A \to A^*$ entre atratores e repulsores à direita de (S, X) é bijetora.*

Demonstração: Vimos que a correspondência enunciada é sobrejetora. Para ver que ela também é injetora, sejam A e B atratores à direita tais que $A^* = B^*$. Então, $A = (A^*)_* = (B^*)_* = B$, e o resultado está provado. □

Nossa motivação para a introdução do conceito de decomposição de Morse provém do conhecimento das propriedades de um par atrator-repulsor. Em resumo, um par atrator-repulsor (A, A^*) de (S, X) satisfaz as seguintes propriedades: (i) A e A^* são conjuntos não vazios, compactos, invariantes isolados e disjuntos entre si; (ii) $\omega_{\mathrm{d}}(x), \omega_C^*(x) \subset A \cup A^*$, para todo $x \in X$ e $C \in \mathfrak{C}$ componente ω^*-atingível à direita por x; (iii) se $\omega_{\mathrm{d}}(x) \cup \omega_C^*(x) \subset A$, então, $x \in A$; se $\omega_{\mathrm{d}}(x) \cup \omega_C^*(x) \subset A^*$, então, $x \in A^*$, onde $C \in \mathfrak{C}$ é uma componente ω^*-atingível à direita por x; (iv) $\mathfrak{R} \subset A \cup A^*$. Nós então estendemos estas propriedades de um par atrator-repulsor para coleções finitas de subconjuntos do espaço base.

Definição 1.69. *Uma **decomposição de Morse** de (S, X) é uma coleção finita $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i \subset X : i = 1, ..., n\}$ de conjuntos não vazios, compactos, invariantes isolados e dois a dois disjuntos tais que:*

1. *Para todo $x \in X$ e $C \in \mathfrak{C}$ componente ω^*-atingível à direita por x, existem i, j tais que $\omega_C^*(x) \subset \mathcal{C}_i$ e $\omega_{\mathrm{d}}(x) \subset \mathcal{C}_j$.*

2. *Se existem $\mathcal{C}_{j_0}, \mathcal{C}_{j_1}, ..., \mathcal{C}_{j_l}$ e $x_1, ..., x_l \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$ com $\omega_{C_k}^*(x_k) \subset \mathcal{C}_{j_{k-1}}$ e $\omega_{\mathrm{d}}(x_k) \subset \mathcal{C}_{j_k}$, para $k = 1, ..., l$, onde $C_k \in \mathfrak{C}$ é componente ω^*-atingível à direita por x_k, então, $\mathcal{C}_{j_0} \neq \mathcal{C}_{j_l}$;*

3. *$\mathfrak{R} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$.*

Os elementos de uma decomposição de Morse são chamados *conjuntos de Morse*.

Visto que a recorrência por cadeias não depende da família admissível adotada, o mesmo acontece com o conceito de decomposição de Morse

Uma decomposição de Morse $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i, i = 1, ..., n\}$ é dita *mais fina* do que uma decomposição de Morse $\mathcal{M}' = \left\{\mathcal{C}'_j,\ j = 1, ..., m\right\}$ se para cada índice j existe um índice i com $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}'_j$.

Definição 1.70. *Uma decomposição de Morse $\mathcal{M}$ para (S, X) é dita* minimal *se para qualquer outra decomposição de Morse $\mathcal{M}'$ tem-se que $\mathcal{M}$ é mais fina do que $\mathcal{M}'$.*

Sejam $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i,\ i = 1, ..., n\}$ e $\mathcal{M}' = \left\{\mathcal{C}'_j,\ j = 1, ..., m\right\}$ duas decomposições de Morse. Definimos a coleção

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \left\{\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j,\ i, j\right\}$$

onde são admitidos somente os pares i, j com $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j \neq \emptyset$. A coleção $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ é uma decomposição de Morse de (S, X). A demonstração deste fato é a mesma do caso de fluxos e semifluxos (ver [21] e [36] por exemplo). Assim, se existe uma decomposição de Morse minimal de (S, X), então, esta deve ser a intersecção de todas as decomposições de Morse. Em particular, se o número de decomposições de Morse é finito, então, existe uma decomposição de Morse minimal de (S, X).

Com uma hipótese adicional sobre a ação do semigrupo S, obtemos um resultado que relaciona a existência da decomposição de Morse minimal com o número de componentes conexas do conjunto de recorrência por cadeias. Tal hipótese é a conexidade do fecho das órbitas pelo semigrupo e a recorrência aproximada sobre todo ponto de X. Por exemplo, se S é um monóide munido de uma topologia conexa e a ação é unilateralmente contínua, então, a hipótese requerida é satisfeita. Como conseqüência desta hipótese temos que o conjunto $\omega_{\mathrm{d}}(x)$ é conexo $(x \in X)$. Esta afirmação segue pelo Teorema 6.1.18 de [14] aplicado à coleção $\{\mathrm{fe}(Stx)\}_{t\in S}$, usando a reversibilidade de S.

Teorema 1.71. *Assuma que os pontos de X são aproximadamente recorrentes e que as órbitas de (S,X) têm fecho conexo. Então, existe uma decomposição de Morse minimal de (S,X) se, e somente se, o conjunto de recorrência por cadeias $\mathfrak{R}$ tem um número finito de componentes conexas. Neste caso, os conjuntos de Morse coincidem com as componentes conexas de $\mathfrak{R}$.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathfrak{R}$ tem um número finito de componentes conexas e denotemos $\mathfrak{C} = \{C_1, ..., C_n\}$. Vamos mostrar que $\mathfrak{C}$ é uma decomposição de Morse de (S,X). Primeiramente, temos que $\mathfrak{C}$ é uma coleção de conjuntos não vazios, compactos e dois a dois disjuntos. Para cada $1 \leq k \leq n$, denotemos por V_k uma vizinhança compacta de C_k de forma que $V_1, ..., V_n$ sejam conjuntos dois a dois disjuntos. Tomemos $x \in C_k$ e $s \in S$. Como $\mathrm{fe}(Sx)$ é conexo, está contido em $\mathfrak{R}$ e $x \in \mathrm{fe}(Sx)$, temos que $\mathrm{fe}(Sx) \subset C_k$. Logo, $sx \in \mathrm{fe}(Sx) \subset C_k$. Portanto, C_k é progressivamente invariante, para $k = 1, ..., n$. Agora, dado qualquer $x \in X$ e $C_k \in \mathfrak{C}$ componente ω^*-atingível à direita por x, temos que $\omega^*_{C_k}(x) \subset C_k$, e como $\omega_{\mathrm{d}}(x)$ é transitivo por cadeias e conexo, temos que $\omega_{\mathrm{d}}(x)$ está contido em alguma componente conexa de $\mathfrak{R}$. Logo, $\omega(x), \omega^*_{C_k}(x) \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$, para todo $x \in X$ e $C_k \in \mathfrak{C}$ componente ω^*-atingível à direita por x. Agora, suponhamos que existem $C_{k_0}, C_{k_1}, ..., C_{k_l}$ e $x_1, ..., x_l \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} C_k$ com $\omega^*_{C_{k_{j-1}}}(x_j) \subset C_{k_{j-1}}$ e $\omega(x_j) \subset C_{k_j}$, para $j = 1, ..., l$, e que $C_{k_0} = C_{k_l}$. Então, $\omega^*_{C_{k_0}}(x_1), \omega(x_l) \subset C_{k_0}$. Tomemos $x \in \omega^*_{C_{k_0}}(x_1)$ e $y \in \omega_{\mathrm{d}}(x_l)$. Então, $x_1 \in \Omega(x)$ e $y \in \Omega(x_l)$. Visto que C_{k_0} é transitivo por cadeias, temos que $x \in \Omega(y)$. Logo, $x_1 \in \Omega(x_l)$. Por outro lado, semelhantemente, visto que $\omega^*_{C_{k_j}}(x_{j+1}), \omega_{\mathrm{d}}(x_j) \in C_{k_j}$, temos que $x_{j+1} \in \Omega(x_j)$, para $j = 1, ..., l$. Logo, $x_l \in \Omega(x_1)$. Portanto, x_1 e x_l são pontos recorrentes por cadeias, o que contradiz $x_1, x_l \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} C_k$. Assim, temos $C_{k_0} \neq C_{k_l}$. Enfim, para concluirmos que $\mathfrak{C}$ é uma decomposição de Morse, resta mostrar que as componentes conexas de $\mathfrak{R}$ são conjuntos invariantes isolados. Suponhamos que $S^*Sx \subset V_k$. Então, $\omega^*_{\mathrm{d}}(x), \omega_{\mathrm{d}}(x) \subset V_k$, pois V_k é compacta. Logo, C_k é a única componente ω^*-atingível à direita por x, e

$\omega^*_{C_k}(x), \omega_{\mathrm{d}}(x) \subset C_k$. Pela parte anterior da demonstração, temos que $x \in C_k$. Portanto, V_k é uma vizinhança isolante de C_k. Agora, vejamos que $\mathfrak{C}$ é minimal. Suponhamos que existe uma decomposição de Morse $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_m\}$ mais fina do que $\mathfrak{C}$. Então, para $C_l \in \mathfrak{C}$, existe um conjunto de Morse $\mathcal{C}_j \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{C}_j \subset C_k$. No entanto,

$$\bigcup_{k=1}^{n} C_k = \mathfrak{R} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i.$$

Logo, $C_l \subset \mathcal{C}_{j'}$, para algum $1 \leq j' \leq m$, pois C_l é conexa e os conjuntos de Morse são dois a dois disjuntos. Assim, temos que $\mathcal{C}_j \subset C_l \subset \mathcal{C}_{j'}$, donde $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_{j'}$. Logo, $\mathcal{C}_j = C_l$ e, portanto, $\mathcal{M} = \mathfrak{C}$. Reciprocamente, seja $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n\}$ uma decomposição de Morse minimal de (S, X). Então, $\mathcal{M}$ deve estar contida na intersecção de todos os pares atrator-repulsor, pois estes são também decomposições de Morse. Segue do Teorema 1.61 que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i \subset \mathfrak{R}$, donde temos $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i = \mathfrak{R}$. Visto que os conjuntos de Morse são dois a dois disjuntos, temos que cada componente conexa de $\mathfrak{R}$ deve estar contida num único conjunto de Morse. Resta mostrar que as componentes conexas de $\mathfrak{R}$ coincidem com os conjuntos de Morse. Para tanto, suponhamos por absurdo que um conjunto de Morse $\mathcal{C}_i$ contém mais de uma componente conexa de $\mathfrak{R}$, e tomemos $C \in \mathfrak{C}$ tal que $C \subset \mathcal{C}_i$. Então, $\mathcal{C}_i \setminus C$ é um subconjunto não vazio e compacto em $\mathfrak{R}$. Como $\mathfrak{R}$ é compacto, temos que $\mathcal{C}_i \setminus C$ é compacto em X. Visto que as componentes conexas de $\mathfrak{R}$ são progressivamente invariantes, temos que $\mathcal{C}_i \setminus C$ é progressivamente invariante. Seja V_i vizinhança isolante de $\mathcal{C}_i$. Então, $V_i \setminus C$ é uma vizinhança de $\mathcal{C}_i \setminus C$. Se $S^*Sx \subset V_i \setminus C$, então, $x \in \mathcal{C}_i \setminus C$. Logo, $\mathcal{C}_i \setminus C$ é invariante isolado. Por outro lado, temos que $V_i \setminus (\mathcal{C}_i \setminus C)$ é uma vizinhança de C. Se $S^*Sx \subset V_i \setminus (\mathcal{C}_i \setminus C)$, então, $x \in \mathcal{C}_i \setminus (\mathcal{C}_i \setminus C) = C$. Logo, C é invariante isolado. Agora, considerando a coleção $\mathcal{M}' = \{\mathcal{C}_1, ..., C, \mathcal{C}_i \setminus C, ..., \mathcal{C}_n\}$, não é difícel mostrar que $\mathcal{M}'$ satisfaz as condições 1, 2 e 3 da Definição 1.69. Portanto, $\mathcal{M}'$ é uma decomposição de Morse. Mas, como $\mathcal{M}$ é minimal, existe $\mathcal{C}_j \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{C}_j \subset C$, donde $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_i$. Logo, $\mathcal{C}_i = C$, o que é uma contradição. Portanto, as componentes conexas de $\mathfrak{R}$ coincidem com os conjuntos de Morse de $\mathcal{M}$. □

O Teorema 1.39 generaliza o caso de semifluxos de tempo contínuo, pois $\mathbb{R}^+$ é conexo e cada ponto de X é aproximadamente recorrente. Em especial, a decomposição de Morse minimal coincide com a coleção dos conjuntos de transitividade por cadeias (ver [24]). Este fato ocorre devido à transitividade por cadeias interna dos conjuntos transitivos por cadeias maximais. As propriedades de gerador compacto e de ordem total dos semigrupos $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{Z}^+$ possibilitam a análise da transitividade por cadeias considerando apenas um intervalo compacto, $[1, 2]$ por exemplo, e este recurso é usado para mostrar que os conjuntos transitivos por cadeias maximais são internamente transitivos por cadeias.

Continuaremos pensando neste resultado sobre semifluxos, porém, não nesta tese. Contudo, a propriedade de gerador compacto é uma condição sugestiva para um futuro trabalho. Além desta, a seguinte condição também é interessante: dado qualquer elemento $s \in S$ e um elemento não nilpotente $t \in S$, então, existe um número natural n tal que $t^n \in Ss$. Esta última condição é algo semelhante à propriedade P_r (ou P_l) sobre a família $\{Ss : s \in S\}$ de subconjuntos de S (c.f. [2]), e permite a definição do conceito de seqüências regressivas introduzidas em [24]. É claro que tais condições são bem mais restritivas do que a reversibilidade, mas abrangem uma gama de semigrupos clássicos, e certamente devem adicionar mais resultados.

1.4.4 Recorrência por subcadeias

Na definição de cadeias para semigrupos de transformações consideramos as translações à direita do semigrupo. Introduzimos agora o conceito correspondente considerando as bi-translações do semigrupo, o que chamamos de subcadeias. Com isso, em particular, cobrimos todos os resultados sobre recorrência por cadeias referente a ações de semigrupos cêntricos (invariantes). De fato, o conceito de recorrência por subcadeias para ações de semigrupos reversíveis corresponde propriamente ao conceito de recorrência por cadeias para ações de semigrupos cêntricos.

Definição 1.72. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Dados $x, y \in X$ e $t \in S$, então, uma $(\mathcal{U}, t)$-**subcadeia** de x para y consiste de uma seqüência de pontos $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y \in X$, de elementos $t_0, ..., t_{n-1} \in S_t$ e de abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $t_i x_i, x_{i+1} \in U_i$, para $i = 0, ..., n-1$.*

Para $N \subset X$ não vazio, $t \in S$ e uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, definimos os conjuntos

$$\widehat{\Omega}(N, \mathcal{U}, t) = \{y \in X : \text{existem } x \in N \text{ e uma } (\mathcal{U}, t)\text{-subcadeia de } x \text{ para } y\}$$

e

$$\widehat{\Omega}^*(N, \mathcal{U}, t) = \{y \in X : \text{existem } x \in N \text{ e uma } (\mathcal{U}, t)\text{-subcadeia de } y \text{ para } x\}.$$

Então, $\widehat{\Omega}(N, \mathcal{U}, t) \subset \Omega(N, \mathcal{U}, t)$ e $\widehat{\Omega}^*(N, \mathcal{U}, t) \subset \Omega^*(N, \mathcal{U}, t)$.

Dada uma família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X, denominamos respectivamente de **conjunto Ω-limite por subcadeias** e de **conjunto Ω^*-limite por subcadeias** de N os subconjuntos de X dados por

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in S} \widehat{\Omega}(N, \mathcal{U}, t)$$

e

$$\widehat{\Omega}^*_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \widehat{\Omega}^*(N,\mathcal{U},t).$$

Então, o conjunto

$$\widehat{\mathfrak{R}}_{\mathcal{O}} = \left\{x \in X : x \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(x)\right\} = \left\{x \in X : x \in \widehat{\Omega}^*_{\mathcal{O}}(x)\right\}$$

é chamado de *conjunto de recorrência por subcadeias* de (S, X).

Um subconjunto não vazio $E \subset X$ é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por subcadeias maximal de (S, X) se, e somente se

$$E = \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(x) \cap \widehat{\Omega}^*_{\mathcal{O}}(x)$$

para todo $x \in E$.

Como observamos supra, no caso de centricidade os conceitos de recorrência por cadeias e subcadeias coincidem.

Fixemos uma família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X.

Proposição 1.73. *Dado $x \in X$, tem-se que $\omega(x)$ é $\mathcal{O}$-transitivo por subcadeias.*

Demonstração: Sejam $a, b \in \omega(x)$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Então, $a \in \mathrm{fe}(Sx)$. Escolhamos $t_0 \in S_t$. Por continuidade temos que $t_0 a \in \mathrm{fe}(Sx)$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $t_0 a \in U_0$. Então, existe $s_0 \in S$ tal que $s_0 x \in U_0$. Agora, seja $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $b \in U_1$. Como $b \in \mathrm{fe}(S_{ts_0}x)$, existe $t_1 \in S_t$ tal que $t_1 s_0 x \in U_1$. Assim, os pontos $x_0 = a, x_1 = s_0 x, x_2 = b \in X$, os elementos $t_0, t_1 \in S_t$ e os abertos $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ formam uma $(\mathcal{U}, t)$-subcadeia de a para b. Logo, $\omega(x)$ é $\mathcal{O}$-transitivo por cadeias. □

Usando argumentos semelhantes aos da demonstração da Proposição 1.55 podemos verificar o seguinte. Seja $N \subset X$ não vazio. Então, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, temos que

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega\left(\widehat{\Omega}(N,\mathcal{U},t)\right) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega\left(\mathrm{fe}\left(\widehat{\Omega}(N,\mathcal{U},t)\right)\right)$$

e que

$$\widehat{\Omega}^*_{\mathcal{O}}(N) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega^*\left(\widehat{\Omega}^*(N,\mathcal{U},t)\right) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega^*\left(\mathrm{fe}\left(\widehat{\Omega}^*(N,\mathcal{U},t)\right)\right).$$

Logo, $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N)$ é invariante. Podemos também usar semelhantemente os argumentos da demonstração da Proposição 1.43 para mostrar que $\widehat{\Omega}^*_{\mathcal{O}}(N)$ é estável.

Assim, um subconjunto não vazio $E \subset X$ é um conjunto $\mathcal{O}$-transitivo por subcadeias maximal se, e somente se,

$$E = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},t\in S} \omega\left(\widehat{\Omega}(x,\mathcal{U},t)\right) \cap \omega^*\left(\widehat{\Omega}^*(x,\mathcal{U},t)\right)$$

para todo $x \in E$. Em particular, E é um conjunto compacto e invariante.

Considerando a família $\widehat{\mathcal{F}} = \{S_t : t \in S\}$, o conceito de transitividade por $\widehat{\mathcal{F}}$-cadeias coincide com o conceito de transitividade por subcadeias.

Visto que o conceito de subcadeias resulta em propriedades mais rígidas, naturalmente pode-se perguntar sobre o motivo de não definirmos desde o princípio o conceito de cadeias como subcadeias, já que, de qualquer forma, estaríamos generalizando a teoria de semifluxos. Esclarecemos esta crítica revelando que, inicialmente, o trabalho foi realizado para ações de semigrupos lateralmente reversíveis, onde não consideramos ações por bi-translações. No entanto, pensando exatamente no assunto de estabilidade, decidimos desenvolver o trabalho considerando semigrupos reversíveis. Então, observamos que as técnicas empregadas não variavam significativamente. Assim, não querendo abandonar completamente os semigrupos lateralmente reversíveis, apresentamos esta forma de trabalho, onde consideramos cada caso de reversibilidade lateral nas definições dos conceitos. Portanto, a tese abrange um duplo contexto, registrando definições e informações para futuros trabalhos mais direcionados.

1.5 Condições de Ore; grupos de transformações

Uma vez desenvolvido os estudos sobre os aspectos dinâmicos de ações de semigrupos reversíveis, podemos então aplicar os resultados no contexto de grupos de transformações. Consideramos grupos que contêm subsemigrupos reversíveis geradores, e definimos os conceitos dinâmicos para o grupo de transformação a partir da ação dos subsemigrupos. Assim, grande parte dos resultados estão verificados no contexto de semigrupos de transformações que vimos nas seções anteriores. A vantagem para ações de grupos são os homeomorfismos, obviamente.

Seja (G, X) um grupo de transformação, onde G é um grupo agindo por homeomorfismos sobre um espaço compacto Hausdorff X. Seja S um subsemigrupo reversível e gerador de G. Então, $S^{-1}S = G$. Estas são chamadas *condições de Ore* (ver seções 12.5 de [6] ou 4 de [19]).

Se $H \subset G$ é um subsemigrupo (resp. subgrupo) e $N \subset X$ é um subconjunto compacto e invariante por H, então, (H, N) é chamado de subsemigrupo (resp. subgrupo) de transformação.

Observemos que um subconjunto $N \subset X$ é invariante (por G) se, e somente se , N é invariante por ambos os subsemigrupos S e S^{-1}. Além disso, a ação por homeomorfismos resulta que o conceito de conjunto invariante para (S, X) corresponde ao conceito de conjunto invariante para (G, X). Conseqüentemente, os conceitos de subconjunto minimal forte para (S, X) e de subconjunto minimal para (G, X) são equivalentes (ver Lema 1.4).

Um grupo de transformação (G, M) é dito minimal se M é um subconjunto minimal.

Definição 1.74. *Seja* (G, M) *um grupo de transformação minimal. Então,* (G, M) *é* minimal universal *se, dado qualquer grupo de transformação minimal* (G, Y)*, existe um epimorfismo de* (G, M) *sobre* (G, Y)*.*

Existe um único grupo de transformação minimal universal sobre a ação de G, a menos de isomorfismos. Com efeito, todo grupo de transformação minimal é isomorfo a um subconjunto minimal de $(G, \beta G)$ ou, equivalentemente, isomorfo a um ideal minimal à esquerda de βG, onde βG é a compactificação de Ellis de G. Discutimos sobre este assunto no Capítulo 3. Os detalhes sobre a universalidade de subconjuntos minimais estão apresentados no Apêndice B.3.1.

1.5.1 Objetos elementares e recorrência por cadeias

Para estudar a dinâmica de um grupo de transformação, introduzimos os objetos que são originais da teoria de sistemas dinâmicos, assim como foram definidos para ações de semigrupos. O subsemigrupo S desempenha o papel fundamental na dinamização da ação do grupo G, sendo que o estudo do comportamento dinâmico de (G, X) consiste propriamente da determinação dos conjuntos invariantes pelo subsemigrupo S.

Neste caminho, os objetos elementares de (G, X) são definidos sob a ação de S. Portanto, o desenvolvimento da teoria depende do subsemigrupo.

Dado um subconjunto não vazio $N \subset X$, os conjuntos limites de N relativos à S são dados por

$$\begin{aligned}
\omega(N, S) &= \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}(S_t N) \quad \text{e} \quad \omega^*(N, S) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\left(S_t^{-1} N\right), \\
\omega_{\mathrm{e}}(N, S) &= \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}(tSN) \quad \text{e} \quad \omega_{\mathrm{e}}^*(N, S) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\left(S^{-1} t^{-1} N\right), \\
\omega_{\mathrm{d}}(N, S) &= \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}(StN) \quad \text{e} \quad \omega_{\mathrm{d}}^*(N, S) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\left(t^{-1} S^{-1} N\right),
\end{aligned}$$

os quais correspondem aos conjuntos limites de N para o subsemigrupo de transformação (S, X).

Pela Proposição 1.6, os conjuntos $\omega(N, S)$, $\omega^*(N, S)$, $\omega_{\mathrm{e}}(N, S)$ e $\omega_{\mathrm{d}}^*(N, S)$ são invariantes, o conjunto $\omega_{\mathrm{d}}(N, S)$ é S-invariante e o conjunto $\omega_{\mathrm{e}}^*(N, S)$ é S^{-1}-invariante. Assim, atratores à esquerda e repulsores à direita são conjuntos invariantes, enquanto que atratores à direita são conjuntos S-invariantes e repulsores à esquerda são conjuntos S^{-1}-invariantes. Sub-atratores são invariantes em geral.

Também segue imediatamente das propriedades acima que um subconjunto $M \subset X$ é um subconjunto minimal de (G, X) se, e somente se, $M = \omega(x, S) = \omega^*(x, S)$, para todo $x \in M$.

Como a recorrência por cadeias também depende do subsemigrupo adotado, usamos as notações $\Omega_{\mathcal{O}}(N, S)$ e $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N, S)$ para os conjuntos limites por cadeias.

Aqui fazemos uma observação importante. Se $S \subset R$ são subsemigrupos reversíveis geradores de G, então, podemos afirmar que $\Omega_{\mathcal{O}}(N, S) \subset \Omega_{\mathcal{O}}(N, R)$ e $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N, S) \subset \Omega^*_{\mathcal{O}}(N, R)$, donde os pontos recorrentes por cadeias de (G, X) relativos à S são pontos recorrentes por cadeias de (G, X) relativos à R. Com efeito, sejam $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(N, S)$, $t \in R$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Pelo Lema 1.75 abaixo, temos que existe $s \in S$ tal que $Ss \subset St$. Logo, $Ss \subset Rt$. Como $x \in \Omega(N, \mathcal{U}, Ss)$, segue que $x \in \Omega(N, \mathcal{U}, Rt)$. Portanto, $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(N, R)$, donde $\Omega_{\mathcal{O}}(N, S) \subset \Omega_{\mathcal{O}}(N, R)$. Analogamente, temos que $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N, S) \subset \Omega^*_{\mathcal{O}}(N, R)$, o que mostra a afirmação. Assim, em particular, os conjuntos de transitividade por cadeias relativos à S estão contidos nos conjuntos de transitividade por cadeias relativos à R.

Dois subsemigrupos reversíveis geradores $S \subset R \subset G$ podem determinar a mesma dinâmica no grupo de transformação. Um exemplo claro é quando $S = Rt$ para algum $t \in R$. De fato, pois dados $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(N, R)$, $s \in S$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, temos que $x \in \Omega(N, \mathcal{U}, Rts)$. Logo, $\Omega_{\mathcal{O}}(N, R) \subset \Omega_{\mathcal{O}}(N, Rt)$ e, portanto, $\Omega_{\mathcal{O}}(N, R) = \Omega_{\mathcal{O}}(N, Rt)$. Semelhantemente, $\Omega^*_{\mathcal{O}}(N, R) = \Omega^*_{\mathcal{O}}(N, Rt)$.

No entanto, em geral, se $S \subset R \subset G$, então, o número de conjuntos de transitividade por cadeias relativo à S é maior do que o número de conjuntos de transitividade por cadeias relativo à R em (G, X). Por exemplo, se considerarmos a ação do grupo $\mathbb{R}^n$ sobre sua compactificação de Ellis $\beta\mathbb{R}^n$ e tomarmos um cone pontual $S \subset \mathbb{R}^n$, então, o número de conjuntos de transitividade por cadeias determinados por S é estritamente maior do que o número de tais conjuntos determinados por um cone maximal contendo S. Este fato é demonstrado no Capítulo 3 e Proposição 3.14.

Agora, como mensionamos acima, o seguinte lema é muito útil para relacionar os elementos de S com os elementos de G, e segue diretamente da reversibilidade do subsemigrupo.

Lema 1.75. *Dados $t \in S$ e $g \in G$, existem $\sigma, \tau \in S_t$ tais que $\sigma g \in S_t$ e $\tau^{-1} g \in S_t^{-1}$.*

Demonstração: Escrevamos $g = s_1^{-1} s_2$, com $s_1, s_2 \in S$. Tomando $t_1 \in S_t \cap S_{ts_2}$, temos que $t_1 s_2^{-1} \in S_t$. Agora, tomando $\sigma \in S_t \cap S_{t_1 s_2^{-1} s_1}$, temos que $\sigma g \in S_t$. No outro caso, tomemos $t_2 \in S_{s_1 t} \cap S_{s_2 t}$. Então, $s_1^{-1} t_2 \in S_t \cap s_1^{-1} S_{s_2 t}$. Denotando $\tau = s_1^{-1} t_2$, temos que $s_2^{-1} s_1 \tau \in S_t$. Logo, $\tau^{-1} g \in S_t^{-1}$. □

Assim, dados $x \in X$ e $s, t \in S$, existe $\tau \in S_t$ tal que $\tau s^{-1} \in S_t$, donde $\operatorname{fe}(S_{\tau s^{-1}} x) \subset \operatorname{fe}(S_t s^{-1} x)$. Por outro lado, $\operatorname{fe}(S_{ts} s^{-1} x) \subset \operatorname{fe}(S_t x)$. Logo, $\omega(x, S) = \omega(s^{-1} x, S)$, para todo $s \in S$. Visto que $\omega(x,S) = \omega(sx,S)$, podemos concluir que $\omega(x,S) = \omega(gx,S)$, para todo $g \in G$. Semelhantemente, mostramos que $\omega^*(x,S) = \omega^*(gx,S)$, $\omega_{\mathrm{d}}(x,S) = \omega_{\mathrm{d}}(gx,S)$ e que $\omega_{\mathrm{e}}^*(x,S) = \omega_{\mathrm{e}}^*(gx,S)$, para todo $g \in G$.

O conceito de cadeias para o grupo de transformação (G,X) é definido equivalentemente ao conceito de cadeias para o subsemigrupo de transformação (S,X), ficando a transitividade por cadeias para (G,X) dependente do subsemigrupo S de G, conforme já observamos supra.

Proposição 1.76. *Seja $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Dado $x \in X$, tem-se que $\omega^*(x,S)$ é $\mathcal{O}$-transitivo por subcadeias.*

Demonstração: Sejam $a, b \in \omega^*(x,S)$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in S$. Então, $b \in \mathrm{fe}(S^{-1}x)$. Tomando $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $b \in U_1$, existe $s \in S$ com $s^{-1}x \in U_1$. Escolhamos $t_0 \in S_t$. Como $\omega^*(x,S)$ é invariante, temos que $t_0 a \in \omega^*(x,S)$. Visto que $\omega^*(x,S) = \omega^*(s^{-1}x,S)$, temos que $t_0 a \in \mathrm{fe}\left(S_t^{-1}s^{-1}x\right)$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $t_0 a \in U_0$. Então, existe um ponto $x_1 \in U_0 \cap S_t^{-1}s^{-1}x$. Tomemos $t_1 \in S_t$ tal que $x_1 = t_1^{-1}s^{-1}x$. Então, $t_1 x_1 = s^{-1}x \in U_1$. Assim, os pontos a, x_1, b, os elementos $t_0, t_1 \in S_t$ e os abertos $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ formam uma $(\mathcal{U},t)$-subcadeia de a para b. Portanto, $\omega^*(x,S)$ é transitivo por subcadeias. □

Proposição 1.77. *Seja $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Dado $N \subset X$, os conjuntos $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N,S)$ e $\widehat{\Omega}^*_{\mathcal{O}}(N,S)$ são compactos e invariantes. Além disso, $\omega(N,S) \subset \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N,S)$ e $\omega^*(N,S) \subset \widehat{\Omega}^*_{\mathcal{O}}(N,S)$.*

Demonstração: Com referência à Proposição 1.43, resta mostrar que $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N,S)$ é invariante por S^{-1}. Sejam $x \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N,S)$ e $s \in S$. Dado $\mathcal{U} \in O$ e $t \in S$, tomemos $U \in \mathcal{U}$ tal que $s^{-1}x \in U$. Então, $x \in sU$. Seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ uma cobertura $\{x\}$-subordinada a sU. Tomemos $\tau \in S_t$ tal que $s^{-1}\tau \in S_t$. Agora, consideremos $x_0, ..., x_n \in X$, $x_0 \in N$, $t_0, ..., t_{n-1} \in S_\tau$ e $W_0, ..., W_{n-1} \in \mathcal{W}$ formando uma $(\mathcal{W},\tau)$-subcadeia de x_0 até x, onde $\mathcal{W}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ e de $\mathcal{V}$. Então, $t_{n-1}x_{n-1}, x \in W_{n-1}$, donde $t_{n-1}x_{n-1} \in sU$. Assim, $s^{-1}t_{n-1}x_{n-1} \in U$, com $s^{-1}t_{n-1} \in S_t$. Visto que $S_\tau \subset S_t$ obtemos uma $(\mathcal{U},t)$-subcadeia de x_0 até $s^{-1}x$. Logo, $s^{-1}x \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N,S)$ e, portanto, $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}(N,S)$ é invariante por S^{-1}. □

Assim, os conjuntos transitivos por subcadeias maximais são invariantes, donde obtemos em particular que o conjunto de recorrência por subcadeias $\widehat{\mathfrak{R}}_{\mathcal{O}}$ é invariante. Com isto, cobrimos todos os resultados sobre recorrência por cadeias para ações de grupos onde o subsemigrupo gerador é invariante.

O conceito de decomposição de Morse de (G,X) é definido equivalentemente ao conceito de decomposição de Morse para o semigrupo de transformação (S,X). Assim, temos a seguinte versão do Teorema 1.71 apresentado na seção anterior. A

Teorema 1.78. *Assuma que as órbitas de (G, X) têm fecho conexo. Então, existe uma decomposição de Morse minimal de (G, X) relativa à S se, e somente se, o conjunto de recorrência por cadeias $\mathfrak{R}$ relativo à S tem um número finito de componentes conexas. Neste caso, os conjuntos de Morse coincidem com as componentes conexas de $\mathfrak{R}$.*

Comentários e observações

Todo o conteúdo estudado neste capítulo foi desenvolvido para semigrupos de transformações à esquerda. No entanto, o único conceito que foi definido de forma especialmente adequada para ações à esquerda foi o conceito de cadeias, onde consideramos as translações à direita do semigrupo. Este fato resultou na caracterização do conjunto de recorrência por cadeias a partir dos atratores à direita.

Essa adequação ao conceito de cadeias provém da consideração de semigrupos reversíveis não invariantes combinada com a ação à esquerda. De certa forma, a ação à esquerda de uma translação à direita St é dominada pelo elemento t, o que nos permite interagir ambas as laterais do semigrupo sem a necessidade de invariança. Este recurso foi crucial quando trabalhamos com os conjuntos ω-limites à direita na obtenção dos resultados concernentes à recorrência por cadeias. Por outro lado, a ação à esquerda combinada com translações à esquerda não é conveniente, visto que apenas permite a interação de elementos na lateral esquerda do semigrupo.

No entanto, para semigrupos de transformações à direita podemos adequar a definição de cadeias para obtermos todo o conteúdo deste capítulo desenvolvido analogamente.

Se (X, S) é um semigrupo de transformação à direita, com S reversível e X paracompacto Hausdorff, então, definimos cadeias da seguinte forma.

Definição 1.79. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Dados $x, y \in X$ e $t \in S$, então, uma $(\mathcal{U}, t)$-**cadeia** de x para y consiste de uma seqüência de pontos $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y \in X$, de elementos $t_0, ..., t_{n-1} \in tS$ e de abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $x_i t_i, x_{i+1} \in U_i$, para $i = 0, ..., n-1$.*

Assumindo que X é compacto, dado um atrator à esquerda A de (X, S), temos que A^* é um repulsor à esquerda de (X, S). Além disso, para todo subconjunto $N \subset X$, temos que $\Omega(N)$ é a intersecção de todos os atratores à esquerda contendo $\omega_{\mathrm{e}}(N)$. Assim, o conjunto de recorrência por cadeias é dado por

$$\mathfrak{R} = \bigcap \{A \cup A^* : A \text{ é um atrator à esquerda de } (X, S)\}.$$

Nesta tese abordamos alguns casos de grupos de transformações à direita.

Outra observação que fazemos diz respeito à hipótese de S ser um semigrupo de homeomorfismos sobre X. Neste caso, um conjunto ω-limite à direita do semigrupo de transformação (S^{-1}, X) é um conjunto ω^*-limite à esquerda do semigrupo de transformação (S, X). Da mesma forma, um conjunto ω-limite à esquerda (ω^*-limite à direita ou ω^*-limite à esquerda) de (S^{-1}, X) é um conjunto ω^*-limite à direita (ω-limite à esquerda ou ω-limite à direita) de (S, X). Essas relações entre os conjuntos limites se refletem naturalmente sobre os atratores e repulsores de (S^{-1}, X) e (S, X). No entanto, tais relações não garantem que os pontos recorrentes por cadeias de (S^{-1}, X) coincidem com os pontos recorrentes por cadeias de (S, X), pelo menos quando S não é invariante. De fato, pois a reversibilidade garante que o conjunto de recorrência por cadeias $\mathfrak{R}$ de (S, X) é S-invariante e que o conjunto de recorrência por cadeias $\mathfrak{R}^-$ de (S^{-1}, X) é S^{-1}-invariante (c.f. Corolário 1.46), mas não conseguimos mostrar que estes são estáveis.

Notemos que as coisas se simplificam quando S é invariante. Neste caso, tanto um atrator como um repulsor de (S, X) são conjuntos estáveis, o mesmo ocorrendo em (S^{-1}, X). Além disso, um atrator de S^{-1} é um repulsor de S, e um repulsor de S^{-1} é um atrator de S. Logo, $\mathfrak{R}^- = \mathfrak{R}$. Outro fato interessante é a relação entre os conjuntos de transitividade por cadeias de (S, X) e (S^{-1}, X). Dado $x \in X$, denotemos respectivamente por $\Omega(x)$ e $\Omega(x)^-$ os conjuntos Ω-limite por cadeias de x em (S, X) e em (S^{-1}, X). O seguinte resultado é uma versão da Proposição 1.57 para conjuntos Ω^*-limites por cadeias.

Proposição 1.80. *Assuma que S é um semigrupo invariante de homeomorfismos. Dado $x \in X$, então, $\Omega^*(x)$ é a intersecção de todos os repulsores contendo $\omega^*(x)$.*

Demonstração: Não é possível repetir a demonstração da Proposição 1.57 para este caso. No entanto, pela Proposição 1.55, temos que $\Omega^*(x) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}, t\in S} \omega^*(\Omega^*(x, \mathcal{U}, t))$, onde cada repulsor $\omega^*(\Omega^*(x, \mathcal{U}, t))$ contém $\omega^*(x)$. Seja R um repulsor contendo $\omega^*(x)$, e tomemos o (único) atrator A tal que $A^* = R$. Se $y \in \Omega^*(x)$, então, $x \in \Omega(y)$, onde $\Omega(y)$ é a intersecção de todos os atratores contendo $\omega(y)$. Agora, se $y \notin A \cup R$, segue da Proposição 1.16 que $\omega(y) \subset A$ e $\omega^*(y) \subset R$. Logo, $x \in A$, donde $\omega^*(x) \subset A$, pois A é estável. Mas isto é uma contradição, pois por hipótese $\omega^*(x) \subset R$. Então, $y \in A \cup R$, e $y \notin A$, pois do contrário teríamos novamente que $\omega(y) \subset A$. Portanto, $y \in R$, donde segue o resultado. □

No caso de semigrupo reversível não invariante de homeomorfismos não vale uma versão análoga da Proposição 1.57 para conjuntos Ω^*-limites por cadeias, devido ao fato dos atratores à direita não serem estáveis. Mais especificamente, não garantimos que o fato de um ponto x pertencer a um atrator à direita A implica $\omega^*(x) \subset A$. Uma versão mais fraca já foi provada na Proposição 1.59.

Agora, se S é invariante, segue da proposição acima que $\Omega(x)^- = \Omega^*(x)$ e $\Omega^*(x)^- = \Omega(x)$. Isto significa que os conjuntos de transitividade por cadeias de (S, X) coincidem com os de (S^{-1}, X). O que muda é a ordem dinâmica entre esses conjuntos. Ou seja, se

E e E' são conjuntos de transitividade por cadeias e $E \precsim E'$ em (S, X), então, $E' \precsim E$ em (S^{-1}, X). Isto se deve exatamente às igualdades $\Omega(x)^{-} = \Omega^{*}(x)$ e $\Omega^{*}(x)^{-} = \Omega(x)$. O caso invariante, portanto, traduz exatamente o que ocorre com a dinâmica de fluxos.

Capítulo 2

Semigrupos de transformações em fibrados flag

Estabelecidos os conceitos dinâmicos para ações de semigrupos, consideramos agora semigrupos de transformações em fibrados. Abordamos ações de semigrupos reversíveis sobre um fibrado principal e um fibrado associado, abrangendo objetivamente os fibrados flag. Apresentamos então uma correspondência aos resultados sobre transitividade por cadeias obtidos por Braga Barros e San Martin [4] e Patrão [22].

2.1 Ações de semigrupos de endomorfismos

Nosso objetivo nesta parte é estabelecer os resultados sobre transitividade por cadeias para semigrupos de transformações em fibrados. Para esta realização, abordamos a teoria de semigrupos de sombreamento apresentada na Seção 1.3.2 e no Apêndice A.3, além do conceito de endomorfismos em fibrados topológicos esboçado no Apêndice C.

Para todo espaço topológico Y, denotamos por $C_l(Y)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas entre subconjuntos abertos de Y.

Consideremos um fibrado principal localmente trivial $\pi : Q \to X$ com grupo estrutural G. Dado um espaço topológico F sobre o qual G age à esquerda, seja $\pi_E : E \to X$ o fibrado associado a π, onde $E = Q \times_G F$. Para cada par $(q, u) \in Q \times F$, denotamos por $q \cdot u$ a classe de (q, u) em E. Se $A \subset F$ é um subconjunto não vazio, denotamos por $q \cdot A$ o conjunto de todas as classes $q \cdot u$ com $u \in A$. Para $x \in X$, denotamos a fibra $\pi_E^{-1}(x)$ por E_x.

Definição 2.1. *Um **endomorfismo local** de Q é uma aplicação contínua $\phi : dom(\phi) \to Q$ tal que*

1. *$dom(\phi) = \pi^{-1}(U)$, onde $U \subset X$ é um subconjunto aberto, e*

2. $\phi(qg) = \phi(q)\,g$, *para todos* $q \in dom(\phi)$ *e* $g \in G$.

Denotemos por $End_l(Q)$ o conjunto dos endomorfismos locais de Q. Então, $End_l(Q)$ é um semigrupo local, denominado *semigrupo dos endomorfimos locais de* Q.

Para cada $\phi \in End_l(Q)$, temos a aplicação contínua $\phi_X : \pi(dom(\phi)) \to X$ dada por $\phi_X(\pi(q)) = \pi(\phi(q))$, denominada *aplicação induzida por* ϕ em X. Também temos a aplicação contínua $\phi_E : \pi_E^{-1}(\pi(dom(\phi))) \to E$ dada por $\phi_E(q \cdot u) = \phi(q) \cdot u$, denominada *aplicação induzida por* ϕ *em* E. O conjunto $End_l(X)$ de todas as aplicações induzidas por $End_l(Q)$ em X é denominado de *semigrupo dos endomorfismos locais de* X, e o conjunto $End_l(E)$ de todas as aplicações induzidas por $End_l(Q)$ em E é denominado de *semigrupo dos endomorfismos locais de* E.

Um *semigrupo local de endomorfismos de* Q é um subconjunto $\mathcal{S} \subset End_l(Q)$ fechado para as composições. O seu semigrupo local induzido em X é o conjunto

$$\mathcal{S}_X = \{\Phi \in C_l(X) : \text{existe } \phi \in \mathcal{S} \text{ com } \Phi = \phi_X\}$$

e o seu semigrupo local induzido em E é o conjunto

$$\mathcal{S}_E = \{\Phi \in C_l(E) : \text{existe } \phi \in \mathcal{S} \text{ com } \Phi = \phi_E\}.$$

Assumimos que a fibra típica de $E = Q \times_G F$ é um espaço métrico compacto (F, d) e que o espaço base do fibrado $\pi : Q \to X$ é paracompacto.

Seja (S, Q, σ) um semigrupo de transformação tal que S é um semigrupo reversível agindo por endomorfismos sobre Q, ou seja, $\sigma_t \in End_l(Q)$, para todo $t \in S$. Os semigrupos de transformações induzidos na base X e no espaço associado E são indicados respectivamente por $\left(S, X, \sigma^X\right)$ e $\left(S, E, \sigma^E\right)$, onde $\sigma_t^X = (\sigma_t)_X$ e $\sigma_t^E = (\sigma_t)_E$, para todo $t \in S$. Como $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{ts}$, temos que $\sigma_t^X \circ \sigma_s^X = \sigma_{ts}^X$ e $\sigma_t^E \circ \sigma_s^E = \sigma_{ts}^E$, para quaisquer $s, t \in S$.

Agora, consideremos uma cobertura trivializante localmente finita $\{U_i\}_{i\in I}$ de Q. Então, para cada $i \in I$, existe um homeomorfismo $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ dado por $\psi_i = (\pi, \upsilon_i)$, onde $\upsilon_i : \pi^{-1}(U_i) \to G$ é uma aplicação contínua tal que $\upsilon_i(qg) = \upsilon_i(q)\,g$, para todos $q \in \pi^{-1}(U_i)$ e $g \in G$. A família $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ é denominada um *atlas* de Q. O atlas induzido em E é definido como segue. Para cada $i \in I$, a aplicação $\upsilon_i^E : \pi_E^{-1}(U_i) \to F$ dada por $\upsilon_i^E(q \cdot u) = \upsilon_i(q)\,u$ é aberta. Assim, $\psi_i^E : \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ dada por $\psi_i^E = \left(\pi_E, \upsilon_i^E\right)$ é um homeomorfismo. Então, a família $\Psi^E = \left\{\left(U_i, \psi_i^E\right)\right\}_{i\in I}$ é um atlas de E.

Quando for necessário, denotaremos ψ_i^E também por ψ_i para não carregar a notação.

Para cada $i \in I$, seja $\chi_i : U_i \to Q$ a seção local do fibrado. Tomemos $t \in S$ e $q \in Q$. Se $\pi(q) \in U_i$ e $\sigma_t^X(\pi(q)) \in U_j$, então, $\sigma_t(\chi_i(\pi(q)))$ pertence a mesma fibra que $\chi_j\left(\sigma_t^X(\pi(q))\right)$. Com efeito, temos que

$$\pi(\sigma_t(\chi_i(\pi(q)))) = \sigma_t^X(\pi(\chi_i(\pi(q)))) = \sigma_t^X(\pi(q)) = \pi\left(\chi_j\left(\sigma_t^X(\pi(q))\right)\right).$$

Assim, existe $\rho_{ij}(t,\pi(q)) \in G$ tal que

$$\sigma_t(\chi_i(\pi(q))) = \chi_j\left(\sigma_t^X(\pi(q))\right)\rho_{ij}(t,\pi(q)).$$

Chamamos a aplicação ρ_{ij} de *cociclo local* definido por χ_i e χ_j. Esta aplicação satisfaz a propriedade de um cociclo no seguinte sentido. Sejam $s,t \in S$ e $q \in Q$ tais que $\pi(q) \in U_i$ e $\sigma_t^X(\pi(q)) \in U_j$ e $\sigma_{st}^X(\pi(q)) \in U_k$. Então, existem elementos $\rho_{ij}(t,\pi(q))$, $\rho_{ik}(st,\pi(q))$ e $\rho_{jk}\left(s,\sigma_t^X(\pi(q))\right)$ de G tais que

$$\rho_{ik}(st,\pi(q)) = \rho_{jk}\left(s,\sigma_t^X(\pi(q))\right)\rho_{ij}(t,\pi(q)).$$

Definição 2.2. *Dados* $\varepsilon > 0$ *e uma cobertura aberta* $\mathcal{U}$ *de* X*, uma* cobertura Ψ-adaptada de E *é definida por*

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \left\{\psi_i^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(u)) : U \in \mathcal{U}, i \in I \text{ e } u \in F\right\}.$$

Denotamos por $\mathcal{O}_\Psi(E)$ a família de todas as coberturas abertas Ψ-adaptadas. Sob condições bastante gerais, a família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ é admissível. Com efeito, se o fibrado $Q \to X$ pode ser reduzido a um subfibrado $P \to X$ cujo grupo estrutural K age na fibra por isometrias, então, a família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ é admissível. Este resultado é demonstrado com detalhes na Seção 5.5.1 de [22], e pode ser aplicado nos casos de fibrados flags associados a um fibrado principal, propriamente na construção da transitividade por cadeias para semigrupos de transformações no fibrado.

No entanto, outra condição é necessária para que possamos usar os resultados da teoria de semigrupos de sombreamento. O semigrupo local sobre o qual é realizada as perturbações do semigrupo S precisa satisfazer a propriedade de transitividade local com respeito à família $\mathcal{O}_\Psi(E)$. Esta propriedade é satisfeita então pelo semigrupo de endomorfismos $End_l(E)$. Todos os detalhes da demonstração deste fato se encontram na Seção 5.1.2 de [22], onde são estabelecidas algumas hipóteses para a ação do grupo de estrutura G sobre a fibra F. Assumindo que (F,d) é convexo e que, para todos $u,v \in F$, existe $g \in G$ tal que $v = gu$ e

$$\mathrm{d}(u,v) = \sup_{w \in F} \mathrm{d}(gw,w)$$

então $End_l(E)$ é $\mathcal{O}_\Psi(E)$-localmente transitivo. Estas condições são satisfeitas no caso de G conter um subgrupo compacto e metrizável (K,d_K) agindo aberta e transitivamente na fibra F, fato que está ligado diretamente com a existência de uma métrica invariante por K em F, a qual é compatível com a sua topologia. Neste caso, a fibra F é identificada com o espaço quociente de K por um subgrupo de isotropia, e a métrica invariante em F compatível com a topologia quociente é a métrica de Hausdorff d_H obtida a partir de d_K. Contudo, a ação de K em (F,d_H) é $\mathcal{O}_{\mathrm{d}_H}(F)$-localmente transitiva, onde $\mathcal{O}_{\mathrm{d}_H}(F)$ é a família de todas as coberturas $\mathcal{B}_\varepsilon$, constituídas por todas as ε-bolas de F na métrica de Hausdorff.

2.1.1 Transitividade por cadeias

A partir de agora assumimos que o fibrado $Q \to X$ é reduzível a um subfibrado $P \to X$ com grupo de estrutura K, onde $K \subset G$ é um subgrupo compacto e metrizável agindo aberta e transitivamente na fibra F do fibrado associado $E \to X$. Munimos F com a métrica de Hausdorff, denotada por d, e assumimos que (F, d) é convexo.

Fixando um atlas $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ de Q, consideremos a família $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\Psi(E)$ de todas as coberturas abertas Ψ-adaptadas. Então, $\mathcal{O}$ é admissível e o semigrupo de endomorfismos $End_l(E)$ é $\mathcal{O}$-localmente transitivo.

Conforme as definições e notações empregadas na Seção 1.3.2, dados $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, denotamos por $End_l(E)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ o $(\mathcal{U}_\varepsilon, t)$-semigrupo de sombreamento do semigrupo de transformação (S, E). Segue então um caso particular do Teorema 1.49 para semigrupos de transformações em fibrados associados.

Teorema 2.3. *Um subconjunto não vazio $M \subset X$ é um conjunto de transitividade por cadeias relativo a $\mathcal{O}$ se, e somente se, para cada $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}$ e $t \in S$, existe um conjunto controlável efetivo $D_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ para a ação do semigrupo de sombreamento $End_l(E)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ de forma que*

$$M = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}, t \in S} (D_{\mathcal{U}_\varepsilon, t})_0 = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}, t \in S} D_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}, t \in S} \mathrm{fe}(D_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}).$$

Cada semigrupo de sombreamento $End_l(E)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ é induzido pelo semigrupo local

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} = \left\{\phi \in End_l(Q) : \phi_E \in End_l(E)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}\right\}$$

o qual é gerado pelo conjunto

$$V_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} = \left\{\phi \circ \sigma_s : \phi_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon), s \in St\right\}.$$

Para aplicarmos os resultados preliminares precisamos verificar que os semigrupos $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ são acessíveis.

Dados $x \in X$ e $g \in G$, denotamos por $c_x : X \to X$ a aplicação constante igual a x, e por $L_g : G \to G$ a translação à esquerda por g. Consideremos $c_x \times L_g : X \times G \to X \times G$ a notação usual da aplicação produto de c_x e L_g. Agora, para cada $i \in I$ e $U \in \mathcal{U}$, definimos a aplicação

$$\phi^i_{U,x,g} = \psi_i^{-1} \circ (c_x \times L_g) \circ \psi_i \mid_{\pi^{-1}(U \cap U_i)}$$

com x percorrendo $U \cap U_i$ e g percorrendo G. Então, $\phi^i_{U,x,g}$ é um endomorfismo local de Q.

Para a verificação do próximo resultado, precisamos do seguinte lema, cuja prova se encontra em [22], página 98.

