

# Identities de Slater: novas identidades e interpretações combinatórias

Paulo Mondek

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. José Plínio O. Santos

# IDENTIDADES DE SLATER: NOVAS IDENTIDADES E INTERPRETAÇÕES COMBINATÓRIAS.

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Paulo Mondek e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 14 de abril de 1997

Prof. Dr.



José Plínio de Oliveira Santos  
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica, UNI-  
CAMP, como requisito parcial para obtenção  
do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA  
APLICADA

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS  
CHAMADA: UNICAMP  
M744i  
Ex.  
30 50/30 6 7 6  
00. 28.197  
C  D   
ECO R. 11.00  
TA 29.10.197  
CPD

CM-00098883-7

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Mondek, Paulo

M744i Identidades de Slater : novas identidades e interpretações  
combinatórias / Paulo Mondek -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1997.

Orientador : José Plínio de Oliveira Santos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Identidades combinatórias. 3.  
Funções hipergeométricas. I. Santos, José Plínio de Oliveira. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Tese de Doutorado defendida e aprovada em 14 de ABRIL de 1997**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS**



---

**Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIEHL**



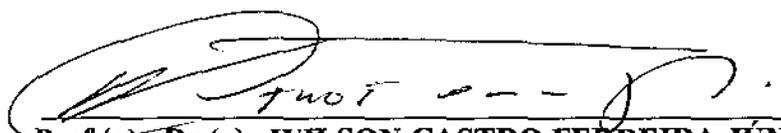
---

**Prof (a). Dr (a). HEMAR GODINHO**



---

**Prof (a). Dr (a). WALTER ALEXANDRE CARNIELLI**



---

**Prof (a). Dr (a). WILSON CASTRO FERREIRA JÚNIOR**

## **Agradecimentos**

À minha família

Agradeço à Capes e ao Departamento de Matemática (UFMS) de Campo Grande - MS, em especial ao Prof<sup>o</sup> Celso Cardoso, pelo apoio e oportunidade recebidos na realização do meu curso de doutoramento. Também agradeço a meu orientador Prof<sup>o</sup> José Plínio O. Santos pela sua forma honesta e competente de trabalhar facilitando nossos contatos e desenvolvimento deste trabalho. Sou grato também ao Flávio e MarluCIA pelo trabalho de digitação.

# ÍNDICE

Introdução .....	01
Capítulo 1: Notações e resultados básicos .....	03
Capítulo 2: Novas identidades via pares de Bailey e “Axiom” .....	07
Capítulo 3: Provas alternativas para certas identidades de Slater .....	17
Capítulo 4: Teoremas combinatórios sobre partições .....	26
Capítulo 5: Interpretações alternativas com uso de cores e o conceito de $u$ -partição .....	35
Capítulo 6: Nova interpretação combinatória para as identidades de Rogers-Ramanujan ..	45
Referências: .....	60

## Resumo

Neste trabalho tratamos de identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Obtemos novas identidades utilizando o software “Axiom” e o conceito de par de Bailey. Introduzimos o conceito de  $u$ -partição que nos permitiu diversas interpretações combinatórias. Descrevemos, também, um método que possibilita a obtenção de interpretações combinatórias de certas séries, através da análise de equações funcionais. Este método permitiu a obtenção de uma nova interpretação combinatória para as identidades de Rogers-Ramanujan.

## Introdução

Historicamente este trabalho se originou com as famosas identidades de Rogers-Ramanujan

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} \quad e$$
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}$$

Estas fórmulas foram descobertas, primeiramente, por Rogers em 1894. Ramanujan conjecturou estas fórmulas antes de 1913 e ele não possuía, na época, nenhuma prova para elas. Hardy, que as conheceu por intermédio de Ramanujan, afirma que nenhum matemático, a quem mencionou estes resultados, foi capaz de fornecer uma demonstração. Elas aparecem, sem demonstração, no segundo volume do livro *Análise Combinatória* de MacMahon. Este mistério foi resolvido somente em 1917 quando, acidentalmente, Ramanujan encontrou o trabalho de Rogers, pesquisando velhos volumes do “Proceedings of the London Mathematical Society” (veja Andrews [7] p. 176).

Entre os muitos resultados que se seguiram destacamos como ponto inicial, Slater [17] e Slater [18], escritos por sugestão de W. N. Bailey. Nestes papers encontramos mais de uma centena de identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Observamos que a obtenção de tais fórmulas, nos trabalhos de Slater, utiliza somente resultados de análise.

Posteriormente encontramos em Andrews [4] interpretações combinatórias para diversas identidades obtidas por Slater.

A utilização de uma idéia introduzida por Andrews em 1985 (considerar funções com certas propriedades, associadas a uma identidade conhecida em princípio) permitiu que Santos [15] obtivesse novas identidades, apresentasse provas alternativas para alguns dos resultados de Slater e listasse diversas conjecturas auxiliado pelo pacote de álgebra simbólica “Macysma”.

Este trabalho está dividido em 6 capítulos, cujos conteúdos estão, sucintamente descritos a seguir.

No capítulo (1) introduzimos as notações e apresentamos os resultados clássicos que utilizamos nos demais capítulos.

No capítulo (2) fazemos uso do conceito de Par de Bailey e do software “Axiom” para obter novas identidades.

No capítulo (3) apresentamos provas alternativas para identidades já conhecidas.

Os capítulos seguintes são caracterizados pelo enfoque dado às interpretações combinatórias. No capítulo (4) obtemos novas interpretações seguindo as mesmas idéias vistas na literatura.

No capítulo (5) apresentamos dois novos conceitos que permitem interpretações combinatórias que não são possíveis somente com as idéias anteriores.

Finalmente, no capítulo (6), conseguimos a construção de um “conjunto de partições” através da análise de certas equações funcionais. Isto nos possibilita a obtenção de uma nova interpretação combinatória para as duas identidades de Rogers-Ramanujan.

# CAPÍTULO 1

## Notações e resultados básicos

Introduzimos, neste capítulo, notações e definições além de vários resultados importantes que serão utilizados, para os quais fornecemos referências.

No que segue  $q$  é um número complexo tal que  $|q| < 1$ . Sejam  $a \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{Z}_+^*, n \in \mathbb{Z}_+$ .

Nestas condições definimos

$$(a; q^k)_n := \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{k(n-1)}) & , n > 0 \end{cases} ,$$

$$(a; q^k)_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q^k)_n \quad \text{e}$$

$$(a)_n = (a; q)_n \quad \text{no caso em que } k = 1.$$

Também se define para  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(a; q^k)_\lambda := \frac{(a; q^k)_\infty}{(aq^{k\lambda}; q^k)_\infty}.$$

Desta última definição destacamos a seguinte consequência

$$\frac{1}{(q^k, q^k)_{-n}} = 0 \tag{1.0}$$

que vale para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$

Os  $q$ -análogos dos números binomiais ou polinômios de Gauss são definidos por:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_k = \begin{cases} \frac{(q^k; q^k)_n}{(q^k; q^k)_m (q^k; q^k)_{n-m}} & , 0 \leq m \leq n \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases}$$

e para  $k = 1$  escrevemos

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}} & , 0 \leq m \leq n \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases}$$

Fixadas as notações listamos, a seguir, propriedades fundamentais dos polinômios de Gauss, cujas demonstrações podem ser encontradas em Andrews [1], p. 35

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad (1.1)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + q^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m} \quad (1.5)$$

Prosseguimos apresentando um conceito fundamental neste trabalho: dadas duas seqüências  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  de números complexos, diz-se que  $(\alpha_n, \beta_n)$  é um par de Bailey se

$$\beta_n = \sum_{r=0}^n \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}} \quad (1.6)$$

para todo  $n \geq 0$ , onde  $a \in \mathbb{C}$ .

