

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica - IMECC  
Departamento de Matemática

# *Projetivos de Curvatura*

**Rosane Rossato Binotto**

Tese de Doutorado

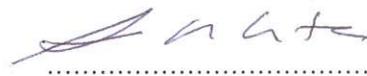
Orientadora: **Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sueli I. Rodrigues Costa**  
Co-orientadora: **Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria del Carmen Romero-Fuster**

25 de julho de 2008

Campinas - SP

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Rosane Rossato Binotto** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de julho de 2008.



Profª. Dra. **Sueli I. R. Costa**

Orientadora



Profª. Dra. **Maria del Carmen Romero-Fuster**

Co-orientador

Banca Examinadora:

- 1 Farid Tari (Univ. Durham)
- 2 Juan Jose Nuño Ballesteros (Univ. Valência)
- 3 Maria Aparecida Soares Ruas (ICMC-USP)
- 4 Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP).

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutora em Matemática**.

# FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8a/5094

Binotto, Rosane Rossato

B518c Projetivos de Curvatura / Rosane Rossato Binotto – Campinas,  
[S.P.:s.n.], 2008.

Orientadora: Sueli Irene Rodrigues Costa

Co-orientadora: Maria del Carmen Romero-Fuster

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Curvatura 2. Planos projetivos 3. Variedades tridimen-  
sionais (Topologia) 4. Singularidades (Matemática). I. Costa, Sueli  
Irene Rodrigues. II. Romero-Fuster, Maria del Carmem III. Univer-  
sidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Curvature Projective Planes

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Curvature 2. Projective planes  
3. Three-dimensional manifolds 4. Singularities.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Farid Tari (Univ. Durham)  
Prof. Dr. Juan Jose Nuño Ballesteros (Univ. Valência)  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Aparecida Ruas Soares (ICMC-USP)  
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 25/07/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

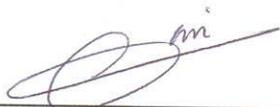
**Tese de Doutorado defendida em 25 de julho de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA**



---

**Prof(a). Dr(a). FARID TARI**



---

**Prof(a). Dr(a). JUAN JOSE NUÑO BALLESTEROS**



---

**Prof(a). Dr(a). MARIA APARECIDA SOARES RUAS**



---

**Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO**

” O Senhor é o meu pastor, nada me faltará ”

*Salmo 23, 1.*

Aos meus pais Iolema e Alcides,  
Ao meu marido Fernando,  
Pelo amor, carinho e paciência,  
*dedico.*

---

# Agradecimentos

À Deus, por ter me dado saúde e forças para enfrentar e superar as dificuldades e por ter colocado em meu caminho pessoas especiais que colaboraram cada qual do seu modo na realização deste trabalho, às quais destaco:

À minha família, pelo incentivo, pelo carinho e pelas orações.

Ao meu marido Fernando, pelo apoio, pelo incentivo nos momentos mais difíceis, pelo amor e carinho, e acima de tudo pela paciência e compreensão.

À Professora Sueli I. Rodrigues Costa, pela oportunidade de realizar este trabalho, pela orientação e amizade, e principalmente, por acreditar e transmitir entusiasmo às pessoas que a rodeiam.

À Professora Maria del Carmen Romero-Fuster, pela oportunidade de estágio no exterior, pelas suas valiosas contribuições para o trabalho, por ter me recebido tão bem em Valência (Espanha) e pela sua amizade.

À Professora Maria Aparecida Soares Ruas, pela oportunidade de estágio no exterior e pelas contribuições para o trabalho.

Aos membros da banca, pelas sugestões e melhorias ao texto.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNICAMP: Caio J. C. Negreiros, Carlos E. Duran, Luiz S. Martin, Paulo R. Brumati, Paulo R. C. Rufino os quais contribuíram muito para a minha formação em matemática.

À amiga Cristiane, pelos momentos agradáveis que passamos, pelas vitórias e conquistas, pela amizade e pelo carinho.

Aos amigos, Leila e Roberson, João e Regina, Marciano, Gisele e Pedro, Sebastian e

Mara, pelo incentivo, pela amizade e pelo carinho.

Aos colegas do Centro Universitário Franciscano-UNIFRA, em especial Alcebíades, Eleni e Vanilde pelo incentivo, pelo apoio e pela amizade.

Aos amigos Ana Cláudia, Mirilayne e Fábio, João e Vera, pela amizade e pelos momentos agradáveis que passamos em Valência, Espanha.

Aos colegas e amigos da pós-graduação, em especial Allan, Ana Cristina, Carina, Cristiano, Fabiano e Fábio, que compartilharam comigo os momentos mais difíceis, as alegrias e as vitórias.

Aos funcionários do IMECC, em especial as secretárias da pós-graduação Tânia e a Cidinha, por toda ajuda e atenção.

À CAPES, pela bolsa de estágio de doutorado no exterior, concedida pelo programa CAPES-MECD (BEX 3579/05-0).

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro concedido no Brasil.

Obrigada a todos!

---

# Resumo

O projetivo de curvatura em um ponto de uma 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , é o lugar geométrico de todos os extremos dos vetores curvatura de secções normais ao longo de todas as direções tangentes a  $M$  em  $p$ . Mostramos que o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo (difeomorfo) à superfície de Veronese clássica de ordem 2, composta com uma transformação linear. Conforme o posto desta transformação linear, o projetivo de curvatura será dado por projeções da superfície de Veronese em subespaços do espaço normal da variedade  $M$ . Quanto menor o posto, maior será a umbilicidade da variedade no ponto em questão. Também estudamos a natureza geométrica e singularidades para os diferentes casos de projetivos de curvatura em pontos de  $M$ , os quais incluem a superfície Romana de Steiner, a Cross-Cap, a superfície de Steiner de Tipo 5 e a Cross-Cup. Além disso, analisamos os pontos singulares de segunda ordem da imersão, no sentido de Feldman e estabelecemos condições relacionadas à natureza do projetivo de curvatura, para que uma 3-variedade imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , tenha contato de ordem  $\geq 2$  com  $k$ -planos e  $k$ -esferas de  $\mathbb{R}^n$ ,  $3 \leq k \leq 8$ .

**Palavras-chave:** 3-Variedade, Projetivo de curvatura, Contatos com hiperplanos e hiperesferas.

---

# Abstract

The curvature projective plane at each point  $p$  of three-manifolds  $M$  immersed in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , is the geometric locus of all end points of the curvature vectors of normal sections along of all tangent directions of  $M$  at  $p$ . In this study, we show that the curvature projective plane is isomorphic (diffeomorphic) to the classical Veronese surface of order two, composed with a linear transformation, and that according to the rank of this mapping, the curvature projective plane will be given by projections of the Veronese surface into subspaces of the normal space of  $M$  at  $p$ . Thus, the smaller the rank the greater the umbilicity of the manifold at this point. We also study the geometric nature and singularities of the curvature projective planes considering different possibilities, which include the Roman Steiner surface, the Cross-Cap, the Steiner surface of five-type, and the Cross-Cup. In addition, we analyze the order-two singularities of the immersion in the Feldman's sense and establish conditions related to the nature of the curvature projective plane for the existence of contacts of the three-manifolds in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , with  $k$ -planes and  $k$ -spheres,  $3 \leq k \leq 8$ .

**Keywords:** Three-manifolds, Curvature projective plane, Contacts with hyperplanes and hyperspheres.

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Imersão, Submersão, Mergulho e Regularidade de Segunda Ordem . . .	7
1.2 Germe de Aplicação e Espaço de Jatos . . . . .	9
1.3 Elipse de Curvatura . . . . .	10
1.3.1 Elipse de Curvatura Normal . . . . .	10
1.4 Superfícies de Steiner e Superfície de Boy . . . . .	14
1.4.1 Superfície de Steiner de Tipo 1: Superfície Romana de Steiner . .	17
1.4.2 Superfície de Steiner de Tipo 3: Superfície Cross-Cap . . . . .	17
1.4.3 Superfície de Steiner de Tipo 5 . . . . .	18
1.4.4 Superfície de Steiner de Tipo 6: Superfície Cross-Cup . . . . .	18
1.4.5 Superfície de Boy . . . . .	19
1.5 Superfície de Veronese Clássica de Ordem 2 . . . . .	20
<b>2 Segunda Forma Fundamental e Projetivo de Curvatura</b>	<b>23</b>
2.1 Segunda Forma Fundamental . . . . .	24
2.2 Projetivo de Curvatura . . . . .	30
2.2.1 Vetor Curvatura Normal . . . . .	30
2.2.2 Projetivo de Curvatura Normal . . . . .	32
2.2.3 Valor Médio do Vetor Curvatura Normal . . . . .	37

2.2.4	Exemplos de Projetivos de Curvatura . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Umbilicidade e Natureza Geométrica dos Projetivos de Curvatura</b>	<b>43</b>
3.1	O Projetivo de Curvatura como Imagem da Superfície de Veronese . . .	45
3.2	Umbilicidade . . . . .	48
3.3	Natureza Geométrica dos Projetivos de Curvatura . . . . .	51
3.4	Exemplos de 3-Variedades e seus Projetivos de Curvatura . . . . .	66
3.4.1	3-Variedade de Veronese Clássica de Ordem 2 . . . . .	66
3.4.2	3-Variedades de Translação . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Singularidades do Projetivo de Curvatura</b>	<b>73</b>
4.1	Noções sobre Singularidades . . . . .	73
4.1.1	Aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	74
4.1.2	Aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	75
4.2	Singularidades no Projetivo de Curvatura . . . . .	76
4.2.1	Ponto de tipo $M_5$ não quase-quase-umbílico . . . . .	78
4.2.2	Ponto quase-quase-umbílico linear . . . . .	78
4.2.3	Ponto semi-quase-umbílico linear . . . . .	80
4.2.4	Ponto quase-umbílico linear . . . . .	83
4.3	Imersões 2-Singulares e 2-Regulares . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Contato com k-Planos e k-Esferas</b>	<b>91</b>
5.1	Contatos entre Subvariedades . . . . .	91
5.2	Função Altura e Contato com k-Planos . . . . .	93
5.2.1	Cone das Direções Degeneradas . . . . .	96
5.3	Função Distância ao Quadrado e Contato com k-Esferas . . . . .	101
	<b>Perspectivas Futuras</b>	<b>109</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>111</b>

---

# Introdução

O projetivo de curvatura é a extensão do conceito de elipse de curvatura ([24], [19], [25]) para variedades tridimensionais. Mais especificamente, dada uma 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , para cada ponto  $p \in M$  podemos definir uma superfície associada a  $p$  no subespaço normal a  $M$  em  $p$ ,  $N_pM$ , denominada projetivo de curvatura e denotada por  $\eta(\theta, \phi)$ . Esta superfície é definida como sendo o lugar geométrico de todos os vetores curvatura de secções normais ao longo de todas as direções tangentes a  $M$  em  $p$ .

O nome projetivo de curvatura vem do fato da aplicação  $\eta$  induzir uma aplicação do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em  $N_pM$ .

O desenvolvimento que apresentaremos aqui inclui extensões para 3-variedades de resultados de [25] e [8] para elipses de curvatura de superfícies.

Neste trabalho utilizamos o projetivo de curvatura para estudar alguns aspectos da geometria de 3-variedades  $M$  de classe  $C^2$  imersas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ . O projetivo de curvatura em um ponto  $p \in M$  é completamente determinado pela segunda forma fundamental da 3-variedade em  $p$ . Assim, definimos a segunda forma fundamental de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ , segundo uma direção normal e estabelecemos os coeficientes desta forma quadrática.

Em seguida fornecemos algumas expressões para o projetivo de curvatura, dentre as quais destacamos a obtida pela parametrização local da 3-variedade na forma de Monge, dada no capítulo 2.

No capítulo 3, demonstramos o resultado central: o projetivo de curvatura em um ponto  $p \in M$  é uma superfície isomorfa (difeomorfa) à superfície de Veronese clássica

de ordem 2, composta com uma transformação afim de  $\mathbb{R}^5$  em  $N_pM \equiv \mathbb{R}^{n-3}$ . A transformação linear associada é dada por  $T$  em (3.1.1), o projetivo de curvatura é substancial no subespaço  $Aff_p \subset N_pM$  e  $\dim E_p = \dim Aff_p = \text{posto}([T])$ , sendo  $E_p$  o subespaço linear determinado pelo projetivo de curvatura em  $p$  e  $Aff_p = H + E_p$ .

Assim, geometricamente podemos ter os seguintes projetivos de curvatura em  $p$ : uma superfície substancial no 5-espaço  $Aff_p$ , isomorfa à superfície de Veronese clássica de ordem 2, se  $\dim E_p = 5$ . Dizemos neste caso, que o projetivo de curvatura em  $p$  não se degenera. Quanto aos casos degenerados, o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo à uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 no  $k$ -espaço  $Aff_p$ , se  $\dim E_p = k$  para  $k = 3, 4$ , ou o projetivo de curvatura é isomorfo a uma região plana substancial no 2-plano  $Aff_p$ , se  $\dim E_p = 2$ , ou o projetivo de curvatura é um segmento de reta ou é um ponto.

Dado  $p \in M$ , se  $\dim E_p < 5$  obtemos algum tipo de umbilicidade em  $p$  e quanto menor for esta dimensão mais umbílico será o ponto, ou seja, teremos mais "simetrias" no entorno deste ponto da 3-variedade. A partir disso, classificamos os pontos de  $M$ . Em alguns casos, a nomenclatura segue a utilizada por Montaldi em [23], Moraes em [25] e por Nuño-Ballesteros e Romero-Fuster em [27]. Dizemos que  $p$  é ponto quase-quase-umbílico se  $\dim E_p = 4$ , ou seja, o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma superfície substancial no 4-espaço  $Aff_p$ . Dizemos que  $p$  é ponto semi-quase-umbílico se  $\dim E_p = 3$ , isto é, se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma superfície substancial no 3-espaço  $Aff_p$ . O ponto  $p \in M$  é denominado quase-umbílico se  $\dim E_p = 2$ , isto é, se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma região plana no 2-plano  $Aff_p$ . Dizemos que um ponto  $p \in M$  é semi-umbílico se  $\dim E_p = 1$ , isto é, se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em um segmento de reta neste ponto. Se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em um ponto, dizemos que  $p$  é umbílico; no caso em que o projetivo de curvatura coincide com a origem de  $N_pM$  o ponto  $p$  é umbílico planar.

A designação quase-umbílico é feita em outro contexto em [27], no caso específico de imersões especiais da 3-variedade em  $\mathbb{R}^5$ . Observamos que para estas imersões de 3-variedades, a designação que demos aqui coincide.

Também utilizamos a decomposição de  $M$  em subconjuntos de tipo  $M_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 6$  para caracterizar os pontos quase-quase-umbílicos, semi-quase-umbílicos, quase-umbílicos, semi-umbílicos, umbílicos e não degenerados.

Ainda no capítulo 3, apresentamos uma análise mais detalhada da natureza geométrica

dos projetivos de curvatura em pontos de  $M$ . Assim, se  $p \in M$  é ponto quase-quase-umbílico, o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma superfície substancial no 4-espaço  $Aff_p$ , que pode ou não induzir um mergulho do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  neste 4-espaço. Se  $p \in M$  é ponto semi-quase-umbílico, o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo à uma das superfícies de Steiner: a superfície Romana de Steiner, a Cross-Cap, a superfície de Steiner de Tipo 5 ou a Cross-Cup, ou está contido em um cone ou é um elipsóide. Quando  $p \in M$  é ponto quase-umbílico, o projetivo é uma região plana isomorfa às regiões que incluem região triangular, região elíptica, cone planar e algumas projeções planares. Finalmente, se  $p \in M$  é ponto semi-umbílico então o projetivo de curvatura em  $p$  é um segmento de reta e se  $p \in M$  é ponto umbílico ele se reduz a um ponto.

Estudamos exemplos de 3-variedades para os quais calculamos o projetivo de curvatura em todos os seus pontos. Um deles é dado pela 3-variedade de Veronese clássica de ordem 2 e os outros por 3-variedades de translação. No exemplo da 3-variedade de Veronese clássica de ordem 2, em todos os seus pontos o projetivo de curvatura é uma superfície de Veronese de ordem 2 substancial em um 5-espaço de  $\mathbb{R}^6$ , transversal a origem. Portanto, o projetivo de curvatura é não degenerado. Nos outros exemplos, em todos os pontos das 3-variedades o projetivo de curvatura é degenerado.

Tendo em vista a natureza geométrica dos projetivos de curvatura nos casos degenerados, no capítulo 4, realizamos um breve estudo sobre as singularidades destes objetos.

Neste capítulo, também introduzimos o conceito de ponto 2-singular da imersão, no sentido de Feldman. Mostramos que, uma 3-variedade  $M$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , é 2-regular se, e somente se, todos os seus pontos são de tipo  $M_6$ . Também mostramos que os pontos quase-quase-umbílicos, semi-quase-umbílicos, quase-umbílicos, semi-umbílicos e umbílicos são casos particulares de pontos 2-singulares.

Assim, a 3-variedade de Veronese clássica de ordem 2 é um exemplo de imersão 2-regular no sentido de Feldman em todos os seus pontos.

No capítulo 5, encontramos condições para que uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , tenha contato com  $k$ -planos e  $k$ -esferas,  $3 \leq k \leq 8$ , determinando para qual  $k$  mínimo ocorre tal contato. Estabelecemos estes contatos analisando em cada ponto qual é sua classificação em termos do projetivo de curvatura. Consideramos os contatos de ordem  $\geq 2$ .

Este estudo foi feito, usando a técnica introduzida por Montaldi [23] que utiliza uma

aplicação de contato entre subvariedades e estuda as suas singularidades. Neste capítulo, analisamos as singularidades de funções altura e funções distância ao quadrado para discutir os contatos de ordem  $\geq 2$  de 3-variedades com hiperplanos e hiperesferas, respectivamente. Em seguida estudamos os contatos de  $M$  com  $k$ -planos e  $k$ -esferas determinando o  $k$  mínimo para cada um dos casos em função da classificação  $M_i$  e o fato do projetivo de curvatura se degenerar ou não.

Caracterizamos também o cone das direções degeneradas que é o conjunto de todas as direções normais degeneradas que definem contatos de ordem maior com  $k$ -planos.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados que serão necessários para os capítulos seguintes do presente trabalho, os quais incluem: regularidade de segunda ordem, germe de aplicação e espaço de jatos, o conceito de elipse de curvatura normal, superfícies de Steiner e de Boy e aplicação de Veronese clássica de ordem 2.

---

### 1.1 Imersão, Submersão, Mergulho e Regularidade de Segunda Ordem

---

Na sequência e com o intuito de fixar notação listamos alguns conceitos que serão utilizados ao longo deste trabalho. As referências são [7], [12], [13], [16] e [18].

**Definição 1.1.1.** *Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Consideramos a matriz Jacobiana em  $x \in \mathbb{R}^n$  que é a matriz de ordem  $m \times n$  dada por:*

$$J_g(x) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right),$$

onde  $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Esta matriz é a matriz nas respectivas bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  da transformação linear derivada  $d_x g$ .

Dizemos que  $x$  é um ponto singular (ou singularidade) de  $g$  se  $\text{posto}(J_g(x)) < \min(n, m)$ , sendo  $\text{posto}(J_g(x)) = \text{posto}(d_x g)$ .

Caso contrário,  $x$  é chamado ponto regular de  $g$ .

**Definição 1.1.2.** Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que  $g$  é uma imersão se a diferencial  $d_x g$  é injetiva,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Se a diferencial  $d_x g$  é sobrejetiva,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $g$  é uma submersão.

**Definição 1.1.3.** Uma aplicação diferenciável  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um mergulho quando:

- i)  $g$  é um homeomorfismo sobre  $g(\mathbb{R}^n)$ ;
- ii)  $g$  é uma imersão,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.1.4.** Uma aplicação  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um difeomorfismo se:

- i)  $g$  é bijetiva;
- ii) ambas  $g$  e sua inversa  $g^{-1}$  são diferenciáveis.

**Definição 1.1.5.** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo se  $T$  é bijetiva.

Usaremos a designação de classe  $C^k$  para aplicações com derivadas parciais contínuas até ordem  $k$ .

A seguir apresentamos a definição de imersão 2-regular no sentido de Feldman ([7]). Para o caso de imersões de  $m$ -variedades  $M^m$  em  $\mathbb{R}^{m+k}$  o espaço tangente de ordem 2,  $T_2 M^m = \cup_{p \in M^m} T_p^2 M^m$ , é o espaço gerado por todas as derivadas até segunda ordem em todos os pontos de  $M^m$ . Assim, uma imersão é 2-singular em  $p$  se a dimensão de  $T_p^2 M^m$  não for a máxima possível, isto é:

**Definição 1.1.6.** Dada uma imersão  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ , dizemos que:

$p$  é ponto 2-singular de  $\psi$  se, e somente se, a aplicação linear  $d_p^2 \psi : T_p^2 \mathbb{R}^m \rightarrow T_{\psi(p)}^2 \mathbb{R}^{m+k}$  não é injetiva.

Dizemos que a imersão  $\psi$  é 2-regular se, e somente se, não existem pontos 2-singulares em  $\mathbb{R}^m$ .

Às vezes, usaremos as denominações ponto singular de segunda ordem e regular de segunda ordem.

---

## 1.2 Germe de Aplicação e Espaço de Jatos

---

Outro conceito a ser utilizado é o de germes de aplicações diferenciáveis.

Sejam  $g : P \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : Q \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações  $C^\infty$  definidas em vizinhanças abertas  $P$  e  $Q$  de  $x \in \mathbb{R}^m$ . Dizemos que  $g$  e  $h$  são *equivalentes* e escrevemos  $g \sim h$  se, e somente se, existir uma vizinhança aberta de  $x$ ,  $S \subset P \cap Q$  em  $\mathbb{R}^m$ , tal que  $g|_S = h|_S$ . Isto define uma relação de equivalência e cada uma de suas classes se chama *germe de aplicação* de  $(\mathbb{R}^m, x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Além disso, dada uma aplicação qualquer  $g : P \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a classe determinada por ela é denotada por  $g : (\mathbb{R}^m, x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

O germe de uma aplicação  $g : (\mathbb{R}^m, x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é dito singular se a matriz Jacobiana  $J_g(x)$  não tem posto máximo, caso contrário  $g$  é dito regular.

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $g, h : (\mathbb{R}^m, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  dois germes. Dizemos que  $g$  e  $h$  têm ordem de contato  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), e representaremos por  $g \sim_k h$ , se*

$$\frac{\partial^{|\lambda|} g_i}{\partial x^\lambda}(p) = \frac{\partial^{|\lambda|} h_i}{\partial x^\lambda}(p),$$

para todo multi-índice  $\lambda$ , com  $|\lambda| \leq k$  e para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Isto define uma classe de equivalência sobre o conjunto  $C_{p,q}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  das aplicações  $r$  vezes diferenciáveis de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$ , cuja imagem em  $p$  é  $q$ .

Denotaremos por

$$J_{p,q}^{k,r}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \frac{C_{p,q}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)}{\sim_k}, \quad J^{k,r}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} J_{p,q}^{k,r}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad e$$

$$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} J_{p,q}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

**Definição 1.2.2.** *Um elemento de  $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  é denotado por  $j^k g = [g]$  e chamado  $k$ -jato. O espaço  $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  é denominado espaço de  $k$ -jatos de aplicações de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definição 1.2.3.** *Se  $\sigma = j^k g(x) \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  denota um  $k$ -jato, sendo  $g$  um representante da classe de  $\sigma$  em  $J_{x,g(x)}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  então  $x$  é denominado fonte de  $\sigma$  e  $y=g(x)$  meta de  $\sigma$ . Além disso, temos a aplicação fonte  $\alpha : J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  e a aplicação meta  $\beta : J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dadas por  $\alpha(\sigma) = x$  e  $\beta(\sigma) = y$ , respectivamente.*

---

## 1.3 Elipse de Curvatura

---

Nesta seção apresentamos um resumo de conceitos e resultados sobre elipses de curvatura de uma superfície  $S$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , ([24], [19], [25]).

Parte destes resultados serão estendidos para 3-variedades ao longo deste trabalho.

Adotaremos a notação  $\eta_e$  para a expressão da elipse de curvatura.

### 1.3.1 Elipse de Curvatura Normal

De um modo geral, a elipse de curvatura associada a um ponto  $p$  de uma superfície  $S$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , é definida como sendo o lugar geométrico de todos os pontos finais dos vetores curvatura das secções normais ao longo de todas as direções tangentes a  $S$  em  $p$ . Ou ainda:

**Definição 1.3.1.** *Dado  $p \in S$ , consideramos o círculo unitário  $S^1$  no plano tangente  $T_p S$  parametrizado por  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Denotamos por  $\gamma_\theta$  a secção normal de  $S$  na direção  $\nu_\theta = \cos(\theta)\nu_1 + \sin(\theta)\nu_2$  em relação a um referencial  $\{\nu_1, \nu_2\}$  do plano tangente  $T_p S$ , a qual é uma curva obtida por  $\gamma_\theta = S \cap H_\theta$ , onde  $H_\theta = \{\lambda\nu_\theta\} \oplus N_p S$  é um hiperplano em  $p$ . O vetor curvatura normal  $\eta_e(\theta)$  de  $\gamma_\theta$  em  $p$  está em  $N_p S$ . Variando  $\theta$  de  $0$  até  $2\pi$ , este vetor descreve uma curva no espaço normal  $N_p S$ , chamada elipse de curvatura normal de  $S$  em  $p$ .*

Com o objetivo de obter uma expressão para a aplicação  $\eta(\theta)$ , consideramos para cada ponto  $p \in S$  a imersão de  $S$  em  $\mathbb{R}^n$  dada localmente como a imagem de um mergulho

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto \psi(x, y), \end{aligned}$$

tal que  $\psi(\mathbb{R}^2) = S \cap W_p$ , sendo  $W_p$  uma vizinhança de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Consideramos ainda a decomposição

$$\mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n = T_p S \oplus N_p S, \tag{1.3.1}$$

onde  $T_p S$  denota o plano tangente à superfície  $S$  em  $p$  e  $N_p S$  o seu complemento ortogonal em  $\mathbb{R}^n$ , que é o subespaço normal a  $S$  em  $p$ ,  $N_p S = (T_p S)^\perp$ .

Notamos também que  $S$  imersa em  $\mathbb{R}^n$  pode ser parametrizada localmente por  $\psi(x, y)$  e assim, um referencial ortonormal para o plano tangente  $T_p S$  pode ser dado por:

$$\nu_1(x, y) = \frac{\psi_x(x, y)}{\sqrt{E_e(x, y)}} \quad \text{e} \quad \nu_2(x, y) = \frac{E_e(x, y)\psi_y(x, y) - F_e(x, y)\psi_x(x, y)}{\sqrt{E_e(x, y)(E_e(x, y)G_e(x, y) - F_e(x, y)^2)}},$$

onde

$$E_e(x, y) = \|\psi_x(x, y)\|^2, \quad F_e(x, y) = \psi_x(x, y) \cdot \psi_y(x, y) \quad \text{e} \quad G_e(x, y) = \|\psi_y(x, y)\|^2$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental associados a  $S$  em  $(x, y)$ .

Observamos que o vetor curvatura normal de uma curva qualquer de  $S$  depende apenas da direção tangente considerada. Assim, para a curva  $\gamma_\theta$  da definição 1.3.1 com direção tangente unitária  $\nu_\theta = \cos(\theta)\nu_1 + \sin(\theta)\nu_2$ , Moraes mostra em [25] que a expressão da elipse de curvatura em  $p \in S$ ,

$$\begin{aligned} \eta_e : S^1 \subset T_p S &\longrightarrow N_p S \\ \theta &\longmapsto \eta_e(\theta) \end{aligned}$$

é dada por:

$$\begin{aligned} \eta_e(\theta) &= \frac{1}{2E_e} \left( \psi_{xx}^N + \frac{1}{E_e G_e - F_e^2} (E_e^2 \psi_{yy}^N - 2E_e F_e \psi_{xy}^N + F_e^2 \psi_{xx}^N) \right) \\ &+ \frac{1}{2E_e} \left( \psi_{xx}^N - \frac{1}{E_e G_e - F_e^2} (E_e^2 \psi_{yy}^N - 2E_e F_e \psi_{xy}^N + F_e^2 \psi_{xx}^N) \right) \cos(2\theta) \\ &+ \frac{1}{E_e \sqrt{E_e G_e - F_e^2}} (E_e \psi_{xy}^N - F_e \psi_{xx}^N) \sin(2\theta). \end{aligned}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}
H_e &= \frac{1}{2E_e} \left( \psi_{xx}^N + \frac{1}{E_e G_e - F_e^2} (E_e^2 \psi_{yy}^N - 2E_e F_e \psi_{xy}^N + F_e^2 \psi_{xx}^N) \right), \\
B_e &= \frac{1}{2E_e} \left( \psi_{xx}^N - \frac{1}{E_e G_e - F_e^2} (E_e^2 \psi_{yy}^N - 2E_e F_e \psi_{xy}^N + F_e^2 \psi_{xx}^N) \right) \quad \mathbf{e} \\
C_e &= \frac{1}{E_e \sqrt{E_e G_e - F_e^2}} (E_e \psi_{xy}^N - F_e \psi_{xx}^N),
\end{aligned}$$

a expressão da elipse de curvatura em  $p$  pode ser dada por:

$$\eta_e(\theta) = H_e + B_e \cos(2\theta) + C_e \sin(2\theta). \quad (1.3.2)$$

Observamos que o vetor  $H_e$  é o vetor curvatura média de  $S$  em  $p$ .