Lema 2.4. *Sejam $p, q \in Q$ e $\phi \in End_l(Q)$ tais que $p = \phi(q)$ e $\phi_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$. Então, existem $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in G$ e A uma vizinhança aberta de g em G tais que $\phi^i_{U,\pi(p),g}(q) = p$ e, para todos $y \in U \cap U_i$ e $h \in A$, tem-se que $\left(\phi^i_{U,y,h}\right)_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$.*

Proposição 2.5. *Sejam $q \in Q$, $t \in S$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}$. Então, as órbitas $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$ e $\mathcal{S}^*_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$ são conjuntos abertos.*

Demonstração: Semelhantemente à demonstração da Proposição A.14, basta mostrarmos que os respectivos geradores $V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$ e $V^*_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$ são conjuntos abertos de Q. Primeiramente, seja $p \in V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$. Então, existem $\phi \in End_l(Q)$ e $s \in St$ tais que $\phi_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$ e $\phi(sq) = p$. Pelo Lema 2.4, existem $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in G$ e A vizinhança aberta de g em G tais que $\phi^i_{U,\pi(p),g}(sq) = p$ e, para todos $y \in U \cap U_i$ e $h \in A$, tem-se que $\left(\phi^i_{U,y,h}\right)_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$. O elemento g de G é dado por $g = \upsilon_i(\phi \circ \chi_i(\pi(sq)))$, onde $\psi_i = (\pi, \upsilon_i)$ e $\chi_i : U_i \to Q$ é a seção local de ψ_i. Então, $A\upsilon_i(sq)$ é uma vizinhança aberta de $g\upsilon_i(sq) = \upsilon_i(p)$. Assim,

$$\psi_i(p) = (\pi(p), \upsilon_i(p)) \in U \cap U_i \times A\upsilon_i(sq)$$

isto é, $p \in \psi_i^{-1}(U \cap U_i \times A\upsilon_i(sq))$. Agora, se $r \in \psi_i^{-1}(U \cap U_i \times A\upsilon_i(sq))$, temos que $\pi(r) \in U \cap U_i$ e existe $h \in A$ tal que $\upsilon_i(r) = h\upsilon_i(sq)$. Assim,

$$\phi^i_{U,\pi(r),h}(sq) = \psi_i^{-1}(\pi(r), \upsilon_i(r)) = r.$$

Visto que $\left(\phi^i_{U,\pi(r),h}\right)_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$, temos que $r \in V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$. Logo,

$$p \in \psi_i^{-1}(U \cap U_i \times A\upsilon_i(sq)) \subset V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q.$$

Portanto, $V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$ é aberto. Agora, seja $p \in V^*_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$. Então, existem $\phi \in End_l(Q)$ e $s \in St$ tais que $\phi_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$ e $\phi(sp) = q$. Novamente pelo Lema 2.4, existem $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in G$ e A vizinhança aberta de g em G tais que $\phi^i_{U,\pi(q),g}(sp) = q$ e, para todos $y \in U \cap U_i$ e $h \in A$, tem-se que $\left(\phi^i_{U,y,h}\right)_E \in V_{End_l(E)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$. Então, $\upsilon_i(q) = g\upsilon_i(sp)$. Assim,

$$\psi_i(sp) = (\pi(sp), \upsilon_i(sp)) \in U \cap U_i \times A^{-1}\upsilon_i(q)$$

ou seja, $p \in \sigma_s^{-1}\left(\psi_i^{-1}(U \cap U_i \times A^{-1}\upsilon_i(q))\right)$. Se $r \in \sigma_s^{-1}\left(\psi_i^{-1}(U \cap U_i \times A^{-1}\upsilon_i(q))\right)$, temos que $h\upsilon_i(sr) = \upsilon_i(q)$, para algum $h \in A$. Logo,

$$\phi^i_{U,\pi(q),h}(sr) = \psi_i^{-1}(\pi(q), \upsilon_i(q)) = q$$

donde $r \in V^*_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$. Assim, $\sigma_s^{-1}\left(\psi_i^{-1}(U \cap U_i \times A^{-1}\upsilon_i(q))\right) \subset V^*_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$ e, portanto, $V^*_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}q$ é aberto. $\square$

Agora, denotemos por $c_l(X)$ o semigrupo das aplicações constantes cujos domínios são subconjuntos abertos de X tais que cada um deles está contido num único elemento da família trivializante $\{U_i : i \in I\}$. Conforme observação no início da Seção 1.3.3, temos que $c_l(X)$ e $C_l(X)$ são semigrupos locais localmente transitivos em relação a qualquer família de coberturas abertas de X.

Lema 2.6. *Sejam $t \in S$ e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Para todo $\varepsilon > 0$, tem-se que*

$$c_l(X)_{\mathcal{U},t} \subset (\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X \subset C_l(X)_{\mathcal{U},t}.$$

Demonstração: Basta mostrar as inclusões dos geradores

$$V_{c_l(X)}(St,\mathcal{U}) \subset (V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X \subset V_{C_l(X)}(St,\mathcal{U}).$$

Se $\eta \in V_{c_l(X)}(St,\mathcal{U})$, então, $\eta = \varphi \circ \sigma_s^X$, com $\varphi \in V_{c_l(X)}(id,\mathcal{U})$ e $s \in St$. Então, existem $y \in X$ e $i \in I$ tais que $\varphi(x) = y$, para todo $x \in dom(\varphi)$, e $dom(\varphi) \subset U_i$, de forma que $dom(\varphi) \nsubseteq U_j$ se $j \neq i$. Vamos mostrar que $\varphi = \phi_X$ para algum $\phi \in End_l(Q)$ tal que $\phi_E \in V_{End_l(E)}(id,\mathcal{U}_\varepsilon)$. Com efeito, consideremos o conjunto $\pi^{-1}(dom(\varphi)) = \psi_i^{-1}(dom(\varphi) \times G)$ e definimos a aplicação $\phi : \pi^{-1}(dom(\varphi)) \to Q$ por

$$\phi\left(\psi_i^{-1}(x,g)\right) = \psi_i^{-1}(y,g)$$

para todo $\psi_i^{-1}(x,g) \in \pi^{-1}(dom(\varphi))$. Lembrando ainda que $\psi_i^{-1}(x,g) = \chi_i(x)\,g$, temos que ϕ é um endomorfismo. Além disso, dado $q \in \pi^{-1}(dom(\varphi))$, temos que

$$\phi_X(\pi(q)) = \pi\left(\phi\left(\psi_i^{-1}(\pi(q), \upsilon_i(q))\right)\right) = \pi\left(\psi_i^{-1}(y, \upsilon_i(q))\right) = y.$$

Logo, $\phi_X = \varphi$, donde $(\phi \circ \alpha_s)_X = \eta$. Para mostrarmos que $\eta \in (V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$, resta mostrar que $\phi_E \in V_{End_l(E)}(id,\mathcal{U}_\varepsilon)$. Dado $q \cdot u \in dom(\phi_E)$, temos que $\pi(q) \in dom(\varphi)$, donde existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\pi(q), y \in U$. Assim,

$$\psi_i^E(\phi_E(q \cdot u)) = \psi_i^E\left(\psi_i^{-1}(y, \upsilon_i(q)) \cdot u\right) = (y, \upsilon_i(q)\,u)$$

e

$$\psi_i^E(q \cdot u) = (\pi(q), \upsilon_i(q)\,u)$$

donde $\phi_E(q \cdot u), q \cdot u \in \psi_i^{-1}(U \cap U_i \times B_\varepsilon(\upsilon_i(q)\,u)) \in \mathcal{U}_\varepsilon$. Portanto, $\phi_E \in V_{End_l(E)}(id,\mathcal{U}_\varepsilon)$, como queríamos demonstrar. Agora, seja $\eta \in (V_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$. Então, $\eta = (\phi \circ \alpha_s)_X$, onde $\phi_E \in V_{End_l(E)}(id,\mathcal{U}_\varepsilon)$. Para a verificação de que $\eta \in V_{C_l(X)}(St,\mathcal{U})$, basta mostrarmos que $\phi_X \in V_{C_l(X)}(id,\mathcal{U})$. Com efeito, dados $\pi(q) \in dom(\phi_X)$ e $u \in F$, temos que $q \cdot u \in dom(\phi_E)$. Logo, existe $\psi_i^{-1}(U \cap U_i \times B_\varepsilon(v)) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ tal que $q \cdot u, \phi_E(q \cdot u) \in \psi_i^{-1}(U \cap U_i \times B_\varepsilon(v))$. Assim, $\pi(q), \phi_X(\pi(q)) \in U$, donde concluímos o resultado. $\square$

Visto que X é paracompacto, então, a família $\mathcal{O}(X)$ de todas as coberturas abertas de X é admissível e os semigrupos locais $c_l(X)$ e $C_l(X)$ são $\mathcal{O}(X)$-localmente transitivos. Com isso, apresentamos enfim uma relação entre a transitividade por cadeias do semigrupo de transformação $\left(S, X, \alpha^X\right)$ e a transitividade dos semigrupos de sombreamento induzidos na base.

Proposição 2.7. *O semigrupo de transformação $\left(S, X, \alpha^X\right)$ é $\mathcal{O}(X)$-transitivo por cadeias se, e somente se, todos os semigrupos $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$ são transitivos.*

Demonstração: Se o semigrupo de transformação $\left(S, X, \alpha^X\right)$ é transitivo por cadeias, segue do Teorema 1.49 que todos os semigrupos de sombreamento $c_l(X)_{\mathcal{U},t}$ são transitivos. Pelo Lema 2.6, isto implica que todos os semigrupos $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$ são transitivos. Reciprocamente, se todos os semigrupos de sombreamento induzidos na base são transitivos, segue também pelo Lema 2.6 que todos os semigrupos de sombreamento $C_l(X)_{\mathcal{U},t}$ são transitivos. Novamente pelo Teorema 1.49, temos que $\left(S, X, \alpha^X\right)$ é transitivo por cadeias, e o resultado está demonstrado. □

Finalmente, apresentamos uma conexão da transitividade por cadeias no espaço total E com a transitividade por cadeias no espaço base. A hipótese que assumimos sobre a ação do grupo G em F é a existência de uma medida de probabilidade invariante. Tal condição é satisfeita por exemplo se G é compacto ou solúvel (c.f. [39]).

Proposição 2.8. *Se a ação do grupo de estrutura G em F deixa invariante uma medida de probabilidade, então, $\left(S, E, \sigma^E\right)$ é $\mathcal{O}_\Psi(E)$-transitivo por cadeias se, e somente se, $\left(S, X, \sigma^X\right)$ é $\mathcal{O}(X)$-transitivo por cadeias.*

Demonstração: Se $\left(S, X, \sigma^X\right)$ é $\mathcal{O}(X)$-transitivo por cadeias, segue da Proposição 2.7 que os semigrupos $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$ são transitivos, para todos $t \in S$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Então, X é o único conjunto controlável de $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$. Visto que as órbitas do semigrupo $\mathcal{S}^*_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$ são abertas, temos que $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$ é acessível sobre X. Logo, $\operatorname{int}\left((\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_q\right) \neq \emptyset$, para todo $q \in Q$. Agora, pelo Lema 6.2 em [28], o fato de existir uma medida de probabilidade invariante por G em F implica que os subsemigrupos $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_q$ de G são transitivos em F. Pelo Teorema **??**, segue que E é o único conjunto controlável de $End_l(E)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$. Concluímos então pelo Teorema 1.49 que $\left(S, E, \sigma^E\right)$ é transitivo por cadeias. Reciprocamente, suponhamos que $\left(S, E, \sigma^E\right)$ é transitivo por cadeias. Então, pelo Teorema 1.49, temos que E é o único conjunto controlável de $End_l(E)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$, para todos $t \in S$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Visto que E se projeta sobre um conjunto controlável efetivo de $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$, temos que $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_X$ é transitivo, para todos $t \in S$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Enfim, segue da Proposição 2.7 que $\left(S, X, \sigma^X\right)$ é transitivo por cadeias. □

Corolário 2.9. *Se o grupo de estrutura G é compacto ou solúvel, então, $\left(S, E, \sigma^E\right)$ é $\mathcal{O}_\Psi(E)$-transitivo por cadeias se, e somente se, $\left(S, X, \sigma^X\right)$ é $\mathcal{O}(X)$-transitivo por cadeias.*

2.1.2 Conjuntos de transitividade por cadeias em fibrados flag

Atingimos agora o objetivo principal deste capítulo. Apresentamos a caracterização dos conjuntos de transitividade por cadeias para semigrupos de transformações em fibrados flag, a qual é obtida via o grupo de Weyl canônico da álgebra de Lie envolvida.

Seja $\pi : Q \to X$ um fibrado principal localmente trivial cujo grupo de estrutura G é um grupo de Lie redutível com componente semi-simples conexa. Sejam $\mathfrak{g}$ a componente semi-simples da álgebra de Lie de G e W o grupo de Weyl canônico de $\mathfrak{g}$.

Segundo o Lema 6.4 de [22], o fibrado $Q \to X$ pode ser reduzido a um subfibrado $P \to X$ cujo grupo de estrutura é um subgrupo compacto e metrizável da componente semi-simples de G, o qual é transitivo nos flags de $\mathfrak{g}$. Fixando $\Theta \subset \Sigma$ e um atlas $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ de Q, consideremos a família $\mathcal{O}_\Theta = \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$ de todas as coberturas abertas Ψ-adaptadas. Pela observação logo após o Teorema B.14, temos que $\mathcal{O}_\Theta$ é admissível e o semigrupo de endomorfismos $End_l(\mathbb{E}_\Theta)$ é $\mathcal{O}_\Theta$-localmente transitivo.

Seja (S, Q, σ) um semigrupo de transformação de endomorfismos. Assumimos que o semigrupo de transformação $\left(S, X, \sigma^X\right)$ induzido na base é transitivo por cadeias. Conforme a Proposição 2.7, isto é equivalente ao fato de que, dado $\Theta \subset \Sigma$, o semigrupo $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t})_X$ induzido na base por $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ é transitivo, para todo $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta$ e $t \in S$.

Visto que $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \subset End_l(Q)$, temos que os conjuntos controláveis de $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t})_{\mathbb{E}_\Theta} = End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ em $\mathbb{E}_\Theta$ são da forma $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)$, para algum $w \in W$, onde $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_x \neq \emptyset$, para todo $x \in X$.

Teorema 2.10. *Para cada $w \in W$, seja*

$$E_\Theta(w) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta, t \in S} \mathrm{fe}\left(\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)_0\right).$$

Então, $E_\Theta(w) \neq \emptyset$.

Demonstração: Fixemos $x \in X$. Visto que $(\mathbb{E}_\Theta)_x$ é homeomorfo à $\mathbb{F}_\Theta$, temos que $(\mathbb{E}_\Theta)_x$ é compacto. Consideremos a família de subconjuntos fechados de $(\mathbb{E}_\Theta)_x$ dada por

$$\mathcal{F} = \left\{\mathrm{fe}\left(\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)_0\right) \cap (\mathbb{E}_\Theta)_x : \mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta \text{ e } t \in S\right\}.$$

Dados $t_1, ..., t_n \in S$ e $\mathcal{U}^1_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}^n_{\varepsilon_n} \in \mathcal{O}_\Theta$, tomemos

$$t \in St_1 \cap ... \cap St_n \quad \text{e} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^1 \wedge ... \wedge \mathcal{U}^n.$$

Se $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$, então, $\mathcal{U}_\varepsilon \leqslant \mathcal{U}^i_{\varepsilon_i}$, para $i = 1, ..., n$. Pela observação logo após a Definição A.11 do Apêndice A.3, temos que

$$End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t} \subset End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}^i_{\varepsilon_i},t_i}$$

para todo i. Logo, $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w)_0 \subset \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}^i_{\varepsilon_i},t_i}(w)_0$, donde

$$\emptyset \neq \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_x \subset \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}^i_{\varepsilon_i},t_i}(w)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_x$$

para todo i. Assim,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{fe}\left(\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}^i_{\varepsilon_i},t_i}(w)_0\right) \cap (\mathbb{E}_\Theta)_x \neq \emptyset.$$

Portanto, $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade de intersecção finita, donde concluímos que $E_\Theta(w) \neq \emptyset$. □

A Proposição 2.10 juntamente com o Teorema 2.3 nos apresentam todos os conjuntos de transitividade por cadeias do semigrupo de transformação em um fibrado flag. Mais ainda, podemos mostrar que os conjuntos de transitividade por cadeias no fibrado flag maximal $\mathbb{E}$ são projetados sobre os conjuntos de transitividade por cadeias num fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta$. Com efeito, dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, $\varepsilon > 0$ e $t \in S$, seja $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t} \subset End_l(Q)$ o semigrupo que induz o semigrupo de sombreamento $End_l(\mathbb{E})_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$ em $\mathbb{E}$. Observemos que os $(\mathcal{U}_\varepsilon, t)$-semigrupos de sombreamento não dependem da estrutura de semigrupo de S, mas, somente do elemento $t \in S$. Sendo assim, podemos também considerar sombreamentos com endomorfismos pequenos em Q da mesma maneira realizada no contexto de semifluxos (ver Capítulo 2 de [15]). É possível mostrar que existe um semigrupo $\mathcal{S}(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, t) \subset End_l(Q)$ o qual possui órbitas progressivas e regressivas abertas em Q e induz ambos os semigrupos de sombreamento $End_l(\mathbb{E})_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$ e $End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$ nos respectivos fibrados flag (c.f. Teorema 2.9 de [15]). Em particular, $\mathcal{S}(Q; \mathcal{U}, \varepsilon, t) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$, donde segue que $End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t} \subset (\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_{\mathbb{E}_\Theta}$. A inclusão contrária segue pelo fato da fibração natural $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ ser uma contração com respeito às métricas de Hausdorff. Para ver isto, tomemos $V = \left(\psi^{\mathbb{E}}_i\right)^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(u))$, com $U \in \mathcal{U}$, $i \in I$ e $u \in \mathbb{F}$. Se $q \cdot v \in V$, então, $(\pi(q), v_i(q)v) \in (U \cap U_i) \times B_\varepsilon(u)$. Assim

$$\mathrm{d}_\Theta(v_i(q)\pi_\Theta(v), \pi_\Theta(u)) \leq \mathrm{d}(v_i(q)v, u) < \varepsilon.$$

Logo,

$$\psi^{\mathbb{E}_\Theta}_i(\widetilde{\pi}_\Theta(q \cdot v)) = (\pi(q), v_i(q)\pi_\Theta(v)) \in (U \cap U_i) \times B^\Theta_\varepsilon(\pi_\Theta(u)).$$

Portanto, $\widetilde{\pi}_\Theta(q \cdot v) \in \left(\psi^{\mathbb{E}_\Theta}_i\right)^{-1}\left((U \cap U_i) \times B^\Theta_\varepsilon(\pi_\Theta(u))\right)$, donde concluímos que

$$\widetilde{\pi}_\Theta\left(\left(\psi^{\mathbb{E}}_i\right)^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(u))\right) \subset \left(\psi^{\mathbb{E}_\Theta}_i\right)^{-1}\left((U \cap U_i) \times B^\Theta_\varepsilon(\pi_\Theta(u))\right).$$

Agora, dado $\phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$, escrevamos

$$\phi = \phi_1 \circ \sigma_{t_1} \circ \cdots \circ \phi_n \circ \sigma_{t_n}$$

onde $(\phi_j)_{\mathbb{E}} \in V_{End_l(\mathbb{E})}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$ e $t_j \in St$. Se $q \cdot v \in dom\,(\phi_j)_{\mathbb{E}_\Theta}$, então, $q \cdot u \in dom\,(\phi_j)_{\mathbb{E}}$, onde $v = \pi_\Theta(u)$. Logo, existe $\left(\psi_i^{\mathbb{E}}\right)^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(u)) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ tal que $q \cdot u, \phi_j(q) \cdot u \in \left(\psi_i^{\mathbb{E}}\right)^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(u))$. Assim,

$$\begin{aligned} q \cdot \pi_\Theta(u), \phi_j(q) \cdot \pi_\Theta(u) &\in \widetilde{\pi}_\Theta\left(\left(\psi_i^{\mathbb{E}}\right)^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(u))\right) \\ &\subset \left(\psi_i^{\mathbb{E}_\Theta}\right)^{-1}\left((U \cap U_i) \times B_\varepsilon^\Theta(\pi_\Theta(u))\right). \end{aligned}$$

Logo, $(\phi_j)_{\mathbb{E}_\Theta} \in V_{End_l(\mathbb{E}_\Theta)}(id, \mathcal{U}_\varepsilon)$, donde concluímos que $\phi_{\mathbb{E}_\Theta} \in End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$. Portanto, $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_{\mathbb{E}_\Theta} = End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$. Enfim, segue do Corolário 4.33 de [22] que $\widetilde{\pi}_\Theta(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w)) = \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w)$, para todo $w \in W$, onde $\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w)$ é o conjunto controlável de $End_l(\mathbb{E})_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$ em $\mathbb{E}$ e $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w)$ é o conjunto controlável de $End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$ em $\mathbb{E}_\Theta$. Repetindo a demonstração da Proposição 6.7 de [22], mostramos que $\widetilde{\pi}_\Theta(E(w)) = E_\Theta(w)$, para todo $w \in W$.

Concluímos assim o seguinte resultado.

Teorema 2.11. *Para cada $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que E é um conjunto de transitividade por cadeias de $\left(S, \mathbb{E}_\Theta, \sigma^{\mathbb{E}_\Theta}\right)$ relativo à $\mathcal{O}_\Theta$ se, e somente se, $E = E_\Theta(w)$, para algum $w \in W$. Além disso, tem-se que*

$$\widetilde{\pi}_\Theta(E(w)) = E_\Theta(w)$$

onde $\widetilde{\pi}_\Theta$ é a fibração $\mathbb{E} \to \mathbb{E}_\Theta$. Em particular, existe um número finito de conjuntos $\mathcal{O}_\Theta$-transitivos por cadeias maximais em $\mathbb{E}_\Theta$.

2.1.3 Tipo parabólico; ordem dinâmica e ordem de Bruhat - Chevaley

Dados um subsemigrupo $T \subset G$, com $\mathrm{int}(T) \neq \emptyset$, e $\Theta \subset \Sigma$, seja $\mathbb{A}_\Theta(1)$ o único conjunto controlável invariante de T no flag $\mathbb{F}_\Theta$. Conforme [34], existe um único $\Theta(T) \subset \Sigma$ o qual é maximal satisfazendo $\pi_\Theta^{-1}(\mathbb{A}_\Theta(1)) = \mathbb{A}(1)$, onde $\mathbb{A}(1)$ é o conjunto controlável invariante de T no flag maximal $\mathbb{F}$. O subconjunto $\Theta(T)$ é denominado de *tipo parabólico de T*.

Se $T_1 \subset T_2$ são subsemigrupos de G com pontos interiores, e $\mathbb{A}^1_\Theta(1)$ e $\mathbb{A}^2_\Theta(1)$ são seus respectivos conjuntos controláveis invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$, então, $\mathbb{A}^1_\Theta(1) \subset \mathbb{A}^2_\Theta(1)$ e, portanto, $\Theta(T_1) \subset \Theta(T_2)$.

Agora, dado um semigrupo local de endomorfismos $\mathcal{S} \subset End_l(Q)$, o tipo parabólico $\Theta(\mathcal{S}_q)$ de $\mathcal{S}_q$ independe do ponto $q \in Q$ (ver Teorema 4.32 de [22]). Assim, $\Theta(\mathcal{S}) = \Theta(\mathcal{S}_q)$ (qualquer q) define o tipo parabólico de $\mathcal{S}$. Como conseqüência deste resultado, o subgrupo $W(\mathcal{S}) = \{w \in W : \mathbb{D}(w) = \mathbb{D}(1)\}$ de W é parabólico de tipo $\Theta(\mathcal{S})$, ou seja, $W(\mathcal{S}) = W_{\Theta(\mathcal{S})}$ é o subgrupo gerado pelas reflexões $\{r_\alpha : \alpha \in \Theta(\mathcal{S})\}$.

Considerando a ordem de Bruhat-Chevaley no quociente $W(\mathcal{S}) \setminus W$, a qual está definida no Apêndice B.3.1, temos o seguinte resultado, provado em [22], Teorema 4.36.

Proposição 2.12. *Seja, $\mathcal{S} \subset End_l(Q)$ um semigrupo local. Tem-se que $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}(w) \preceq \mathbb{D}_{\mathcal{S}}(w')$ se, e somente se, $W(\mathcal{S})w \geqslant W(\mathcal{S})w'$. Em particular, $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}^{\Theta}(w) = \mathbb{D}_{\mathcal{S}}^{\Theta}(w')$ se, e somente se, $W(\mathcal{S})wW_\Theta = W(\mathcal{S})w'W_\Theta$. Além disso, o conjunto controlável $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}^{\Theta}(1)$ é o único maximal e $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}^{\Theta}(w_0)$ é o único minimal, onde w_0 é a involução principal de W em relação a Σ.*

Na seqüência, definimos um importante conceito original da teoria de fluxos sobre fibrados flag.

Definição 2.13. *O **tipo parabólico** do semigrupo de transformação (S, Q, σ) é dado por*

$$\Theta(\sigma) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}), t \in S} \Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}\right)$$

e $W(\sigma)$ denota o subgrupo parabólico de W de tipo $\Theta(\sigma)$.

O seguinte resultado mostra que a intersecção considerada na definição de tipo parabólico de (S, Q, σ) faz sentido.

Lema 2.14. *Existem $\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0} \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})$ e $t_0 \in S$ tais que $\Theta(\sigma) = \Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}, t_0}\right)$.*

Demonstração: Visto que o sistema de raízes simples Σ é finito, existe apenas um número finito de tipos parabólicos de semigrupos de sombreamento. Denotemos estes tipos parabólicos por $\Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^k_{\varepsilon_k}, t_k}\right)$, $k = 1, ..., n$. Tomando $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ e

$$\mathcal{U}^0 = \bigwedge_{k=1}^{n} \mathcal{U}^k_{\varepsilon_k} \qquad \text{e} \qquad t_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} St_k$$

temos que $End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}, t_0} \subset \bigcap_{k=1}^{n} End_l(\mathbb{E}_\Theta)_{\mathcal{U}^k_{\varepsilon_k}, t_k}$. Logo,

$$\Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}, t_0}\right) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^k_{\varepsilon_k}, t_k}\right) = \Theta(\sigma) \subset \Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}, t_0}\right)$$

e o resultado segue. □

O **tipo parabólico reverso** de (S, Q, σ) é definido pelo dual

$$\Theta^*(\sigma) = -w_0\Theta(\sigma) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}), t\in S} -w_0\Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}\right)$$

(c.f. [32]). Segue do Lema 2.14 acima e da Proposição 6.2 de [32] que $\Theta^*(\sigma) = \Theta\left(\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0},t_0}\right)^{-1}_q\right)$ (qualquer q).

O Teorema seguinte mostra que a ordem dinâmica entre os conjuntos de transitividade por cadeias de (S, Q, σ) é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley no quociente $W(\sigma) \setminus W$.

Teorema 2.15. *Tem-se que $E(w) \precsim E(w')$ se, e somente se, $W(\sigma) w \geqslant W(\sigma) w'$. Em particular, $E_\Theta(w) = E_\Theta(w')$ se, e somente se, $W(\sigma) wW_\Theta = W(\sigma) w'W_\Theta$. Além disso, $E_\Theta(1)$ é o único maximal e $E_\Theta(w_0)$ é o único minimal, onde w_0 é a involução principal de W em relação a Σ.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{U}_{\varepsilon_0} \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})$ e $t_0 \in S$ tais que $\Theta(\sigma) = \Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\right)$, como no Lema 2.14. Então, $W(\sigma) = W\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\right)$, e $E(w) \subset \mathbb{D}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(w)_0$, para todo $w \in W$. Se $E(w) \precsim E(w')$, então, existe $\xi \in E(w)$ e $\xi' \in E(w')$ tais que $\xi' \in \Omega(\xi)$, donde $\xi' \in End_l(\mathbb{E})_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\xi$ e, portanto, $\mathbb{D}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(w) \preceq \mathbb{D}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(w')$. Segue da Proposição 2.12 que $W(\sigma) w \geqslant W(\sigma) w'$. Reciprocamente, sejam $w, w' \in W$ tais que $W(\sigma) w \geqslant W(\sigma) w'$. Dados $\mathcal{V}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})$ e $t \in S$, tomemos $\mathcal{W} = \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$, $\mu = \min\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$ e $s \in St \cap St_0$. Então, $\mathcal{S}_{\mathcal{W}_\mu,s} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}$, donde $\Theta(\sigma) = \Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{W}_\mu,s}\right)$. Além disso, novamente pela Proposição 2.12 temos que $\mathbb{D}_{\mathcal{W}_\mu,s}(w) \preceq \mathbb{D}_{\mathcal{W}_\mu,s}(w')$. Visto que $E(w) \subset \mathbb{D}_{\mathcal{W}_\mu,s}(w)_0$ e $E(w') \subset \mathbb{D}_{\mathcal{W}_\mu,s}(w')_0$, segue então que $\xi' \in End_l(\mathbb{E})_{\mathcal{W}_\mu,s}\xi$, para todos $\xi \in E(w)$ e $\xi' \in E(w')$. Logo, $\xi' \in \Omega(\xi, \mathcal{W}_\mu, s) \subset \Omega(\xi, \mathcal{V}_\varepsilon, t)$, para todos $\xi \in E(w)$ e $\xi' \in E(w')$. Portanto, $E(w) \precsim E(w')$. $\square$

A partir de agora, denotemos cada tipo parabólico $\Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}\right)$ por $\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$. O resultado seguinte apresenta a principal propriedade do tipo parabólico da ação de S no fibrado.

Proposição 2.16. *Os conjuntos de transitividade por cadeias $E_{\Theta(\sigma)}(1)$ e $E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)$ nos fibrados associados $\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}$ e $\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}$ satisfazem*

$$\widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta(\sigma)}\left(E_{\Theta(\sigma)}(1)\right) = E(1) \qquad e \qquad \widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta^*(\sigma)}\left(E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)\right) = E(w_0).$$

Demonstração: Dados $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})$ e $t \in S$, sejam $\mathcal{V} = \mathcal{U}^0 \wedge \mathcal{U}$, $\delta = \min\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$ e $s \in St \cap St_0$, onde $\Theta(\sigma) = \Theta_{\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0},t_0}$. Então, $\mathcal{S}_{\mathcal{V}_\delta,s} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}$, donde $\mathbb{D}_{\mathcal{V}_\delta,s}(1)_0 \subset \mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0$. Além disso, $\mathcal{S}_{\mathcal{V}_\delta,s} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0},t_0}$, donde $\Theta_{\mathcal{V}_\delta,s} \subset \Theta(\sigma)$ e, portanto, $\Theta_{\mathcal{V}_\delta,s} = \Theta(\sigma)$. Agora, se $q \cdot u \in \widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta(\sigma)}\left(E_{\Theta(\sigma)}(1)\right)$, então,

$$q \cdot \pi_{\Theta(\sigma)}(u) \in \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon,t} \mathbb{D}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0$$

donde
$$q \cdot u \in q \cdot \pi_{\Theta(\sigma)}^{-1}\left(\mathbb{A}_{\mathcal{V}_\delta,s}^{\Theta(\sigma)}(1)_0\right) = q \cdot \mathbb{A}_{\mathcal{V}_\delta,s}(1)_0 \subset \mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0 .$$
Logo, $q \cdot u \in E(1)$, donde concluímos que $\widetilde{\pi}_{\Theta(\sigma)}^{-1}\left(E_{\Theta(\sigma)}(1)\right) \subset E(1)$. Visto que a inclusão contrária vale em geral, temos a primeira igualdade do enunciado. A segunda igualdade segue pelo mesmo caminho, usando que $\mathbb{A}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}^{\Theta^*(\sigma)}(w_0)_0 = \mathbb{A}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}^{\Theta^*(\sigma)}(1)_0^-$. $\square$

2.2 Semigrupos de automorfismos

Nesta seção estudamos recorrência por cadeias para ações de semigrupos reversíveis de automorfismos sobre fibrados flag. Além da parametrização dos conjuntos de transitividade por cadeias pelo grupo de Weyl realizada na seção anterior, apresentamos também a caracterização da transitividade por cadeias nas fibras. A motivação e fundamento de nossos estudos provém do conteúdo do trabalho [4] sobre fluxos de automorfimos em fibrados flag.

Sejam (S, Q, σ) um semigrupo de transformação de automorfismos de Q, com S reversível, e $\pi : Q \to X$ um fibrado principal localmente trivial cujo grupo de estrutura G é um grupo de Lie redutível com componente semi-simples conexa. Denotamos σ^* a ação de S^{-1} sobre Q. Então, $\sigma_{t^{-1}}^*(q) = \sigma_t^{-1}(q)$, para todo $t \in S$ e $q \in Q$.

Por praticidade, denotaremos a ação induzida de S (e de S^{-1}) tanto na base X como no espaço total $\mathbb{E}_\Theta$ de um fibrado flag associado por justaposição dos elementos, ou seja, dado $t \in S$ e $x \in X$, denotamos $tx = \sigma_t^X(x)$, e semelhantemente em $\mathbb{E}_\Theta$.

O conceito de seqüências contratíveis em G apresentado na Seção 2 de [35] (ver também Seções 4 e 6 de [2] e [4] resp.) pode ser interpretado como redes contratíveis em G. Assim, dada uma rede $(g_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}}$ em G e um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ temos os correspondentes conceitos de domínio principal e imagem principal de (g_ι) no flag $\mathbb{F}_\Theta$. Dado um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, seja $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+)$ e consideremos uma decomposição polar $G = K\mathrm{fe}(\lambda) K$ (c.f. Capítulo IX de [16]), onde K é o subgrupo compacto da decomposição de Iwasawa de G. Escrevemos $g_\iota = u_\iota h_\iota v_\iota$, com $u_\iota, v_\iota \in K$ e $h_\iota \in \mathrm{fe}(\lambda)$. Passando a subredes se necessário podemos assumir que $u_\iota \to u$ e que $v_\iota \to v$ em K. Visto que exp é inversível na parte hiperbólica $A = \langle \exp(\mathfrak{a}) \rangle$ da decomposição de Iwasawa de G, podemos definir $\phi_\alpha(h) = e^{\alpha(\log(h))}$, para toda raiz $\alpha \in \Pi = \Pi(\lambda)$ e $h \in A$. Tomando o radical nilpotente
$$\mathfrak{n}_\Theta^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+ - \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$
da subálgebra $\theta(\mathfrak{p}_\Theta(\lambda))$, onde θ é a involução de Cartan, seja $N_\Theta^- = \exp\left(\mathfrak{n}_\Theta^-\right)$ o subgrupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{n}_\Theta^-$. Dado $h \in \lambda$, o conjunto dos pontos fixos de h é dado por

$\{w\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) : w \in W\}$. A célula de Bruhat $N_\Theta^- w\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ é a variedade estável de $w\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, para cada $w \in W$. A célula $N_\Theta^-\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ é a única aberta, e $gN_\Theta^-\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ é chamada uma célula aberta de Bruhat, para cada $g \in G$ (c.f. [33]). Além disso, $N_\Theta^-\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ é um subconjunto denso em $\mathbb{F}_\Theta$, e $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ é o único atrator de h, ou seja, $h^n x \to \mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ com $n \to \infty$, para todo $x \in N_\Theta^-\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Isto ocorre porque $e^{-n\alpha(\log(h))} \to 0$, para todo $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle^+$, já que $-\alpha(\log(h)) < 0$. Agora, uma subrede de $\left(Ad(h_\iota)\mid_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\right)$ converge para uma aplicação linear $\tau : \mathfrak{n}_\Theta^- \to \mathfrak{n}_\Theta^-$, a qual é diagonal com autovalores dados por $a_\alpha = \lim_\iota \phi_{-\alpha}(h_\iota)$, para cada $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle^+$. Assim, dado $x \in v^{-1}N^-\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, temos que $g_\iota x$ converge para algum ponto em $u\exp(\mathrm{im}(\tau))\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Então, os conjuntos conexos $\mathrm{dom}_\Theta(g_\iota) = v^{-1}(N^-\mathfrak{p}_\Theta(\lambda))_0$ e $\mathrm{im}_\Theta(g_\iota) = u\exp(\mathrm{im}(\tau))\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ são denominados respectivamente de *domínio principal* e *imagem principal* de (g_ι) em $\mathbb{F}_\Theta$. A imagem principal de (g_ι) se reduz a um ponto se, e somente se, $\tau = 0$. Neste caso, a rede (g_ι) é dita *contratível com respeito a* $\mathbb{F}_\Theta$.

Se $\Delta \subset \Theta \subset \Sigma$ e (g_ι) é uma rede em G, então, $\pi_\Theta^\Delta(\mathrm{im}_\Delta(g_\iota)) = \mathrm{im}_\Theta(g_\iota)$, onde $\pi_\Theta^\Delta : \mathbb{F}_\Delta \to \mathbb{F}_\Theta$ é a fibração natural. Com efeito, suponhamos que $\Delta \neq \Theta$ e tomemos $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Delta\rangle^+$ tal que $\alpha \notin \Pi^+ - \langle\Theta\rangle^+$. Então, $\alpha(H_\Theta) = 0$, onde $H_\Theta \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$ é tal que $\Theta = \Theta(H_\Theta)$ é o anulador de H_Θ. Logo, se $\tau(X) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, com $X \in \mathfrak{n}_\Delta^-$, temos que $Ad(\exp\tau(X))H_\Theta = H_\Theta$, ou seja, $\exp\tau(X)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta$. Isto significa que

$$\exp\left(\mathrm{im}\left(\tau\mid_{\mathfrak{n}_\Delta^-}\right)\right)\mathfrak{p}_\Theta = \exp\left(\mathrm{im}\left(\tau\mid_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\right)\right)\mathfrak{p}_\Theta.$$

Portanto, $\pi_\Theta^\Delta(\mathrm{im}_\Delta(g_\iota)) = u\exp\left(\mathrm{im}\left(\tau\mid_{\mathfrak{n}_\Delta^-}\right)\right)\mathfrak{p}_\Theta = \mathrm{im}_\Theta(g_\iota)$.

Lema 2.17. *Seja $g_\iota = u_\iota h_\iota v_\iota$ uma rede contratível com respeito a $\mathbb{F}_\Theta$, com $u_\iota \to u$ e $v_\iota \to e$. Suponha que $C \subset N^-\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ é um subconjunto compacto e tome $\mathfrak{p}_\Theta(\mu) \neq u\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Então, existe $\iota_0 \in \mathcal{I}$ tal que $g_\iota^{-1}\mathfrak{p}_\Theta(\mu) \notin C$, para todo $\iota \geq \iota_0$.*

Demonstração: A mesma do Lema 6.1 de [4]. □

Dado $x \in X$, assumimos que a rede $(tx)_{t\in S}$ converge para um ponto y em X. Sejam $i, j \in I$ tais que $x \in U_i$ e $y \in U_j$, e tomemos as seções locais $\chi_i : U_i \to Q$ e $\chi_j : U_j \to Q$. Seja ρ_{ij} o cociclo local determinado por χ_i e χ_j, e consideremos a rede $g_t = \rho_{ij}(t, x)$.

Lema 2.18. *Seja $x \in X$ e considere as hipóteses e notações do último parágrafo acima. Então, dado $\Theta \subset \Sigma$, $\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t) \subset E_\Theta(1)$.*

Demonstração: Dados $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta$ e $s \in S$, temos que $\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}^\Theta(1)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_x \neq \emptyset$. Visto que $\mathrm{dom}_\Theta(g_t)$ é denso em $\mathbb{F}_\Theta$, temos que $\chi_i(x) \cdot \mathrm{dom}_\Theta(g_t)$ é denso em $(\mathbb{E}_\Theta)_x$. Como $\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}^\Theta(1)_0$ é aberto, temos que $\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}^\Theta(1)_0 \cap \chi_i(x) \cdot \mathrm{dom}_\Theta(g_t) \neq \emptyset$. Tomando agora $\chi_i(x) \cdot z \in \mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}^\Theta(1)_0 \cap \chi_i(x) \cdot \mathrm{dom}_\Theta(g_t)$, temos que

$$t(\chi_i(x) \cdot z) = t\chi_i(x) \cdot z = \chi_j(tx)\rho_{ij}(t, x) \cdot z = \chi_j(tx) \cdot g_t z$$

para todo $t \in St_0$ e algum $t_0 \in S$. Logo, $t(\chi_i(x) \cdot z) \to \chi_j(y) \cdot z'$, onde $z' \in \mathrm{im}_\Theta(g_t)$. Assim, $\chi_j(y) \cdot z' \in \omega(\chi_i(x) \cdot z) \cap \chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t)$, donde segue pela Proposição 1.38 que $\chi_j(y) \cdot z'$ é recorrente por cadeias. Mas, como $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}(1)$ é progressivamente invariante, temos que $\omega_{\mathrm{d}}(\chi_i(x) \cdot z) \subset \mathrm{fe}\left(\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}(1)\right)$, donde $\chi_j(y) \cdot z' \in E_\Theta(1)$. Portanto, $\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t)$ intersepta $E_\Theta(1)$. Agora, de forma semelhante vemos que cada ponto de $\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t)$ pertence ao conjunto ω-limite de algum ponto de $\chi_i(x) \cdot \mathrm{dom}_\Theta(g_t)$, donde $\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t)$ é um conjunto recorrente por cadeias. Como $\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t)$ é conexo e está contido na fibra $(\mathbb{E}_\Theta)_y$, segue da Proposição 1.39 que $\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t)$ é transitivo por cadeias. Pela intersecção com $E_\Theta(1)$, concluímos que $\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t) \subset E_\Theta(1)$. $\square$

Corolário 2.19. *Sejam $x \in X$ e $\Theta \subset \Sigma$. Assuma que a rede $(tx)_{t \in S}$ converge para um ponto y em X e considere a decomposição polar $g_t = u_t h_t v_t$ da rede $g_t = \rho_{ij}(t, x)$. Se $\lim_t e^{-\alpha(\log h_t)} \neq 0$ para todo $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle^+$, então, $\left(S, \mathbb{E}_\Theta, \sigma^{\mathbb{E}_\Theta}\right)$ é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Visto que a transformação linear $\tau = \lim_t \left(Ad(h_t)\,|_{\mathfrak{n}^-_\Theta}\right)$ é diagonal com autovalores $a_\alpha = \lim_t e^{-\alpha(\log h_t)}$, segue que τ é bijetora. Além disso, como $\mathfrak{n}^-_\Theta$ é nilpotente, temos que $\exp|_{\mathfrak{n}^-_\Theta}$ é sobrejetora. Assim, temos que

$$\mathrm{im}_\Theta(g_t) = u \exp(\mathrm{im}\tau)\, \mathfrak{p}_\Theta = u N^-_\Theta \mathfrak{p}_\Theta.$$

No entanto, pelo Lema 2.18, temos que

$$\begin{aligned}
\chi_j(y) \cdot \mathrm{im}_\Theta(g_t) \quad &\subset \quad E_\Theta(1) \cap (\mathbb{E}_\Theta)_y = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta, t \in S} \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_y \\
&= \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta, t \in S} \chi_j(y) \cdot \mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0
\end{aligned}$$

donde $\mathrm{im}_\Theta(g_t) \subset \mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0$, para todo subsemigrupo induzido $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_{\chi_j(y)}$ ($\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta$ e $t \in S$). Logo, $uN^-_\Theta \mathfrak{p}_\Theta \subset \mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0$, e visto que $uN^-_\Theta \mathfrak{p}_\Theta$ é denso em $\mathbb{F}_\Theta$ e $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0$ é denso em $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)$, temos que $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1) = \mathbb{F}_\Theta$, para todo $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta$ e $t \in S$. . Então, temos que $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w) = \mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)$ e $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w) = \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)$, para todo $w \in W$ e, portanto, $E_\Theta(w) = E_\Theta(1)$, para todo $w \in W$. Agora, visto que os conjuntos controláveis $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)$ não dependem dos pontos em Q, temos que $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w) = \mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)$, para todo subsemigrupo induzido $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_q$ ($\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta$ e $t \in S$) e $q \in Q$. Segue da Proposição 3.1 de [31] que $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)^-_0 = \mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(w_0)_0$, onde $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)^-_0$ é o conjunto controlável invariante do subsemigrupo $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})^{-1}_q$. Logo, $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)^-_0 = \mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1)_0$, donde segue pelo Corolário 2.1 de [34] que $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_q$ é transitivo em $\mathbb{F}_\Theta$. Com isso, o Teorema 6.2 de [34] implica que ou $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_q = G$ ou $\mathbb{F}_\Theta$ é trivial. De qualquer forma, temos que $\mathbb{A}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}(1) = \mathbb{F}_\Theta$. Assim, para todo $q \in Q$, temos que

$$E_\Theta(1) \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} = q \cdot \mathbb{F}_\Theta$$

donde segue $E_\Theta(1) = \mathbb{E}_\Theta$. $\square$

Agora, assumindo que a rede $(t^{-1}x)_{t\in S}$ converge para algum ponto z em X, sejam $i, j \in I$ tais que $z \in U_j$ e $x \in U_i$. Considerando o cociclo local ρ_{ij}, tomemos a rede $h_t = \rho_{ij}(t^{-1}, x)$.

Lema 2.20. *Seja $x \in X$ e considere as hipóteses e notações do último parágrafo acima. Então, dado $\Theta \subset \Sigma$, $\chi_j(z) \cdot \mathrm{im}_\Theta(h_t) \subset E_\Theta(w_0)$.*

Demonstração: Tomemos $\chi_i(x) \cdot v \in \chi_i(x) \cdot \mathrm{dom}_\Theta(h_t) \cap \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}(w_0)_0$. Então, $\sigma^{\mathbb{E}_\Theta}_{t^{-1}}(\chi_i(x)\cdot v) \to \chi_j(z) \cdot v'$, onde $v' \in \mathrm{im}_\Theta(h_t)$. Logo, $\chi_j(z) \cdot v' \in \omega^*(\chi_i(x) \cdot v) \cap \chi_j(z) \cdot \mathrm{im}_\Theta(h_t)$. Visto que $\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}(w_0)$ é minimal, temos que $\omega^*(\chi_i(x)\cdot v) \subset \mathrm{fe}\left(\mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon,s}(w_0)\right)$. Além disso, pela Proposição 1.76 temos que $\omega^*(\chi_i(x)\cdot v)$ é transitivo por cadeias, donde segue que $\omega^*(\chi_i(x)\cdot v) \subset E_\Theta(w_0)$. Logo, $\chi_j(z)\cdot v' \in E_\Theta(w_0) \cap \chi_j(z) \cdot \mathrm{im}_\Theta(h_t)$. No entanto, cada ponto de $\chi_j(z)\cdot \mathrm{im}_\Theta(h_t)$ está contido no conjunto ω^*-limite de algum ponto de $\chi_i(x)\cdot \mathrm{dom}_\Theta(h_t)$. Assim, $\chi_i(x) \cdot \mathrm{dom}_\Theta(h_t)$ é recorrente por cadeias e conexo, donde concluímos que $\chi_j(z)\cdot \mathrm{im}_\Theta(h_t) \subset E_\Theta(w_0)$. $\square$

O resultado seguinte é análogo ao Corolário 2.19.

Corolário 2.21. *Sejam $x \in X$ e $\Theta \subset \Sigma$. Assuma que a rede $(t^{-1}x)_{t\in S}$ converge para um ponto y em X e considere a decomposição polar $h_t = u_t h_t v_t$ da rede $h_t = \rho_{ij}(t^{-1}, x)$. Se $\lim_t e^{-\alpha(\log h_t)} \neq 0$ para todo $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta\rangle^+$, então, $\left(S, \mathbb{E}_\Theta, \sigma^{\mathbb{E}_\Theta}\right)$ é transitivo por cadeias.*

O seguinte lema é fundamental para estabelecermos os próximos resultados.

Lema 2.22. *Sejam $S \subset G$ um subsemigrupo aberto e (g_ι) uma rede em G. Se $\mathrm{im}_{\Theta(S)}(g_\iota) \subset \mathbb{A}_{\Theta(S)}(1)_0$, onde $\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1)$ é o conjunto controlável invariante de S em $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, então, (g_ι) é contratível com respeito a $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$.*

Demonstração: Se $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ é trivial, não há o que demonstrar. Assumimos que $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ não é trivial. Então, $\Theta(S) \neq \Sigma$, e uma célula aberta de Bruhat é um subconjunto próprio de $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, pois uma tal é difeomorfa a um espaço euclidiano. Pela Proposição 5.4 de [4], temos que $\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1)$ está contido em alguma célula aberta de Bruhat. Logo, $\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1) \neq \mathbb{F}_{\Theta(S)}$. Em particular, $S \neq G$. Agora, notemos que existe uma raiz $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta(S)\rangle^+$ tal que $a_\alpha = 0$, pois do contrário, conforme a demonstração do Corolário 2.19, teríamos que $\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1) = \mathbb{F}_{\Theta(S)}$. Assim, tomemos $\widetilde{\Theta} \subset \Sigma$ dado por

$$\widetilde{\Theta} = \Theta(S) \cup \left(\left\{\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta(S)\rangle^+ : a_\alpha = 0\right\} \cap \Sigma\right).$$

Se $\widetilde{\Theta} = \Sigma$, então, $a_\alpha = 0$, para todo $\alpha \in \Pi^+ - \langle\Theta(S)\rangle^+$, donde segue que (g_ι) é contratível com respeito a $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$. Vejamos que de fato $\widetilde{\Theta} = \Sigma$. Suponhamos por contradição que

$\widetilde{\Theta} \neq \Sigma$. Então, para todo $\alpha \in \Pi^+ - \left\langle \widetilde{\Theta} \right\rangle^+$, temos que $a_\alpha \neq 0$. Como na demonstração do Corolário 2.19, isto significa que $\mathrm{im}_{\widetilde{\Theta}}(g_\iota)$ é uma célula aberta de Bruhat. No entanto,

$$\mathrm{im}_{\widetilde{\Theta}}(g_\iota) = \pi_{\widetilde{\Theta}}^{\Theta(S)}\left(\mathrm{im}_{\Theta(S)}(g_\iota)\right) \subset \pi_{\widetilde{\Theta}}^{\Theta(S)}\left(\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1)_0\right) = \mathbb{A}_{\widetilde{\Theta}}(1)_0$$

donde temos que $\mathbb{A}_{\widetilde{\Theta}}(1) = \mathbb{F}_{\widetilde{\Theta}}$. Mas, visto que $S \neq G$, isto somente acontece quando $\mathbb{F}_{\widetilde{\Theta}}$ é trivial, ou seja, que $\widetilde{\Theta} = \Sigma$, donde obtemos uma contradição. Assim, $\widetilde{\Theta} = \Sigma$ e, portanto, $\mathrm{im}_{\Theta(S)}(g_\iota)$ é um conjunto unitário. □

Na proposição seguinte, consideramos as notações dos Lemas 2.18 e 2.20.

Proposição 2.23. *Dado $x \in X$, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se a rede $(tx)_{t\in S}$ converge para um ponto y em X, então, a imagem principal $\mathrm{im}_{\Theta(\sigma)}(g_t)$ é um conjunto unitário.*

2. *Se a rede $(t^{-1}x)_{t\in S}$ converge para um ponto z em X, então, a imagem principal $\mathrm{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_t)$ é um conjunto unitário.*

Demonstração: Tomemos $\Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\right) = \Theta(\sigma)$ como no Lema 2.14. Visto que $\mathbb{D}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)_0 \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_y = \chi_j(y)\cdot \mathbb{A}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)_0$, segue do Lema 2.18 que

$$\chi_j(y)\cdot \mathrm{im}_{\Theta(\sigma)}(g_t) \subset E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_y \subset \chi_j(y)\cdot \mathbb{A}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)_0 .$$

Logo, $\mathrm{im}_{\Theta(\sigma)}(g_t) \subset \mathbb{A}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)_0$. Segue do Lema 2.22 que a rede (g_t) é contratível, ou seja, que $\mathrm{im}_{\Theta(\sigma)}(g_t)$ consiste de apenas um ponto. Agora, como observamos acima, $\Theta^*(\sigma)$ é o tipo parabólico do subsemigrupo $\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\right)^{-1}_{\chi_j(z)}$. Pela Proposição 3.1 de [31], temos que $\mathbb{A}^{\Theta^*(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(w_0)_0 = \mathbb{A}^{\Theta^*(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)^-_0$, onde $\mathbb{A}^{\Theta^*(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)^-$ é o conjunto controlável invariante de $\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\right)^{-1}_{\chi_j(z)}$ em $\mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$ Com isso, segue do Lema 2.20 que

$$\chi_j(z)\cdot \mathrm{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_t) \subset E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_z \subset \chi_j(z)\cdot \mathbb{A}^{\Theta^*(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)^-_0 .$$

Logo, $\mathrm{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_t) \subset \mathbb{A}^{\Theta^*(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}(1)^-_0$, donde segue também pelo Lema 2.22 que $\mathrm{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_t)$ é um conjunto unitário. □

Observemos que no caso em que a base do fibrado é compacta, a Proposição 2.23 se aplica para todo ponto de X.