**Obs.** Fixado  $a$  e dada a seqüência  $\alpha_n$ , os  $\beta_n$  dados por (1.6) ficam completamente determinados. A inversa também é válida conforme Andrews [3], p. 278, onde encontramos

$$\alpha_n = (1 - aq^{2n}) \sum_{j=0}^n \frac{(aq)_{n+j-1} (-1)^{n-j} q^{\binom{n-j}{2}}}{(q)_{n-j}} \beta_j \quad (1.7)$$

Acompanhando esta definição apresentamos a seguir um resultado devido a Bailey (1949) que tem permitido a obtenção de novas identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

**Lema 1.1.** (Lema de Bailey) Se  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são seqüências que formam um par de

Bailey então  $\alpha'_n$  e  $\beta'_n$  dadas por

$$\beta'_n = \sum_{j=0}^n \frac{(\rho_1)_j (\rho_2)_j (aq/\rho_1 \rho_2)_{n-j} (aq/\rho_1 \rho_2)^j}{(aq/\rho_1)_n (aq/\rho_2)_n (q)_{n-j}} \beta_j \quad (1.8)$$

$$\alpha'_r = \frac{(\rho_1)_r (\rho_2)_r (aq/\rho_1 \rho_2)^r}{(aq/\rho_1)_r (aq/\rho_2)_r} \alpha_r \quad (1.9)$$

também formam um par de Bailey, isto é,

$$\beta'_n = \sum_{r=0}^n \frac{\alpha'_r}{(q)_{n-r} (aq)_{n+r}}$$

( $\rho_1$  e  $\rho_2$  são números complexos para os quais as expressões (1.8) e (1.9) ficam bem definidas).

Para completar as informações dadas pelo Lema (1.1), acrescentamos que a seqüência que se obtém por iteradas aplicações deste resultado, pode também ser estendida para a esquerda sempre que os valores de  $\rho_1$  e  $\rho_2$  assim permitirem

$$\dots \rightarrow (\alpha_n^{(-2)}, \beta_n^{(-2)}) \rightarrow (\alpha_n^{(-1)}, \beta_n^{(-1)}) \rightarrow (\alpha_n, \beta_n) \rightarrow (\alpha'_n, \beta'_n) \rightarrow \dots$$

pois de (1.9) temos

$$\alpha_r^{(-1)} = \frac{(aq/\rho_1)_r (aq/\rho_2)_r (\rho_1 \rho_2 / aq)^r}{(\rho_1)_r (\rho_2)_r} \alpha'_r$$

e conforme Andrews [6] temos que

$$\beta_n^{(-1)} = \sum_{j=0}^n \frac{(aq/\rho_1)_j (aq/\rho_2)_j (\rho_1 \rho_2 / aq)_{n-j} (\rho_1 \rho_2 / aq)^{2n-j}}{(\rho_1)_n (\rho_2)_n (q)_{n-j}} \beta'_j \quad (1.10)$$

Completamos nossos dados sobre os pares de Bailey com mais duas relações envolvendo  $\alpha_n$  e  $\beta_n$ , que possibilitam a obtenção de novas identidades:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{j^2} \cdot \beta_j = \frac{1}{(aq)_{\infty}} \sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{j^2} \alpha_j \quad (1.11)$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\rho_1)_j a^j \rho_1^{-j} q^{\binom{j+1}{2}} \beta_j = \frac{(aq/\rho_1)_{\infty}}{(aq)_{\infty}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\rho_1)_j}{(aq/\rho_1)_j} (-1)^j (\rho_1)^{-j} a^j q^{\binom{j+1}{2}} \alpha_j \quad (1.12)$$

cujas demonstrações podem ser vistas em Santos [15].

A seguir exibimos um importante teorema que permite passarmos de somatórios para produtórios.

**Produto Triplo de Jacobi:** Para números complexos  $z \neq 0, |q| < 1$  vale que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + zq^{2n+1})(1 + z^{-1}q^{2n+1}). \quad (1.13)$$

Finalizamos este capítulo com três úteis identidades, um resultado devido a Abel e um teorema elementar em teoria de partições.

$$\frac{1}{(z; q)_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j \quad (1.14)$$

e

$$(z)_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j z^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

as quais podem ser encontradas em Andrews [1], p. 36,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 2n+k \\ n+l \end{bmatrix} = \frac{1}{(q)_{\infty}}, k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.16)$$

que pode ser obtido, diretamente, pela definição de polinômio de Gauss.

**Lema de Abel:** Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  então  $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = L$ .

(veja em Andrews [1], p. 190)

**Teorema (1.1):** O número de partições de  $n$  em no máximo  $m$  partes é igual ao número de partições de  $n$  em partes que não superam  $m$ .

Uma demonstração deste último resultado, utilizando-se representação geométrica de partição, pode ser encontrada em Andrews [7], p. 152.

## CAPÍTULO 2

### Novas identidades via pares de Bailey e “Axiom”

Neste capítulo obtemos duas novas identidades. Utilizamos para isto o software “Axiom” e o importante conceito de Par de Bailey introduzido no capítulo anterior. O Lema (1.1), que relaciona pares de Bailey, é consequência de uma simples, porém crucial observação feita por Bailey [9] em 1944, conhecida por transformada de Bailey, a saber,

“Sob convenientes condições de convergências, se

$$\beta_n = \sum_{r=0}^n \alpha_r u_{n-r} v_{n+r} \quad \text{e} \quad \gamma_n = \sum_{r=n}^{\infty} \delta_r u_{r-n} v_{r+n} \quad \text{então}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta_n$$

(veja Andrews [6], p. 24-29).

Apresentamos também neste capítulo, uma interpretação combinatória para a primeira identidade obtida.

Iniciamos definindo uma função de duas variáveis que esteja bem definida numa região de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Esta função estará associada a alguma identidade a qual indicaremos.

Seja  $f_{28}(q, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2+n} (-t^2 q^2; q^2)_n}{(1-t)(t^2 q)_{2n+1}}$  função associada à equação 28 de Slater.

Como  $|q| < 1$  vemos, pelo teste da razão, que  $f_{28}(q, t)$  está bem definida para todo  $t \neq 1$ .

Consideremos agora  $f_{28}(q, t)$  em  $t = -1$ . Temos

$$f(q, -1) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n q^{n^2} \frac{(-q^2, q^2)_n}{(q)_{2n+1}}$$

onde desconsideramos o fator  $\frac{1}{2}$ .

Comparando este somatório com o lado esquerdo da equação (1.11), identificamos  $a = q$ ,

$$\beta_n = \frac{(-q^2; q^2)_n}{(q)_{2n+1}} \quad (2.1)$$

e substituímos estes valores em (1.7).