Dada uma superfície  $S$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , para cada ponto  $p \in S$  podemos escrever, a menos de um movimento rígido, a imersão de  $S$  em  $\mathbb{R}^n$ , em uma vizinhança de  $p$ , na forma de Monge, como na sequência.

A imersão  $\psi : (S, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \psi(p))$ , localmente na forma de Monge é dada por:

$$\begin{aligned}
f : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, (0, 0, 0, \dots, 0)) \\
(x, y) &\longmapsto f(x, y) = x\omega_1 + y\omega_2 + f_1(x, y)\omega_3 + \dots + f_{n-2}(x, y)\omega_n,
\end{aligned}$$

onde  $p$  será identificado com  $(0, 0)$ ,  $p \equiv (0, 0)$ , e  $\{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $\{\omega_3, \dots, \omega_n\}$  são referenciais tangentes e normais, respectivamente, a  $S$  em  $p$ . Nesta vizinhança temos que:

$$\begin{aligned}
\psi_{xx}^N(p) &= f_{xx}(0, 0), \quad \psi_{xy}^N(p) = f_{xy}(0, 0), \quad \psi_{yy}^N(p) = f_{yy}(0, 0), \\
E_e(0, 0) &= G_e(0, 0) = 1 \quad \mathbf{e} \quad F_e(0, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo estes valores nos vetores  $H_e$ ,  $B_e$  e  $C_e$  listados acima obtemos:

$$H_e = \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0) + f_{yy}(0, 0)), \quad B_e = \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0) - f_{yy}(0, 0)) \quad \mathbf{e} \quad C_e = f_{xy}(0, 0).$$

Portanto, a expressão da elipse de curvatura em  $p \equiv (0, 0)$  é:

$$\eta_e(\theta) = \frac{1}{2} (f_{xx} + f_{yy}) + \frac{1}{2} (f_{xx} - f_{yy}) \cos(2\theta) + f_{xy} \sin(2\theta). \quad (1.3.3)$$

Observamos que, se os vetores  $B_e$  e  $C_e$  forem linearmente independentes então a elipse de curvatura em  $p \in S$  é uma elipse, contida no plano  $E_p = \langle B_e, C_e \rangle$ . Quando os três vetores  $H_e$ ,  $B_e$  e  $C_e$  forem linearmente independentes, a elipse de curvatura em  $p$  é uma elipse contida no plano afim  $Aff_p = H_e + E_p$ , deslocado da origem por  $H_e$  e paralelo a  $E_p$ .

Porém, se os vetores  $H_e$ ,  $B_e$  e  $C_e$  são dois a dois linearmente dependentes, a elipse de curvatura em  $p$  pode se degenerar em um segmento de reta ou em um ponto.

Segue assim, a definição abaixo.

**Definição 1.3.2.** *Seja  $S$  uma superfície de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ .*

*Dizemos que um ponto  $p \in S$  é semi-umbílico se a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta neste ponto. Se este segmento é de tipo radial, dizemos que  $p$  é ponto semi-umbílico radial ou ponto de inflexão.*

*Se a elipse de curvatura em  $p$  se degenera em um ponto, dizemos que  $p$  é um semi-umbílico degenerado ou umbílico; no caso em que a elipse de curvatura coincide com a origem de  $N_p S$  o ponto  $p$  é semi-umbílico degenerado planar ou umbílico planar.*

No caso de pontos não semi-umbílicos a elipse de curvatura está contida no plano que intercepta o cone no espaço normal gerado por  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$  e  $f_{yy}$ .

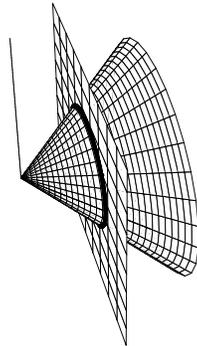


Figura 1.1: Elipse, cone e o plano que a contém.

Resultados de elipse de curvatura e contatos de superfícies com hiperplanos e hiperesferas podem ser encontrados em [9], [25], [8]. Em [2] foi feito um estudo específico no caso de superfícies de translação.

---

## 1.4 Superfícies de Steiner e Superfície de Boy

---

O espaço projetivo real de dimensão  $n$ ,  $\mathbb{P}^n$ , é o conjunto das retas do espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  passando pela origem. Quando  $n = 2$  temos o plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  definido pelas retas do espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  passando pela origem. Cada uma destas retas pode ser representada por um ponto e o conjunto resultante define de um modo abstrato, uma superfície diferenciável. Existem alguns modelos de representação ou realizações, através de homeomorfismos, do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . Alguns destes modelos foram estudados inicialmente pelo matemático suíço Jakob Steiner (1796-1863).

O ponto inicial para o estudo destas superfícies que são realizações de  $\mathbb{P}^2$  é a *superfície de Veronese* diferenciável. Ela é dada pelo mergulho do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^6$ , através da aplicação

$$\Omega(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

Ela pode ser projetada em  $\mathbb{R}^4$ , sendo um mergulho ainda, mas quando projetada em  $\mathbb{R}^3$  pode ser uma imersão ou pode ter singularidades ([6]).

Uma projeção da superfície de Veronese em um espaço tridimensional é denominada *superfície de Steiner*. As superfícies de Steiner restritas a parâmetros reais foram estudadas recentemente por Coffman et al. em [5], quando eles estudavam o problema da classificação das superfícies parametrizáveis quadraticamente. Para realizar este estudo eles consideraram as superfícies de Steiner como objetos do 3-espaço projetivo real  $\mathbb{P}^3$ . O domínio paramétrico foi assumido em  $\mathbb{P}^2$ , que pode ser trocado localmente para domínio paramétrico real  $\mathbb{R}^2$ . Usando sistemas de coordenadas homogêneas em espaços projetivos, a aplicação de Veronese pode ser dada por

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} : \quad \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [x_1 : x_2 : x_3] &\longmapsto [x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_1x_2 : x_1x_3 : x_2x_3]. \end{aligned}$$

Assim, cada projeção da superfície de Veronese no 3-espaço projetivo  $\mathbb{P}^3$  gera uma superfície  $\Sigma$  cuja parametrização quadrática pode ser construída como segue: seja

$$P_\Sigma = \left( P_\Sigma \right)_{6 \times 4}$$

uma matriz de ordem  $6 \times 4$  e posto 4, a matriz de parâmetros de  $\Sigma$ . Então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_{\Sigma} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \end{pmatrix} P_{\Sigma}. \end{aligned}$$

é a parametrização de  $\Sigma$ . Como ela é homogênea (de grau 2) ela determina uma aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\Sigma} : \quad \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [x_1 : x_2 : x_3] &\longmapsto [u_1 : u_2 : u_3 : u_4]. \end{aligned}$$

Com o objetivo de classificar todas as superfícies de Steiner eles introduziram o conceito de *parametrizações equivalentes*.

Sejam  $\psi_{\Sigma_1}$  e  $\psi_{\Sigma_2}$  parametrizações quadráticas das superfícies  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , respectivamente. Elas são equivalentes se  $\psi_{\Sigma_1}(x) = \psi_{\Sigma_2}(xZ)W$ , onde  $Z = Z_{3 \times 3}$  e  $W = W_{4 \times 4}$  são matrizes invertíveis.

Assim, eles classificaram estas superfícies em dez classes de equivalência, sendo que, em nove delas cada representante da classe é uma superfície de Steiner que pode ser realizada como variedade algébrica real de grau 3 ou 4. Dentre estas superfícies, destacam-se a superfície Romana de Steiner, a Cross-Cap e a Cross-Cup. A última classe é formada pelas superfícies quádricas que têm grau 2. Todas estas classes de equivalência foram ordenadas em superfícies de Tipo 1 a 10.

Como foi mencionado anteriormente, algumas destas superfícies têm singularidades, às quais serão discutidas no capítulo 4.

Tendo em vista os objetivos deste trabalho, listamos apenas alguns destes dez tipos. A lista completa com um representante de cada uma das dez classes de equivalência obtidas por Coffman et al. e as diversas maneiras de escrever estas superfícies através de parametrizações homogêneas ou afins pode ser encontrada em [5] e [6].

Consideraremos agora o plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  homeomorfo ( $\simeq$ ) à superfície definida por

$$S^2_{\sim} = \left\{ [p] = \{p, -p\} : \|p\| = 1 \right\},$$

onde a relação de equivalência  $\sim$  é a relação que identifica os pontos antípoda da esfera unitária  $S^2$ .

Desta forma, para realizar o plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  como uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  vamos considerar uma aplicação

$$\begin{aligned} R : S^2 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto R(p) \end{aligned}$$

que satisfaz a propriedade antipodal:  $R(p) = R(-p)$ .

Isto induz o seguinte diagrama de aplicações:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{R} & N_p M \\ \Pi \downarrow & \nearrow \bar{R} & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array} \quad (1.4.4)$$

onde  $\Pi(p) = [p]$  é a projeção usual e  $\bar{R} \circ \Pi(p) = \bar{R}([p]) = R(p)$ .

Assim, podemos realizar  $\mathbb{P}^2$  como a imagem de  $S^2$  através de uma aplicação  $R$  com propriedade antipodal. Logo, a imagem do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície fechada.

Recordamos a parametrização usual da esfera unitária em coordenadas esféricas:

$$r(\theta, \phi) = (x, y, z),$$

onde

$$\begin{cases} x = \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \sin(\phi) \sin(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \\ z = \cos(\phi) \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Na sequência apresentamos somente as superfícies de Steiner, na forma padrão, que podem ser realizadas como superfícies, através de uma aplicação  $R$  com propriedade antipodal, isto é, que são superfícies fechadas em  $\mathbb{R}^3$ . Observamos que estas superfícies têm grau 4.

### 1.4.1 Superfície de Steiner de Tipo 1: Superfície Romana de Steiner

Esta superfície foi descrita por Jakob Steiner em 1844 quando estava de férias em Roma ([1]). Para descrevê-la consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} R : S^2 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (xy, xz, yz), \end{aligned}$$

que satisfaz a propriedade antipodal.

Logo,  $R$  induz uma aplicação de  $\mathbb{P}^2$  sobre  $R(S^2)$ , cuja imagem é a *superfície Romana de Steiner*.

Sua forma implícita é dada por:

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - xyz = 0.$$

Além disso, considerando a parametrização usual da esfera unitária obtemos a seguinte parametrização para a superfície Romana de Steiner:

$$R_1(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left( (\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), \cos(\theta) \sin(2\phi), \sin(\theta) \sin(2\phi) \right). \quad (1.4.6)$$

### 1.4.2 Superfície de Steiner de Tipo 3: Superfície Cross-Cap

Consideramos a aplicação quadrática

$$\begin{aligned} R : S^2 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (yz, 2xy, x^2 - y^2), \end{aligned}$$

que satisfaz a propriedade antipodal. Logo, induz uma aplicação de  $\mathbb{P}^2$  sobre  $R(S^2)$ , cuja imagem é uma superfície denominada *superfície Cross-Cap*.

Sua forma implícita é dada por:

$$4x^2(x^2 + y^2 + z^2 + z) + y^2(y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

Outra parametrização para a superfície Cross-Cap é dada por:

$$R_1(\theta, \phi) = \left( \frac{1}{2} \sin(\theta) \sin(2\phi), (\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), (\sin(\phi))^2 \cos(2\theta) \right). \quad (1.4.7)$$

### 1.4.3 Superfície de Steiner de Tipo 5

Consideramos a aplicação quadrática

$$\begin{aligned} R : S^2 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2xy, 2xz, 1 - 2z^2), \end{aligned}$$

que satisfaz a propriedade antipodal. Logo, ela induz uma aplicação de  $\mathbb{P}^2$  sobre  $R(S^2)$ , cuja imagem é uma superfície de Steiner classificada como de Tipo 5, à qual denominaremos *superfície de Steiner de Tipo 5*.

Sua forma implícita é dada por:

$$x^2(z - 1)^2 + y^2(y^2 + z^2 - 1) = 0,$$

e uma expressão paramétrica por:

$$R_1(\theta, \phi) = \left( (\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), \cos(\theta) \sin(2\phi), -\cos(2\phi) \right). \quad (1.4.8)$$

### 1.4.4 Superfície de Steiner de Tipo 6: Superfície Cross-Cup

A superfície de Steiner de Tipo 6 é também conhecida como superfície Cross-Cup por se assemelhar à Cross-Cap. Consideramos a aplicação quadrática

$$\begin{aligned} R : S^2 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( z^2 + y^2, y^2 + 2xy, \frac{\sqrt{2}}{2}(xz + yz) \right). \end{aligned}$$

que satisfaz a propriedade antipodal. Logo, ela induz uma aplicação de  $\mathbb{P}^2$  sobre  $R(S^2)$ , cuja imagem é a *superfície Cross-Cup*.

Sua forma implícita é dada por:

$$\begin{aligned} -\frac{5}{4}x^4 + 3x^3y - \frac{5}{2}x^2y^2 + xy^3 - \frac{1}{4}y^4 - 3x^2z^2 + 4xyz^2 - y^2z^2 - z^4 + \frac{7}{2}x^3 - \\ \frac{11}{2}x^2y + \frac{5}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^3 + 5xz^2 - 3yz^2 - \frac{13}{4}x^4 + \frac{5}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 - 2z^2 + x = 0. \end{aligned}$$

Considerando a parametrização usual da esfera unitária temos a seguinte parametrização para a superfície Cross-Cup:

$$R_1(\theta, \phi) = \left( (\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2(\sin(\theta))^2, (\sin(\phi))^2((\sin(\theta))^2 + \sin(2\theta)), \right. \\ \left. \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(2\phi)(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \right). \quad (1.4.9)$$

Finalizamos esta seção apresentando um breve relato sobre a *superfície de Boy*.

### 1.4.5 Superfície de Boy

Esta superfície é uma realização do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  sem singularidades. Ela foi descoberta inicialmente em 1901 por Werner Boy (1879-1914), quando este estudava um problema proposto por David Hilbert (1862-1943). Hilbert propôs a Boy a tarefa de verificar se existia ou não uma imersão do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  como uma superfície fechada em  $\mathbb{R}^3$  sem singularidades. Vale lembrar que muitas realizações de  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  como superfícies fechadas com singularidades eram conhecidas. Boy mostrou que tal superfície existia se suas auto-interseções fossem em curvas de pontos duplos que se interceptariam em um ponto triplo.

Porém, ele não conseguiu encontrar equações paramétricas para sua superfície e tampouco conseguiu visualizá-la.

Isso foi feito somente em 1978, quando Bernard Morin descobriu a primeira parametrização da superfície de Boy. Por ironia do destino, ele ficou cego e nunca conseguiu visualizar sua parametrização. Outras parametrizações foram encontradas depois, com destaque para a encontrada por François Apéry ([1]).

Esta superfície é topologicamente homeomorfa à superfície Romana de Steiner. Apesar de as duas terem auto-interseção e possuírem um ponto triplo, a diferença real está no fato de que a superfície Romana de Steiner tem seis pontos singulares (como veremos no capítulo 4), enquanto a superfície de Boy não tem singularidades.

Outra observação é que a superfície de Boy pode ser realizada como uma variedade algébrica real de grau 6, diferentemente das superfícies de Steiner que têm grau máximo 4.

Suas equações podem ser encontradas em [1], [6] e [14].

---

## 1.5 Superfície de Veronese Clássica de Ordem 2

---

Como vimos na seção anterior, uma superfície de Veronese é um mergulho do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^6$ .

Apresentamos aqui, um breve resumo dos principais resultados relativos às variedades de Veronese ([19]) e ([7]), às quais estão contidas em um esfera.

Consideramos a aplicação de Veronese de ordem 2 dada por:

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \circ \bar{x}, \end{aligned}$$

que associa a cada  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$  o produto tensorial simétrico, denotado por  $\circ$ , de  $\bar{x}$  por  $\bar{x}$ . A aplicação  $\xi$  é chamada *aplicação de Veronese de ordem 2*.

Existe um isomorfismo isométrico entre o 2-produto tensorial simétrico  $\mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} = o^2\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\mathbb{R}^N$ , onde  $N$  é o número de monômios de grau 2 em  $n + 1$  variáveis, dado por

$$N = \binom{n+2}{2}.$$

Deste modo, a aplicação de Veronese de ordem 2 é dada por:

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^N \\ \bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1^2, \dots, x_{n+1}^2, \sqrt{2}x_1x_2, \dots, \sqrt{2}x_nx_{n+1}) \end{aligned}$$

e chamada *aplicação de Veronese clássica de ordem 2*.

Seja  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a esfera unitária centrada na origem. A imagem  $\xi(S^n)$  é chamada *n-variedade de Veronese clássica de ordem 2 e dimensão n*.

Segue da proposição 3.5.2 ([7], p. 65) que  $\xi(S^n)$  está contida em um hiperplano  $\mathbb{H}^{N-1}$  de  $\mathbb{R}^N$  e também na esfera unitária centrada na origem  $S^{N-1}$ , ou ainda,

$$\xi(S^n) \subset S^{N-1} \cap \mathbb{H}^{N-1} = S^{N-2}(\epsilon).$$

Da proposição 3.5.3 ([7], p. 65) temos que a aplicação  $\xi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$  é *substancial* em  $\mathbb{R}^{N-1}$ , isto é,  $\xi(S^n)$  não está contida em nenhum hiperplano afim de dimensão  $\leq N - 2$  em  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

Outro resultado importante afirma que: a aplicação  $\xi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$  é uma imersão e  $\xi(S^n) \subset S^{N-1}$  é uma subvariedade. Além disso, esta aplicação induzirá um mergulho  $\tilde{\xi} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{H}^{N-1} \equiv \mathbb{R}^{N-1}$ , onde  $\mathbb{P}^n$  é o espaço projetivo real n dimensional.

No caso da superfície de Veronese clássica de ordem 2, ([7], p. 55), temos que:

$$\xi(S^2) \subset S^5 \cap \mathbb{H}^5 = S^4\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

isto é, ela está contida em uma esfera de raio  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  cuja expressão é dada por:

$$\xi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{\sqrt{6}}{6}(3x_2^2 - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2x_1^2 - x_2^2), \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3 \right). \quad (1.5.10)$$

O hiperplano afim é dado por  $\mathbb{H}^5 = \left\{ (u_1, \dots, u_6) \in \mathbb{R}^6 : u_1 + u_2 + u_3 = 1 \right\}$ .

Outro resultado importante sobre a aplicação de Veronese está relacionado com a não singularidade de segunda ordem da imersão, no sentido de Feldman.

**Proposição 1.5.1.** *A aplicação de Veronese de ordem 2 é uma aplicação 2-regular.*

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# Segunda Forma Fundamental e Projetivo de Curvatura

O projetivo de curvatura é a extensão do conceito de elipse de curvatura para 3-variedades. É caracterizado pelo lugar geométrico dos vetores de curvatura normal em um ponto de uma variedade tridimensional de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ . O desenvolvimento que apresentamos aqui inclui extensões para 3-variedades de resultados de [25] para elipses de curvatura de superfícies.

Iniciamos lembrando o conceito de segunda forma fundamental associado a uma 3-variedade  $M$ , munida de uma conexão Riemanniana  $\nabla$  induzida da conexão euclidiana  $\bar{\nabla}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ . Em seguida, introduzimos a definição de coeficientes da segunda forma fundamental associados a  $M$  em um ponto. Usando estes conceitos, deduzimos expressões para o projetivo de curvatura em pontos de  $M$ .

Ao longo deste trabalho, denominaremos por projetivo de curvatura tanto o lugar geométrico dos vetores de curvatura normal, bem como a aplicação  $\eta(\theta, \phi)$  que define a expressão do projetivo de curvatura.

Também apresentamos alguns exemplos de projetivos de curvatura.

---

## 2.1 Segunda Forma Fundamental

---

Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ . Vamos introduzir a segunda forma fundamental considerando-a relativamente a um campo  $\omega$  normal a  $M$ .

Para cada ponto  $p \in M$  consideramos a imersão de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$  dada localmente como a imagem de um mergulho  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi(\mathbb{R}^3) = M \cap W_p$ , onde  $W_p$  é uma vizinhança de  $p \in \mathbb{R}^n$ . Consideramos ainda a decomposição

$$\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_pM,$$

onde  $T_pM$  denota o espaço tridimensional tangente a 3-variedade  $M$  em  $p$  e  $N_pM$  o seu complemento ortogonal em  $\mathbb{R}^n$ , que é o subespaço normal a  $M$  em  $p$ ,  $N_pM = (T_pM)^\perp$ .

Seja  $\bar{\nabla}$  a conexão Riemanniana euclidiana de  $\mathbb{R}^n$ . Dados campos de vetores  $X, Y$  localmente definidos ao longo de  $M$ , podemos escolher extensões locais  $\bar{X}, \bar{Y}$  em  $\mathbb{R}^n$  e definir a conexão Riemanniana  $\nabla$  de  $M$  como  $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$  que denota a componente tangencial a  $M$  da conexão  $\bar{\nabla}$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $\mathcal{X}(M)$  e  $\mathcal{N}(M)$  os espaços dos campos tangentes e normais em  $M$ , respectivamente. A aplicação **segunda forma fundamental em  $M$**  é definida como segue:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{N}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N. \end{aligned}$$

$\alpha$  é uma aplicação bem definida, simétrica e bilinear (vide [4], p. 140-141).

Da bilinearidade de  $\alpha$ , concluímos, exprimindo  $\alpha$  em um sistema de coordenadas, que o valor de  $\alpha(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X(p)$  e  $Y(p)$ .

Assim, dados  $p \in M$  e  $\omega \in N_pM$ , podemos considerar a aplicação dada pela forma bilinear simétrica:

$$\begin{aligned} H_\omega : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X(p), Y(p)) &\longmapsto \alpha(X, Y)(p) \cdot \omega, \end{aligned}$$

onde  $\cdot$  denota produto interno.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ . Dados  $p \in M$  e  $\omega$  um vetor normal em  $N_pM$ , definimos a **segunda forma fundamental de  $M$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\omega$**  como sendo a forma quadrática dada por:*

$$\begin{aligned} II_\omega : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X(p) &\longmapsto II_\omega(X(p)) = \alpha(X, X)(p) \cdot \omega. \end{aligned}$$

Observamos, para facilitar os cálculos, que se  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é um referencial ortonormal em  $\mathbb{R}^n$ , então podemos escrever

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i(x_1, \dots, x_n) e_i \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j(x_1, \dots, x_n) e_j,$$

e

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \sum_{i=1}^n (\text{grad}(X_i)Y) e_i = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) Y_j(x_1, \dots, x_n) \right) \right] e_i.$$

Notamos também que a 3-variedade  $M$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ , pode ser parametrizada localmente por  $\psi(x, y, z)$ . Assim, como  $\psi$  é uma imersão, um referencial ortonormal para  $\mathcal{X}(M)$  pode ser dado pelos campos de vetores:

$$\begin{aligned} \nu_1(q) &= \frac{\psi_x(q)}{\sqrt{E}}, \quad \nu_2(q) = \frac{E\psi_y(q) - F\psi_x(q)}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \quad \text{e} \\ \nu_3(q) &= \frac{(EI - F^2)\psi_z(q) + (FG - EJ)\psi_y(q) + (FJ - IG)\psi_x(q)}{\sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}}, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

sendo  $E, F, G, I, J$  e  $K$  calculados em  $q = (x, y, z)$  e dados por:

$$\begin{aligned} E(q) &= \|\psi_x(q)\|^2, \quad F(q) = \psi_x(q) \cdot \psi_y(q), \quad G(q) = \psi_x(q) \cdot \psi_z(q), \\ I(q) &= \|\psi_y(q)\|^2, \quad J(q) = \psi_y(q) \cdot \psi_z(q) \quad \text{e} \quad K(q) = \|\psi_z(q)\|^2. \end{aligned}$$

Eles são os **coeficientes da primeira forma fundamental associados a  $M$  em  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$** .

Além disso, dado  $\nu(q) \in \mathcal{X}(M)$ , temos que  $\nu(q) = \lambda_1 \nu_1(q) + \lambda_2 \nu_2(q) + \lambda_3 \nu_3(q)$ . Portanto, para determinar uma forma local de  $\alpha$  em  $M$  basta calcular:

$$\alpha(\nu_i(q), \nu_j(q)), \quad \text{com } 1 \leq i, j \leq 3.$$

De fato, para  $q = (x, y, z)$ , efetuando todos os cálculos (dos quais alguns foram omitidos aqui) obtemos

$$\alpha(\nu_1, \nu_1) = \left( \nabla_{\nu_1} \nu_1 \right)^N = \left( \nabla_{\frac{\psi_x}{\sqrt{E}}} \frac{\psi_x}{\sqrt{E}} \right)^N = \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \nabla_{\psi_x} \psi_x + \psi_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \right) \right)^N = \frac{1}{E} \psi_{xx}^N,$$

$$\begin{aligned} \alpha(\nu_1, \nu_2) &= \left( \nabla_{\nu_1} \nu_2 \right)^N = \left( \nabla_{\frac{\psi_x}{\sqrt{E}}} \left( \frac{E\psi_y - F\psi_x}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \right) \right)^N = \frac{1}{E\sqrt{EI - F^2}} \left( E\psi_{xy}^N - F\psi_{xx}^N \right) \\ &= \alpha(\nu_2, \nu_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\nu_1, \nu_3) &= \left( \nabla_{\nu_1} \nu_3 \right)^N = \left( \nabla_{\frac{\psi_x}{\sqrt{E}}} \frac{(EI - F^2)\psi_z + (FG - EJ)\psi_y + (FJ - IG)\psi_x}{\sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \right)^N \\ &= \frac{(EI - F^2)\psi_{xz}^N + (FG - EJ)\psi_{xy}^N + (FJ - IG)\psi_{xx}^N}{\sqrt{E} \sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \\ &= \alpha(\nu_3, \nu_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\nu_2, \nu_2) &= \left( \nabla_{\nu_2} \nu_2 \right)^N = \left( \nabla_{\left( \frac{E\psi_y - F\psi_x}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \right)} \left( \frac{E\psi_y - F\psi_x}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \right) \right)^N \\ &= \frac{1}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \left( E\nabla_{\psi_y} \left( \frac{E\psi_y - F\psi_x}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \right) - F\nabla_{\psi_x} \left( \frac{E\psi_y - F\psi_x}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \right) \right)^N \\ &= \frac{1}{E(EI - F^2)} \left( E^2\psi_{yy}^N - 2EF\psi_{xy}^N + F^2\psi_{xx}^N \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\nu_2, \nu_3) &= \left( \nabla_{\nu_2} \nu_3 \right)^N = \left( \nabla_{\left( \frac{E\psi_y - F\psi_x}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \right)} \left( \frac{(EI - F^2)\psi_z + (FG - EJ)\psi_y + (FJ - IG)\psi_x}{\sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \right) \right)^N \\ &= \frac{1}{\sqrt{E(EI - F^2)}} \left( E\nabla_{\psi_y} \left( \frac{(EI - F^2)\psi_z + (FG - EJ)\psi_y + (FJ - IG)\psi_x}{\sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \right) \right. \\ &\quad \left. - F\nabla_{\psi_x} \left( \frac{(EI - F^2)\psi_z + (FG - EJ)\psi_y + (FJ - IG)\psi_x}{\sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \right) \right)^N \\ &= \frac{(EI - F^2)(E\psi_{yz}^N - F\psi_{xz}^N) + (FG - EJ)(E\psi_{yy}^N - F\psi_{xy}^N)}{(EI - F^2)\sqrt{E(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \\ &\quad + \frac{(FJ - IG)(E\psi_{xy}^N - F\psi_{xx}^N)}{(EI - F^2)\sqrt{E(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \\ &= \alpha(\nu_3, \nu_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\nu_3, \nu_3) &= \left( \nabla_{\nu_3} \nu_3 \right)^N = \frac{1}{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))} \\
&\quad \left[ (EI - F^2) \nabla_{\psi_z} \left( (EI - F^2) \psi_z + (FG - EJ) \psi_y + (FJ - IG) \psi_x \right) \right. \\
&\quad + (FG - EJ) \nabla_{\psi_y} \left( (EI - F^2) \psi_z + (FG - EJ) \psi_y + (FJ - IG) \psi_x \right) \\
&\quad \left. + (FJ - IG) \nabla_{\psi_x} \left( (EI - F^2) \psi_z + (FG - EJ) \psi_y + (FJ - IG) \psi_x \right) \right]^N \\
&= \frac{(FJ - IG)^2 \psi_{xx}^N + 2(FG - EJ)(FJ - IG) \psi_{xy}^N}{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))} \\
&\quad + \frac{2(FJ - IG)(EI - F^2) \psi_{xz}^N + (FG - EJ)^2 \psi_{yy}^N}{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))} \\
&\quad + \frac{2(EI - F^2)(FG - EJ) \psi_{yz}^N + (EI - F^2)^2 \psi_{zz}^N}{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))},
\end{aligned}$$

onde  $E, F, G, I, J, K$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $M$  em  $q = (x, y, z)$ .