Na seqüência, apresentamos o resultado fundamental para a caracterização dos conjuntos de transitividade por cadeias nas fibras de um fibrado flag.

Proposição 2.24. *Seja $x \in X$ e assuma que as redes (tx) e $(t^{-1}x)$ são convergentes em X com respectivos limites y e z. Assuma também que $E_{\Theta(\sigma)}(1)$ é S^{-1}-invariante. Então, as intersecções $E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$ e $E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_x$ são conjuntos unitários.*

Demonstração: Seja $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Notemos que

$$E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x = \chi_i(x) \cdot \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta, t \in S} \mathbb{A}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(1)_0$$

onde cada $\mathbb{A}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(1)$ é o conjunto controlável invariante de $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t})_{\chi_i(x)}$ em $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$. Denotemos $\mathbb{A} = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \mathbb{A}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(1)_0$ e fixemos $b_0 = \mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}(\lambda) \in \mathbb{A}$. Como $E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$ é compacto, temos que $\mathbb{A}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$. Seja $G = K\mathrm{fe}\left(\mathfrak{a}^+(\lambda)\right)K$ a decomposição polar de G determinada por $\mathfrak{a}^+(\lambda)$, considerando que λ é uma câmara de Weyl que intersepta $\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0}, t_0}\right)_{\chi_i(x)}$ (c.f. Lema 3.2 de [26]). Visto que $\Theta(\sigma) = \Theta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0}, t_0}\right)$, temos que $\mathbb{A}^{\Theta(\sigma)}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0}, t_0}(1) \subset N^-_{\Theta(\sigma)} b_0$ (Proposição 5.4 de [4]). Logo, $\mathbb{A} \subset N^-_{\Theta(\sigma)} b_0$. Seja $j \in I$ tal que $y \in U_j$ e tomemos o cociclo local ρ_{ij} determinado pelas seções locais χ_i e χ_j. Para todo $t \in S$, denotemos $g_t = \rho_{ij}(t, x)$ e escrevemos $g_t = u_t h_t v_t$, onde $u_t, v_t \in K$ e $h_t \in \mathrm{fe}\left(\mathfrak{a}^+(\lambda)\right)$. Tomando subredes se necessário, assumimos que $u_t \to u$ e que $v_t \to v$ em K. Além disso, escrevendo $\chi_i'(x') = \chi_i(x') v^{-1}$, para todo $x' \in U_i$, temos que $\chi_i' : U_i \to Q$ é uma seção local tal que $t\chi_i'(x) = \chi_j(tx) g_t v^{-1}$, para todo $t \in Ss_0$ e algum $s_0 \in S$. Este fato nos permite assumir que $v_t \to 1$. Agora, pela Proposição 2.23, a rede (g_t) é contratível no flag $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$, isto é, $\mathrm{im}_{\Theta(\sigma)}(g_t)$ consiste apenas do ponto ub_0. Segue então do Lema 2.17 que se $b \neq ub_0$, então, existe $s_0 \in S$ tal que $g_t^{-1} b \notin \mathbb{A}$, para todo $t \in Ss_0$. Pela propriedade de cociclo, temos que

$$t^{-1}\left(\chi_j(tx) \cdot b\right) = \chi_i(x) \rho_{ji}\left(t^{-1}, tx\right) \cdot b = \chi_i(x) \cdot g_t^{-1} b$$

para todo $t \in S$ tal que $tx \in U_j$. Assim, para todo $t \in Ss_0$ tal que $tx \in U_j$, temos que

$$\chi_i(x) \cdot g_t^{-1} b \notin \chi_i(x) \cdot \mathbb{A} = E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x.$$

Como $\chi_i(x) \cdot g_t^{-1} b \in \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$, segue que $\chi_i(x) \cdot g_t^{-1} b \notin E_{\Theta(\sigma)}(1)$, ou seja, $t^{-1}\left(\chi_j(tx) \cdot b\right) \notin E_{\Theta(\sigma)}(1)$. Visto que $E_{\Theta(\sigma)}(1)$ é invariante por S^{-1}, temos que $\chi_j(tx) \cdot b \notin E_{\Theta(\sigma)}(1)$. Logo, a intersecção $E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_{tx}$ consiste apenas do ponto $\chi_j(tx) \cdot ub_0$. Agora, visto que $E_{\Theta(\sigma)}(1)$ é S-invariante, tomando $\chi_i(x) \cdot b \in E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$, temos que $t\left(\chi_i(x) \cdot b\right) \in E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_{tx}$, donde $t\left(\chi_i(x) \cdot b\right) = \chi_j(tx) \cdot ub_0$. Como $\sigma_t^{\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}}$ é uma bijeção entre as fibras $\left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$ e $\left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_{tx}$, concluímos que $E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$ é um conjunto unitário. No outro caso, notemos que

$$E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_x = \chi_i(x) \cdot \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta, t \in S} \mathbb{A}^{\Theta^*(\sigma)}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(1)^-_0$$

onde cada $\mathbb{A}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}^{\Theta^*(\sigma)}(1)^-$ é o conjunto controlável invariante de $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t})_{\chi_i(x)}^{-1}$ em $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$. Denotemos $\mathbb{A}^- = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon,t} \mathbb{A}_{\mathcal{U}_\varepsilon,t}^{\Theta^*(\sigma)}(1)_0^-$ e fixemos $b_0 = \mathfrak{p}_{\Theta^*(\sigma)}(\mu) \in \mathbb{A}^-$, onde a câmara μ intersepta $\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\right)_{\chi_i(x)}^{-1}$. Seja $G = K\mathrm{fe}\left(\mathfrak{a}^+(\mu)\right)K$ a decomposição polar de G determinada por $\mathfrak{a}^+(\mu)$. Visto que $\Theta^*(\sigma) = \Theta\left(\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}\right)_{\chi_i(x)}^{-1}\right)$, temos que $\mathbb{A}_{\mathcal{U}_{\varepsilon_0},t_0}^{\Theta^*(\sigma)}(1)^- \subset N_{\Theta^*(\sigma)}^- b_0$. Logo, $\mathbb{A}^- \subset N_{\Theta^*(\sigma)}^- b_0$. Seja $j \in I$ tal que $z \in U_j$ e tomemos o cociclo local ρ_{ij} determinado pelas seções locais χ_i e χ_j. Para todo $t \in S$, denotemos $h_t = \rho_{ij}(t^{-1}, x)$. Pela Proposição 2.23, a rede (h_t) é contratível no flag $\mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$, isto é, $\mathrm{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_t)$ consiste apenas do ponto ub_0. Segue então do Lema 2.17 que se $b \neq ub_0$, então, existe $s_0 \in S$ tal que $h_t^{-1}b \notin \mathbb{A}^-$, para todo $t \in Ss_0$. Pela propriedade de cociclo, temos que

$$t\left(\chi_j\left(t^{-1}x\right)\cdot b\right) = \chi_i(x)\,\rho_{ji}\left(t, t^{-1}x\right)\cdot b = \chi_i(x)\cdot h_t^{-1}b$$

para todo $t \in S$ tal que $t^{-1}x \in U_j$. Assim, para todo $t \in Ss_0$ tal que $t^{-1}x \in U_j$, temos que

$$\chi_i(x)\cdot h_t^{-1}b \notin \chi_i(x)\cdot\mathbb{A}^- = E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)\cap\left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_x.$$

Como $\chi_i(x)\cdot h_t^{-1}b \in \left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_x$, segue que $\chi_i(x)\cdot h_t^{-1}b \notin E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)$, ou seja, $t\left(\chi_j\left(t^{-1}x\right)\cdot b\right) \notin E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)$. Pela Proposição 1.43, $E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)$ é invariante por S, donde segue que $\chi_j\left(t^{-1}x\right)\cdot b \notin E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)$. Logo, a intersecção $E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)\cap\left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_{t^{-1}x}$ consiste apenas do ponto $\chi_j\left(t^{-1}x\right)\cdot ub_0$. Agora, visto que $\sigma_t^{\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}}$ é uma bijeção entre as fibras $\left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_{t^{-1}x}$ e $\left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_x$, concluímos que $E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0)\cap\left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_x$ é um conjunto unitário. □

Podería-se perguntar o que acontece no caso do semigrupo S ser simétrico (um grupo, por exemplo), pois nossas definições permitem esta liberdade. No entanto, voltando o pensamento para a motivação inicial, que são os fluxos, vemos que a simetria não é interessante, pois o semigrupo considerado no caso é o conjunto dos números não negativos. Contudo, se S é simétrico, os Lemas 2.18 e 2.20 coincidem em um só, donde temos $E_\Theta(1) = E_\Theta(w_0)$. Isto significa que existe apenas um conjunto de transitividade por cadeias em $\mathbb{E}_\Theta$. Assim, o semigrupo de transformação $\left(S, \mathbb{E}_\Theta, \sigma^{\mathbb{E}_\Theta}\right)$ é transitivo por cadeias, para todo $\Theta \subset \Sigma$.

Outra questão que surge diz respeito a uma possível relação entre os tipos parabólicos de (S, Q, σ) e de (S^{-1}, Q, σ^*). Podemos mostrar uma relação direta no caso de S ser invariante e a base do fibrado ser compacta. Com efeito, dado $\Theta \subset \Sigma$, temos que $\mathbb{E}_\Theta$ é compacto Hausdorff, pois a base e a fibra do fibrado flag são compactas. Como vimos no Capítulo 1, os conjuntos de transitividade por cadeias de $(S, \mathbb{E}_\Theta)$ coincidem com os de $(S^{-1}, \mathbb{E}_\Theta)$, invertendo-se a ordem dinâmica. Em particular, $E_\Theta(1) = E_\Theta(w_0)^*$ e $E_\Theta(w_0) = E_\Theta(1)^*$. Assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.25. *Assuma que S é invariante e a base do fibrado é compacta. Então,* $\Theta^*(\sigma) = \Theta(\sigma^*)$.

Demonstração: Seja $\widetilde{\pi}_{\Theta(\sigma^*)} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_{\Theta(\sigma^*)}$ a fibração natural. Visto que $E(w_0) = E(1)^*$ e que $E_{\Theta(\sigma^*)}(w_0) = E_{\Theta(\sigma^*)}(1)^*$, segue da Proposição 2.16 que

$$\widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta(\sigma^*)}\left(E_{\Theta(\sigma^*)}(w_0)\right) = E(w_0).$$

Sejam $\mathcal{U}^0 \in \mathcal{O}(X)$ e $t_0 \in S$ tais que $\Theta(\sigma) = \Theta(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^0,t_0})$. Dado $q \cdot u \in \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon,t} q \cdot \mathbb{A}^{\Theta(\sigma^*)}_{\mathcal{U},t}(1)^-_0 \subset E_{\Theta(\sigma^*)}(w_0)$, temos que $\widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta(\sigma^*)}(q \cdot u) \subset q \cdot \mathbb{A}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0$, donde $\pi^{-1}_{\Theta(\sigma^*)}(u) \subset \mathbb{A}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0$. Agora, se $v \in \mathbb{A}^{\Theta(\sigma^*)}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0$, existe $g \in (\mathcal{S}_{\mathcal{U}^0,t_0})^{-1}_q$ tal que $gu = v$. Então, $\pi^{-1}_{\Theta(\sigma^*)}(v) = g\pi^{-1}_{\Theta(\sigma^*)}(u) \subset \mathbb{A}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0$, pois $\mathbb{A}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0$ é invariante por $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}^0,t_0})^{-1}_q$. Assim, temos que $\pi^{-1}_{\Theta(\sigma^*)}\left(\mathbb{A}^{\Theta(\sigma^*)}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0\right) \subset \mathbb{A}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0$, donde $\pi^{-1}_{\Theta(\sigma^*)}\left(\mathbb{A}^{\Theta(\sigma^*)}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0\right) = \mathbb{A}_{\mathcal{U}^0,t_0}(1)^-_0$. Isto significa que $\Theta(\sigma^*) \subset \Theta^*(\sigma)$. Para verificarmos a inclusão oposta, aplicamos o mesmo processo com respeito à fibração $\widetilde{\pi}_{\Theta(\sigma)} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}$, donde obtemos que $\Theta(\sigma) \subset \Theta^*(\sigma^*)$, ou melhor, $\Theta^*(\sigma) \subset \Theta(\sigma^*)$. Portanto, $\Theta^*(\sigma) = \Theta(\sigma^*)$. □

2.2.1 Caracterização da transitividade por cadeias nas fibras

Desde agora, para todo ponto x da base X, assumimos que ambas as redes (tx) e $(t^{-1}x)$ possuem subredes convergentes em X, e que o conjunto de transitividade por cadeias $E_{\Theta(\sigma)}(1)$ é invariante por S^{-1}. Procederemos assim com a caracterização da intersecção dos conjuntos de transitividades por cadeias com as fibras de um fibrado flag.

Segue da Proposição 2.24 o seguinte corolário.

Corolário 2.26. *Os fibrados $\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)} \to X$ e $\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)} \to X$ admitem seções globais contínuas e invariantes.*

Demonstração: Definamos $\chi : X \to \mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}$ de forma que $\chi(x)$ é o único ponto na intersecção $E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$, e $\chi^* : X \to \mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}$ de forma que $\chi^*(x)$ é o único ponto na intersecção $E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_x$, para todo $x \in X$. Se mostrarmos que χ e χ^* são contínuas, então, estas aplicações definem seções globais de $\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)} \to X$ e $\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)} \to X$ respectivamente. Com efeito, seja $(x_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}}$ uma rede convergindo para um ponto x em X. Seja $\chi_i : U_i \to X$ a seção local tal que $x \in U_i$. Então, existe $\iota_0 \in \mathcal{I}$ tal que $x_\iota \in U_i$, para todo $\iota \geq \iota_0$. Então, $\chi(x_\iota) = \chi_i(x\iota) \cdot b^l_0$, para $\iota \geq \iota_0$. Tomando um subrede se necessário, podemos assumir que $b^l_0 \to b$ em $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$. Assim, $\chi_i(x_\iota) \cdot b^l_0 \to \chi_i(x) \cdot b$. Como $E_{\Theta(\sigma)}(1)$ é fechado e $\chi(x_\iota) \in E_{\Theta(\sigma)}(1)$, temos que $\chi_i(x) \cdot b \in E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_x$, donde $\chi_i(x) \cdot b = \chi(x)$. Portanto, χ é contínua. Enfim, visto que $\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}$ é progressivamente invariante, temos que χ é invariante. Usando um argumento análogo mostramos que χ^* também é contínua e invariante. $\square$

Assim, dado $q \in Q$, escrevemos

$$\chi(\pi(q)) = \chi_{i_q}(\pi(q)) \cdot b_q$$

onde $\pi(q) \in U_{i_q}$ e χ é a seção global definida no Corolário 2.26. Visto que $q = \chi_{i_q}(\pi(q))\, \upsilon_{i_q}(q)$, temos que

$$\chi(\pi(q)) = q \cdot \upsilon_{i_q}(q)^{-1} b_q.$$

Então, a notação $q^{-1} \cdot \chi(\pi(q))$ representa o ponto $\upsilon_{i_q}(q)^{-1} b_q \in \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$. Semelhantemente, representamos o ponto $q^{-1} \cdot \chi^*(\pi(q))$ em $\mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$. Desta forma, conforme a Seção 9 de [4], podemos definir as aplicações $f : Q \to \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$ e $f^* : Q \to \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$ dadas respectivamente por

$$f(q) = q^{-1} \cdot \chi(\pi(q)) \qquad \text{e} \qquad f^*(q) = q^{-1} \cdot \chi^*(\pi(q))$$

para todo $q \in Q$. Se $(q_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}} \subset Q$ é uma rede convergente em Q com limite q, então, $q_\iota \in U_{i_q}$, para todo $\iota \geq \iota_0$ e algum ι_0. Pela continuidade de $\chi \circ \pi$, temos que $q_\iota \cdot \upsilon_{i_q}(q_\iota)^{-1} b_{q_\iota} \to q \cdot \upsilon_{i_q}(q)^{-1} b_q$. Tomando uma subrede se necessário, assumimos que $\upsilon_{i_q}(q_\iota)^{-1} b_{q_\iota} \to b$. Então, $q_\iota \cdot \upsilon_{i_q}(q_\iota)^{-1} b_{q_\iota} \to q \cdot b$, donde $b = \upsilon_{i_q}(q)^{-1} b_q$. Logo, $f(q_\iota) \to f(q)$ e, portanto, f é contínua. Semelhantemente, mostramos que f^* é contínua. Além disso, dado $g \in G$ e $q \in Q$, temos que $\chi(\pi(q)) = \chi(\pi(qg))$, donde

$$f(qg) = \upsilon_{i_{qg}}(qg)^{-1} b_{qg} = g^{-1} \upsilon_{i_{qg}}(q)^{-1} b_{qg} = g^{-1} \upsilon_{i_q}(q)^{-1} b_q = g^{-1} f(q).$$

De forma semelhante, $f^*(qg) = g^{-1} f^*(q)$. Ou seja, f e f^* são equivariantes com respeito as ações de G em Q e nos flags $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$ e $\mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$ respectivamente.

Visto então que $(f(q), f^*(q)) = \left(\upsilon_{i_q}(q)^{-1} b_q, \upsilon_{i_q}(q)^{-1} b_q^*\right)$, com $b_q \in \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$ e $b_q^* \in \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$, e que a ação de G é transitiva nos flags, temos que $(f(q), f^*(q))$ pertence a uma órbita da ação produto (diagonal) de G em $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)} \times \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$. Conforme [4], Seção 5.1, tomando

$$\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta(\sigma)) \in \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)} \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{p}^-_{\Theta(\sigma)} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{n}(\Theta(\sigma)) \in \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$$

onde $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-$, a órbita do par $\left(\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}, \mathfrak{p}^-_{\Theta(\sigma)}\right)$ se identifica com a órbita G-adjunta $Ad(G)\, H_{\Theta(\sigma)}$, onde $H_{\Theta(\sigma)} \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$ é tal que $\Theta(\sigma) = \Theta\left(H_{\Theta(\sigma)}\right) = \left\{\alpha \in \Sigma : \alpha\left(H_{\Theta(\sigma)}\right) = 0\right\}$. Com efeito, temos que $\theta\left(\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}\right) = \mathfrak{p}^-_{\Theta(\sigma)}$, onde θ é a involução de Cartan, e $w_0 \mathfrak{p}^-_{\Theta(\sigma)} = \mathfrak{p}_{\Theta^*(\sigma)}$ (ver [32], Lema 2.2). Além disso, a intersecção dos normalizadores $N_G\left(\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}\right)$ e

$N_G\left(\mathfrak{p}^-_{\Theta(\sigma)}\right)$ coincide com o centralizador $Z_G\left(H_{\Theta(\sigma)}\right)$ de $H_{\Theta(\sigma)}$, que é um subgrupo de Lie redutível.

Assim, definimos a aplicação $h : Q \to Ad\,(G)\,H_{\Theta(\sigma)}$ onde $h\,(q)$ é o ponto identificado com $(f\,(q)\,, f^*\,(q))$. Da continuidade e equivariança de f e de f^* segue que h é contínua e equivariante, onde $h\,(qg) = g^{-1}h\,(q)$, para todos $q \in Q$ e $g \in G$. Além disso, definindo $\zeta : X \to Q \times_G Ad\,(G)\,H_{\Theta(\sigma)}$ por

$$\zeta\,(\pi\,(q)) = q \cdot h\,(q)$$

temos que ζ é uma seção global contínua do fibrado associado $Q \times_G Ad\,(G)\,H_{\Theta(\sigma)} \to X$. Visto que $Q \times_G Ad\,(G)\,H_{\Theta(\sigma)}$ se identifica com $Q\,/Z_G\left(H_{\Theta(\sigma)}\right)$, isto equivale ao fato do fibrado $Q\,(X, G)$ ser reduzível a um subfibrado principal $P\left(X, Z_G\left(H_{\Theta(\sigma)}\right)\right)$, onde $P = \{q \in Q : \zeta\,(\pi\,(q)) = \mu\,(q)\}$ e $\mu : Q \to Q\,/Z_G\left(H_{\Theta(\sigma)}\right)$ é a projeção. Vejamos que P é invariante pelo semigrupo S. Com efeito, dados $q \in Q$ e $t \in S$, temos que $t\chi\,(\pi\,(q)) = \chi\,(\pi\,(tq))$, pois $E_{\Theta(\sigma)}\,(1)$ é invariante por S. Da mesma forma, temos que $t\chi^*\,(\pi\,(q)) = \chi^*\,(\pi\,(tq))$. Logo, $f\,(tq) = f\,(q)$ e $f^*\,(tq) = f^*\,(q)$, donde $h\,(tq) = h\,(q)$. Assim,

$$\zeta\,(\pi\,(tq)) = tq \cdot h\,(tq) = tq \cdot h\,(q) = t\zeta\,(\pi\,(q))$$

para todo $q \in Q$ e $t \in S$, ou seja, ζ é um homomorfismo de semigrupos de transformações. Agora, dado $q \in P$ e $t \in S$, temos que

$$\zeta\,(\pi\,(tq)) = t\zeta\,(\pi\,(q)) = t\mu\,(q) = \mu\,(tq)$$

pois σ_t é um automorfismo. Portanto, podemos considerar o semigrupo de transformação (S, P) sobre o subfibrado, e como $Z_G\left(H_{\Theta(\sigma)}\right)$ é um grupo de Lie redutível, podemos induzir semigrupos de transformações em fibrados flag associados a $P\left(X, Z_G\left(H_{\Theta(\sigma)}\right)\right)$.

Agora, ordenando o sistema simples canônico $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, denotemos por r_i a reflexão com respeito à raiz α_i, e por $\widetilde{\pi}_i : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_{\{\alpha_i\}}$ a fibração dada por

$$\widetilde{\pi}_i\,(q \cdot v) = q \cdot \pi_i\,(v)$$

para todo $q \cdot v \in \mathbb{E}$, onde $\pi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha_i\}}$ é a fibração natural entre o flag maximal e o flag de tipo $\{\alpha_i\}$. Com isso, definimos a operação exaustão $\widetilde{\gamma}_i$ entre os subconjuntos de $\mathbb{E}$ dada por

$$\widetilde{\gamma}_i\,(\mathbb{B}) = \widetilde{\pi}_i^{-1}\,(\widetilde{\pi}_i\,(\mathbb{B}))$$

para $\mathbb{B} \subset \mathbb{E}$. Como definida no Apêndice B, a operação exaustão γ_i entre os subconjuntos do flag maximal $\mathbb{F}$ é dada por

$$\gamma_i\,(\mathbb{A}) = \pi_i^{-1}\,(\pi_i\,(\mathbb{A}))$$

para $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}$. Então, dado qualquer $q \in Q$ e $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}$, temos que

$$\widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n} \left(q \cdot \mathbb{A} \right) = q \cdot \left(\gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n} \left(\mathbb{A} \right) \right).$$

Para a demonstração do próximo resultado, observemos que uma família admissível de coberturas abertas de um espaço topológico define um conjunto direto quando munida com a ordem reversa da ordem parcial entre as coberturas abertas. Logo, podemos considerar redes indexadas por uma família admissível.

Dadas duas coberturas $\mathcal{U}_\varepsilon, \mathcal{V}_\delta \in \mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right)$, escrevemos $\mathcal{U}_\varepsilon \preccurlyeq \mathcal{V}_\delta$ se $\mathcal{V}_\delta$ é um refinamento de $\mathcal{U}_\varepsilon$.

Proposição 2.27. *Para cada $w \in W$, tem-se que*

$$\widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n} \left(E \left(w \right) \right) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Theta, t \in S} \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n} \left(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \left(w \right)_0 \right).$$

Demonstração: Visto que $E \left(w \right) = \bigcap\limits_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \left(w \right)_0$, a inclusão da esquerda para direita é imediata. Por outro lado, tomemos $\xi = q \cdot v \in \bigcap\limits_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n} \left(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \left(w \right)_0 \right)$. Então, para cada $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right)$ e $t \in S$, existe $\xi_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \in \mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \left(w \right)_0$ tal que $\xi \in \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n} \left(\xi_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right)$. Segue diretamente da definição dos operadores exaustões que os pontos $\xi_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ pertencem a fibra $\mathbb{E}_{\pi(q)}$. Logo, pela compacidade da fibra, a rede dupla $\left(\xi_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ possui uma subrede diagonal convergente. Uma tal subrede é construída da seguinte forma. O conjunto de índices é dado pelo produto cartesiano $\mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right) \times S^{\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})}$, onde $\left(\mathcal{U}^1_{\varepsilon_1}, \mathrm{f}_1 \right) \leqslant \left(\mathcal{U}^2_{\varepsilon_2}, \mathrm{f}_2 \right)$ quando $\mathcal{U}^1_{\varepsilon_1} \preccurlyeq \mathcal{U}^2_{\varepsilon_2}$ e $\mathrm{f}_2 \left(\mathcal{U}_\varepsilon \right) \in S\mathrm{f}_1 \left(\mathcal{U}_\varepsilon \right)$, para todo $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right)$. Para cada índice $\left(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathrm{f} \right)$ de $\mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right) \times S^{\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})}$ temos o termo $\xi_{(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathrm{f})} = \xi_{\mathcal{U}_\varepsilon, \mathrm{f}(\mathcal{U}_\varepsilon)}$. Então, $\xi_{(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathrm{f})}$ converge para algum ponto η na fibra $\mathbb{E}_{\pi(q)}$. Agora, os pontos intermediários $\xi^1_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}, ..., \xi^{n-1}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ tais que

$$\widetilde{\pi}_{i_1} \left(\xi \right) = \widetilde{\pi}_{i_1} \left(\xi^1_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right), \widetilde{\pi}_{i_2} \left(\xi^1_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right) = \widetilde{\pi}_{i_2} \left(\xi^2_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right), ..., \widetilde{\pi}_{i_n} \left(\xi^{n-1}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right) = \widetilde{\pi}_{i_n} \left(\xi_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right)$$

também pertencem a fibra $\mathbb{E}_{\pi(q)}$. Logo, cada rede $\left(\xi^k_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \right)_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}$ possui uma subrede diagonal convergente. Assim, usando a continuidade das fibrações obtemos que $\xi \in \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n} \left(\eta \right)$. Para concluirmos o resultado, resta-nos mostrar que $\eta \in E \left(w \right)$. Com efeito, dados $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right)$ e $t \in S$, escolhamos $t_0 \in St$. Tomemos $V_0 \in \mathcal{U}_\varepsilon$ tal que $t_0 \eta \in V_0$. Tomando $\mathcal{U}'_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right)$ com $\mathcal{U}'_\varepsilon \leqslant \frac{1}{2} \mathcal{U}_\varepsilon$, seja $V \in \mathcal{U}'_\varepsilon$ uma vizinhança aberta de η. Então, existe $\left(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}, \mathrm{f}_0 \right) \in \mathcal{O}_\Psi \left(\mathbb{E} \right) \times S^{\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})}$ tal que $\xi_{(\mathcal{V}_\delta, \mathrm{f})} \in V$ e $t_0 \xi_{(\mathcal{V}_\delta, \mathrm{f})} \in V_0$, para todo $\left(\mathcal{V}_\delta, \mathrm{f} \right) \geqslant \left(\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}, \mathrm{f}_0 \right)$. Agora, tomemos uma função $\mathrm{f}_t \in S^{\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})}$ tal que

$$\mathrm{f}_t \left(\mathcal{V}_\delta \right) \in St \cap Stt_0 \cap S\mathrm{f}_0 \left(\mathcal{V}_\delta \right)$$

para todo $\mathcal{V}_\delta \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E})$. Dado um refinamento $\mathcal{V}'_\delta$ de ambas as coberturas $\mathcal{U}'_\delta$ e $\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}$, temos que $(\mathcal{V}'_\delta, \mathrm{f}_t) \geqslant (\mathcal{U}^0_{\varepsilon_0}, \mathrm{f}_0)$, donde

$$t_0\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)} \in V_0 \qquad \text{e} \qquad \xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)} \in V.$$

Visto que $\mathrm{f}_t(\mathcal{V}'_\delta) \in St \cap Stt_0$ e que $\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)} \in End_l(\mathbb{E})_{\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t(\mathcal{V}'_\delta)}\,\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)}$, temos que

$$\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)} \in End_l(\mathbb{E})_{\mathcal{V}'_\delta,t}\, t_0\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)}$$

ou seja, existe uma $(\mathcal{V}'_\delta, t)$-cadeia de $t_0\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)}$ até $\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)}$. Como $\mathcal{V}'_\delta \leqslant \mathcal{U}'_\varepsilon$ e $\mathcal{U}'_\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$, segue que existe uma $(\mathcal{U}_\varepsilon, t)$-cadeia de $t_0\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)}$ até η. Assim, como $t_0\eta, t_0\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)} \in V_0$, concluímos que $\eta \in \Omega(\eta, \mathcal{U}_\varepsilon, t)$. Portanto, η é recorrente por cadeias. Além disso, dado $\varsigma \in E(w)$, temos que $\varsigma \in D_{\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t(\mathcal{V}'_\delta)}(w)_0$. Logo, existe uma $(\mathcal{V}'_\delta, t)$-cadeia de ς até $\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)}$, donde $\eta \in \Omega(\varsigma, \mathcal{U}_\varepsilon, t)$. Também existe uma $(\mathcal{V}'_\delta, t)$-cadeia de $\xi_{(\mathcal{V}'_\delta,\mathrm{f}_t)}$ até ς, donde segue que $\varsigma \in \Omega(\eta, \mathcal{U}_\varepsilon, t)$. Portanto, $\eta \in E(w)$. □

O resultado seguinte é crucial para a formalização da transitividade por cadeias nas fibras de um um fibrado flag. Para a sua verificação, usamos o lema a seguir.

Lema 2.28. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo de endomorfismos locais agindo sobre Q. Dado um conjunto controlável $\mathbb{D}(w)$ de $\mathcal{S}_\mathbb{E}$ em $\mathbb{E}$, tem-se que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbb{D}(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} &= q \cdot \mathcal{A}(\mathbb{A}^q(w)) \\ &\;\; e \\ \mathcal{A}^*(\mathbb{D}(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} &= q \cdot \mathcal{A}^*(\mathbb{A}^q(w)) \end{aligned}$$

para todo $q \in Q$, onde $\mathbb{A}^q(w)$ é o w-conjunto controlável efetivo de $\mathcal{S}_q$ em $\mathbb{F}$.

Demonstração: Se $q \cdot u \in \mathcal{A}(\mathbb{D}(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}$, então, existe $\phi \in \mathcal{S}$ tal que $\phi(q) \cdot u \in \mathbb{D}(w)_0$. Tomando $q \cdot v \in \mathbb{D}(w)_0 \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}$, temos que existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $\varphi\phi(q) \cdot u = q \cdot v$. Logo, existe $g \in G$ tal que $\varphi\phi(q) = qg$ e $u = g^{-1}v$. Isto significa que $g \in \mathcal{S}_q$ e $u \in \mathcal{A}(\mathbb{A}^q(w))$. Portanto, $\mathcal{A}(\mathbb{D}(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} \subset q \cdot \mathcal{A}(\mathbb{A}^q(w))$. Por outro lado, se $q \cdot u \in q \cdot \mathcal{A}(\mathbb{A}^q(w))$, então, existe $h \in \mathcal{S}_q$ tal que $hu \in \mathbb{A}^q(w)_0$. Assim existe $\phi \in \mathcal{S}$ com $\phi(q) = qh$. Logo, $\phi(q) \cdot u = q \cdot hu \in q \cdot \mathbb{A}^q(w)_0 = \mathbb{D}(w)_0 \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}$. Portanto, $q \cdot u \in \mathcal{A}(\mathbb{D}(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}$, donde $q \cdot \mathcal{A}(\mathbb{A}^q(w)) \subset \mathcal{A}(\mathbb{D}(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}$. Temos então a primeira igualdade do enunciado. A segunda igualdade segue por um argumento semelhante. □

Proposição 2.29. *O domínio de atração de $E(w)$ é dado por*

$$\mathcal{A}(E(w)) = \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}(E(w_0))$$

onde $w_0 w = r_{i_n} ... r_{i_1}$ *é uma decomposição minimal, e o domínio de repulsão de* $E(w)$ *é dado por*

$$\mathcal{A}^*(E(w)) = \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}(E(1))$$

onde $w = r_{j_m} ... r_{j_1}$ *é uma decomposição minimal.*

Demonstração: Pela Proposição 1.52 temos que $\mathcal{A}(E(w)) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \mathcal{A}(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w))$, donde segue pelo Lema 2.28 acima e pelo Teorema 6.3 de [31] que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} &= \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} q \cdot \mathcal{A}\left(\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)\right) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}\left(q \cdot \mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w_0)_0\right) \\ &= \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}\left(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)_0 \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right) \end{aligned}$$

para todo $q \in Q$, onde $w_0 w = r_{i_n} ... r_{i_1}$ é uma decomposição minimal. Segue agora da Proposição 2.27 que

$$\mathcal{A}(E(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} = \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}\left(E(w_0) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right).$$

Assim,

$$\mathcal{A}(E(w)) = \bigcup_{q \in Q} \mathcal{A}(E(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} = \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}(E(w_0)).$$

Agora, pela Proposição 3.1 de [31], temos que

$$\mathcal{A}^*\left(\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)\right) = \mathcal{A}\left(\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w_0 w)^-\right)$$

onde $\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w_0 w)^-$ é o conjunto controlável efetivo de $(S_{\mathcal{U}_\varepsilon, t})_q^{-1}$ em $\mathbb{F}$. Assim, pelos Teorema 6.3 e Proposição 3.1 do mesmo artigo temos que

$$\mathcal{A}^*\left(\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)\right) = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}\left(\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w_0)_0^-\right) = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}\left(\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(1)_0\right)$$

onde $w = w_0(w_0 w) = r_{j_m} ... r_{j_1}$ é uma decomposição minimal. Visto que $\mathcal{A}^*(E(w)) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \mathcal{A}^*(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w))$, segue da Proposição 2.27 e do Lema 2.28 que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(E(w)) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} &= \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} q \cdot \mathcal{A}^*\left(\mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w)\right) = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}\left(q \cdot \mathbb{A}^q_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(1)_0\right) \\ &= \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}\left(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(1)_0 \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right) \\ &= \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}\left(E(1) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}^*(E(w)) = \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}(E(1))$. $\square$

De acordo com a Seção 7 de [4], dado $H \in Ad(G) H_{\Theta(\sigma)}$, as componentes conexas dos pontos fixos da ação adjunta do subgrupo a um parâmetro $\exp(tH)$ em $\mathbb{F}_\Theta$ são parametrizadas pelo grupo de Weyl W. Denota-se por $\mathrm{fix}_\Theta(H, w)$ a componente associada a $w \in W$ (c.f. Proposição 7.5 de [4]). Conforme o Lema B.8 do Apêndice B, temos que $\mathrm{fix}_\Theta(H, w) = g\mathrm{fix}_\Theta\left(H_{\Theta(\sigma)}, w\right) = gK^0_{H_{\Theta(\sigma)}} w\mathfrak{p}_\Theta$, onde $H = Ad(g) H_{\Theta(\sigma)}$ e $K^0_{H_{\Theta(\sigma)}}$ é a componente conexa da identidade do centralizador $K_{H_{\Theta(\sigma)}}$ de $H_{\Theta(\sigma)}$ em K (ver Lema 5.1 de [4]). Agora, pelo fato da fibração natural $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ ser equivariante, temos que

$$\pi_\Theta(\mathrm{fix}(H, w)) = \mathrm{fix}_\Theta(H, w).$$

No caso de $\Theta(\sigma)$ e $\Theta^*(\sigma)$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{fix}(H, 1) & = & \pi^{-1}_{\Theta(\sigma)}\left(\mathrm{fix}_{\Theta(\sigma)}(H, 1)\right) \\ & & \text{e} \\ \mathrm{fix}(H, w_0) & = & \pi^{-1}_{\Theta^*(\sigma)}\left(\mathrm{fix}_{\Theta^*(\sigma)}(H, w_0)\right) \end{array}$$

(ver Corolário B.11). Na verdade, as componentes $\mathrm{fix}_{\Theta(\sigma)}(H, 1)$ e $\mathrm{fix}_{\Theta^*(\sigma)}(H, w_0)$ coincidem com os conjuntos unitários $\left\{g\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}\right\}$ e $\left\{gw_0\mathfrak{p}_{\Theta^*(\sigma)}\right\}$ (ver Lema B.9). Em particular, dado $q \in Q$ e escrevendo $h(q) = gH_{\Theta(\sigma)}$, temos que $h(qg) = H_{\Theta(\sigma)} \sim \left(\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}, \mathfrak{p}^-_{\Theta(\sigma)}\right)$, donde $f(qg) = \mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}$, ou seja, $f(q) = g\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}$. Logo, $f(q) = \mathrm{fix}_{\Theta(\sigma)}(h(q), 1)$. Analogamente, vemos que $f^*(q) = \mathrm{fix}_{\Theta^*(\sigma)}(h(q), w_0)$. Assim, pela Proposição 2.16, temos que

$$\begin{aligned} E(1) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} &= \widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta(\sigma)}\left(E_{\Theta(\sigma)}(1) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}\right)_{\pi(q)}\right) = \widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta(\sigma)}(q \cdot f(q)) \\ &= q \cdot \pi^{-1}_{\Theta(\sigma)}\left(\mathrm{fix}_{\Theta(\sigma)}(h(q), 1)\right) \\ &= q \cdot \mathrm{fix}(h(q), 1). \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} E(w_0) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} &= \widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta^*(\sigma)}\left(E_{\Theta^*(\sigma)}(w_0) \cap \left(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}\right)_{\pi(q)}\right) = \widetilde{\pi}^{-1}_{\Theta^*(\sigma)}(q \cdot f^*(q)) \\ &= q \cdot \pi^{-1}_{\Theta^*(\sigma)}\left(\mathrm{fix}_{\Theta^*(\sigma)}(h(q), w_0)\right) \\ &= q \cdot \mathrm{fix}(h(q), w_0). \end{aligned}$$

Finalmente, considerando as observações e notações estabelecidas acima, podemos apresentar o resultado principal desta seção, onde caracterizamos os conjuntos de transitividade por cadeias nas fibras dos fibrados flag.

Teorema 2.30. *Para cada $q \in Q$, $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, a intersecção do w-conjunto de transitividade por cadeias de $(S, \mathbb{E}_\Theta)$ com a fibra sobre $\pi(q)$ é dada por*

$$E_\Theta(w)_{\pi(q)} = q \cdot \mathrm{fix}_\Theta(h(q), w)$$

onde $h(q) \in Ad(G) H_{\Theta(\sigma)}$ é o ponto identificado com $(f(q), f^*(q))$.

Demonstração: Visto que $E(w) = \mathcal{A}(E(w)) \cap \mathcal{A}^*(E(w))$, segue da Proposição 2.29 que

$$E(w) = \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}(E(w_0)) \cap \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}(E(1))$$

onde $w_0 w = r_{i_n} ... r_{i_1}$ e $w = r_{j_m} ... r_{j_1}$ são decomposições minimais. Logo,

$$\begin{aligned} E(w) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} &= \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}\left(E(w_0) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right) \cap \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}\left(E(1) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right) \\ &= \widetilde{\gamma}_{i_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{i_n}(q \cdot \mathrm{fix}(h(q), w_0)) \cap \widetilde{\gamma}_{j_1} \cdots \widetilde{\gamma}_{j_m}(q \cdot \mathrm{fix}(h(q), 1)) \\ &= q \cdot (\gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}(\mathrm{fix}(h(q), w_0)) \cap \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}(\mathrm{fix}(h(q), 1))). \end{aligned}$$

Pelo Corolário 7.5 de [4] segue que

$$E(w) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)} = q \cdot \mathrm{fix}(h(q), w).$$

Enfim,

$$\begin{aligned} E_\Theta(w) \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} &= \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \mathbb{D}^\Theta_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w_0)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \pi_\Theta\left(\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, t}(w_0)_0 \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right) \\ &= \pi_\Theta\left(E(w) \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}\right) = \pi_\Theta(q \cdot \mathrm{fix}(h(q), w)) \\ &= q \cdot \mathrm{fix}_\Theta(h(q), w). \end{aligned}$$

□

2.2.2 Grupos de transformações e subsemigrupos invariantes

Se S é um semigrupo reversível de automorfismos, então, $T = S^{-1}S$ é um grupo satisfazendo as condições de Ore. No Capítulo 1, estudamos grupos de transformações onde o grupo tem tal característica e a dinâmica da ação do grupo é estabelecida pela dinâmica da ação do subsemigrupo reversível gerador. Ou seja, quando falamos de dinâmica de um grupo de transformação, estamos nos referindo à dinâmica determinada por um certo subsemigrupo.

No caso geral de ações de grupos satisfazendo a condição de Ore, dois subsemigrupos reversíveis distintos podem determinar dinâmicas distintas ao grupo de transformação. Veja a Seção 3.2 para uma exemplificação deste fato. No caso de grupos de transformações sobre um fibrado flag, desejamos estabelecer uma relação da recorrência por cadeias entre os subsemigrupos geradores do grupo.

Conforme vimos no final do Capítulo 1, as condições de espaço compacto e de subsemigrupo invariante garantem uma relação direta entre as dinâmicas determinadas por um subsemigrupo e seu inverso, o que estende a relação entre as dinâmicas de um fluxo e seu fluxo reverso (c.f. [4]). Em vista disso, consideramos a partir de agora um fibrado principal $Q(X,G)$ com base compacta e um grupo de transformação (T,Q,σ) onde T é um grupo contendo subsemigrupos invariantes geradores.

De acordo com a Proposição 1.77, temos uma grande classe de ações de grupos onde a Proposição 2.24 se aplica sobre todas as fibras dos fibrados flag associados. De fato, este caso abrange as ações por automorfismos de subsemigrupos maximais de grupos nilpotentes (ver Teorema 8.3 de [19]). Veja também o Exemplo 3.2 do próximo capítulo para um caso não nilpotente. Porém, queremos encontrar uma forma de estabelecer o tipo parabólico para o grupo de transformação sem depender de um subsemigrupo gerador.

Para cada subsemigrupo invariante gerador $S \subset T$, denotemos $\Theta(\sigma,S)$ o tipo parabólico de (T,Q,σ) determinado por S, e $E_{\Theta}(w,S)$ o conjunto de transitividade por cadeias de (T,Q,σ) relativo a S e de tipo $w \in W$.

De acordo com o que discutimos no Capítulo 1, concluímos que sobre os fibrados flag associados a $Q(X,G)$ a transitividade por cadeias relativa a um subsemigrupo invariante gerador S coincide com aquela relativa a S^{-1}. Nossa questão é sobre a possibilidade de uma relação entre as dinâmicas relativas a todos os subsemigrupos invariantes geradores de T. Nesta discussão, garantimos uma tal relação de duas formas. Na primeira, envolvemos todos os subsemigrupos invariantes geradores do grupo, e mostramos a existência de um subfibrado de $Q(X,G)$ onde eles determinam a mesma transitividade por cadeias nos fibrados flag associados. Na segunda, estabelecemos o tipo parabólico do grupo de transformação relativamente a uma dada família especial de subsemigrupos invariantes geradores maximais no grupo, e associamos um subfibrado onde a transitividade por cadeias é comum entre os subsemigrupos da família.

Seja $S \subset T$ um subsemigrupo invariante gerador e tomemos o tipo parabólico $\Theta(\sigma,S)$ de (T,Q) determinado por S. Lembremos que os conjuntos de transitividade por cadeias relativos a um subsemigrupo invariante gerador é invariante pelo grupo todo. Como vimos acima, o fibrado $Q(X,G)$ é redutível ao subfibrado $P_S\left(X, Z_G\left(H_{\Theta(\sigma,S)}\right)\right)$, e como S é invariante, temos que P_S é invariante por T, pois assim o são os conjuntos de transitividade por cadeias. Assim, temos o grupo de transformação (T,P_S). Por simplificação de notação, denotemos $Z_G\left(H_{\Theta(\sigma,S)}\right) = G_S$. Então, G_S é um grupo de Lie redutível cuja componente semi-simples é conexa e admite $\Theta(\sigma,S)$ como sistema simples de raízes associado a um terno admissível adequado.

Escolhendo outro subsemigrupo invariante gerador $R \subset T$, tomamos o tipo parabólico $\Theta(\sigma,S,R) \subset \Theta(\sigma,S)$ de (T,P_S) determinado por R, e obtemos o subfibrado T-invariante $P_{S,R}(X,G_{S,R})$, onde $G_{S,R} = Z_{G_s}\left(H_{\Theta(\sigma,S,R)}\right)$.

Este processo de determinar subfibrados pode ser aplicado sucessivamente escolhendo-se outros subsemigrupos invariantes geradores de T. No entanto, visto que o sistema simples de raízes inicial Σ é finito, esse processo deve estabilizar em alguma redução, ou seja, existe um subfibrado $P(X, G')$ que não pode ser mais reduzível pelo processo. Assim, se Σ' é o sistema simples de raízes de G' e $S \subset T$ é um subsemigrupo invariante gerador qualquer, segue que o tipo parabólico de (T, P) determinado por S coincide com Σ'. Neste caso, o centralizador $Z_{G'}(H_{\Sigma'})$ coincide com o subgrupo parabólico $P'_{\Sigma'}$, donde temos que $Ad(G') H_{\Sigma'}$ é homeomorfo ao flag de tipo Σ', o qual é trivial. Em particular, a seção global contínua $\zeta : X \to P \times_{G'} Ad(G') H_{\Sigma'} = \mathbb{E}_{\Sigma'}$ é um epimorfismo de grupos de transformações, e como X é transitivo por cadeias relativo a S, segue que $\mathbb{E}_{\Sigma'}$ é transitivo por cadeias relativo a S. Logo, $\mathbb{E}_{\Sigma'} = E_{\Sigma'}(w, S)$, para todo $w \in W'$. Agora, pela Proposição 2.16, temos que

$$\mathbb{E} = \widetilde{\pi}_{\Sigma'}^{-1}(\mathbb{E}_{\Sigma'}) = \widetilde{\pi}_{\Sigma'}^{-1}(E_{\Sigma'}(1, S)) = E(1, S)$$

donde $\mathbb{E}$ é transitivo por cadeias relativo a S. Enfim, segue do Teorema 2.11 que $\mathbb{E}_\Theta$ é transitivo por cadeias relativo a S, para todo $\Theta \subset \Sigma'$. Portanto, a transitividade por cadeias em cada fibrado flag associado a $P(X, G')$ não depende do subsemigrupo invariante gerador do grupo.

Agora, observemos que é interessante relacionar as dinâmicas entre os subsemigrupos invariantes geradores maximais no grupo, pois estes determinam os maiores conjuntos de recorrência por cadeias. Por isto, definimos o seguinte conceito.

Definição 2.31. *Uma família $\mathcal{F}$ de subsemigrupos invariantes geradores maximais em T é dita uma **família ideal maximal** se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $S \in \mathcal{F}$, então, $S^{-1} \notin \mathcal{F}$; e*

2. *$\mathcal{F}$ é maximal com respeito à propriedade* (1).

Se $\mathcal{F}$ é uma família ideal maximal em T, então, definimos a **família ideal maximal reversa** de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{F}^* = \{S^{-1} : S \in \mathcal{F}\}$.

Observemos que uma família ideal maximal juntamente com sua reversa contêm todos os subsemigrupos invariantes geradores maximais em T.

No caso da reta real $\mathbb{R}$, existe apenas um par de famílias ideais maximais, as quais são unitárias. Em dimensão maior do que um, existem infinitas famílias ideias maximais, as quais são infinitas. Por exemplo, fixando um cone maximal S em $\mathbb{R}^2$, temos que $\mathcal{F} = \{R_\theta(S) : R_\theta \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}), \theta \in [0, \pi)\}$ é uma família ideal maximal em $\mathbb{R}^2$.

Em relação à uma família ideal maximal, podemos definir o tipo parabólico do grupo de transformação (T, Q). Para isto, também usamos o processo de tomar reduções sucessivas de subfibrados.

Seja $\mathcal{F}$ uma família ideal maximal em T. Como o sistema simples de raízes de G é finito, existe um número finito de tipos parabólicos determinados pelos subsemigrupos da família $\mathcal{F}$, os quais denotamos por $\Theta_1, ..., \Theta_n \subset \Sigma$. A cada Θ_i está associado um subfibrado T-invariante $P_i(X, G_i)$, onde $G_i = Z_G(H_{\Theta_i})$. Tomando um representante $S_i \in \mathcal{F}$ para cada Θ_i, temos que $S = S_1 \cap \ldots \cap S_n \neq \emptyset$. Assim, o tipo parabólico de S está contido em Θ_i para todo i. Logo, faz sentido a intersecção $\Theta^1_{\mathcal{F}} = \Theta_1 \cap ... \cap \Theta_n$. Como cada P_i é T-invariante, então, $P^1 = P_1 \cap ... \cap P_n$ é T-invariante. Além disso, temos que $G^1 = Z_G\left(H_{\Theta^1_{\mathcal{F}}}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} Z_G(H_{\Theta_i})$. Portanto, $P^1(X, G^1)$ é um subfibrado T-invariante de $Q(X, G)$, onde $\Theta^1_{\mathcal{F}}$ é o sistema simples de raízes de G^1. Agora, considerando a mesma família $\mathcal{F}$, repetimos o mesmo processo sobre $P^1(X, G^1)$ e determinamos o subfibrado T-invariante $P^2(X, G^2)$, onde $\Theta^2_{\mathcal{F}}$ é o sistema simples de raízes de G^2. Aplicando sucessivamente o processo, obtemos um subfibrado que não pode ser mais reduzível desta maneira, pois o sistema simples de raízes é finito. Logo, existe um subfibrado de $Q(X, G)$ onde o tipo parabólico dos subsemigrupos da família $\mathcal{F}$ coincidem entre si e a transitividade por cadeias não depende dos subsemigrupos. Se $P^m(X, G^m)$ é o primeiro subfibrado onde este fato ocorre, então, denominamos $\Theta_{\mathcal{F}}(\sigma) = \Theta^{m+1}_{\mathcal{F}}$ de tipo parabólico do grupo de transformação (T, Q, σ) com respeito à família ideal maximal $\mathcal{F}$.

Naturalmente, o tipo parabólico de (T, Q) com respeito á família ideal maximal reversa $\mathcal{F}^*$ coincide com o dual de $\Theta_{\mathcal{F}}(\sigma)$. Com efeito, sejam $\Theta_1, ..., \Theta_n \subset \Sigma$ os tipos parabólicos dos subsemigrupos da família $\mathcal{F}$ obtidos na primeira redução. Visto que os subsemigrupos envolvidos são invariantes, temos que $\Theta^*_1, ..., \Theta^*_n \subset \Sigma$ são os tipos parabólicos dos subsemigrupos da família $\mathcal{F}^*$. Logo, $\Theta^1_{\mathcal{F}^*} = (\Theta^1_{\mathcal{F}})^*$. Aplicando sucessivamente este princípio nas reduções, obtemos que $\Theta_{\mathcal{F}^*}(\sigma) = \Theta^*_{\mathcal{F}}(\sigma)$.

No caso de fluxos, $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}^+\}$ e $\mathcal{F}^* = \{\mathbb{R}^-\}$ formam o único par de famílias ideais maximais de $\mathbb{R}$. Obviamente, visto que $\mathcal{F}$ é unitária, temos que $\Theta_{\mathcal{F}}(\sigma) = \Theta(\sigma)$ é o tipo parabólico do fluxo e $\Theta_{\mathcal{F}^*}(\sigma) = \Theta^*(\sigma)$ é tipo parabólico do fluxo reverso.

2.3 Exemplos

Fluxos e semifluxos n-dimensionais

Um *semifluxo n-dimensinal* consiste de uma ação de um cone maximal

$$\mathbb{S}_i = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$$

de $\mathbb{R}^n$ sobre um espaço topológico. Um *fluxo n-dimensional* é uma ação do grupo euclidiano $\mathbb{R}^n$ sobre um espaço topológico. Neste caso, fixamos um cone maximal como subsemigrupo determinante da dinâmica do fluxo. Em particular, podemos considerar fluxos n-dimensionais em fibrados principais diferenciáveis. Uma maneira interessante de definir fluxos n-dimensionais de automorfismos é obtida a partir da ação infinitezimal.