Avaliando  $\alpha_n$  para alguns valores de  $n$ , com o auxílio do software “Axiom”, encontramos

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = \frac{q}{q-1} & \alpha_2 = \frac{q^3}{q-1} \\ \alpha_3 = \frac{-q^6}{q-1} & \alpha_4 = \frac{-q^{10}}{q-1} \\ \alpha_5 = \frac{q^{15}}{q-1} & \alpha_6 = \frac{q^{21}}{q-1} \\ \alpha_7 = \frac{-q^{28}}{q-1} & \alpha_8 = \frac{-q^{36}}{q-1}. \end{array}$$

Observando estas avaliações, é fácil conjecturar que para  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \alpha_{(2n+1)} &= \frac{(-1)^n q^{2n^2+3n+1}}{q-1} & \text{e} \\ \alpha_{(2n+2)} &= \frac{(-1)^n q^{2n^2+5n+3}}{q-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

A seguir apresentamos uma prova de que  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  dados em (2.2) e (2.1), com  $\alpha_0 = \frac{1}{1-q}$  formam um par de Bailey.

**Lema 2.1:** O par  $(\alpha_n, \beta_n)$  obtido de (2.1) e (2.2) com  $\alpha_0 = \frac{1}{1-q}$  e  $a = q$  é um par de Bailey.

**Demonstração:**

Efetuando, no lado direito da definição (1.6), com os dados de nossa hipótese temos, para  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{1/(1-q)}{(q)_n(q^2)_n} + \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r}(q^2)_{n+r}} \\
&= \frac{1}{(q)_n(q)_{n+1}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j q^{2j^2+3j+1}/(q-1)}{(q)_{n-2j-1}(q^2)_{n+2j-1}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j q^{2j^2+5j+3}/(q-1)}{(q)_{n-2j-2}(q^2)_{n+2j+2}} \\
&= \frac{1}{(q)_n(q)_{n+1}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{j+1} q^{2j^2+3j+1}}{(q)_{n-2j-1}(q)_{n+2j+2}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{j+1} q^{2j^2+5j+3}}{(q)_{n-2j-2}(q)_{n+2j+3}} \\
&= \frac{1}{(q)_n(q)_{n+1}} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \frac{(-1)^j q^{2j^2-j}}{(q)_{n-2j+1}(q)_{n+2j}} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \frac{(-1)^j q^{2j^2+j}}{(q)_{n-2j}(q)_{n+2j+1}} \\
&= \frac{1}{(q)_n(q)_{n+1}} + \sum_{j=-1}^{-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1} \frac{(-1)^j q^{2j^2+j}}{(q)_{n+2j+1}(q)_{n-2j}} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \frac{(-1)^j q^{2j^2+j}}{(q)_{n-2j}(q)_{n+2j+1}} \\
&= \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \frac{(-1)^j q^{2j^2+j}}{(q)_{n-2j}(q)_{n+2j+1}} \\
&= \frac{1}{(q)_{2n+1}} \cdot \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \frac{(-1)^j q^{2j^2+j}}{(q)_{n-2j}(q)_{n+2j+1}} \cdot (q)_{2n+1} \\
&= \frac{1}{(q)_{2n+1}} \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(pois pela definição dos polinômios de Gauss temos que todas as parcelas são nulas fora do intervalo  $-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ ).

Como  $\beta_n = \frac{(-q^2; q^2)_n}{(q)_{2n+1}}$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{1-q}$  e  $(-q^2; q^2)_n = (1+q^{2n})(-q^2; q^2)_{n-1}$ ,

segue que definindo

$$A_n := \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2j \end{bmatrix}$$

nossa prova estará completa se mostrarmos que

$$A_n = (1+q^{2n})A_{n-1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Segundo neste intuito temos

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2j \end{bmatrix} \\
&\stackrel{(1.3)}{=} \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{2j^2+j} \left( \begin{bmatrix} 2n \\ n-2j \end{bmatrix} + q^{n+2j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2j-1 \end{bmatrix} \right) \\
&\stackrel{(1.4)}{=} \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{2j^2+j} \left( \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-1 \end{bmatrix} + q^{n-2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j \end{bmatrix} + q^{n+2j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-2 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + q^{2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-1 \end{bmatrix} \right) \\
&= (1+q^{2n})A_{n-1} + \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{2j^2+j} \left( q^{n-2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j \end{bmatrix} + q^{n+2j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-2 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Agora resta mostrar que o último somatório é nulo.

Desenvolvendo em duas somas, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{n+2j^2-j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j \end{bmatrix} &\stackrel{(1.2)}{=} \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{n+2j^2-j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2j-1 \end{bmatrix} \\
&\stackrel{j \mapsto -j}{=} \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{n+2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{n+2j^2+3j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-2 \end{bmatrix} &= - \sum_{j=-n+1}^{n+1} (-1)^j q^{n+2j^2-j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j \end{bmatrix} \\
&= - \sum_{j=-n+1}^{n+1} (-1)^j q^{n+2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2j \end{bmatrix} \\
&\stackrel{(1.2)}{=} - \sum_{j=-n+1}^{n+1} (-1)^j q^{n+2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-1 \end{bmatrix} \\
&= - \sum_{j=-n}^n (-1)^j q^{n+2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j-1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(pois para  $j = n+1$  ou  $j = n$  a expressão do somatório é nula). Portanto nossa prova está completa.  $\square$

Este resultado nos permite, com o auxílio de (1.11), a obtenção de uma nova identidade. Como (1.11) é satisfeita por todo par de Bailey, temos pelo Lema (2.1) que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2; q^2)_n}{(q)_{2n+1}} \cdot q^{n^2+n} &= \frac{1}{(q^2)_{\infty}} \left( \frac{1}{1-q} + \frac{1}{q-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (q^{2n+1} \cdot q^{(2n+1)^2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (-1)^n q^{2n^2+3n+1} + q^{2n+2} q^{(2n+2)^2} \cdot (-1)^n q^{2n^2+5n+3} \right) \\
&= \frac{1}{(q^2)_{\infty}} \left( \frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^{n+1} q^{6n^2+9n+3} + \right. \\
&\quad \left. \cdot (-1)^{n+1} q^{6n^2+15n+9}) \right) \\
&= \frac{1}{(q)_{\infty}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{6n^2-3n} + (-1)^n q^{6n^2+3n} \right) \\
&= \frac{1}{(q)_{\infty}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-q^3)^n (q^6)^{n^2} \\
&\stackrel{(1.13)}{=} \frac{1}{(q)_{\infty}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{12n+12})(1 - q^{12n+9})(1 - q^{12n+3}) \\
&= \frac{1}{(q)_{\infty}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{12n})(1 - q^{12n-3})(1 - q^{12n-9})
\end{aligned}$$

Portanto a nova identidade obtida é a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2; q^2)_n q^{n^2+n}}{(q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q)_{\infty}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{12n}) (1 - q^{12n-3}) (1 - q^{12n-9}) \quad (2.3)$$

Para uma interpretação combinatória de (2.3) definimos:

**Definição:** Uma partição de  $n$  do tipo  $k$  com duas cores é uma partição da forma  $n = k(k+1) + \sum_{j=1}^k a_j(2j) + \sum_{j=1}^{2k+1} b_j \cdot j$  com  $a_j = 0$  ou  $1$  e  $b_j \geq 0$ , onde as parcelas relativas à 1ª soma são denominadas de partes amarelas e as parcelas pertencentes à 2ª soma são chamadas de partes beges.

Esta definição foi sugerida pelas expressões

$$\frac{(-q; q^2)_n q^{n^2+n}}{(q)_{2n+1}}$$

que aparecem no lado esquerdo de (2.3). No capítulo (5), apresentamos uma generalização deste conceito que torna possível a obtenção de muitas outras interpretações combinatórias.