Assim podemos definir os coeficientes da segunda forma fundamental de  $p = \psi(q) \in M$  segundo o vetor normal  $\omega$ .

**Definição 2.1.2.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , dados  $p \in M$  e  $\omega \in N_p M$ , definimos os **coeficientes da segunda forma fundamental segundo  $\omega$**  por:*

$$\tilde{e}_\omega = \alpha(\nu_1, \nu_1) \cdot \omega = \frac{1}{E} \psi_{xx}^N \cdot \omega,$$

$$\tilde{f}_\omega = \alpha(\nu_1, \nu_2) \cdot \omega = \frac{E\psi_{xy}^N - F\psi_{xx}^N}{E\sqrt{EI - F^2}} \cdot \omega,$$

$$\tilde{g}_\omega = \alpha(\nu_1, \nu_3) \cdot \omega = \left( \frac{(EI - F^2)\psi_{xz}^N + (FG - EJ)\psi_{xy}^N + (FJ - IG)\psi_{xx}^N}{\sqrt{E} \sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}} \right) \cdot \omega,$$

$$\tilde{l}_\omega = \alpha(\nu_2, \nu_2) \cdot \omega = \left( \frac{E^2\psi_{yy}^N - 2EF\psi_{xy}^N - F^2\psi_{xx}^N}{E(EI - F^2)} \right) \cdot \omega,$$

$$\begin{aligned}\tilde{j}_\omega &= \alpha(\nu_2, \nu_3) \cdot \omega = \left( \frac{(EI-F^2)(E\psi_{yz}^N - F\psi_{xz}^N) + (FG-EJ)(E\psi_{yy}^N - F\psi_{xy}^N) + (FJ-IG)(E\psi_{xy}^N - F\psi_{xx}^N)}{(EI-F^2)\sqrt{E(K(EI-F^2) + G(FJ-IG) + J(FG-EJ))}} \right) \cdot \omega, \\ \tilde{k}_\omega &= \alpha(\nu_3, \nu_3) \cdot \omega = \left( \frac{(FJ-IG)^2\psi_{xx}^N + 2(FG-EJ)(FJ-IG)\psi_{xy}^N + 2(FJ-IG)(EI-F^2)\psi_{xz}^N}{(EI-F^2)(K(EI-F^2) + G(FJ-IG) + J(FG-EJ))} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(FG-EJ)^2\psi_{yy}^N + 2(EI-F^2)(FG-EJ)\psi_{yz}^N + (EI-F^2)^2\psi_{zz}^N}{(EI-F^2)(K(EI-F^2) + G(FJ-IG) + J(FG-EJ))} \right) \cdot \omega.\end{aligned}$$

Consideramos agora a 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , cuja imersão é dada localmente pela forma de Monge.

Seja  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  um referencial para  $M$  em  $p \in M$ , de modo que  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  é um referencial tangente de  $M$  em  $p$  e  $\{\omega_4, \dots, \omega_n\}$  um referencial normal de  $M$  em  $p$ .

Assim a imersão de  $\psi : (M, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \psi(p))$  na **forma de Monge** é dada por:

$$\begin{aligned}f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, (0, 0, 0, \dots, 0)) \\ q = (x, y, z) &\longmapsto f(q) = x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 + f_1(q)\omega_4 + \dots + f_{n-3}(q)\omega_n,\end{aligned}$$

onde o ponto  $p \in M$  será identificado com  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  e  $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0, \dots, 0)$ . Além disso, a aplicação  $f$  tem componentes  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n-3$ , que são funções reais diferenciáveis satisfazendo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial z}(0, 0, 0) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-3.$$

Notamos que

$$e_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0), \quad e_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0), \quad e_3 = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0),$$

$$E(0, 0, 0) = I(0, 0, 0) = K(0, 0, 0) = 1 \quad \text{e} \quad F(0, 0, 0) = G(0, 0, 0) = J(0, 0, 0) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\alpha(\nu_1, \nu_1)_{p=(0,0,0)} &= \psi_{xx}^N(p) = f_{xx}(p) \\ \alpha(\nu_1, \nu_2)_{p=(0,0,0)} &= \psi_{xy}^N(p) = f_{xy}(p) \\ \alpha(\nu_1, \nu_3)_{p=(0,0,0)} &= \psi_{xz}^N(p) = f_{xz}(p) \\ \alpha(\nu_2, \nu_2)_{p=(0,0,0)} &= \psi_{yy}^N(p) = f_{yy}(p) \\ \alpha(\nu_2, \nu_3)_{p=(0,0,0)} &= \psi_{yz}^N(p) = f_{yz}(p) \\ \alpha(\nu_3, \nu_3)_{p=(0,0,0)} &= \psi_{zz}^N(p) = f_{zz}(p).\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Desta forma, os coeficientes da segunda forma fundamental em  $p \equiv (0, 0, 0)$  segundo os vetores de um referencial normal  $\{e_4, e_5, \dots, e_n\}$  são dados por:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{e_{i+3}}(p) &= f_{xx}(p) \cdot e_{i+3} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(p) \\
\tilde{f}_{e_{i+3}}(p) &= f_{xy}(p) \cdot e_{i+3} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial xy}(p) \\
\tilde{g}_{e_{i+3}}(p) &= f_{xz}(p) \cdot e_{i+3} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial xz}(p) \\
\tilde{l}_{e_{i+3}}(p) &= f_{yy}(p) \cdot e_{i+3} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(p) \\
\tilde{j}_{e_{i+3}}(p) &= f_{yz}(p) \cdot e_{i+3} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial yz}(p) \\
\tilde{k}_{e_{i+3}}(p) &= f_{zz}(p) \cdot e_{i+3} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}(p),
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

os quais denotaremos por  $a_i, b_i, c_i, d_i, r_i$  e  $s_i$ , respectivamente. Portanto, a matriz  $[\alpha_f]$  da segunda forma fundamental em  $p$  segundo este referencial é dada por:

$$[\alpha_f(p)] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & r_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & r_2 & s_2 \\ & & & \vdots & & \\ a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & d_{n-3} & r_{n-3} & s_{n-3} \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

Ela é uma matriz de ordem  $(n-3) \times 6$ ; logo no caso de uma imersão de  $M$  em  $\mathbb{R}^9$ , a matriz  $[\alpha_f]$  é uma matriz quadrada. Esta matriz pode ter posto máximo 6.

A próxima definição é uma extensão da definição de pontos de tipo  $M_i$  para superfícies ([21]).

**Definição 2.1.3.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ . Dizemos que um ponto  $p \in M$  é de tipo  $M_i$  ou pertence ao conjunto  $M_i$ , se e somente se,  $\text{posto}([\alpha_f(p)]) = i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 6$ .*

---

## 2.2 Projetivo de Curvatura

---

Nesta seção vamos introduzir o conceito de projetivo de curvatura normal em um ponto de uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , que pode ser considerado a extensão para dimensão 3 do conceito de elipse de curvatura normal em um ponto de uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^n$ . A definição de projetivo de curvatura é dada por:

**Definição 2.2.1.** *Dado  $p \in M$ , consideramos a esfera unitária  $S^2$  no espaço tangente  $T_p M$  parametrizada por  $(\theta, \phi)$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Denotamos por  $\gamma_{\theta\phi}$  a secção normal a  $M$  na direção  $\nu_{\theta\phi} = \cos(\theta)\sin(\phi)\nu_1 + \sin(\theta)\cos(\phi)\nu_2 + \cos(\phi)\nu_3$  em relação a um referencial  $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  do espaço tangente  $T_p M$ , a qual é uma curva obtida por  $\gamma_{\theta\phi} = M \cap \mathbb{H}_{\theta\phi}$ , onde  $\mathbb{H}_{\theta\phi} = \{\lambda\nu_{\theta\phi}\} \oplus N_p M$  é um hiperplano em  $p$ . O vetor curvatura normal  $\eta(\theta, \phi)$  de  $\gamma_{\theta\phi}$  em  $p$  está em  $N_p M$ . Variando  $\theta$  de 0 até  $2\pi$  e  $\phi$  de 0 até  $\pi$ , este vetor descreve uma superfície no espaço normal  $N_p M$ , chamada **projetivo de curvatura normal** de  $M$  em  $p$ .*

Como será detalhado no desenvolvimento a seguir, o vetor curvatura normal só depende da direção tangente da 3-variedade  $M$  e assim,  $\eta(\theta, \phi)$  está bem definido, tem o mesmo valor para pontos antípodas do espaço tangente a  $M$  em  $p$ , sendo portanto uma aplicação definida em um plano projetivo.

Nosso objetivo agora é obter uma expressão para a aplicação  $\eta(\theta, \phi)$  e descrever o projetivo de curvatura em um ponto de uma 3-variedade.

### 2.2.1 Vetor Curvatura Normal

Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , cuja imersão é dada por  $\psi : (M, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \psi(p))$ . Além disso,  $\nabla$  é a conexão Riemanniana euclidiana de  $M$ . Para cada ponto  $p \in M$  consideramos novamente a decomposição

$$\mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n = T_p M \oplus N_p M. \quad (2.2.5)$$

Através desta decomposição podemos considerar a projeção ortogonal

$$\Pi^N : T_p \mathbb{R}^n \big|_M \longrightarrow N_p M.$$

Se  $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}_{(p)}$  é um referencial ortonormal para  $T_pM$ , para cada vetor  $\nu \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  temos que

$$\Pi^N(\nu) = \nu - (\nu_1(p) \cdot \nu)\nu_1(p) - (\nu_2(p) \cdot \nu)\nu_2(p) - (\nu_3(p) \cdot \nu)\nu_3(p).$$

Consideramos agora  $\gamma$  uma curva  $C^\infty$  parametrizada pelo comprimento de arco  $t$ . O **vetor curvatura de  $\gamma$**  é dado por:

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' : L \longrightarrow T\mathbb{R}^n.$$

Logo, o **vetor curvatura normal de  $\gamma$  em  $t_0 \in L$**  é dado por  $\Pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0)$ .

Além disso, este vetor depende apenas da direção tangente  $\gamma'(t_0)$ . De fato, para verificar isto tomamos a imersão da curva  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t)) & \longmapsto & \psi(x(t), y(t), z(t)), \end{array}$$

ou seja,  $\gamma(t) = \psi \circ \lambda(t) = \psi(x(t), y(t), z(t)) = \psi(p(t))$ .

Assim,

$$\gamma'(t) = x'(t) \psi_x(p(t)) + y'(t) \psi_y(p(t)) + z'(t) \psi_z(p(t)),$$

e

$$\begin{aligned} \gamma''(t) = (\nabla_{\gamma'}\gamma')(t) &= x''(t) \psi_x(p(t)) + y''(t) \psi_y(p(t)) + z''(t) \psi_z(p(t)) + \\ &+ (x'(t))^2 \psi_{xx}(p(t)) + (y'(t))^2 \psi_{yy}(p(t)) + (z'(t))^2 \psi_{zz}(p(t)) + \\ &+ 2x'(t)y'(t) \psi_{xy}(p(t)) + 2x'(t)z'(t) \psi_{xz}(p(t)) + 2y'(t)z'(t) \psi_{yz}(p(t)) \end{aligned}$$

é o vetor curvatura normal da curva  $\gamma$  em  $t$ .

Logo a componente normal deste vetor é dada por:

$$\begin{aligned} \pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t) &= (x'(t))^2 \psi_{xx}^N + 2x'(t)y'(t) \psi_{xy}^N + 2x'(t)z'(t) \psi_{xz}^N + (y'(t))^2 \psi_{yy}^N + \\ &+ 2y'(t)z'(t) \psi_{yz}^N + (z'(t))^2 \psi_{zz}^N \end{aligned}$$

que depende apenas da direção tangente unitária  $\gamma'(t)$ .

Deste modo, para cada curva  $\gamma$  passando por  $p$  em  $t_0$  podemos descrever o vetor curvatura normal através de uma aplicação que associa a cada vetor unitário  $\nu$  do espaço tangente  $T_pM$  um vetor do espaço normal correspondente. Além disso, da expressão anterior, esta aplicação tem o mesmo valor para  $\nu$  e  $-\nu$ . Isto quer dizer que, para cada  $p \in M$  podemos definir uma aplicação do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  (contido em  $T_pM$ ) em  $N_pM$ :

$$K_p^N = \bar{\eta} : \quad \mathbb{P}^2 \subset T_pM \quad \longrightarrow \quad N_pM$$

$$[\nu] = \{\nu, -\nu\} \quad \longmapsto \quad \bar{\eta}([\nu]) = \pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0) = (\gamma''(t_0))^N,$$

onde  $\gamma : L \longrightarrow M$  é uma curva diferenciável tal que  $\gamma(t_0) = p$  e  $[\gamma'(t_0)] = [\nu]$ .

Consideramos agora  $\gamma = \gamma_{\theta\phi}$  e  $\nu = \nu_{\theta\phi}$ , e assim obtemos o seguinte diagrama de aplicações:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\eta} & N_pM \\ \Pi \downarrow & \nearrow \bar{\eta} & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

onde  $\Pi(\theta, \phi) = [\nu_{\theta\phi}]$  é a projeção usual e

$$\bar{\eta} \circ \Pi(\theta, \phi) = \bar{\eta}([\nu_{\theta\phi}]) = \eta(\theta, \phi). \quad (2.2.6)$$

Logo, o projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície que é imagem do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em  $N_pM \equiv \mathbb{R}^{n-3}$ .

Portanto, esta é a justificativa para nomearmos  $\eta(S^2)$  (ou mesmo a aplicação  $\eta$ ) de projetivo de curvatura.

## 2.2.2 Projetivo de Curvatura Normal

Seja  $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  o referencial para o espaço tangente  $T_pM$  dado em (2.1.1). Vimos na seção anterior que o vetor curvatura normal de uma curva qualquer de  $M$  depende apenas da direção tangente considerada. Portanto para a curva  $\gamma_{\theta\phi}$  da definição 2.2.1, com direção tangente unitária  $\nu_{\theta\phi} = \sin(\phi) \cos(\theta)\nu_1 + \sin(\phi) \sin(\theta)\nu_2 + \cos(\phi)\nu_3$ , o vetor curvatura normal é dado por  $\eta(\theta, \phi) = \bar{\eta}([\nu_{\theta\phi}])$ . Variando  $\theta$  de 0 a  $2\pi$  e  $\phi$  de 0 a  $\pi$  temos a expressão desejada.

De fato, a aplicação

$$\begin{aligned} \eta : S^2 \subset T_p M &\longrightarrow N_p M \\ (\theta, \phi) &\longmapsto \eta(\theta, \phi) \end{aligned}$$

é dada por:

$$\begin{aligned} \eta(\theta, \phi) &= \bar{\eta}([\nu_{\theta\phi}]) = \Pi^N \left( \nabla_{(\nu_{\theta\phi})} (\nu_{\theta\phi}) \right) \\ &= \Pi^N \left( (\sin(\phi) \cos(\theta))^2 \nabla_{\nu_1} \nu_1 + (\sin(\phi))^2 \cos(\theta) \sin(\theta) (\nabla_{\nu_1} \nu_2 + \nabla_{\nu_2} \nu_1) \right. \\ &\quad + \sin(\phi) \cos(\phi) \cos(\theta) (\nabla_{\nu_1} \nu_3 + \nabla_{\nu_3} \nu_1) + (\sin(\phi) \sin(\theta))^2 \nabla_{\nu_2} \nu_2 \\ &\quad \left. + \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\theta) (\nabla_{\nu_2} \nu_3 + \nabla_{\nu_3} \nu_2) + (\cos(\phi))^2 \nabla_{\nu_3} \nu_3 \right) \\ &= (\sin(\phi) \cos(\theta))^2 (\nabla_{\nu_1} \nu_1)^N + (\sin(\phi))^2 \sin(2\theta) (\nabla_{\nu_1} \nu_2)^N \\ &\quad + \sin(2\phi) \cos(\theta) (\nabla_{\nu_1} \nu_3)^N + (\sin(\phi) \sin(\theta))^2 (\nabla_{\nu_2} \nu_2)^N \\ &\quad + \sin(2\phi) \sin(\theta) (\nabla_{\nu_2} \nu_3)^N + (\cos(\phi))^2 (\nabla_{\nu_3} \nu_3)^N \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2\phi)) \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) (\nabla_{\nu_1} \nu_1)^N + \sin(2\theta) (\nabla_{\nu_1} \nu_2)^N \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)) (\nabla_{\nu_2} \nu_2)^N \right] + \frac{1}{2} (1 + \cos(2\phi)) (\nabla_{\nu_3} \nu_3)^N \\ &\quad + \sin(2\phi) \cos(\theta) (\nabla_{\nu_1} \nu_3)^N + \sin(2\phi) \sin(\theta) (\nabla_{\nu_2} \nu_3)^N \\ &= \frac{1}{4} \left[ (\nabla_{\nu_1} \nu_1)^N + (\nabla_{\nu_2} \nu_2)^N + 2 (\nabla_{\nu_3} \nu_3)^N \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ (\nabla_{\nu_1} \nu_1)^N - (\nabla_{\nu_2} \nu_2)^N \right] (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\nabla_{\nu_1} \nu_2)^N (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ - (\nabla_{\nu_1} \nu_1)^N - (\nabla_{\nu_2} \nu_2)^N + 2 (\nabla_{\nu_3} \nu_3)^N \right] \cos(2\phi) \\ &\quad + (\nabla_{\nu_1} \nu_3)^N \sin(2\phi) \cos(\theta) + (\nabla_{\nu_2} \nu_3)^N \sin(2\phi) \sin(\theta). \end{aligned}$$

Escrevendo,

$$H = \frac{1}{4} \left[ (\nabla_{\nu_1} \nu_1)^N + (\nabla_{\nu_2} \nu_2)^N + 2 (\nabla_{\nu_3} \nu_3)^N \right],$$

$$B = \frac{1}{4} \left[ (\nabla_{\nu_1} \nu_1)^N - (\nabla_{\nu_2} \nu_2)^N \right],$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2} \left( \nabla_{\nu_1} \nu_2 \right)^N, \\
D &= \frac{1}{4} \left[ - \left( \nabla_{\nu_1} \nu_1 \right)^N - \left( \nabla_{\nu_2} \nu_2 \right)^N + 2 \left( \nabla_{\nu_3} \nu_3 \right)^N \right], \\
U &= \left( \nabla_{\nu_1} \nu_3 \right)^N \quad \text{e} \quad V = \left( \nabla_{\nu_2} \nu_3 \right)^N
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

obtemos a seguinte expressão para o projetivo de curvatura em  $p$ :

$$\begin{aligned}
\eta(\theta, \phi) &= H + B(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + C(1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) \\
&\quad + D \cos(2\phi) + U \cos(\theta) \sin(2\phi) + V \sin(\theta) \sin(2\phi).
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Portanto dada qualquer 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , podemos calcular a expressão do projetivo de curvatura em qualquer ponto de  $M$ .

Se a imersão da 3-variedade  $M$  é parametrizada localmente por  $\psi(x, y, z)$  e o referencial do espaço tangente em  $p \in M$  é dado por (2.1.1), já foi mostrado que

$$\begin{aligned}
\left( \nabla_{\nu_1} \nu_1 \right)^N &= \frac{1}{E} \psi_{xx}^N, \quad \left( \nabla_{\nu_1} \nu_2 \right)^N = \frac{1}{E\sqrt{EI - F^2}} \left( E\psi_{xy}^N - F\psi_{xx}^N \right), \\
\left( \nabla_{\nu_1} \nu_3 \right)^N &= \frac{(EI - F^2)\psi_{xz}^N + (FG - EJ)\psi_{xy}^N + (FJ - IG)\psi_{xx}^N}{\sqrt{E} \sqrt{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}}, \\
\left( \nabla_{\nu_2} \nu_2 \right)^N &= \frac{1}{E(EI - F^2)} \left( E^2\psi_{yy}^N - 2EF\psi_{xy}^N + F^2\psi_{xx}^N \right), \\
\left( \nabla_{\nu_2} \nu_3 \right)^N &= \frac{(EI - F^2)(E\psi_{yz}^N - F\psi_{xz}^N) + (FG - EJ)(E\psi_{yy}^N - F\psi_{xy}^N)}{(EI - F^2)\sqrt{E}(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))} + \\
&\quad \frac{(FJ - IG)(E\psi_{xy}^N - F\psi_{xx}^N)}{(EI - F^2)\sqrt{E}(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\nu_3}\nu_3\right)^N &= \frac{(FJ - IG)^2\psi_{xx}^N + 2(FG - EJ)(FJ - IG)\psi_{xy}^N}{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))} + \\ &\quad \frac{2(FJ - IG)(EI - F^2)\psi_{xz}^N + (FG - EJ)^2\psi_{yy}^N}{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))} + \\ &\quad \frac{2(EI - F^2)(FG - EJ)\psi_{yz}^N + (EI - F^2)^2\psi_{zz}^N}{(EI - F^2)(K(EI - F^2) + G(FJ - IG) + J(FG - EJ))}, \end{aligned}$$

que ao serem substituídos em (2.2.8) dão a expressão desejada para o projetivo de curvatura em  $p$ . Esta substituição será omitida neste momento.

Consideramos novamente a imersão da 3-variedade  $M$  dada localmente na forma de Monge  $f$  em uma vizinhança de  $p \equiv (0, 0, 0)$ , com referenciais ortonormais  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  tangente e  $\{\omega_4, \dots, \omega_n\}$  normal. Nesta vizinhança temos que:

$$\psi_{xx}^N(p) = f_{xx}(0, 0, 0), \quad \psi_{xy}^N(p) = f_{xy}(0, 0, 0), \quad \psi_{xz}^N(p) = f_{xz}(0, 0, 0), \quad \psi_{yy}^N(p) = f_{yy}(0, 0, 0),$$

$$\psi_{yz}^N(p) = f_{yz}(0, 0, 0), \quad \psi_{zz}^N(p) = f_{zz}(0, 0, 0), \quad E = I = K = 1 \quad \text{e} \quad F = G = J = 0.$$

Substituindo estes valores nos vetores  $\left(\nabla_{\nu_i}\nu_j\right)^N$  listados acima, encontramos novos valores para  $H, B, C, D, U$  e  $V$  definidos em (2.2.7) e para o projetivo de curvatura dado em (2.2.8). São eles:

$$H = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy} + 2f_{zz}), \quad B = \frac{1}{4}(f_{xx} - f_{yy}), \quad C = \frac{1}{2}f_{xy},$$

$$D = \frac{1}{4}(-f_{xx} - f_{yy} + 2f_{zz}), \quad U = f_{xz} \quad \text{e} \quad V = f_{yz},$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\eta(\theta, \phi) &= \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy} + 2f_{zz}) + \frac{1}{4}(f_{xx} - f_{yy})(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) \\
&+ \frac{1}{2}f_{xy}(1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + \frac{1}{4}(2f_{zz} - f_{xx} - f_{yy}) \cos(2\phi) \\
&+ f_{xz} \cos(\theta) \sin(2\phi) + f_{yz} \sin(\theta) \sin(2\phi).
\end{aligned}$$

(2.2.9)

Usando os coeficientes da segunda forma fundamental definidos em (2.1.3) obtemos uma nova expressão para o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
\eta(\theta, \phi) &= \sum_{i=1}^{n-3} \left[ \frac{1}{4}(a_i + d_i + 2s_i)e_{i+3} + \frac{1}{4}(a_i - d_i)e_{i+3}(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) \right. \\
&+ \frac{1}{2} b_i e_{i+3}(1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + \frac{1}{4}(-a_i - d_i + 2s_i)e_{i+3} \cos(2\phi) \\
&\left. + c_i e_{i+3} \cos(\theta) \sin(2\phi) + r_i e_{i+3} \sin(\theta) \sin(2\phi) \right],
\end{aligned}$$

(2.2.10)

onde  $\{e_4, e_5, \dots, e_n\}$  é um referencial normal de  $M$  em  $p$ .

Ao longo de todo o trabalho, a menos que esteja especificado o contrário, estaremos considerando a imersão local da 3-variedade  $M$  na forma de Monge  $f$ .

Temos ainda, uma outra maneira de escrever a expressão do projetivo de curvatura em um ponto que é substituindo a parametrização usual da esfera, dada em (1.4.5), na expressão obtida em (2.2.9). Assim, dado  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$  obtemos:

$$\eta(u, v, w) = H + (u^2 - v^2)B + 4uvC + (2w^2 - 1)D + 2uwU + 2vwV.$$

(2.2.11)

Na próxima observação destacamos uma relação entre a elipse de curvatura e o projetivo de curvatura.

**Observação 2.2.1.** *Seja  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , a imersão local em  $p$  na forma de Monge da 3-variedade  $M$ , com referencial tangente dado por  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .*

*Seja  $S$  uma 2-subvariedade de  $M$ , de modo que seu vetor normal em  $p$  seja  $e_3$ . Assim, o plano tangente a  $S$  em  $p$ ,  $T_p S$ , é gerado pelos vetores ortonormais  $e_1, e_2$ . Além disso,  $f|_S$  é a parametrização na forma de Monge em  $p$  de  $S$ .*

*Consideramos a aplicação  $\eta|_{S^1} : S^1 \subset T_p S \longrightarrow N_p S$ . Assim,*

$$\eta\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(f_{xx} + f_{yy}) + \frac{1}{2}(f_{xx} - f_{yy})\cos(2\theta) + f_{xy}\sin(2\theta) = \eta_e(\theta)$$

*que é a expressão da elipse de curvatura de  $S$  em  $p$ .*

*Portanto, a elipse de curvatura de  $S$  em  $p$  está contida no projetivo de curvatura de  $M$  em  $p$ , como era esperado neste caso.*

Na expressão paramétrica da elipse de curvatura em um ponto de uma superfície, o vetor  $H_e$  que é o termo independente da expressão, é o vetor curvatura média.

Na sequência mostraremos o que representa o vetor  $H$ , na expressão deduzida para o projetivo de curvatura de uma 3-variedade.

### 2.2.3 Valor Médio do Vetor Curvatura Normal

Recordamos a definição de valor médio de uma função.

**Definição 2.2.2.** *Seja  $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . O **valor médio** de  $h$  é dado por*

$$h_{med} = \frac{1}{a(R)} \int_a^b \int_c^d h(x, y) \, dx dy,$$

*onde  $a(R)$  é a área do retângulo  $R$ .*

A partir disso, definimos o **valor médio** de uma função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto (g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_n(x, y)), \end{aligned}$$

integrável em um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  por  $(g_{1_{med}}, g_{2_{med}}, \dots, g_{n_{med}})$ , onde

$$g_{i_{med}} = \frac{1}{a(R)} \int_a^b \int_c^d g_i(x, y) \, dx dy.$$

Para definir o valor médio do vetor curvatura normal

$$\eta(\theta, \phi) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-3})_{(\theta, \phi)}, \quad n \geq 4,$$

consideramos as coordenadas

$$\begin{aligned} \eta_i(\theta, \phi) = & \tilde{h}_i + (1 - \cos(2\phi)) (\tilde{b}_i \cos(2\theta) + \tilde{c}_i \sin(2\theta)) + \\ & \tilde{d}_i \cos(2\phi) + \sin(2\phi) (\tilde{u}_i \cos(\theta) + \tilde{v}_i \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Deste modo, dado o retângulo de parametrização  $R = [0, 2\pi) \times [0, \pi)$  obtemos

$$\eta_{i_{med}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \eta_i(\theta, \phi) \, d\theta d\phi = \tilde{h}_i,$$

para cada  $i = 1, \dots, n - 3$ .

Portanto, o **valor médio do vetor curvatura normal**  $\eta$  é

$$H = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{n-3}) = \frac{1}{4} (f_{xx} + f_{yy} + 2f_{zz}).$$

Observamos que este vetor difere do vetor curvatura média da 3-variedade  $M$  que é usualmente dado por  $H_m = \frac{1}{3} (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})$ .