Seja $\pi : Q \to M$ um fibrado principal diferenciável com grupo de Lie redutível G de componente semi-simples conexa. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie da componente semi-simples de G. Consideremos aplicações $A^i : Q \to \mathfrak{g}$, $i = 1, ..., n$, com valores em uma subálgebra de Lie abeliana, satisfazendo a equação

$$A^i(qg) = Ad\left(g^{-1}\right) A^i(q)$$

para todo $q \in Q$ e $g \in G$ (por exemplo, se $\pi : M \times G \to M$ é um fibrado trivial, fixa X e defina $A(x, g) = Ad(g^{-1}) X$, para todo $(x, g) \in M \times G$). Para cada i e $q \in Q$, definamos

$$X^i(q) = \widetilde{A^i(q)}(q) = \frac{d}{dt}\left(q \exp\left(tA^i(q)\right)\right)|_{t=0}.$$

Então, X^i é um campo de vetores em Q. É imediato ver que a solução para o sistema de equação diferencial ordinária $x' = X^i(x)$ com valor inicial $x(0) = q$ é dada por $X^i_t(q) = q \exp(tA^i(q))$. Estas soluções determinam um fluxo de automorfismos sobre o fibrado principal. Com efeito, dados $q \in Q$ e $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned} X^i_t(qg) &= qg \exp\left(tA^i(qg)\right) = qg \exp\left(Ad\left(g^{-1}\right) tA^i(q)\right) \\ &= q \exp\left(tA^i(q)\right) g = X^i_t(q)\, g. \end{aligned}$$

Agora, para quaisquer i, j e $q, p \in Q$, temos que

$$\left[\widetilde{A^i(q)}, \widetilde{A^j(p)}\right]_{\Gamma(TQ)} = \widetilde{\left[A^i(q), A^j(p)\right]_{\mathfrak{g}}} = 0$$

donde

$$X^i_t \circ X^j_s = X^j_s \circ X^i_t$$

para todos $t, s \in \mathbb{R}$. Com isso, uma ação de $\mathbb{R}^n$ sobre o fibrado principal é dada da seguinte maneira. Para $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ e $q \in Q$, definimos

$$\sigma((t_1, ..., t_n), q) = X^1_{t_1} \circ \cdots \circ X^n_{t_n}(q) = q \exp\left(t_1 A^1(q)\right) \ldots \exp\left(t_n A^n(q)\right).$$

Pela comutatividade dos campos, temos que σ é um fluxo n-dimensional de automorfismos sobre o fibrado principal. Observemos que o fluxo induzido na base do fibrado é trivial, pois as fibras são invariantes pelo fluxo. Logo, o fluxo induzido na base é recorrente por cadeias. Assumindo que M é uma variedade conexa e compacta, segue da Proposição 1.39 que o fluxo induzido na base é transitivo por cadeias.

Fibrado das bases

Seja M uma variedade paracompacta de dimensão n. Uma forma linear u a um ponto $x \in M$ é uma base ordenada $X_1, ..., X_n$ do espaço tangente T_xM. Seja $L(M)$ a variedade das formas lineares a todos os pontos de M. Se $u \in L(M)$ é uma forma linear a um ponto x de M, definimos $\pi(u) = x$. Então, $\pi : L(M) \to M$ é um fibrado principal com grupo de estrutura $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, que é um grupo de Lie redutível com componente semi-simples conexa $(\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = Z(\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}))\,\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}))$. A ação à direita de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ sobre $L(M)$ é a ação natural. Dado $(u = (X_1, ..., X_n), A = (a_{ij})) \in L(M) \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, então,

$$uA = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1} X_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{jn} X_j \right).$$

Agora, considerando a ação canônica à esquerda de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$, tomamos o fibrado vetorial associado $\pi_E : E = L(M) \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \to M$. Enfim, tomando uma variedade flag Grasmanniana $Gr_k(\mathbb{R}^n)$, temos o fibrado flag $\pi_{Gr_k M} : E \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} Gr_k(\mathbb{R}^n) \to M$; tomando uma variedade flag clássica $\mathbb{F}_I(\mathbb{R}^n)$ de índice $I = (i_1, ..., i_l)$, $i_1 \leq ... \leq i_l$, temos o fibrado flag $\pi_{\mathbb{F}_I M} : E \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} \mathbb{F}_I(\mathbb{R}^n) \to M$. Em ambos estes fibrados flag podemos considerar ações de subsemigrupos reversíveis de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Inclusive, podemos definir semigrupos de transformações à esquerda no fibrado. Com efeito, dados $A, B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, definimos o produto $A * B = BA$. Denotando $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^* = (\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}), *)$, temos que a aplicação $\sigma : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^* \times L(M) \to L(M)$ dada por $\sigma(A, u) = uA$ define uma ação à esquerda de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^*$ sobre $L(M)$. Tomando um subsemigrupo S no centro de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^*$, temos que $(S, L(M), \sigma)$ é um semigrupo de transformação de automorfismos. O semigrupo de transformação induzido na base é trivial, ou seja, S deixa fixo cada ponto de M. Logo, $\left(S, M, \sigma^M\right)$ é recorrente por cadeias. Se M é uma variedade compacta e conexa, temos que S é transitivo por cadeias na base do fibrado.

Também podemos construir fluxos n-dimensionais sobre o fibrado das bases, da mesma forma realizada no exemplo anterior.

Outra forma de definir um fluxo n-dimensional é a seguinte. Consideremos o homomorfismo de grupo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^+$ dado por

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} e^{x_1 + \cdots + x_n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x_1 + \cdots + x_n} \end{pmatrix}.$$

Tomando a ação $\sigma : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^* \times L(M) \to L(M)$ definida acima, temos que $\rho = \sigma \circ (\varphi \times id) : \mathbb{R}^n \times L(M) \to L(M)$ define um fluxo n-dimensional de automorfismos, o qual é transitivo por cadeias na base do fibrado flag se as hipóteses de conexidade e compacidade forem assumidas.

Ações de grupos solúveis

Vimos que um subsemigrupo maximal de um grupo solúvel é reversível. Considerando subgrupos solúveis de grupos de Lie redutíveis podemos definir ações de subsemigrupos reversíveis em fibrados principais. Como exemplo, seja $\pi : Q \to M$ um fibrado principal diferenciável com base conexa e compacta e grupo de estrutura sendo um grupo de Lie redutível G com componente semi-simples conexa e álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tomando uma subálgebra solúvel $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, seja H o subgrupo de Lie solúvel e simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$. Então, H é difeomorfo à $\mathbb{R}^n$, para algum n, e existe uma base $\{X_1, ..., X_n\}$ de $\mathfrak{h}$ tal que a aplicação

$$(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \exp(t_1 X_1) \ldots \exp(t_n X_n) \in H$$

é um difeomorfismo. Considere uma aplicação $f : Q \to Aut(\mathfrak{g})$ tal que

$$f(qg) = Ad\left(g^{-1}\right) \circ f(q)$$

para todo $q \in Q$ e $g \in G$, e que

$$\exp(t_1 X_1) \ldots \exp(t_n X_n) \overset{\varphi}{\longmapsto} \exp(t_1 f(q)(X_1)) \ldots \exp(t_n f(q)(X_n))$$

seja um isomorfismo de subgrupos solúveis (por exemplo, se $\pi : M \times G \to M$ é um fibrado trivial, defina $f(x, g) = Ad(g^{-1})$, para todo $(x, g) \in M \times G$). Para cada natural i entre 1 e n, definimos a aplicação $A^i : Q \to \mathfrak{g}$ por

$$A^i(q) = f(q)(X_i).$$

Então, A^i satisfaz

$$A^i(qg) = Ad\left(g^{-1}\right) A^i(q)$$

para todo $q \in Q$ e $g \in G$, a condição requerida no primeiro exemplo. Tomemos o campo de vetores X^i sobre Q dado por

$$X^i(q) = \widetilde{A^i(q)}(q) = \frac{d}{dt}\left(q \exp\left(tA^i(q)\right)\right)|_{t=0}.$$

O fluxo deste campo é dado por

$$X^i_t(q) = q \exp\left(tA^i(q)\right) = q \exp(tf(q)(X_i))$$

o qual determina automorfismos sobre o fibrado. Agora, devido ao difeomorfismo de H com $\mathbb{R}^n$, podemos definir uma aplicação $\sigma : H \times Q \to Q$ por

$$\sigma(\exp(t_1 X_1) \ldots \exp(t_n X_n), q) = X^1_{t_1} \circ \cdots \circ X^n_{t_n}(q).$$

Logo,

$$\sigma\left(\exp\left(t_1X_1\right)\ldots\exp\left(t_nX_n\right),q\right)=q\exp\left(t_1f\left(q\right)\left(X_1\right)\right)\ldots\exp\left(t_nf\left(q\right)\left(X_n\right)\right)$$

Segue do isomorfismo entre os subgrupos solúveis que σ define uma ação por automorfismos de H sobre Q. O grupo de transformação $\left(H,M,\sigma^M\right)$ induzido na base é trivial. Tomando um subsemigrupo maximal S de H, temos que $\left(H,M,\sigma^M\right)$ é transitivo por cadeias com respeito a S.

Capítulo 3

Ações de grupos na compactificação de Ellis

Nesta última parte da tese estudamos recorrência por cadeias na compactificação de Ellis de grupos com topologia normal Hausdorff (T_4). Com esta topologia, a compactificação do grupo coincide com a extensão de Wallman sobre os ultrafiltros fechados. Um grupo age por homeomorfismos sobre sua compactificação, donde temos um caso especial de grupo de transformação. Com respeito ao comportamento dinâmico de tal ação, introduzimos o conceito de subsemigrupo semitotal e apresentamos sua relação com certos atratores e repulsores e com a transitividade por cadeias. Assumindo as condições de invariança e semitotalidade sobre o subsemigrupo, determinamos explicitamente os conjuntos transitivos por cadeias maximais na compactificação de Ellis.

3.1 A compactificação de um grupo

Seja G um grupo T_4 não compacto. Denotemos por βG a compactificação de Ellis G. Então, existe um mergulho $\epsilon : G \to \beta G$ e G é um subconjunto denso de βG. A propriedade central de βG é a extensão de aplicações contínuas. Com efeito, se K é um espaço compacto Hausdorff e $\varphi : G \to K$ é uma aplicação contínua, então existe uma única aplicação contínua $\psi : \beta G \to K$ tal que $\psi \circ \epsilon = \varphi$. Esta propriedade caracteriza completamente a compactificação βG.

Na teoria de filtros, βG é descrito como o conjunto dos ultrafiltros sobre os conjuntos fechados de G munido com a topologia *"hull-kernal"*. Vamos fazer um resumo desta descrição de βG.

Denotemos por $\mathcal{F}(G)$ a família de todos os subconjuntos fechados de G. Então, um *filtro* f sobre $\mathcal{F}(G)$ é uma coleção não vazia de subconjuntos em $\mathcal{F}(G)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \notin f$;

2. Se $A, B \in f$, então, $A \cap B \in f$;

3. Se $A \in f$ e $A \subset F$, com $F \in \mathcal{F}(G)$, então, $F \in f$.

Um *ultrafiltro* u sobre $\mathcal{F}(G)$ é um filtro maximal sobre $\mathcal{F}(G)$. Por conseqüência, u também satisfaz as propriedades:

4. Se $B \in \mathcal{F}(G)$ e $B \cap A \neq \emptyset$, para todo $A \in u$, então, $B \in u$;

5. Se $A, B \in \mathcal{F}(G)$ e $A \cup B \in u$, então, ou $A \in u$ ou $B \in u$;

6. Se $u \neq u'$, onde u' é outro ultrafiltro, então, existem $A \in u$ e $A' \in u'$ tais que $A \cap A' = \emptyset$.

Para cada $g \in G$, temos o ultrafiltro

$$u_g = \{A \in \mathcal{F}(G) : g \in A\}.$$

Lema 3.1. *Seja u um filtro sobre $\mathcal{F}(G)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *u é um ultrafiltro sobre $\mathcal{F}(G)$;*

2. *Dado um subconjunto fechado $A \subset G$, então, ou $A \in u$ ou existe $A' \in u$ tal que $A' \subset G \setminus A$;*

3. *Dado um subconjunto aberto $U \subset G$, então, ou $G \setminus U \in u$ ou existe $B \in u$ tal que $B \subset G \setminus U$.*

Dado um subconjunto aberto $U \subset G$ definimos o conjunto

$$\mathrm{h_a}(U) = \{u \in \beta G : \text{existe } A \in u \text{ com } A \subset U\}.$$

Dado um subconjunto fechado $A \subset G$ definimos o conjunto

$$\mathrm{h_f}(A) = \{u \in \beta G : A \in u\}.$$

Assim, pelas propriedades de ultrafiltros temos que

$$\mathrm{h_a}(U) = \beta G \setminus \mathrm{h_f}(G \setminus U) \quad \text{e} \quad \mathrm{h_f}(A) = \beta G \setminus \mathrm{h_a}(G \setminus A).$$

Mais ainda, dada uma coleção finita de abertos $U_1, ..., U_n \subset G$, temos que

$$\mathrm{h_a}\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{h_a}(U_i) \quad \text{e} \quad \mathrm{h_a}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{h_a}(U_i).$$

Também para uma coleção finita de fechados $A_1, ..., A_n \subset G$ temos que

$$\mathrm{h_f}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{h_f}\left(A_i\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{h_f}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{h_f}\left(A_i\right).$$

Com essas propriedades, a família $\mathcal{B} = \{\mathrm{h_a}(U) : U \text{ subconjunto aberto de } G\}$ é uma base de topologia para o conjunto de ultrafiltros sobre $\mathcal{F}(G)$. Então, $\mathcal{B}$ gera a topologia compacta Hausdorff de βG. O fecho de um subconjunto $\Gamma \subset \beta G$ é dado por

$$\mathrm{fe}(\Gamma) = \{u \in \beta G : \cap \{v : v \in \Gamma\} \subset u\}.$$

Enfim, a aplicação $g \in G \to \epsilon(g) = u_g$ é um mergulho de G em βG. Assim, podemos considerar que $G \subset \beta G$. Daí, para todo subconjunto $B \subset G$, temos que

$$\mathrm{fe}(B) = \mathrm{h_f}(\mathrm{fe}_G(B)).$$

Em particular, temos que $\mathrm{fe}(G) = \beta G$.

Tomaremos a liberdade de não usar as indicações de fecho e interior tomadas em G.

Contudo, todas estas afirmações estão detalhadas no Apêndice D.

3.1.1 O grupo de transformação $(G, \beta G)$

A compactificação βG é munida com uma estrutura de semigrupo que induz a estrutura de grupo de G. Em especial, G exerce uma ação por homeomorfismos sobre βG.

Para quaisquer $g, h \in G$, temos que

$$u_g u_h = u_{gh}.$$

As translações à direita e à esquerda em βG satisfazem o seguinte:

1. A translação à direita R_u por u é um homomorfismo, para todo $u \in \beta G$.

2. A translação à direita R_{u_g} e a translação à esquerda L_{u_g} por u_g é um isomorfismo, para todo $g \in G$.

As aplicações R_{u_g} e L_{u_g} são as extensões únicas das translações à direita e à esquerda R_g e L_g em G, respectivamente.

A ação à esquerda de G sobre βG é definida pelas translações à esquerda L_{u_g} $(g \in G)$. Dado $(g, u) \in G \times \beta G$, denotamos

$$gu = u_g u = \{gA : A \in u\}.$$

Semelhantemente, a ação à direita de G sobre βG é definida pelas translações à direita R_{u_g} $(g \in G)$. Assim, dado $(u, g) \in \beta G \times G$, denotamos

$$ug = uu_g = \{Ag : A \in u\}.$$

Contudo, para o desenvolvimento do conteúdo deste capítulo, vamos abordar o grupo de transformação à esquerda $(G, \beta G)$. Conforme observamos no Capítulo 1, os resultados sobre o grupo de transformação à direita $(\beta G, G)$ são obtidos analogamente.

Os subconjuntos minimais de $(G, \beta G)$ possuem caracterização peculiar. Com efeito, eles coincidem com os ideais minimais às esquerda de βG. Outra particularidade de $(G, \beta G)$ é a propriedade de extensão de homomorfismos. Seja (G, X) um grupo de transformação com espaço base compacto Hausdorff. Se $\varphi : G \to X$ é um homomorfismo, então, existe um homomorfismo $\psi : \beta G \to X$ tal que $\psi(u_g) = \varphi(g)$, para todo $g \in G$. Esta propriedade implica na universalidade dos subconjuntos minimais de $(G, \beta G)$ (ver cap. 7 de [11]).

A ação de G em βG tem ainda as seguintes propriedades:

1. $g(\mathrm{h_a}(U)) = \mathrm{h_a}(gU)$ e $(\mathrm{h_a}(U))g = \mathrm{h_a}(Ug)$, para cada $g \in G$ e cada subconjunto aberto $U \subset G$.

2. $g(\mathrm{h_f}(A)) = \mathrm{h_f}(gA)$ e $(\mathrm{h_f}(A))g = \mathrm{h_f}(Ag)$, para cada $g \in G$ e cada subconjunto fechado $A \subset G$.

3.2 Transitividade por cadeias em βG

Enfatizamos agora o conceito de recorrência por cadeias em $(G, \beta G)$. Para esta abordagem, adotamos a família admissível $\mathcal{O}_\mathrm{f}(\beta G)$ de todas as coberturas abertas finitas de βG constituídas por subconjuntos da base $\mathfrak{B}$. Tomando uma cobertura aberta finita $\{U_i : i = 1, ..., n\}$ de G, obtemos uma cobertura aberta finita $\{\mathrm{h_a}(U_i) : i = 1, ..., n\}$ de βG.

Seja $S \subsetneq G$ um subsemigrupo reversível fechado, de interior não vazio e gerador de G. Seja $e \in G$ o elemento neutro. Então, para cada $g \in G$, temos que $\omega(u_e, S) = \omega(u_g, S)$, $\omega^*(u_e, S) = \omega^*(u_g, S)$, $\omega_\mathrm{d}(u_e, S) = \omega_\mathrm{d}(u_g, S)$ e $\omega_\mathrm{e}^*(u_e, S) = \omega_\mathrm{e}^*(u_g, S)$.

Proposição 3.2. *Para cada $g \in G$, os conjuntos $\omega_\mathrm{e}(\mathrm{h_f}(Sg), S)$ e $\omega_\mathrm{d}(\mathrm{h_f}(Sg), S)$ são respectivamente um atrator à esquerda e um atrator à direita de $(G, \beta G)$, e os conjuntos $\omega_\mathrm{e}^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}g), S)$ e $\omega_\mathrm{d}^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}g), S)$ são respectivamente um repulsor à esquerda e um repulsor à direita de $(G, \beta G)$.*

Demonstração: Dado $s \in \mathrm{int}\,(S)$, temos que $sSg \subset \mathrm{int}\,(Sg)$ e $SsSg \subset \mathrm{int}\,(Sg)$. Então, $\mathrm{h_f}\,(sSg)$ e $\mathrm{h_f}\,(SsSg)$ são subconjuntos de $\mathrm{int}\,(\mathrm{h_f}\,(Sg))$. Assim,

$$\omega_{\mathrm{e}}\,(\mathrm{h_f}\,(Sg)\,, S) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,(tS\mathrm{h_f}\,(Sg)) \subset \bigcap_{t \in S} \mathrm{h_f}\,(tSg) \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{h_f}\,(Sg))$$

e

$$\omega_{\mathrm{d}}\,(\mathrm{h_f}\,(Sg)\,, S) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\,(St\mathrm{h_f}\,(Sg)) \subset \bigcap_{t \in S} \mathrm{h_f}\,(StSg) \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{h_f}\,(Sg))\,.$$

Agora, também temos que $s^{-1}S^{-1}g \subset \mathrm{int}\,(S^{-1}g)$ e $S^{-1}s^{-1}S^{-1}g \subset \mathrm{int}\,(S^{-1}g)$. Logo, $\mathrm{h_f}\,(s^{-1}S^{-1}g)$ e $\mathrm{h_f}\,(S^{-1}s^{-1}S^{-1}g)$ são subconjuntos de $\mathrm{int}\,(\mathrm{h_f}\,(S^{-1}g))$. Assim,

$$\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(\mathrm{h_f}\left(S^{-1}g\right), S\right) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\left(S^{-1}t^{-1}\mathrm{h_f}\left(S^{-1}g\right)\right) \subset \mathrm{int}\left(\mathrm{h_f}\left(S^{-1}g\right)\right)$$

e

$$\omega_{\mathrm{d}}^{*}\left(\mathrm{h_f}\left(S^{-1}g\right), S\right) = \bigcap_{t \in S} \mathrm{fe}\left(t^{-1}S^{-1}\mathrm{h_f}\left(S^{-1}g\right)\right) \subset \mathrm{int}\left(\mathrm{h_f}\left(S^{-1}g\right)\right)$$

donde concluímos a demonstração. □

De imediato pensamos na possibilidade do repulsor à direita $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\,(\mathrm{h_f}\,(S^{-1})\,, S)$ ser o repulsor complementar do atrator à direita $\omega_{\mathrm{d}}\,(\mathrm{h_f}\,(S)\,, S)$. Em geral, podemos afirmar que vale a inclusão $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\,(\mathrm{h_f}\,(S^{-1})\,, S) \subset \omega_{\mathrm{d}}\,(\mathrm{h_f}\,(S)\,, S)^{*}$. Com efeito, visto que S é um subsemigrupo próprio de G, existe $t \in S$ tal que $t \notin S^{-1}$. Dessa forma, $S \cap t^{-1}S^{-1} = \emptyset$, donde temos que $\mathrm{h_f}\,(S) \cap \mathrm{h_f}\,(t^{-1}S^{-1}) = \emptyset$. Logo, o atrator $\omega_{\mathrm{d}}\,(\mathrm{h_f}\,(S)\,, S)$ é disjunto do repulsor $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\,(\mathrm{h_f}\,(S^{-1})\,, S)$. A inclusão mencionada segue então pelo fato de $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\,(\mathrm{h_f}\,(S^{-1})\,, S)$ ser compacto e invariante. No entanto, com uma condição adicional sobre o subsemigrupo S, os conjuntos $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\,(\mathrm{h_f}\,(S^{-1})\,, S)$ e $\omega_{\mathrm{d}}\,(\mathrm{h_f}\,(S)\,, S)^{*}$ de fato coincidem. Neste caso, o par atrator-repulsor $(\omega\,(\mathrm{h_f}\,(S)\,, S)\,, \omega^{*}\,(\mathrm{h_f}\,(S^{-1})\,, S))$ é a única decomposição de Morse não trivial de $(G, \beta G)$.

Antes de discutirmos sobre uma tal condição, observemos o seguinte fato. Pelo Lema 1.8, temos que

$$\omega_{\mathrm{e}}\,(u_e, S) = \omega_{\mathrm{e}}\,(\mathrm{h_f}\,(S)\,, S) = \omega\,(\mathrm{h_f}\,(S)\,, S)$$

e

$$\omega_{\mathrm{d}}^{*}\,(u_e, S) = \omega_{\mathrm{d}}^{*}\left(\mathrm{h_f}\left(S^{-1}\right), S\right) = \omega^{*}\left(\mathrm{h_f}\left(S^{-1}\right), S\right).$$

Então, pela Proposição 3.2, temos que $\omega_{\mathrm{e}}\,(u_e, S)$ é um atrator à esquerda e que $\omega_{\mathrm{d}}^{*}\,(u_e, S)$ é um repulsor à direita de $(G, \beta G)$. Agora, dados $s, t \in S$, temos que $\omega_{\mathrm{d}}\,(u_e, S) \subset \mathrm{h_f}\,(Stss) \subset St\mathrm{h_f}\,(Ss)$ e $\omega_{\mathrm{e}}^{*}\,(u_e, S) \subset \mathrm{h_f}\,(S^{-1}t^{-1}s^{-1}s^{-1}) \subset S^{-1}t^{-1}\mathrm{h_f}\,(S^{-1}s^{-1})$. Logo,

$$\omega_{\mathrm{d}}\,(u_e, S) \subset \bigcap_{s \in S} \omega_{\mathrm{d}}\,(\mathrm{h_f}\,(Ss))$$

e

$$\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(u_{e},S\right)\subset\bigcap_{s\in S}\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(\mathrm{h_{f}}\left(S^{-1}s^{-1}\right)\right).$$

Por outro lado, para qualquer $t\in S$, temos que

$$\bigcap_{s\in S}\omega_{\mathrm{d}}\left(\mathrm{h_{f}}\left(Ss\right),S\right)\subset\omega_{\mathrm{d}}\left(\mathrm{h_{f}}\left(St\right),S\right)\subset\mathrm{h_{f}}\left(St\right)$$

e

$$\bigcap_{s\in S}\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(\mathrm{h_{f}}\left(S^{-1}s^{-1}\right),S\right)\subset\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(\mathrm{h_{f}}\left(S^{-1}t^{-1}\right),S\right)\subset\mathrm{h_{f}}\left(S^{-1}t^{-1}\right).$$

Portanto,

$$\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)=\bigcap_{s\in S}\omega_{\mathrm{d}}\left(\mathrm{h_{f}}\left(Ss\right),S\right)$$

e

$$\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(u_{e},S\right)=\bigcap_{s\in S}\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(\mathrm{h_{f}}\left(S^{-1}s^{-1}\right),S\right).$$

Assim, $\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$ é uma intersecção de atratores à direita e $\omega_{\mathrm{e}}^{*}\left(u_{e},S\right)$ é uma intersecção de repulsores à esquerda de $(G,\beta G)$. Com isto, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.3. *O conjunto $\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$ é um conjunto transitivo por cadeias maximal de $(G,\beta G)$.*

Demonstração: Dado $u\in\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$, temos que $\omega_{\mathrm{d}}\left(u,S\right)\subset\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$. Visto que $\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$ é uma intersecção de atratores à direita, segue pela Proposição 1.57 que $\Omega\left(u,S\right)\subset\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$. Como $\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$ é transitivo por cadeias, temos que $E_{u}=\Omega\left(u,S\right)\cap\Omega^{*}\left(u,S\right)=\omega_{\mathrm{d}}\left(u_{e},S\right)$. □

Corolário 3.4. *$(G,\beta G)$ não é transitivo por cadeias.*

Notemos que isto implica que $(G,\beta G)$ também não é recorrente por cadeias. De fato, pois supondo βG é recorrente por cadeias, temos que $G\subset\Omega^{*}\left(u_{g},S\right)$, para todo $g\in G$, pois $\Omega^{*}\left(u_{g},S\right)$ é invariante. Logo, $G\subset E_{u_{g}}$, e como $E_{u_{g}}$ é fechado, temos que $\beta G=E_{u_{g}}$. Portanto, βG é transitivo por cadeias, contradizendo o corolário acima.

Em particular, o Corolário 3.4 afirma que um grupo compacto não admite um subsemigrupo próprio, fechado e de interior não vazio, com o qual juntamente satisfaz as condições de Ore. Com efeito, Se G é compacto, então, $\beta G=G$, evidentemente. Neste caso, G é um conjunto minimal e, portanto, transitivo por cadeias.

Agora, notemos que a vantagem das coberturas abertas finitas é que elas determinam uma quota para o número de saltos em uma cadeia associada. Mais especificamente, se uma cobertura tem um número n de conjuntos, então, uma cadeia a ela associada poderá ser construída com um número menor ou igual a n de pontos. Este recurso nós utilizamos para mostrar o seguinte resultado.

Proposição 3.5. *Sejam $t \in \operatorname{int}(S)$ e $u \in \beta G$.*

1. *Se $St \in u$, então, $\widehat{\Omega}(u,S) \subset \mathrm{h_f}(S_t)$.*
2. *Se $t^{-1}S^{-1} \in u$, então, $\Omega^*(u,S) \subset \mathrm{h_f}(t^{-1}S^{-1})$.*
3. *Se $S_t^{-1} \in u$, então, $\widehat{\Omega}^*(u,S) \subset \mathrm{h_f}\left(S_t^{-1}\right)$.*

Demonstração: Para verificarmos os ítens (1), seja $v \in \widehat{\Omega}(u,S)$ e $t \in \operatorname{int}(S)$. Como $tS_t \subset \operatorname{int}(S_t)$ temos que

$$\mathcal{U} = \{\mathrm{h_a}(\operatorname{int}(S_t)), \mathrm{h_a}(G \setminus tS_t)\} \in \mathcal{O}_\mathrm{f}(\beta G).$$

Sejam $u_0 = u, ..., u_n = v \in \beta G$, $n \leq 2$, $t_0, ..., t_{n-1} \in S_{t^2}$ e $\Gamma_0, ..., \Gamma_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, t^2)$-subcadeia de u para v. Suponhamos que $\Gamma_0 = \mathrm{h_a}(G \setminus tS_t)$. Visto que $t_0u \in \Gamma_0$, então,

$$u \in t_0^{-1}\mathrm{h_a}(G \setminus tS_t) = \mathrm{h_a}\left(G \setminus t_0^{-1}tS_t\right).$$

No entanto, como $St \subset t_0^{-1}tS_t$, temos que $u \in \mathrm{h_a}(G \setminus St)$. Mas isto não é possível, pois $St \in u$. Assim, $\Gamma_0 = \mathrm{h_a}(\operatorname{int}(S_t))$, donde $u_1 \in \mathrm{h_a}(\operatorname{int}(S_t))$. Se $n = 1$, então,

$$v = u_1 \in \mathrm{h_a}(\operatorname{int}(S_t)) \subset \mathrm{h_f}(S_t).$$

Se $n = 2$, repetimos o argumento anterior com u_1e mostramos que $v = u_2 \in \mathrm{h_f}(S_t)$. Portanto, $\widehat{\Omega}(u,S) \subset \mathrm{h_f}(S_t)$. Para verificarmos o ítem (2), seja $v \in \Omega^*(u,S)$. Como $t^{-1}S^{-1} \subset \operatorname{int}(S^{-1})$, temos que

$$\mathcal{U} = \left\{\mathrm{h_a}\left(\operatorname{int}\left(S^{-1}\right)\right), \mathrm{h_a}\left(G \setminus t^{-1}S^{-1}\right)\right\} \in \mathcal{O}_\mathrm{f}(\beta G).$$

Tomemos $v_0 = v, ..., v_n = u \in \beta G$, $n \leq 2$, $t_0, ..., t_{n-1} \in St$ e $\Gamma_0, ..., \Gamma_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de v para u. Como $t^{-1}S^{-1} \in u$, então, $u \notin \mathrm{h_a}(G \setminus t^{-1}S^{-1})$. Logo,

$$t_{n-1}v_{n-1}, u \in \Gamma_{n-1} = \mathrm{h_a}\left(\operatorname{int}\left(S^{-1}\right)\right),$$

donde

$$v_{n-1} \in \mathrm{h_a}\left(\operatorname{int}\left(t_{n-1}^{-1}S^{-1}\right)\right) \subset \mathrm{h_f}\left(t^{-1}S^{-1}\right).$$

Se $n = 1$, então, $v = v_0 \in \mathrm{h_f}(t^{-1}S^{-1})$. Se $n = 2$, repetimos o argumento com v_1e obtemos que $v \in \mathrm{h_f}(t^{-1}S^{-1})$. Portanto, $\Omega^*(u,S) \subset \mathrm{h_f}(t^{-1}S^{-1})$. Enfim, verificando o ítem (3), tomemos $v \in \widehat{\Omega}^*(u,S)$. Como $S_t^{-1} \subset \operatorname{int}(S^{-1}t^{-1})$, temos que

$$\mathcal{U} = \left\{\mathrm{h_a}\left(\operatorname{int}\left(S^{-1}t^{-1}\right)\right), \mathrm{h_a}\left(G \setminus S_t^{-1}\right)\right\} \in \mathcal{O}_\mathrm{f}(\beta G).$$

Tomemos $v_0 = v, ..., v_n = u \in \beta G$, $n \leq 2$, $t_0, ..., t_{n-1} \in S_t$ e $\Gamma_0, ..., \Gamma_{n-1} \in \mathcal{U}$ formando uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de v para u. Como $S_t^{-1} \in u$, então, $u \notin \mathrm{h_a}\left(G \setminus S_t^{-1}\right)$. Logo,

$$t_{n-1}v_{n-1}, u \in \Gamma_{n-1} = \mathrm{h_a}\left(\mathrm{int}\left(S^{-1}t^{-1}\right)\right),$$

donde

$$v_{n-1} \in \mathrm{h_a}\left(\mathrm{int}\left(t_{n-1}^{-1}S^{-1}t^{-1}\right)\right) \subset \mathrm{h_f}\left(S_t^{-1}\right).$$

Se $n = 1$, então, $v = v_0 \in \mathrm{h_f}\left(S_t^{-1}\right)$. Se $n = 2$, repetimos o argumento com v_1 e obtemos que $v \in \mathrm{h_f}\left(S_t^{-1}\right)$. Portanto, $\widehat{\Omega}^*(u, S) \subset \mathrm{h_f}\left(S_t^{-1}\right)$. □

Corolário 3.6. *Seja $u \in \beta G$.*

1. *Se $u \in \omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$, então, $\widehat{\Omega}(u, S) \subset \omega(u_e, S)$.*

2. *Se $u \in \omega_{\mathrm{d}}^*(u_e, S)$, então, $\Omega^*(u, S) \subset \omega_{\mathrm{d}}^*(u_e, S)$.*

3. *Se $u \in \omega^*(u_e, S)$, então, $\widehat{\Omega}^*(u, S) \subset \omega^*(u_e, S)$.*

O próximo resultado mostra que todo ponto do conjunto transitivo por cadeias maximal $\omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$ é atingível por cadeias a partir de qualquer ponto de βG, e que todo ponto de $\omega(u_e, S)$ é atingível por subcadeias a partir de qualquer ponto de βG. Por outro lado, todo ponto de βG é atingível por subcadeias a partir de qualquer ponto de $\omega^*(u_e, S)$. Além disso, as cadeias ligando quaisquer dos pontos mencionados são construídas com apenas um salto, refletindo o que ocorre em geral com a transitividade por cadeias sobre num conjunto limite pontual.

Proposição 3.7.
1. *Seja $u \in \omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$. Então, $\Omega^*(u, S) = \beta G$, onde as cadeias podem ser construídas com três pontos.*

2. *Seja $u \in \omega(u_e, S)$. Então, $\widehat{\Omega}^*(u, S) = \beta G$, onde as subcadeias podem ser construídas com três pontos.*

3. *Seja $u \in \omega^*(u_e, S)$. Então, $\widehat{\Omega}(u, S) = \beta G$, onde as subcadeias podem ser construídas com três pontos.*

Demonstração: Sejam $v \in \beta G$, $\mathcal{U} = \{\mathrm{h_a}(U_1), ..., \mathrm{h_a}(U_n)\} \in \mathcal{O}_{\mathrm{f}}(\beta G)$ e $t \in S$. Para verificarmos o ítem (1), tomemos $\mathrm{h_a}(U_i), \mathrm{h_a}(U_j) \in \mathcal{U}$ e $t_0 \in St$ tais que $u \in \mathrm{h_a}(U_i)$ e $t_0 v \in \mathrm{h_a}(U_j)$. Escolhamos $g \in U_j$. Então,

$$t_0 v, u_g \in \mathrm{h_a}(U_j).$$

Agora, pelo Lema 1.75, existe $s \in S_t$ tal que $sg \in S_t$. Visto que $\omega_{\mathrm{d}}(u_e, S) = \bigcap_{t\in S} \mathrm{h_f}(St)$, então, $Ssg \in u$, donde $Ssg \cap U_i \neq \emptyset$. Assim, existe $t_1 \in St$ tal que $t_1 g \in U_i$. Logo,

$$t_1 u_g, u \in \mathrm{h_a}(U_i).$$

Assim, os pontos $v, u_g, u \in \beta G$, os elementos $t_0, t_1 \in St$ e os conjuntos $\mathrm{h_a}(U_j), \mathrm{h_a}(U_i) \in \mathcal{U}$ formam uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de v para u. Pela arbitrariedade dos objetos considerados, temos que $\beta G = \Omega^*(u, S)$. O ítem (2) segue semelhantemente ao ítem (1). Para mostrarmos o ítem (3), tomemos $\mathrm{h_a}(U_i), \mathrm{h_a}(U_j) \in \mathcal{U}$ e $t_0 \in S_t$ tais que $t_0 u \in \mathrm{h_a}(U_i)$ e $v \in \mathrm{h_a}(U_j)$. Escolhamos $g \in U_j$. Pelo Lema 1.75, existe $s \in S_t$ tal que $s^{-1}g \in S_t^{-1}$. Agora, como $S_{tt_0}^{-1} \in u$, temos que $S_t^{-1} \in t_0 u$, para todo $t \in \dot{S}$. Logo, $S_{g^{-1}s}^{-1} \in t_0 u$, donde $S_{g^{-1}s}^{-1} \cap U_i \neq \dot{\emptyset}$. Portanto, existe $t_1 \in S_t$ e $g_1 \in U_i$ tais que $t_1 g_1 = g$. Assim,

$$t_0 u, u_{g_1} \in \mathrm{h_a}(U_i) \text{ e } t_1 u_{g_1}, v \in \mathrm{h_a}(U_j),$$

formando uma $(\mathcal{U}, t)$-subcadeia de u para v. Portanto, $\beta G = \widehat{\Omega}(u, S)$. □

Corolário 3.8. *Seja $u \in \beta G$.*

1. *Se $u \in \omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$, então, $\Omega(u, S) = \omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$.*
2. *Se $u \in \omega(u_e, S)$, então, $\widehat{\Omega}(u, S) = \omega(u_e, S)$.*
3. *Se $u \in \omega^*(u_e, S)$, então, $\widehat{\Omega}^*(u, S) = \omega^*(u_e, S)$.*

Em particular, os conjuntos $\omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u_e, S)$ são conjuntos transitivos por subcadeias maximais.

Demonstração: A prova segue pela aplicação direta do Corolário 3.6 e da Proposição 3.7. □

Proposição 3.9. *Se $\omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u_e, S)$ são os únicos conjuntos transitivos por subcadeias maximais de $(G, \beta G)$, então, $\omega(u_e, S) = \omega(\mathrm{h_f}(S), S)$ e $\omega^*(u_e, S) = \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$.*

Demonstração: Observemos primeiramente que $\omega(u_e, S) \subset \omega(\mathrm{h_f}(S), S)$ e $\omega^*(u_e, S) \subset \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. Se $u \in \omega(\mathrm{h_f}(S), S)$, então, $\omega(u, S), \omega^*(u, S) \subset \omega(u_e, S)$, pois $\omega(u, S)$ e $\omega^*(u, S)$ são conjuntos transitivos por subcadeias contidos em $\omega(\mathrm{h_f}(S), S)$. Então, $\omega(u, S) \subset \Omega(u, S) \cap \omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u, S) \subset \Omega^*(u, S) \cap \omega(u_e, S)$, donde temos que $u \in \Omega(u, S)$, ou seja, $u \in \mathfrak{R}$. Logo, $u \in \omega(u_e, S)$ e, portanto, $\omega(u_e, S) = \omega(\mathrm{h_f}(S), S)$. Com o mesmo argumento, mostramos que $\omega^*(u_e, S) = \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. □

3.2.1 Subsemigrupos semitotais

Nossa meta principal agora é estabelecer condições adicionais sobre o subsemigrupo S de forma que tenhamos a igualdade $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(u_e, S) = \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^{*}$ e que $\omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$ e $\omega_{\mathrm{d}}^{*}(u_e, S)$ sejam os únicos conjuntos transitivos por cadeias maximais de $(G, \beta G)$.

Um subsemigrupo H de G é dito *total* se $H \cup H^{-1} = G$. Conforme o Teorema 8.3 e o Corolário 11.2 de [19], um subsemigrupo maximal de um grupo nilpotente é total (e invariante), e um subsemigrupo maximal de interior não vazio em um grupo de Lie de dimensão finita, conexo e solúvel é um subsemigrupo total. Assim, embora sendo especial, o conceito de subsemigrupo total pode ser estudado com grande generalidade. Contudo, nesta parte, abordamos uma classe mais abrangente de subsemigrupos.

A partir de um enfraquecimento na condição de totalidade introduzimos o seguinte conceito.

Definição 3.10. *Um subsemigrupo H de G é dito **semitotal** se existe $h \in H$ tal que $h^{-1}H \cup hH^{-1} = G$.*

Observemos que um subsemigrupo total deve conter o elemento neutro. Logo, todo subsemigrupo total é semitotal. A seguir, apresentamos exemplos imediatos de subsemigrupos semitotais.

Exemplo 3.1. *Se $G = \mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$, então, uma translação de um cone maximal em G é um subsemigrupo semitotal. Se a translação é por um elemento diferente da origem, então o subsemigrupo não é total.*

Exemplo 3.2. *Se $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^{+}$ e $b \geq 1$ é um número real, então, o subconjunto*

$$S_b = \{g \in G : \det g \geq b\}$$

é um subsemigrupo semitotal e invariante. Para vermos isso, notemos que

$$S_b^{-1} = \left\{g \in G : \det g \leq \frac{1}{b}\right\}.$$

Denotanto $B = \left\{g \in G : \frac{1}{b} \leq \det g \leq b\right\}$, temos que $G = S_b^{-1} \cup B \cup S_b$. Agora, tomando $t \in S_b$ tal que $\det t \geq b^2$, temos que $tB \subset S_b$. Assim, $G = tG = tS_b^{-1} \cup tB \cup tS_b \subset tS_b^{-1} \cup S_b$, donde $G = tS_b^{-1} \cup S_b$. Visto que $S_b \subset t^{-1}S_b$, concluímos que S_b é semitotal. No entanto, se $b > 1$, então, S_b não é total.

A semitotalidade é a única condição existente que nos faz concluir a questão sobre a dinâmica em $(G, \beta G)$.

Teorema 3.11. *O subsemigrupo S é semitotal se, e somente se, $\omega^{*}(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S) = \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^{*}$.*

Demonstração: Assumindo que S é semitotal, seja $u \in \beta G \setminus \omega^* (\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. Então, existe $\tau \in S$ tal que $u \notin \mathrm{h_f}(\tau^{-1}S^{-1})$. Logo, existe $A \in u$ com $A \subset G \setminus \tau^{-1}S^{-1}$. Seja $s \in S$ tal que $s^{-1}S \cup sS^{-1} = G$. Então, $\tau^{-1}s^{-2}S \cup \tau^{-1}S^{-1} = G$, donde $G \setminus \tau^{-1}S^{-1} \subset \tau^{-1}s^{-2}S$. Logo, $u \in \mathrm{h_f}(\tau^{-1}s^{-2}S)$. Assim, dado qualquer $t \in S$, temos que $t'u \in \mathrm{h_f}(tS)$, para todo $t' \in S_{ts^2\tau}$. Agora, seja $v \in \omega(u, S)$ e tomemos uma vizinhança aberta $\mathrm{h_a}(U)$ de v. Então, dado $t \in S$, temos que $\mathrm{h_a}(U) \cap S_{ts^2\tau}u \neq \emptyset$, donde $\mathrm{h_a}(U) \cap \mathrm{h_f}(tS) \neq \emptyset$. Logo, $v \in \mathrm{h_f}(tS)$. Assim, $\omega(u, S) \subset \omega_{\mathrm{e}}(\mathrm{h_f}(S), S) = \omega(\mathrm{h_f}(S), S)$. Visto que $\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^*$ é invariante, temos que $\omega(w, S) \subset \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^*$, para todo $w \in \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^*$. Portanto, $u \in \beta G \setminus \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^*$, donde concluímos que $\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^* \subset \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. Visto que a inclusão contrária entre estes dois conjuntos é válida em geral, temos que $\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^* = \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. Reciprocamente, suponhamos que $\omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S) = \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^*$. Então, se $u \notin \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S) \cup \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$, temos que $\omega_{\mathrm{d}}(u, S) \subset \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)$ e $\omega_{\mathrm{d}}^*(u, S) \subset \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. Seguindo a demonstração por contradição, suponhamos que S não é semitotal, ou seja, que $t^{-1}S \cup tS^{-1} \neq G$, para todo $t \in S$. Então, afirmamos que o conjunto

$$F = \bigcap_{t \in S} \mathrm{h_f}\left(G \setminus \left(\mathrm{int}\left(t^{-1}S\right) \cup \mathrm{int}\left(tS^{-1}\right)\right)\right)$$

é não vazio, compacto e invariante em βG. Com efeito, temos que

$$\mathcal{F} = \left\{\mathrm{h_f}\left(G \setminus \left(\mathrm{int}\left(t^{-1}S\right) \cup \mathrm{int}\left(tS^{-1}\right)\right)\right) : t \in S\right\}$$

é uma família de subconjuntos fechados em βG. Dados quaisquer $t_1, ..., t_n \in S$, tomemos $t \in S_{t_1} \cap ... \cap S_{t_n}$. Então, $t_i^{-1}S \subset t^{-1}S$ e $t_iS^{-1} \subset tS^{-1}$, para todo i. Assim,

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int}\left(t_i^{-1}S\right) \cup \mathrm{int}\left(t_iS^{-1}\right) \subset t^{-1}S \cup tS^{-1}.$$

Como $t^{-1}S \cup tS^{-1} \neq G$, temos que $G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int}\left(t_i^{-1}S\right) \cup \mathrm{int}\left(t_iS^{-1}\right)$ é não vazio, isto é,

$$\bigcap_{i=1}^{n} G \setminus \mathrm{int}\left(t_i^{-1}S\right) \cup \mathrm{int}\left(t_iS^{-1}\right) \neq \emptyset.$$

Logo, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{h_f}\left(G \setminus \mathrm{int}\left(t_i^{-1}S\right) \cup \mathrm{int}\left(t_iS^{-1}\right)\right)$ é um subconjunto não vazio de βG. Como βG é compacto Hausdorff, segue que o conjunto F é não vazio e compacto. Para mostrarmos a invariança de F, sejam $u \in F$ e $s \in S$. Dado $t \in S$, tomemos $s_1, s_2 \in S$ tais que $ss_1 = ts_2$. Então,

$$G \setminus \left(\mathrm{int}\left(s^{-1}t^{-1}s_1^{-1}S\right) \cup \mathrm{int}\left(s_1tsS^{-1}\right)\right) \in u$$

donde
$$G \setminus \left(\operatorname{int}\left(t^{-1}s_1^{-1}S\right) \cup \operatorname{int}\left(ts_2tsS^{-1}\right)\right) \in su.$$
Como $t^{-1}S \subset t^{-1}s_1^{-1}S$ e $tS^{-1} \subset ts_2tsS^{-1}$, temos que $G\setminus\left(\operatorname{int}\left(t^{-1}s_1^{-1}S\right) \cup \operatorname{int}\left(ts_2tsS^{-1}\right)\right) \subset G \setminus (\operatorname{int}(t^{-1}S) \cup \operatorname{int}(tS^{-1}))$. Logo, $G \setminus (\operatorname{int}(t^{-1}S) \cup \operatorname{int}(tS^{-1})) \in su$. Pela arbitrariedade de t, temos que $su \in F$. Agora, sejam $s_1, s_2 \in S$ tais que $s_1 s = s_2 t$. Então,
$$G \setminus \left(\operatorname{int}\left(s_1^{-1}t^{-1}s^{-1}S\right) \cup \operatorname{int}\left(sts_1S^{-1}\right)\right) \in u$$
donde
$$G \setminus \left(\operatorname{int}\left(t^{-1}s_2^{-1}t^{-1}s^{-1}S\right) \cup \operatorname{int}\left(ts_1S^{-1}\right)\right) \in s^{-1}u.$$
Logo, $G \setminus (\operatorname{int}(t^{-1}S) \cup \operatorname{int}(tS^{-1})) \in s^{-1}u$, donde $s^{-1}u \in F$. Assim, F é invariante por ambos S e S^{-1}. Portanto, F é invariante. Enfim, tomando $t \in \operatorname{int}(S)$, temos que $tS \subset \operatorname{int}(S)$ e $t^{-1}S^{-1} \subset \operatorname{int}(S^{-1})$. Daí, como
$$\begin{aligned} F &\subset \mathrm{h_f}\left(G \setminus \left(\operatorname{int}(S) \cup \operatorname{int}\left(S^{-1}\right)\right)\right) = \mathrm{h_f}\left((G \setminus \operatorname{int}(S)) \cap \left(G \setminus \operatorname{int}\left(S^{-1}\right)\right)\right) \\ &= \mathrm{h_f}(G \setminus \operatorname{int}(S)) \cap \mathrm{h_f}\left(G \setminus \operatorname{int}\left(S^{-1}\right)\right) \end{aligned}$$
temos que F é disjunto de $\omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S) \cup \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. Assim, se $u \in F$, temos que $\omega_{\mathrm{d}}(u, S) \subset \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)$, $\omega_{\mathrm{d}}^*(u, S) \subset \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$ e $\omega_{\mathrm{d}}(u, S), \omega_{\mathrm{d}}^*(u, S) \subset F$, o que é uma contradição. Portanto, S deve ser semitotal. □

Notemos que, se $u \in \mathfrak{R}$ e $u \notin \omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$, então, $u \in \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(St), S)^*$ para algum $t \in S$. Em particular, $u \in \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^*$. Logo, $\mathfrak{R} \subset \omega_{\mathrm{d}}(u_e, S) \cup \omega_{\mathrm{d}}(\mathrm{h_f}(S), S)^*$. Assim, visto que $\omega_{\mathrm{d}}^*(u_e, S) = \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$, segue a seguinte versão equivalente do Teorema 3.11.

Teorema 3.12. *O semigrupo S é semitotal se, e somente se, $\mathfrak{R} \subset \omega_{\mathrm{d}}(u_e, S) \cup \omega_{\mathrm{d}}^*(u_e, S)$.*

Corolário 3.13. *Os conjuntos $\omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u_e, S)$ são os únicos conjuntos transitivos por subcadeias maximais de $(G, \beta G)$ se, e somente se, S é semitotal, $\omega(u_e, S) = \omega(\mathrm{h_f}(S), S)$ e $\omega^*(u_e, S) = \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$.*

Demonstração: Segue por uma aplicação direta das Proposições 3.9 e 3.11. □

O último teorema acima diz que a propriedade algébrica de semitotalidade do semigrupo equivale à propriedade dinâmica da recorrência por cadeias se restringir aos conjuntos limites da identidade em βG. Vimos que o conjunto $\omega_{\mathrm{d}}(u_e, S)$ é transitivo por cadeias maximal. No entanto, não sabemos dizer em geral como ocorre a transitividade por cadeias no conjunto $\omega_{\mathrm{d}}^*(u_e, S)$. Contudo, podemos determinar exatamente a transitividade por cadeias sob a propriedade de invarinaça no semigrupo. No caso de S ser invariante valem as igualdades $\omega(u_e, S) = \omega(\mathrm{h_f}(S), S)$ e $\omega^*(u_e, S) = \omega^*(\mathrm{h_f}(S^{-1}), S)$. Com isso, o Teorema 3.11 recebe a seguinte versão mais apurada.

Teorema 3.14. *Assuma que S é invariante. Então, o subsemigrupo S é semitotal se, e somente se, $\omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u_e, S)$ são os únicos conjuntos transitivos por cadeias maximais de $(G, \beta G)$.*

Assim, para subsemigrupos maximais em grupos nilpotentes existem apenas dois conjuntos de transitividade por cadeias na compactificação de Ellis. Igualmente ocorre com o subsemigrupo $S_b = \left\{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^+ : \det g \geq b\right\}$ em $\beta \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^+$. De fato, pois já vimos que S_b é semitotal. Além disso, dado $t \in S_b$ temos que

$$tS_b = \left\{g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})^+ : \det g \geq b \det t\right\} = S_b t$$

donde S_b é invariante.

Vejamos alguns exemplos especiais.

Exemplo 3.3. *Seja $G = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$ e $S = [t, +\infty)$, com $t \geq 0$. Então, $\mathfrak{R} = \omega(u_0, S) \cup \omega^*(u_0, S) = \beta G \setminus G$. Verificaremos o resultado para $\mathbb{R}$, seguindo de forma semelhante para $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$. Dado $u \in \beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$, temos que ou $[t, +\infty) \in u$ ou $(-\infty, t] \in u$. Suponhamos que $[t, +\infty) \in u$. Afirmamos que $u \in \omega(u_0, S)$. Com efeito, seja*

$$t^* = \sup\{s \geq t : [s, +\infty) \in u\}$$

e suponhamos que t^* é finito. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\left[t^* - \frac{1}{n}, +\infty\right) \in u$. Tomemos qualquer $A \in u$. Então,

$$A \cap \left[t^* - \frac{1}{n}, +\infty\right) \neq \emptyset$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Visto que A é fechado, segue que $A \cap [t^*, +\infty) \neq \emptyset$. Isto significa que $[t^*, +\infty) \in u$. Agora, como t^* é supremo, então, $\left[t^* + \frac{1}{n}, +\infty\right) \notin u$, donde $\left(-\infty, t^* + \frac{1}{n}\right] \in u$, para todo natural n. Logo,

$$\left[t^*, t^* + \frac{1}{n}\right] = \left(-\infty, t^* + \frac{1}{n}\right] \cap [t^*, +\infty) \in u$$

para todo n. Com isso, dado qualquer $B \in u$, temos que $B \cap \left[t^*, t^* + \frac{1}{n}\right] \neq \emptyset$, para todo n, e como B é fechado, segue que $t^* \in B$. Isto significa que $u = u_{t^*} \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição. Portanto, t^* não é finito, ou seja, $[s, +\infty) \in u$, para todo $s \geq t$, o que demonstra o afirmado. Se, em outro caso, $(-\infty, t] \in u$, um argumento semelhante mostra que $u \in \omega^*(u_0, S)$. Assim, $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \mathfrak{R}$.