Observamos ainda que com esta definição, há necessidade de introduzirmos uma nova notação, a saber,

$$n = k.(k + 1) + [a_1.2 + \dots + a_k.2k] + \{b_1.1 + \dots + b_{2k+1}.(2k + 1)\}$$

onde fica claro a procedência de cada parcela.

Assim, já temos provado o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** O número de partições de  $n$  do tipo  $k$  com duas cores é igual ao número de partições de  $n$  em partes  $\not\equiv 0, \pm 3 \pmod{12}$ .

Para ilustrarmos o resultado anterior apresentamos as partições de  $n = 8$  que satisfazem o enunciado.

$0(0 + 1) + \{1 + \dots + 1\}$	8
$1(1 + 1) + [2] + \{3 + 1\}$	7 + 1
$1(1 + 1) + [2] + \{2 + 2\}$	6 + 2
$1(1 + 1) + [2] + \{2 + 1 + 1\}$	6 + 1 + 1
$1(1 + 1) + [2] + \{1 + 1 + 1 + 1\}$	5 + 2 + 1
$1(1 + 1) + \{3 + 3\}$	5 + 1 + 1 + 1
$1(1 + 1) + \{3 + 2 + 1\}$	4 + 4
$1(1 + 1) + \{3 + 1 + 1 + 1\}$	4 + 2 + 2
$1(1 + 1) + \{2 + 2 + 2\}$	4 + 2 + 1 + 1
$1(1 + 1) + \{2 + 2 + 1 + 1\}$	4 + 1 + 1 + 1 + 1
$1(1 + 1) + \{2 + 1 + \dots + 1\}$	2 + 2 + 2 + 2
$1(1 + 1) + \{1 + \dots + 1\}$	2 + 2 + 2 + 1 + 1
$2(2 + 1) + [2]$	2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1
$2(2 + 1) + \{2\}$	2 + 1 + \dots + 1
$2(2 + 1) + \{1 + 1\}$	1 + 1 + \dots + 1 + 1

De forma semelhante ao que acabamos de fazer com a equação de número 28 de Slater [18], definimos agora uma função de duas variáveis associada à identidade

(80) de Slater [18].

Seja a função

$$f_{80}(q, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)_n}{(q)_{2n+1}} t^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Temos que

$$f_{80}(q, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)_n}{(q)_{2n+1}} q^{n(n+1)}.$$

Comparando esta soma com o lado esquerdo da equação (1.11) onde  $a = q$  e

$$\beta_n = \frac{(-q)_n}{(q)_{2n+1}} \quad (2.4)$$

e usando o software “Axiom” para avaliar  $\alpha_n$  para alguns valores de  $n$ , por meio de (1.7) obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{q^2}{q-1} & \alpha_2 &= \frac{q^4}{q-1} & \alpha_3 &= \frac{-q^{10}}{q-1} & \alpha_4 &= \frac{-q^{14}}{q-1} \\ \alpha_5 &= \frac{q^{24}}{q-1} & \alpha_6 &= \frac{q^{30}}{q-1} & \alpha_7 &= \frac{-q^{44}}{q-1} & \alpha_8 &= \frac{-q^{52}}{q-1} \\ \alpha_9 &= \frac{q^{70}}{q-1} & \alpha_{10} &= \frac{q^{80}}{q-1} & \alpha_{11} &= \frac{-q^{102}}{q-1} & \alpha_{12} &= \frac{-q^{114}}{q-1} \end{aligned}$$

Após uma obsevação destes dados foi possível a obtenção da seguinte conjectura:

$$\begin{aligned} \alpha_{(4n+1)} &= \frac{q^{12n^2+10n+2}}{q-1} \\ \alpha_{(4n+2)} &= \frac{q^{12n^2+14n+4}}{q-1} \\ \alpha_{(4n+3)} &= \frac{-q^{12n^2+22n+10}}{q-1} \\ \alpha_{(4n+4)} &= \frac{-q^{12n^2+26n+14}}{q-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$

No lema seguinte provamos que o par  $(\alpha_n, \beta_n)$  formado por (2.5) e (2.4) é de fato um par de Bailey.

**Lema 2.2:** As seqüências dadas em (2.4) e (2.5) com  $\alpha_0 = \frac{1}{1-q}$  e  $a = q$  formam um par de Bailey.

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^n \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}} \\
&= \frac{1}{(q)_n(q)_{n+1}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \frac{-q^{12j^2+10j+2}}{(q)_{n-4j-1}(q)_{n+4j+2}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \frac{-q^{12j^2+14j+4}}{(q)_{n-4j-2}(q)_{n+4j+3}} \\
&+ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor} \frac{q^{12j^2+22j+10}}{(q)_{n-4j-3}(q)_{n+4j+4}} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor} \frac{-q^{12j^2+26j+14}}{(q)_{n-4j-4}(q)_{n+4j+5}} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

O 1<sup>o</sup> somatório, após fazermos a mudança de variável  $j \mapsto j-1$ , fica sendo igual a

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 1} \frac{-q^{12j^3-14j+4}}{(q)_{n-4j+3}(q)_{n+4j-2}} \stackrel{j \mapsto -j}{=} \sum_{j=-1}^{-\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - 1} \frac{-q^{12j^2+14j+4}}{(q)_{n+4j+3}(q)_{n-4j-2}},$$

que juntando ao 2<sup>o</sup> somatório nos dá

$$\sum_{-\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - 1}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \frac{-q^{12j^2-14j+4}}{(q)_{n+4j+3}(q)_{n-4j-2}} = \sum_{j=-n}^n \frac{-q^{12j^2+14j+4}}{(q)_{n+4j+3}(q)_{n-4j-2}},$$

(desde que por (1.0) as parcelas são nulas fora do intervalo  $-\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor$ ).

Analogamente as demais parcelas de (2.6) resultam em

$$\sum_{-\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor - 1}^{\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 1} \frac{q^{12j^2+2j}}{(q)_{n-4j}(q)_{n+4j+1}} = \sum_{j=-n}^n \frac{q^{12j^2+2j}}{(q)_{n-4j}(q)_{n+4j+1}}$$

(desde que por (1.0) as parcelas são nulas fora do intervalo  $-\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor - 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 1$ ).

Assim vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}} &= - \sum_{j=-n}^n \frac{q^{12j^2+14j+4}}{(q)_{n-4j-1}(q)_{n+4j+2}} + \sum_{j=-n}^n \frac{q^{12j^2+2j}}{(q)_{n-4j}(q)_{n+4j+1}} \\ &= -\frac{1}{(q)_{2n+1}} \cdot \sum_{j=-n}^n q^{12j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j-2 \end{bmatrix} + \frac{1}{(q)_{2n+1}} \cdot \sum_{j=-n}^n q^{12j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Seja } B_n := \sum_{j=-n}^n -q^{12j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j-2 \end{bmatrix} + q^{12j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j \end{bmatrix}.$$