### Exemplo 2.2.1.

Seja

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) & \longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, 0, \dots, 0)) \\ (x, y, z) & \longmapsto \left( x, y, z, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right) \end{aligned}$$

*imersão na forma de Monge que parametriza localmente uma 3-variedade  $M$ .*

*O projetivo de curvatura em  $(0, 0, 0)$  é dado pelo segmento não radial*

$$\eta(\theta, \phi) = \left(1, -\frac{1}{4}\right) + \left(0, \frac{3}{4}\right) (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + \left(0, -\frac{3}{4}\right) \cos(2\phi),$$

*deslocado da origem pelo vetor  $H = (1, -\frac{1}{4})$ , valor médio da aplicação  $\eta$ . Porém, o vetor curvatura média é dado por  $H_M = (1, 0)$ .*

## 2.2.4 Exemplos de Projetivos de Curvatura

Vejamos alguns exemplos de projetivos de curvatura obtidos a partir da imersão de uma 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^9$ , cuja imersão é dada localmente na forma de Monge. Em todos os exemplos estaremos considerando  $N_p M \equiv \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^9 / \mathbb{R}^3$ .

### Exemplo 2.2.2 (Exemplo Padrão).

Seja

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^9, (0, 0, \dots, 0)) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( x, y, z, \frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}, \frac{z^2}{2}, \sqrt{2}xy, \frac{\sqrt{2}xz}{2}, \frac{\sqrt{2}yz}{2} \right) \end{aligned}$$

imersão na forma de Monge que parametriza localmente uma 3-variedade  $M$ .

Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\begin{aligned} \eta(\theta, \phi) &= \frac{1}{4}(1, 1, 2, 0, 0, 0) + \frac{1}{4}(1, -1, 0, 0, 0, 0)(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4}(0, 0, 0, 1, 0, 0)(1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + \frac{1}{4}(-1, -1, 2, 0, 0, 0) \cos(2\phi) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 0, 0, 0, 1, 0) \cos(\theta) \sin(2\phi) + \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 0, 0, 0, 0, 1) \sin(\theta) \sin(2\phi), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\eta(u, v, w) = (u^2, v^2, w^2, \sqrt{2}uv, \sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw),$$

com  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ , que é a superfície de Veronese clássica de ordem 2 mergulhada substancialmente em um 5-espaço afim de  $\mathbb{R}^6$ , transversal ao vetor  $H = \frac{1}{4}(1, 1, 2, 0, 0, 0)$ .

### Exemplo 2.2.3. Seja

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^9, (0, 0, \dots, 0)) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( x, y, z, \frac{\sqrt{2}}{2}xz, \frac{\sqrt{2}}{2}yz, \frac{\sqrt{2}}{4}(x^2 - y^2), \sqrt{2}xy, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

imersão na forma de Monge que parametriza localmente uma 3-variedade  $M$ .

Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0, 0, 0 \right) (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + \left( 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0, 0 \right) (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right) \cos(\theta) \sin(2\phi) + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0, 0\right) \sin(\theta) \sin(2\phi),$$

ou ainda,

$$\eta(u, v, w) = \left(\sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw, \frac{\sqrt{2}}{2}(u^2 - v^2), \sqrt{2}uv, 0, 0\right),$$

com  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ , que é uma projeção ortogonal da superfície de Veronese clássica de ordem 2 em um 4-espaço, sendo um mergulho do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  neste espaço.

**Exemplo 2.2.4 (Superfície Romana de Steiner).** *Seja*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^9, (0, 0, \dots, 0)) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(x, y, z, \sqrt{2}xy, \frac{\sqrt{2}}{2}xz, \frac{\sqrt{2}}{2}yz, 0, 0, 0\right) \end{aligned}$$

imersão na forma de Monge que parametriza localmente uma 3-variedade  $M$ .

O projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( (\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), \sin(2\phi) \cos(\theta), \sin(2\phi) \sin(\theta), 0, 0, 0 \right),$$

com  $0 \leq \theta, \psi \leq \pi$ , que é a superfície Romana de Steiner.

Notamos que, esta superfície é uma projeção ortogonal da superfície dada no exemplo acima.

**Exemplo 2.2.5 (Região Elíptica).** *Seja*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^9, (0, 0, \dots, 0)) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(x, y, z, \frac{\sqrt{2}}{2}xz, \frac{\sqrt{2}}{2}yz, 0, 0, 0, 0\right) \end{aligned}$$

imersão na forma de Monge que parametriza localmente a 3-variedade  $M$ .

O projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \sin(2\phi) \cos(\theta), \sin(2\phi) \sin(\theta), 0, 0, 0, 0 \right),$$

com  $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$ , cuja imagem é uma região circular centrada na origem e raio  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Exemplo 2.2.6 (Segmento de Reta).** *Seja*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^9, (0, 0, \dots, 0)) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(x, y, z, z^2, 0, 0, 0, 0, 0\right) \end{aligned}$$

imersão na forma de Monge que parametriza a 3-variedade  $M$ .

O projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left(1 + \cos(2\phi), 0, 0, 0, 0, 0\right),$$

com  $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$ , o qual é um segmento não radial.

**Exemplo 2.2.7 (Ponto).** *Seja*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^9, (0, 0, \dots, 0)) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

imersão na forma de Monge que parametriza a 3-variedade  $M$ .

O projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left(2, 0, 0, 0, 0, 0\right), \quad 0 \leq \theta, \phi \leq \pi,$$

que se reduz a um ponto distinto da origem de  $\mathbb{R}^6$ .

Consideramos as seguintes observações:

**Observações 2.2.1.**

1) *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^4$ , sabemos que o espaço normal  $N_p M$  é uma reta. Logo, o projetivo de curvatura em  $p$  é segmento radial se no mínimo duas das três curvaturas principais de  $M$  em  $p$  são distintas, ou um ponto distinto da origem  $0$  de  $N_p M$  para curvatura constante, ou a própria origem  $0$  de  $N_p M$  para curvatura zero.*

2) *O projetivo de curvatura é, naturalmente, um invariante por isometrias de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^m$ , (pois as conexões são preservadas por isometrias), portanto o projetivo de curvatura não se altera pelos mergulhos canônicos de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^{m+k}$ .*

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# Umbilicidade e Natureza Geométrica dos Projetivos de Curvatura

Neste capítulo mostraremos que dados uma 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , e  $p \in M$ , o projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície isomorfa (difeomorfa) à superfície de Veronese clássica de ordem 2, composta com uma transformação afim de  $\mathbb{R}^5$  em  $N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3}$ . Além disso, esta superfície é substancial no  $k$ -espaço  $Aff_p \subset N_p M$ . Se  $\dim E_p = \dim Aff_p = 5$ , diremos que o projetivo de curvatura em  $p$  é não degenerado. Caso contrário, temos os casos degenerados de projetivos de curvatura que são: superfícies substanciais no  $k$ -espaço  $Aff_p \subset N_p M$ , se  $k = 3, 4$ , regiões planas contidas no 2-plano  $Aff_p$ , segmentos de reta ou pontos.

Assim, para os casos degenerados, quanto menor a dimensão de  $E_p$  maior será o grau de umbilicidade ou simetria de  $M$  em  $p$ . A partir disso, classificamos os pontos da 3-variedade em pontos quase-quase-umbílicos, semi-quase-umbílicos, quase-umbílicos, semi-umbílicos e umbílicos. Definimos pontos de tipo  $M_i$  e mostramos que existe uma relação entre estes pontos e os pontos de tipo umbílico da 3-variedade.

Também, estudamos a natureza geométrica dos projetivos de curvatura em um ponto de uma 3-variedade, considerando todas as possibilidades.

Apresentamos os exemplos de 3-variedades: 3-variedade de Veronese de ordem 2 e 3-variedades de translação, calculando o projetivo de curvatura em todos os seus pontos.

Consideramos alguns conceitos preliminares.

Seja

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, f(0)), \quad n \geq 4 \\ (x, y, z) &\longmapsto x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 + f_1(x, y, z)\omega_4 + \dots + f_{n-3}(x, y, z)\omega_n \end{aligned}$$

imersão local da 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  na forma de Monge, sendo  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  referencial ortonormal do espaço tangente  $T_pM$  e  $\{\omega_4, \omega_5, \dots, \omega_n\}$  referencial ortonormal do espaço normal  $N_pM$ .

Notamos que, para cada  $p \in M$  os subespaços do espaço normal gerados por  $\{f_{xx}(p), f_{xy}(p), f_{xz}(p), f_{yy}(p), f_{yz}(p), f_{zz}(p)\}$  e pelos vetores  $H(p), B(p), C(p), D(p), U(p)$  e  $V(p)$  que determinam o projetivo de curvatura em  $p$  são coincidentes. Chamamos este subespaço de **primeiro espaço normal** de  $M$  em  $p$  e assim,

$$N_p^1M = \langle f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zz} \rangle_{(p)} = \langle H, B, C, D, U, V \rangle_{(p)}.$$

Denotamos por  $Aff_p$  o subespaço afim de  $N_pM$  de menor dimensão que contém o projetivo de curvatura em  $p$  e seja  $E_p$  o subespaço de  $N_p^1M$  paralelo a  $Aff_p$  dado por  $E_p = \langle B, C, D, U, V \rangle_{(p)}$ . Logo, o ponto  $p \in Aff_p$  ou  $p \notin Aff_p$ . O último caso equivale a dizer que o vetor  $H$ , que é o valor médio do vetor curvatura normal  $\eta(\theta, \phi)$ , é transversal ao subespaço  $E_p$  (ou também  $Aff_p$ ).

Além disso, obtemos  $N_p^1M = \langle H \rangle \oplus Aff_p$ .

Recordamos que a matriz  $[\alpha_f(p)]$  da segunda forma fundamental segundo  $\{e_4, e_5, \dots, e_n\}$ , referencial normal de  $M$  em  $p$  é dada por:

$$[\alpha_f(p)] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & r_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & r_2 & s_2 \\ & & & \vdots & & \\ a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & d_{n-3} & r_{n-3} & s_{n-3} \end{pmatrix},$$

onde

$$a_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(p), \quad b_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial xy}(p), \quad c_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial xz}(p), \quad d_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(p), \quad r_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial yz}(p), \quad s_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}(p).$$

Assim,  $p \in M$  é de tipo  $M_i$  se, e somente se,  $\text{posto}([\alpha_f(p)]) = i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 6$ .

---

### 3.1 O Projetivo de Curvatura como Imagem da Superfície de Veronese

---

Nos exemplos apresentados no capítulo 2 vimos que o projetivo de curvatura em um ponto de uma 3-variedade pode ser: uma superfície de Veronese clássica de ordem 2, substancial em um 5-espaço, ou projeções desta em subespaços de dimensão menor.

Nosso objetivo agora é estudar qual a natureza geométrica dos projetivos de curvatura nos diversos casos possíveis.

A expressão da superfície de Veronese clássica de ordem 2 é dada por

$$\begin{aligned} \xi : S^2 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6, \\ \xi(u, v, w) &= (u^2, v^2, w^2, \sqrt{2}uv, \sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw). \end{aligned}$$

Logo,

$$\xi(S^2) \subset S^5 \cap \mathbb{H}^5 = S^4\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

sendo  $\mathbb{H}^5 = \{(u_1, u_2, \dots, u_6) \in \mathbb{R}^6 : u_1 + u_2 + u_3 = 1\}$  um 5-plano de  $\mathbb{R}^6$ ,  $S^5$  a esfera unitária de  $\mathbb{R}^6$  e  $S^4\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$  a esfera de raio  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  em  $\mathbb{H}^5$ . Assim, a menos de uma rotação obtemos uma expressão da superfície de Veronese em  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{aligned} \xi(u, v, w) &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(3v^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2u^2 - v^2), \sqrt{2}uv, \sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw\right) \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{6}}v^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(-2u^2 - v^2), \sqrt{2}uv, \sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw\right) \\ &= H_1 + \tilde{\xi}(u, v, w), \end{aligned}$$

que é substancial em um 5-espaço.

Consideramos as matrizes abaixo, nas respectivas bases canônicas de  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^5$ :

$$[\tilde{\xi}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ e } [W] = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \\ uw \\ vw \end{pmatrix},$$

donde temos,

$$\xi(u, v, w) = H_1 + [\tilde{\xi}][W],$$

$$\forall(u, v, w) \in S^2.$$

Tomamos agora o projetivo de curvatura em  $p \in M$ , dado pela expressão (2.2.11), isto é,

$$\eta : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3},$$

$$\eta(u, v, w) = H_2 + (u^2 - v^2)B + (-2u^2 - 2v^2)D + 4uvC + 2uwU + 2vwV,$$

onde  $H_2 = H + D$ .

Definimos a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3}, \quad n \geq 5,$$

dada por:

$$T(e_1) = B, \quad T(e_2) = D, \quad T(e_3) = C, \quad T(e_4) = U \quad \text{e} \quad T(e_5) = V, \quad (3.1.1)$$

sendo  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^5$ .

Considerando as respectivas bases canônicas de  $\mathbb{R}^5$  e  $\mathbb{R}^{n-3}$ , temos as matrizes

$$[\tilde{\eta}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(a_1 - d_1) & \frac{1}{4}(-a_1 - d_1 + 2s_1) & \frac{1}{2}b_1 & \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}r_1 \\ \frac{1}{4}(a_2 - d_2) & \frac{1}{4}(-a_2 - d_2 + 2s_2) & \frac{1}{2}b_2 & \frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}r_2 \\ & & \vdots & & \\ \frac{1}{4}(a_{n-3} - d_{n-3}) & \frac{1}{4}(-a_{n-3} - d_{n-3} + 2s_{n-3}) & \frac{1}{2}b_{n-3} & \frac{1}{2}c_{n-3} & \frac{1}{2}r_{n-3} \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

a matriz da transformação linear  $T$ , de modo que o projetivo de curvatura em  $p$ , vem dado por:

$$\eta(u, v, w) = H_2 + [T][\tilde{\eta}][W],$$

$$\forall(u, v, w) \in S^2.$$

Observamos que, existe uma matriz invertível  $[G]$  de ordem  $5 \times 5$ , tal que,

$$[\tilde{\eta}] = [G][\tilde{\xi}]. \quad (3.1.3)$$

Logo,

$$\eta(S^2) = H_2 + T \circ \tilde{\eta}(S^2) = H_2 + T \circ G \circ \tilde{\xi}(S^2),$$

onde  $G$  é a transformação linear associada à matriz  $[G]$ .

Portanto, o projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície isomorfa (difeomorfa) à superfície de Veronese clássica de ordem 2, composta com a transformação linear  $T$ , mais a translação dada pelo vetor  $H_2$ .

Afim de estudar a natureza geométrica dos projetivos de curvatura, podemos desconsiderar a translação dada pelo vetor  $H_2$ , e assim obtemos

$$\eta(S^2) \cong \left( T \circ (G \circ \tilde{\xi}) \right) (S^2). \quad (3.1.4)$$

Observamos ainda que:

$$\eta(S^2) = H_2 + T \circ (G \circ \tilde{\xi})(S^2) \subset Aff_p \subset N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3}, \quad (3.1.5)$$

sendo  $Aff_p = H_2 + E_p$  um subespaço afim.

Logo, a natureza geométrica do projetivo de curvatura dependerá do posto da matriz  $[T]$ , ou seja, do grau de independência dos vetores  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $U$  e  $V$ , que equivale à dimensão do subespaço  $E_p$  que é igual a dimensão do subespaço  $Aff_p$ .

Resumindo, do desenvolvimento feito até aqui temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.1.** *Sejam  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , e  $p \in M$ . O projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície isomorfa (difeomorfa) à superfície de Veronese clássica de ordem 2, composta com uma transformação afim de  $\mathbb{R}^5$  em  $N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3}$ . A transformação linear associada é dada por  $T$  em (3.1.1), o projetivo de curvatura é substancial no subespaço  $Aff_p \subset N_p M$  e  $\dim E_p = \dim Aff_p = \text{posto}([T])$ .*

*Além disso, geometricamente, temos:*

- *Se  $\text{posto}([T])=5$ , o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo à superfície de Veronese clássica de ordem 2. Neste caso, diremos que o **projetivo de curvatura não se degenera**.*
- *Se  $\text{posto}([T])=4$ , o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo à uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 no 4-espaço  $Aff_p$ .*

- Se  $\text{posto}([T])=3$ , o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo à uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 no 3-espaco  $Aff_p$ .
- Se  $\text{posto}([T])=2$ , o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo à uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 no 2-plano  $Aff_p$ .
- Se  $\text{posto}([T])=1$ , o projetivo de curvatura é um segmento de reta em  $Aff_p$ .
- O projetivo de curvatura é um ponto se, e somente se,  $\text{posto}([T])=0$ .

Na seção 3.3 estudaremos mais detalhadamente a natureza geométrica de tudo o que pode ocorrer com os projetivos de curvatura, considerando a projeção da superfície de Veronese em um 4-espaco, em um 3-espaco ou em um 2-plano.

---

## 3.2 Umbilicidade

---

Nesta seção classificamos os pontos de uma 3-variedade de acordo com o projetivo de curvatura nestes pontos se degenerar ou não. De certa forma, quanto mais degenerado ou de dimensão menor for o projetivo de curvatura, maior será o grau de umbilicidade ou simetria em torno do ponto da 3-variedade considerado.

Esta classificação estende para 3-variedades a que é feita no caso de superfícies, à qual foi listada na definição 1.3.2.

Observamos antes, a relação que existe entre pontos  $p$  de tipo  $M_i$ ,  $\dim E_p$  e a posição relativa do subespaco afim  $Aff_p$ .

- $p \in M_6$  se, e somente se,  $\dim E_p=5$  e  $H$  é transversal ao subespaco  $E_p$ .
- Se  $p \in M_i$ , para  $i = 2, \dots, 5$ , podemos ter:  $\dim E_p=i$  e  $H \in E_p = Aff_p$  ou  $\dim E_p=i-1$  e  $H$  transversal a  $E_p$ .
- Se  $p \in M_1$  podemos ter:  $\dim E_p=1$  e  $H \in E_p = Aff_p$  ou  $E_p = \{0\}$  e  $H \neq 0$ , onde  $p \equiv 0$ .
- $p \in M_0$  se, e somente se,  $E_p = \{0\}$  e  $H = 0$ .

A noção de umbilicidade está relacionada à dimensão do subespaço  $E_p$  ou de  $Aff_p$ , ou seja, quanto menor a dimensão do subespaço que contém o projetivo de curvatura maior será a umbilicidade. Caracterizamos algum tipo de umbilicidade em  $p$  quando  $\dim E_p < 5$ , ou seja, o projetivo de curvatura em  $p$  é degenerado. A nomenclatura utilizada segue em alguns casos a introduzida por Montaldi em [23] e por Nuño-Ballesteros e Romero-Fuster em [27].

**Definição 3.2.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ .*

i) *Dizemos que um ponto  $p \in M$  é **quase-quase-umbílico** se  $\dim E_p = 4$ , isto é, se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma superfície substancial em um 4-espaço. Se o vetor  $H \in E_p$ ,  $p$  é denominado **quase-quase-umbílico linear**. Caso contrário, ele é denominado **quase-quase-umbílico não linear**.*

ii) *Dizemos que um ponto  $p \in M$  é **semi-quase-umbílico** se  $\dim E_p = 3$ , isto é, se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma superfície substancial em um 3-espaço. Se  $H \in E_p$ , o ponto  $p$  é denominado **semi-quase-umbílico linear**. Caso contrário, ele é denominado **semi-quase-umbílico não linear**.*

iii) *O ponto  $p \in M$  é denominado **quase-umbílico** se  $\dim E_p = 2$ , isto é, se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma região plana. Se  $H \in E_p$  o ponto  $p$  é denominado **quase-umbílico linear**. Caso contrário, ele é denominado **quase-umbílico não linear**.*

iv) *Dizemos que um ponto  $p \in M$  é **semi-umbílico** se  $\dim E_p = 1$ , isto é, se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em um segmento de reta neste ponto. Se este segmento é de tipo radial, dizemos que  $p$  é ponto **semi-umbílico radial** ou **ponto de inflexão**.*

v) *Se o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em um ponto, dizemos que  $p$  é **umbílico**; no caso em que o projetivo de curvatura coincide com a origem de  $N_p M$  o ponto  $p$  é **umbílico planar**.*

Segue a observação:

**Observação 3.2.1.** *De acordo com as relações existentes entre o posto da matriz da segunda forma fundamental  $[\alpha_f(p)]$  e o posto da transformação linear dada por  $T$  em (3.1.1) temos que:*

i)  *$\text{posto}([\alpha_f(p)]) = \text{posto}([T]) + 1$  se, e somente se,  $H$  é transversal a  $E_p$ .*

ii)  *$\text{posto}([\alpha_f(p)]) = \text{posto}([T])$  se, e somente se,  $H \in E_p$ .*

Notando ainda que  $\text{posto}([T]) = \dim E_p = \dim \text{Aff}_p$  podemos apresentar uma caracterização dos pontos de tipo  $M_i$  através da umbilicidade e da posição relativa do subespaço afim  $\text{Aff}_p$  em  $N_p M$ .

**Proposição 3.2.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$  e seja  $p \in M$ .*

- i)  $p \in M_6$  se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 5-espaço e  $H$  é transversal a  $E_p$ . O projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície isomorfa à superfície de Veronese clássica de ordem 2, composta com uma transformação afim, substancial no 5-espaço afim  $\text{Aff}_p$ .
- ii)  $p \in M_5$  tal que o projetivo de curvatura não se degenera se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 5-espaço e  $H \in E_p = \text{Aff}_p$ .
- iii)  $p \in M_5$  é um ponto quase-quase-umbílico não linear se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 4-espaço e  $H$  é transversal a  $\text{Aff}_p$ .
- iv)  $p \in M_4$  é um ponto quase-quase-umbílico linear se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 4-espaço e  $H \in E_p = \text{Aff}_p$ .
- v)  $p \in M_4$  é um ponto semi-quase-umbílico não linear se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 3-espaço e  $H$  é transversal a  $\text{Aff}_p$ .
- vi)  $p \in M_3$  é um ponto semi-quase-umbílico linear se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 3-espaço e  $H \in E_p = \text{Aff}_p$ .
- vii)  $p \in M_3$  é um ponto quase-umbílico não linear se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 2-plano e  $H$  é transversal a  $\text{Aff}_p$ .
- viii)  $p \in M_2$  é um ponto quase-umbílico linear se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um 2-plano e  $H \in E_p = \text{Aff}_p$ .
- ix)  $p \in M_2$  é um ponto semi-umbílico não radial se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é uma reta e  $H$  é transversal a  $\text{Aff}_p$ .
- x)  $p \in M_1$  é um ponto semi-umbílico radial (ou de inflexão) se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é uma reta e  $H \in E_p = \text{Aff}_p$ .
- xi)  $p \in M_1$  é um ponto umbílico não planar se, e somente se,  $\text{Aff}_p$  é um ponto distinto de  $p$ .
- xii)  $p \in M_0$  é um ponto umbílico planar se, e somente se,  $E_p = \{0\}$ .

**Demonstração:**

A demonstração desta proposição segue de forma direta da observação 3.2.1 e da

relação existente entre os pontos de tipo  $M_i$  e a posição do subespaço afim  $Aff_p$  enunciada acima. ■

---

### 3.3 Natureza Geométrica dos Projetivos de Curvatura

---

Nosso objetivo agora é analisar mais detalhadamente a natureza geométrica dos projetivos de curvatura em um ponto  $p$  de uma 3-variedade  $M$ , considerando todas as possibilidades que podem ocorrer.

Se o ponto  $p$  é de tipo  $M_6$  ou de tipo  $M_5$  não quase-quase-umbílico, já mostramos que o projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície substancial em um 5-espaço, isomorfa à superfície de Veronese clássica de ordem 2, composta com uma transformação.

Também, para os casos nos quais o ponto  $p$  é semi-umbílico ou umbílico, os projetivos de curvatura em  $p$  são, respectivamente, segmento de reta ou ponto.

Assim, resta-nos a análise geométrica dos casos nos quais o ponto é quase-quase-umbílico, semi-quase-umbílico e quase-umbílico, que equivale às projeções da superfície de Veronese clássica de ordem 2 em um 4-espaço, em um 3-espaço e um 2-plano, respectivamente.

Diferentemente do que fizemos na seção 3.1, neste momento tomamos a expressão do projetivo de curvatura em  $p$ , dada por:

$$\begin{aligned} \eta : S^2 \subset T_q M &\longrightarrow N_p M \subset \mathbb{R}^n \\ (\theta, \phi) &\longmapsto \eta(\theta, \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(\theta, \phi) = & H + B(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + C(1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + \\ & D \cos(2\phi) + U \cos(\theta) \sin(2\phi) + V \sin(\theta) \sin(2\phi). \end{aligned}$$

Como queremos estudar a natureza geométrica dos projetivos de curvatura podemos desconsiderar o vetor  $H$ , ou ainda, podemos supor  $H = 0$  e assim, o projetivo de curvatura em  $p$  está contido no subespaço  $E_p = \langle H, B, C, D, U, V \rangle \subset N_p M$ , como já havíamos observado.

Nas respectivas bases canônicas de  $\mathbb{R}^5$  e  $\mathbb{R}^{n-3}$ , definimos por

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(a_1 - d_1) & \frac{1}{2}b_1 & \frac{1}{4}(-a_1 - d_1 + 2s_1) & \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}r_1 \\ \frac{1}{4}(a_2 - d_2) & \frac{1}{2}b_2 & \frac{1}{4}(-a_2 - d_2 + 2s_2) & \frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}r_2 \\ & & \vdots & & \\ \frac{1}{4}(a_{n-3} - d_{n-3}) & \frac{1}{2}b_{n-3} & \frac{1}{4}(-a_{n-3} - d_{n-3} + 2s_{n-3}) & \frac{1}{2}c_{n-3} & \frac{1}{2}r_{n-3} \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

a matriz cujas colunas são formadas pelos vetores  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $U$  e  $V$ , respectivamente, e

$$[\tilde{W}] = \begin{pmatrix} (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) \\ (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) \\ \cos(2\phi) \\ \sin(2\phi) \cos(\theta) \\ \sin(2\phi) \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

que pode ser considerada como uma parametrização da superfície de Veronese em  $\mathbb{R}^5$ .

Logo,

$$\eta(\theta, \phi) = [\tilde{T}][\tilde{W}]. \quad (3.3.7)$$

Uma vez que a matriz  $[\tilde{T}]$  é equivalente (através de operações elementares sobre colunas) à matriz  $[T]$  definida em (3.1.2), todos os resultados obtidos que dependem somente do posto desta matriz continuam válidos.

Para dar continuidade ao estudo, necessitamos de mais alguns resultados da álgebra linear de matrizes ([17]).

Sabemos que, escalonar a matriz  $[\tilde{T}]$  através de operações elementares sobre linhas é equivalente à multiplicação à esquerda de  $[\tilde{T}]$  por uma matriz invertível  $[\tilde{E}]$ , de ordem  $n - 3 \times n - 3$ , isto é,  $[\tilde{E}][\tilde{T}] = [\tilde{T}_i]$ .

Consideramos a transformação linear invertível

$$\begin{aligned} \tilde{E} : \mathbb{R}^{n-3} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-3} \\ x &\longmapsto \tilde{E}(x), \end{aligned}$$

cuja matriz é  $[\tilde{E}]$ . Assim, a composição

$$\begin{array}{ccccc} S^2 \subset T_p M & \xrightarrow{\eta} & N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3} & \xrightarrow{\tilde{E}} & N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3} \\ (\theta, \phi) & \longmapsto & \eta(\theta, \phi) & \longmapsto & \tilde{E} \circ \eta(\theta, \phi) \end{array}$$

resulta na expressão de um projetivo de curvatura, através da transformação linear invertível  $\tilde{E}$  contido no mesmo subespaço que o projetivo  $\eta(S^2)$ .

Outra operação que podemos considerar mantendo as características geométricas do projetivo de curvatura é a multiplicação à direita da matriz  $[\tilde{T}]$  por uma matriz diagonal  $A = [a_{ij}]$  de ordem  $5 \times 5$ , com  $a_{ii} \neq 0$ , o que corresponde a multiplicarmos por uma constante  $a_{ii}$  a  $i$ -ésima coluna da matriz  $[\tilde{T}]$ .

A proposição a seguir agrupa todas as possibilidades de projetivos de curvatura para pontos quase-quase-umbílicos lineares, considerando as duas operações com matrizes acima.

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 7$ . Se  $p \in M$  é ponto quase-quase-umbílico linear, o projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície isomorfa à composição da superfície de Veronese de ordem 2 com uma transformação linear dada por uma das matrizes  $[\tilde{T}_i]$  abaixo. Esta superfície é substancial no 4-espaço  $E_p \subset N_p M \equiv \mathbb{R}^{n-3}$ ,  $n \geq 7$ , podendo ser ou não um mergulho de  $\mathbb{P}^2$  neste subespaço.*

**Demonstração:**

Suponhamos que  $p \in M$  seja ponto quase-quase-umbílico linear. Então  $\text{posto}([\tilde{T}])=4$ . Podemos supor sem perda de generalidade  $n = 7$ , e assim, o projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície substancial em  $E_p \subset N_p M \equiv \mathbb{R}^4$ .