O exemplo seguinte mostra que subsemigrupos maximais não determinam a mesma transitividade por cadeias no grupo de transformação.

Exemplo 3.4. *Seja $G = \mathbb{R}^n$ e tome os cones maximais $S_1 = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ e $S_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Notemos que*

$$\omega(u_0, S_1 \cap S_n) \subset \omega(u_0, S_1) \cap \omega(u_0, S_n)$$

e

$$\omega\left(u_0, S_1^{-1} \cap S_n\right) \subset \omega^*(u_0, S_1) \cap \omega(u_0, S_n).$$

Isto significa que o conjunto de transitividade por cadeias $\omega(u_0, S_n)$ relativo a S_n é distinto de ambos os conjuntos de transitividade por cadeias $\omega(u_0, S_1)$ e $\omega^*(u_0, S_1)$ relativos a S_1, pois intersepta a ambos. Logo, S_1 e S_n não determinam a mesma transitividade por cadeias no grupo de transformação $(\mathbb{R}^n, \beta\mathbb{R}^n)$.

Contudo, as condições de semitotalidade e invariança sobre o semigrupo S nos permite determinar precisamente o comportamento dinâmico do grupo de transformação $(G, \beta G)$, ou seja, podemos concluir que $(G, \beta G)$ admite uma única decomposição de Morse não trivial, a saber, o par atrator-repulsor $(\omega(u_e, S), \omega^*(u_e, S))$.

3.2.2 A universalidade e o problema de extensão de homomorfismos

Como vimos anteriormente, os conjuntos minimais universais sob a ação de G são todos isomorfos aos subconjuntos minimais de $(G, \beta G)$. Este fato motiva a definição de um conceito correspondente para o caso de transitividade por cadeias, buscando-se possivelmente uma relação com os conjuntos transitivos por cadeias maximais de $(G, \beta G)$. Neste caminho, abrimos uma discussão sobre este assunto e apresentamos um argumento relacionando o problema de extensão de homomorfismos locais entre grupos de transformações.

Assumimos que o espaço base de todo grupo de transformação é compacto Hausdorff e que o subsemigrupo S adotado em G é invariante.

Estabelecemos o problema de extensão de homomorfismos locais com a seguinte questão: sejam (G, X) e (G, Y) grupos de transformações. Dados um subconjunto fechado e invariante $N \subset X$ e um homomorfismo $\varphi : N \to Y$, então, existe um homomorfismo $\psi : X \to Y$ tal que $\psi|_N = \varphi$?

Dizemos que (G, X) *satisfaz a propriedade de extensão de homomorfismos locais* se a resposta para a questão anterior for afirmativa.

Definimos a universalidade com respeito a transitividade por cadeias de modo semelhante ao caso de conjuntos minimais.

Definição 3.15. *Seja (G, X) um grupo de transformação transitivo por cadeias. Então, (G, X) é* ***transitivo por cadeias universal*** *se, para todo grupo de transformação (G, Y) transitivo por cadeias, existe um epimorfismo de X sobre Y.*

Intuitivamente, esperávamos que os conjuntos transitivos por cadeias universais estivessem relacionados de alguma forma com os conjuntos de transitividade por cadeias de $(G, \beta G)$. Contudo, um caminho alternativo para proceder com esta discussão propõe uma análise do problema de extensão de homomorfismos estabelecido acima, tendo em vista a possibilidade de construção de cadeias em βG com um único salto.

Para discutirmos a universalidade dos conjuntos transitivos por cadeias maximais de $(G, \beta G)$ precisamos assumir que os tais são internamente transitivos por cadeias, ou seja, que a ação de G restrita a qualquer conjunto transitivo por cadeias maximal é transitiva por cadeias. Esta condição é satisfeita no caso das ações dos grupos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}$, por exemplo (ver [22]). Conforme vimos na seção anterior, o fato de S ser invariante implica que os conjuntos $\omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u_e, S)$ são transitivos por cadeias maximais de $(G, \beta G)$.

Lema 3.16. *Sejam (G, X) um grupo de transformação e φ um epimorfismo de βG sobre X, com $\varphi(\omega(u_e, S)) = X$. Então, (G, X) é transitivo por cadeias e qualquer cadeia em X pode ser construída com três pontos.*

Demonstração: Sejam $x, y \in X$, $t \in S$ e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta finita de X. Pela continuidade de φ, temos que

$$\varphi^{-1}\mathcal{U} = \left\{\varphi^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\right\}$$

é uma cobertura aberta finita de βG. Tomemos um refinamento aberto finito $\mathcal{V}$ de $\varphi^{-1}\mathcal{U}$ constituído por abertos básicos. Escolhamos $u, v \in \omega(u_e, S)$ tais que $\varphi(u) = x$ e $\varphi(v) = y$. Agora, tomemos pontos $u_0 = u, u_1, u_2 = v \in \beta G$, elementos $t_0, t_1 \in St$ e abertos $V_0, V_1 \in \mathcal{V}$ formando uma $(\mathcal{V}, t)$-cadeia entre u e v. Então,

$$t_0 u, u_1 \in V_0 \subset \varphi^{-1}(U_0),$$

para algum $U_0 \in \mathcal{U}$, donde $\varphi(t_0 u), \varphi(u_1) \in U_0$, ou seja, $t_0 x, \varphi(u_1) \in U_0$. Da mesma forma, obtemos $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $t_1 \varphi(u_1), y \in U_1$. Assim, obtemos uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia entre x e y. Portanto, (G, X) é transitivo por cadeias. □

Proposição 3.17. *Se $(G, \omega(u_e, S))$ é transitivo por cadeias universal, então, $(G, \beta G)$ não satisfaz a propriedade de extensão de homomorfismos locais.*

Demonstração: Seja $X = [0, 1]$ munido com a métrica induzida de $\mathbb{R}$. Consideremos a ação trivial de G sobre X, ou seja, a ação tal que G fixa todos os pontos de X. Segue da Proposição 1.39 que o grupo de transformação (G, X) é transitivo por cadeias em relação a família admissível das coberturas de X dadas por intervalos abertos. No entanto, para $\varepsilon = \frac{1}{4}$ por exemplo, são necessários mais de um salto para se obter uma (ε, t)-cadeia de 0 até 1. Agora, pela hipótese de $(G, \omega(u_e, S))$ ser transitivo por cadeias universal, temos que existe um epimorfismo $\varphi : (G, \omega(u_e, S)) \to (G, X)$. Supondo por contradição que $\psi : \beta G \to X$ é um epimorfismo que estende φ, segue do Lema 3.16 que toda cadeia em X pode ser construída com apenas um salto, o que não pode ocorrer em (G, X). Logo, $(G, \beta G)$ não satisfaz a propriedade de extensão de homomorfismos. □

Notemos que, se é dado um epimorfismo $\varphi : \omega(u_e, S) \to [0,1]$, então, garantimos a existência de uma extensão contínua $\psi : \beta G \to [0,1]$ de φ, a saber, a extensão de Tietze. Porém, não se pode estender φ a um homomorfismo.

3.3 Funções recorrentes por cadeias

Nesta seção estudamos recorrência por cadeias no espaço de funções cujos domínios são grupos topológicos. Neste caminho, introduzimos o conceito de função recorrente por cadeias, que consiste de uma generalização natural do conceito de função recorrente. O trabalho de Ellis-Johnson [12] foi nosso principal contato com o conceito de funções recorrentes da reta real. Nosso objetivo é discutir sobre a possibilidade de se determinar a transitividade por cadeias de uma função a partir do conhecimento dos conjuntos de transitividade por cadeias na compactificação do seu grupo domínio.

Dados um espaço uniforme X, com uniformidade diagonal $\mathcal{G}$, um ponto $x \in X$ e um subconjunto $V \in \mathcal{G}$, denotemos

$$V[x] = \{y \in X : (y, x) \in V\}.$$

Lembremos que uma função $f : X \to X'$ é dita *uniformemente contínua* quando, para cada $U \in \mathcal{G}'$, existir $V \in \mathcal{G}$ tal que, se $(x_1, x_2) \in V$, então, $(f(x_1), f(x_2)) \in U$.

Nossa abordagem se concentra sobre funções uniformemente contínuas onde seu domínio é um grupo topológico e seu contradomínio é um espaço compacto Hausdorff. Assim, as definições seguintes são voltadas para nossos objetivos, observando contudo que as tais podem ser introduzidas em um contexto geral.

Seja G um grupo compactamente gerado, com $\mathcal{V}$ uma base de vizinhanças simétricas da identidade e de G. Então, G pode ser identificado como um espaço quociente de um grupo localmente compacto, conhecido como um k-espaço. Seja S um subsemigrupo reversível e gerador de G. A *uniformidade à esquerda* $\mathcal{G}_L$ sobre G tem como base todos os conjuntos da forma

$$L_V = \{(g, h) \in G \times G : g \in hV\}$$

para $V \in \mathcal{V}$. A *uniformidade à direita* $\mathcal{G}_R$ sobre G tem como base todos os conjuntos da forma

$$R_V = \{(g, h) \in G \times G : g \in Vh\}$$

para $V \in \mathcal{V}$. Dizemos que G tem *estruturas uniformes equivalentes* se $\mathcal{G}_L = \mathcal{G}_R$. Consideremos G provido com a uniformidade à esquerda.

Dado um espaço compacto Hausdorff F, denotemos por $C_{ca}(G,F)$ o espaço das funções contínuas de G em F munido com a topologia compacto-aberta. O espaço F possui uma única uniformidade $\mathcal{F}$ dada pelas vizinhanças da diagonal de $F \times F$. Dados uma função contínua $f : G \to F$ e um elemento $g \in G$, definimos a função translação $f \cdot g : G \to F$ dada por $f \cdot g(h) = f(gh)$, para todo $h \in G$. Ou seja, $f \cdot g$ é a composição $f \circ L_g$, onde L_g é a translação à esquerda por g em G. Isto define uma ação à direita α de G sobre $C_{ca}(G,F)$, a qual associa a cada par $(f,g) \in C_{ca}(G,F) \times G$ a função $\alpha(f,g) = f \cdot g$.

Lembremos que os abertos básicos da topologia compacto-aberta em $C_{ca}(G,F)$ são da forma

$$A(K;U) = \{f \in C_{ca}(G,F) : f(K) \subset U\}$$

onde $K \subset G$ é compacto e $U \subset F$ é aberto.

Proposição 3.18. *A aplicação $\alpha : C_{ca}(G,F) \times G \to C_{ca}(G,F)$ é unilateralmente contínua.*

Demonstração: Fixando $g \in G$, temos que $\alpha_g : C_{ca}(G,F) \to C_{ca}(G,F)$ dada por $\alpha_g(f) = \alpha(f,g)$ é uma bijeção cuja aplicação inversa é $\alpha_{g^{-1}}$. Vejamos que α_g é contínua. Suponha que uma rede $(f_i)_{i\in I} \subset C_{ca}(G,F)$ converge para $f \in C_{ca}(G,F)$. Seja $A(K;U)$ um aberto básico contendo $f \cdot g$. Então, $f \cdot g(K) \subset U$, isto é, $f(gK) \subset U$, o que significa $f \in A(gK;U)$. Logo, existe um $i_0 \in I$ tal que $f_i \in A(gK;U)$, para todo $i \geq i_0$. Assim, $f_i \cdot g \in A(K;U)$, para todo $i \geq i_0$, mostrando que $\alpha_g(f_i) \to \alpha_g(f)$. Portanto, α_g é contínua. Da mesma forma mostramos que $\alpha_{g^{-1}}$ é contínua, donde temos que α_g é um homeomorfismo. Agora, fixando $f \in C_{ca}(G,F)$, vejamos que $\alpha_f : G \to C_{ca}(G,F)$ dada por $\alpha_f(g) = \alpha(f,g)$ também é contínua. Seja $(g_i)_{i\in I} \subset G$ uma rede convergindo para um elemento g em G. Seja $A(K;U)$ uma vizinhança de $f \cdot g$. Então, $f(gK) \subset U$, ou seja, $gK \subset f^{-1}(U)$. Para cada $h \in K$, tomemos uma vizinhança V_h de h tal que $gV_h \subset f^{-1}(U)$. Então, $f^{-1}(U)V_h^{-1}$ é uma vizinhança de g. Pela compacidade de K obtemos $h_1,...,h_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{h_j}$. Para cada j, existe $i_j \in I$ tal que $g_i \in f^{-1}(U)V_{h_j}^{-1}$, para todo $i \geq i_j$. Enfim, podemos obter $i_0 \in I$ tal que $i_0 \geq i_j$, para todo $j = 1,...,n$. Desta forma, temos que

$$g_iK \subset \bigcup_{j=1}^{n} g_iV_{h_j} \subset f^{-1}(U)$$

isto é, $f \cdot g_i \in A(K;U)$, para todo $i \geq i_0$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Portanto, em particular, temos o grupo de transformação $(C_{ca}(G,F), G)$.

Definição 3.19. *O* ***fecho*** $H(f)$ *de uma função contínua* $f : G \to F$ *é o subespaço de* $C_{ca}(G,F)$ *dado pelo fecho do conjunto das funções translações de* f.

Como $C_{ca}(G,F)$ é Hausdorff, então, $H(f)$ é Hausdorff. É claro que $H(f)$ é invariante pela ação α definida acima, donde podemos considerar o grupo de transformação $(H(f), G)$.

O fato de G ser um k-espaço permite a aplicação do Teorema de Ascoli para obtermos o seguinte resultado.

Proposição 3.20. *Se uma função* $f : G \to F$ *é uniformemente contínua, então,* $H(f)$ *é compacto.*

Demonstração: Mostraremos que $H(f)$ é eqüicontínuo, e o resultado seguirá pelo Teorema de Ascoli. Dado $U \in \mathcal{F}$, seja $U' \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{fe}(U') \subset U$. Segue da continuidade uniforme de f que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que se $(g,h) \in L_V$, então, $(f(g), f(h)) \in U'$. Dados $t \in G$ e $(g,h) \in L_V$, temos que $(tg, th) \in L_V$, donde $(f \cdot t(g), f \cdot t(h)) \in U'$. Agora, se $\xi \in H(f)$, existe uma rede $(f \cdot g_i)_{i \in I}$ que converge para ξ. Dado $(g,h) \in L_V$, temos que $(f \cdot g_i(g), f \cdot g_i(h)) \in U'$, donde $(\xi(g), \xi(h)) \in U$. Logo, $H(f) L_V \subset U$, donde concluímos que $H(f)$ é eqüicontínuo. Como F é compacto Hausdorff, segue do Teorema de Ascoli que $H(f)$ é compacto. $\square$

Corolário 3.21. *Se* $f : G \to F$ *é uniformemente contínua e* G *é localmente compacto, então, a ação de* G *sobre* $H(f)$ *é contínua.*

Demonstração: Como $H(f)$ é subespaço de $C_{ca}(G,F)$, segue da Proposição 3.18 que a restrição $\alpha : H(f) \times G \to H(f)$ é unilateralmente contínua. Da Proposição 3.20 temos que $H(f)$ é compacto. A conclusão segue agora dos resultados de [10]. $\square$

Nossa meta é estudar recorrência por cadeias em $H(f)$ onde $f : G \to F$ é uniformemente contínua. O caminho ideal para nossas discussões é olhar $H(f)$ como um espaço quociente da compactificação βG. Para fundamentarmos isso, tomamos a extensão única $\tilde{f} : \beta G \to F$ de f e consideramos a seguinte relação de equivalência em βG:

$$\text{Dados } u, v \in \beta G, \text{ então, } u \sim_f v \text{ se e somente se } \tilde{f}(ug) = \tilde{f}(vg), \text{ para todo } g \in G.$$

O espaço quociente $\beta G / \sim_f$ é denominado *espaço de* f, o qual denotamos por $sp(f)$.

A ação à direita de G sobre βG induz uma ação à direita de G sobre $sp(f)$ através da projeção canônica $\pi : \beta G \to sp(f)$. Dados $g \in G$ e $\pi(u) \in sp(f)$, definimos

$\rho(\pi(u), g) = \pi(ug)$. Se $\pi(u) = \pi(v)$, então, $\tilde{f}(uh) = \tilde{f}(vh)$, para todo $h \in G$, donde $\tilde{f}(ugh) = \tilde{f}(vgh)$, para todo $h \in G$. Logo, $\pi(ug) = \pi(vg)$, mostrando que ρ está bem definida. Agora, fixando $g \in G$, temos que aplicação $\rho_g : sp(f) \to sp(f)$ dada por $\rho_g(\pi(u)) = \pi(ug)$ é uma bijeção, cuja inversa é aplicação análoga $\rho_{g^{-1}}$. Mais ainda, sendo R_g a translação à direita por g em G, temos que $\rho_g \circ \pi = \pi \circ R_g$, donde segue que ρ_g é contínua e, portanto, é um homeomorfismo. Assim, temos o grupo de transformação $(sp(f), G)$. Denotaremos também $\pi(ug) = \pi(u) \cdot g$, semelhantemente à notação da ação de G sobre $H(f)$.

A idéia então é usar os resultados do Capítulo 1 para estudar recorrência por cadeias em $sp(f)$, o que é equivalente, segundo a próxima proposição, a estudar este conceito em $H(f)$.

Proposição 3.22. *Seja $f : G \to F$ uma função uniformemente contínua. Então, os grupos de transformações $(H(f), G)$ e $(sp(f), G)$ são isomorfos.*

Demonstração: Considere a aplicação $\phi : G \to H(f)$ dada por $\phi(g) = f \cdot g$. Afirmamos que ϕ é contínua. Com efeito, seja $(g_i)_{i \in I} \subset G$ uma rede convergente com limite $g \in G$. Considere um aberto básico $A(K; U) \cap H(f)$ contendo $f \cdot g$. Então, $f \cdot g(K) \subset U$. Dado $h \in K$, temos que $g_i h \to gh$, donde $f \cdot g_i(h) \to f \cdot g(h)$. Logo, podemos obter $W \in \mathcal{F}$ e $i_h \in I$ tais que $W[f \cdot g_i(h)] \subset U$, para todo $i \geq i_h$. Agora, seja V_h vizinhança de h tal que $\xi(V_h) \subset W[\xi(h)]$, para todo $\xi \in H(f)$. Então,

$$f \cdot g_i(V_h) \subset W[f \cdot g_i(h)] \subset U$$

para todo $i \geq i_h$. Para cada $h \in K$ tomemos uma vizinhança V_h obtida desta maneira. Visto que K é compacto, podemos obter $h_1, ..., h_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{h_j}$. Tomemos $i_0 \in I$ tal que $i_0 \geq i_{h_j}$, para todo $j = 1, ..., n$. Então,

$$f \cdot g_i(K) \subset f \cdot g_i\left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{h_j}\right) \subset U$$

ou seja, $f \cdot g_i \in A(K; U)$, para todo $i \geq i_0$. Portanto, $f \cdot g_i \to f \cdot g$, donde ϕ é contínua. Em virtude disto, o fato de $H(f)$ ser compacto implica na existência e unicidade de uma extensão contínua $\Phi : \beta G \to H(f)$ de ϕ. Como $\Phi(\beta G)$ é fechado e contém as translações de f, segue que Φ é sobrejetora. Mais ainda, se $\Phi(u) = \Phi(v)$, então, $u \sim_f v$. Para vermos isso, escrevamos $u = \lim_i u_{g_i}$. Dado $g \in G$, temos que

$$\tilde{f}(ug) = \lim_i f(g_i g) = \lim_i \phi(g_i)(g) = \lim_i \Phi(u_{g_i})(g) = \Phi(u)(g).$$

Da mesma forma, temos que $\tilde{f}(vg) = \Phi(v)(g)$. Logo, $\tilde{f}(ug) = \tilde{f}(vg)$, com $g \in G$ arbitrário, ou seja, $u \sim_f v$. Agora, tomando a função $\bar{\Phi} : sp(f) \to H(f)$ induzida por Φ no espaço quociente $sp(f)$, temos que $\bar{\Phi}$ é uma bijeção contínua. Como $sp(f)$ é compacto e $H(f)$ é Hausdorff, segue que $\bar{\Phi}$ é um homeomorfismo. Enfim, dados $g, h \in G$ e $\pi(u) \in sp(f)$, temos que

$$\bar{\Phi}(\pi(u) \cdot g)(h) = \bar{\Phi}(\pi(ug))(h) = \Phi(ug)(h) = \tilde{f}(ugh)$$

e que

$$\bar{\Phi}(\pi(u)) \cdot g(h) = \bar{\Phi}(\pi(u))(gh) = \Phi(u)(gh) = \tilde{f}(ugh).$$

Logo, $\bar{\Phi}(\pi(u) \cdot g) = \bar{\Phi}(\pi(u)) \cdot g$, donde $\bar{\Phi}$ é um isomorfismo. □

Exemplo 3.5. *Um caso específico de função uniformemente contínua é um homomorfismo de grupos topológicos. Podemos apresentar uma caracterização para o fecho de um homomorfismo cujo contradomínio é um grupo compacto. Com efeito, seja $f : G \to F$ um homomofismo de grupos topológicos, com F grupo compacto. Dada uma vizinhança simétrica U do elemento neutro de F, temos que $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança simétrica do elemento neutro de G. Assim, se $(g, h) \in L_{f^{-1}(U)}$, temos que $g \in hf^{-1}(U)$, donde $f(g) \in f(h)U$, ou seja, $(f(g), f(h)) \in L_U$. Portanto, f é uniformemente contínuo. Mais ainda, afirmamos que $H(f)$ é homeomorfo ao subespaço $\mathrm{fe}(f(G))$ de F, e*

$$H(f) = \{L_x \circ f : x \in \mathrm{fe}(f(G))\}$$

onde L_x é a translação à esquerda por x em F. Com efeito, consideremos a extensão única contínua $\widetilde{f} : \beta G \to F$ de f. Como f é um homomorfismo de grupos topológicos, temos que $\widetilde{f}$ é um homomorfismo de semigrupos (algébricos). Então, $\widetilde{f}(ug) = \widetilde{f}(u)\widetilde{f}(u_g) = \widetilde{f}(u)f(g)$, para todo $u \in \beta G$ e $g \in G$. Seja $\varphi : sp(\alpha_x) \to F$ a aplicação contínua induzida por $\widetilde{f}$ no quociente $sp(f)$. Vejamos que φ é injetora. Se $\varphi(\pi(u)) = \varphi(\pi(v))$, então, $\widetilde{f}(u) = \widetilde{f}(v)$, donde

$$\widetilde{f}(ug) = \widetilde{f}(u)f(g) = \widetilde{f}(v)f(g) = \widetilde{f}(vg)$$

para todo $g \in G$. Logo, $\pi(u) = \pi(v)$. Assim, φ é uma bijeção contínua sobre sua imagem. Visto que $\widetilde{f}(\beta G) = \mathrm{fe}(f(G))$, temos que $\varphi(sp(f)) = \mathrm{fe}(f(G))$. Como $sp(\alpha_x)$ é compacto e $\mathrm{fe}(f(G))$ é Hausdorff, temos que φ é um homeomorfismo sobre $\mathrm{fe}(f(G))$. Agora, seja ξ o limite de uma rede $(f \cdot g_i)_{i \in I}$, ou seja, $\xi \in H(f)$. Temos que

$$\xi(e) = \lim_i f \cdot g_i(e) = \lim_i f(g_i) \in \mathrm{fe}(f(G)).$$

Assim, dado $g \in G$, temos que

$$\xi(g) = \lim_i f(g_i g) = \lim_i f(g_i)f(g) = \xi(e)f(g) = L_{\xi(e)} \circ f(g).$$

Logo, $\xi = L_{\xi(e)} \circ f$*, com* $\xi(e) \in \mathrm{fe}(f(G))$*. Por outro lado, se* $x \in \mathrm{fe}(f(G))$*, então existe uma rede* $(f(g_i))_{i \in I}$ *que converge para* x *em* F*. Assim, temos que*

$$L_x \circ f(g) = \left(\lim_i f(g_i)\right) f(g) = \lim_i f(g_i) f(g) = \lim_i f \cdot g_i(g)$$

para todo $g \in G$*. Logo,* $L_x \circ f \in H(f)$*.*

Relembrando algumas definições de dinâmica topológica, um subconjunto $B \subset G$ é dito *sindético* se existe um subconjunto compacto K de G tal que $G = BK$. Uma função ξ é um *ponto quase periódico* do grupo de transformação $(H(f), G)$ se para toda vizinhança U de ξ, o subconjunto $\{g \in G : \xi \cdot g \in U\} \subset G$ é sindético. Pela Proposição 2.5 de [11], temos que f é um ponto quase periódico de $(H(f), G)$ se, e somente se, $H(f)$ é um conjunto minimal.

Dizemos que uma função uniformemente contínua $f : G \to F$ é *recorrente* se $(H(f), G)$ é minimal.

Nós introduzimos o conceito de função recorrente por cadeias com o objetivo de estabelecer uma classe especial de funções abrangendo todas as funções recorrentes.

Definição 3.23. *Uma função uniformemente contínua* $f : G \to F$ *é dita* ***recorrente por cadeias*** *se o grupo de transformação* $(H(f), G)$ *é recorrente por cadeias.*

Assim, se f é recorrente, então, f é recorrente por cadeias. Este fato justifica a nomenclatura de função recorrente por cadeias. No entanto, verificamos que uma função f é recorrente por cadeias se, e somente se, $(H(f), G)$ é transitivo por cadeias. Com efeito, se f é recorrente por cadeias, então, $f \cdot g \in \Omega^*(f \cdot g)$, para todo $g \in G$. Visto que $\Omega^*(f \cdot g)$ é compacto e invariante, temos que $H(f) = \Omega^*(f \cdot g)$, para todo $g \in G$. Logo, $f \cdot G$ é transitivo por cadeias. Visto que o fecho de um conjunto transitivo por cadeias é transitivo por cadeias, concluímos que $H(f)$ é transitivo por cadeias. A recíproca é imediata.

Podemos mostrar que a classe de funções recorrentes por cadeias é muito maior do que a classe de funções recorrentes em $C_{ca}(G, F)$, o que era intuitivo. A proposição seguinte é bastante útil para as argumentações sobre recorrência de funções.

Proposição 3.24. *Seja* G *localmente compacto. Então, uma função uniformemente contínua* $f : G \to F$ *é recorrente se, e somente se, dados* $W \in \mathcal{F}$ *e um subconjunto finito* $K \subset G$*, existe* $B \subset G$ *sindético tal que*

$$f \cdot g(K) \subset \bigcup_{h \in K} W[f(h)]$$

para todo $g \in B$*.*

Demonstração: Suponhamos que f é recorrente. Dados $W \in \mathcal{F}$ e um subconjunto finito $K \subset G$, temos que K é compacto e que

$$f(K) \subset \bigcup_{h \in K} W[f(h)].$$

Logo, $A\left(K; \bigcup_{h \in K} W[f(h)]\right)$ é uma vizinhança de f. Como f é um ponto quase periódico de $(H(f), G)$, temos que o subconjunto

$$B = \left\{ g \in G : f \cdot g \in A\left(K; \bigcup_{h \in K} W[f(h)]\right) \right\} \subset G$$

é sindético. Para a recíproca, mostraremos que $H(f)$ é minimal, ou seja, que $H(f) = \mathrm{fe}(\xi \cdot G)$, para toda função $\xi \in H(f)$. Com efeito, dado $\xi \in H(f)$, existe uma rede $(f \cdot g_i)_{i \in I}$ que converge para ξ. Seja $A(K; U) \cap H(f)$ uma vizinhança básica de f. Visto que $f(K)$ é compacto, podemos tomar vizinhanças abertas $U'' \subset U'$ de $f(K)$ em F de forma que

$$f(K) \subset U'' \subset \mathrm{fe}(U'') \subset U' \subset \mathrm{fe}(U') \subset U.$$

Tomemos $W \in \mathcal{F}$ tal que

$$\bigcup_{h \in K}^{n} W[f(h)] \subset U'' \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{t \in f^{-1}(U'')} W[f(t)] \subset U'. \tag{3.1}$$

Visto que f é uniformemente contínua, podemos obter uma vizinhança simétrica V da identidade e de G tal que se $(x, y) \in L_V$ então $(f(x), f(y)) \in W$. Para cada $h \in K$, seja V_h uma vizinhança aberta de h tal que $V_h \subset hV$ e que $f(V_h) \subset U''$. Como K é compacto, podemos obter $h_1, ..., h_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{h_j}$. Aplicando a hipótese sobre o subconjunto finito $\{h_1, ..., h_n\} \subset G$ e o conjunto $W \in \mathcal{F}$ obtemos $B \subset G$ sindético tal que

$$f \cdot g(\{h_1, ..., h_n\}) \in \bigcup_{j=1}^{n} W[f(h_j)]$$

para todo $g \in B$. Dado $h \in K$, temos que $h \in V_{h_k} \subset h_k V$, para algum $1 \leq k \leq n$, donde $gh \in gh_k V$ para qualquer $g \in G$. Logo, $(gh, gh_k) \in L_V$, donde

$$(f \cdot g(h), f \cdot g(h_k)) \in W \tag{3.2}$$

para todo $g \in G$. Visto que $f \cdot g(h_k) \in \bigcup_{j=1}^{n} W[f(h_j)]$, para todo $g \in B$, segue de 3.1 que $f \cdot g(h_k) \in U''$, para todo $g \in B$. Além disso, de 3.2 temos que $f \cdot g(h) \in W[f(gh_k)]$, onde $gh_k \in f^{-1}(U'')$, donde segue de 3.1 que $f \cdot g(h) \in U'$, para todo $g \in B$. Pela arbitrariedade de $h \in K$, temos que $f \cdot g(K) \subset U'$, para todo $g \in B$. Agora, seja $P \subset G$ compacto com $G = BP$. Para cada índice $i \in I$, existe $p_i \in P$ tal que $g_i p_i^{-1} \in B$. Tomando uma subrede se necessário, temos que (p_i) converge para algum $p \in P$. Pela continuidade da ação (Corolário 3.21) temos que $f \cdot g_i \cdot p_i^{-1} \to \xi \cdot p^{-1}$. Assim, dado $h \in K$, temos que $f \cdot g_i p_i^{-1}(h) \to \xi \cdot p^{-1}(h)$ em F, e visto que $f \cdot g_i p_i^{-1}(h) \in U'$ para todo i, temos que $\xi \cdot p^{-1}(h) \in \mathrm{fe}(U') \subset U$. Logo, $\xi \cdot p^{-1}(K) \subset U$, isto é, $\xi \cdot p^{-1} \in A(K; U) \cap H(f)$. Portanto, $f \in \mathrm{fe}(\xi \cdot G)$, donde $H(f) = \mathrm{fe}(\xi \cdot G)$, como queríamos demonstrar. □

Existe uma grande diversidade de grupos localmente compactos Hausdorff; entre eles estão os grupos de Lie.

Um exemplo trivial de função recorrente é uma função constante. Neste caso, o fecho da função é um conjunto unitário constituído pela própria função. Vejamos outros exemplos.

Exemplo 3.6. *Funções uniformemente contínuas e quase periódicas da reta real. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $C(\mathbb{R}, I)$ o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em I munido com a topologia da convergência uniforme. Esta topologia é mais fina do que a topologia compacto-aberta. Desta forma, um ponto quase periódico do grupo de transformação $(C(\mathbb{R}, I), \mathbb{R})$ é um ponto quase periódico do grupo de transformação $(C_{ca}(\mathbb{R}, I), \mathbb{R})$. Conforme Ellis [11], os pontos quase periódicos de $(C(\mathbb{R}, I), \mathbb{R})$ coincidem com as funções quase periódicas de $\mathbb{R}$ em I. Portanto, as funções uniformemente contínuas e quase periódicas de $\mathbb{R}$ em I são funções recorrentes.*

Exemplo 3.7. *Projeções sobre espaços homogêneos compactos. Seja $H \subset G$ um subgrupo fechado tal que o espaço homogêneo G/H é compacto. Então, a projeção canônica $\pi : G \to G/H$ é uma função recorrente. Visto que π é um homomorfismo uniformemente contínuo de grupos de transformações e que G age transitivamente sobre G/H, segue que $(H(\pi), G)$ é isomorfo a $(G/H, G)$. Como $(G/H, G)$ é minimal, temos que π é recorrente.*

Agora, fixemos a família admissível $\mathcal{O}_{\mathrm{f}}(H(f))$ das coberturas finitas constituídas de abertos básicos da topologia induzida em $H(f)$. A Proposição 3.24 auxilia efetivamente a determinação de funções recorrentes ou não recorrentes. Com este recurso, apresentamos uma grande diversidade de funções recorrentes por cadeias que não são recorrentes. Para tanto, vamos estudar o caso de $C_{ca}(\mathbb{R}, [a, b])$, onde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um intervalo compacto.

Proposição 3.25. *Se uma função uniformemente contínua $f : \mathbb{R} \to [a, b]$ admite uma assíntota horizontal $y = l$ $(x \to \pm\infty)$, então, $H(f) = f \cdot \mathbb{R} \cup \{\lambda\}$, onde $\lambda = l$ é constante. Em particular, f é recorrente por cadeias.*

Demonstração: Seja $\xi \in H(f) \setminus f \cdot \mathbb{R}$, com $\xi = \lim_i f \cdot t_i$ para alguma rede $(f \cdot t_i)_{i \in I}$. O conjunto $\{t_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$ não pode ser limitado, pois do contrário teríamos que $\xi \in f \cdot \mathbb{R}$. Assim, dado qualquer $s \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $i_n \in I$ tal que $f \cdot t_i(s) \in \left(l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}\right)$, para todo $i \geq i_n$. Logo, $\lim_i f \cdot t_i(s) = l$, ou seja, $\xi(s) = l$. Portanto, $\xi = \lambda$. Agora, escolhamos aleatoriamente $t > 0$ e

$$\mathcal{U} = \{A(K_1; U_1) \cap H(f), ..., A(K_m; U_m) \cap H(f)\} \in \mathcal{O}_{\mathrm{f}}(H(f)).$$

Como cada K_i é um conjunto compacto de $\mathbb{R}$, podemos obter, para cada natural n, um número real $t_n > t$ suficientemente grande tal que

$$f(\pm t_n + K_i) \subset \left(l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}\right)$$

para todo $i = 1, ..., m$. Se $\lambda \in A(K_{i_0}; U_{i_0})$, então, $l \in U_{i_0}$. Agora, tomemos n_0 tal que $\left(l - \frac{1}{n_0}, l + \frac{1}{n_0}\right) \subset U_{i_0}$. Então,

$$f(\pm t_{n_0} + K_{i_0}) \subset \left(l - \frac{1}{n_0}, l + \frac{1}{n_0}\right) \subset U_{i_0}$$

ou seja, $f \cdot t_{n_0}, f \cdot (-t_{n_0}) \in A(K_{i_0}; U_{i_0})$. Enfim, tomemos i_1 tal que $f \in A(K_{i_1}; U_{i_1})$. Assim, temos que

$$f \cdot t_{n_0}, f \cdot (-t_{n_0}) \in A(K_{i_0}; U_{i_0}) \cap H(f)$$

e

$$f \cdot (-t_{n_0}) \cdot t_{n_0} = f \in A(K_{i_1}; U_{i_1}) \cap H(f)$$

com $t_{n_0} > t$, formando uma $(\mathcal{U}, t)$-cadeia de f até f. Portanto, f é um ponto recorrente por cadeias de $H(f)$. □

Recordemos que um subconjunto sindético $B \subset \mathbb{R}$ é conhecido como subconjunto relativamente denso, ou seja, existe um número $l \geq 0$ tal que todo intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ de comprimento l contém um ponto de B.

Vejamos exemplos de funções recorrentes por cadeias que não são recorrentes.

Exemplo 3.8. *Seja $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $f(x) = e^{-x^2}$. Dado $0 < \varepsilon < 1$, seja $W \in \mathcal{F}$ tal que*

$$W[f(0)] = W[1] \subset (\varepsilon, 1].$$

Pela propriedade assintótica de f, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < \varepsilon$, para todo $|x| \geq x_0$. Logo, $f(x) \notin W[f(0)]$, para todo $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Assim, para o subconjunto finito $\{0\} \subset \mathbb{R}$ e para $W \in \mathcal{F}$ não é possível obter um subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ relativamente denso tal que $f \cdot x(0) \in W[f(0)]$, para todo $x \in B$. Visto que $\mathbb{R}$ é localmente compacto Hausdorff, segue da Proposição 3.24 que f não é função recorrente. No entanto, como $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, segue da Proposição 3.25 que f é recorrente por cadeias.

Exemplo 3.9. *Seja $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por $f(x) = \cos \arctan x$. Então, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, donde f é recorrente por cadeias. No entanto, analogamente ao exemplo anterior, mostramos que f não é recorrente.*

Notemos que a demonstração dos exemplos acima é geral para qualquer função não constante que admita uma única assíntota horizontal para $x \to \pm\infty$. Portanto, qualquer função com esta natureza não é uma função recorrente, apesar de ser recorrente por cadeias. Segue ainda da Proposição 3.25 que a função constante no fecho é o único ponto recorrente do grupo de transformação. Contudo, é claro que funções recorrentes por cadeias não são em geral assintóticas, pois funções periódicas na reta real são recorrentes e, portanto, recorrentes por cadeias.

Podemos também construir funções recorrentes por cadeias que não são recorrentes tomando concatenações de funções recorrentes.

Exemplo 3.10. *Seja $f : \mathbb{R} \to [a,b]$ uma função uniformemente contínua, constante em $(-\infty, t_0]$ e periódica não constante em $[t_0, +\infty)$. Então, f é recorrente por cadeias mas não é recorrente. Com efeito, seja $c \in [a,b]$ tal que $f((-\infty, t_0]) = \{c\}$ e tomemos $t_1 > t_0$ tal que $f(t_1) \neq c$. Escolhamos um $\varepsilon > 0$ de forma que $f(t_1) \notin [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, e tomemos $W \in \mathcal{F}$ tal que*

$$W[f(t_1)] \subset [a,b] \setminus ([c - \varepsilon, c + \varepsilon] \cap [a,b]).$$

Então, $f(t) = c \notin W[f(t_1)]$, para todo $t \leq t_0$, donde $f \cdot t(t_1) \notin W[f(t_1)]$, para todo $t \in (-\infty, t_0 - t_1]$. Logo, para o subconjunto finito $\{t_1\} \subset \mathbb{R}$ e $W \in \mathcal{F}$ não é possível obter um subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ relativamente denso tal que $f \cdot t(t_1) \in W[f(t_1)]$, para todo $t \in B$. Portanto, f não é recorrente. Agora, sejam $t > 0$ e

$$\mathcal{U} = \{A(K_1; U_1) \cap H(f), ..., A(K_n; U_n) \cap H(f)\} \in \mathcal{O}_{\mathrm{f}}(H(f)).$$

Tomemos uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}(H(f))$ tal que, para todo $s \in [0,t]$ e $\xi_1, \xi_2 \in H(f)$, com $\xi_1, \xi_2 \in V$ para algum $V \in \mathcal{V}$, existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\xi_1 \cdot s, \xi_2 \cdot s \in A(K_j; U_j) \cap H(f)$. Seja $V \in \mathcal{V}$ tal que $f \in V$ e sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $U \subset [a,b]$ aberto tais que

$$f \in A(K; U) \cap H(f) \subset V.$$

Suponhamos em primeiro lugar que $K \subset [t_0, +\infty)$. Sendo p o período de f em $[t_0, +\infty)$, podemos obter um número natural m suficientemente grande tal que $pm > t$. Visto que $f(pm + K) = f(K) \subset U$, temos que

$$f \cdot pm, f \in A(K; U) \cap H(f) \subset V$$

donde (multiplicando por 0)

$$f \cdot pm, f \in A(K_j; U_j) \cap H(f)$$

para algum $1 \leq j \leq n$. *Logo, obtemos uma* $(\mathcal{U}, t)$*-cadeia trivial de* f *para* f. *Por outro lado, se* $K \nsubseteq [t_0, +\infty)$, *temos que* $c \in U$. *Como* K *é compacto, podemos obter* $m > 1$ *suficientemente grande tal que*

$$-mt + K \subset (-\infty, t_0].$$

Logo,

$$f \cdot (-mt)(K) = \{c\} \subset U.$$

Assim,

$$f, f \cdot (-mt) \in A(K; U) \cap H(f) \subset V$$

donde

$$f \cdot t, f \cdot (1 - m)t \in A(K_{j_0}; U_{j_0}) \cap H(f)$$

para algum $1 \leq j_0 \leq n$. *Notemos que* $(m-1)t \geq t$. *Seja* j_1 *tal que* $f \in A(K_{j_1}; U_{j_1}) \cap H(f)$. *Então, os pontos* $f, f \cdot (1-m)t, f \in H(f)$, *os elementos* $t, (m-1)t \geq t$ *e os abertos* $A(K_{j_0}; U_{j_0}) \cap H(f), A(K_{j_1}; U_{j_1}) \cap H(f) \in \mathcal{U}$ *formam uma* $(\mathcal{U}, t)$*-cadeia de* f *para* f. *Logo,* f *é ponto recorrente por cadeias de* $H(f)$ *e, portanto,* f *é uma função recorrente por cadeias.*

Contudo, este último exemplo revela a grande generalidade do conceito de função recorrente por cadeias sobre o conceito de função recorrente, defrontando as argumentações sobre tempos positivos em um com a análise sobre conjuntos relativamente densos no outro. Poderíamos definir uma classe intermediária entre as classes de funções discutidas nesse trabalho. No entanto, esse não é um objetivo para esta oportunidade.

Um caso de interesse considera um grupo de transformação (F, G, α) com ação unilateralmente contínua. Para cada $x \in F$, temos que $\alpha_x : G \to F$ é um homomorfismo de grupos de transformações. Na verdade, qualquer homomorfismo de grupos de transformações $f : G \to F$ é constituído desta maneira, ou seja, $f = \alpha_x$, para algum $x \in F$. De fato, pois $f(g) = f(e)g = \alpha_{f(e)}(g)$, para todo $g \in G$. Podemos então discutir sobre recorrência por cadeias em (F, G, α) olhando para os espaços quocientes $\beta G / \sim_{\alpha_x}$ $(x \in F)$.

Em geral, qualquer função $\alpha_x : G \to F$ é uniformemente contínua com respeito à uniformidade à direita sobre G. Porém, nada podemos dizer sobre continuidade uniforme com respeito à uniformidade à esquerda sobre G, pois são grupos de transformações à direita. Por isso, assumimos que cada função α_x é uniformemente contínua, valendo para o caso de G ter estruturas uniformes equivalentes.

Proposição 3.26. *Para cada* $x \in F$, *tem-se que* $(H(\alpha_x), G)$ *e* $(\mathrm{fe}(xG), G)$ *são isomorfos entre si e*

$$H(\alpha_x) = \{\alpha_y : y \in \mathrm{fe}(xG)\}.$$

Demonstração: Dado $\xi \in H(\alpha_x)$ tomemos uma rede $(\alpha_x \cdot g_i)_{i\in I}$ tal que $\xi = \lim_i \alpha_{xg_i}$. Dado $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned}\xi(g) &= \lim_i \alpha_{xg_i}(g) = \lim_i \alpha_g(xg_i) = \alpha_g\left(\lim_i xg_i\right) = \\ &= \alpha_g\left(\lim_i \alpha_{xg_i}(e)\right) = \alpha_g(\xi(e)) = \alpha_{\xi(e)}(g).\end{aligned}$$

Logo, $\xi = \alpha_{\xi(e)}$, onde $\xi(e) = \lim_i xg_i \in \mathrm{fe}(xG)$. Por outro lado, se $y \in \mathrm{fe}(xG)$, aplicamos o processo inverso para obtermos $\alpha_y \in H(\alpha_x)$. Agora, tomemos extensão homomórfica $\widetilde{\alpha_x} : \beta G \to F$ de α_x, e tomemos o homomorfismo $\varphi : sp(\alpha_x) \to F$ induzido por $\widetilde{\alpha_x}$ no quociente $sp(\alpha_x)$. Vejamos que φ é injetora. Se $\varphi(\pi(u)) = \varphi(\pi(v))$, então, $\widetilde{\alpha_x}(u) = \widetilde{\alpha_x}(v)$, donde $\widetilde{\alpha_x}(u)\, g = \widetilde{\alpha_x}(v)\, g$, isto é, $\widetilde{\alpha_x}(ug) = \widetilde{\alpha_x}(vg)$, para todo $g \in G$. Logo, $\pi(u) = \pi(v)$. Assim, φ é uma bijeção contínua sobre sua imagem. Visto que $\widetilde{\alpha_x}(\beta G) = \mathrm{fe}(xG)$, temos que $\varphi(sp(\alpha_x)) = \mathrm{fe}(xG)$. Como $sp(\alpha_x)$ é compacto e $\mathrm{fe}(xG)$ é Hausdorff, temos que φ é um homeomorfismo sobre $\mathrm{fe}(xG)$. Logo φ é um isomorfismo entre $sp(\alpha_x)$ e $\mathrm{fe}(xG)$. $\square$

Corolário 3.27. *Dado $x \in F$, tem-se que*

1. *x é ponto quase periódico de (F, G, α) se, e somente se, $\beta G/\!\sim_{\alpha_x}$ é um conjunto minimal.*

2. *x é ponto recorrente por cadeias de (F, G, α) se, e somente se, $\beta G/\!\sim_{\alpha_x}$ é um conjunto transitivo por cadeias.*

3.3.1 Invariança e semitotalidade

Discutimos agora a recorrência por cadeias de funções $G \to F$ sob as hipóteses de G ser um grupo normal e o subsemigrupo $S \subset G$ ser invariante e semitotal. Pelo Corolário 3.13, estas condições assumidas juntamente resultam que os conjuntos $\omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u_e, S)$ são os únicos transitivos por cadeias maximais de $(\beta G, G)$, o que deve refletir evidentemente no comportamento dinâmico nos fechos das funções. De fato, neste caso existem apenas duas possibilidades para a determinação da dinâmica no espaço de uma função.

Assumimos que G é normal e que S é invariante e semitotal. Tomando uma função uniformemente contínua $f : G \to F$, consideremos a projeção $\pi_f : \beta G \to \beta G/\!\sim_f \approx H(f)$. Então, ambos os conjuntos $\pi_f(\omega(u_e, S))$ e $\pi_f(\omega^*(u_e, S))$ são transitivos por cadeias. Além disso, temos que $\pi_f(\omega(u_e, S)) \subset \omega(f, S)$ e $\pi_f(\omega^*(u_e, S)) \subset \omega^*(f, S)$, pois $\pi_f(u_e) = f$.

Com estas hipóteses sobre o semigrupo, mostramos que existe somente duas possibilidades para a transitividade por cadeias no espaço de uma função $f : G \to F$. O seguinte teorema diz que as funções não recorrentes por cadeias são aquelas que preservam a estrutura dinâmica de $(\beta G, G)$ através da projeção canônica.

Teorema 3.28. *Seja $f : G \to F$ uma função uniformemente contínua, onde F é um espaço compacto Hausdorff. Se f não é recorrente por cadeias, então, $\omega(f, S)$ e $\omega^*(f, S)$ são os únicos conjuntos de transitividade por cadeias de $(H(f), G)$.*

Demonstração: Seja $h \in H(f)$ tal que $h \notin \pi_f(\omega(u_e, S)) \cup \pi_f(\omega^*(u_e, S))$. Então, $h = \pi_f(u)$, para algum $u \in \beta G \setminus (\omega(u_e, S) \cup \omega^*(u_e, S))$. Neste caso, $\omega(u, S) \subset \omega(u_e, S)$ e $\omega^*(u, S) \subset \omega^*(u_e, S)$, donde $\pi_f(\omega(u, S)) \subset \pi_f(\omega(u_e, S))$ e $\pi_f(\omega^*(u, S)) \subset \pi_f(\omega^*(u_e, S))$. Logo,

$$\omega(h, S) \cap \pi_f(\omega(u_e, S)) \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad \omega^*(h, S) \cap \pi_f(\omega(u_e, S)) \neq \emptyset.$$

Isto mostra que a união $\pi_f(\omega(u_e, S)) \cup \pi_f(\omega^*(u_e, S))$ não é um conjunto transitivo por cadeias, pois do contrário, qualquer ponto de $H(f)$ seria recorrente por cadeias, ou seja, $H(f)$ seria transitivo por cadeias. Assim, os conjuntos $\pi_f(\omega(u_e, S))$ e $\pi_f(\omega^*(u_e, S))$ estão contidos em distintos conjuntos de transitividade por cadeias, os quais denotamos por E e E^* respectivamente. O mesmo argumento inicial se aplica para concluirmos que E e E^* são os únicos conjuntos de transitividade por cadeias de $(H(f), G)$. Mais ainda, se $h \in E$, então, $\omega(h, S), \omega^*(h, S) \subset E$, donde segue pelo mesmo argumento que $h \in \pi_f(\omega(u_e, S))$. Logo, $E = \pi_f(\omega(u_e, S))$. Da mesma forma, $E^* = \pi_f(\omega^*(u_e, S))$. Portanto, $\pi_f(\omega(u_e, S)) = \omega(f, S)$ e $\pi_f(\omega^*(u_e, S)) = \omega^*(f, S)$, e o resultado está provado. □

Por outro lado, por exemplo, se a união $\pi_f(G) \cup \pi_f(\omega(u_0, S)) \cup \pi_f(\omega^*(u_0, S))$ não é disjunta, então, podemos mostrar que f é recorrente por cadeias. Contudo, existem somente duas possibilidades para a transitividade por cadeias em $(H(f), G)$; ou $H(f)$ é transitivo por cadeias ou $\omega(f, S)$ e $\omega^*(f, S)$ são os conjuntos de transitividade por cadeias de $(H(f), G)$.

Apêndice A

Ações de semigrupos

Um sistema dinâmico clássico consiste basicamente de uma ação da reta real sobre uma variedade, onde os estudos se concentram na análise do comportamento dinâmico gerado pela ação das retas positiva e negativa. Assim, os resultados gerais da teoria de ações de semigrupos são aplicados em particular à teoria de sistemas dinâmicos. O principal assunto nos estudos é a transitividade da ação. Estudamos transitividade em pelo menos três níveis: transitividade total, transitividade aproximada e transitividade por cadeias. Da classe dos conjuntos de transitividade aproximada fazem parte os conjuntos controláveis, sendo que seus conjuntos de transitividade fazem parte da classe dos conjuntos de transitividade total. Por fim, da classe dos conjuntos de transitividade por cadeias fazem parte os conjuntos controláveis por cadeias. Esta última classe de conjuntos está relacionada diretamente com o conceito de semigrupos de sombreamento. Tal relação apresentamos com ênfase neste apêndice.

Seja X um espaço topológico e $C_l(X)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas entre subconjuntos abertos de X. Um subconjunto $S \subset C_l(X)$ é um *semigrupo local* se é fechado para as composições admitidas.

Dado um subconjunto $A \subset X$, definimos os conjuntos

$$SA = \{y \in X : \text{existem } s \in S \text{ e } x \in A \cap dom(s) \text{ com } sx = y\}$$

e

$$S^*A = \{y \in X : \text{existe } s \in S \text{ tal que } y \in dom(s) \text{ e } sy \in A\}.$$

Dado um ponto $x \in X$, então,

$$Sx = \{y \in X : \text{existe } s \in S \text{ tal que } x \in dom(s) \text{ e } sx = y\}$$

e

$$S^*x = \{y \in X : \text{existe } s \in S \text{ tal que } y \in dom(s) \text{ e } sy = x\}$$

são denominados respectivamente de *órbita progressiva de x* e *órbita regressiva de x*.

O semigrupo S é dito *acessível a partir de* $x \in X$ se $\operatorname{int}(Sx) \neq \emptyset$. Então S é dito *acessível* se o for a partir de todo $x \in X$.

Um subconjunto $M \subset X$ é dito *progressivamente invariante* se $SM \subset M$; *regressivamente invariante* se $S^*M \subset M$; e *transitivo* ou que S age transitivamente sobre M se $M \subset Sx$, para todo $x \in M$.

A.1 Conjuntos de transitividade total

Em muitos casos de ações de semigrupos existe uma classe não vazia de pontos do espaço base que são recorrentes, ou seja, pontos que pertencem a sua órbita.

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{R} = \{x \in X : x \in Sx\} = \{x \in X : x \in S^*x\}$$

denominado *conjunto de recorrência total* da ação de S sobre X. Então, $x \in \mathcal{R}$ se e somente se $Sx \cap S^*x \neq \emptyset$. Se $\mathcal{R}$ é não vazio, a coleção de subconjuntos $T_x = Sx \cap S^*x$ $(x \in X)$ forma uma partição de $\mathcal{R}$. Cada subconjunto $T_x \neq \emptyset$ é chamado de *conjunto de transitividade total* para a ação de S sobre X, visto que S age transitivamente sobre T_x.