Temos que  $B_0 = 1$  e como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j-2 \end{bmatrix} &\stackrel{(1.3)}{=} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-2 \end{bmatrix} + q^{n+4j+3} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-3 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-3 \end{bmatrix} + q^{n-4j-2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-2 \end{bmatrix} + q^{n+4j+3} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-3 \end{bmatrix}. \\ \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-4j \end{bmatrix} &\stackrel{(1.3)}{=} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j \end{bmatrix} + q^{n+4j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-1 \end{bmatrix} + q^{n-4j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j \end{bmatrix} + q^{n+4j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

efetuamos primeiramente com as respectivas  $2^{\text{as}}$  parcelas, obtendo

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-n}^n q^{12j^2+14j+4} \cdot q^{n-4j-2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-2 \end{bmatrix} + q^{12j^2+2j} \cdot q^{n-4j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j \end{bmatrix} \\ \stackrel{j \mapsto j+1, j \mapsto -j}{=} &\sum_{j=-n+1}^{n+1} -q^{n+12j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j+2 \end{bmatrix} + \sum_{j=-n}^n q^{n+12j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+4j \end{bmatrix} \\ \stackrel{j \mapsto -j, (1.2)}{=} &\sum_{j=-n-1}^{n-1} -q^{n+12j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+4j+2 \end{bmatrix} + \sum_{j=-n}^n q^{n+12j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \\ \stackrel{(1.2)}{=} &\sum_{j=-n-1}^{n-1} -q^{n+12j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-3 \end{bmatrix} + \sum_{j=-n}^n q^{n+12j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \\ = &\sum_{j=-n-1}^{n-1} -q^{n+12j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-3 \end{bmatrix} + q^{n+12j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \\ = &q^n B_{n-1}. \end{aligned}$$

Assim podemos ver que

$$B_n = (1+q^n)B_{n-1} + \sum_{j=-n}^n -q^{n+12j^2+18j+7} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-3 \end{bmatrix} + q^{n+12j^2+6j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Desde que

$$\beta_n = \frac{(-q)_n}{(q)_{2n+1}} \text{ e } (-q)_n = (1+q^n)(-q)_{n-1}, (-q)_0 = 1,$$

teremos completado a prova se mostrarmos que a última soma que aparece em (2.7) é nula. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^n -q^{n+12j^2+18j+7} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-3 \end{bmatrix} &= \sum_{j=-n+1}^{n+1} -q^{n+12j^2+6j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j+1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=-n-1}^{n-1} -q^{n+12j^2+6j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j+1 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \sum_{j=-n-1}^{n-1} -q^{n+12j^2+6j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=-n}^n -q^{n+12j^2+6j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-4j-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e isto conclui a prova. □

Tendo provado o Lema (2.2) podemos substituir nossos atuais valores de  $a$ ,  $\beta_n$  e  $\alpha_n$  em (1.11) e fazendo uso do teorema do Produto Triplo de Jacobi obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)_n}{(q)_{2n+1}} q^{n^2+n} &= \frac{1}{(q)_{\infty}} (-q^{10} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{56n})(1+q^{56n+6})(1+q^{56n-62}) \\ &\quad + \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{56n})(1+q^{56n-22})(1+q^{56n-34})) \end{aligned} \quad (2.8)$$

## CAPÍTULO 3

### Provas alternativas para certas identidades de Slater

Em [15] Santos apresenta, no capítulo 6, diversas conjecturas. A prova de cada conjectura constitui uma demonstração alternativa para a identidade que utilizamos na obtenção da referida conjectura.

O método utilizado é devido a Andrews [6] e implica na busca de polinômios  $P_n(q)$  que satisfazem algumas condições dadas abaixo. O exemplo seguinte se encontra em Santos [15]: dada uma identidade, por exemplo, a 2<sup>a</sup> identidade de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-2})(1 - q^{5n-3})},$$

considera-se uma função polinomial em duas variáveis,  $f(q, t)$ , associada à identidade que se quer provar e com as seguintes propriedades:

(i)  $f(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n$  onde  $P_n(q)$  são polinômios,

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(q) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-2})(1 - q^{5n-3})}$

e

(iii)  $f(q, t)$  satisfaz uma equação não-homogênea de primeira ordem em  $q$ .

A obtenção de  $f(q, t)$ , em geral, não é difícil, e se consegue pela introdução da variável  $t$  na identidade dada de modo que possamos relacionar  $f(q, t)$  com  $f(q, tq)$ . Para o exemplo dado, definimos

$$f(q, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2+n}}{(1-t)(tq; q)_n},$$

e justificamos o fator  $(1-t)$  que aparece no denominador como um termo que garantirá a validade da condição (ii).

Temos

$$\begin{aligned} f(q, t) &= \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{n^2+n}}{(t; q)_{n+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} + \frac{t^2 q^2}{1-tq} f(q, tq) \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$(1-t)f(q, t) = 1 + t^2 q^2 f(q, tq).$$

Agora, exigindo que

$$f(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q) t^n \quad \text{para } P_n(q) \text{ polinômios em } q$$

temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(q) t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(q) t^n + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}(q) q^n t^n$$

Comparando os coeficientes de  $t^n$  em ambos lados desta igualdade vemos que

$$P_0(q) = 1$$

$$P_1(q) = 1$$

$$P_n(q) = P_{n-1}(q) + q^n P_{n-2}(q)$$

Neste ponto, fazendo uso do software “Macysma”, Santos [15] conjecturou (e após provou) que

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} \\ P_{2n-1} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+3j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+13j+4} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Este fato, juntamente com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{5}{2}j + \frac{3}{2}j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n - \lfloor \frac{5}{2}j + \frac{1}{2} \rfloor \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(1.16) \quad & \frac{1}{(q)_\infty} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(5n^2+3n)/2} \\
& = \frac{1}{(q)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{5n})(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})
\end{aligned}$$

implica pela aplicação do Lema de Abel que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)f(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \frac{1}{(q)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{5n})(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})$$

que é a 2ª identidade de Rogers-Ramanujan.

Nosso próximo resultado é uma demonstração alternativa para

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q)_{2n+1}} = \frac{(-q; q^4)_\infty (-q^3; q^4)_\infty (q^4; q^4)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty}.$$

(identidade (9) de Slater [18], p. 153)

Seguindo o mesmo método utilizado no exemplo anterior, e definindo

$$f_9(q, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} q^{2n^2+n}}{(t; q^2)_{n+1} (tq; q^2)_{n+1}}$$

Santos [15] encontrou

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 \\
P_1 &= 1 + q \\
P_n &= (1 + q)P_{n-1} - (q - q^{2n-1})P_{n-2}, n \geq 2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

e conjecturou que

$$P_{2n-1} = C_0(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2j^2+j} \left[ \begin{matrix} 2n-1 \\ n-j-1 \end{matrix} \right]_2, n \geq 1 \tag{2.10}$$

Com o auxílio do software “Axiom” completamos a conjectura para  $P_n$  com

$$P_{2n} = C_e(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2j^2+j} \left[ \begin{matrix} 2n \\ n-j \end{matrix} \right]_2, n \geq 0. \tag{2.11}$$

Observamos ainda que (2.10) e (2.11) podem ser escritos numa única expressão, a saber,

$$C(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2j^2+j} \left[ \begin{matrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j \end{matrix} \right]_2$$

onde  $\lfloor x \rfloor$  é a função maior inteiro.