Após considerarmos todas as combinações dos vetores  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $U$  e  $V$ , quatro a quatro linearmente independentes na matriz  $[\tilde{T}]$ , obtemos as seguintes matrizes na forma escalonada:

$$[\tilde{T}_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{T}_2] = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[\tilde{T}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{T}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$[\tilde{T}_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45} \end{pmatrix}.$$

Na sequência, apresentamos as equações para os projetivos de curvatura em  $p$  que justificam a última afirmação na proposição. Elas podem induzir um mergulho do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^4$ , conforme exemplo Tipo 3 - i), ou podem ter singularidades, exemplo Tipo 1, às quais serão estudadas no capítulo 4. Neste momento, somente listamos estas equações.

Para tanto, vamos assumir

$$[\tilde{W}] = \begin{pmatrix} 2(u^2 - v^2) \\ 4uv \\ 2w^2 - 1 \\ 2uw \\ 2vw \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

que pode ser vista como uma superfície de Veronese em  $\mathbb{R}^5$ .

Denotamos a  $j$ -ésima coluna da matriz  $[\tilde{T}_i]$  que contém termos  $a_{ij}$  por  $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j})$ .

Logo temos,

**Tipo 1: matriz  $[\tilde{T}_1]$**

O projetivo de curvatura em  $p$  é dado por:  $\eta(u, v, w) = (4uv, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$ .

**Tipo 2: matriz  $[\tilde{T}_2]$**

- $(0, 0, 0, 0) \implies \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$ .
- $(1, 0, 0, 0) \implies \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 4uv, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$ .

**Tipo 3: matriz  $[\tilde{T}_3]$** 

- **i)**  $(0, 0, 0, 0) \implies \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv, 2uw, 2vw)$ . Este é o mergulho clássico do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^4$  (vide [18], p. 326-327). Também pode ser visto como a projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 em  $\mathbb{R}^4$ .
- **ii)**  $(a_{13}, a_{23}, 0, 0) \implies \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 2a_{13}w^2 - a_{13}, 2a_{23}w^2 + 4uv - a_{23}, 2uw, 2vw)$ , com  $a_{13}$  e  $a_{23}$  não simultaneamente nulos.

**Tipo 4: matriz  $[\tilde{T}_4]$** 

- $(a_{14}, a_{24}, a_{34}, 0) \implies \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 2a_{14}uw, 4uv + 2a_{24}uw, 2w^2 + 2a_{34}uw - 1, 2vw)$ , com  $a_{14}, a_{24}, a_{34} \in \mathbb{R}$ .

**Tipo 5: matriz  $[\tilde{T}_5]$** 

- $(a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}) \implies \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 2a_{15}vw, 4uv + 2a_{25}vw, 2w^2 + 2a_{35}vw - 1, 2uw + 2a_{45}vw)$ , com  $a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45} \in \mathbb{R}$ .

■

**Observação 3.3.1.** *Se o ponto  $p$  for quase-quase-umbílico não linear teremos apenas uma translação do que é colocado na proposição 3.3.1.*

Na próxima proposição temos os protótipos para os projetivos de curvatura para pontos semi-quase-umbílicos lineares da 3-variedade. Eles são realizações, como superfícies, do plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  em 3-espacos.

**Proposição 3.3.2.** *Sejam  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 6$ , e  $p \in M$ . Se  $p$  é ponto semi-quase-umbílico linear, o projetivo de curvatura em  $p$  é isomorfo (difeomorfo) à uma projeção da superfície de Veronese clássica, dada por uma das matrizes  $[\tilde{T}_i]$ ,  $1 \leq i \leq 10$ , abaixo. Dependendo dos valores  $a_{ij}$  poderá ser isomorfa à uma das seguintes superfícies: superfície Romana de Steiner, Cross-Cap, superfície de Steiner de Tipo 5 ou Cross-Cup, ou estará contida nas quádricas: elipsóide ou cone.*

**Demonstração:**

Suponhamos que  $p$  seja ponto semi-quase-umbílico linear. Assim,  $\text{posto}([\tilde{T}]) = 3$  e o projetivo de curvatura em  $p$  é uma superfície substancial no 3-espço  $E_p$  contido em  $N_pM \equiv \mathbb{R}^{n-3}$ ,  $n \geq 6$ . Podemos supor sem perda de generalidade  $n = 6$ .

Com o objetivo de encontrar todas os protótipos dos projetivos de curvatura vamos proceder de modo análogo ao que foi feito na proposição anterior. Consideramos todas as combinações dos vetores  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $U$  e  $V$ , três a três linearmente independentes na matriz  $[\tilde{T}]$ . Assim, as respectivas matrizes na forma escalonada são:

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_3] &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_4] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_5] &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_6] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_7] &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_8] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_9] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} \end{pmatrix} & \text{e } [\tilde{T}_{10}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, o projetivo de curvatura é uma projeção da superfície de Veronese de ordem 2 dada pelas matrizes anteriores.

Atribuindo valores para  $a_{ij}$  nestas matrizes, apresentamos a seguir um exemplo de cada protótipo do projetivo de curvatura, o qual pode ser uma superfície isomorfa à uma das superfícies de Steiner em  $\mathbb{R}^3$ : superfície Romana de Steiner, Cross-Cap, superfície de Steiner de Tipo 5 ou Cross-Cup, ou é um elipsóide ou está contido em um cone.

Isto completará a demonstração da proposição pois conforme listado na seção 1.4, com base no trabalho de Coffman et al. em [5], temos que estas são as únicas possibilidades para superfícies de Steiner de grau 2 ou 4, condição que é satisfeita pelas projeções da superfície de Veronese em 3-espacos.

## Superfícies quádricas

### Elipsóide

Se considerarmos a matriz  $[\tilde{T}_1]$ , o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( \cos(2\phi), \cos(\theta) \sin(2\phi), \sin(\theta) \sin(2\phi) \right), \quad 0 \leq \theta, \phi \leq \pi,$$

cuja imagem é a esfera unitária  $S^2$ .

Além disso, a aplicação  $\eta$  satisfaz a propriedade antipodal:

$$(\theta_2, \phi_2) = (\theta_1 + \pi, \pi - \phi_1) \iff \eta(\theta_1, \phi_1) = \eta(\theta_2, \phi_2).$$

Logo,  $\eta$  induz uma aplicação do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  nele mesmo.

### Projetivo de curvatura contido em um cone

Na matriz  $[\tilde{T}_{10}]$  tomamos  $a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = 0$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta), (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta), \cos(2\phi) \right).$$

Vamos mostrar que este projetivo está contido em um cone. Consideramos

$$X = (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta), \quad Y = (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) \quad \text{e} \quad Z = \cos(2\phi),$$

e assim, obtemos

$$X^2 + Y^2 = (1 - Z)^2,$$

que é a expressão de um cone circular com vértice  $(0, 0, 1)$ .

Mas,  $-1 \leq Z \leq 1$ , e assim,  $0 \leq X^2 + Y^2 = (1 - Z)^2 \leq 4$ .

Portanto, o projetivo de curvatura é o cone circular com vértice  $(0, 0, 1)$  e base circular  $X^2 + Y^2 = 4$ ,  $Z = -1$ .

## Superfícies de Steiner

### Superfície Romana de Steiner

Na matriz  $[\tilde{T}_2]$  consideramos  $a_{13} = 0$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( 2(\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), \cos(\theta) \sin(2\phi), \sin(\theta) \sin(2\phi) \right),$$

que é a superfície Romana de Steiner definida em (1.4.6).

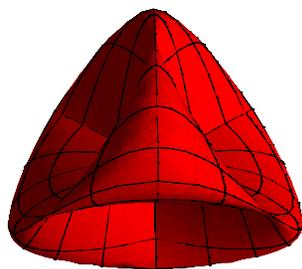


Figura 3.1: Superfície Romana de Steiner.

### Superfície Cross-Cap

Na matriz  $[\tilde{T}_8]$  tomamos  $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$ . Logo, o projetivo de curvatura  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( 2(\sin(\phi))^2 \cos(2\theta), 2(\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), \sin(\theta) \sin(2\phi) \right)$$

que é a superfície Cross-Cap definida em (1.4.7).

Esta superfície é considerada o modelo mais simples de realização de  $\mathbb{P}^2$ , que é basicamente uma semi-esfera com o bordo "costurado".

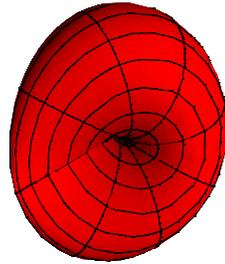


Figura 3.2: Superfície Cross-Cap.

Superfície de Steiner de Tipo 5

Na matriz  $[\tilde{T}_6]$  tomamos  $a_{15} = a_{25} = a_{35} = 0$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( 2(\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), \cos(2\phi), \cos(\theta) \sin(2\phi) \right)$$

que é a superfície de Steiner de Tipo 5 definida em (1.4.8).

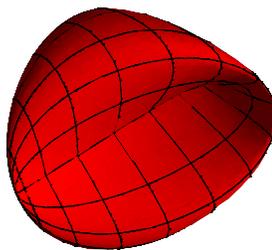


Figura 3.3: Superfície de Steiner de Tipo 5.

Superfície Cross-Cup

Na matriz  $[\tilde{T}_5]$  consideramos  $a_{12} = a_{24} = 0$  e  $a_{14} = 1$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + \cos(\theta) \sin(2\phi), \cos(2\phi), \sin(\theta) \sin(2\phi) \right),$$

que é uma superfície Cross-Cup.

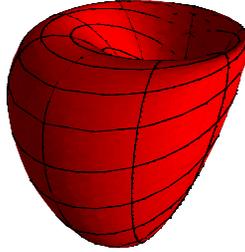


Figura 3.4: Superfície Cross-Cup.

Observamos que as singularidades destas aplicações serão discutidas no capítulo 4. ■

**Observação 3.3.2.** *Se o ponto  $p$  for semi-quase-umbílico não linear teremos apenas uma translação do que é colocado na proposição 3.3.2.*

Resta-nos estudar a natureza geométrica dos projetivos que são regiões planas.

**Proposição 3.3.3.** *Sejam  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$  e  $p \in M$ . Se  $p$  é ponto quase-umbílico linear, os projetivos de curvatura em  $p$  são regiões planas isomorfas à regiões que incluem região triangular, região elíptica, cone planar e algumas projeções planares da superfície da Veronese.*

**Demonstração:**

Suponhamos que  $p$  seja ponto quase-umbílico linear. Então  $\text{posto}([\tilde{T}]) = 2$ , em (3.3.6), e o projetivo de curvatura em  $p$  é uma região plana. Tomamos  $n = 5$ .

De modo análogo ao que foi feito nas proposições anteriores, todas as matrizes  $[\tilde{T}]$  na forma escalonada são:

$$\begin{aligned}
[\tilde{T}_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_3] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_4] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_5] &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_6] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_7] &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} \end{pmatrix}, & [\tilde{T}_8] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}, \\
[\tilde{T}_9] &= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix} & \text{e} & [\tilde{T}_{10}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

O projetivo de curvatura em  $p$  é uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 dada pelas matrizes anteriores.

Atribuindo valores para  $a_{ij}$  nestas matrizes, apresentamos um exemplo de cada protótipo do projetivo de curvatura mencionado no enunciado, o qual é uma região plana isomorfa à uma das seguintes regiões:

### 1) Região elíptica

Por exemplo, na matriz  $[\tilde{T}_{10}]$  tomamos  $a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{24} = a_{25} = 0$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta), (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) \right),$$

cuja imagem é uma região elíptica. Neste caso, é uma região circular.

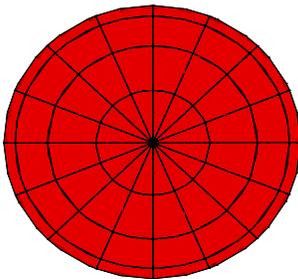


Figura 3.5: Região elíptica.

## 2) Região triangular

Por exemplo, consideramos  $a_{14} = a_{24} = a_{15} = a_{25} = 0$  na matriz  $[\tilde{T}_8]$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta), \cos(2\phi) \right).$$

Para mostrar que a imagem de  $\eta$  descreve uma região triangular, tomemos  $t = \cos(2\phi)$  e  $s = \sin(2\theta)$  obtendo

$$\eta(s, t) = \left( (1 - t)s, t \right), \quad -1 \leq t, s \leq 1.$$

Desta forma, se  $s = 1$  obtemos  $\eta(1, t) = (1 - t, t)$  que descreve um dos lados do triângulo. Os outros dois lados são dados por  $\eta(-1, t) = (t - 1, t)$  e  $\eta(s, -1) = (2s, -1)$ .

Portanto, os lados do triângulo que delimitam a região descrita pelo projetivo de curvatura  $\eta$  são dados por:

$$\eta\left(\frac{\pi}{4}, \phi\right) = \left( (1 - \cos(2\phi)), \cos(2\phi) \right), \quad \eta\left(\frac{3\pi}{4}, \phi\right) = \left( - (1 - \cos(2\phi)), \cos(2\phi) \right) \quad \text{e}$$

$$\eta\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \left( 2 \sin(2\theta), -1 \right).$$

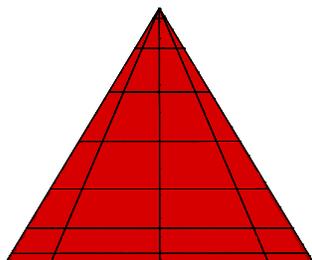


Figura 3.6: Região triangular.

### 3) Cone planar

Consideramos  $a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{25} = 0$  na matriz  $[\tilde{T}_7]$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta), \cos(\theta) \sin(2\phi) \right),$$

cuja imagem está descrita na figura 3.7.

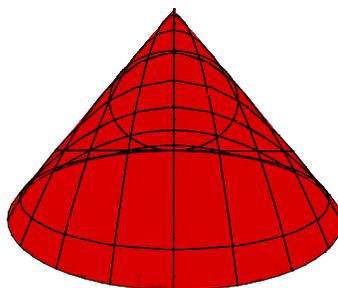


Figura 3.7: Cone planar.

Outras superfícies planas que são projetivos de curvatura são dadas por projeções planares da superfície de Veronese:

4) Projeção planar de tipo 1

Consideramos  $a_{15} = 1$  e  $a_{14} = a_{24} = a_{25} = 0$  na matriz  $[\tilde{T}_8]$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + \sin(\theta) \sin(2\phi), \cos(2\phi) \right),$$

cuja imagem está descrita na figura 3.8.

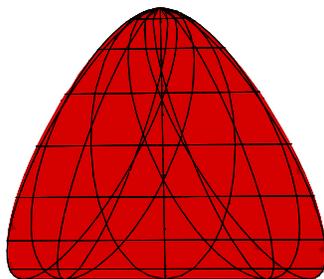


Figura 3.8: Projeção planar de tipo 1.

5) Projeção planar de tipo 2

Consideramos  $a_{12} = a_{13} = 1$  e  $a_{15} = a_{25} = 0$  na matriz  $[\tilde{T}_7]$ . Logo, o projetivo de curvatura em  $p \equiv (0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + \cos(2\phi), \cos(\theta) \sin(2\phi) \right).$$

cuja imagem está descrita na figura 3.9.

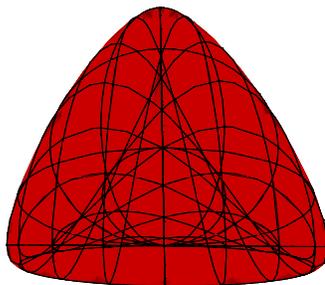


Figura 3.9: Projeção planar de tipo 2.

Além disso, os projetivos de curvatura descritos acima não são isomorfos dois a dois. De fato,

- Como o isomorfismo leva uma elipse contida no bordo de uma região plana em outra elipse contida no bordo da outra região plana, então o projetivo dado em 1) não é isomorfo aos demais.
- Como segmentos de reta do bordo de regiões planas são levados em segmentos de reta no bordo por isomorfismos, os projetivos de curvatura dados em 2), 3) e 4) não são isomorfos aos demais.
- O isomorfismo também preserva o número de segmentos de reta do bordo de uma região plana. Logo, os projetivos dados em 2), 3) e 4) não são isomorfos entre si.

Todas as singularidades destes objetos serão estudadas no próximo capítulo.

■

**Observação 3.3.3.** *Se o ponto  $p$  for quase-umbílico não linear teremos apenas uma translação do que é colocado na proposição 3.3.3.*

Na próxima observação está a justificativa de que não ocorre a superfície de Boy.

**Observação 3.3.4.** *A superfície de Boy, apesar de ser uma imersão do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$ , como superfície fechada em  $\mathbb{R}^3$ , não é nenhum projetivo de curvatura em  $\mathbb{R}^3$ . A justificativa está no fato de que ela se realiza como uma variedade algébrica real de grau 6, enquanto o projetivo de curvatura se realiza como uma variedade algébrica de grau 2 ou 4 em  $\mathbb{R}^3$ .*

---

## 3.4 Exemplos de 3-Variedades e seus Projetivos de Curvatura

---

Sabemos que, a elipse de curvatura em todo ponto da superfície de Veronese clássica de ordem 2 é um círculo e portanto, a elipse de curvatura não se degenera. No próximo exemplo vamos calcular o projetivo de curvatura em todo ponto da 3-variedade de Veronese clássica de ordem 2.

### 3.4.1 3-Variedade de Veronese Clássica de Ordem 2

Consideramos a aplicação de Veronese clássica de ordem 2 e dimensão 3

$$\xi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{10} \equiv \mathbb{R}^5 \circ \mathbb{R}^5$$

dada por

$$\xi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3, \sqrt{2}x_1x_4, \sqrt{2}x_2x_4, \sqrt{2}x_3x_4 \right).$$

A imagem  $\xi(S^3)$  é chamada **variedade de Veronese clássica de ordem 2 e dimensão 3** e é uma variedade esférica em  $\mathbb{R}^9$ .

Seja  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$ . Então  $\xi(S^3)$  está contida no hiperplano

$$\mathbb{H}_1^9 = \left\{ (u_1, u_2, \dots, u_9) \in \mathbb{R}^9 : u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 \right\}$$

e também  $\xi(S^3) \subset S^9$ .

Portanto,

$$\xi(S^3) \subset \mathbb{H}_1^9 \cap S^9 = S^8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \subset \mathbb{R}^9.$$

Assim, a menos de uma rotação obtemos uma expressão da 3-variedade de Veronese em  $\mathbb{R}^9$ :

$$\xi(x, y, z, w) = \left( \frac{\sqrt{3}}{6}(4y^2 - 1), \frac{\sqrt{6}}{6}(3z^2 + y^2 - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2x^2 - y^2 - z^2), \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xw, \sqrt{2}yw, \sqrt{2}zw \right),$$

onde,  $w = w(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ .

Nosso objetivo agora é obter o projetivo de curvatura em pontos da 3-variedade de Veronese clássica  $\xi(S^3)$ .

Antes disso, temos

**Lema 3.4.1.** (*[25], p. 19*)

*Uma isometria linear  $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  induz uma isometria  $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \circ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \circ \mathbb{R}^n$ .*

A partir deste lema e da observação 2.2.1 item 2, concluímos que na 3-variedade de Veronese clássica o projetivo de curvatura coincide em todos os pontos. Portanto, basta calculá-lo em um ponto conveniente.

Consideramos o ponto  $(0, 0, 0, 1) \in S^3$ . Notamos que

$$\xi_x(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2}, 0, 0), \quad \xi_y(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2}, 0),$$

$$\xi_z(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2}),$$

e assim,

$$E = I = K = 2, \quad F = G = J = 0.$$

O espaço normal a 3-variedade de Veronese em  $(0, 0, 0)$  é dado por  $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^9/\mathbb{R}^3$  e assim, podemos tomar o referencial normal

$$e_4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad e_5 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \dots, \quad e_9 = (0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Após efetuarmos todos os cálculos obtemos:

$$\xi_{xx}^N(0, 0, 0) = (0, 0, -2\sqrt{2}, 0, 0, 0) = -2\sqrt{2} e_6,$$

$$\xi_{xy}^N(0, 0, 0) = (0, 0, 0, \sqrt{2}, 0, 0) = \sqrt{2} e_7,$$

$$\xi_{xz}^N(0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, \sqrt{2}, 0) = \sqrt{2} e_8,$$

$$\xi_{yy}^N(0, 0, 0) = \left( \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0 \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} e_4 + \frac{\sqrt{6}}{3} e_5 - \sqrt{2} e_6,$$

$$\xi_{yz}^N(0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2}) = \sqrt{2} e_9,$$

$$\xi_{zz}^N(0, 0, 0) = (0, \sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0) = \sqrt{6}e_5 - \sqrt{2} e_6.$$

Conseqüentemente, o projetivo de curvatura da 3-variedade de Veronese clássica em  $(0, 0, 0)$  é dado por

$$\eta(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}x_2^2, \frac{\sqrt{6}}{6}(x_2^2 + 3x_3^2), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + x_1^2), \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3 \right),$$

que é a imagem de uma aplicação de Veronese de ordem 2 e dimensão 2 em  $\mathbb{R}^6$ , lembrando que  $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ .

Na verdade esta superfície está contida na interseção da 5-esfera centrada na origem e de raio  $\sqrt{2}$ ,  $S^5(\sqrt{2})$ , com o hiperplano

$$\mathbb{H}_2^5 = \left\{ (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6 : \frac{\sqrt{6}}{6}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}u_2 - u_3 = \sqrt{2} \right\},$$

isto é,

$$\eta(S^2) \subset \mathbb{H}_2^5 \cap S^5(\sqrt{2}) = S^4\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Após efetuarmos todos os cálculos, obtemos a seguinte expressão para o projetivo de curvatura da 3-variedade de Veronese:

$$\eta(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{\sqrt{42}}{42}(-6x_2^2 - 9x_1^2 + 5), \frac{\sqrt{14}}{14}(4x_2^2 - x_1^2 - 1), \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3 \right),$$

onde  $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ .

Portanto, o projetivo de curvatura em cada ponto da 3-variedade de Veronese clássica de ordem 2 é uma superfície de Veronese de ordem 2, substancial em um 5-espaço afim de  $\mathbb{R}^6$ .

Logo, todo ponto desta 3-variedade é de tipo  $M_6$ .

### 3.4.2 3-Variedades de Translação

Na sequência apresentamos dois exemplos de 3-variedades de translação.

#### Exemplo 1:

**Definição 3.4.1.** *Dados  $\beta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , uma curva regular de classe  $C^2$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $t$  e  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ , uma imersão que parametriza localmente uma superfície  $S$  de classe  $C^2$ . Definimos a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ p = (x, y, t) &\longmapsto (h(x, y), \beta(t)), \end{aligned}$$

que assumiremos ser uma imersão.

A **3-variedade de translação associada a  $\beta$  e  $h$**  é dada pela imagem da aplicação  $\psi$ , sendo denotada por  $S_{h\beta}$ .

Como a superfície e a curva estão em subespaços ortogonais de  $\mathbb{R}^{m+n}$ , os coeficientes da primeira forma fundamental associados a  $S_{h\beta}$  em  $q = \psi(p)$  são:

$$E(p) = \|h_x\|^2, \quad I(p) = \|h_y\|^2, \quad K(p) = 1, \quad F(p) = (h_x(p) \cdot h_y(p)) \quad \text{e} \quad G(p) = J(p) = 0.$$

Logo, o projetivo de curvatura em  $q = \psi(p)$  é dado por:

$$\eta(\theta, \phi) = H + B(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + C(1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + D \cos(2\phi), \quad (3.4.8)$$

sendo

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{E} \psi_{xx}^N + \frac{1}{E(EI - F^2)} (E^2 \psi_{yy}^N - 2EF \psi_{xy}^N + F^2 \psi_{xx}^N) + 2(\beta_{tt})^N \right], \\ B &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{E} \psi_{xx}^N - \frac{1}{E(EI - F^2)} (E^2 \psi_{yy}^N - 2EF \psi_{xy}^N + F^2 \psi_{xx}^N) \right], \\ C &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{E \sqrt{EI - F^2}} (E \psi_{xy}^N - F \psi_{xx}^N) \right] \quad \text{e} \\ D &= \frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{E} \psi_{xx}^N - \frac{1}{E(EI - F^2)} (E^2 \psi_{yy}^N - 2EF \psi_{xy}^N + F^2 \psi_{xx}^N) + 2(\beta_{tt})^N \right]. \end{aligned}$$

Portanto, o projetivo de curvatura em  $q$  é sempre degenerado podendo ser:

- uma superfície, se  $B$ ,  $C$  e  $D$  forem linearmente independentes;
- uma região plana se somente dois vetores dentre os vetores  $B$ ,  $C$  e  $D$  forem linearmente independentes;
- um segmento de reta ou um ponto.

Analisamos alguns exemplos, levando em consideração a codimensão da superfície e da curva em questão.

### A superfície e a curva com codimensão 1

Suponhamos que, a superfície está imersa em  $\mathbb{R}^3$  e que a curva está imersa em  $\mathbb{R}^2$ . Neste caso, o espaço normal a 3-variedade de translação em  $q = \psi(p)$  é dado por  $N_q S_{h\beta} \equiv \mathbb{R}^2$ .

Logo, os projetivos de curvatura em  $q$  podem ser: pontos, segmentos radiais ou não, regiões planares, como por exemplo, regiões elípticas, triangulares ou cones planares.

### A superfície com codimensão 1 e a curva com codimensão 2

Consideramos a superfície e a curva imersas em  $\mathbb{R}^3$ . Assim, o espaço normal a 3-variedade de translação em  $q = \psi(p)$  é dado por  $N_q S_{h\beta} \equiv \mathbb{R}^3$ .

Logo, os projetivos de curvatura em  $q$  podem ser: pontos, segmentos de reta radiais ou não, regiões planas, como por exemplo, regiões elípticas, triangulares ou cones planares, contidas em subespaços afim ou não, ou o projetivo de curvatura está contido em um cone no 3-espaço  $N_q S_{h\beta}$ .

### A superfície e a curva com codimensão 2

Consideramos a curva imersa em  $\mathbb{R}^3$  e a superfície imersa em  $\mathbb{R}^4$ . Assim, o espaço normal a 3-variedade de translação em  $q = \psi(p)$  é dado por  $N_q S_{h\beta} \equiv \mathbb{R}^4$ .

Logo, os projetivos de curvatura em  $q$  podem ser: pontos, segmentos radiais ou não, regiões planas (como por exemplo, regiões elípticas, triangulares ou cones planares) ou contidos em cones, sendo que nos dois últimos casos eles podem estar contidos em subespaços afim de  $N_q S_{h\beta}$ .

Para codimensões maiores do que 2, da curva e da superfície, não obtemos protótipos novos para os projetivos de curvatura, como podemos deduzir da expressão dada em (3.4.8).

Este é um exemplo de 3-variedade em que todos os seus pontos têm algum tipo de umbilicidade, sendo pelo menos semi-quase-umbílicos.

Além disso, todos os pontos de  $S_{h\beta}$  são de tipo  $M_i$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ .

### Exemplo 2:

O outro exemplo de 3-variedade de translação que vamos analisar aqui é o de uma 3-variedade obtida a partir de três curvas imersas em  $\mathbb{R}^n$ . Este exemplo é uma extensão daquele estudado em [2].

**Definição 3.4.2.** *Sejam  $\alpha, \beta, \gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  curvas regulares de classe  $C^2$ , parametri-*

zadas pelos comprimentos de arco  $r, s$  e  $t$ , respectivamente. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned}\psi : S^1 \times S^1 \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p = (r, s, t) &\longmapsto \frac{1}{3} \left( \alpha(r) + \beta(s) + \gamma(t) \right),\end{aligned}$$

que assumiremos ser uma imersão.

A **3-variedade de translação associada a  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$**  é dada pela imagem da aplicação  $\psi$ , sendo denotada por  $S_{\alpha\beta\gamma}$ .

Suponhamos que as três curvas estejam em subespaços simultaneamente ortogonais. Então os coeficientes da primeira forma fundamental associados a  $S_{\alpha\beta\gamma}$  em  $q = \psi(p)$  são:

$$E(p) = I(p) = K(p) = \frac{1}{9} \quad \text{e} \quad F(p) = G(p) = J(p) = 0.$$

Logo, obtemos os seguintes vetores calculados em  $p$  :

$$H = \frac{3}{4} \left( \psi_{rr}^N + \psi_{ss}^N + 2\psi_{tt}^N \right) = \frac{3}{4} \left( \alpha_{rr}^N + \beta_{ss}^N + 2\gamma_{tt}^N \right),$$

$$B = \frac{3}{4} \left( \alpha_{rr}^N - \beta_{ss}^N \right),$$

$$D = \frac{3}{4} \left( \psi_{rr}^N + \psi_{ss}^N + 2\psi_{tt}^N \right) = \frac{3}{4} \left( -\alpha_{rr}^N - \beta_{ss}^N + 2\gamma_{tt}^N \right) \quad \text{e}$$

$$C = U = V = 0.$$

Portanto, o projetivo de curvatura em  $q$  é dado por:

$$\eta(\theta, \phi) = H + B(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + D \cos(2\phi).$$

Geometricamente, ele pode ser um ponto, ou um segmento de reta ou uma região triangular.