Assumimos desde agora que as aplicações de S são abertas.

Proposição A.1. *Seja $x \in \mathcal{R}$. Se T_x possui ponto interior, então, T_x é um subconjunto aberto de X.*

Demonstração: Tome $y \in \operatorname{int}(T_x)$. Então, $T_y = T_x$ e

$$y \in \operatorname{int}(T_y) = \operatorname{int}(Sy) \cap \operatorname{int}(S^*y).$$

Isto significa que Sy e S^*y são subconjuntos abertos (Colorário 3.9 de [36]). Logo, $T_y = T_x$ é aberto. □

Alguns exemplos de conjuntos de transitividade total para a ação de semigrupo são apresentados no capítulo 3 de [36].

Definição A.2. *Dado um conjunto de transitividade total T definimos os conjuntos*

$$\mathcal{A}(T) = \{y \in X : Sy \cap T \neq \emptyset\}$$

e

$$\mathcal{A}^*(T) = \{y \in X : S^*y \cap T \neq \emptyset\}$$

denominados respectivamente domínio de atração *de T e* domínio de repulsão *de T.*

Temos que $T = \mathcal{A}(T) \cap \mathcal{A}^*(T)$, para todo conjunto de transitividade total T.

Podemos definir uma relação de ordem parcial entre os conjuntos de transitividade total do seguinte modo.

Definição A.3. *Dados $x, y \in \mathcal{R}$, então, $T_x \prec T_y$ se, e somente se, $x \in \mathcal{A}(T_y)$.*

Então, $T_x \prec T_y$ se, e somente se, $T_x \subset \mathcal{A}(T_y)$. Um conjunto de transitividade total maximal com respeito a esta ordem possue uma característica especial dada pela seguinte proposição.

Proposição A.4. *Seja $x \in \mathcal{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T_x é maximal com respeito a relação de ordem da definição A.3.*

2. *$T_x = \mathcal{R} \cap Sx$.*

Demonstração: Assumindo que T_x é maximal, tomemos $y \in \mathcal{R} \cap Sx$. Então, $Sx \cap T_y \neq \emptyset$, pois $y \in T_y$. Logo, $x \in \mathcal{A}(T_y)$, isto é, $T_x \prec T_y$. Assim, $T_x = T_y$, pois T_x é maximal. Portanto, $\mathcal{R} \cap Sx = T_x$. Reciprocamente, assumimos que $T_x = \mathcal{R} \cap Sx$ e seja $y \in \mathcal{R}$ tal que $T_x \prec T_y$. Então, $Sx \cap T_y \neq \emptyset$, donde $y \in Sx$. Logo, $y \in T_x$ e, portanto, T_x é maximal. $\square$

A.2 Conjuntos de transitividade aproximada

Um enfraquecimento natural da condição de ponto totalmente transitivo é a definição de ponto aproximadamente transitivo, isto é, de um ponto que pertence ao fecho de sua órbita. Esta propriedade é conhecida como *recorrência de Poincaré.*

Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{R}_{\mathrm{ap}} = \{x \in X : x \in \mathrm{fe}(Sx)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}^*_{\mathrm{ap}} = \{x \in X : x \in \mathrm{fe}(S^*x)\}$$

denominados respectivamente *conjunto de recorrência aproximada* e *conjunto de recorrência aproximada regressiva* para a ação de S.

Há uma diversidade de casos de ações de semigrupos onde $\mathcal{R}_{\mathrm{ap}}$ e $\mathcal{R}^*_{\mathrm{ap}}$ são não vazios, como por exemplo, quando o espaço base é compacto Hausdorff. Assumimos então que estes conjuntos são não vazios.

Uma relação de equivalência em $\mathcal{R}_{\mathrm{ap}}$ é dada da seguinte forma: dados $x, y \in \mathcal{R}_{\mathrm{ap}}$, então, $x \simeq y$ se e somente se $x \in \mathrm{fe}(Sy)$ e $y \in \mathrm{fe}(Sx)$. Cada classe de equivalência desta relação é denotada por D_x e denominada de *conjunto de transitividade aproximada* para a ação de S. Assim, um conjunto $D \subset X$ é um conjunto de transitividade aproximada se, e somente se, (i) $D \subset \mathrm{fe}\,(Sx)$, para todo $x \in D$ e (ii) D é maximal satisfazendo a propriedade (i).

De modo semelhante também definimos uma relação de equivalência em $\mathcal{R}^*_{\mathrm{ap}}$, onde cada classe de equivalência é denotada por D^*_x $(x \in \mathcal{R}^*_{\mathrm{ap}})$ e denominada de conjunto de transitividade aproximada regressiva.

É evidente que cada conjunto de transitividade total está contido em um conjunto de transitividade aproximada (regressiva).

Um conjunto de transitividade aproximada (regressiva) que possui interior não vazio é conhecido como *conjunto controlável (regressivo)* para a ação de S. A um conjunto controlável $D \subset X$ associamos o conjunto aberto

$$D_0 = \{x \in D : x \in \mathrm{int}\,(Sx)\}$$

chamado de *conjunto de transitividade* de D. Se D_0 é não vazio, então, D é chamado de *conjunto controlável efetivo* de S. Neste caso, D_0 é um conjunto de transitividade total aberto. Semelhantemente, a um conjunto controlável regressivo $D^* \subset X$ associamos o conjunto aberto

$$D^*_0 = \{x \in D^* : x \in \mathrm{int}\,(S^* x)\}$$

chamado também de *conjunto de transitividade* de D^*. Se D^*_0 é não vazio, então, D^*_0 é um conjunto de transitividade total aberto.

Se D é um conjunto controlável efetivo, então, $D_0 = D^*_0$, onde D^* é um conjunto controlável efetivo regressivo, pois $D_0 = Sx \cap S^*x$. A correspondência $D \mapsto D^*$ é uma bijeção entre os conjuntos controláveis efetivos e os conjuntos controláveis efetivos regressivos, pois os conjuntos controláveis são disjuntos entre si.

Proposição A.5. *Seja D um conjunto controlável efetivo para a ação de S. Então*

1. *$D \subset S^*x$, para todo $x \in D_0$.*
2. *$D_0 = T_x$, para todo $x \in D_0$.*
3. *D_0 é denso em D.*
4. *D_0 é invariante por S em D, isto é, se $h \in S$, $x \in D_0$ e $hx \in D$, então, $hx \in D_0$.*

Demonstração: Ver Proposição 3.19 de [36]. □

Assim, como já comentamos, o conjunto de transitividade de um conjunto controlável efetivo é um conjunto de transitividade total aberto. Por outro lado, se para algum $x \in \mathcal{R}$, T_x tem interior não vazio, então, T_x é o conjunto de transitividade de algum conjunto controlável. Existem casos de conjunto controlável efetivo contendo um conjunto de transitividade total distinto de seu conjunto de transitividade (ver Exemplos 3.7 e 3.9 de [36]).

O *domínio de atração* de um conjunto de transitividade aproximada D é o conjunto

$$\mathcal{A}(D) = \{y \in X : \mathrm{fe}(Sy) \cap D \neq \emptyset\}.$$

O *domínio de repulsão* de um conjunto de transitividade aproximada regressivo D^* é o conjunto

$$\mathcal{A}^*(D^*) = \{y \in X : \mathrm{fe}(S^*y) \cap D^* \neq \emptyset\}.$$

Se D é um conjunto controlável e $y \in \mathcal{A}(D)$, tomemos $x \in \mathrm{fe}(Sy) \cap D$. Então, $D \subset \mathrm{fe}(Sx)$, donde $\mathrm{int}(D) \cap Sx \neq \emptyset$. Como $Sx \subset \mathrm{fe}(Sy)$, temos que $\mathrm{int}(D) \cap Sy \neq \emptyset$, donde concluímos que

$$\mathcal{A}(D) = \{y \in X : Sy \cap \mathrm{int}(D) \neq \emptyset\}.$$

Usando que a ação é aberta, segue de forma semelhante que e

$$\mathcal{A}^*(D^*) = \{y \in X : S^*y \cap \mathrm{int}(D^*) \neq \emptyset\}.$$

Em particular, se D é um conjunto controlável efetivo, podemos mostrar que

$$\mathcal{A}(D) = \{y \in X : Sy \cap D_0 \neq \emptyset\}.$$

e

$$\mathcal{A}^*(D^*) = \{y \in X : S^*y \cap D_0 \neq \emptyset\}$$

(c.f. [31]).

Com este conceito podemos definir a seguinte relação de ordem parcial entre os conjuntos de transitividade aproximada.

Definição A.6. *Sejam D e D' conjuntos de transitividade aproximada para a ação de S. Então, $D \preceq D'$ se e somente se $D \cap \mathcal{A}(D') \neq \emptyset$.*

Um conjunto de transitividade aproximada invariante D satisfaz $\mathrm{fe}(D) = \mathrm{fe}(Sx)$, para todo $x \in D$. Então, os conjuntos de transitividade aproximada invariantes e fechados coincidem com os subconjuntos minimais para a ação de S sobre X, sendo estes últimos definidos na teoria de dinâmica topológica. Em particular, os subconjuntos minimais são maximais com respeito a relação de ordem da definição A.6.

Se D é um conjunto controlável invariante, então, D é maximal com respeito a relação de ordem da Definição A.6 entre os conjuntos controláveis.

A.3 Conjuntos de transitividade por cadeias

A abordagem mais geral do assunto de transitividade para fluxos e semifluxos é a transitividade por cadeias (ver [24]). Neste contexto, o espaço base é paracompacto, condição que garante a existência de uma família especial de coberturas abertas, chamada família admissível, sobre a qual são definidos os conjuntos de transitividade por cadeias.

Nesta seção, introduzimos o conceito de cadeias relativo a um semigrupo local de aplicações contínuas sobre um espaço paracompacto. Para estudar os conjuntos de transitividade por cadeias abordamos a ação dos semigrupos de sombreamento.

Fixemos um semigrupo local $\mathcal{S} \subset C_l(X)$. Dados $\eta \in \mathcal{S}$ e uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, definimos a *$\mathcal{S}-$vizinhança de η relativa a $\mathcal{U}$* como

$$V_{\mathcal{S}}(\eta,\mathcal{U}) = \left\{ \begin{array}{c} \phi \in \mathcal{S} : dom(\phi) \subset dom(\eta) \text{ e, para todo } x \in dom(\phi), \\ \text{existe } U_{\eta(x)} \in \mathcal{U} \text{ tal que } \eta(x), \phi(x) \in U_{\eta(x)} \end{array} \right\}.$$

Se $A \subset \mathcal{S}$, definimos o conjunto

$$V_{\mathcal{S}}(A,\mathcal{U}) = \{\phi \circ \eta : \phi \in V_{\mathcal{S}}(id,\mathcal{U}), \eta \in A\}.$$

Definição A.7. *Dados $x, y \in X$, uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X e um subconjunto $A \subset \mathcal{S}$, uma* $(\mathcal{U}, A)$-cadeia *de x para y consiste de uma sequência de pontos $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ em X, de aplicações $\phi_0, ..., \phi_{n-1} \in A$ e de abertos $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $\phi_i(x_i), x_{i+1} \in U_i$, para todo $i = 0, ..., n-1$.*

Para $N \subset X$ não vazio, $A \subset \mathcal{S}$ e uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, definimos os seguintes conjuntos

$$\Omega(N,\mathcal{U}, A) = \{y \in X : \text{existem } x \in N \text{ e uma } (\mathcal{U}, A)\text{-cadeia de } x \text{ para } y\}$$

e

$$\Omega^*(N,\mathcal{U}, A) = \{y \in X : \text{existem } x \in N \text{ e uma } (\mathcal{U}, A)\text{-cadeia de } y \text{ para } x\}.$$

Definição A.8. *Seja $A \subset \mathcal{S}$. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, definimos o conjunto*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U},A} = \{\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k : \phi_i \in V_{\mathcal{S}}(A,\mathcal{U}), k \in \mathbb{N}\}$$

denominado $(\mathcal{U}, A)$-semigrupo de sombreamento.

Usaremos por comodidade a notação $\phi\eta$ em vez de $\phi \circ \eta$, para quaisquer $\phi, \eta \in \mathcal{S}$.

Considerando duas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de X, escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$. Evidentemente, esta relação é uma pré-ordem entre as coberturas abertas de X. Também escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ se para todo $V, V' \in \mathcal{V}$ com $V \cap V' \neq \emptyset$, existe $U \in \mathcal{U}$ com $V \cup V' \subset U$. Definimos indutivamente a relação $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$ se $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\mathcal{U}$. Observe que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ implica $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Dadas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de X e dado um subconjunto compacto $K \subset X$ denotamos as seguintes coleções:

$$[\mathcal{U}, K] = \{U \in \mathcal{U} : K \cap U \neq \emptyset\}.$$

e

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V \neq \emptyset : U \in \mathcal{U} \text{ e } V \in \mathcal{V}\}.$$

Definição A.9. *Se $N \subset X$ é aberto e $K \subset N$ é compacto, dizemos que uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X é* K-subordinada *a N se, para cada $U' \in [\mathcal{U}, K]$ tem-se $U' \subset N$.*

Definição A.10. *Seja $\mathcal{O}$ uma família de coberturas abertas de X. Dizemos que $\mathcal{O}$ é* admissível *se*

1. *para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$.*
2. *$N \subset X$ é um conjunto aberto e $K \subset N$ é compacto, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ o qual é K-subordinado a N.*
3. *Dadas $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ que refina ambas as coberturas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.*

Vejamos alguns exemplos de famílias admissíveis.

Exemplo A.1. *Denote por $\mathcal{O}(X)$ a família de todas as coberturas abertas de X. Como X é paracompacto, então, $\mathcal{O}(X)$ é admissível (ver [17], pg. 170).*

Exemplo A.2. *Se X é um espaço compacto Hausdorff, então, a família $\mathcal{O}_{\mathrm{f}}(X)$ de todas as coberturas abertas finitas de X é admissível.*

Exemplo A.3. *Se (X, d) é espaço métrico, seja $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}(X)$ a família de todas as coberturas abertas $\mathcal{U}_\varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, onde $\mathcal{U}_\varepsilon$ é a coleção de todas as ε-bolas de X. Então, $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}(X)$ é admissível.*

Definição A.11. *Seja $\mathcal{O}$ uma família de coberturas abertas de X. Dizemos que $\mathcal{S}$ é* $\mathcal{O}$-localmente transitivo *se dada uma cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e um aberto $U \in \mathcal{U}$, então, para todo $x, y \in U$, existe $\phi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$ tal que $\phi(x) = y$.*

Notemos que se $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}'$ são coberturas abertas de X e $A \subset A'$ são subconjuntos de $\mathcal{S}$, então, $\mathcal{S}_{\mathcal{U},A} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U}',A'}$. Com efeito, se $\varphi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$, então, existem $\phi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$ e $\eta \in A$ tais que $\varphi = \phi \circ \eta$. Como $\eta \in A'$, temos que $\phi \in V_{\mathcal{S}}(A', \mathcal{U})$. Além disso, para todo $x \in dom(\phi)$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x, \phi(x) \in U_x$. Como $U_x \subset U_x'$, para algum $U_x' \in \mathcal{U}'$, concluímos que $\phi \in V_{\mathcal{S}}(A', \mathcal{U}')$. Portanto, $V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U}) \subset V_{\mathcal{S}}(A', \mathcal{U}')$. Isto garante a afirmação.

Lema A.12. *Sejam $\xi, \eta, \tau \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{U}$ cobertura aberta de X. Se $\xi \in V_{\mathcal{S}}(\eta, \mathcal{U})$, então, $\xi\tau \in V_{\mathcal{S}}(\eta\tau, \mathcal{U})$.*

Demonstração: Dado $y \in dom(\xi\tau) \subset dom(\eta\tau)$, temos que $\tau(y) \in dom(\xi)$, donde existe $U_{\eta\tau(y)} \in \mathcal{U}$ tal que $\xi\tau(y), \eta\tau(y) \in U_{\eta\tau(y)}$. Logo, $\xi\tau \in V_{\mathcal{S}}(\eta\tau, \mathcal{U})$. □

A partir de agora consideremos fixada uma família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X.

Proposição A.13. *Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Se $\xi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{V})$, então, $\xi\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$, para todo $\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{V},A}$.*

Demonstração: Escrevamos $\psi = \psi_1 ... \psi_k$, onde $\psi_i \in V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{V})$, $i = 1, ..., k$. Visto que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, temos que $\psi_i \in V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})$, para todo i. Logo, $\psi_2 ... \psi_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$ e existem $\phi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{V})$ e $\eta \in A$ tais que $\psi_1 = \phi \circ \eta$. Pelo Lema A.12, temos que $\xi\phi \in V_{\mathcal{S}}(\phi, \mathcal{V})$. Agora, se $x \in dom(\xi\phi)$, então, existem $V_{\phi(x)}, V_x \in \mathcal{V}$ tais que $\xi\phi(x), \phi(x) \in V_{\phi(x)}$ e $\phi(x), x \in V_x$. Logo, $V_{\phi(x)} \cap V_x \neq \emptyset$, donde existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $V_{\phi(x)} \cup V_x \subset U_x$. Portanto, $\xi\phi(x), x \in U_x$, donde $\xi\phi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$. Assim, $\xi\psi_1 \in V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})$, donde $\xi\psi = \xi\psi_1\psi_2 ... \psi_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$. □

Proposição A.14. *Suponha que $\mathcal{S}$ é $\mathcal{O}$-localmente transitivo. Sejam $x \in X$, $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathcal{O}$ e $A \subset \mathcal{S}$. Então, $\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$ e $\mathcal{S}^*_{\mathcal{U},A}x$ são subconjuntos abertos de X.*

Demonstração: Vejamos que

$$V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, x = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap Ax \neq \emptyset\}.$$

Dado $y \in V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, x$, temos que $y = \phi\eta(x)$, para algum $\phi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$ e $\eta \in A$. Logo, existe $U_{\eta(x)} \in \mathcal{U}$ tal que $y = \phi\eta(x), \eta(x) \in U_{\eta(x)}$, donde $U_{\eta(x)}$ é vizinhança aberta de y e $U_{\eta(x)} \cap Ax \neq \emptyset$. Portanto, $V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, x \subset \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap Ax \neq \emptyset\}$. Por outro lado, seja $z \in U$, onde $U \in \mathcal{U}$ e $U \cap Ax \neq \emptyset$. Tomemos $\phi \in A$ tal que $\phi(x) \in U$. Pela transitividade local de $\mathcal{S}$, existe $\psi \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$ tal que $\psi\phi(x) = z$. Logo, $z \in V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, x$. Portanto, $\bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap Ax \neq \emptyset\} \subset V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, x$. Assim, $V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, x$ é um subconjunto aberto de x. Agora, denotemos $V^1_{\mathcal{U},A}x = V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, x$ e definamos recursivamente

$$V^n_{\mathcal{U},A}x = \bigcup_{z \in V^{n-1}_{\mathcal{U},A}x} V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})\, z$$

para todo $n > 1$. Então, cada $V^n_{\mathcal{U},A}x$ é subconjunto aberto de X, donde segue que

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n_{\mathcal{U},A}x$$

é subconjunto aberto de X. Agora, vejamos que

$$V_{\mathcal{S}}\left(A,\mathcal{U}\right)^{*}x=\bigcup\left\{\eta^{-1}\left(U\right):U\in\mathcal{U},x\in U,\eta\in A\right\}.$$

Com efeito, se $y\in V_{\mathcal{S}}\left(A,\mathcal{U}\right)^{*}x$, então, existem $\phi\in V_{\mathcal{S}}\left(id,\mathcal{U}\right)$ e $\eta\in A$ tais que $\phi\eta\left(y\right)=x$. Logo, existe $U_{\eta(y)}\in\mathcal{U}$ tal que $x=\phi\eta\left(y\right),\eta\left(y\right)\in U_{\eta(y)}$. Assim, $y\in\eta^{-1}\left(U_{\eta(y)}\right)$ com $x\in U_{\eta(y)}$, donde segue a inclusão entre os conjuntos da lado esquerdo para o direito. Por outro lado, se $z\in\eta^{-1}\left(U\right)$, com $U\in\mathcal{U}$, $x\in U$ e $\eta\in A$, então, $\eta\left(z\right),x\in U$. Pela transitividade local de $\mathcal{S}$, existe $\phi\in V_{\mathcal{S}}\left(id,\mathcal{U}\right)$ tal que $\phi\left(\eta\left(z\right)\right)=x$. Logo, $z\in V_{\mathcal{S}}\left(A,\mathcal{U}\right)^{*}x$, donde segue a afirmação. Seguindo de forma semelhante ao que foi feito para a órbita progressiva, concluímos também que $\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}^{*}x$ é um subconjunto aberto de X. □

Notemos que para todo espaço topológico M e toda família arbitrária $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de M, qualquer semigrupo local contendo as funções constantes é $\mathcal{O}$-localmente transitivo. Portanto, o conceito de transitividade local pode ser abordado com grande generalidade.

Nosso objetivo principal é relacionar a ação dos semigrupos de sombreamento com a recorrência por cadeias. A próxima proposição é o primeiro e fundamental resultado neste caminho. Os conjuntos de transitividade por cadeias são determinados a partir dos conjuntos de transitividade aproximada para a ação dos semigrupos de sombreamento relativos ao semigrupo local.

Proposição A.15. *Sejam $x,y\in X$, $\mathcal{U},\mathcal{U}'\in\mathcal{O}$ e $A\subset\mathcal{S}$. Se $y\in\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$, então, $y\in\Omega\left(x,\mathcal{U},A\right)$. Além disso, se $\mathcal{U}\leq\frac{1}{2}\mathcal{U}'$ e $y\in\mathrm{fe}\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x\right)$, então, $y\in\Omega\left(x,\mathcal{U}',A\right)$.*

Demonstração: Seja $\psi\in\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$ tal que $\psi\left(x\right)=y$. Escrevamos $\psi=\psi_{n-1}...\psi_{0}$, com $\psi_{i}\in V_{\mathcal{S}}\left(A,\mathcal{U}\right)$, $i=0,...,n-1$. Então, existe $\phi_{i}\in V_{\mathcal{S}}\left(id,\mathcal{U}\right)$ e $\eta_{i}\in A$ tais que $\psi_{i}=\phi_{i}\eta_{i}$, $i=0,...,n-1$. Consideremos os pontos $x_{0}=x,x_{1}=\psi_{0}\left(x_{0}\right),x_{2}=\psi_{1}\left(x_{1}\right),...,x_{n}=\psi_{n-1}\left(x_{n-1}\right)=y$ em X. Então, para cada i, existe $U_{i}\in\mathcal{U}$ tal que $\eta_{i}\left(x_{i}\right),\psi_{i}\left(x_{i}\right)\in U_{i}$, isto é, $\eta_{i}\left(x_{i}\right),x_{i+1}\in U_{i}$. Logo, $y\in\Omega\left(x,\mathcal{U},A\right)$. Agora, seja $y\in\mathrm{fe}\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x\right)$ e suponhamos que $\mathcal{U}\leq\frac{1}{2}\mathcal{U}'$. Tomemos $U_{y}\in\mathcal{U}$ vizinhança aberta de y. Então, existe $\psi\in\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$ tal que $\psi\left(x\right)\in U_{y}$. Como $\psi\left(x\right)\in\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$, existe uma $(\mathcal{U},A)$-cadeia de x para $\psi\left(x\right)$, ou seja, existem pontos $x_{0}=x,...,x_{n}=\psi\left(x\right)\in X$, $\phi_{0},...,\phi_{n-1}\in A$ e $U_{0},...,U_{n-1}\in\mathcal{U}$ tais que $\phi_{i}\left(x_{i}\right),x_{i+1}\in U_{i}$. Como $\psi\left(x\right)\in U_{y}\cap U_{n-1}$, existe $U_{n-1}'\in\mathcal{U}'$ tal que $U_{y}\cup U_{n-1}\subset U_{n-1}'$. Logo, $\phi_{n-1}\left(x_{n-1}\right),y\in U_{n-1}'$, donde obtemos uma $(\mathcal{U}',A)$-cadeia de x para y. □

Uma recíproca desta última proposição pode ser estabelecida com a hipótese de transitividade local.

Proposição A.16. *Assuma que $\mathcal{S}$ é $\mathcal{O}$-localmente transitivo, e sejam $A\subset\mathcal{S}$ e $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$. Se $y\in\Omega\left(x,\mathcal{U},A\right)$, então, $y\in\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$.*

Demonstração: Sejam $x_0 = y, ..., x_n = x \in X$, $\phi_0, ..., \phi_{n-1} \in A$ e $U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $\phi_i(x_i), x_{i+1} \in U_i$, $i = 0, ..., n-1$. Pela transitividade local de $\mathcal{S}$, para cada i, existe $\psi_i \in V_{\mathcal{S}}(id, \mathcal{U})$ tal que $\psi_i \phi_i(x_i) = x_{i+1}$. Então, $\psi_i \phi_i \in V_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{U})$, para todo $i = 0, ..., n-1$. Assim, $x_n = \psi_{n-1}\phi_{n-1}(x_{n-1}) = \psi_{n-1}\phi_{n-1}...\psi_0\phi_0(x_0)$, onde $\psi_{n-1}\phi_{n-1}...\psi_0\phi_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$. Logo, $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$. □

Agora, consideremos uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos do semigrupo $\mathcal{S}$. Dado $x \in X$, definimos os conjuntos

$$\Omega_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}, A\in\mathcal{F}} \Omega(x, \mathcal{U}, A)$$

e

$$\Omega^*_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}, A\in\mathcal{F}} \Omega^*(x, \mathcal{U}, A).$$

Com isso, associamos à família $\mathcal{F}$ o conjunto

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{F}} = \{x \in X : x \in \Omega_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x)\} = \left\{x \in X : x \in \Omega^*_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x)\right\}$$

chamado *conjunto de recorrência por $\mathcal{F}$-cadeias*.

Assim, os conjuntos $E_x = \Omega_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x)$ $(x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{F}})$ formam uma partição de $\mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$, onde cada conjunto E_x é chamado de *conjunto de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias*. Se $\operatorname{int}(E_x) \neq \emptyset$, então E_x é chamado de *conjunto controlável por $\mathcal{F}$-cadeias*.

Sob a hipótese de transitividade local, os conjuntos de transitividade por cadeias podem ser caracterizados em termos dos conjuntos de transitividade total dos semigrupos de sombreamento. Como as órbitas progressivas e regressivas destes semigrupos são conjuntos abertos, temos que todo conjunto de transitividade total é um conjunto de transitividade de algum conjunto controlável efetivo.

Teorema A.17. *Assuma que o semigrupo local $\mathcal{S}$ é $\mathcal{O}$-localmente transitivo e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Então, um subconjunto não vazio $E \subset X$ é um conjunto de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias se, e somente se, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$, existe um conjunto controlável efetivo $D_{\mathcal{U},A}$ para a ação do semigrupo de sombreamento $\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$ de forma que*

$$E = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}, A\in\mathcal{F}} (D_{\mathcal{U},A})_0 = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}, A\in\mathcal{F}} D_{\mathcal{U},A} = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}, A\in\mathcal{F}} \operatorname{fe}(D_{\mathcal{U},A}).$$

Demonstração: Seja $E = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}, A\in\mathcal{F}} (D_{\mathcal{U},A})_0$ como no enunciado. Se $x, y \in E$, então, $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$ e $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}y$, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$, donde segue pela primeira parte da Proposição A.15 que $y \in \Omega_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x) \cap \Omega^*_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(x) = E_x$. Logo $E \subset E_x$. Por outro lado, se $z \in E_x$, segue pela Proposição A.16 que $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$ e $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}z$, donde $z \in (D_{\mathcal{U},A})_0$, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Logo, $z \in E$ e, portanto, $E = E_x$. Reciprocamente, fixemos $x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$. Se $y \in E_x$, então, $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$ e $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}y$, donde $y \in (T_{\mathcal{U},A})_x$, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Logo, $E_x \subset \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} (T_{\mathcal{U},A})_x$. Pela primeira parte da demonstração, temos que $E_x = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} (T_{\mathcal{U},A})_x$. Enfim, usando um simples argumento, as outras igualdades do enunciado seguem da segunda parte da Proposição A.15 e da Proposição A.16. □

Com o Teorema A.17 alcançamos nosso objetivo de relacionar os conjuntos de transitividade por cadeias com a transitividade dos semigrupos de sombreamento.

Definição A.18. *Seja E um conjunto de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias. Então, o* domínio de atração por cadeias *e o* domínio de repulsão por cadeias *de E são dados respectivamente pelos conjuntos*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E) = \{y \in X : \Omega_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(y) \cap E \neq \emptyset\}.$$

e

$$\mathcal{A}^*_{\mathcal{O}}(E) = \left\{y \in X : \Omega^*_{\mathcal{F},\mathcal{O}}(y) \cap E \neq \emptyset\right\}.$$

Notemos que $E_x = \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E_x) \cap \mathcal{A}^*_{\mathcal{O}}(E_x)$ $(x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{F}})$. Contudo, o conceito de domínio de atração por cadeias estabelece uma relação de ordem parcial entre os conjuntos de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias.

Definição A.19. *Dados $x, y \in \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}$, então, $E_x \precsim E_y$ se, e somente se, $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E_y)$.*

Logo, $E_x \precsim E_y$ se, e somente se, $E_x \subset \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E_y)$.

Proposição A.20. *Assuma que o semigrupo local $\mathcal{S}$ é $\mathcal{O}$-localmente transitivo e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Se E é um conjunto de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias, então*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} \mathcal{A}\left((D_{\mathcal{U},A})_0\right) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} \mathcal{A}(D_{\mathcal{U},A})$$

e

$$\mathcal{A}^*_{\mathcal{O}}(E) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} \mathcal{A}^*\left((D_{\mathcal{U},A})_0\right)$$

onde $D_{\mathcal{U},A}$ é um conjunto controlável efetivo de $\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$.

Demonstração: Se $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E)$, então, $\Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap E \neq \emptyset$. Pelo Teorema A.17, temos que

$$E = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} (D_{\mathcal{U},A})_0 = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} D_{\mathcal{U},A}$$

onde $D_{\mathcal{U},A}$ é um conjunto controlável efetivo de $\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$. Tomando $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap E$, segue da Proposição A.16 que $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x \cap (D_{\mathcal{U},A})_0$, para todos $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Logo, $x \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{U},A})$, para todos $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Reciprocamente, seja $x \in \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} \mathcal{A}(D_{\mathcal{U},A})$. Então, existe $x_{\mathcal{U},A} \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x \cap (D_{\mathcal{U},A})_0$, para todos $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Tomando $y \in E \subset (D_{\mathcal{U},A})_0$, temos que $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x_{\mathcal{U},A} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{U},A}x$. Segue da Proposição A.15 que $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x) \cap E$. Logo, $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E)$, e o resultado está demonstrado. □

Corolário A.21. *Assuma as hipóteses da proposição anterior. Seja E conjunto de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias dado por $E = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} D_{\mathcal{U},A}$, onde cada $D_{\mathcal{U},A}$ é um conjunto controlável efetivo invariante de $\mathcal{S}_{\mathcal{U},A}$. Então, E é maximal com respeito a relação de ordem da Definição A.19.*

Demonstração: Suponha que $E' = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} D'_{\mathcal{U},A}$ é um conjunto de transitividade por $\mathcal{F}$-cadeias com $E \precsim E'$. Então, $E \subset \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(E') = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O},A\in\mathcal{F}} \mathcal{A}\left(\left(D'_{\mathcal{U},A}\right)_0\right)$, donde $D_{\mathcal{U},A} \cap \mathcal{A}\left(\left(D'_{\mathcal{U},A}\right)_0\right) \neq \emptyset$, para todos $\mathcal{U}$ e A, ou seja, $D_{\mathcal{U},A} \preceq D'_{\mathcal{U},A}$. Logo, $D_{\mathcal{U},A} = D'_{\mathcal{U},A}$, para todos $\mathcal{U}$ e A e, portanto, $E = E'$. □

Apêndice B

Variedades flag

Neste apêndice, apresentamos um esboço sobre o conteúdo básico da teoria de Lie semi-simples real e definimos o conceito de variedade flag. Os resultados e afirmações que enunciamos podem ser conferidos com todos os detalhes nos trabalhos de Braga Barros-San Martin [3] e [4], Patrão [22] e San Martin [26]. Observamos também que as definições e objetos relacionados aos conceitos de álgebra de Lie e de grupo de Lie podem ser consultadas nos textos de San Martin [29] e [30].

B.1 Fundamentos da teoria de Lie semi-simples real

Seja G um grupo de Lie real conexo e de centro finito cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Denota-se por $Aut\,(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos de $\mathfrak{g}$, e por $Int\,(\mathfrak{g})$ o subgrupo gerado pelas exponenciais das derivações internas de $\mathfrak{g}$. Visto que $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então, $Int\,(\mathfrak{g})$ é a componente conexa da identidade de $Aut\,(\mathfrak{g})$.

Consideremos a representação $I : G \to Int\,(G)$ dada por $I\,(g) = C_g$, onde C_g é a conjugação por g em G, para todo $g \in G$. Denotando por exp a aplicação exponencial de $\mathfrak{g}$ em G e por e o elemento neutro de G, temos que

$$C_g\,(\exp\,(X)) = \exp\left(d\,(C_g)_e\,(X)\right)$$

para todo $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$. Para a aplicação adjunta $Ad : G \to \mathrm{GL}\,(\mathfrak{g})$ dada por $Ad\,(g) = d\,(C_g)_e$, temos a igualdade

$$\exp\,(Ad\,(g)\,(X)) = C_g\,(\exp\,(X)) = g\exp\,(X)\,g^{-1}$$

para todo $g \in G$. Então, Ad é uma aplicação diferenciável cuja diferencial no elemento neutro de G coincide com a aplicação adjunta $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}\,(\mathfrak{g})$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Além disso, como $Ker\,(Ad) = Z\,(G)$, onde $Z\,(G)$ é o centro de G, temos que a aplicação induzida $\overline{Ad} : G/Z(G) \to Ad(G)$ é um isomorfismo analítico, e $Ad(G)$ é chamado de *grupo adjunto*.

Assim, para todo $X \in \mathfrak{g}$, vale a igualdade

$$Ad(\exp(X)) = \mathrm{e}^{ad(X)}$$

donde segue que $Ad(G) = Int(\mathfrak{g})$, pois G é conexo. Contudo, $Ad(G)$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

Uma *involução de Cartan* é um automorfismo involutivo θ ($\theta^2 = id$) de $\mathfrak{g}$ tal que a seguinte forma bilinear é um produto interno na álgebra

$$\langle X, Y\rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y)\rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$. O fato de $\mathfrak{g}$ ser semi-simples implica que existe uma única involução de Cartan a menos de conjugação por elementos do grupo adjunto $Ad(G)$. Então, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, onde

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = -X\}$$

são ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot\rangle_\theta$ e à forma de Cartan Killing. Esta decomposição de $\mathfrak{g}$ é chamada de *decomposição de Cartan* associada a uma involução de Cartan θ. O subgrupo de Lie conexo K gerado por $\exp(\mathfrak{k})$ é um subgrupo compacto de G. Na verdade, isto é equivalente ao fato do centro de G ser finito.

B.1.1 Sistema de raízes e decomposição de Iwasawa

Agora, a menos de conjugação por elementos de $Ad(K)$, é garantida a existência e unicidade de uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. O par $(\theta, \mathfrak{a})$ é chamado de par admissível de $\mathfrak{g}$. Chamamos de *sistema de raízes* do par admissível $(\theta, \mathfrak{a})$ o conjunto Π dos funcionais lineares (não nulos) $\alpha : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ tais que $\alpha(H)$ são autovalores associados à autovetores de $ad(H)$ $(H \in \mathfrak{a})$. O espaço associado a uma raiz $\alpha \in \Pi$ é dado pelo subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : ad(H)(X) = \alpha(H)(X), \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Observemos que $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Denotando

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{k} : ad(X)|_\mathfrak{a} = 0\}$$

o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$, temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$$

é uma soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$-ortogonal. Dado $g \in G$ e $\phi = Ad\,(g)$, temos que $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\,(\mathfrak{a}))$ é um par admissível cujo sistema de raízes associado é dado por

$$\phi^*\Pi = \left\{\phi^*\alpha = \alpha \circ \phi^{-1}\,|_{\mathfrak{a}}\colon \alpha \in \Pi\right\}.$$

Assim, $\mathfrak{g}_{\phi^*\alpha} = \phi\,(\mathfrak{g}_\alpha)$ e

$$\mathfrak{g} = \phi\,(\mathfrak{m}) \oplus \phi\,(\mathfrak{a}) \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \phi\,(\mathfrak{g}_\alpha)\,.$$

Definição B.1. *As* câmaras de Weyl *associadas a um par admissível* $(\theta, \mathfrak{a})$ *são as componentes conexas do conjunto* $\{H \in \mathfrak{a} : \alpha\,(H) \neq 0$*, para todo* $\alpha \in \Pi\}$.

Escolhendo-se uma câmara de Weyl como a *câmara positiva* $\mathfrak{a}^+$, definimos o conjunto das *raízes positivas* asscociado à $\mathfrak{a}^+$ como

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha\,|_{\mathfrak{a}^+} > 0\}\,.$$

Então, $\mathfrak{a}^+$ gera $\mathfrak{a}$. Denotamos os subespaços

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Então,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

onde $\mathfrak{n}$ é uma subálgebra nilpotente e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é uma subálgebra solúvel. Esta decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é denominada *decomposição de Iwasawa* de $\mathfrak{g}$ associada ao terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. Contudo, a aplicação $(k, a, n) \mapsto kan$ define um difeomorfismo entre $K \times A \times N$ e G, onde $K = \langle \exp\,(\mathfrak{k}) \rangle$, $A = \langle \exp\,(\mathfrak{a}) \rangle$ e $N = \langle \exp\,(\mathfrak{n}) \rangle$. Assim,

$$G = KAN$$

é denominada decomposição de Iwasawa de G associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$.

B.1.2 Grupo de Weyl

Dado $g \in G$ e um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, temos que as câmaras de Weyl associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\,(\mathfrak{a}))$ são imagem por $\phi = Ad\,(g)$ das câmaras de Weyl associadas ao par $(\theta, \mathfrak{a})$, e $\phi^*\Pi^+$ é o conjunto das raízes positivas associado à $\phi\,(\mathfrak{a}^+)$. Então, $\phi\,(\mathfrak{a}^+)$ gera $\phi\,(\mathfrak{a})$. A menos de conjugação por automorfismos internos, existe uma única decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$. Contudo, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é a decomposição de Iwasawa associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, então,

$$\mathfrak{g} = \phi\,(\mathfrak{k}) \oplus \phi\,(\mathfrak{a}) \oplus \phi\,(\mathfrak{n})$$

é a decomposição de Iwasawa associada ao terno $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi(\mathfrak{a}), \phi(\mathfrak{a}^+))$.

Os objetos associados a um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ são indicados com a justaposição de $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+)$. Neste caso, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta = \langle\cdot,\cdot\rangle(\lambda)$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\lambda)$, $\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+(\lambda)$, $\Pi = \Pi(\lambda)$ e $\Pi^+ = \Pi^+(\lambda)$. Para cada $\alpha \in \Pi(\lambda)$, definimos $H_\alpha \in \mathfrak{a}(\lambda)$ como

$$\langle H_\alpha, H\rangle(\lambda) = \alpha(H)$$

para todo $H \in \mathfrak{a}(\lambda)$. A *reflexão* $\langle\cdot,\cdot\rangle(\lambda)$-ortogonal $r_\alpha : \mathfrak{a}(\lambda) \to \mathfrak{a}(\lambda)$ em relação à H_α é definida por

$$r_\alpha(H) = H - 2\frac{\langle H_\alpha, H\rangle(\lambda)}{\langle H_\alpha, H_\alpha\rangle(\lambda)}H_\alpha.$$

Então, $r_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha$. Assim, o conjunto

$$\Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)} = \{H_\alpha \in \mathfrak{a} : \alpha \in \Pi(\lambda)\}$$

é um *sistema de co-raízes*, isto é:

1. $\Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}$ é finito, gera $\mathfrak{a}$ e não contém 0;
2. Para todo $H_\alpha \in \Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}$, existe uma reflexão r_α em relação a H_α tal que $r_\alpha\left(\Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}\right) = \Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}$;
3. Para todos $H_\alpha, H_\beta \in \Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}$, $r_\alpha(H_\beta) - H_\beta$ é um múltiplo inteiro de H_α.

Definição B.2. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ um terno admissível de $\mathfrak{g}$. O* grupo de Weyl $W(\lambda)$ *é o grupo gerado pelo conjunto das reflexões $\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta(\lambda)$-ortogonais $\{r_\alpha : \alpha \in \Pi(\lambda)\}$.*

Visto que $\Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}$ é finito, temos que $W(\lambda)$ é finito.

Na verdade, o grupo de Weyl depende somente do par admissível $(\theta, \mathfrak{a})$. Além disso, ele pode ser identificado com o grupo $\left\{Ad(k)|_{\mathfrak{a}(\lambda)} : k \in M^*\right\}$, onde

$$M^* = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : Ad(k)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}$$

é o normalizador de $\mathfrak{a}$ em K. Assim, se

$$M = Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : Ad(k)|_{\mathfrak{a}} = id_{\mathfrak{a}}\}$$

é o centralizador de de $\mathfrak{a}$ em K, temos que $W(\lambda)$ é isomorfo ao grupo quociente M^*/M.

B.1.3 Sistema simples de raízes

Seja $\Sigma(\lambda)$ o conjunto das raízes positivas que não podem ser escritas como uma combinação linear de dois termos não nulos. Então, $\Sigma(\lambda)$ é chamado de *sistema simples de raízes* associado ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. Dado $\Theta \subset \Sigma(\lambda)$, define-se

$$\langle\Theta\rangle^+ = \langle\Theta\rangle \cap \Pi^+(\lambda).$$

A subálgebra semi-simples $\mathfrak{g}(\Theta)$ de tipo Θ é a subálgebra gerada por

$$\mathfrak{n}(\Theta) = \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Então, $\theta(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset \mathfrak{g}(\Theta)$, e a decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}(\Theta)$ associada à $\theta_\Theta = \theta\mid_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ é dada por $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \bigoplus \mathfrak{s}(\Theta)$, onde $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{s}$. Além disso, temos que $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{s}(\Theta)$. O sistema de raízes do par admissível $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$ é dado por

$$\Pi(\Theta) = \left\{\alpha_\Theta = \alpha\mid_{\mathfrak{a}(\Theta)} : \alpha \in \langle\Theta\rangle\right\}.$$

Assim, $\left(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+\right)$ é um terno admissível de $\mathfrak{g}(\Theta)$, onde

$$\mathfrak{a}(\Theta)^+ = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \left\{H \in \mathfrak{a}(\lambda) : \alpha(H) > 0, \text{ para todo } \alpha \in \langle\Theta\rangle^+\right\}.$$

O conjunto das raízes positivas associadas a $\mathfrak{a}(\Theta)^+$ é dado por

$$\Pi(\Theta)^+ = \left\{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta) : \alpha \in \langle\Theta\rangle^+\right\}$$

e o sistema simples de raízes associado ao terno $\left(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+\right)$ é dado por

$$\Sigma(\Theta) = \left\{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta)^+ : \alpha \in \Theta\right\}.$$

O grupo de Weyl associado ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$ é dado por

$$W(\Theta) = \left\{r_{\alpha_\Theta} = r_\alpha\mid_{\mathfrak{a}(\Theta)} : \alpha \in \langle\Theta\rangle\right\}.$$

Por fim,

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)$$

é a decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}(\Theta)$ associada ao terno $\left(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+\right)$. O subgrupo semi-simples $G(\Theta)$ de tipo Θ é o subgrupo conexo gerado por $\exp(\mathfrak{g}(\Theta))$. Assim,

$$G(\Theta) = K(\Theta)\, A(\Theta)\, N(\Theta)$$

é a decomposição de Iwasawa de $G(\Theta)$ associada ao terno $\left(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+\right)$, onde $K(\Theta) = \langle\exp(\mathfrak{k}(\Theta))\rangle$, $A(\Theta) = \langle\exp(\mathfrak{a}(\Theta))\rangle$ e $N(\Theta) = \langle\exp(\mathfrak{n}(\Theta))\rangle$.

Definição B.3. *Seja $\Theta \subset \Sigma(\lambda)$. O subgrupo W_Θ de $W(\lambda)$ gerado pelo conjunto das reflexões $\{r_\alpha : \alpha \in \Theta\}$ é denominado* parabólico tipo Θ.

B.1.4 Subálgebra e subgrupo parabólicos

Agora, dado um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, denominamos de *subálgebra parabólica minimal* de $\mathfrak{g}$ associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ a subálgebra

$$\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{m}(\lambda) \oplus \mathfrak{a}(\lambda) \oplus \mathfrak{n}(\lambda).$$

Se $\Theta \subset \Sigma(\lambda)$, então,

$$\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{p}(\lambda) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$$

é chamada de *subálgebra parabólica* de tipo Θ. O conjunto das subálgebras parabólicas associadas ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é único a menos de conjugação por automorfismos internos. Dado $g \in G$ e $\Theta \subset \Sigma(\lambda)$, temos que $\phi(\mathfrak{p}_\Theta(\lambda))$ é a subálgebra parabólica de tipo $\phi^*\Theta$ associada ao terno $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi(\mathfrak{a}), \phi(\mathfrak{a}^+))$.

O *subgrupo parabólico* de tipo Θ associado ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é dado por

$$P_\Theta(\lambda) = N_G(\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)) = \{g \in G : Ad(g)(\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)) = \mathfrak{p}_\Theta(\lambda)\}$$

o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ em G. Se $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$ é o complemento $\langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda)$-ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{k}_\Theta$ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{k}$, então,

$$\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

é a decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Se K_Θ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K, ou seja,

$$K_\Theta = Z_K(\mathfrak{a}_\Theta) = \{k \in K : Ad(k)|_{\mathfrak{a}_\Theta} = id_{\mathfrak{a}_\Theta}\}$$

então

$$P_\Theta(\lambda) = K_\Theta A N$$

é a decomposição de Iwasawa de $P_\Theta(\lambda)$. Contudo, $P_\Theta(\lambda)$ é autonormalizador e sua álgebra de Lie é $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$.

B.2 Objetos canônicos e variedades flag

Para definir uma variedade flag, consideramos o conjunto das *câmaras de Weyl* em G dado por

$$\mathcal{C} = \left\{\exp\left(\mathfrak{a}^+\right) : \left(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+\right) \text{ terno admissível}\right\}.$$

Se dois ternos admissíveis $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $\left(\widetilde{\theta}, \widetilde{\mathfrak{a}}, \widetilde{\mathfrak{a}}^+\right)$ de $\mathfrak{g}$ são tais que $\mathfrak{a}^+ = \widetilde{\mathfrak{a}}^+$, então, eles determinam os mesmos objetos como grupo de Weyl, sistema de raízes e sistema simples de raízes, subálgebra parabólica e subgrupo parabólico, decomposição de Iwasawa destes últimos e o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ quando restrito a $\mathfrak{a}$.

Considerando a ação adjunta de G na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, para cada $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$, denotamos $gX = Ad\,(g)\,(X)$.

Para todo $\lambda = \exp\left(\mathfrak{a}^{+}\right) \in \mathcal{C}$ e $g \in G$, temos que

1. $W\left(g\lambda g^{-1}\right) = gW\left(\lambda\right)g^{-1}$, onde $g\lambda g^{-1} = \exp\left(Ad\,(g)\left(\mathfrak{a}^{+}\right)\right)$, e $gwg^{-1} = Ad\,(g) \circ w \circ Ad\left(g^{-1}\right)$, para todo $w \in W\left(\lambda\right)$.

2. $\mathfrak{a}\left(g\lambda g^{-1}\right) = g\mathfrak{a}\left(\lambda\right)$, e o mesmo ocorre com os objetos $\mathfrak{m}\left(\lambda\right)$, $\mathfrak{n}\left(\lambda\right)$, $\Pi\left(\lambda\right)$, $\Sigma\left(\lambda\right)$, $\Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}$ e $\Sigma_{\mathfrak{a}(\lambda)}$.

3. $N\left(g\lambda g^{-1}\right) = gN\left(\lambda\right)g^{-1}$, e o mesmo ocorre com A e M.

4. $\mathfrak{p}_{g\Theta}\left(g\lambda g^{-1}\right) = g\mathfrak{p}_{\Theta}\left(\lambda\right)$, para cada $\Theta \subset \Sigma\left(\lambda\right)$.

5. $P_{g\Theta}\left(g\lambda g^{-1}\right) = gP_{\Theta}\left(\lambda\right)g^{-1}$, para cada $\Theta \subset \Sigma\left(\lambda\right)$.

6. $\left\langle gH, g\widetilde{H}\right\rangle\left(g\lambda g^{-1}\right) = \left\langle H, \widetilde{H}\right\rangle\left(\lambda\right)$, para todos $H, \widetilde{H} \in \mathfrak{a}\left(\lambda\right)$.

Além disso, se $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$, então, existe $g \in G$ tal que $\mu = g\lambda g^{-1}$. Ou seja, G age transitivamente por conjugação no conjunto das câmaras de Weyl em G.

Agora, G age no conjunto

$$\mathcal{W} = \left\{\left(\lambda, w\right) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } w \in W\left(\lambda\right)\right\}$$

definindo

$$g\left(\lambda, w\right) = \left(g\lambda g^{-1}, gwg^{-1}\right)$$

para todo $g \in G$ e $\left(\lambda, w\right) \in \mathcal{W}$. Com isto, temos a seguinte definição.

Definição B.4. *O* grupo de Weyl canônico W *de* $\mathfrak{g}$ *é definido pelo espaço das órbitas de* G *em* $\mathcal{W}$.

Denotamos a órbita de $\left(\lambda, w\right)$ por $\left[\left(\lambda, w\right)\right]$, para todo $\left(\lambda, w\right) \in \mathcal{W}$.

Proposição B.5. *Para cada* $\lambda \in \mathcal{C}$ *e* $w \in W$, *existe um único* $w\left(\lambda\right) \in W\left(\lambda\right)$ *tal que* $w = \left[\left(\lambda, w\left(\lambda\right)\right)\right]$. *Fixando* λ, *a aplicação* $w \mapsto w\left(\lambda\right)$ *define um isomorfismo entre o grupo de Weyl* $W\left(\lambda\right)$ *e o grupo de Weyl canônico* W, *onde, dados* $w, \widetilde{w} \in W$, *tem-se*

$$w\widetilde{w} = \left[\left(\lambda, w\left(\lambda\right)\widetilde{w}\left(\lambda\right)\right)\right]$$

e

$$w^{-1} = \left[\left(\lambda, w\left(\lambda\right)^{-1}\right)\right].$$

Além disso, para cada $g \in G$ *e* $\lambda \in \mathcal{C}$, *temos que* $w\left(g\lambda g^{-1}\right) = gw\left(\lambda\right)g^{-1}$.

O grupo G também age no conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\lambda, H) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } H \in \mathfrak{a}(\lambda)\}$$

definindo

$$g(\lambda, H) = \left(g\lambda g^{-1}, gH\right)$$

para todo $g \in G$ e $(\lambda, H) \in \mathcal{A}$. O *abeliano maximal canônico* de $\mathfrak{g}$ é então definido pelo espaço das órbitas de G em $\mathcal{A}$ e denotado por $\mathfrak{a}$.

Proposição B.6. *Para cada $\lambda \in \mathcal{C}$ e $H \in \mathfrak{a}$, existe um único $H(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda)$ tal que $H = [(\lambda, H(\lambda))]$. Fixando λ, a aplicação $H \mapsto H(\lambda)$ é uma isometria linear entre os espaço de Hilbert $(\mathfrak{a}(\lambda), \langle\cdot,\cdot\rangle(\lambda))$ e o espaço de Hilbert $(\mathfrak{a}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, onde, para todos $H, \widetilde{H} \in \mathfrak{a}$ e $c \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$H + \widetilde{H} = \left[\left(\lambda, H(\lambda) + \widetilde{H}(\lambda)\right)\right]$$

e

$$cH = [(\lambda, cH(\lambda))]$$

e o produto interno em $\mathfrak{a}$ é definido por

$$\left\langle H, \widetilde{H}\right\rangle = \left\langle H(\lambda), \widetilde{H}(\lambda)\right\rangle(\lambda).$$

Além disso, para todo $g \in G$, temos que $H(g\lambda g^{-1}) = gH(\lambda)$.