**Lema 3.1** As conjecturas (2.10) e (2.11) satisfazem a relação de recorrência dada em (2.9).

**Demonstração.** Primeiramente escrevemos (2.9) em função de  $C_0(n)$  e  $C_e(n)$ , isto é,

$$C_e(n) = (1+q)C_0(n) - (q - q^{4n-1})C_e(n-1) \quad (2.12)$$

e

$$C_0(n) = (1+q)C_e(n-1) - (q - q^{4n-3})C_0(n-1) \quad (2.13)$$

Devemos demonstrar (2.12) e (2.13). Começemos com (2.12).

$$\begin{aligned} C_e(n) - C_0(n) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2j^2+j} \left[ \begin{matrix} 2n \\ n-j \end{matrix} \right]_2 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2j^2+j} \left[ \begin{matrix} 2n-1 \\ n-j-1 \end{matrix} \right]_2 \\ &\stackrel{j \rightarrow 2j, 2j-1}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2+2j} \left[ \begin{matrix} 2n \\ n-2j \end{matrix} \right]_2 + q^{8j^2-6j+1} \left[ \begin{matrix} 2n \\ n-1+2j \end{matrix} \right]_2 \\ &\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2+2j} \left[ \begin{matrix} 2n-1 \\ n-1-2j \end{matrix} \right]_2 - q^{8j^2-6j+1} \left[ \begin{matrix} 2n-1 \\ n-1+2j \end{matrix} \right]_2 \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+8j^2-2j} \left[ \begin{matrix} 2n-1 \\ n-2j \end{matrix} \right]_2 + q^{2n+8j^2+10j+3} \left[ \begin{matrix} 2n-1 \\ n-2j-2 \end{matrix} \right]_2 \quad (2.14) \\ &\stackrel{(1.4),(1.3)}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+8j^2-2j} \left[ \begin{matrix} 2n-2 \\ n-2j-1 \end{matrix} \right]_2 + q^{4n+8j^2-6j} \left[ \begin{matrix} 2n-2 \\ n-2j \end{matrix} \right]_2 + \\ &\quad + q^{2n+8j^2+10j+3} \left[ \begin{matrix} 2n-2 \\ n-2j-2 \end{matrix} \right]_2 + q^{4n+8j^2+14j+5} \left[ \begin{matrix} 2n-2 \\ n-2j-3 \end{matrix} \right]_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{j \mapsto -j, j \mapsto j-1}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+8j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+2j-1 \end{bmatrix}_2 + q^{4n+8j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+2j \end{bmatrix}_2 + \\
& + q^{2n+8j^2-6j+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2j \end{bmatrix}_2 + q^{4n+8j^2+2j-1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+2j-1 \end{bmatrix}_2 \\
(1.2) \stackrel{j \mapsto -j}{=} & \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+8j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2j-1 \end{bmatrix}_2 + q^{4n+8j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2j-2 \end{bmatrix}_2 + \\
& + q^{2n+8j^2+6j+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n+2j \end{bmatrix}_2 + q^{4n+8j^2-2j-1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2j-1 \end{bmatrix}_2 \\
= & q^{2n} C_e(n-1) + q^{4n-1} C_e(n-1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
q(C_0(n) - C_e(n-1)) &= q \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1-j \end{bmatrix}_2 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-1-j \end{bmatrix}_2 \right) \\
& \stackrel{j \mapsto 2j, 2j-1}{=} q \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1-2j \end{bmatrix}_2 + q^{8j^2-6j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1+2j \end{bmatrix}_2 - \right. \\
& \left. - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{8j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-1-2j \end{bmatrix}_2 + q^{8j^2-6j+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2+2j \end{bmatrix}_2 \right) \\
(1.3)(1.4) \stackrel{=}{=} & \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{2n+8j^2+6j+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2j-2 \end{bmatrix}_2 + q^{2n+8j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2j-1 \end{bmatrix}_2 \\
= & q^{2n} C_e(n-1) \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Assim vemos que

$$(2.14) - (2.15) = q^{4n-1} C_e(n-1)$$

e isto demonstra que (2.12) é verdadeira, supondo as conjecturas (2.10) e (2.11).

De modo similar podemos obter (2.13) o que completa a demonstração.  $\square$

Ainda seguindo o mesmo método aplicado nos casos precedentes neste capítulo, vamos demonstrar a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{3n(n+1)/2}}{(q; q^2)_{n+1} (q)_n} = \frac{(q^2; q^{10})_{\infty} (q^8; q^{10})_{\infty} (q^{10}; q^{10})_{\infty}}{(q)_{\infty}}$$

(identidade (44) de Slater [18], p. 156)

Encontramos em Santos [15]

$$f_{44}(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{(t^2q; q^2)_{n+1}(t; q)_{n+1}} =: \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)t^n$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1 = 1 \\ P_2 &= 1 + q \\ P_n &= P_{n-1} + qP_{n-2} - (q - q^n)P_{n-3}, \quad n \geq 3 \end{aligned} \tag{2.16}$$

com a conjectura

$$P_{2n} = C_e(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix} - q^{20j^2+26j+8} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}.$$

A partir destas informações fazemos uso do software “Axiom.” e adicionamos a conjectura

$$P_{2n-1} = C_0(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - q^{20j^2+26j+8} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-3 \end{bmatrix}.$$

Observamos que  $C_e(n)$  e  $C_0(n)$  podem ser escritas numa única expressão, a saber,

$$P_n = C(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+6j} \begin{bmatrix} n+1 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 5j \end{bmatrix} - q^{20j^2+26j+8} \begin{bmatrix} n+1 \\ \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 5j - 3 \end{bmatrix}.$$

**Lema 3.2** As conjecturas  $C_e(n)$  e  $C_0(n)$  satisfazem as relações dadas em (2.16).

**Demonstração.** Devemos verificar

$$C_e(n) = C_0(n) + qC_e(n-1) - (q - q^{2n})C_0(n-1) \tag{2.17}$$

e

$$C_0(n) = C_e(n-1) + qC_0(n-1) - (q - q^{2n})C_e(n-2) \quad (2.18)$$

são válidas para todo  $n$ .

Temos que

$$\begin{aligned} C_e(n) - C_0(n) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix} - q^{20j^2+26j+8} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} \\ &\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( q^{20j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - q^{20j^2+26j+8} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-3 \end{bmatrix} \right) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} \stackrel{(1.4)}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+20j^2+j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j \end{bmatrix} - q^{n+20j^2+31j+12} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$q(C_e(n-1) - C_0(n-1)) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+20j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - q^{n+20j^2+31j+12} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-5 \end{bmatrix}.$$

Mas

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+20j^2+j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j \end{bmatrix} - q^{n+20j^2+31j+12} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-4 \end{bmatrix} \\ (1.3) \stackrel{(1.4)}{=} &\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+20j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} + q^{2n+20j^2-4j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j \end{bmatrix} \\ &- q^{n+20j^2+31j+12} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-4 \end{bmatrix} - q^{2n+20j^2+36j+16} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-5 \end{bmatrix} \\ (1.3) \stackrel{(1.4)}{=} &\sum_{j \rightarrow j+1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+20j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} + q^{2n+20j^2+6j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} + \\ &+ q^{2n+20j^2+36j+16} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-5 \end{bmatrix} - q^{n+20j^2+31j+12} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-5 \end{bmatrix} - \\ &- q^{2n+20j^2+26j+8} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-4 \end{bmatrix} - q^{2n+20j^2+36j+16} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-5 \end{bmatrix} \\ = &q^{2n}C_0(n-1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{n+20j^2+j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - q^{n+20j^2+31j+12} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim fica fácil ver que

$$C_e(n) - C_0(n) - q(C_e(n-1) - C_0(n-1)) = q^{2n}C_0(n-1)$$

e isto é a equação (2.17).