Além disso, temos que:

- O projetivo de curvatura em  $q = \psi(p)$  se degenera em um uma região triangular se, e somente se, os vetores curvaturas normais  $\alpha_{rr}^N(p)$  e  $\beta_{ss}^N(p)$  são linearmente independentes, ou  $\alpha_{rr}^N(p)$  e  $\gamma_{tt}^N(p)$  são linearmente independentes, ou  $\beta_{ss}^N(p)$  e  $\gamma_{tt}^N(p)$  são linearmente independentes. Esta região pode estar em um subespaço afim de  $N_q S_{\alpha\beta\gamma}$  se, e somente se,  $\alpha_{rr}^N(p)$ ,  $\beta_{ss}^N(p)$  e  $\gamma_{tt}^N(p)$  são linearmente independentes.

- O projetivo de curvatura em  $q = \psi(p)$  se degenera em um segmento radial se, e somente se,  $\alpha_{rr}^N(p)$ ,  $\beta_{ss}^N(p)$  e  $\gamma_{tt}^N(p)$  são linearmente dependentes, sendo no mínimo um destes vetores não nulo e distinto dos demais.
- O projetivo de curvatura em  $q = \psi(p)$  se degenera em um ponto distinto da origem se, e somente se,  $\alpha_{rr}^N(p) = \beta_{ss}^N(p) = \gamma_{tt}^N(p)$  e não nulos. Por outro lado, projetivo de curvatura em  $q = \psi(p)$  é a origem se, e somente se,  $\alpha_{rr}^N(p) = \beta_{ss}^N(p) = \gamma_{tt}^N(p) = 0$ .

Este é um exemplo de 3-variedade em que todos os seus pontos têm algum tipo de umbilicidade, sendo pelo menos quase-umbílicos.

Além disso, todos os pontos de  $S_{\alpha\beta\gamma}$  são de tipo  $M_i$  para  $i = 0, 1, 2$ .

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Singularidades do Projetivo de Curvatura

Neste capítulo, verificamos se a aplicação  $\eta : S^2 \subset T_p M \longrightarrow N_p M$ , que define o projetivo de curvatura em  $p$  é regular ou singular. E, no caso de existirem singularidades, além de, exibí-las procuramos descrevê-las. Consideramos esta descrição como uma abordagem preliminar. Uma classificação destas singularidades, mais coerente com este contexto é uma perspectiva futura de trabalho e deverá envolver relações que preservem a geometria de segunda ordem da 3-variedade em questão.

Também estudamos as imersões de segunda ordem no sentido de Feldman e mostramos que uma 3-variedade  $M$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , é 2-regular se, e somente se, todos os seus pontos são de tipo  $M_6$ .

---

### 4.1 Noções sobre Singularidades

---

Recordamos alguns conceitos sobre singularidades, tomando como referências [12], [13] e [15].

Dada uma aplicação diferenciável  $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  é um ponto singular de  $g$  se posto( $J_g(x)$ )  $< \min(n, m)$ . Caso contrário,  $x$  é chamado ponto regular de  $g$ .

O **conjunto singular**  $\Sigma g$  de  $g$  é o conjunto de todos os seus pontos singulares. O conjunto dos valores singulares é às vezes chamado **conjunto bifurcação**, sendo denotado por  $\mathcal{B}_g$ .

Uma maneira natural de distinguir um ponto singular de outro é pelo posto da diferencial. Por este motivo, introduzimos o **conjunto singular de Thom de 1ª ordem**:

$$\Sigma^i g = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{coposto}(d_x g) = i\},$$

sendo  $\text{coposto}(d_x g) = \min(n, m) - \text{posto}(d_x g)$ .

Na sequência apresentamos um brevíssimo resumo sobre as singularidades de aplicações do plano no espaço e do plano no plano. As referências são [22] e [28], além das citadas acima.

As singularidades dos projetivos de curvatura podem ser consideradas como singularidades de aplicações de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^4$ .

### 4.1.1 Aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$

Um exemplo padrão de singularidades de aplicações do plano no espaço é dado pela singularidade do tipo guarda-chuva de Whitney.

Consideramos o germe de aplicação

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{R}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (x^2, y, xy). \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana é dada por

$$J_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

O conjunto dos pontos singulares é a origem, isto é,  $\Sigma g = \Sigma^1 g = \{(0, 0)\}$  e o conjunto dos valores singulares também é a origem  $\mathcal{B}_g = \{(0, 0, 0)\}$ . O germe desta aplicação é denominado **guarda-chuva de Whitney** ou **cross-cap** ou **pinch point**.

A imagem deste germe de aplicação é dada pela figura 4.1.

Se considerarmos sua imagem como uma superfície, observamos que ela se auto-intersecciona transversalmente em um segmento de pontos duplos dado por

$\{(u, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : u \neq 0\}$ . O ponto  $(0, 0, 0)$  que é um dos extremos deste segmento é exatamente a singularidade de Whitney.

Outros exemplos nos quais temos singularidades de Whitney são dados pelas figuras 4.2 e 4.3 e suas respectivas formas normais.

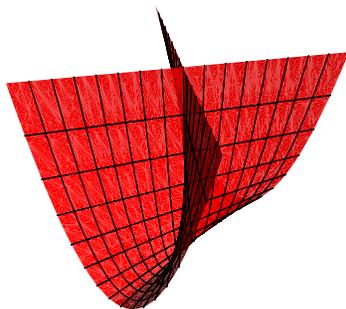


Figura 4.1:  $(x^2, xy, y)$ .

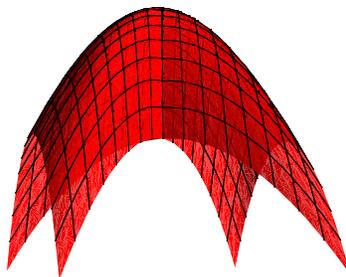


Figura 4.2:  $(x^2 + y^2, xy, y)$ .

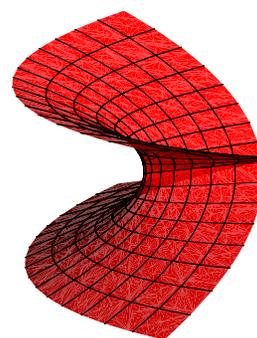


Figura 4.3:  $(x^2 - y^2, xy, y)$ .

Whitney provou que a aplicação germe  $g$ , (a cross-cap), é estável, isto é,  $g$  não muda se considerarmos pequenas perturbações.

### 4.1.2 Aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

Neste caso, estamos trabalhando com o problema de classificar as singularidades de aplicações do plano no plano.

Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação  $C^k$  diferenciável. O conjunto das singularidades de  $g$  é dado por

$$\Sigma g = \Sigma^1 g \cup \Sigma^2 g.$$

Analisamos cada caso:

#### Singularidades de $g$ de coposto 1:

Temos que  $\Sigma^1 g$  é uma curva. Seja  $p$  uma singularidade de coposto 1 de  $g$ . Podem ocorrer duas situações:

- i)  $\text{Ker}(d_p g)$  é transversal a  $\Sigma^1 g$ ;
- ii)  $\text{Ker}(d_p g)$  é tangente a  $\Sigma^1 g$ .

Se  $p$  é singularidade que satisfaz i) então  $p$  é **ponto de dobra**. Caso contrário, se  $p$  é singularidade que satisfaz ii) então  $p$  é **ponto de cúspide** ou é uma singularidade mais degenerada.

Whitney provou os seguintes teoremas ([13]):

**Teorema 4.1.1.** *Se  $p$  é ponto de dobra então é possível encontrar um sistema de coordenadas  $(x_1, x_2)$  centradas em  $p$  e  $(y_1, y_2)$  em  $q = g(p)$  tal que  $g$  é dada por*

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2).$$

**Teorema 4.1.2.** *Se  $p$  é ponto de cúspide então é possível encontrar um sistema de coordenadas  $(x_1, x_2)$  centradas em  $p$  e  $(y_1, y_2)$  em  $q = g(p)$  tal que  $g$  é dada por*

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_1x_2 + x_2^3).$$

### Singularidades de $g$ de coposto 2:

Consideramos as singularidades de  $g$  de coposto 2. Para classificá-las vamos tomar a indução sobre o espaço de 2-jatos.

Seja  $p \in \Sigma^2 g$ . Existe um sistema de coordenadas  $(x_1, x_2)$  centradas em  $p$  e  $(y_1, y_2)$  em  $q = g(p)$  tal que  $g$  pode ser dada por uma das seguintes formas normais:

- i)  $g(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$ , isto é,  $p$  é ponto de dobra dupla;
- ii)  $g(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2)$ ;
- iii)  $g(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1^2)$ ;
- iv)  $g(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, 0)$ ;
- v)  $g(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 0)$ ;
- vi)  $g(x_1, x_2) = (x_1^2, 0)$ .

Nos três últimos casos temos singularidades mais degeneradas.

## 4.2 Singularidades no Projetivo de Curvatura

Nosso objetivo é estudar os pontos singulares, seus respectivos valores singulares e o tipo de singularidade que podem ocorrer nos projetivos de curvatura. Para tanto vamos desconsiderar o vetor  $H$  na expressão do projetivo de curvatura em  $p \in M$ , sendo  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ .

Além disso, para calcular as singularidades podemos supor a forma parametrizada da superfície de Veronese de ordem 2 dada por:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, \phi) = & \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta), (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta), \cos(2\phi), \right. \\ & \left. \cos(\theta) \sin(2\phi), \sin(\theta) \sin(2\phi) \right). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

De fato, sejam  $p \in M$  e  $\tilde{\eta} : S^2 \subset T_p M \longrightarrow E_p \subset \mathbb{R}^{n-3}$  a expressão do projetivo de curvatura em  $p$  dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\theta, \phi) = & B(1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + C(1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) \\ & + D \cos(2\phi) + U \cos(\theta) \sin(2\phi) + V \sin(\theta) \sin(2\phi) \end{aligned}$$

que é a expressão na forma parametrizada de  $\eta(S^2)$  tomando  $H = 0$ .

Definimos a transformação linear diferenciável

$$\begin{aligned} T_1 : \quad \mathbb{R}^5 & \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad n \geq 4, \\ (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) & \longmapsto u_1 B + u_2 C + u_3 D + u_4 U + u_5 V, \end{aligned}$$

onde  $B, C, U$  e  $V$  são os vetores que definem o projetivo de curvatura.

Assim, a composição

$$\begin{array}{ccccc} S^2 \subset T_p M & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{T_1} & \mathbb{R}^n \\ (\theta, \phi) & \longmapsto & \xi(\theta, \phi) & \longmapsto & T_1 \circ \xi(\theta, \phi), \end{array}$$

resulta em

$$T_1 \circ \xi(\theta, \phi) = \tilde{\eta}(\theta, \phi).$$

Como as aplicações  $\xi$ ,  $\tilde{\eta}$  e  $T_1$  são diferenciáveis então pela Regra da Cadeia temos que a composição  $T_1 \circ \xi$  também é diferenciável em  $(\theta, \phi)$  e

$$d_{(\theta, \phi)}(T_1 \circ \xi) = d_{\xi(\theta, \phi)} T_1 \circ d_{(\theta, \phi)} \xi = T_1 \circ d_{(\theta, \phi)} \xi,$$

pois  $T_1$  é uma transformação linear diferenciável e assim,  $\forall(\theta, \phi)$  temos  $d_{\xi(\theta, \phi)} T_1 = T_1$ .

Portanto,

$$d_{(\theta, \phi)} \tilde{\eta} = T_1 \circ d_{(\theta, \phi)} \xi.$$

Deste modo, podemos estudar os pontos singulares da aplicação  $\xi$  ao invés de estudarmos os pontos singulares de  $\tilde{\eta}$ , se a transformação linear  $T_1$  for injetiva.

Analisaremos os casos nos quais  $p$  é: ponto de tipo  $M_5$  não quase-quase-umbílico, ponto quase-quase-umbílico, ponto semi-quase-umbílico e ponto quase-umbílico. No último caso consideraremos apenas alguns protótipos de projetivos de curvatura.

### 4.2.1 Ponto de tipo $M_5$ não quase-quase-umbílico

Seja  $p \in M_5$  ponto não quase-quase-umbílico, ou seja, o projetivo de curvatura em  $p$  é difeomorfo à uma superfície de Veronese de ordem 2, composta com uma transformação linear, substancial no 5-espaço  $Aff_p = E_p$ . Como a superfície de Veronese é um mergulho de classe  $C^\infty$  em um 5-espaço, o projetivo de curvatura também o será.

### 4.2.2 Ponto quase-quase-umbílico linear

Seja  $p \in M$  ponto quase-quase-umbílico linear, ou seja, o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma superfície substancial no 4-espaço  $E_p$ . Suponhamos que  $N_p M \equiv \mathbb{R}^4$ .

Na proposição 3.3.1 listamos todas as possíveis equações para os projetivos de curvatura em  $p$ , se  $p$  é ponto quase-quase-umbílico linear. Algumas destas aplicações induzem mergulhos do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  em  $\mathbb{R}^4$ , como por exemplo, Tipo 3-i). Nestes casos a prova segue de verificarmos que a aplicação  $\eta$  é uma imersão e que satisfaz a propriedade:  $\eta(q_1) = \eta(q_2) \iff q_2 = \pm q_1$ , isto é, ela induz uma aplicação injetiva  $\bar{\eta} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ .

O restante da prova segue de  $\eta$  ser contínua e  $\mathbb{P}^2$  compacto.

Caso contrário, quando as aplicações não são imersões cabe estudar suas singularidades. Ilustramos nos exemplos-padrão a seguir somente o conjunto dos pontos singulares.

#### Tipo 1: matriz $[\tilde{T}_1]$

- $\eta(u, v, w) = (4uv, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$ ;  
 $\Sigma^1 \eta = \left\{ \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}$ .

#### Tipo 2: matriz $[\tilde{T}_2]$

- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$ ;  
 $\Sigma^1 \eta = \left\{ (\pm 1, 0, 0), (0, \mp 1, 0) \right\}$ .
- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 4uv, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$ ;  
 $\Sigma^1 \eta = \left\{ \left( \pm \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \pm \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, 0 \right), \left( \pm \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \pm \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, 0 \right) \right\}$ .

**Tipo 4: matriz  $[\tilde{\mathbf{T}}_4]$** 

- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv, 2w^2 - 1, 2vw)$ ;  
 $\Sigma^1\eta = \left\{ (\pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1) \right\}$ .
- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv + 2a_{24}uw, 2w^2 - 1, 2vw)$ , com  $a_{24} \neq 0$ ;  
 $\Sigma^1\eta = \left\{ (\pm 1, 0, 0), \left( 0, \pm \frac{a_{24}}{\sqrt{a_{24}^2+4}}, \mp \frac{2}{\sqrt{a_{24}^2+4}} \right), a_{24} \neq 0 \right\}$ .

**Tipo 5: matriz  $[\tilde{\mathbf{T}}_5]$** 

- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv, 2w^2 - 1, 2uw)$ ;  
 $\Sigma^1\eta = \left\{ (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1) \right\}$ .
- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv + 2a_{25}vw, 2w^2 - 1, 2uw)$ , com  $a_{25} \neq 0$ ;  
 $\Sigma^1\eta = \left\{ (0, \pm 1, 0), \left( \pm \frac{a_{25}}{\sqrt{a_{25}^2+4}}, 0, \mp \frac{2}{\sqrt{a_{25}^2+4}} \right), a_{25} \neq 0 \right\}$ .
- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv, 2w^2 - 1, 2uw + 2vwa_{45})$ , com  $a_{45} \neq 0$ ;  
 $\Sigma^1\eta = \left\{ (0, 0, \pm 1), \left( \pm \frac{a_{45}}{\sqrt{a_{45}^2+1}}, \mp \frac{1}{\sqrt{a_{45}^2+1}}, 0 \right) : a_{45} \neq 0 \right\}$ .
- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv + 2a_{25}vw, 2w^2 + 2a_{35}vw - 1, 2uw)$ , com  $a_{25}$  e  $a_{35}$  não nulos;  
 $\Sigma^1\eta = \left\{ (0, \pm 1, 0), \left( \mp \frac{a_{25}}{\sqrt{a_{25}^2+4}}, 0, \pm \frac{2}{\sqrt{a_{25}^2+4}} \right) : a_{25} \neq 0 \right\}$ .
- $\eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv, 2w^2 + 2a_{35}vw - 1, 2uw + 2a_{45}vw)$ , com  $a_{35}$  e  $a_{45}$  não nulos;  
 $\Sigma^1\eta = \left\{ (0, 0, \pm 1) \right\}$ .

Em todos estes exemplos as singularidades são de primeira ordem de Thom, isto é, são singularidades de coposto 1. Elas formam um conjunto de pontos isolados em  $S^2$ , em cada caso considerado.

### 4.2.3 Ponto semi-quase-umbílico linear

Seja  $p \in M$  ponto semi-quase-umbílico linear, ou seja, o projetivo de curvatura em  $p$  se degenera em uma superfície substancial no 3-espaço  $E_p \subset N_pM$ . Suponhamos  $n = 6$ .

Conforme foi mostrado no capítulo anterior, os projetivos de curvatura em  $p$ , neste caso, são superfícies isomorfas as superfícies de Steiner: superfície Romana de Steiner, Cross-Cap, superfície de Steiner de Tipo 5 e Cross-Cup, ou estão contidas nas quádricas: elipsóide e cone.

Estas superfícies de Steiner possuem singularidades, as quais já são conhecidas. Somente vamos listá-las, detalhando apenas um caso. Tomaremos como referência os trabalhos de Coffman et al. [5] e Coffman [6].

#### Superfície Romana de Steiner

Esta superfície contém três segmentos de pontos duplos reais cada um dos quais termina em duas singularidades de Whitney. Também, possui um ponto triplo que é a interseção dos três segmentos de pontos duplos.

#### Superfície Cross-Cap

Esta superfície se auto-intercepta em um segmento de pontos duplos reais, sendo que os extremos deste segmento são duas singularidades de Whitney ou singularidades cross-cap que se curvam em direções diferentes (figuras 4.2 e 4.3). Esta é uma das razões dela se chamar Cross-Cap.

#### Superfície de Steiner de Tipo 5

Nesta superfície dois dos três segmentos de pontos duplos na superfície Romana de Steiner formam um segmento tacnodal que intercepta o outro segmento de pontos duplos em um ponto formando um "T". Ela tem quatro singularidades de Whitney que são os pontos finais destes segmentos. Ao longo do segmento tacnodal sua auto-interseção não é transversal e este segmento também contém uma singularidade de Whitney do outro segmento.

Uma curva no plano é uma **curva tacnodal** quando dois ramos da curva se tornam

tangentes. Seu germe em uma vizinhança de  $(0, 0)$  é dado por  $g(x, y) = x^4$ .

### Superfície Cross-Cup

Nesta superfície os três segmentos de pontos duplos da superfície Romana de Steiner coincidem formando um segmento oscnodal com singularidades de Whitney em seus extremos. Neste segmento a auto-interseção não é transversal.

O germe de uma **curva oscnodal** em uma vizinhança de  $(0, 0)$  é dado por  $g(x, y) = x^6$ .

Vamos detalhar este exemplo. Seja  $\eta : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\eta(\theta, \phi) = \left( \cos(2\phi), 2\sin^2(\phi)\cos(2\theta) + \cos(\theta)\sin(2\phi), \sin(\theta)\sin(2\phi) \right), \quad 0 \leq \theta, \phi \leq \pi.$$

Sua matriz Jacobiana em  $(\theta, \phi)$  é dada por:

$$J_\eta(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin(2\phi) \\ -\sin(2\phi)\sin(\theta) - 4(\sin(\phi))^2\sin(2\theta) & 2\cos(2\phi)\cos(\theta) + 2\sin(2\phi)\cos(2\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi) & 2\sin(\theta)\cos(2\phi) \end{pmatrix}.$$

O conjunto dos pontos singulares é dado por:

$$\Sigma \eta = \left\{ \left( k\pi, \frac{\pi}{2} \right), \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), k = 0, 1 \right\}.$$

O conjunto dos valores singulares é formado pelos pontos

$$\mathcal{B}_\eta = \left\{ \eta\left(k\pi, \frac{\pi}{2}\right) = (-1, 2, 0), \quad \eta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-1, -2, 0) \right\}.$$

Estas são as singularidades de Whitney. De fato, consideramos a outra parametrização de  $\eta$  dada por:

$$\eta(u, v, w) = \left( 2w^2 - 1, 2(u^2 - v^2) + 2uw, 2vw \right),$$

com  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ .

Tomamos as três aplicações

$$\eta_1(u, v) = \left( 1 - 2(u^2 + v^2), 2(u^2 - v^2) + 2u\sqrt{1 - u^2 - v^2}, 2v\sqrt{1 - u^2 - v^2} \right),$$

$$\eta_2(u, w) = \left( 2w^2 - 1, 4u^2 + 2w^2 + 2uw + 2, 2w\sqrt{1 - u^2 - w^2} \right) \quad \mathbf{e}$$

$\eta_3(v, w) = \left( 2w^2 - 1, -4v^2 - 2w^2 + 2w\sqrt{1 - v^2 - w^2} + 2, 2vw \right)$ ,  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ , que determinam três "pedaços" da Cross-Cup, dados respectivamente pelas figuras 4.5, 4.4 e 4.6.

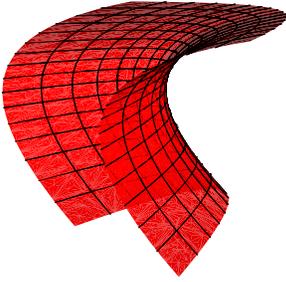


Figura 4.4:  $\eta_1$ .

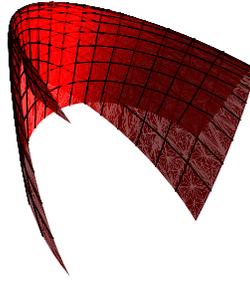


Figura 4.5:  $\eta_2$ .

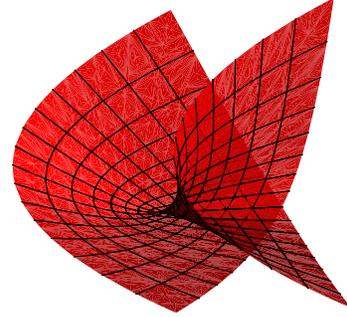


Figura 4.6:  $\eta_3$ .

Em  $\eta_2$  a Cross-Cup se auto-intercepta em um segmento de pontos duplos, não transversal e sim tangente à superfície. Isto descreve a singularidade de Whitney  $(-1, -2, 0)$ . O mesmo ocorre em  $\eta_3$ , tendo como singularidade de Whitney  $(-1, 2, 0)$ .

No caso de  $\eta_1$  não temos singularidades.

### Projetivo contido em cone

Seja  $\eta : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\eta(\theta, \phi) = \left( 2 \sin^2(\phi) \cos(2\theta), 2 \sin^2(\phi) \sin(2\theta), \cos(2\phi) \right), \quad 0 \leq \theta, \phi \leq \pi,$$

cuja imagem está contida em um cone circular de vértice  $(0, 0, 1)$  e base circular  $(2 \cos(2\theta), 2 \sin(2\theta), -1)$  contida no plano  $Z = -1$ .

Sua matriz Jacobiana em  $(\theta, \phi)$  é dada por:

$$J_\eta(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -4 \sin^2(\phi) \sin(2\theta) & 2 \sin(2\phi) \cos(2\theta) \\ 4 \sin^2(\phi) \cos(2\theta) & 2 \sin(2\phi) \sin(2\theta) \\ 0 & -2 \sin(2\phi) \end{pmatrix}.$$

O conjunto dos pontos singulares é dado por  $\Sigma\eta = \left\{ (\theta, k\pi), \left( \theta, \frac{\pi}{2} \right), k = 0, 1 \right\}$ , sendo  $\Sigma^1\eta = \left\{ \left( \theta, \frac{\pi}{2} \right) \right\}$  e  $\Sigma^2\eta = \left\{ (\theta, k\pi), k = 0, 1 \right\}$ .

O conjunto dos valores singulares é formado pelo vértice do cone  $(0, 0, 1)$  e pela base circular  $\{(2 \cos(2\theta), 2 \sin(2\theta), -1)\}$ , como era esperado.

### Elipsóide

As únicas singularidades que aparecem aqui são devidas à parametrização  $(\theta, \phi)$ .

#### 4.2.4 Ponto quase-umbílico linear

Seja  $p \in M$  ponto quase-umbílico linear. Suponhamos que  $N_p M \equiv \mathbb{R}^2$ . Assim, temos uma aplicação  $\eta : S^2 \subset T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Estudamos as singularidades de algumas das aplicações  $\eta$  encontradas na proposição 3.3.3.

### Região triangular

Consideramos o exemplo padrão de projetivo de curvatura em  $p$  dado por:

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta), \cos(2\phi) \right), \quad 0 \leq \theta, \phi \leq \pi,$$

cuja imagem é uma região triangular com vértices  $(0, 1)$ ,  $(2, -1)$  e  $(-2, -1)$ .

A matriz Jacobiana de  $\eta$  em  $(\theta, \phi)$  é dada por:

$$J_\eta(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -4 \sin^2(\phi) \sin(2\theta) & 2 \sin(2\phi) \cos(2\theta) \\ 0 & -2 \sin(2\phi) \end{pmatrix}.$$

Assim, o conjunto dos pontos singulares de  $\eta$  é dado por:

- $\Sigma^1 \eta = \Sigma_1^1 \eta \cup \Sigma_2^1 \eta \cup \Sigma_3^1 \eta$ , sendo  $\Sigma_1^1 \eta = \left\{ \left( \theta, \frac{\pi}{2} \right) : \theta \neq k\pi, k = 0, 1, \frac{1}{2} \right\}$ ,  
 $\Sigma_2^1 \eta = \left\{ (0, \phi) : \phi \neq k\pi, k = 0, 1, \frac{1}{2} \right\}$ ,  $\Sigma_3^1 \eta = \left\{ \left( \pi, \phi \right) : \phi \neq k\pi, k = 0, 1, \frac{1}{2} \right\}$ ,  
 e
- $\Sigma^2 \eta = \left\{ \left( \theta, k\pi \right), \left( k\pi, \frac{\pi}{2} \right), \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), k = 0, 1 \right\}$ , o conjunto dos pontos singulares mais degenerados.

Logo, o conjunto dos valores singulares é formado pelos lados do triângulo

$$\eta\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \left( 2 \cos(2\theta), -1 \right), \quad \eta(0, \phi) = \left( 1 - \cos(2\phi), \cos(2\phi) \right) \quad \text{e}$$

$$\eta\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = \left(- (1 - \cos(2\phi)), \cos(2\phi)\right),$$

e pelos vértices

$$\eta(\theta, k\pi) = (0, 1), \quad \eta\left(k\pi, \frac{\pi}{2}\right) = (2, -1), \quad \eta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-2, -1).$$

Vamos classificar estas singularidades.

**i)** Singularidades de coposto 1:

- Seja  $X = \left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) \in \Sigma_1^1\eta$ . Assim,  $\text{Ker}(d_X\eta) = \{(0, \phi) : 0 \leq \phi \leq \pi\}$  que é transversal ao conjunto dos pontos singulares  $\Sigma_1^1\eta$ .

Portanto,  $X = \left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)$  é ponto de dobra.

- Seja  $X = (0, \phi) \in \Sigma_2^1\eta$ . Assim,  $\text{Ker}(d_X\eta) = \{(\theta, 0) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$  que é transversal ao conjunto dos pontos singulares  $\Sigma_2^1\eta$ .

Portanto,  $X = (0, \phi)$  é ponto de dobra.

- Seja  $X = \left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \in \Sigma_3^1\eta$ . Assim,  $\text{Ker}(d_X\eta) = \{(\theta, 0) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$  que é transversal ao conjunto dos pontos singulares  $\Sigma_3^1\eta$ .

Portanto,  $X = \left(\phi, \frac{\pi}{2}\right)$  é ponto de dobra.

**ii)** Singularidades de coposto 2:

- Seja  $Y = (\theta_0, k\pi)$ ,  $k = 0, 1$ . Neste ponto, o 2-jato de  $\eta$  é dado por  $j^2\eta(Y) = \left((4 \cos(2\theta_0))\phi^2, -4\phi^2\right)$  que é uma singularidade mais degenerada.

- Seja  $Y = \left(k\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $k = 0, 1$ . Neste ponto, o 2-jato de  $\eta$  é dado por  $j^2\eta(Y) = \left(-4(2\theta^2 + \phi^2), \phi^2\right)$  que é um ponto de dobra dupla.