Lembrando que

$$\Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda) = \{H_\alpha(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda) : \alpha \in \Pi(\lambda)\} \quad \text{e} \quad \Sigma_{\mathfrak{a}}(\lambda) = \{H_\alpha(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda) : \alpha \in \Sigma(\lambda)\}$$

temos ainda que os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{(\lambda, H_\alpha(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } H_\alpha(\lambda) \in \Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)\}$$

e

$$\mathcal{S} = \{(\lambda, H_\alpha(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } H_\alpha(\lambda) \in \Sigma_{\mathfrak{a}}(\lambda)\}$$

são invariantes pela ação G em $\mathcal{A}$. O espaço das órbitas de G em $\mathcal{P}$ é denominado de *sistema de co-raízes canônicas* de $\mathfrak{g}$ e é denotado por $\Pi_{\mathfrak{a}}$. Então, $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é um sistema abstrato de raízes de $\mathfrak{a}$ tal que W é o seu grupo de Weyl associado. O espaço das órbitas de G em $\mathcal{S}$ é denominado de *sistema simples de co-raízes canônicas* de $\mathfrak{g}$ e é denotado por $\Sigma_{\mathfrak{a}}$. A restrição do isomorfismo da Proposição B.6 aos conjuntos $\Pi_{\mathfrak{a}}$ e $\Sigma_{\mathfrak{a}}$ é uma bijeção entre estes e $\Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)$ e $\Sigma_{\mathfrak{a}}(\lambda)$, respectivamente, para todo $\lambda \in \mathcal{C}$.

Agora, se $\mathfrak{a}^*$ denota o dual de $\mathfrak{a}$, então, a aplicação $H \mapsto \langle H, \cdot \rangle$ define um isomorfismo entre $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}^*$. Podemos então definir

$$\Pi = \{\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle : H_\alpha \in \Pi_\mathfrak{a}\}$$

denominado de *sistema de raízes canônico* de $\mathfrak{g}$, e

$$\Sigma = \{\alpha \in \Pi : H_\alpha \in \Sigma_\mathfrak{a}\}$$

denominado de *sistema simples de raízes canônico* de $\mathfrak{g}$.

Então, o grupo de Weyl canônico é gerado pelo conjunto das reflexões $\{r_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$.

Fixando $\lambda \in \mathcal{C}$, a aplicação $\alpha \mapsto \alpha(\lambda) = \langle H_\alpha(\lambda), \cdot \rangle (\lambda)$ define uma bijeção entre Π e $\Pi(\lambda)$ e entre Σ e $\Sigma(\lambda)$. Além disso, $\alpha(g\lambda g^{-1}) = Ad(g^{-1})^* \alpha(\lambda) = g\alpha(\lambda)$, para todo $g \in G$. Se $\Theta \subset \Sigma$, então, $\Theta(\lambda) \subset \Sigma(\lambda)$ é a imagem de Θ pela aplicação $\alpha \mapsto \alpha(\lambda)$.

Enfim, seja $\Theta \subset \Sigma$. Então, a *subálgebra* $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ *parabólica* de tipo Θ determinada por λ é definida como a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_{\Theta(\lambda)}(\lambda)$, e o *subgrupo* $P_\Theta(\lambda)$ *parabólico* de tipo Θ é $P_{\Theta(\lambda)}(\lambda)$.

Definição B.7. *O* flag de tipo Θ *é o conjunto*

$$\mathbb{F}_\Theta = \{\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}\}$$

de todas as subálgebras parabólicas de tipo Θ. *Quando* $\Theta = \emptyset$ *o flag* $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\emptyset$ *é denominado* flag maximal *de* $\mathfrak{g}$.

Para todos $g \in G$ e $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) \in \mathbb{F}_\Theta$, temos que

$$g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{p}_{g\Theta(\lambda)}\left(g\lambda g^{-1}\right) = \mathfrak{p}_{\Theta(g\lambda g^{-1})}\left(g\lambda g^{-1}\right) = \mathfrak{p}_\Theta\left(g\lambda g^{-1}\right).$$

Esta ação adjunta de G no flag $\mathbb{F}_\Theta$ é transitiva, pois para todos $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$, existe $g \in G$ tal que $g\lambda g^{-1} = \mu$. Além disso, o subgrupo parabólico $P_\Theta(\lambda)$ é o subgrupo de isotropia da subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Com isto, a projeção canônica $\mathbb{F}_\Theta \to \mathbb{F}_\Theta / G$ é um fibrado diferenciável e $G / P_\Theta(\lambda)$ é difeomorfo a órbita $G\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathbb{F}_\Theta$, onde o difeomorfismo é dado por $\phi_\Theta(gP_\Theta(\lambda)) = g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Portanto, $\mathbb{F}_\Theta$ é uma variedade diferenciável compacta difeomorfa a variedade homogênea $G / P_\Theta(\lambda)$.

Agora, dado $w \in W$ e $\lambda \in \mathcal{C}$, existe $k \in M^*(\lambda) = N_K(\mathfrak{a}(\lambda))$ tal que $w(\lambda)$ é identificado com a classe $kM(\lambda) = kZ_K(\mathfrak{a}(\lambda))$. Para qualquer $m \in M(\lambda)$ e $H \in \mathfrak{a}(\lambda)^+$, temos que $km\lambda(km)^{-1} = k\lambda k^{-1}$. Assim, faz sentido as notações $w(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1} = k\lambda k^{-1}$ e $w(\lambda)\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{p}_\Theta(k\lambda k^{-1})$.

B.2.1 Fibrações entre os flags

Se $\Delta \subset \Theta \subset \Sigma$, então, $\mathfrak{p}_\Delta(\lambda) \subset \mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathcal{C}$. A *fibração natural* $\pi_\Theta^\Delta : \mathbb{F}_\Delta \to \mathbb{F}_\Theta$ é dada por

$$\pi_\Theta^\Delta(\mathfrak{p}_\Delta(\lambda)) = \mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$$

para todo $\lambda \in \mathcal{C}$. Como a ação de G é transitiva nos flags, temos que $\pi_\Theta^\Delta(g\mathfrak{p}_\Delta(\lambda)) = g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, para todo $g \in G$. Visto que $P_\Delta(\lambda) \subset P_\Theta(\lambda)$, temos que a fibração canônica $\widetilde{\pi}_\Theta^\Delta : G/P_\Delta(\lambda) \to G/P_\Theta(\lambda)$ é equivariante e diferenciável. Tomando os difeomorfismos $\phi_\Delta : G/P_\Delta(\lambda) \to \mathbb{F}_\Delta$ e $\phi_\Theta : G/P_\Theta(\lambda) \to \mathbb{F}_\Theta$, temos que

$$\pi_\Theta^\Delta \circ \phi_\Delta = \phi_\Theta \circ \widetilde{\pi}_\Theta^\Delta.$$

A fibração natural do flag maximal sobre o flag de tipo Θ é denotada por π_Θ e a fibração canônica é denotada por $\widetilde{\pi}_\Theta$.

B.3 Pontos fixos de subgrupos a 1-parâmetro

Consideremos a decomposição de Iwasawa $G = KAN$. Dado $\Theta \subset \Sigma$, temos que $P_\Theta = K_\Theta AN$, onde $K_\Theta = K \cap P_\Theta$ é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em K. Assim, $G/P_\Theta \cong K/K_\Theta$, donde K/K_Θ é difeomorfo à $\mathbb{F}_\Theta$ e K age transitivamente sobre $\mathbb{F}_\Theta$.

Conforme [4], Seção 5.1, a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ pode ser mergulhada na componente $\mathfrak{s}$ da decomposição de Cartan. Com efeito, existe $H_\Theta \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$ tal que $\Theta = \Theta(H_\Theta) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H_\Theta) = 0\}$. Assim, K_Θ é o centralizador K_{H_Θ} de H_Θ em K, donde a órbita adjunta $Ad(K)H_\Theta$ se identifica com $\mathbb{F}_\Theta$. Reciprocamente, dado $H \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$, temos que $Ad(K)H$ se identifica com a variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta(H)}$.

Agora, dado $H \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$, o conjunto dos pontos fixos da ação adjunta do subgrupo a 1-parâmetro $\exp(tH)$ na variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ é dado pela união disjunta de subconjuntos conexos

$$\bigcup_{w \in W_H \backslash W / W_\Theta} K_H^0 w \mathfrak{p}_\Theta$$

onde K_H^0 é a componente da identidade do centralizador K_H de H em K (c.f. Lema 5.1 de [4]). Denotamos $\mathrm{fix}_\Theta(H, w) = K_H^0 w \mathfrak{p}_\Theta$, para cada $H \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$ e $w \in W$.

Em particular, se H é *regular*, isto é, se $H \in \mathfrak{a}^+$, então, $K_H^0 = M_0$, onde M_0 é a componente conexa da identidade do centralizador $M = Z_K(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$ em K. Assim, $\mathrm{fix}_\Theta(H, w) = w\mathfrak{p}_\Theta$, para todo $w \in W$. Neste caso, denotando $h = \exp H \in \lambda$, temos que $h^n x \to w\mathfrak{p}_\Theta$, $n \to +\infty$, para todo $x \in N^- w\mathfrak{p}_\Theta = N_\Theta^- w\mathfrak{p}_\Theta$, donde obtemos que a órbita $N^- w\mathfrak{p}_\Theta$ é a variedade estável do ponto fixo $w\mathfrak{p}_\Theta$ e a órbita $N^+ w\mathfrak{p}_\Theta$ é variedade instável do mesmo. Portanto, existe um único ponto fixo atrator $\mathfrak{p}_\Theta$ cuja variedade estável é a órbita aberta e densa $N^-\mathfrak{p}_\Theta$ e um único ponto fixo repulsor $w_0\mathfrak{p}_\Theta$ cuja variedade instável é a órbita aberta e densa $N^+w_0\mathfrak{p}_\Theta$.

Se H' é *split-regular*, ou seja, se $H' = Ad\,(g)\,(H)$, para algum $g \in G$ e $H \in \mathfrak{a}^+$, então, $\mathrm{fix}_\Theta\,(H', w) = g\mathrm{fix}_\Theta\,(H, w) = gw\mathfrak{p}_\Theta$ com variedade estável $gN^-w\mathfrak{p}_\Theta$ e variedade instável $gN^+w\mathfrak{p}_\Theta$. Vejamos este caso de forma mais geral com o seguinte resultado.

Lema B.8. *Dados $H \in \mathrm{fe}\,(\mathfrak{a}^+)$, $g \in G$ e $w \in W$, tem-se que* $\mathrm{fix}_\Theta\,(gH, w) = g\mathrm{fix}_\Theta\,(H, w)$.

Demonstração: Dado $x \in \mathrm{fix}_\Theta\,(H, w)$, temos que

$$\begin{aligned} Ad\,(\exp t\,(gH))\,Ad\,(g)\,x &= Ad\,(\exp\,(Ad\,(g)\,tH))\,Ad\,(g)\,x \\ &= Ad\left(g\exp\,(tH)\,g^{-1}\right)Ad\,(g)\,x \\ &= Ad\,(g)\,Ad\,(\exp\,(tH))\,x \\ &= Ad\,(g)\,x. \end{aligned}$$

Logo, $g\mathrm{fix}_\Theta\,(H, w) \subset \mathrm{fix}_\Theta\,(gH, w)$. Por outro lado, dado $y \in \mathrm{fix}_\Theta\,(gH, w)$, escrevemos $y = gg^{-1}y$. Então,

$$\begin{aligned} Ad\,(\exp\,(tH))\,Ad\left(g^{-1}\right)y &= Ad\left(g^{-1}\exp\,(Ad\,(g)\,(tH))\right)y \\ &= Ad\left(g^{-1}\right)Ad\,(\exp t\,(gH))\,y \\ &= Ad\left(g^{-1}\right)y. \end{aligned}$$

Logo, $g^{-1}y \in \mathrm{fix}_\Theta\,(H, w)$, donde concluímos que $\mathrm{fix}_\Theta\,(gH, w) \subset g\mathrm{fix}_\Theta\,(H, w)$. □

Dizemos também que um elemento $h \in G$ é split-regular se $h = \exp\,(Ad\,(g)\,(H)) = g\exp\,(H)\,g^{-1}$, para algum $g \in G$ e $H \in \mathfrak{a}^+$, e denotamos $\mathrm{fix}_\Theta\,(h, w) = \mathrm{fix}_\Theta\,(H, w) = gw\mathfrak{p}_\Theta$. Denotamos também $\mathrm{st}_\Theta\,(h) = gN^-\mathfrak{p}_\Theta$ e $\mathrm{un}_\Theta\,(h) = gN^+\mathfrak{p}_\Theta$.

Agora, dado $\Theta \subset \Sigma$, seja $H_\Theta \in \mathrm{fe}\,(\mathfrak{a}^+)$ tal que $\Theta = \Theta\,(H_\Theta) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha\,(H_\Theta) = 0\}$ é o anulador de H_Θ. Seja $\mathfrak{p}_\Theta^- = \mathfrak{n}^+\,(\Theta) \oplus \mathfrak{p}^-$ com

$$\mathfrak{n}^+\,(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{p}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-.$$

Então, $\theta\,(\mathfrak{p}_\Theta) = \mathfrak{p}_\Theta^-$. Conforme [4], página 24, o subgrupo de G que fixa simultaneamente $\mathfrak{p}_\Theta$ e $\mathfrak{p}_\Theta^-$, ou seja, o subgrupo de isotropia de G para $\left(\mathfrak{p}_\Theta, \mathfrak{p}_\Theta^-\right)$ é a intersecção dos normalizadores de $\mathfrak{p}_\Theta$ e $\mathfrak{p}_\Theta^-$, que coincide exatamente com o centralizador $Z_G\,(H_\Theta)$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Lema B.9. *Dado $\Theta \subset \Sigma$, seja $H_\Theta \in \mathrm{fe}\,(\mathfrak{a}^+)$ tal que $\Theta = \Theta\,(H_\Theta)$. Então,* $\mathrm{fix}_\Theta\,(H_\Theta, 1) = \{\mathfrak{p}_\Theta\}$ *e* $\mathrm{fix}_{\Theta^*}\,(H_\Theta, w_0) = \{w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}\}$*, onde $\Theta^* = -w_0\Theta$ é o dual de Θ.*

Demonstração: Visto que $\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1) = K^0_{H_{\Theta}}\mathfrak{p}_{\Theta}$ e $K_{H_{\Theta}} \subset Z_G(H_{\Theta}) = N_G(\mathfrak{p}_{\Theta}) \cap N_G(\mathfrak{p}^-_{\Theta},)$, temos imediatamente que $\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1) = \{\mathfrak{p}_{\Theta}\}$. No outro caso, temos que $w_0\mathfrak{p}^-_{\Theta} = w_0\theta(\mathfrak{p}_{\Theta}) = \mathfrak{p}_{\Theta^*}$ (c.f. [32], Lema 2.2), donde $\mathfrak{p}^-_{\Theta} = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}$. Assim, $\text{fix}_{\Theta^*}(H_{\Theta},w_0) = K^0_{H_{\Theta}}w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*} = \{w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}\}$. □

O próximo resultado é fundamental para os resultados do Capítulo 2 da tese. Conforme [9], dado $\Theta \subset \Sigma$ e $H \in Ad(G)H_{\Theta}$, o fato da fibração natural $\pi_{\Theta}: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\Theta}$ ser equivariante implica que $\pi_{\Theta}(K^0_H w\mathfrak{p}) = K^0_H w\mathfrak{p}_{\Theta}$, ou seja, $\pi_{\Theta}(\text{fix}(H,w)) = \text{fix}_{\Theta}(H,w)$, para todo $w \in W$. Escrevendo $H = gH_{\Theta}$, segue do último lema acima que

$$\pi_{\Theta}(\text{fix}(H,1)) = \{g\mathfrak{p}_{\Theta}\} \qquad \text{e} \qquad \pi_{\Theta^*}(\text{fix}(H,w_0)) = \{gw_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}\}.$$

Lema B.10. *Dado $\Theta \subset \Sigma$, seja $H_{\Theta} \in \text{fe}(\mathfrak{a}^+)$ tal que $\Theta = \Theta(H_{\Theta})$. Então,*

$$\text{fix}(H_{\Theta},1) = \pi^{-1}_{\Theta}(\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1)) \qquad e \qquad \text{fix}(H_{\Theta},w_0) = \pi^{-1}_{\Theta^*}(\text{fix}_{\Theta^*}(H_{\Theta},w_0)).$$

Demonstração: Pela observação no último parágrafo acima temos que $\text{fix}(H_{\Theta},1) \subset \pi^{-1}_{\Theta}(\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1))$ e $\text{fix}(H_{\Theta},w_0) \subset \pi^{-1}_{\Theta^*}(\text{fix}_{\Theta^*}(H_{\Theta},w_0))$. Por outro lado, dado $k\mathfrak{p} \in \pi^{-1}_{\Theta}(\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1))$, com $k \in K$, temos que $k\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{p}_{\Theta}$, donde $k \in K \cap P_{\Theta} = K_{\Theta}$. Logo, $Ad(k)H_{\Theta} = H_{\Theta}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} Ad(\exp tH_{\Theta})Ad(k)\mathfrak{p} &= Ad(k)Ad\left(\exp\left(Ad\left(k^{-1}\right)(tH_{\Theta})\right)\right)\mathfrak{p} \\ &= Ad(k)Ad(\exp tH_{\Theta})\mathfrak{p} = Ad(k)\mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Logo, $k\mathfrak{p}$ é ponto fixo de $\exp tH_{\Theta}$, donde $k\mathfrak{p} \in \text{fix}(H_{\Theta},w)$ para algum $w \in W$. Isto significa que $\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},w) = \text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1)$, ou seja, que w e 1 representam a mesma classe em $W_{H_{\Theta}}\backslash W$. Portanto, $\text{fix}(H_{\Theta},w) = \text{fix}(H,1)$, e visto que K age transitivamente em $\mathbb{F}$, concluímos que $\pi^{-1}_{\Theta}(\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1)) \subset \text{fix}(H_{\Theta},1)$. Portanto, $\text{fix}(H_{\Theta},1) = \pi^{-1}_{\Theta}(\text{fix}_{\Theta}(H_{\Theta},1))$. Agora, seja $H_{\Theta^*} \in \text{fe}(\mathfrak{a}^+)$ tal que $\Theta^* = \Theta(H_{\Theta^*})$. Como $\Theta^* = -w_0\Theta$, é fácil ver que $\Theta(H_{\Theta}) = \Theta(w_0H_{\Theta^*})$, donde $K_{H_{\Theta}} = K_{w_0H_{\Theta^*}}$. Assim, dado $k\mathfrak{p} \in \pi^{-1}_{\Theta^*}(\text{fix}_{\Theta^*}(H_{\Theta},w_0))$, com $k \in K$, temos que $k\mathfrak{p}_{\Theta^*} = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}$, ou melhor, $kw_0w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*} = w_0\mathfrak{p}_{\Theta^*}$. Lembrando que $w_0 \sim k_0M$, para algum $k_0 \in M^*$, temos que

$$kk_0 \in K \cap P_{\Theta^*}\left(k_0\lambda k_0^{-1}\right) = k_0K_{H_{\Theta^*}} = K_{w_0H_{\Theta^*}} = K_{H_{\Theta}}.$$

Logo, $k\mathfrak{p} = kw_0w_0\mathfrak{p} \in K_{H_{\Theta}}w_0\mathfrak{p}$, donde $k\mathfrak{p} \in \text{fix}(H_{\Theta},w_0)$. Portanto, $\pi^{-1}_{\Theta^*}(\text{fix}_{\Theta^*}(H_{\Theta},w_0)) \subset \text{fix}(H_{\Theta},w_0)$, donde concluímos que $\text{fix}(H_{\Theta},w_0) = \pi^{-1}_{\Theta^*}(\text{fix}_{\Theta^*}(H_{\Theta},w_0))$. □

Enfim, pelos lemas e observações acima e pela equivariança da fibração natural π_{Θ} segue o seguinte resultado.

Corolário B.11. *Seja $H \in Ad(G)H_{\Theta}$, com $H_{\Theta} \in \text{fe}(\mathfrak{a}^+)$ tal que $\Theta = \Theta(H_{\Theta})$. Então,*

$$\text{fix}(H,1) = \pi^{-1}_{\Theta}(\text{fix}_{\Theta}(H,1)) \qquad e \qquad \text{fix}(H,w_0) = \pi^{-1}_{\Theta^*}(\text{fix}_{\Theta^*}(H,w_0)).$$

B.4 Conjuntos controláveis

Apresentamos agora os resultados principais sobre conjuntos controláveis para ações de semigrupos em variedades flag.

Seja $S \subset G$ um subsemigrupo aberto.

O conjunto das *câmaras de Weyl* em G é dado por

$$\mathcal{C} = \left\{ \exp\left(\mathfrak{a}^{+}\right) : \left(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{+}\right) \text{ terno admissível} \right\}.$$

De acordo com a Seção 3.3 de [22], os conjuntos controláveis efetivos de S nos flags de $\mathfrak{g}$ são caracterizados a partir do grupo de Weyl canônico W de $\mathfrak{g}$, e seus respectivos conjuntos de transitividade são descritos a partir de elementos de S que pertencem a alguma câmara de Weyl de G.

Tal caracterização é obtida primeiramente no flag maximal $\mathbb{F}$ e depois é realizada nos flags parciais $\mathbb{F}_{\Theta}$ via fibrações naturais.

Definição B.12. *Para cada* $w \in W$ *e* $\lambda \in \mathcal{C}$*, define-se o* ponto fixo de tipo w *em* $\mathbb{F}$ *determinado por* λ *como*

$$\mathfrak{p}_w(\lambda) = w(\lambda)\,\mathfrak{p}(\lambda).$$

Esta definição se justifica pelo fato de que, para todo $h \in \lambda$, o conjunto dos pontos fixos da ação de h em $\mathbb{F}$ é dado por

$$\{w(\lambda)\,\mathfrak{p}(\lambda) : w \in W\}$$

como vimos na seção anterior.

Dado $\lambda \in \mathcal{C}$, temos que

$$\mathfrak{p}_w\left(g\lambda g^{-1}\right) = g\mathfrak{p}_w(\lambda) \quad \text{e} \quad \mathfrak{p}_{w'}\left(w(\lambda)\,\lambda w(\lambda)^{-1}\right) = \mathfrak{p}_{ww'}(\lambda)$$

para todos $g \in G$ e $w, w' \in W$.

Denotando

$$\mathcal{C}(S) = \{\lambda \in \mathcal{C} : \lambda \cap S \neq \emptyset\}$$

temos que $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$ é um ponto fixo de tipo w determinado por $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ se, e somente se, $\mathfrak{p} \in \operatorname{int}(S\mathfrak{p})$ (Corolário 3.20 de [22]). Isto significa que os pontos fixos determinados por $\mathcal{C}(S)$ determinam todos os conjuntos de transitividade de conjuntos controláveis efetivos de S em $\mathbb{F}$. Mais ainda, se $\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}(\mu)$, com $\lambda, \mu \in \mathcal{C}(S)$, então, $\mathfrak{p}_w(\lambda)$ e $\mathfrak{p}_w(\mu)$ pertencem ao mesmo conjunto de transitividade, para todo $w \in W$.

O *conjunto dos atratores* de S em $\mathbb{F}$ é definido por

$$\operatorname{atr}(S) = \{\mathfrak{p}(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}(S)\}.$$

Para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{atr}(S)$, denotamos por $\mathbb{A}(\mathfrak{p}, w)$ o conjunto controlável efetivo cujo conjunto de transitividade contém $\{\mathfrak{p}_w(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}(S) \text{ e } \mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}\}$. O resultado fundamental do Capítulo 3 de [22] afirma que o conjunto controlável $\mathbb{A}(\mathfrak{p}, w)$ não depende de $\mathfrak{p} \in \operatorname{atr}(S)$ e que seu conjunto de transitividade coincide com o *conjunto dos pontos fixos de tipo* w de S dado por

$$\mathbb{A}(w)_0 = \operatorname{fix}_w(S) = \{\mathfrak{p}_w(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}(S)\}.$$

Teorema B.13. *Para todo $w \in W$, existe um conjunto controlável efetivo $\mathbb{A}(w)$ tal que*

$$\mathbb{A}(w)_0 = \operatorname{fix}_w(S)$$

e estes são todos os conjuntos controláveis efetivos de S em $\mathbb{F}$. Além disso, $\mathbb{A}(1)$ é o único conjunto controlável efetivo S-invariante e

$$\mathbb{A}(1)_0 = \operatorname{atr}(S).$$

Demonstração: Proposição 3.23 e Teorema 3.28 de [22]. □

Agora, fixando $\lambda \in \mathcal{C}(S)$, seja $\Theta = \Theta(\lambda)$. Pelo Teorema **??**, existe um isomorfismo entre a fibração natural $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ e o fibrado associado ao fibrado principal localmente trivial $Q_\Theta \to \mathbb{F}_\Theta$ com fibra típica $\mathbb{F}(\Theta)$ e grupo de estrutura $Int(\mathfrak{g}(\Theta))$, onde Q_Θ é o espaço quociente de G por um subgrupo fechado e normal no subgrupo P_Θ parabólico de tipo Θ. Portanto, a fibra típica de π_Θ é homeomorfa ao subfibrado $\mathbb{F}(\Theta)$. Além disso, $G \subset End_l(Q_\Theta)$, donde S é um semigrupo local de endomorfismos de Q_Θ.

Pelo Lema **??**, os conjuntos controláveis efetivos de S em $\mathbb{F}$ se projetam sobre conjuntos controláveis efetivos de S em $\mathbb{F}_\Theta$. Assim, para todo $w \in W$, existe um único conjunto controlável efetivo $\mathbb{A}_\Theta(w)$ na base $\mathbb{F}_\Theta$ tal que $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w)) \subset \mathbb{A}_\Theta(w)$ e que $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w)_0) \subset \mathbb{A}_\Theta(w)_0$. Mais ainda, visto que $\mathbb{F}(\Theta)$ é compacto, que G age aberta e transitivamente em $\mathbb{F}(\Theta)$ e que S é aberto em G, segue da Proposição **??** e do Teorema B.13 que estes são os únicos conjuntos controláveis de S em $\mathbb{F}_\Theta$.

Conforme a seção B.1, o subgrupo parabólico de W de tipo Θ é o subgrupo W_Θ gerado pelo conjunto das reflexões $\{r_\alpha : \alpha \in \Theta\}$. Assim, temos o seguinte resultado apresentado pelo Teorema 3.29 de [22].

Teorema B.14. *Sejam $w, w' \in W$. Então, $\mathbb{A}_\Theta(w) = \mathbb{A}_\Theta(w')$ se, e somente se, $\mathbb{A}_\Theta(w') = \mathbb{A}_\Theta(wz)$, para algum $z \in W_\Theta$. Além disso, $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w)_0) = \mathbb{A}_\Theta(w)_0$.*

Conforme Proposição 5.5 de [4], temos que

$$\mathbb{A}_\Theta(w)_0 = \left\{\operatorname{fix}_\Theta(h, w) : h \in Ad(G)\left(\mathfrak{a}^+\right) \cap S\right\}.$$

Se $\Theta(S)$ é o tipo parabólico de S, então, $\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1) \subset \mathrm{st}_{\Theta(S)}(h)$ para qualquer $h \in S$ split-regular (c.f. Proposição 5.4 de [4]).

Agora, denotando

$$W(S) = \{w \in W : \mathbb{A}(w) = \mathbb{A}(1)\}$$

temos que $W(S)$ é um subgrupo parabólico de W (ver Seção 3.3 de [22]), e para $w_1, w_2 \in W$, $\mathbb{A}(w_1) = \mathbb{A}(w_2)$ se, e somente se, $w_1 w_2^{-1} \in W(S)$ (ver [31]). Logo, os conjuntos controláveis efetivos de S no flag maximal $\mathbb{F}$ estão em bijeção com as classes no quociente $W(S) \setminus W$. Para $\Theta \subset \Sigma$, temos que $\mathbb{A}_\Theta(w_1) = \mathbb{A}_\Theta(w_2)$ se, e somente se, $W(S)\, w_1 W_\Theta = W(S)\, w_2 W_\Theta$ (ver [31]). Logo, os conjuntos controláveis efetivos de S no flag $\mathbb{F}_\Theta$ estão em bijeção com as classes no quociente duplo $W(S) \setminus W / W_\Theta$.

Como provado em [34], no caso de $\Theta(S)$, o tipo parabólico de S, temos que $\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1) \subset \mathrm{st}_{\Theta(S)}(h)$, para qualquer $h \in S$ split-regular. Logo, $\mathbb{A}_{\Theta(S)}(1)$ está contido em uma célula aberta de Bruhat. Mais ainda, conforme o Lema 3.2 de [26], podemos tomar h na câmara de Weyl positiva, o que se constitui em um fato relevante para os estudos.

B.4.1 Domínio de atração e a ordem de Bruhat-Chevalley

Dado um conjunto controlável efetivo $\mathbb{A}(w)$ de S em $\mathbb{F}$, o *domínio de atração* de $\mathbb{A}(w)$ é definido pelo conjunto

$$\mathcal{A}(\mathbb{A}(w)) = \{\mathfrak{p}(\lambda) \in \mathbb{F} : S\mathfrak{p}(\lambda) \cap \mathbb{A}(w)_0 \neq \emptyset\}$$

e o domínio de repulsão de $\mathbb{A}(w)$ é definido pelo conjunto

$$\mathcal{A}^*(\mathbb{A}(w)) = \left\{\mathfrak{p}(\lambda) \in \mathbb{F} : S^{-1}\mathfrak{p}(\lambda) \cap \mathbb{A}(w)_0 \neq \emptyset\right\}.$$

Uma relação de ordem parcial entre os conjuntos controláveis efetivos de S em $\mathbb{F}$ é definida da seguinte maneira: dados $w, w' \in W$, então $\mathbb{A}(w) \leqslant \mathbb{A}(w')$ se, e somente se, $\mathbb{A}(w)_0 \cap \mathcal{A}(\mathbb{A}(w')) \neq \emptyset$.

Agora, seja $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ o sistema simples de raízes canônico de $\mathfrak{g}$. Então, o grupo de Weyl W é gerado pelo conjunto das reflexões $\{r_i = r_{\alpha_i} : i = 1, ..., l\}$. O *comprimento* $c(w)$ de um elemento $w \in W$ é o menor número de reflexões utilizados para escrever w. Se $w = r_{i_1} ... r_{i_n}$ é uma decomposição de w onde $n = c(w)$, então, esta decomposição é dita minimal. Dados $w, w' \in W$, estabelecemos que $w' \leqslant w$ se, e somente se, $w = s_1 ... s_n$ ($s_j = r_{i_j}$) é uma decomposição minimal de w e existem subíndices $1 \leq j_1 \leq ... \leq j_m \leq n$ tais que $w' = s_{j_1} ... s_{j_m}$ é uma decomposição minimal de w'. Esta relação entre os elementos de W define uma relação de ordem parcial denominada *ordem de Bruhat-Chevalley*.

Existe um único elemento maximal em W, o qual é denominado de *involução principal* de W e é denotado por w_0.

Considerando a fibração natural $\pi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha_i\}}$, definimos

$$\gamma_i(\mathbb{B}) = \pi_i^{-1}(\pi_i(\mathbb{B}))$$

para todo subconjunto $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$. Por ambos Proposição 3.1 e Teorema 6.1 de [31], o domínio de atração de $\mathbb{A}(w)$ é dado por

$$\mathcal{A}(\mathbb{A}(w)) = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}(\mathbb{A}(w_0)_0)$$

onde $w_0 w = r_{i_n} ... r_{i_1}$ é uma decomposição minimal, e o domínio de repulsão de $\mathbb{A}(w)$ é dado por

$$\mathcal{A}^*(\mathbb{A}(w)) = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}(\mathbb{A}(1)_0)$$

onde $w = r_{j_m} ... r_{j_1}$ é uma decomposição minimal.

Dado $\Theta \subset \Sigma$, a ordem de Bruhat-Chevalley passa ao quociente $W_\Theta \setminus W$ da seguinte maneira. Dado $w \in W$, então, a classe $W_\Theta w$ contém um elemento de comprimento minimal $\mu(w)$. Assim, $W_\Theta w \leqslant W_\Theta w'$ se, e somente se, $\mu(w) \leq \mu(w')$.

Então, a ordem entre os conjuntos controláveis efetivos de S em $\mathbb{F}$ é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley no quociente $W(S) \setminus W$. Ou seja, $\mathbb{A}(w) \leqslant \mathbb{A}(w')$ se, e somente se, $W(S)\, w \geqslant W(S)\, w'$. Em particular, $\mathbb{A}(1)$ é o único maximal e $\mathbb{A}(w_0)$ é o único minimal. Dado $\Theta \subset \Sigma$, temos por conseqüência que $\mathbb{A}_\Theta(w) = \mathbb{A}_\Theta(w')$ se, e somente se, $W(S)\, w W_\Theta = W(S)\, w' W_\Theta$. Além disso, $\mathbb{A}_\Theta(1)$ é o único maximal e $\mathbb{A}_\Theta(w_0)$ é o único minimal.

Contudo, os resultados acima podem ser aplicados ao caso de grupos de Lie redutíveis cuja componente semi-simples é conexa. Com efeito, se G é um grupo de Lie redutível, então, $G = Z(G)\,\widehat{G}$, onde $Z(G)$ é o centro de G e $\widehat{G}$ é um grupo de Lie real semi-simples. Como $Z(G)$ é o núcleo da aplicação adjunta $Ad : G \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$, temos que $\widehat{G}$ é isomorfo ao grupo adjunto $Ad(G)$. Assim, a ação adjunta de G nos flags da componente semi-simples da álgebra de Lie de G é equivalente à ação de $\widehat{G}$ nestes flags.

Apêndice C

Endomorfismos de fibrados topológicos

Neste apêndice, fazemos um breve apanhado do conteúdo da Seção 4.1 de [22], onde é apresentada uma extensão do conceito de automorfismos de um fibrado.

Para todo espaço topológico Y, denotamos por $C_l(Y)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas entre subconjuntos abertos de Y.

Consideremos um fibrado principal localmente trivial $\pi : Q \to X$ com grupo estrutural G. Dado um espaço topológico F sobre o qual G age à esquerda, seja $\pi_E : E \to X$ o fibrado associado a π, onde $E = Q \times_G F$. Para cada par $(q, u) \in Q \times F$, denotamos por $q \cdot u$ a classe de (q, u) em E. Se $A \subset F$ é um subconjunto não vazio, denotamos por $q \cdot A$ o conjunto de todas as classes $q \cdot u$ com $u \in A$. Para $x \in X$, denotamos a fibra $\pi_E^{-1}(x)$ por E_x.

Definição C.1. *Um **endomorfismo local** de Q é uma aplicação contínua $\phi : dom(\phi) \to Q$ tal que*

1. *$dom(\phi) = \pi^{-1}(U)$, onde $U \subset X$ é um subconjunto aberto, e*

2. *$\phi(qg) = \phi(q)\, g$, para todos $q \in dom(\phi)$ e $g \in G$.*

Denotemos por $End_l(Q)$ o conjunto dos endomorfismos locais de Q. Então, $End_l(Q)$ é um semigrupo local, denominado *semigrupo dos endomorfimos locais de Q*.

Para cada $\phi \in End_l(Q)$, temos a aplicação contínua $\phi_X : \pi(dom(\phi)) \to X$ dada por $\phi_X(\pi(q)) = \pi(\phi(q))$, denominada *aplicação induzida por ϕ* em X. Também temos a aplicação contínua $\phi_E : \pi_E^{-1}(\pi(dom(\phi))) \to E$ dada por $\phi_E(q \cdot u) = \phi(q) \cdot u$, denominada *aplicação induzida por ϕ em E*. O conjunto $End_l(X)$ de todas as aplicações induzidas por $End_l(Q)$ em X é denominado de *semigrupo dos endomorfismos locais de X*, e o conjunto $End_l(E)$ de todas as aplicações induzidas por $End_l(Q)$ em E é denominado de *semigrupo dos endomorfismos locais de E*.

Um *semigrupo local de endomorfismos de* Q é um subconjunto $\mathcal{S} \subset End_l\left(Q\right)$ fechado para as composições. O seu semigrupo local induzido em X é o conjunto

$$\mathcal{S}_X = \left\{\Phi \in C_l\left(X\right) : \text{existe } \phi \in \mathcal{S} \text{ com } \Phi = \phi_X\right\}$$

e o seu semigrupo local induzido em E é o conjunto

$$\mathcal{S}_E = \left\{\Phi \in C_l\left(E\right) : \text{existe } \phi \in \mathcal{S} \text{ com } \Phi = \phi_E\right\}.$$

Os conjuntos $\mathcal{R} = \{q \in Q : q \in \mathcal{S}q\}$ e $\mathcal{R}_{ap} = \{q \in Q : q \in \operatorname{fe}\left(\mathcal{S}q\right)\}$ são denominados respectivamente de *conjunto de recorrência total* e de *conjunto de recorrência aproximada* para a ação de $\mathcal{S}$ sobre Q. Dado $q \in \mathcal{R}$, então, T_q denota o conjunto de transitividade total ao qual q pertence. Dado $q \in \mathcal{R}_{ap}$, então, D_q denota o conjunto de transitividade aproximada ao qual q pertence (ver Apêndice A). Os conjuntos controláveis efetivos são classes de equivalência em $\mathcal{R}_{ap}$, e seus respectivos conjuntos de transitividade são classes de equivalência em $\mathcal{R}$. O conjunto de recorrência total (aproximada) para a ação de $\mathcal{S}_Y$ é denotado por $\mathcal{R}\left(Y\right)$ ($\mathcal{R}_{ap}\left(Y\right)$), onde $Y = X$ ou E.

Lema C.2. *1. Se $q \cdot u \in \mathcal{R}\left(E\right)$, então, $\pi_E\left(q \cdot u\right) \in \mathcal{R}\left(X\right)$ e $\pi_E\left(T_{q\cdot u}\right) \subset T_{\pi_E(q\cdot u)}$;*

2. Se $q \cdot u \in \mathcal{R}\left(E\right)$ e $T_{q\cdot u} = \left(D_{q\cdot u}\right)_0$, então, $\pi_E\left(\left(D_{q\cdot u}\right)_0\right) \subset \left(D_{\pi_E(q\cdot u)}\right)_0$;

3. Se $q \cdot u \in \mathcal{R}_{ap}\left(E\right)$, então, $\pi_E\left(q \cdot u\right) \in \mathcal{R}_{ap}\left(X\right)$ e $\pi_E\left(D_{q\cdot u}\right) \subset D_{\pi_E(q\cdot u)}$;

Demonstração: Lema 4.2 e Corolários 4.4 e 4.6 de [22]. □

Este lema diz que um conjunto controlável efetivo D de $\mathcal{S}_E$ em E se projeta sobre um conjunto controlável efetivo C de $\mathcal{S}_X$ em X, de forma que seu conjunto de transitividade D_0 se projeta sobre o conjunto de transitividade C_0 de C. Uma recíproca parcial desta afirmação é dada pela seguinte proposição.

Proposição C.3. *Seja $E = Q \times_G F$ tal que a fibra F é compacta e G age aberta e transitivamente em F. Assuma que $\mathcal{S}$ é acessível sobre um conjunto controlável efetivo C de X. Então, existe um conjunto controlável efetivo $D \subset E$ tal que $\pi\left(D\right) \subset C$ e $\pi\left(D_0\right) \subset C_0$.*

O semigrupo $\mathcal{S}$ também induz semigrupos no grupo estrutural do fibrado. Dado $q \in Q$, definimos o subsemigrupo

$$\mathcal{S}_q = \left\{g \in G : qg \in \mathcal{S}q\right\}.$$

Se $\sigma : Q \times G \to Q$ define a ação de G sobre Q, temos que $\sigma_q = \sigma\mid_{\{q\}\times G}$ é um homeomorfismo de G sobre a órbita qG. Então, $\mathcal{S}_q = \sigma_q^{-1}\left(\mathcal{S}q \cap qG\right)$. Além disso, temos que

$\mathcal{S}_q^{-1} = \sigma_q^{-1}(\mathcal{S}^* q \cap qG)$ também é um subsemigrupo de G, onde $\mathcal{S}^* q$ é a órbita regressiva de q. Denotando $U_q = \sigma_q^{-1}(\operatorname{int}(\mathcal{S}^* q) \cap qG)$, temos que U_q é aberto e $U_q \subset \operatorname{int}\left(\mathcal{S}_q^{-1}\right)$.

Seja C um conjunto controlável efetivo para a ação de $\mathcal{S}_X$ em X. Então, $\mathcal{S}$ é dito *(regressivamente) acessível sobre* C se existe $q \in \pi^{-1}(C_0)$ tal que $\operatorname{int}(\mathcal{S}^* q) \cap \pi^{-1}(C) \neq \emptyset$. Se $\mathcal{S}$ é acessível sobre C, então, $U_q \neq \emptyset$, para todo $q \in \pi^{-1}(C_0)$ (ver Lema 4.18 de [22]). Em particular, $\operatorname{int}(\mathcal{S}_q) \neq \emptyset$ para todo $q \in \pi^{-1}(C_0)$.

Sob as condições de ação aberta e transitiva na fibra F e de acessibilidade do semigrupo local $\mathcal{S}$ em X, existe uma ligação entre os conjuntos de transitividade de conjuntos controláveis efetivos no espaço total E e na fibra F. Lembramos que G age abertamente em F se, para cada $u \in F$, a aplicação $g \in G \mapsto gu \in F$ é aberta.

Teorema C.4. *Sejam $E = Q \times_G F$ tal que G age aberta e transitivamente na fibra F e que $\mathcal{S}$ é acessível sobre um conjunto controlável efetivo C em X. Sejam $D \subset E$ um conjunto controlável efetivo tal que $\pi(D) \subset C$ e $q \in Q$ com $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$. Então, existe um conjunto controlável efetivo $A \subset F$ para a ação do semigrupo $\mathcal{S}_q$ tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot A_0.$$

Uma recíproca parcial deste último teorema é dada pelo seguinte resultado.

Proposição C.5. *Sejam $E = Q \times_G F$ tal que G age aberta e transitivamente na fibra F e que $\mathcal{S}$ é acessível sobre um conjunto controlável efetivo C em X. Sejam também $q \in Q$ sobre C e $A \subset F$ um conjunto controlável efetivo para $\mathcal{S}_q$. Se existem $v \in A$ e $a \in U_q$ tais que $a \cdot v = v$, então, existe um conjunto controlável efetivo $D \subset E$ de $\mathcal{S}_E$ tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot A_0.$$

O seguinte corolário é aplicado ao caso dos semigrupos de sombreamento de um semigrupo de transformação (ver Seção 2.1.1).

Corolário C.6. *Sejam $E = Q \times_G F$ tal que G age aberta e transitivamente na fibra F e $\mathcal{S}$ um semigrupo local tal que suas órbitas regressivas são conjuntos abertos. Sejam também, $C \subset X$ um conjunto controlável efetivo e $q \in \pi^{-1}(C_0)$. Para cada conjunto controlável efetivo $D \subset E$ de $\mathcal{S}_E$ com $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$, existe um conjunto controlável efetivo $A_q^D \subset F$ de S_q tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot \left(A_q^D\right)_0.$$

Além disso, a correspondência $D \mapsto A_q^D$ é uma bijeção entre os conjuntos controláveis efetivos de $\mathcal{S}_E$ tais que $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$ e os conjuntos controláveis efetivos de $\mathcal{S}_q$ em F.

No caso de conjuntos controláveis efetivos progressivamente invariantes em E, temos uma versão mais forte do resultado acima. Com efeito, os conjuntos controláveis efetivos $\mathcal{S}_E$-invariantes que se projetam sobre um conjunto controlável efetivo $\mathcal{S}_X$-invariante $C \subset X$ estão em bijeção com os conjuntos controláveis efetivos $\mathcal{S}_q$-invariantes em F, para qualquer $q \in \pi^{-1}(C_0)$.

Teorema C.7. *Assuma que $\mathcal{S}$ é acessível sobre um conjunto controlável efetivo C em X. Então, para cada conjunto controlável efetivo $\mathcal{S}_E$-invariante $D \subset E$ sobre C tem-se que $\pi(D_0) = C_0$ e para todo $q \in \pi^{-1}(C_0)$, existe um conjunto controlável efetivo $\mathcal{S}_q$-invariante $A_q^D \subset F$ tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot \left(A_q^D\right)_0 .$$

Além disso, fixando-se $q \in \pi^{-1}(C_0)$, a correspondência $D \mapsto A_q^D$ é uma bijeção entre os conjuntos controláveis efetivos $\mathcal{S}_E$-invariante sobre C e os conjuntos controláveis efetivos $\mathcal{S}_q$-invariante.

C.0.2 Fibrados flag

Apresentamos agora os principais resultados relacionados a endomorfismos de fibrados flag, onde centralizamos a caracterização dos conjuntos controláveis efetivos. O conceito de variedade flag está definido no Apêndice B e seu completo estudo pode ser obtido no conjunto de trabalhos de Braga Barros-San Martin [3], [4], Patrão [22] e San Martin [26]. Desta literatura também extraímos os resultados sobre conjuntos controláveis para ações de semigrupos numa variedade flag. Dentre estes resultados selecionamos alguns principais no Apêndice B.3.

A partir de agora, seja G um grupo de Lie redutível cuja componente semi-simples é conexa, e seja $\mathfrak{g}$ a componente semi-simples da álgebra de Lie de G.

Considerando um fibrado principal localmente trivial $\pi : Q \to X$, com grupo de estrutura G, denominamos de *fibrado flag* um fibrado associado à π cuja fibra típica é um flag de $\mathfrak{g}$. Seja $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é o sistema simples canônico de raízes de $\mathfrak{g}$. Então, o *fibrado flag de tipo* Θ associado à π é o fibrado $\pi_{\mathbb{E}_\Theta} : \mathbb{E}_\Theta \to X$, onde $\mathbb{E}_\Theta = Q \times_G \mathbb{F}_\Theta$. Quando a fibra típica é o flag maximal de $\mathfrak{g}$, então, denotamos $\mathbb{E} = Q \times_G \mathbb{F}$, e $\pi_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to X$ é denominado de *fibrado flag maximal* associado à π.

Seja $\mathcal{S} \subset End_l(Q)$ um semigrupo local transitivo em X, cujas órbitas progressivas e regressivas em Q são conjuntos abertos.

A caracterização dos conjuntos controláveis efetivos nos flags é o recurso fundamental para o estudo de endomorfismos de fibrados flag. As hipóteses de transitividade na base e de acessibilidade do semigrupo local de endomorfismos permite a descrição completa dos conjuntos controláveis efetivos no espaço total de um fibrado flag.

Para todo $q \in Q$, o semigrupo $\mathcal{S}_q$ induzido por $\mathcal{S}$ em G é aberto, pois $\mathcal{S}$ é transitivo na base e as órbitas são abertas. Segue então do Teorema B.13 do Apêndice B.3 que os conjuntos controláveis efetivos do semigrupo $\mathcal{S}_q$ são descritos pelo grupo de Weyl canônico W de $\mathfrak{g}$. Para cada $w \in W$, denotemos por $\mathbb{A}^q(w)$ o conjunto controlável efetivo de $\mathcal{S}_q$ em $\mathbb{F}$ tal que $\mathbb{A}^q(w)_0 = \mathrm{fix}_w(S_q)$. Agora, para cada $\Theta \subset \Sigma$, seja $\mathbb{A}^q_\Theta(w)$ o conjunto controlável efetivo de $\mathcal{S}_q$ em $\mathbb{F}_\Theta$ tal que $\pi_\Theta(\mathbb{A}^q(w)) \subset \mathbb{A}^q_\Theta(w)$ e $\pi_\Theta(\mathbb{A}^q(w)_0) = \mathbb{A}^q_\Theta(w)_0$, onde $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ é a fibração natural entre os flags.

De acordo com o Corolário C.6, para cada $w \in W$, existe um conjunto controlável efetivo $\mathbb{D}^q_\Theta(w)$ de $\mathcal{S}_{\mathbb{E}_\Theta}$ tal que $\mathbb{D}^q_\Theta(w)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} \neq \emptyset$ e

$$\mathbb{D}^q_\Theta(w)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} = q \cdot \mathbb{A}^q_\Theta(w)_0$$

e estes são todos os conjuntos controláveis efetivos de $\mathcal{S}_{\mathbb{E}_\Theta}$ cujos conjuntos de transitividade interseptam a fibra $(\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)}$.

Na Seção 4.2 de [22] é demonstrado que o conjunto de transitividade de um conjunto controlável efetivo $\mathbb{D}$ de $\mathcal{S}_{\mathbb{E}_\Theta}$ é projetado sobrejetivamente na base, ou seja, $\pi_{\mathbb{E}_\Theta}(\mathbb{D}_0) = X$. Isto significa que $\mathbb{D}_0$ intersepta a fibra $(\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)}$. Com isto, temos que $\{\mathbb{D}^q_\Theta(w) : w \in W\}$ é a coleção de todos os conjuntos controláveis efetivos de $\mathcal{S}_{\mathbb{E}_\Theta}$. Além disso, é demonstrado também que o conjunto controlável $\mathbb{D}^q_\Theta(w)$ não depende do ponto $q \in Q$.

As demonstrações de tais resultados envolvem as fibrações entre os flags. Para cada $\Theta \subset \Sigma$, a fibração $\widetilde{\pi}_\Theta : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_\Theta$ é definida por

$$\widetilde{\pi}_\Theta(q \cdot \mathfrak{p}) = q \cdot \pi_\Theta(\mathfrak{p})$$

para todo $q \cdot \mathfrak{p} \in \mathbb{E}$. Dado um conjunto controlável $\mathbb{D}(w)$ de $\mathcal{S}_{\mathbb{E}}$, temos

$$\widetilde{\pi}_\Theta(\mathbb{D}(w)_0) = \mathbb{D}_\Theta(w)_0 .$$

Apêndice D

A compactificação de Ellis

Dentre os diversos processos de compactificação de espaços topológicos, o de Stone-Čech é de especial interesse devido a propriedade de extensão de aplicações contínuas. Em certo sentido, a compactifição de Stone-Čech é a maior compactificação de um espaço de Tychonoff. Existem pelo menos duas maneiras de se descrever tal processo, as quais devem ser bem compreendidas para a obtenção de propriedades cruciais. Quando abordamos o caso de espaços com topologia T_4 (normal e T_1), a compactificação de S-C também é conhecida como a extenção de Wallman. Este caso é de especial interesse, mormente na realização via ultrafiltros.

D.1 Descrição clássica

Uma maneira de proceder com a compactificação de um espaço topológico é mergulhando-o em um cubo. Tal processo é sempre possível no caso de um espaço de Tychonoff, isto é, completamente regular e T_1.

Seja X um espaço de Tychonoff e seja $C(X,[0,1])$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em $[0,1] \subset \mathbb{R}$. O fato de X ser um espaço de Tychonoff implica que a coleção $C(X,[0,1])$ separa ponto de conjunto fechado em X. Disto segue que a aplicação $e : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ dada por

$$\begin{array}{rccc} e(x): & C(X,[0,1]) & \longrightarrow & [0,1] \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

é um mergulho, onde $[0,1]^{C(X,[0,1])}$ é considerado com a topologia da convergência pontual (topologia produto).

A compactificação de Stone-Čech de X é o fecho da imagem $e(X)$ em $[0,1]^{C(X,[0,1])}$, e é denotada por βX. Como $[0,1]^{C(X,[0,1])}$ é compacto Hausdorff, segue que βX também é compacto Hausdorff. Contudo, X é um conjunto mergulhado e denso em βX.

A propriedade central de βX é a extensão de aplicações contínuas. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema D.1. *Se K é um espaço compacto Hausdorff e $\varphi : X \to K$ é uma aplicação contínua, então, existe uma aplicação contínua $\psi : \beta X \to K$ tal que $\psi \circ e = \varphi$.*

Na verdade, esta propriedade de extensão juntamente com a Hausdorff-compacidade caracterizam completamente βX no seguinte sentido: se B é um espaço compacto Hausdorff contendo um mergulho denso de X e satisfazendo a propriedade de extensão de aplicações contínuas, então, B é homeomorfo à βX. Esta caracterização é chamada de *equivalência topológica*. Estes argumentos são discutidos nos tratados mais completos sobre topologia geral. Veja por exemplo a seção 19 de [38].

D.2 Descrição via ultrafiltros

Uma maneira abstrata de compactificar um espaço topológico tem base na teoria de filtros. Em muitos casos, esse processo se torna mais conveniente, pois possibilita um certo controle sobre a topologia da compactificação.

Seja $\mathcal{P}$ uma classe de subconjuntos de um espaço topológico X tal que, se P_1 e P_2 pertencem à $\mathcal{P}$, então, $P_1 \cap P_2$ e $P_1 \cup P_2$ pertencem à $\mathcal{P}$.

Um *filtro* sobre $\mathcal{P}$ é uma coleção não vazia f de elementos de $\mathcal{P}$ com as propriedades:

1. $\emptyset \notin f$;
2. Se $P_1, P_2 \in f$, então, $P_1 \cap P_2 \in f$;.
3. Se $P_1 \in f$ e $P_1 \subset P_2$, com $P_2 \in \mathcal{P}$, então, $P_2 \in f$.