Para obtermos (2.18) procedemos de modo similar, completando a demonstração. □

Finalizamos este capítulo apresentando mais uma demonstração alternativa. Agora obteremos a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n}{2}(3n-1)}}{(q; q^2)_n (q)_n} = \frac{(q^4; q^{10})_{\infty} (q^6; q^{10})_{\infty} (q^{10}; q^{10})_{\infty}}{(q)_{\infty}}.$$

(identidade (46) de Slater [18], p. 156)

Aproveitamos a conjectura (6.26) de Santos [15]:

$$f_{46}(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n} q^{\frac{n}{2}(3n-1)}}{(t^2 q; q^2)_n (t; q)_{n+1}} =: \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q) t^n$$

com

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1 = P_2 = 1 \\ P_n &= P_{n-1} + qP_{n-2} - (q - q^{n-2})P_{n-3}, \quad n \geq 3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$P_{2n} = C_e(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5j \end{bmatrix} - q^{20j^2+22j+6} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

completando-a com

$$P_{2n-1} = C_0(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{20j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - q^{20j^2+22j+6} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-4 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Em virtude da grande semelhança na demonstração dos resultados neste capítulo vamos somente enunciar o seguinte lema o qual implica na validade da equação de número 46 em Slater [18].

**Lema 3.3** As conjecturas apresentadas em (2.20) e (2.21) verificam as condições dadas em (2.19).

## CAPÍTULO 4

### Teoremas combinatórios sobre partições

Interpretações combinatórias para identidades do tipo Rogers-Ramanujan têm sido procuradas por diversos especialistas. Tais fatos podem ser encontrados, por exemplo, em Andrews [4] e Hirchhorn [13] entre outros.

Neste capítulo exploramos o aspecto combinatório das expressões que aparecem no somatório das identidades. Tivemos como referência principal, as idéias que encontramos em Hirchhorn [13].

Iniciamos com o

**Teorema 4.1** Se  $A(n)$  é o conjunto das partições de  $n$  do tipo  $\pi_t(n) = a_1 + \dots + a_t$  onde  $a_j - a_{j+1} \geq 4$  para  $1 \leq j < s-1$  com  $a_{s-1} - a_s \geq 3$  se  $t = 2s-1$  ou  $a_{s-1} - a_s \geq 4$  e  $a_s > a_{s+1}$  se  $t = 2s$ ,  $B(n)$  o conjunto das partições  $n$  em partes ímpares distintas ou partes pares  $\equiv 2 \pmod{4}$ ,  $C(n)$  o conjunto das partições de  $n$  em partes ímpares  $D(n)$  o conjunto das partições de  $n$  em partes distintas então  $A(n), B(n), C(n)$  e  $D(n)$  têm mesma cardinalidade.

**Demonstração:** Consideremos uma partição de  $n$ ,  $\pi_t(n) = a_1 + \dots + a_t$  que pertence ao conjunto  $A(n)$

Existem duas possibilidades para  $t$ :

**Caso  $t = 2s$ :** Neste caso  $n = a_1 + \dots + a_{s-1} + a_s + \dots + a_{2s}$  com

$$a_{s+1} \geq a_{s+2} \geq \dots \geq a_{2s} \geq 1, a_s \geq 2, a_{s-1} \geq 6, \dots, a_1 \geq 4s - 2.$$

Subtraímos  $2, 6, \dots, 4s - 2$  de  $a_s, a_{s-1}, \dots, a_1$  respectivamente e 1 de cada uma das  $s$  partes restantes. Isto nos dá uma partição de

$$n - (2 + 6 + 10 + \dots + 4s - 2) - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{s \text{ parcelas}} = n - (2s^2 + s)$$

em no máximo  $2s$  partes. Assim vemos que as partições do tipo  $\pi_{2s}(n)$  são geradas por

$$\frac{q^{2s^2+s}}{(q)_{2s}} \quad \text{para} \quad s \geq 1.$$

Caso  $t = 2s-1$ : Escrevemos  $n = a_1 + \dots + a_{s-1} + a_2 + \dots + a_{2s-1}$  onde  $a_{s-1} \geq 4, a_{s-2} \geq 8, \dots, a_1 \geq 4(s-1)$  e  $a_s \geq a_{s+1} \geq \dots \geq a_{2s-1} \geq 1$ . Subtraindo  $4, 8, \dots, 4s-4$  de  $a_{s-1}, a_{s-2}, \dots, a_1$  respectivamente, obtemos uma partição de

$$n - 4(1 + 2 + \dots + (s-1)) - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{s \text{ parcelas}} = n - (2s^2 - s)$$

em no máximo  $2s-1$  partes. Portanto as partições do tipo  $\pi_{2s-1}(n)$  são geradas por

$$\frac{q^{2s^2-s}}{(q)_{2s-1}} \quad \text{para} \quad s \geq 1.$$

Isto nos diz que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |A(n)|q^n &= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{2s^2+s}}{(q)_{2s}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{2s^2-s}}{(q)_{2s-1}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s^2+s}}{(q)_{2s}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{2s^2-s}}{(q)_{2s-1}} \\ &\stackrel{s \rightarrow s+1}{=} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s^2+s}}{(q)_{2s}} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s^2+3s+1}}{(q)_{2s+1}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s^2+s}}{(q)_{2s}} \cdot \frac{(1-q^{2s+1})}{(1-q^{2s+1})} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s^2+3s+1}}{(q)_{2s+1}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s^2+s}}{(q)_{2s+1}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por outro lado sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q)_{2n+1}} = \frac{(-q; q^4)_{\infty} \cdot (-q^3; q^4)_{\infty} \cdot (q^4; q^4)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}$$

(identidade (9) de Slater [18], p. 153)

O lado direito desta igualdade pode facilmente ser reescrito como

$$\frac{(-q; q^2)_\infty (q^4; q^4)_\infty}{(q^2; q^4)_\infty (q^4; q^4)_\infty} = \frac{(-q; q^2)_\infty}{(q^2; q^4)_\infty} \quad (4.2)$$

ou

$$\frac{(-q; q^2)_\infty \cdot (-q^2; q^2)_\infty (q^2; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} = (-q; q^2)_\infty (-q^2; q^2)_\infty = (-q)_\infty \quad (4.3)$$

que nos dá os elementos de  $D(n)$  para todo  $n$ .

A identidade (9) dada acima, juntamente com (4.1), (4.2) e (4.3) nos permitem afirmar que  $A(n)$ ,  $B(n)$  e  $D(n)$  são conjuntos equivalentes.

Finalmente fazemos uso da igualdade

(identidade (84) de Slater [18], p. 161)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(2n+1)}}{(q)_{2n+1}} &= \frac{(q^2; q^8)_\infty \cdot (q^6; q^8)_\infty \cdot (q^4, q^{16})_\infty (q^{12}; q^{16})_\infty \cdot (q^8; q^8)_\infty}{(q)_\infty} \\ &= \frac{(q^2; q^{16})_\infty (q^{10}; q^{16})_\infty (q^6; q^{16})_\infty (q^{14}; q^{16})_\infty (q^4; q^{16})_\infty (q^{12}; q^{16})_\infty (q^8; q^{16})_\infty (q^{16}; q^{16})_\infty}{(q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \end{aligned}$$

para obter  $\#A(n) = \#C(n)$  e concluir o teorema.  $\square$

Lembramos que a igualdade  $\#C(n) = \#D(n)$ , contida no teorema anterior, é um resultado muito conhecido que é devido a Euler.