- Seja  $Y = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Neste ponto, o 2-jato de  $\eta$  é dado por  $j^2\eta(Y) = \left(4(2\theta^2 + \phi^2), 4\phi^2\right)$  que é um ponto de dobra dupla.

Região elíptica

Consideramos o exemplo padrão de projetivo de curvatura em  $p$  dado por:

$$\eta(\theta, \phi) = \left( (1 - \cos(2\phi)) \cos(2\theta), (1 - \cos(2\phi)) \sin(2\theta) \right),$$

cuja imagem é uma região circular centrada em  $(0, 0)$  e raio 2.

Sua matriz Jacobiana em  $(\theta, \phi)$  é dada por:

$$J_\eta(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -4 \sin^2(\phi) \sin(2\theta) & 2 \sin(2\phi) \cos(2\theta) \\ 4 \sin^2(\phi) \cos(2\theta) & 2 \sin(2\phi) \sin(2\theta) \end{pmatrix}.$$

O conjunto dos pontos singulares é dado por

$$\Sigma^1 \eta = \left\{ \left( \theta, \frac{\pi}{2} \right) : 0 \leq \theta \leq \pi \right\} \quad \text{e} \quad \Sigma^2 \eta = \left\{ (\theta, k\pi) : 0 \leq \theta \leq \pi, k = 0, 1 \right\}.$$

O conjunto bifurcação é dado por:

$$\mathcal{B}_\eta = \left\{ (0, 0) \right\} \cup \left\{ (2 \cos(2\theta), 2 \sin(2\theta)) : 0 \leq \theta \leq \pi \right\},$$

sendo este último o bordo da região plana.

Vamos classificar estas singularidades.

**i)** Singularidade de coposto 1:

- Seja  $X = \left( \theta, \frac{\pi}{2} \right) \in \Sigma^1 \eta$ . Assim,  $\text{Ker}(d_X \eta) = \{(0, \phi) : 0 \leq \phi \leq \pi\}$  que é transversal ao conjunto dos pontos singulares  $\Sigma^1 \eta$ .

Portanto,  $X = \left( \theta, \frac{\pi}{2} \right)$  é ponto de dobra.

**ii)** Singularidade de coposto 2:

- Seja  $Y = (\theta_0, k\pi)$ ,  $k = 0, 1$ . Neste ponto, o 2-jato de  $\eta$  é dado por  $j^2 \eta(Y) = \left( (4 \cos(2\theta_0))\phi^2, (4 \sin(2\theta_0))\phi^2 \right)$  que é uma singularidade mais degenerada.

Cone planar

Seja  $\eta : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$\eta(\theta, \phi) = \left( 2 \sin^2(\phi) \cos(2\theta), \cos(\theta) \sin(2\phi) \right).$$

Sua matriz Jacobiana em  $(\theta, \phi)$  é dada por:

$$J_\eta(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -4 \sin^2(\phi) \sin(2\theta) & 2 \sin(2\phi) \cos(2\theta) \\ -\sin(2\phi) \sin(\theta) & 2 \cos(2\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

O conjunto dos pontos singulares é formado por:

- $\Sigma^1 \eta = \Sigma_1^1 \eta \cup \Sigma_2^1 \cup \Sigma_3^1$ , sendo  $\Sigma_1^1 \eta = \left\{ (k\pi, \phi) : 0 \leq \phi \leq \pi, k = 0, 1 \right\}$ ,  
 $\Sigma_2^1 \eta = \left\{ \left( \theta, \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)} \right) \right) : \theta \neq \frac{\pi}{2} \right\}$  e  $\Sigma_3^1 \eta = \left\{ \left( \theta, \arctan \left( \frac{-\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)} \right) \right) : \theta \neq \frac{\pi}{2} \right\}$ ,  
e
- $\Sigma^2 \eta = \left\{ \left( \frac{\pi}{2}, k\pi \right), \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), k = 0, 1 \right\}$ , o conjunto dos pontos singulares mais degenerados.

O conjunto dos valores singulares é formado por:  $\eta(k\pi, \phi) = (1 - \cos(2\phi), \pm \sin(2\phi))$ , que é a elipse "base" do cone planar,

$$\eta\left(\theta, \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)}\right)\right) = \left(\frac{4 \cos^2(\theta) - 1}{1 + \cos^2(\theta)}, \frac{\sqrt{2} \cos^2(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)}\right) \quad \text{e}$$

$$\eta\left(\theta, \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)}\right)\right) = \left(\frac{4 \cos^2(\theta) - 1}{1 + \cos^2(\theta)}, \frac{-\sqrt{2} \cos^2(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)}\right)$$

"lados" do cone planar, e pelos pontos

$$\eta\left(\frac{\pi}{2}, k\pi\right) = (0, 0), \quad \eta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-2, 0).$$

Vamos classificar estas singularidades.

i) Singularidades de coposto 1:

- Seja  $X = (k\pi, \phi) \in \Sigma_1^1 \eta$ . Assim,  $\text{Ker}(d_X \eta) = \{(\theta, 0) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$  que é transversal ao conjunto dos pontos singulares  $\Sigma_1^1 \eta$ .

Portanto,  $X = (k\pi, \phi)$  é ponto de dobra.

- Seja  $X = \left( \theta, \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)} \right) \right) \in \Sigma_2^1 \eta$ . Assim,  
 $\text{Ker}(d_X \eta) = \left\{ \left( u, \frac{-\sqrt{2} \sin(\theta)}{2 \sin^2(\theta) - 1} u \right) : 0 \leq u \leq \pi \right\}$  que é transversal ao conjunto dos pontos singulares  $\Sigma_2^1 \eta$ .

Portanto,  $X = \left( \theta, \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)} \right) \right)$  é ponto de dobra.

- Seja  $X = \left( \theta, \arctan \left( \frac{-\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)} \right) \right) \in \Sigma_3^1 \eta$ . Assim,  
 $\text{Ker}(d_X \eta) = \left\{ \left( u, \frac{\sqrt{2} \sin(\theta)}{2 \sin^2(\theta) - 1} u \right) : 0 \leq u \leq \pi \right\}$ .

Portanto,  $X = \left( \theta, \arctan \left( \frac{-\sqrt{2}}{2 \cos(\theta)} \right) \right)$  é ponto de dobra.

ii) Singularidades de coposto 2:

- Seja  $Y = \left( \frac{\pi}{2}, k\pi \right)$ ,  $k = 0, 1$ . Neste ponto, o 2-jato de  $\eta$  é dado por  
 $j^2 \eta(Y) = \left( -4\phi^2, 2\theta\phi \right)$ .
- Seja  $Y = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ . Neste ponto, o 2-jato de  $\eta$  é dado por  
 $j^2 \eta(Y) = \left( 8\theta^2 + 4\phi^2, 2\theta\phi \right)$  que é uma singularidade mais degenerada.

Nos exemplos de projetivos de curvatura que são regiões planas, estudados acima, observamos que as singularidades são do tipo dobra ou mais degeneradas.

---

### 4.3 Imersões 2-Singulares e 2-Regulares

---

Tratamos agora das imersões 2-regulares e 2-singulares no sentido de Feldman.

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , imersão de classe  $C^2$  da 3-variedade  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ . Podemos escolher coordenadas locais  $(x, y, z)$  em  $p$  tais que o subespaço  $T_p^2 M$  é gerado por:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\}_{(p)}$$

Logo, dizer que  $p$  é um ponto 2-singular é equivalente a dizer que

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\}_{(p)}$$

é um conjunto linearmente dependente em  $\mathbb{R}^n$ .

**Observação 4.3.1.** *É claro que para qualquer imersão  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $4 \leq n \leq 8$ , todos os pontos são 2-singulares. Portanto só faz sentido falar em imersão 2-regular de superfícies imersas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ .*

**Proposição 4.3.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , dada pela imersão  $f$  e seja  $p \in M$ . Assim,  $p$  é ponto 2-regular de  $f$  se, e somente,  $p$  é de tipo  $M_6$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos que  $f$  seja a imersão na forma de Monge de  $M_3$  em  $p$ . Assim,  $p$  é ponto 2-regular se, e somente se, o conjunto de vetores

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\}_{(p)}$$

é linearmente independente em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , ou equivalentemente,

$$\text{posto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & r_1 & s_1 \\ & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & d_{n-3} & r_{n-3} & s_{n-3} \end{pmatrix}_{(p)} = 9 \iff$$

$$\text{posto} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & r_1 & s_1 \\ & & & \vdots & & \\ a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & d_{n-3} & r_{n-3} & s_{n-3} \end{pmatrix}_{(p)} = 6 \iff p \in M_6.$$

■

Consequentemente,

**Corolário 4.3.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ . Assim,  $p \in M$  é ponto 2-regular se, e somente se, projetivo de curvatura em  $p$  é difeomorfo à superfície de Veronese clássica de ordem 2, através de uma transformação afim, mergulhada substancialmente no 5-espaço  $Aff_p$ , transversal ao vetor  $H$ .*

**Corolário 4.3.2.**  *$p \in M$  é ponto 2-singular se, e somente se,  $p \in M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_5$ .*

Se a 3-variedade  $M$  é a 3-variedade de Veronese clássica de ordem 2 temos que todo ponto desta 3-variedade é de tipo  $M_6$ . Logo, este é um exemplo de imersão 2-regular em todos os pontos. Para as 3-variedades de translação apresentadas no capítulo 3, em todo ponto delas o projetivo de curvatura se degenera e assim, estes são exemplos de imersão 2-singular.

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## Contato com k-Planos e k-Esferas

Neste capítulo estabelecemos condições para que uma 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , tenha em cada um de seus pontos, contato de ordem  $\geq 2$  com  $k$ -planos ou  $k$ -esferas de  $\mathbb{R}^n$ ,  $3 \leq k \leq 8$ , relacionando-os com os projetivos de curvatura e umbilicidade. Este estudo inclui a extensão de alguns resultados de contatos de superfícies de [25], [8] e [9] para 3-variedades.

Além disso, definimos o cone das direções degeneradas para pontos de  $M$ .

---

### 5.1 Contatos entre Subvariedades

---

A noção de contato entre subvariedades pode ser pensada intuitivamente como o maior grau de tangência entre elas. Em [23] é introduzido um método, que utiliza técnicas da teoria de singularidades, para estudar os diferentes contatos entre duas subvariedades do espaço euclidiano. Este método consiste em definir uma aplicação de contato obtida pela composição de um mergulho local que representa uma das subvariedades e uma submersão local que intersecciona, de modo não transversal, a outra subvariedade em uma vizinhança do ponto de contato. O ponto de contato é então caracterizado como uma singularidade da aplicação de contato.

Desta forma, sejam  $X$  e  $Y$  subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ , localmente definidas através do

mergulho  $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e da submersão  $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $X = \psi(\mathbb{R}^m)$  e  $Y = \varphi^{-1}(0)$ , respectivamente, com  $p \in X \cap Y$ , ou seja,  $p = \psi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $\varphi \circ \psi(x) = 0$ .

Se  $m \geq k$  existe contato entre  $X$  e  $Y$  em  $p$  se as duas subvariedades não são transversais em  $p$ . Isto é equivalente a dizer que a diferencial  $d_x(\varphi \circ \psi) : T_x \mathbb{R}^m \longrightarrow T_y \mathbb{R}^k$ ,  $y = \varphi \circ \psi(x)$  não é sobrejetiva. Logo,  $\varphi \circ \psi$  tem uma singularidade ou um ponto crítico em  $x$ .

Assim, o estudo das singularidades da aplicação composta  $\varphi \circ \psi$  nos dá uma forma de analisar o contato entre as subvariedades  $X$  e  $Y$ . A aplicação  $\varphi \circ \psi$  é denominada **aplicação de contato**. O tipo de singularidade independe da particular escolha do mergulho e da submersão local.

Como aplicação deste método estudamos os contatos entre uma 3-variedade  $X = M$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , dada localmente pela imersão  $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $Y = \varphi^{-1}(0)$  um hiperplano ou uma hipersfera dada pela função altura ou função distância ao quadrado, respectivamente.

Para o caso de um hiperplano com vetor normal unitário  $\omega \in S^{n-1}$  e  $\rho > 0$  sua distância a origem, a submersão é dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n + \rho,$$

onde  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ .

Para o caso de uma hipersfera de centro  $a \in \mathbb{R}^n$  e raio  $r > 0$  a submersão é dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 - r^2,$$

onde  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

Portanto, os **contatos de M com a família de hiperplanos** são dados pelas singularidades da família de **funções altura**:

$$\begin{aligned} \lambda(\psi) : \mathbb{R}^3 \times S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, \omega) &\longmapsto \psi(p) \cdot \omega = \psi_\omega(p), \end{aligned}$$

onde  $\cdot$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ .

Já os **contatos de M com a família de hipersferas** são dados pelas singularidades da família de **funções distância ao quadrado**:

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, a) &\longmapsto \|\psi(p) - a\|^2 = d_a(p). \end{aligned}$$

Agora vamos definir contato de ordem  $\geq 2$  entre duas subvariedades, pois é o tipo de contato que analisaremos.

**Definição 5.1.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ , localmente definidas através da imersão  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e da submersão  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $X = \psi(\mathbb{R}^m)$  e  $Y = \varphi^{-1}(0)$ , respectivamente, com  $p \in X \cap Y$ . Dizemos que  $X$  e  $Y$  **têm contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$**  se, e somente se, todas as derivadas parciais de  $\varphi \circ \psi$  de ordem  $\leq 2$  se anulam em  $p$ .*

---

## 5.2 Função Altura e Contato com k-Planos

---

Consideramos a família de funções altura associada a imersão de uma 3-variedade  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , localmente dada por  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A imersão  $\psi$  define para cada  $\omega \in S^{n-1}$  uma **função altura**

$$\begin{aligned} \psi_\omega : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \psi(x, y, z) \cdot \omega. \end{aligned}$$

Temos que  $p \in M$  é ponto singular de  $\psi_\omega$  se, e somente se,  $\omega \in N_p M$ .

As singularidades desta família descrevem os contatos de  $M$  com hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$ .

Denotamos por  $Hess(\psi_\omega(p))$  a forma quadrática Hessiana da função altura  $\psi_\omega$  em  $p$ , onde

$$Hess(\psi_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \psi_{xx}(p) \cdot \omega & \psi_{xy}(p) \cdot \omega & \psi_{xz}(p) \cdot \omega \\ \psi_{xy}(p) \cdot \omega & \psi_{yy}(p) \cdot \omega & \psi_{yz}(p) \cdot \omega \\ \psi_{xz}(p) \cdot \omega & \psi_{yz}(p) \cdot \omega & \psi_{zz}(p) \cdot \omega \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Assim, dado  $\omega \in N_p M$ , a 3-variedade  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o hiperplano  $\mathbb{H}_\omega$  em  $p$  se, e somente se,  $\text{posto}(Hess(\psi_\omega(p)))=0$ , onde  $\mathbb{H}_\omega$  é o hiperplano que passa por  $p$  e é ortogonal a  $\omega$ . Neste caso, os contatos ocorrem ao longo de todas as direções no espaço tangente  $T_p M$  pois  $Hess(\psi_\omega) \equiv 0$ .

Do teorema de genericidade de Looijenga [20] temos que existe um conjunto residual de imersões em  $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  com a topologia  $C^\infty$  de Whitney para o qual a família  $\lambda(\psi)$

é localmente estável. Neste caso, exceto para um conjunto fechado de interior vazio de direções normais  $\omega \in S^{n-1}$  em  $p$ , o germe da função altura  $\psi_\omega$  em  $p$  é estável (isto é, de tipo Morse), mas também podemos encontrar certas direções que dão origem a germes não estáveis da função altura, ou seja, direções cuja função altura associada tem singularidade mais degenerada que Morse em  $p$ .

Logo, temos a seguinte definição:

**Definição 5.2.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , e  $p \in M$ .  $\omega \in N_p M$  é uma **direção degenerada** em  $p$  se, e somente se,  $\psi_\omega$  tem uma singularidade mais degenerada que Morse em  $p$ , isto é,  $Hess(\psi_\omega(p))$  não é regular.*

$\psi_\omega$  é chamada **função altura direção degenerada** em  $p$ .

O coposto da função altura direção degenerada  $\psi_\omega$  em  $p$  é igual a dimensão do núcleo da forma quadrática  $Hess(\psi_\omega(p))$ , isto é,  $\text{coposto}(\psi_\omega(p)) = \dim \text{Ker}(Hess(\psi_\omega(p)))$ .

**Definição 5.2.2.** *A função altura  $\psi_\omega$  tem uma **singularidade degenerada de coposto  $i$** , ou singularidade de coposto  $i$ , em  $p \in M$  se, e somente se,  $\text{coposto}(Hess(\psi_\omega(p))) = i$  para  $i = 1, 2, 3$ .*

O objetivo desta seção é determinar sob quais condições um ponto  $p \in M$  admite direções normais degeneradas, tais que hiperplanos ortogonais têm contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ .

**Observação 5.2.1.** *Suponhamos que a imersão de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , seja dada localmente pela forma de Monge  $f$ , para cada  $p \in M$ . Dado  $\omega \in N_p M$ , sabemos que  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com  $\mathbb{H}_\omega$  em  $p$  se, e somente se,  $\text{coposto}(Hess(f_\omega(p))) = 3$ , ou seja,*

$$\omega \in \left\langle f_{xx}(p), f_{xy}(p), f_{xz}(p), f_{yy}(p), f_{yz}(p), f_{zz}(p) \right\rangle^\perp = (N_p^1 M)^\perp.$$

Portanto,

- se  $5 \leq n \leq 8$ ,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com  $\mathbb{H}_\omega$  em  $p$ , se e somente se,  $p \in \bigcup_{i=0}^{n-4} M_i$ .
- se  $n=9$   $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com  $\mathbb{H}_\omega$  em  $p$ , se e somente se,  $f$  é 2-singular em  $p$  se, ou seja, o projetivo de curvatura em  $p$  é degenerado.

**Proposição 5.2.1.** *Dados uma 3-variedade  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ ,  $p \in M$  e  $\omega \in N_p M$  um vetor não nulo, as formas quadráticas  $II_\omega(p)$  e  $Hess(f_\omega(p))$  são equivalentes.*

**Demonstração:**

Suponhamos que a 3-variedade  $M$  seja dada localmente na forma de Monge

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3, (0, 0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, (0, 0, 0, \dots, 0)) \\ p = (x, y, z) &\longmapsto f(p) = x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 + f_1(p)\omega_4 + \dots + f_{n-3}(p)\omega_n, \end{aligned}$$

onde  $\frac{\partial f_i}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial z}(0, 0, 0) = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-3$ ,  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  é um referencial ortonormal de  $T_p M$  e  $\{\omega_4, \dots, \omega_n\}$  é um referencial ortonormal de  $N_p M$ .

Dado  $\omega \in M$  podemos escrever  $\omega = z_1\omega_4 + \dots + z_{(n-3)}\omega_n$ , e assim a função altura na direção de  $\omega$  é dada por

$$f_\omega(x, y, z) = f(x, y, z) \cdot \omega = \sum_{i=1}^{n-3} z_i f_i(x, y, z).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_\omega}{\partial x^2}(p) &= \sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i, & \frac{\partial^2 f_\omega}{\partial x y}(p) &= \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i, & \frac{\partial^2 f_\omega}{\partial x z}(p) &= \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i, \\ \frac{\partial^2 f_\omega}{\partial y^2}(p) &= \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i, & \frac{\partial^2 f_\omega}{\partial y z}(p) &= \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i, & \frac{\partial^2 f_\omega}{\partial z^2}(p) &= \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$Hess(f_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, os coeficientes da segunda forma fundamental segundo a direção normal  $\omega$  são dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_\omega(p) = f_{xx}(p) \cdot \omega &= \sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i, & \tilde{f}_\omega(p) = f_{xy}(p) \cdot \omega &= \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i, & \tilde{g}_\omega(p) = f_{xz}(p) \cdot \omega &= \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i, \\ \tilde{l}_\omega(p) = f_{yy}(p) \cdot \omega &= \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i, & \tilde{j}_\omega(p) = f_{yz}(p) \cdot \omega &= \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i, & \tilde{k}_\omega(p) = f_{zz}(p) \cdot \omega &= \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i. \end{aligned}$$

Portanto,  $II_\omega(p) = Hess(f_\omega(p))$ . ■

A próxima proposição relaciona o coposto da função altura degenerada com as direções normais que estão no subespaço  $N_p^1M \subset N_pM$ .

**Proposição 5.2.2.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , dada localmente pela forma de Monge  $f$ . Dados  $p \in M$  e uma direção degenerada  $\omega \in N_p^1M \subset N_pM$ , então o ponto  $p$  é uma singularidade de coposto 1 ou 2 de  $f_\omega$ .*

**Demonstração:**

Dado  $\omega \in N_p^1M \subset N_pM$ , temos que  $p$  é singularidade degenerada de coposto 3 se, e somente se,

$$Hess(f_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Como

$$N_p^1M = \left\langle \sum_{i=1}^{n-3} (a_i + d_i + 2s_i)e_{i+3}, \sum_{i=1}^{n-3} (a_i - d_i)e_{i+3}, \sum_{i=1}^{n-3} b_i e_{i+3}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{n-3} (-a_i - d_i + 2s_i)e_{i+3}, \sum_{i=1}^{n-3} c_i e_{i+3}, \sum_{i=1}^{n-3} r_i e_{i+3} \right\rangle,$$

segue que se  $Hess(f_\omega(p))$  é a matriz identicamente nula então  $\omega$  deve ser ortogonal a  $N_p^1M$ .

Logo, se  $\omega$  é direção degenerada não trivial temos que  $f_\omega$  tem singularidade de coposto 1 ou 2. ■

**Corolário 5.2.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$  e  $p \in M$ .*

*$M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o hiperplano  $\mathbb{H}_\omega$  em  $p$  se, e somente se,  $\omega \in (N_p^1M)^\perp \subset N_pM$ .*

### 5.2.1 Cone das Direções Degeneradas

Sejam  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , dada localmente pela forma de Monge  $f$  e  $p \in M$ . Assim,  $\omega \in N_pM$  é uma direção degenerada se, e somente

se,  $p$  é uma singularidade degenerada se, e somente se,  $\omega$  satisfaz:

$$(f_{xx} \cdot \omega)(f_{yy} \cdot \omega)(f_{zz} \cdot \omega) + 2(f_{xy} \cdot \omega)(f_{xz} \cdot \omega)(f_{yz} \cdot \omega) - (f_{xx} \cdot \omega)(f_{yz} \cdot \omega)^2 - (f_{yy} \cdot \omega)(f_{xz} \cdot \omega)^2 - (f_{zz} \cdot \omega)(f_{xy} \cdot \omega)^2 = 0, \quad (5.2.2)$$

sendo  $f_{xx}, f_{xy}, \dots, f_{zz}$  calculados em  $p$ .

Consideramos  $N_p M = N_p^1 M \oplus (N_p^1 M)^\perp$  e  $\mathbb{R}^n = T_p M \oplus N_p M$ . Sejam  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ,  $\{\omega_4, \dots, \omega_9\}$  e  $\{\omega_{10}, \dots, \omega_n\}$ , referenciais ortonormais de  $T_p M$ ,  $N_p^1 M$  e  $(N_p^1 M)^\perp$ , respectivamente. Deste modo, dado  $\omega \in N_p M$  tendo como coordenadas  $(z_4, z_5, \dots, z_n)$  nesta base, a equação (5.2.2) acima é uma equação cúbica homogênea nas variáveis  $z_4, \dots, z_9$ .

Definimos por

$$\mathcal{D}_p = \left\{ \omega \in N_p M : \omega \text{ satisfaz (5.2.2), } \omega \neq 0 \right\} \subset N_p M$$

o conjunto das direções degeneradas de  $M$  em  $p$ .

Nomeamos por **cone das direções degeneradas** o conjunto das direções degeneradas dado por:

$$\mathcal{C}_p = \mathcal{D}_p \cap N_p^1 M. \quad (5.2.3)$$

Observamos que,  $\mathcal{C}_p$  é formado por todas as direções degeneradas tais que  $p$  é singularidade de coposto 1 ou 2.

Temos ainda, como uma consequência do corolário 5.2.1 a seguinte proposição:

**Proposição 5.2.3.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ . Então:*

- $p \in M_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$  se, e somente se, o subespaço das direções normais degeneradas de coposto 3 tem dimensão  $((n-3)-i)$  se, e somente se,  $\dim E_p = i$  e  $H \in E_p$ , ou  $\dim E_p = i-1$  e  $H$  é transversal a  $E_p$ .
- $p \in M_0$  se, e somente se, o subespaço das direções normais degeneradas de coposto 3 é dado por  $N_p M$ .

Assim, de acordo com o tipo  $M_i$  do ponto considerado sabemos qual a dimensão do subespaço que fornece direções normais degeneradas, cujos hiperplanos ortogonais têm

contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  neste ponto.

Podemos, como é feito no caso de superfícies em [21] e [25] associar o cone das direções degeneradas ao espaço  $\mathcal{Q}(3)$  das formas quadráticas nas variáveis  $x, y$  e  $z$ .

Sejam  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ ,  $p \in M$  e  $\omega \in N_p M$  dado por  $\omega = (z_4, \dots, z_n)$  em relação ao referencial normal  $\{\omega_4, \dots, \omega_n\}$ .

Utilizando as identidades naturais (através da base induzida pelo referencial ortonormal acima) de  $N_p M$  com  $\mathbb{R}^{n-3}$  e de  $\mathcal{Q}(3)$  com  $\mathbb{R}^6$ , definimos a transformação linear

$$A_p : \quad \mathbb{R}^{n-3} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^6$$

$$\omega = (z_4, \dots, z_n) \quad \longmapsto \quad A_p(\omega) = ([\alpha_f(p)])^t \begin{pmatrix} z_4 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

ou seja, a transformação linear cuja matriz é a transposta da matriz da segunda forma fundamental  $[\alpha_f(p)]$ .

Notamos que  $f_\omega$  tem singularidade degenerada de coposto 3 em  $p$  se, e somente se,  $Hess(f_\omega(p))$  é a forma quadrática nula, que por sua vez é equivalente a dizer que  $\omega \in \text{Ker} A_p \subset E_p$ .

Utilizando a transformação linear  $A_p$  podemos reescrever a proposição 5.2.3 obtendo:

**Proposição 5.2.4.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ . Então:*

- $p \in M_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$  se, e somente se,  $\text{posto}(A_p) = i$  se, e somente se,  $\dim(\text{Ker} A_p) = (n - 3) - i$ .
- $p \in M_0$  se, e somente se,  $\text{posto}(A_p) = 0$  se, e somente se,  $\text{Ker} A_p = N_p M$ .

Podemos detalhar ainda mais as proposições 5.2.3 e 5.2.4. Elas podem ser traduzidas da seguinte maneira:

- Se  $p \in M_6$ ,  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^9$ , não existe 8-plano em  $\mathbb{R}^9$  que tenha contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ .

Porém, se  $M$  está imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 9$ , e  $p \in M_6$ ,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com um 9-plano, mas não com um 8-plano.

Suponhamos  $M$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ . Temos que:

- Se  $p \in M_5$ , existe um 8-plano  $\mathbb{H}_\omega^8$  que tem contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ . Se  $p$  é ponto não quase-quase-umbílico, este 8-plano é dado por  $\mathbb{H}_\omega^8 = T_p M \oplus N_p^1 M$ ; porém, se  $p$  é ponto quase-quase-umbílico,  $\mathbb{H}_\omega^8 = T_p M \oplus E_p \oplus (E_p \setminus \text{Ker} A_p)$ , ou seja,  $\mathbb{H}_\omega^8 = T_p M \oplus (\text{Ker} A_p)^\perp$ .
- Se  $p \in M_4$ , existem dois 8-planos  $\mathbb{H}_{\omega_1}^8$  e  $\mathbb{H}_{\omega_2}^8$  que têm contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ . Como as direções normais degeneradas  $\omega_1$  e  $\omega_2$  podem ser tomadas de modo que sejam ortogonais, então  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o 7-plano  $\mathbb{H}_\omega^7 = \mathbb{H}_{\omega_1}^8 \cap \mathbb{H}_{\omega_2}^8$  em  $p$ .

Além disso, se  $p$  é ponto quase-quase-umbílico temos  $\mathbb{H}_\omega^7 = T_p M \oplus N_p^1 M$ ; porém, se  $p$  é ponto semi-quase-umbílico,  $\mathbb{H}_\omega^7 = T_p M \oplus (\text{Ker} A_p)^\perp$ .

- Se  $p \in M_3$ , existem três 8-planos  $\mathbb{H}_{\omega_1}^8$ ,  $\mathbb{H}_{\omega_2}^8$  e  $\mathbb{H}_{\omega_3}^8$  que têm contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ , sendo as direções normais degeneradas  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  ortogonais entre si. Portanto,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o 6-plano  $\mathbb{H}_\omega^6 = \mathbb{H}_{\omega_1}^8 \cap \mathbb{H}_{\omega_2}^8 \cap \mathbb{H}_{\omega_3}^8$  em  $p$ .