Uma *base de filtro* sobre P é uma coleção não vazia f de elementos de $\mathcal{P}$ com as propriedades:

a $\emptyset \notin f$;

b Se $P_1, P_2 \in f$, então, existe $P_3 \in f$ tal que $P_3 \subset P_1 \cap P_2$.

Uma *subbase de filtro* sobre $\mathcal{P}$ é uma coleção não vazia f satisfazendo a propriedade da interseção finita.

Se f é uma subbase de filtro, então, a coleção de todos os subconjuntos de X que são interseções finitas de elementos de f é uma base de filtro. Se f é uma base de filtro, então, a coleção $\{P' \in \mathcal{P} : P \subset P' \text{ para algum } P \in f\}$ é um filtro.

Um *ultrafiltro* sobre $\mathcal{P}$ é um filtro maximal u sobre $\mathcal{P}$. Conseqüentemente, u também satisfaz as propriedades:

4 Se $P' \in \mathcal{P}$ e $P' \cap P \neq \emptyset$, para todo $P \in u$, então, $P' \in u$. Logo, se $P' \notin u$, então, existe $P \in u$ tal que $P \cap P' = \emptyset$;

5 Se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ e $P_1 \cup P_2 \in u$, então, ou $P_1 \in u$ ou $P_2 \in u$;

6 Se $u' \neq u$, onde u' é outro $\mathcal{P}-$ultrafiltro, então, existem $P' \in u$ e $P \in u$ tais que $P' \cap P = \emptyset$.

Com efeito, (4) segue do fato de que a coleção f de todas as interseções finitas de elementos de $u \cup \{P'\}$ é uma base de filtro, de forma que u está contido no filtro gerado por f. Para ver (5), suponha que $P_1 \notin u$. Então, por (4), existe $P \in u$ tal que $P_1 \cap P = \emptyset$. Daí, $P \cap P_2 = P \cap (P_1 \cup P_2) \in u$. Agora, dado qualquer $P' \in u$, $P' \cap P \cap P_2 \neq \emptyset$, donde $P' \cap P_2 \neq \emptyset$. Logo, por (4) temos que $P_2 \in u$. Evidentemente, (6) segue de (4).

Um $\mathcal{P}-$filtro *converge* para $x \in X$ se cada vizinhança de x contém um elemento de f.

As principais classes de subconjuntos de X satisfazendo as condições acima são:

1. $\mathcal{P}(X) =$ conjunto das partes de X;
2. $\mathcal{A}(X) =$ todos os subconjuntos abertos de X;
3. $\mathcal{F}(X) =$ todos os subconjuntos fechados de X;
4. $\mathcal{Z}(X) = \{f^{-1}(0) : f : X \to [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ contínua}\} =$todos os conjuntos zeros de X.

Observemos que os conjuntos zeros de X são subconjuntos fechados de X. A compactificação de Stone-Čech de X pode ser construída a partir dos ultrafiltros sobre $\mathcal{Z}(X)$. Em princípio, denotaremos por BX o conjunto de todos os $\mathcal{Z}(X)$-ultrafiltros.

Lembremos que se $f, h : X \to [0,1]$ são contínuas, então

$$f^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) = (f+h)^{-1}(0) \quad \text{e} \quad f^{-1}(0) \cup h^{-1}(0) = (fh)^{-1}(0).$$

Dado $Z \in \mathcal{Z}(X)$ não vazio, definimos o conjunto

$$\mathrm{h_f}(Z) = \{u \in BX : Z \in u\} \subset BX.$$

É imediato verificar que

$$\mathrm{h_f}(Z_1) \cap \mathrm{h_f}(Z_2) = \mathrm{h_f}(Z_1 \cap Z_2) \quad \text{e} \quad \mathrm{h_f}(Z_1) \cup \mathrm{h_f}(Z_2) = \mathrm{h_f}(Z_1 \cup Z_2)$$

para quaisquer $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$. Consequentemente,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{h_f}(Z_i) = \mathrm{h_f}\left(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i\right) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{h_f}(Z_i) = \mathrm{h_f}\left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i\right)$$

com $Z_i \in \mathcal{Z}(X)$, $i = 1, ..., n$. Além disso,

$$BX = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}(X)} \mathrm{h_f}(Z) \quad \text{e} \quad \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}(X)} \mathrm{h_f}(Z) = \emptyset$$

evidentemente.

Logo, a família de todos os conjuntos $\mathrm{h_f}(Z)$ $(Z \in \mathcal{Z}(X))$ pode ser tomada como uma base para conjuntos fechados de uma topologia em BX. Contudo, adotamos em BX a topologia $\mathcal{T}$ gerada por esta base.

Agora, se A é um conjunto co-zero de X, isto é, se A é o complementar em X de algum conjunto zero, então, definimos

$$\mathrm{h_a}(A) = \{u \in BX : \text{existe } Z \in u \text{ com } Z \subset A\} \subset BX.$$

Verifica-se sem dificuldades que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{h_a}(Z_i) = \mathrm{h_a}\left(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i\right) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{h_a}(Z_i) = \mathrm{h_a}\left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i\right)$$

com $Z_i \in \mathcal{Z}(X)$, $i = 1, ..., n$. Daí, para todo $Z \in \mathcal{Z}(X)$, temos que

$$\mathrm{h_f}(Z) = BX \setminus \mathrm{h_a}(X \setminus Z).$$

Portanto, a família de todos os conjuntos $\mathrm{h_a}(X \setminus Z)$ $(Z \in \mathcal{Z}(X))$ forma uma base de abertos para a topologia de BX adotada anteriormente. Mais adiante vamos ver que esta topologia é compacta Hausdorff.

O próximo passo é determinar um homeomorfismo entre X e um subespaço de BX. Para isso, a cada $x \in X$ associamos a coleção

$$u_x = \{Z \in \mathcal{Z}(X) : x \in Z\}.$$

Afirmamos que u_x é um ultrafiltro sobre $\mathcal{Z}(X)$. Com efeito, visto que $X \in \mathcal{Z}(X)$ (tome $f = 0$), temos que $X \in u_x$. Logo, u_x é uma coleção não vazia e, evidentemente, $\emptyset \notin u_x$. Além disso, se $Z_1, Z_2 \in u_x$, então, $x \in Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$, logo, $Z_1 \cap Z_2 \in u_x$. Mais ainda, se $Z \in u_x$ e $Z' \in \mathcal{Z}(X)$ com $Z \subset Z'$, então, $x \in Z'$, donde $Z' \in u_x$. Portanto, u_x é um $\mathcal{Z}(X)$-filtro. Agora, seja $u \in BX$ tal que $u_x \subset u$. Suponhamos por absurdo que existe $W \in u$ tal que $x \notin W$. Visto que W é fechado e X é Tychonoff, existe uma função real contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f(W) = \{1\}$. Então, $x \in f^{-1}(0)$ e $W \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, o que contradiz $u_x \subset u$. Portanto, $u_x = u$, ou seja, u_x é um $\mathcal{Z}(X)$-ultrafiltro.

Vejamos agora que u_x é o único $\mathcal{Z}(X)$-ultrafiltro que converge para x. Primeiramente, notemos que u_x converge de fato para x. Dada uma vizinhança aberta V de x em X, existe $f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(X \setminus V) = \{1\}$. Logo, $x \in f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(0) \cap (X \setminus V) = \emptyset$, isto é, $f^{-1}(0) \subset V$. Isto mostra que u_x converge para x. Agora, seja $u \in BX$ tal que u converge para x. Fixemos $Z \in u$. Dada uma vizinhança qualquer V de x, existe $Z_V \in u$ tal que $Z_V \subset V$. Como $Z \cap Z_V \neq \emptyset$, segue que $Z \cap V \neq \emptyset$. Isto significa que $x \in \mathrm{fe}(Z) = Z$. Logo, $u \subset u_x$ e, portanto, $u = u_x$.

Esta associação entre elementos de X e BX define um mergulho denso de X em BX. Ou seja,

Proposição D.2. *A aplicação $\mu : x \in X \to u_x \in BX$ é um mergulho, onde $\mu(X)$ é denso em BX.*

Demonstração: Se $x, y \in X$ e $x \neq y$, podemos separar estes dois pontos por abertos disjuntos, donde $u_x \neq u_y$. Portanto, $u_x = u_y$ se, e somente se, $x = y$. Com isso, temos que μ é uma bijeção sobre sua imagem. Agora, seja $(x_i) \subset X$ uma rede convergindo para um ponto $x \in X$ e seja $\mathrm{h_a}(X \setminus Z)$ um aberto básico de BX contendo u_x. Então, existe $Z' \in u_x$ tal que $Z' \subset X \setminus Z$. Como $X \setminus Z$ é aberto e $x \in Z'$, existe i_0 tal que $x_i \in Z'$, para todo $i \geq i_0$. Logo, $u_{x_i} \in \mathrm{h_a}(X \setminus Z)$, para todo $i \geq i_0$. Portanto, (u_{x_i}) converge para u_x em BX, mostrando que μ é contínua. Por outro lado, está claro que $\mu^{-1}(u_x) = x$. Seja $(u_{x_i}) \subset \mu(X)$ uma rede convergindo para u_x em $\mu(X)$ e consideremos uma vizinhança aberta V de x. Então, existe $f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(X \setminus V) = \{1\}$. Tomemos $h : [0,1] \to [0,1]$ dada por $h(t) = 1 - t$. Então, $h \circ f : X \to [0,1]$ é contínua tal que $h \circ f(x) = 1$ e $h \circ f(X \setminus V) = \{0\}$. Logo, $X \setminus V \subset (h \circ f)^{-1}(0) = Z$ e $x \notin Z$. Assim, $u_x \in \mathrm{h_a}(X \setminus Z)$, donde existe i_0 tal que $u_{x_i} \in \mathrm{h_a}(X \setminus Z)$, para todo $i \geq i_0$, ou seja, $x_i \in X \setminus Z$, para todo $i \geq i_0$. Visto que $X \setminus V \subset Z$ temos que $X \setminus Z \subset V$. Logo, $x_i \in V$, para todo $i \geq i_0$. Isto mostra que μ^{-1} também é contínua e, portanto, μ é um mergulho. Enfim, dado $u \in BX$, seja $Z \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $u \in \mathrm{h_a}(X \setminus Z)$. Neste caso, devemos ter $Z \neq X$. Tomando $x \in X \setminus Z$, existe $Z' \in u_x$ tal que $Z' \cap Z = \emptyset$, ou seja, $Z' \subset X \setminus Z$, donde $u_x \in \mathrm{h_a}(X \setminus Z)$. Isto mostra que $\mu(X)$ é denso em BX. □

A seguinte caracterização dos ultrafiltros será usada constantemente no texto.

Lema D.3. *Um $\mathcal{Z}(X)$-filtro u é um $\mathcal{Z}(X)$-ultrafiltro se, e somente se, dado $Z \in \mathcal{Z}(X)$, então, ou $Z \in u$ ou existe $Z' \in u$ tal que $Z' \subset X \setminus Z$.*

Demonstração: Suponhamos que dado $Z \in \mathcal{Z}(X)$, então, ou $Z \in u$ ou existe $Z' \in u$ tal que $Z' \subset X \setminus Z$. Seja $v \in BX$ tal que $u \subset v$. Dado $Z \in v$ temos que ou $Z \in u$ ou existe $Z' \in u$ tal que $Z' \cap Z = \emptyset$. Mas, a segunda hipótese não acontece, pois $u \subset v$. Logo, $Z \in u$, donde $v = u$. Portanto, u é um $\mathcal{Z}(X)$-ultrafiltro. A recíproca é imediata. □

Um fato também relevante com respeito à topologia $\mathcal{T}$ em BX é a possibilidade de se exibir explicitamente o fecho de um subconjunto qualquer de BX.

Dado $\Gamma \subset BX$, definimos o conjunto

$$\mathfrak{f}(\Gamma) = \cap \{u \in BX : u \in \Gamma\}.$$

Verifica-se sem deficuldades que $\mathfrak{f}(\Gamma)$ é um $\mathcal{Z}(X)$-filtro e que $\mathfrak{f}(\Gamma \cup \Delta) = \mathfrak{f}(\Gamma) \cap \mathfrak{f}(\Delta)$.

Agora, associamos a $\Gamma \subset BX$ o subconjunto de BX

$$\overline{\Gamma} = \{u \in BX : \mathfrak{f}(\Gamma) \subset u\}.$$

Lema D.4. *Sejam Γ e Δ subconjuntos de BX. Então,*

1. $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$
2. $\Gamma \subset \Delta$ *então* $\overline{\Gamma} \subset \overline{\Delta}$
3. $\mathfrak{f}(\Gamma) = \mathfrak{f}\left(\overline{\Gamma}\right)$
4. $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$
5. $\overline{\Gamma \cup \Delta} = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta}$

Demonstração: (1) Se $u \in \Gamma$, então, $\mathfrak{f}(\Gamma) \subset u$, donde $u \in \overline{\Gamma}$. (2) Como $\Gamma \subset \Delta$, segue que $\mathfrak{f}(\Delta) \subset \mathfrak{f}(\Gamma)$. Daí, se $\mathfrak{f}(\Gamma) \subset u$, então, $\mathfrak{f}(\Delta) \subset u$, isto é, se $u \in \overline{\Gamma}$, então, $u \in \overline{\Delta}$. (3) Visto que $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$, temos que $\mathfrak{f}\left(\overline{\Gamma}\right) \subset \mathfrak{f}(\Gamma)$. Por outro lado, se $u \in \overline{\Gamma}$, então, $\mathfrak{f}(\Gamma) \subset u$, donde $\mathfrak{f}(\Gamma) \subset \cap \left\{u : u \in \overline{\Gamma}\right\} = \mathfrak{f}\left(\overline{\Gamma}\right)$. Logo, $\mathfrak{f}(\Gamma) = \mathfrak{f}\left(\overline{\Gamma}\right)$. (4) Segue de (3). (5) Como $\Gamma, \Delta \subset \Gamma \cup \Delta$, segue de (2) que $\overline{\Gamma}, \overline{\Delta} \subset \overline{\Gamma \cup \Delta}$, donde $\overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta} \subset \overline{\Gamma \cup \Delta}$. Por outro lado, seja $u \in \overline{\Gamma \cup \Delta}$ e suponhamos que $u \notin \overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta}$. Então, existem $Z \in \mathfrak{f}(\Gamma)$ e $Z' \in \mathfrak{f}(\Delta)$ tais que $Z, Z' \notin u$. Mas, visto que $\mathrm{f}(\Gamma)$ e $\mathrm{f}(\Delta)$ são $\mathcal{Z}(X)$-filtros, temos que

$$Z \cup Z' \in \mathfrak{f}(\Gamma) \cap \mathfrak{f}(\Delta) = \mathfrak{f}(\Gamma \cup \Delta) \subset u.$$

Isto significa que ou $Z \in u$ ou $Z' \in u$, contradição. Logo, $u \in \overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta}$ e, portanto, $\overline{\Gamma \cup \Delta} = \overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta}$. □

Acrescentando $\overline{\emptyset} = \emptyset$, segue do lema anterior que $\Gamma \to \overline{\Gamma}$ é um operador fecho de Kuratowski em BX. Seja $\mathcal{T}'$ a topologia em BX determinada por este operador fecho. Vamos mostrar que $\mathcal{T}'$ é mais fina do que $\mathcal{T}$. A notação $\mathrm{fe}(\cdot)$ para fecho de um subconjunto em BX é referente a topologia $\mathcal{T}$.

Proposição D.5. *Para $Z \in \mathcal{Z}(X)$, tem-se* $\mathrm{fe}(\mu(Z)) = \mathrm{h}_{\mathrm{f}}(Z)$.

Demonstração: É fácil ver que $\mu(Z) \subset \mathrm{h_f}(Z)$, donde $\mathrm{fe}(\mu(Z)) \subset \mathrm{H_f}(Z)$. Por outro lado, dado $u \in \mathrm{h_f}(Z)$, seja $\mathrm{h_a}(X \setminus Z')$ uma vizinhança aberta básica de u. Então, existe $W \in u$ tal que $W \cap Z' = \emptyset$. Daí, $Z \cap W \in u$ e $Z \cap W \cap Z' = \emptyset$. Tome $x \in Z \cap W$. Então, $Z \cap W \in u_x$ com $Z \cap W \subset X \setminus Z'$, logo, $u_x \in \mathrm{h_a}(X \setminus Z')$. Como também $u_x \in \mu(Z)$ segue que $u \in \mathrm{fe}(\mu(Z))$ e, portanto, $\mathrm{h_f}(Z) \subset \mathrm{fe}(\mu(Z))$. $\square$

Agora, dado $Z \in \mathcal{Z}(X)$, temos que

$$\mathfrak{f}(\mu(Z)) = \cap \{u_x \in BX : x \in Z\} = \{W \in \mathcal{Z}(X) : Z \subset W\}.$$

Em particular, $Z \in \mathfrak{f}(\mu(Z))$, donde $\overline{\mu(Z)} \subset \mathrm{h_f}(Z)$. Por outro lado, se $u \in \mathrm{h_f}(Z)$ e $Z \subset W$, com $W \in \mathcal{Z}(X)$, então, $W \in u$. Logo, $\mathfrak{f}(\mu(Z)) \subset u$, donde $u \in \overline{\mu(Z)}$. Portanto, $\overline{\mu(Z)} = \mathrm{H_f}(Z)$.

Assim, a topologia $\mathcal{T}'$ contém a base de fechados da topologia $\mathcal{T}$ sobre BX. Isto significa que $\mathcal{T}'$ é mais fina do que $\mathcal{T}$ e que $\mathrm{fe}(\Gamma) = \overline{\Gamma}$, para todo $\Gamma \subset BX$.

Proposição D.6. *A topologia $\mathcal{T}$ em BX é compacta Hausdorff.*

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos fechados básicos satisfazendo a propriedade de interseção finita e consideremos a coleção

$$f = \{Z \in \mathcal{Z}(X) : \mathrm{h_f}(Z) \in \mathcal{F}\}.$$

Dados $Z_1, ..., Z_n \in f$, temos que

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{h_f}(Z_i) = \mathrm{h_f}\left(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i\right)$$

donde

$$\bigcap_{i=1}^{n} Z_i \neq \emptyset.$$

Logo, f satisfaz a propriedade de interseção finita, donde f é uma subbase de filtro. Seja $u \in BX$ tal que $f \subset u$. Então, $u \in \mathrm{h_f}(Z)$, para todo $\mathrm{h_f}(Z) \in \mathcal{F}$, donde

$$\bigcap \{\mathrm{h_f}(Z) : \mathrm{h_f}(Z) \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset.$$

Portanto, BX é compacto. Agora, sejam $u, v \in BX$, $u \neq v$. Então, existem $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ disjuntos tais que $Z_1 \in u$ e $Z_2 \in v$. Sejam $h_1, h_2 : X \to [0,1]$ contínuas tais que $h_1^{-1}(0) = Z_1$ e $h_2^{-1}(0) = Z_2$. Definamos $h : X \to [0,1]$ por

$$h(x) = \frac{h_1(x)}{h_1(x) + h_2(x)}.$$

Se $h_1(x)+h_2(x)=0$, então, $h_1(x)=h_2(x)=0$, donde $x\in Z_1\cap Z_2$, um absurdo. Logo, h está bem definida. Evidentemente, h é contínua e $h^{-1}(0)=Z_1$ e $h^{-1}(1)=Z_2$. Tomemos as aplicações contínuas $p,q:[0,1]\to[0,1]$ dadas por

$$p(t)=1-t \qquad \text{e} \qquad q(t)=\begin{cases} 0, & \text{se } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 2t-1, & \text{se } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$

Então, temos que

$$x\in(q\circ h)^{-1}(0)\Leftrightarrow q(h(x))=0\Leftrightarrow h(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Logo,

$$Z_2\cap(q\circ h)^{-1}(0)=\emptyset.$$

Agora, observemos que $Z_1=(p\circ h)^{-1}(1)$ e que

$$x\in(q\circ p\circ h)^{-1}(0)\Leftrightarrow q(p\circ h(x))=0\Leftrightarrow p(h(x))\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow h(x)\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

Logo,

$$Z_1\cap(q\circ p\circ h)^{-1}(0)=\emptyset.$$

Afirmamos que

$$(q\circ h)^{-1}(0)\cup(q\circ p\circ h)^{-1}(0)=X.$$

Com efeito, suponhamos que $x\in X\setminus(q\circ h)^{-1}(0)$. Então, $q\circ h(x)>0$, donde $h(x)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$. Assim,

$$p(h(x))=1-h(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

donde $q\circ p\circ h(x)=0$, isto é, $x\in(q\circ p\circ h)^{-1}(0)$. Logo,

$$X\setminus(q\circ h)^{-1}(0)\subset(q\circ p\circ h)^{-1}(0)$$

donde segue o afirmado. Enfim, denotemos $Z_1'=(q\circ h)^{-1}(0)$ e $Z_2'=(q\circ p\circ h)^{-1}(0)$. Visto que $Z_1\subset X\setminus Z_2'$ e que $Z_2\subset X\setminus Z_2'$, temos que $u\in \mathrm{h_a}(X\setminus Z_2')$ e $v\in\mathrm{h_a}(X\setminus Z_1')$. Além disso

$$\begin{aligned}\mathrm{h_a}(X\setminus Z_2')\cap\mathrm{h_a}(X\setminus Z_1') &= \mathrm{h_a}((X\setminus Z_2')\cap(X\setminus Z_1'))\\ &= \mathrm{h_a}(X\setminus(Z_2'\cup Z_1'))\\ &= \mathrm{h_a}(\emptyset)=\emptyset.\end{aligned}$$

Portanto, BX é Hausdorff. $\square$

Visto que a propriedade de extensão de aplicação contínua é uma caracterização da compactificação de Stone-Čech βX, o próximo resultado conclui então que BX é homeomorfo à βX, ou seja, βX e BX são ambos o mesmo espaço. Alcançamos assim o objetivo principal desta seção.

Teorema D.7. *Seja K um espaço compacto Hausdorff e $\varphi : X \to K$ uma aplicação contínua. Então, existe uma única aplicação contínua $\psi : BX \to K$ tal que $\psi \circ \mu = \varphi$.*

Demonstração: Dado $u \in BX$, consideremos a coleção de subconjuntos fechados (compactos) de K

$$\mathcal{F}_u = \left\{ \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z \right) \right) \right) : Z \notin u \right\}.$$

Dados $Z_1, ..., Z_n \notin u$, temos que

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_1 \right) \cap ... \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_n \right) \right) \right) \subset \\ &\subset \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_1 \right) \right) \right) \cap ... \cap \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_n \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{F}_u$ satisfaz a propriedade de interseção finita. Como K é compacto Hausdorff, temos que

$$\bigcap_{Z \notin u} \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z \right) \right) \right) \neq \emptyset.$$

Vamos mostrar que $\bigcap_{Z \notin u} \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z \right) \right) \right)$ consiste apenas de um ponto. Suponhamos por contradição que $x, y \in \bigcap_{Z \notin u} \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z \right) \right) \right)$ com $x \neq y$. Então, existem vizinhanças V_x e V_y de x e de y, respectivamente, tais que $\mathrm{fe}\left(V_x \right) \cap \mathrm{fe}\left(V_y \right) = \emptyset$. Pelo Lema de Urysohn, existe $f : K \to [0,1]$ contínua tal que $f\left(\mathrm{fe}\left(V_x \right) \right) = \{0\}$ e $f\left(\mathrm{fe}\left(V_y \right) \right) = \{1\}$. Tomando $h : [0,1] \to [0,1]$, $h\left(t \right) = 1 - t$, sejam

$$Z_x = \varphi^{-1} \left(f^{-1} \left(0 \right) \right) = \left(f \circ \varphi \right)^{-1} \left(0 \right)$$

e

$$Z_y = \varphi^{-1} \left(\left(h \circ f \right)^{-1} \left(0 \right) \right) = \left(h \circ f \circ \varphi \right)^{-1} \left(0 \right).$$

Então, $Z_x, Z_y \in \mathcal{Z}\left(X \right)$ e $Z_x \cap Z_y = \emptyset$. Neste caso, ou $Z_x \notin u$ ou $Z_y \notin u$. Suponhamos que $Z_x \notin u$. Então, $x \in \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_x \right) \right) \right)$. Mas, se $a \in f^{-1}\left(0 \right) \cap \varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_x \right) \right)$, então, $f\left(a \right) = 0$ e $a = \varphi \circ \mu^{-1}\left(u_b \right) = \varphi\left(b \right)$, com $u_b \in \mu\left(X \right) \cap \mathrm{h_a}\left(X \setminus Z_x \right)$, donde $0 = f\left(a \right) = f \circ \varphi\left(b \right)$. Logo, $b \in \left(f \circ \varphi \right)^{-1}\left(0 \right) = Z_x$ e $b \in Z_x$, um absurdo. No entanto, se $Z_y \notin u$, então, $y \in \mathrm{fe}\left(\varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_y \right) \right) \right)$. Mas,

$$\left(h \circ f \right)^{-1} \left(0 \right) \cap \varphi \circ \mu^{-1} \left(\mu \left(X \right) \cap \mathrm{h_a} \left(X \setminus Z_y \right) \right) = \emptyset \quad e \quad y \in V_y \subset \left(h \circ f \right)^{-1} \left(0 \right),$$

ou melhor,

$$V_y \cap \varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus Z_y)) = \emptyset,$$

uma contradição. Portanto $\bigcap\limits_{Z \notin u} \mathrm{fe} \left(\varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus Z))\right)$ consiste de apenas um ponto u_φ. Assim, a cada $u \in BX$ associamos o ponto u_φ obtido desta maneira, definindo a aplicação $\psi : u \in BX \to u_\varphi \in K$. Se $x \in X$ e $Z \notin u_x$, então, $u_x \in \mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus Z)$, logo, $\varphi (x) = \varphi \circ \mu^{-1} (u_x) \in \varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus Z))$. Assim,

$$\bigcap_{Z \notin u_x} \mathrm{fe} \left(\varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus Z))\right) = \{\varphi (x)\}$$

ou seja, $\psi \circ \mu (x) = \psi (u_x) = \varphi (x)$. Portanto, ψ extende φ. Para verificarmos a continuidade de ψ, seja (u_i) uma rede convergindo para u em BX. Dada uma vizinhança U de $\psi (u)$ em K, tomemos vizinhanças abertas V e V' de $\psi (u)$ tais que $\mathrm{fe} (V) \subset V' \subset \mathrm{fe} (V') \subset U$. Então, existe $f : K \to [0, 1]$ contínua tal que $f (\mathrm{fe} (V)) = \{0\}$ e $f (K \setminus V') = \{1\}$. Tomando novamente a aplicação h definida acima, obtemos os conjuntos

$$W = \varphi^{-1} \left(f^{-1} (0)\right) \qquad \text{e} \qquad W' = \varphi^{-1} \left((h \circ f)^{-1} (0)\right)$$

ambos em $\mathcal{Z} (X)$ e tais que $W \cap W' = \emptyset$. Então, ou $W \notin u$ ou $W' \notin u$. Suponhamos que $W \notin u$. Neste caso, $\psi (u) \in \mathrm{fe} (\varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus W)))$, donde

$$V \cap \varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus W)) \neq \emptyset.$$

Porém, se $a \in V \cap \varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus W))$, então, $a = \varphi \circ \mu^{-1} (u_x) = \varphi (x) \in V$, com $u_x \in \mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus W)$, donde $x \notin W$, isto é, $f \circ \varphi (x) \neq 0$. Logo, $\varphi (x) \notin \mathrm{fe} (V)$ e, portanto, $\varphi (x) \notin V$, o que é um absurdo. Portanto, $W' \notin u$. Assim, existe i_0 tal que $u_i \in \mathrm{h_a} (X \setminus W')$, para todo $i \geq i_0$, donde $\psi (u_i) \in \mathrm{fe} (\varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus W')))$, para todo $i \geq i_0$. Isto significa que para cada $i \geq i_0$, existe uma rede $(\varphi (x_j)) \subset \varphi \circ \mu^{-1} (\mu (X) \cap \mathrm{h_a} (X \setminus W'))$ convergindo para $\psi (u_i)$. Como $x_j \notin W'$, temos que $h \circ f \circ \varphi (x_j) \neq 0$, donde $f \circ \varphi (x_j) \neq 1$, donde $\varphi (x_j) \notin K \setminus V'$, ou seja, $\varphi (x_j) \in V'$, donde $\psi (u_i) \in \mathrm{fe} (V') \subset U$. Logo, $\psi (u_i) \in U$, para todo $i \geq i_0$. Visto que U é uma vizinhança arbitrária de $\psi (u)$, temos que $(\psi (u_i))$ converge para $\psi (u)$ em K. Portanto, ψ é contínua. Enfim, para verificarmos a unicidade, seja $\theta : BX \to K$ uma extensão contínua de φ. Dado $u \in BX$, existe uma rede $(u_{x_i}) \subset \mu (X)$ tal que $\lim_i u_{x_i} = u$. Daí,

$$\theta (u) = \lim_i \theta (u_{x_i}) = \lim_i \varphi (x_i) = \lim_i \psi (u_{x_i}) = \psi (u)$$

e o resultado está demostrado. □

Temos um caso especial quando assumimos a normalidade da topologia do espaço X. A compactificação de Stone-Čech pode ser construída sobre os $\mathcal{F} (X)$-ultrafiltros, que se torna tecnicamente mais simples. Na verdade, este é um caso particular do processo de extensão de Wallman (ver página 178 de [14]).

D.3 A compactificação de um grupo topológico

Um caso especial e de amplo interesse é o processo de compactificação de um grupo topológico. Todo grupo topológico (de Hausdorff) é um espaço de Tychonoff. Este caso tem sido extensivamente estudado em diversas literaturas como por exemplo Auslander-Furstenberg [1] e Ellis [11]. O principal fundamento destes estudos é a construção de uma estrutura de semigrupo na compactificação, enfatizando o conceito de ideais minimais.

Consideremos um grupo topológico G e tomamos a sua compactificação βG de acordo com a descrição clássica.

Uma idéia naturalmente intuitiva é a introdução de um produto em βG. E isto é possível fazer, de forma que as translações a direita por quaiquer elementos de βG sejam contínuas e as translações a esquerda por elementos de G sejam homeomorfismos.

Usaremos as notações usuais L_g e R_g para as translações a esquerda e a direita por g, respectivamente, para todo $g \in G$.

Uma operação binária em $[0,1]^{C(G,[0,1])}$ pode ser definida da seguinte maneira: dados $\gamma, \sigma \in [0,1]^{C(G,[0,1])}$ e $f \in C(G,[0,1])$, definimos

$$\gamma * \sigma (f) = \gamma \left(\bar{f}\right)$$

onde $\bar{f}(g) = \sigma(f \circ L_g)$, para todo $g \in G$. Para verificarmos que esta operação é associativa, tomemos arbitrários $\gamma, \sigma, \tau \in [0,1]^{C(G,[0,1])}$ e $f \in C(G,[0,1])$. Temos que

$$(\gamma * \sigma) * \tau (f) = \gamma * \sigma \left(\bar{f}\right) = \gamma \left(\overline{\overline{f}}\right)$$

onde $\bar{f}(g) = \tau(f \circ L_g)$ e $\overline{\overline{f}}(g) = \sigma\left(\bar{f} \circ L_g\right)$, para todo $g \in G$. Por outro lado, temos que

$$\gamma * (\sigma * \tau)(f) = \gamma \left(\widetilde{f}\right)$$

onde

$$\widetilde{f}(g) = \sigma * \tau (f \circ L_g) = \sigma \left(\overline{f \circ L_g}\right)$$

para todo $g \in G$, onde

$$\overline{f \circ L_g}(t) = \tau(f \circ L_g \circ L_t) = \tau(f \circ L_{gt}) = \overline{f}(gt) = \overline{f} \circ L_g(t)$$

para todo $t \in G$. Logo, $\overline{f \circ L_g} = \bar{f} \circ L_g$, donde obtemos $\widetilde{f}(g) = \sigma\left(\bar{f} \circ L_g\right) = \overline{\overline{f}}(g)$, para todo $g \in G$. Portanto,

$$(\gamma * \sigma) * \tau (f) = \gamma \left(\overline{\overline{f}}\right) = \gamma \left(\widetilde{f}\right) = \gamma * (\sigma * \tau)(f)$$

para toda $f \in C(G,[0,1])$, donde segue a associatividade da operação, o que a torna um produto.

Vejamos agora que este produto é fechado em βG.

Primeiramente, considerando o mergulho e de G em βG definido na Seção B.1, tomemos arbitrariamente $g, h \in G$ e $f \in C(G,[0,1])$. Então, temos que

$$e(g) * e(h)(f) = e(g)\left(\bar{f}\right)$$

onde

$$\bar{f}(t) = e(h)(f \circ L_t) = f \circ L_t(h) = f \circ R_h(t)$$

para todo $t \in G$. Logo, $\bar{f} = f \circ R_h$, donde

$$e(g) * e(h)(f) = e(g)(f \circ R_h) = e(gh)(f).$$

Portanto, $e(g) * e(h) = e(gh) \in e(G)$, ou seja, o produto "$*$" é fechado em $e(G)$.

Agora, fixemos $g \in G$ e definamos a aplicação

$$L_g(h) = e(g) * e(h) = e(gh)$$

de G em $e(G)$ (usando a mesma notação da translação à esquerda por g em G). Tomando uma rede $(h_i) \subset G$ convergindo para $h \in G$, temos que $gh_i \to gh$ em G, donde $e(gh_i) \to e(gh)$ em $e(G)$, ou seja, $L_g(h_i) \to L_g(h)$. Portanto, L_g é contínua, donde obtemos uma extenção contínua única $\mathrm{L}_g : \beta G \to \beta G$ de L_g tal que $\mathrm{L}_g \circ e = L_g$. É imediato verificar que L_g é inversível, cuja inversa é $\mathrm{L}_{g^{-1}}$. Portanto, L_g é um homeomorfismo de βG. Mais ainda, L_g é exatamente a translação a esquerda por $e(g)$ com respeito a "$*$". Com efeito, é imediato verificar que a composta desta translação com e é L_g, donde segue a afirmação por unicidade.

Por fim, verificaremos que as translações à direita por elementos de βG com respeito a "$*$" são contínuas. Para tanto, fixemos $\sigma \in \beta G$. Então, temos bem definida a aplicação

$$R_\sigma(g) = e(g) * \sigma$$

de G em βG. Se tomarmos uma rede convergente $(g_i) \subset G$ com limite g, temos que

$$R_\sigma(g_i)(f) = e(g_i)\left(\bar{f}\right) \longrightarrow e(g)\left(\bar{f}\right) = e(g) * \sigma(f) = R_\sigma(g)(f)$$

para toda $f \in C_b(G)$. Logo, $R_\sigma(g_i) \to R_\sigma(g)$, donde R_σ é contínua. Assim, existe uma única extenção contínua $\mathrm{R}_\sigma : \beta G \to \beta G$ de R_σ tal que $\mathrm{R}_\sigma \circ e = R_\sigma$. Pelo argumento de unicidade temos que R_σ é exatamente a translação a direita por σ com respeito a "$*$".

Para saber mais sobre compactificação de grupos topológicos, ver [11] e [20].

Nosso objetivo agora é transportar estas propriedades para a descrição de βG por ultrafiltros.

A partir daqui, por motivos técnicos, iremos denotar por $\beta' G$ a descrição clássica e por βG a descrição por ultrafiltros da compactificação de G.

Denotemos por $e : G \to \beta G$ o mergulho dado por $e(g) = u_g$, onde

$$u_g = \{A \in \mathcal{F}(G) : g \in A\}.$$

Considerando também o mergulho $e' : G \to \beta G$, tomemos as extenções contínuas únicas $\mathcal{E} : \beta' G \to \beta G$ de e e $\mathcal{E}' : \beta G \to \beta' G$ de e'. Então, $\mathcal{E} \circ e' = e$ e $\mathcal{E}' \circ e = e'$, donde $\mathcal{E} \circ \mathcal{E}' \circ e = e$ e $\mathcal{E}' \circ \mathcal{E} \circ e' = e'$. Isto significa que

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{E}' = \mathrm{Id}_{\beta G} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{E}' \circ \mathcal{E} = \mathrm{Id}_{\beta' G}.$$

Portanto, $\mathcal{E}$ é um homeomorfismo cuja inversa é $\mathcal{E}'$.

Com isto, dados $u, v \in \beta G$, podemos definir

$$u \star v = \mathcal{E}(\mathcal{E}'(u) * \mathcal{E}'(v)).$$

É evidente que "$\star$" é um produto em βG. Em particular, dados $g, h \in G$, temos que

$$\begin{aligned} u_g \star u_h &= \mathcal{E}(\mathcal{E}'(u_g) * \mathcal{E}'(u_h)) = \mathcal{E}(\mathcal{E}'(e(g)) * \mathcal{E}'(e(h))) \\ &= \mathcal{E}(e'(g) * e'(h)) = \mathcal{E}(e'(gh)) \\ &= e(gh) = u_{gh}. \end{aligned}$$

Logo, a estrutura de semigrupo de βG induz a estrutura de grupo de G.

Agora, se L'_g denota a translação a esquerda por $e'(g)$ em $\beta' G$, é imediato verificar que

$$\mathrm{L}_g = \mathcal{E} \circ \mathrm{L}'_g \circ \mathcal{E}'$$

é a translação a esquerda por $e(g)$ em βG. Portanto, L_g é um homeomorfismo. Além disso, dado $u \in \beta G$, e considerando $\mathrm{R}'_{\mathcal{E}'(u)}$ a translação a direita por $\mathcal{E}'(u)$ em $\beta' G$, também é imediato verificar que

$$\mathrm{R}_u = \mathcal{E} \circ \mathrm{R}'_{\mathcal{E}'(u)} \circ \mathcal{E}'$$

é a translação a direita por u em βG.

Proposição D.8. *Sejam $g \in G$ e $u \in \beta G$. Então,* $\mathrm{L}_{u_g}(u) = \{gA : A \in u\}$.

Demonstração: Denotemos $\mathcal{L}_g(u) = \{gA : A \in u\}$. Então, $\mathcal{L}_g(u)$ é um ultrafiltro. Consideremos a aplicação contínua $L_g(h) = e(gh)$ de G sobre $e(G)$. Então, L_g é a única extenção contínua de L_g de forma que $\mathrm{L}_{u_g} \circ e = L_g$. Mas, dado $h \in G$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g \circ e(h) &= \{gA : A \in u_h\} = \{gA : h \in A\} \\ &= \{B : gh \in B\} = u_{gh} = L_g(h). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L}_g \circ e = L_g$. Se mostrarmos que $\mathcal{L}_g$ é contínua, seguirá por unicidade que $\mathcal{L}_g = L_g$. Com efeito, seja $(u_i) \subset \beta G$ uma rede convergindo para u. Dada uma vizinhança aberta básica $\mathrm{h_a}(U)$ de $\mathcal{L}_g(u)$, temos que existe $A \in u$ tal que $gA \subset U$. Logo, $A \subset g^{-1}U$, donde $u \in \mathrm{h_a}(g^{-1}U)$. Assim, existe i_0 tal que para todo $i \geq i_0$ tem-se $u_i \in \mathrm{h_a}(g^{-1}U)$, isto é, $\mathcal{L}_g(u_i) \in \mathrm{h_a}(U)$. Portanto, $\mathcal{L}_g$ é contínua, e o resultado segue. □

Semelhantemente, verificamos que

$$\mathrm{R}_{u_g}(u) = \{Ag : A \in u\}$$

para todo $g \in G$ e $u \in \beta G$.

Com respeito as translações, convém ainda enfatizarmos as seguintes propriedades relevantes:

1. $\mathrm{L}_g(\mathrm{h_a}(U)) = \mathrm{h_a}(gU)$ e $\mathrm{R}_{u_g}(\mathrm{h_a}(U)) = \mathrm{h_a}(Ug)$, para todo $g \in G$ e $U \subset G$ aberto.

2. $\mathrm{L}_g(\mathrm{h_f}(A)) = \mathrm{h_f}(gA)$ e $\mathrm{R}_{u_g}(\mathrm{h_f}(A)) = \mathrm{h_f}(Ag)$, para todo $g \in G$ e $A \subset G$ fechado.

Contudo, obtemos uma ação por homeomorfismos de G sobre βG, a qual pode ser considerada à esquerda ou à direita. Optando pela ação à esquerda, definindo a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G \times \beta G & \longrightarrow & \beta G \\ & (g,u) & \longmapsto & \mathrm{L}_g(u) \end{array}.$$

Então, α define uma ação unilateralmente contínua de G sobre βG, e o homeomorfismo $\mathcal{E}'$ é, além de um isomorfismo de semigrupo, um isomorfismo entre os grupos de transformações $(G, \beta G)$ e $(G, \beta' G)$.

D.3.1 Subconjuntos minimais

Além da estrutura de semigrupo na compactificação de um grupo topológico, outra propriedade relevante é peculiar nesta situação: a *extenção de homomorfismos.* Esta propriedade é fundamental para os estudos dos subconjuntos minimais, conceito que apresentaremos nesta seção.

Consideremos uma ação unilateralmente contínua de G sobre um espaço topológico X. Então, um subconjunto $M \subset X$ é denominado de *subconjunto minimal* se:

1. M é não vazio, fechado e G-invariante;

2. M é minimal (com respeito a inclusão) satisfazendo a propriedade (1).

No caso de X satisfazer (2) dizemos simplesmente que X é um conjunto minimal sobre a ação de G.

Segue direto destas propriedades que $M \subset X$ é um subconjunto minimal se, e semente se, $M = \mathrm{fe}\,(Gx)$, para todo $x \in M$. Isto significa em particular que os subconjuntos minimais de βG são ideais minimais a esquerda de βG. Um resultado geral garante a existência de elementos idempotentes em cada subconjunto minimal de βG. Este resultado está provado por exemplo no capítulo 2 de [1] .

Um *homomorfismo* entre dois espaços topológicos X e Y sobre a ação de G é uma aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ satisfazendo a condição $\varphi\,(gx) = g\varphi\,(x)$, para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Um conjunto minimal compacto Hausdorff X é dito um *conjunto minimal universal* se para qualquer conjunto minimal compacto Hausdorff Y existir um epimorfismo de X sobre Y.

Proposição D.9. *Seja X um espaço copacto Hausdorff sobre a ação de G e assuma que $\varphi : G \to X$ é um homomorfismo. Então, existe um único homomorfismo $\psi : \beta G \to X$ tal que $\psi \circ \mathrm{e} = \varphi$.*

Demonstração: Existe uma única extenção contínua $\psi : \beta G \to X$ de φ de forma que $\psi \circ e = \varphi$. Para ver que ψ é um homomorfismo, consideremos a aplicação $\psi'\,(g\gamma) = g\psi\,(\gamma)$ de βG em X. Se $g\gamma = h\sigma$, então, $\gamma = g^{-1}h\sigma$. Daí,

$$\psi'\,(g\gamma) = g\psi\,(\gamma) = g\psi\left(g^{-1}h\sigma\right) = \psi'\left(gg^{-1}h\sigma\right) = \psi'\,(h\sigma)\,.$$

Logo, ψ' é bem definida e $\psi'\,(\gamma) = \psi'\,(1\gamma) = 1\psi\,(\gamma) = \psi\,(\gamma)$, para todo $\gamma \in \beta G$. $\square$

Deste resultado segue que os subconjuntos minimais de βG são universais. Com efeito, seja X é um conjunto minimal compacto Hausdorff sobre a ação de G e $x \in X$. Então, $X = \mathrm{fe}\,(Gx)$, e visto que $g \in G \to gx \in X$ é um homomorfismo, existe um único homomorfismo $\psi : \beta G \to X$ tal que $\psi\,(e\,(g)) = gx$. Seja $M \subset \beta G$ um subconjunto minimal. Como M é compacto e ψ é homomorfismo, temos que $\psi\,(M) \subset X$ é não vazio, fechado e invariante, donde segue pela minimalidade de X que $\psi\,(M) = X$. Logo, $\psi\,|_M : M \to X$ é um epimorfismo e, portanto, M é um conjunto minimal universal.

Agora, dado um ideal minimal a esquerda I, é imediato verificar que $\mathrm{I} = \beta G\gamma$, para todo $\gamma \in \mathrm{I}$. Fixemos $\sigma \in \mathrm{I}$ idempotente. Então, dado $\gamma \in \mathrm{I}$, temos que $\gamma = \tau\sigma$, para algum $\tau \in \beta G$. Daí, $\gamma\sigma = \tau\sigma\sigma = \tau\sigma = \gamma$. Este fato será utilizado no próximo resultado, do qual concluiremos que os conjuntos minimais universais são isomorfos entre si.

Tomaremos a liberdade do uso da notação $\mathrm{fe}_{\beta G}\,(G) = \beta G$.

Proposição D.10. *Sejam $M \subset \beta G$ um subconjunto minimal e $\varphi : M \to M$ um homomorfismo. Então, φ é um isomorfismo e $\varphi = \mathrm{R}_\sigma$, para algum $\sigma \in M$.*

Demonstração: Seja τ idempotente em M e fixemos $\sigma = \varphi(\tau)$. Dado $\gamma \in M$, existe uma rede $(g_i) \subset G$ tal que $\lim_i g_i = \gamma$. Logo, $\lim_i g_i\tau = \gamma\tau = \gamma$, donde

$$\lim_i \varphi(g_i\tau) = \varphi(\gamma).$$

Mas, $\varphi(g_i\tau) = g_i\varphi(\tau) = g_i\sigma$, para todo i, donde

$$\varphi(\gamma) = \lim_i g_i\sigma = \gamma\sigma.$$

Portanto, $\varphi = \mathrm{R}_\sigma$, com $\sigma \in M$. Além disso, visto que $\varphi(M)$ é fechado e ivariante, temos que $\varphi(M) = M$. Assim, dado $\tau' \in M$ idempotente, existe $\delta \in M$ tal que $\delta\sigma = \tau'$. Agora,

$$\sigma\delta\sigma\delta = \sigma\tau'\delta = \sigma\delta$$

ou seja, $\sigma\delta \in M$ também é idempotente. Logo, $\mathrm{R}_{\delta\sigma} = \mathrm{R}_{\sigma\delta} = \mathrm{Id}_M$, ou melhor,

$$\mathrm{R}_\sigma \circ \mathrm{R}_\delta = \mathrm{Id}_M \qquad \text{e} \qquad \mathrm{R}_\delta \circ \mathrm{R}_\sigma = \mathrm{Id}_M.$$

Portanto, $\varphi = \mathrm{R}_\sigma$ é um isomorfismo com inversa R_δ. $\square$

Corolário D.11. *Seja X um conjunto minimal universal sobre a ação de G e seja $M \subset \beta G$ um subconjunto minimal. Então, X é isomorfo a M.*

Demonstração: Existe um epimorfismo $\varphi : X \to M$, e visto que M também é universal, existe um epimorfismo $\psi : M \to X$. Logo, $\varphi \circ \psi$ é um homomorfismo de M em M. Pela Proposição D.10, $\varphi \circ \psi$ é um isomorfismo, donde ψ é um isomorfismo e, portanto, $\varphi = \varphi \circ \psi \circ \psi^{-1}$ é um isomorfismo. $\square$

Assim, a menos de isomorfismo, existe um único conjunto minimal universal sobre a ação de G, o qual pode ser considerado como um ideal minimal de βG.

Referências Bibliográficas

[1] Auslander, J.; Furstenberg, H.. *Product recurrence and distal points.* Transactions of de American Math. Society, v. 343, n. 1, p. 221-232, 1994.

[2] Braga Barros, Carlos J. e San Martin, Luiz A. B.. *Chain control sets for semigroup actions.* Comp. Appl. Math., v. 15, n. 3, p. 257-276, 1996.

[3] Braga Barros, Carlos J. e San Martin, Luiz A. B.. *On the action of semigroups in fiber bundles.* Matemática Contemporânea, SBM, v. 13, p. 1-19, 1997.

[4] Braga Barros, Carlos J. e San Martin, Luiz A. B.. *Chain transitive sets for flows on flag bundles.* Forum Mathematicum, v. 19, p. 19-60, 2007.

[5] Braga Barros, Carlos J. e San Martin, Luiz A. B.. *Maximal chain transitive sets for local groups.* Bol. Soc. Paran. Mat., v. 21, n. 3, p. 113-125, 2003.

[6] Clifford, A. H. and Preston, G. B.. *The Algebraic Theory of Semigroups.* Vol. II. American Mathematical Society, 1967.

[7] Colonius, Fritz e Kliemann, Wolfgang. *The Dynamics of Control.* Boston: Birkhäuser, 2000.

[8] Conley, Charles C.. *Isolated invariant sets and the Morse index.* CBMS Regional Conf. Ser. in Math., n. 38, American Mathematical Society, 1978.

[9] Duistermaat, J. J.; Kolk, J. A. C. and Varadarajan, V. S.. *Functions, flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups.* Compositio Mathematica, v. 49, n. 3, p. 309-398, 1983.

[10] Ellis, R. *Locally compact transformation groups.* Duke Math. Journal, v. 24, p. 119-125, 1957.

[11] Ellis, R.. *Lectures on Topological Dynamics.* W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[12] Ellis, R.; Johnson, R.. *Topological dynamics and linear differential systems.* J. Diff. Equations, v. 44, p. 21-29, 1982.

[13] Ellis, D.; Ellis, R. e Nerurkar, M.. *The topological dynamics of semigroup actions.* Transactions American Mathematical Society, v. 353, n. 4, p. 1279-1320, 2000.

[14] Engelking, R.. *General Topology.* Berlin: Heldermann, 1989.

[15] Ferreira, L. C. S.. *Expoentes de Morse vetoriais e semifluxos em fibrados flag.* Tese de doutorado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2007.

[16] Helgason, S.. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York, 1978.

[17] Kelley, J.L.. *General Topology.* D. Van Nostrand Company, Inc., New Jersey, 1955.

[18] La Salle, J. P. *The Stability of Dynamical Systems.* Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1976.

[19] Lawson, J. D.. *Maximal subsemigroups of Lie groups that are total.* Edinburgh Mathematical Society, n. 30, p. 479-501, 1987.

[20] Milnes, P. *Compactifications of semitopological semigroups.* J. Australian Mathematical Society, v. 15, p. 488-503, 1973.

[21] Patrão, M.M.A.. *Morse decomposition of semiflows on topological spaces.* Journal of Dynamics and Differential Equations, v. 19, p. 181-198, 2007.

[22] Patrão, M.M.A.. *Semifluxos em fibrados flag e seus semigrupos de sombreamento.* Tese de doutorado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2006.

[23] Patrão, M.M.A.; San Martin, L.A.B.. *Morse decomposition of semiflows on fiber bundles.* Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, v. 17, p. 113-139, 2007.

[24] Patrão, M.M.A.; San Martin, L.A.B.. *Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups.* Journal of Dynamics and Differential Equations, v. 19, p. 155-180, 2007.

[25] Robinson, C.. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos.* Boca Raton, Florida: CRC Press, 1999.

[26] San Martin, Luiz A. B.. *Invariant control sets on flag manifolds.* Math. of Control, Signals and Systems, n. 6, p. 41-61, 1993.

[27] San Martin, Luiz A. B.. *Semigroups of local homeomorphisms.* YACHAY Revista de Matemáticas, v. 1, n. 2, p. 1-27.

[28] San Martin, Luiz A. B.. *Homogeneous spaces admitting transitive semigroups.* J. Lie Theory, n.8, p. 111-128, 1998.

[29] San Martin, Luiz A. B.. *Álgebras de Lie*. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.

[30] San Martin, Luiz A. B.. http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2006/.

[31] San Martin, Luiz A. B.. *Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds*. J. Lie Theory, v. 8, p. 335-350, 1998.

[32] San Martin, Luiz A. B.. *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups.* Trans. American Math. Society, v. 353, n. 12, p. 5165-5184, 2001.

[33] San Martin, Luiz A. B.. *Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces.* Mathematishe Annalen., 321, p. 587-600, 2001.

[34] San Martin, Luiz A. B.; Tonelli, Pedro A.. *Semigroup actions on homogeneous spaces.* Semigroup Forum, v. 50, p. 59-88, 1995.

[35] San Martin, Luiz A. B.; Tonelli, Pedro A.. *Transitive actions of semigroups in semi-simple Lie groups*. Semigroup Forum, v. 58, p. 142-151, 1999.

[36] Souza, J. A. *Sistemas dinâmicos, sistemas de controle e ações de semigrupos.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá, 2005.

[37] de Vries, J. de. *Elements of Topological Dynamics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[38] Willard, S. *General Topology.* Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Company, 1970.

[39] Zimmer, R.. *Ergodic Theory and Semisimple Groups*. Boston: Birkhäuser, 1984.