Logo, se  $p$  é ponto semi-quase-umbílico temos  $\mathbb{H}_\omega^6 = T_p M \oplus N_p^1 M$ ; enquanto que se  $p$  é ponto quase-umbílico,  $\mathbb{H}_\omega^6 = T_p M \oplus (\text{Ker} A_p)^\perp$ .

- Se  $p \in M_2$  existem quatro 8-planos  $\mathbb{H}_{\omega_1}^8$ ,  $\mathbb{H}_{\omega_2}^8$ ,  $\mathbb{H}_{\omega_3}^8$  e  $\mathbb{H}_{\omega_4}^8$  que têm contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ , sendo as quatro direções normais degeneradas ortogonais entre si. A 3-variedade  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o 5-plano  $\mathbb{H}_\omega^5 = \bigcap_{i=1}^4 \mathbb{H}_{\omega_i}^8$  em  $p$ . E assim, se  $p$  é ponto quase-umbílico temos  $\mathbb{H}_\omega^5 = T_p M \oplus N_p^1 M$ ; enquanto que se  $p$  é ponto semi-umbílico,  $\mathbb{H}_\omega^5 = T_p M \oplus (\text{Ker} A_p)^\perp$ .
- Analogamente, se  $p \in M_1$  existem cinco 8-planos  $\mathbb{H}_{\omega_i}^8$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , que têm contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ , sendo as cinco direções normais degeneradas mutuamente ortogonais. A 3-variedade  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o 4-plano  $\mathbb{H}_\omega^4 = \bigcap_{i=1}^5 \mathbb{H}_{\omega_i}^8$  em  $p$ . E assim, se  $p$  é ponto semi-umbílico temos  $\mathbb{H}_\omega^4 = T_p M \oplus N_p^1 M$ ; enquanto que se  $p$  é ponto umbílico,  $\mathbb{H}_\omega^4 = T_p M \oplus (\text{Ker} A_p)^\perp$ .
- $p \in M_0$  se, e somente se,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o espaço tangente  $T_p M$ .

Outra conclusão obtida a partir do corolário 5.2.1 é a seguinte: dado  $p \in M$ , o conjunto das direções degeneradas cujas funções altura têm singularidades de coposto 3 em  $p$  está contido em  $E_p^\perp$ .

Desta forma, consideramos o lema, o qual será utilizado na próxima seção, mais especificamente na proposição 5.3.2:

**Lema 5.2.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ . Dado  $p \in M$ , existe uma transformação linear  $\lambda_p : E_p^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$Hess(f_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \lambda_p(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_p(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p(\omega) \end{pmatrix}.$$

Esta aplicação é dada por

$$\lambda_p(\omega) = \sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i,$$

onde  $\omega = (z_1, \dots, z_{n-3})$  com respeito à base ortonormal  $\{\omega_4, \dots, \omega_n\}$  em  $p$ , e  $a_i$ ,  $d_i$  e  $s_i$  dados como acima.

**Demonstração:**

De fato, como  $E_p = \langle B(p), C(p), D(p), U(p), V(p) \rangle$  temos

$$\omega \in E_p^\perp \iff \omega \cdot B = \omega \cdot C = \omega \cdot D = \omega \cdot U = \omega \cdot V = 0 \iff$$

$$\sum_{i=1}^{n-3} (a_i - d_i) z_i = \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} (-a_i - d_i + 2s_i) z_i = \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i = 0.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i = 0.$$

Portanto segue o resultado. ■

No próximo lema determinaremos o posto da aplicação  $\lambda(p)$  a partir da classificação de tipo  $M_i$  de  $p$ . Este resultado também será utilizado na próxima seção.

**Lema 5.2.2.** *Dados  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , e  $p \in M$  temos:*

- i) *Se  $p \in M_6$  então  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ .*
- ii) *Se  $p \in M_5$  é ponto não quase-quase-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ .*
- iii) *Se  $p \in M_5$  é ponto quase-quase-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ .*
- iv) *Se  $p \in M_4$  é ponto quase-quase-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ .*
- v) *Se  $p \in M_4$  é ponto semi-quase-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ .*
- vi) *Se  $p \in M_3$  é ponto semi-quase-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ .*
- vii) *Se  $p \in M_3$  é ponto quase-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ .*
- viii) *Se  $p \in M_2$  é ponto quase-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ .*
- ix) *Se  $p \in M_2$  é ponto semi-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ .*
- x) *Se  $p \in M_1$  é ponto semi-umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ .*
- xi) *Se  $p \in M_1$  é ponto umbílico, então  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ .*
- xii)  *$p \in M_0$  se, e somente se,  $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ .*

**Demonstração:**

Basta observar que:  $\omega \in E_p^\perp$  tal que  $\lambda_p(\omega) = 0$  se, e somente se,  $\text{Hess}(f_\omega(p)) \equiv 0$  se, e somente se,  $\omega \in \text{Ker}A_p$ , pois  $\text{Ker}A_p \subset E_p^\perp$  implicando em  $\text{coposto}(\lambda_p) = \dim(\text{Ker}A_p)$ . ■

A questão da umbilicidade pode ser melhor analisada através dos contatos com hiperesferas que é o assunto da próxima seção.

---

## 5.3 Função Distância ao Quadrado e Contato com $k$ -Esferas

---

Nesta seção vamos analisar os contatos de ordem  $\geq 2$  entre 3-variedades de classe  $C^2$  imersas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , e  $k$ -esferas em  $\mathbb{R}^n$  para  $3 < k < 9$ .

Consideramos a família de funções distância ao quadrado associada à imersão de uma 3-variedade  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , localmente dada por  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A imersão  $\psi$  define

para cada  $a \in \mathbb{R}^n$  uma **função distância ao quadrado**

$$\begin{aligned} d_a : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \|\psi(x, y, z) - a\|^2. \end{aligned}$$

A família de funções distância ao quadrado  $\Phi$  nos fornece uma descrição dos diferentes contatos de  $M$  com hiperesferas do espaço ambiente. Estes contatos são dados pelas singularidades destas funções.

Observamos que  $p \in M$  é ponto singular de  $d_a$  se, e somente se,  $a$  pertence ao subespaço normal a  $M$  em  $p$ .

Os teoremas de genericidade de Looijenga [20] e Montaldi [23] nos dizem que existe um subconjunto residual de imersões  $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  com a topologia  $C^\infty$  de Whitney para o qual a família de funções distância ao quadrado é localmente estável. Logo, para a maioria das direções normais as singularidades  $d_a$  são estáveis.

**Definição 5.3.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ . Dizemos que um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  é um **centro focal em  $p \in M$**  se, e somente se, a função distância ao quadrado  $d_a$ , associada ao vetor  $a$  tem uma singularidade degenerada em  $p$ .*

*O subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  constituído de centros focais para pontos em  $M$  é denominado **conjunto focal de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$** .*

*As hiperesferas centradas em centros focais são chamadas **hiperesferas focais**.*

Os contatos de  $M$  com hiperesferas focais ocorrem ao longo de direções que estão no núcleo da forma quadrática  $Hess(d_a)$ . Dentre estas direções estão aquelas cujas funções distância ao quadrado associadas têm singularidade de coposto 3, correspondendo aos contatos de ordem  $\geq 2$  das hiperesferas focais e  $M$ . Neste caso, a forma quadrática  $Hess(d_a)$  é identicamente nula e assim os contatos ocorrem ao longo de todas as direções do espaço tangente.

**Definição 5.3.2.** *Sejam  $M$  de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , e  $p \in M$ .*

*O centro de uma hiperesfera focal é chamado **foco umbílico de  $M$  em  $p$**  se, e somente se, a função distância ao quadrado associada tem uma singularidade degenerada de coposto 3 em  $p$ .*

Segue da definição acima, que  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com uma hipersfera focal em  $p$  se, e somente se, esta hipersfera está centrada em um foco umbílico para  $M$  em  $p$ .

Agora vamos analisar sob quais condições um ponto de uma 3-variedade admite focos umbílicos.

**Proposição 5.3.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , dada localmente pela imersão  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dados  $p \in M$  e  $\omega \in E_p^\perp$  uma direção degenerada, a direção normal  $q(\omega) = \psi(p) + \mu\omega$  é foco umbílico para  $M$  em  $p$  se, e somente se,*

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i = 0,$$

sendo  $\omega = (z_1, \dots, z_{n-3})$  dado de acordo com o referencial de  $N_p M$  e  $a_i, b_i, c_i, d_i, r_i$  e  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n-3$ , os coeficientes da segunda forma fundamental em  $p$ , neste referencial.

### Demonstração:

Seja  $q(\omega)$  um centro focal para  $M$  em  $p$ . Então

$$\text{Hess}(d_{q(\omega)}(p)) = 2 \begin{pmatrix} -\mu \sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i + 1 & -\mu \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & -\mu \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i \\ -\mu \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & -\mu \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i + 1 & -\mu \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i \\ -\mu \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i & -\mu \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i & -\mu \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i + 1 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente,  $q(\omega)$  é foco umbílico para  $M$  em  $p$  se, e somente se,  $\text{Hess}(d_{q(\omega)}(p)) \equiv 0$  se, e somente se,

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i = 0. \quad \blacksquare$$

Segue o corolário.

**Corolário 5.3.1.** *Sejam  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ , e  $p \in M$ . Dada uma direção degenerada  $\omega \in E_p^\perp$ , o centro focal  $q(\omega)$  é um foco umbílico para  $M$  em  $p$  se, e somente se,*

$$\text{Hess}(\psi_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

onde

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i} \quad e \quad \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i = \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i = 0.$$

**Demonstração:**

Basta observar que

$$Hess(\psi_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-3} a_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n-3} b_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} d_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n-3} c_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} r_i z_i & \sum_{i=1}^{n-3} s_i z_i \end{pmatrix}.$$

■

**Observação 5.3.1.** Observamos que o corolário acima relaciona as formas quadráticas  $Hess(\psi_\omega(p))$  e  $Hess(d_{q(\omega)}(p))$ , quando  $q(\omega)$  é um foco umbílico, pois temos:

$$Hess(\psi_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \iff Hess(d_{q(\omega)}(p)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposição 5.3.2.** Seja  $M$  uma 3-variedade imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ , dada localmente pela imersão  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dados  $p \in M$  e  $\omega \in E_p^\perp$  uma direção degenerada tal que  $\lambda_p(\omega) \neq 0$ , então  $q(\omega) = \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\omega)}\omega$  é foco umbílico para  $M$  em  $p$ .

**Demonstração:**

Segue do lema 5.2.1 que

$$Hess(\psi_\omega(p)) = \begin{pmatrix} \lambda_p(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_p(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p(\omega) \end{pmatrix}.$$

Assim, dado  $\omega \in E_p^\perp$  tal que  $\lambda_p(\omega) \neq 0$  temos que  $Hess(d_{q(\omega)}(p)) \equiv 0$  pela observação anterior. Logo,  $p$  é singularidade de coposto 3 da função distância ao quadrado  $d_{q(\omega)}$  e assim,  $q(\omega)$  é foco umbílico para  $M$  em  $p$ .

■

Agora já estamos em condições de dizer, para cada tipo de ponto de  $M$ , se este admite ou não foco umbílico.

Inicialmente vamos supor a 3-variedade imersa em  $\mathbb{R}^9$  e em seguida generalizamos.

**Proposição 5.3.3.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^9$ . Assim,*

- i) *Dado  $p \in M_6$  existe um único foco umbílico para  $M$  em  $p$  e este está na única direção normal contida em  $E_p^\perp$ .*
- ii) *Se  $p \in M_5$  é ponto quase-quase-umbílico então os focos umbílicos para  $M$  em  $p$  formam uma reta contida no plano  $E_p^\perp$ .*
- iii) *Para um ponto semi-quase-umbílico  $p \in M_4$ , os focos umbílicos formam um plano contido no 3-espaço  $E_p^\perp$ .*
- iv) *Se  $p \in M_3$  é ponto quase-umbílico, então os focos umbílicos formam um 3-espaço contido no 4-espaço  $E_p^\perp$ .*
- v) *Para um ponto semi-umbílico  $p \in M_2$ , os focos umbílicos formam um 4-espaço contido no 5-espaço  $E_p^\perp$ .*
- vi) *Para um ponto umbílico  $p \in M_1$ , os focos umbílicos formam um 5-espaço contido no 6-espaço  $E_p^\perp = N_pM$ .*

**Demonstração:**

- i) Dado  $p \in M_6$  temos  $\dim E_p^\perp = 1$  e  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ . Logo, existe uma única direção normal  $\omega \in E_p^\perp$  e  $\lambda_p(\omega) \neq 0$ .

Portanto,  $q(\omega) = \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\omega)}$  é o único foco umbílico para  $M$  em  $p$ .

- ii) Se  $p \in M_5$  é ponto quase-quase-umbílico, então  $\dim E_p^\perp = 2$  e  $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ . Deste modo, existe uma única direção normal  $\omega \in E_p^\perp$  tal que  $\lambda_p(\omega) \neq 0$  e

$$q(\omega) = \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\omega)}$$

é foco umbílico para  $M$  em  $p$ .

Além disso,  $\text{coposto}(\lambda_p) = 1$  e assim, existe uma direção normal unitária  $v$  ortogonal a  $\omega$  tal que  $\text{Ker}(\lambda_p) = \langle v \rangle$ .

Dado  $\varpi \in (E_p^\perp \setminus \text{Ker} \lambda_p)$  um vetor arbitrário, podemos escrever  $\varpi = \mu_1 \omega + \mu_2 v$ ,  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ . Logo,  $\lambda_p(\varpi) = \mu_1 \lambda_p(\omega) \neq 0$  e assim,  $q(\varpi) = \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\varpi)} \varpi$  é foco umbílico. Mas,

$$\begin{aligned} q(\varpi) &= \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\varpi)} \varpi = \psi(p) + \frac{1}{\mu_1 \lambda_p(\omega)} (\mu_1 \omega + \mu_2 v) \\ &= \psi(p) + \frac{1}{\langle \psi_{xx}, \omega \rangle} (\omega + \mu v), \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, variando  $\mu$  temos uma reta de focos umbílicos para  $M$  em  $p$  contida no plano  $E_p^\perp$ .

**iii)** Se  $p \in M_4$  é ponto semi-quase-umbílico, então  $\dim E_p^\perp=3$  e  $\text{posto}(\lambda_p)=1$ . Deste modo, existe uma única direção normal  $\omega \in E_p^\perp$  tal que  $\lambda_p(\omega) \neq 0$  e

$$q(\omega) = \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\omega)}$$

é foco umbílico para  $M$  em  $p$ .

Além disso,  $\text{coposto}(\lambda_p)=2$ , e assim, existem dois vetores (que podemos supor unitários)  $v_1$  e  $v_2$  ortogonais a  $\omega$  tal que  $\text{Ker}(\lambda_p)=\langle v_1, v_2 \rangle$ .

Dado  $\varpi \in (E_p^\perp \setminus \text{Ker} \lambda_p)$  um vetor arbitrário, podemos escrever  $\varpi = \mu_1 \omega + \mu_2 v_1 + \mu_3 v_2$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Logo,  $\lambda_p(\varpi) = \mu_1 \lambda_p(\omega) \neq 0$  e assim,  $q(\varpi) = \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\varpi)} \varpi$  é foco umbílico. Mas,

$$\begin{aligned} q(\varpi) &= \psi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\varpi)} \varpi = \psi(p) + \frac{1}{\mu_1 \lambda_p(\omega)} (\mu_1 \omega + \mu_2 v_1 + \mu_3 v_2) \\ &= \psi(p) + \frac{1}{\langle \psi_{xx}, \omega \rangle} (\omega + \tilde{\mu}_1 v_1 + \tilde{\mu}_2 v_2), \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{\mu_3}{\mu_1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, variando  $\tilde{\mu}_1$  e  $\tilde{\mu}_2$  temos um plano de focos umbílicos para  $M$  em  $p$  contido no 3-espaço  $E_p^\perp$ .

Para os casos iv), v) e vi) a demonstração é análoga às anteriores, observando que:

**iv)** Se  $p \in M_3$  é ponto quase-umbílico, então  $\dim E_p^\perp=4$ ,  $\text{posto}(\lambda_p)=1$  e  $\text{coposto}(\lambda_p)=3$ .

**v)** Se  $p \in M_2$  é ponto semi-umbílico, então  $\dim E_p^\perp=5$ ,  $\text{posto}(\lambda_p)=1$  e  $\text{coposto}(\lambda_p)=4$ .

**vi)** Se  $p \in M_1$  é ponto umbílico, então  $\dim E_p^\perp=6$ ,  $\text{posto}(\lambda_p)=1$  e  $\text{coposto}(\lambda_p)=5$ . ■

Esta proposição se generaliza da seguinte maneira:

**Proposição 5.3.4.** *Seja  $M$  uma 3-variedade de classe  $C^2$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 9$ . Assim,*

**i)** *Dado  $p \in M_6$  existe uma subvariedade afim de codimensão  $(n-9)$  contida no  $(n-8)$ -espaço  $E_p^\perp$ , constituída de focos umbílicos para  $M$  em  $p$ .*

**ii)** *Se  $p \in M_5$  é ponto quase-quase-umbílico então os focos umbílicos para  $M$  em  $p$  formam um  $(n-8)$ -espaço afim contido no  $(n-7)$ -espaço  $E_p^\perp$ .*

- iii) Para um ponto semi-quase-umbílico  $p \in M_4$ , os focos umbílicos formam um  $(n-7)$ -espaço afim contido no  $(n-6)$ -espaço  $E_p^\perp$ .
- iv) Para um ponto quase-umbílico  $p \in M_3$ , os focos umbílicos formam um  $(n-6)$ -espaço contido no  $(n-5)$ -espaço  $E_p^\perp$ .
- v) Para um ponto semi-umbílico  $p \in M_2$ , os focos umbílicos formam um  $(n-5)$ -espaço contido no  $(n-4)$ -espaço  $E_p^\perp$ .
- vi) Para um ponto umbílico  $p \in M_1$ , os focos umbílicos formam um  $(n-4)$ -espaço contido no  $(n-3)$ -espaço  $E_p^\perp = N_pM$ .

Apresentamos agora o conceito de foco no infinito.

Observamos que dado  $p \in M$  existe foco umbílico,  $q(\omega)$ , em  $p$  se, e somente se,  $\omega \in (E_p^\perp \setminus \text{Ker}\lambda_p)$ . As direções  $v \in E_p^\perp$  tais que  $\lambda_p(v)$  são direções em que o foco umbílico vai para o infinito, dizemos ser um **foco infinito**. Neste caso, o contato de ordem  $\geq 2$  de  $M$  se dá com um hiperplano  $\mathbb{H}_v$ , passando por  $p$  e ortogonal a  $v$ .

A partir das proposições acima e do que foi feito na seção anterior obtemos as seguintes conclusões para uma 3-variedade  $M$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 9$ .

- Se  $p \in M_6$  existe um único foco umbílico para  $M$  em  $p$  e este está na única direção normal contida em  $E_p^\perp$ . Portanto, existe uma única 8-esfera focal  $S_v^8$  tal que  $M$  e  $S_v^8$  têm contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$ .
- Se  $p \in M_5$  é ponto não quase-quase-umbílico então existe um foco infinito em  $p$  e  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$  com um 8-plano. Porém,  $M$  não admite 8-esferas focais em  $p$ .
- Se  $p \in M_5$  é ponto quase-quase-umbílico, existem um único foco umbílico (dado pela proposição 5.3.3) e um único foco infinito. Assim,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$  com uma 8-esfera  $S_v^8$  e com um 8-plano  $\mathbb{H}_\omega^8$ . Como estes são determinados por direções ortogonais segue que  $M$  tem um contato de ordem  $\geq 2$  com a 7-esfera  $S_{v,\omega}^7 = S_v^8 \cap \mathbb{H}_\omega^8$  em  $p$ .
- Seja  $p \in M_4$  ponto quase-quase-umbílico. Então  $p$  não tem foco umbílico e portanto,  $M$  não admite 8-esferas focais em  $p$ .

Por outro lado,  $p$  tem dois focos infinitos e assim,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$  com um 7-plano.

- Se  $p \in M_4$  é ponto semi-quase-umbílico, então  $p$  tem um único foco umbílico (dado pela proposição 5.3.3) e dois focos infinitos. Assim,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$  com uma 8-esfera focal  $S_v^8$  e com um 7-plano  $\mathbb{H}_\omega^7$ . Como estes são determinados por direções ortogonais segue que  $M$  tem um contato de ordem  $\geq 2$  com a 6-esfera  $S_{v,\omega}^6 = S_v^8 \cap \mathbb{H}_\omega^7$  em  $p$ .
- Se  $p \in M_3$  é ponto semi-quase-umbílico, então  $p$  não tem foco umbílico, e portanto,  $M$  não admite 8-esferas focais em  $p$ . O ponto  $p$  tem somente focos infinitos e portanto,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com hiperplanos em  $p$ .
- Se  $p \in M_3$  é ponto quase-umbílico, então  $p$  tem um único foco umbílico (dado pela proposição 5.3.3) e assim,  $M$  admite uma 8-esfera focal  $S_v^8$ , a qual tem contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ . As outras três direções normais degeneradas são focos infinitos para  $M$  em  $p$  e dão um contato de ordem  $\geq 2$  de  $M$  com o 6-plano  $\mathbb{H}_\omega^6$  em  $p$ . Sendo  $\omega$  ortogonal a  $v$  segue que  $M$  também tem contato de ordem  $\geq 2$  com a 5-esfera  $S_{v,\omega}^5 = S_v^8 \cap \mathbb{H}_\omega^6$  em  $p$ .
- Se  $p \in M_2$  é ponto quase-umbílico, então  $p$  não tem foco umbílico. Ele tem somente focos infinitos. Logo,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$  somente com hiperplanos.
- Se  $p \in M_2$  é ponto semi-umbílico, então  $M$  admite uma 8-esfera focal  $S_v^8$ , que tem contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ . As outras quatro direções normais degeneradas  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  são focos infinitos para  $M$  em  $p$ , que podem ser consideradas ortogonais entre si. Segue que  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o 5-plano  $\mathbb{H}_\omega^5$  em  $p$ . Sendo  $\omega$  ortogonal a  $v$  segue que  $M$  também tem contato de ordem  $\geq 2$  com a 4-esfera  $S_{v,\omega}^4 = S_v^8 \cap \mathbb{H}_\omega^5$  em  $p$ .
- Se  $p \in M_1$  é ponto semi-umbílico, então  $p$  não tem foco umbílico. Ele tem somente focos infinitos. Logo,  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  em  $p$  somente com hiperplanos.
- Se  $p \in M_1$  é ponto umbílico, então  $M$  admite uma 8-esfera focal  $S_v^8$ , que tem contato de ordem  $\geq 2$  com  $M$  em  $p$ . As outras direções normais degeneradas  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  são focos infinitos para  $M$  em  $p$ . Segue que  $M$  tem contato de ordem  $\geq 2$  com o 4-plano  $\mathbb{H}_\omega^4$  em  $p$ . Sendo  $\omega$  ortogonal a  $v$  segue que  $M$  também tem contato de ordem  $\geq 2$  com a 3-esfera  $S_{v,\omega}^3 = S_v^8 \cap \mathbb{H}_\omega^4$  em  $p$ .
- Os pontos de tipo  $M_0$  não admitem focos umbílicos.

---

# Perspectivas Futuras

Consideramos este trabalho uma primeira etapa na abordagem de variedades tridimensionais de classe  $C^2$  imersas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$  via seus projetivos de curvatura e a análise de seus contatos com  $k$ -planos e  $k$ -esferas de várias dimensões.

Dentre nossas perspectivas futuras de continuidade deste trabalho destacamos:

- **Singularidades**

Análise, considerando-se todas as situações possíveis das singularidades do projetivo de curvatura, com as respectivas interpretações sobre a variedade tridimensional.

- **Umbilicidade e Configurações Principais**

Baseando-se nos trabalhos de Romero-Fuster e Sánchez-Bringas [29] e Moraes [25] pretendemos estender alguns conceitos clássicos da geometria de superfícies para 3-variedades imersas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , como por exemplo, direções principais, direções assintóticas, curvaturas principais, linhas de curvatura e umbilicidade, relativamente a uma direção normal a 3-variedade. Usaremos estes resultados para discutir, por exemplo, a hiperesféricidade de uma 3-variedade e a convexidade local de 3-variedades.

- **Projeções**

Um aspecto interessante a ser analisado é a relação dos tipos de matrizes de transformações lineares possíveis obtidas nas proposições 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3, com características de projeções em  $k$ -planos,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , como o que é feito, por exemplo, em [26].

- **Cone das direções degeneradas e conjunto focal**

De acordo com o projetivo de curvatura em um ponto de uma variedade tridimensional se degenerar ou não, pretendemos estudar o cone das direções degeneradas dado por (5.2.3) e o conjunto focal, definição 5.3.1, nos diferentes casos, conforme foi feito em [8].

---

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] F. Apéry, *Models of the Real Projective Plane: Computer Graphics of Steiner and Boy Surfaces*. Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [2] R. R. Binotto, S. I. R. Costa, and C. Romero-Fuster, *Um estudo sobre superfícies de translação*. (Relatório de Pesquisa).
- [3] J. W. Bruce, and P. J. Giblin, *Curves and Singularities*. Cambridge University Press, London, 1991.
- [4] M. P. Carmo, *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides: IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [5] A. Coffman, A. J. Schwartz, and C. Stanton, The algebra and geometry of Steiner and other quadratically parametrizable surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, V.13: 257-286, 1996.
- [6] A. Coffman, *Steiner Surfaces*. Fort Wayne: Purdue University, 2007. Disponível em: <<http://www.ipfw.edu/math/Coffman/steinersurface.html>>. Acesso em: 18 nov. 2007.
- [7] S. I. R. Costa, *Aplicações não singulares de ordem p*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, 1982.

- [8] S. I. R. Costa, S. M. Moraes, and M. C. Romero-Fuster, Curvature ellipses and geometric contacts of surfaces immersed in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$ . Pre-print.
- [9] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, The Geometry of Surfaces in 4-Space from a Contact Viewpoint. *Geometriae Dedicata* 54: 323-332, 1995.
- [10] E. A. Feldman, Geometry of immersions I. *Trans. Amer. Math. Soc.* V.120: 185-224, 1965.
- [11] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, Inflection Points and Topology of Surfaces in 4-space. *Trans. Amer. Math. Soc.* V.352: 3029-3043, 2000.
- [12] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*. Pitman, London, 1979.
- [13] M. Golubistky, V. Guillemin, *Stable Mappings and their Singularities*. GTM 14: Springer-Verlag, New York, 1973.
- [14] A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surface with Mathematica*. 3<sup>o</sup> ed., Chapman and Hall/CRC, New York, 2006.
- [15] S. Izumiya, Singularity theory of mappings and its applications: a survey for non-specialists. *Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics*, S.108, 2006.
- [16] E. L. Lima, *Análise Real: Funções de  $n$  Variáveis*. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [17] E. L. Lima, *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
- [18] E. L. Lima, *Curso de Análise*. V.2, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [19] J. A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean space. *Annali Mat. Pura et Appl.* (4A) V.83: 261-336, 1969.
- [20] E. J. N. Looijenga, *Structural Stability of Smooth Families of  $C^\infty$  Functions*. Thesis, University of Amsterdam, 1974.

- [21] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, Inflection points and nonsingular embeddings of surfaces in  $R^5$ . *Rocky Mountain Journal of Math.* V.33: 995-1009, 2003.
- [22] D. Mond, On the Classification of Germs of Maps from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$ . *Proc. London Math. Soc.* (3), 50: 333-369, 1985.
- [23] J. A. Montaldi, On Contact between Submanifolds. *Michigan Math. Journal*, V.33: 195-199, 1996.
- [24] C. L. E. Moore, and E. B. Wilson, Differential Geometry of Two-dimensional Surfaces in Hyperspaces. *Proc. of Amer. Acad. of Arts and Sciences*, V.52: 267-368, 1916.
- [25] S. M. Moraes, *Elipses de Curvatura no Estudo de Superfícies Imersas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 5$* . Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, 2002.
- [26] J. J. Nuño-Ballesterro, and F. Tari, Surfaces in  $\mathbb{R}^4$  and their projections to 3-spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* 137A: 1313-1328, 2007.
- [27] J. J. Nuño-Ballesterro, and M. C. Romero-Fuster, Codimension 2 Submanifold with Flat Normal Bundle in Euclidean Space. Pre-print.
- [28] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.* (2)36: 351-369, 1987.
- [29] M. C. Romero-Fuster, and F. Sánchez-Bringas, Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in  $\mathbb{R}^4$ . *Differential Geometry and this Applications*, 16: 213-224, 2002.
- [30] F. Tari, *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*. Notas Didáticas do ICMC-USP, São Carlos, 1999.