Para ilustrar o Teorema (4.1) apresentamos, a seguir, as partições de  $n = 9$

correspondentes a cada um dos conjuntos considerados:

$A(9)$	$B(9)$	$C(9)$	$D(9)$
9	9	9	9
$7+1+1$	$7+2$	$7+1+1$	$8+1$
$6+2+1$	$6+3$	$5+3+1$	$7+2$
$5+2+2$	$6+2+1$	$5+1+1+1+1$	$6+3$
$8+1$	$5+3+1$	$3+3+3$	$6+2+1$
$7+2$	$5+2+2$	$3+3+1+1+1$	$5+4$
$6+3$	$3+2+2+2$	$3+1+\cdots+1+1$	$5+3+1$
$5+4$	$2+2+2+2+1$	$1+1+\cdots+1+1$	$4+3+2$

É devido a I.J. Schur uma prova combinatória para as duas identidades de Rogers-Ramanujan, assim enunciadas:

“O número de partições de  $n = a_1 + \cdots + a_s$  tal que  $a_j - a_{j+1} \geq 2$  para  $1 \leq j < s$  e  $a_s > \lambda$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes  $\equiv \pm(\lambda + 1) \pmod{5}$

onde  $\lambda = 0$  ou  $1$ , respectivamente”.

Vale mencionar que as interpretações combinatórias, para os casos  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ , do resultado acima, podem ser obtidas seguindo-se os mesmos argumentos que temos usado neste trabalho.

Apresentamos, no seguinte teorema, interpretações distintas destas, cuja menção ao resultado pode ser encontrada em MacMahon [14].

**Teorema 4.2** O número de partições de  $n$  da forma  $n = a_1 + \cdots + a_s$  onde  $a_s \geq s + \lambda$  ( $\lambda = 0$  ou  $1$ ) é igual ao número de partições de  $n$  em partes  $\equiv \pm(\lambda + 1) \pmod{5}$  onde  $\lambda$  respectivamente é igual a  $0$  ou  $1$ .

**Demonstração:** Consideremos uma partição de  $n = a_1 + \cdots + a_s$  com  $a_s \geq s + \lambda$ . Subtraindo  $(s + \lambda)$  de cada uma das partes, obtemos uma partição de  $n - s(s + \lambda)$  em no máximo  $s$  partes. Vemos assim que

$$\frac{q^{s(s+\lambda)}}{(q)_s}, \quad s \geq 1$$

geram as partições do tipo considerado.

As identidades de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+\lambda)}}{(q)_n} = \frac{1}{(q^{1+\lambda}; q^5)_{\infty} (q^{4-\lambda}; q^5)_{\infty}} \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 1$$

permitem a conclusão do teorema. □

Ilustramos o resultado anterior para  $n = 10$  no caso da 1<sup>a</sup> identidade ( $\lambda = 0$ ) e para  $n = 16$  no 2<sup>o</sup> caso ( $\lambda = 1$ ). Na primeira coluna listamos as partições de  $n = a_1 + \dots + a_s$  tal que  $a_j - a_{j+1} \geq 2$  para  $1 \leq j < s$  e  $a_s > \lambda$ .

$\lambda = 0 :$

10	10	9 + 1
9 + 1	8 + 2	6 + 4
8 + 2	7 + 3	6 + 1 + 1 + 1 + 1
7 + 3	6 + 4	4 + 4 + 1 + 1
6 + 4	5 + 5	4 + 1 + $\dots$ + 1
6 + 3 + 1	4 + 3 + 3	1 + 1 + $\dots$ + 1 + 1

$\lambda = 1 :$

16	16	13 + 3
14 + 2	13 + 3	12 + 2 + 2
13 + 3	12 + 4	8 + 8
12 + 4	11 + 5	8 + 3 + 3 + 2
11 + 5	10 + 6	8 + 2 + 2 + 2 + 2
10 + 6	9 + 7	7 + 7 + 2
10 + 4 + 2	8 + 8	7 + 3 + 3 + 3
9 + 7	8 + 4 + 4	7 + 3 + 2 + 2 + 2
9 + 5 + 2	7 + 5 + 4	3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2
8 + 6 + 2	6 + 6 + 4	3 + 3 + 2 + $\dots$ + 2
8 + 5 + 3	6 + 5 + 5	2 + 2 + $\dots$ + 2 + 2

As mesmas identidades que usamos nas demonstrações dos seguintes teoremas, já haviam sido usadas por Hirchhorn [13], sendo que lá ele dá interpretações distintas das apresentadas aqui.

**Teorema 4.3** Se  $A(n)$  é o número de partições de  $n$  em um número ímpar de partes, digamos,  $n = a_1 + \dots + a_s + \dots + a_{2s+1}$  onde  $a_s \geq s + 1, a_{2s+1} \geq s$  e  $a_s > a_{s+1}$ .  $B(n)$  o número de partições de  $n$  em partes ímpares distintas  $\equiv \pm 1 \pmod{8}$  ou partes pares  $\not\equiv 0 \pmod{8}$ ,  $C(n)$  o número de partições de  $n$  em partes ímpares  $\not\equiv \pm 3, \pm 5 \pmod{16}$  ou partes pares  $\not\equiv 0, \pm 2, 8 \pmod{16}$  então  $A(n) = B(n) = C(n)$ .

**Demonstração:** Seja  $n = a_1 + \dots + a_s + \dots + a_{2s+1}$  uma partição de  $n$  associada a  $A(n)$ . Como  $a_s \geq s + 1, a_{2s+1} \geq s$  e  $a_s > a_{s+1}$  podemos subtrair  $s + 1$  de cada uma das primeiras  $s$  partes e tirar  $s$  de cada uma das partes restantes e obtendo uma partição de

$$(a_1 - (s + 1) + \dots + a_s - (s + 1)) + (a_{s+1} - s + \dots + a_{2s+1} - s) = n - 2s(s + 1)$$

em no máximo  $2s + 1$  partes. Assim vemos que as partições de  $n$  do tipo acima são geradas por

$$\frac{q^{2s(s+1)}}{(q)_{2s+1}}, \quad s \geq 0.$$

Isto significa que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(n)q^n = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s(s+1)}}{(q)_{2s+1}} \quad \text{onde } A(0) := 1 \quad (4.4)$$

Pelas identidades

(identidade (38) de Slater [18], p. 155)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q)_{2n+1}} = \frac{(-q; q^8)_{\infty} (-q^7; q^8)_{\infty} (q^8; q^8)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}$$

e

(identidade (86) de Slater [18], p. 161)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q)_{2n+1}} = \frac{(q^3; q^8)_{\infty} (q^5; q^8)_{\infty} (q^2; q^{16})_{\infty} (q^{14}; q^{16})_{\infty} (q^8; q^8)_{\infty}}{(q)_{\infty}}$$

cujos lados direitos são, facilmente vistos, como

$$(-q; q^8)_{\infty} (-q^7; q^8)_{\infty} \cdot \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0(4)}}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - q^{2n}} \right)$$

e

$$\prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5, 8(16)}}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - q^n} \right), \quad \text{respectivamente.}$$

Desde que estas duas últimas expressões são respectivamente funções geradoras para as partições enumeradas por  $B(n)$  e  $C(n)$ , nossa demonstração está completa.  $\square$

Com o objetivo de ilustrar o teorema anterior listamos abaixo os elementos de  $A(n)$ ,  $B(n)$  e  $C(n)$  no caso  $n = 10$ :

$A(10) = 8$	$B(10) = 8$	$C(10) = 8$
10	10	10
8 + 1 + 1	9 + 1	9 + 1
7 + 2 + 1	7 + 2 + 1	7 + 1 + 1 + 1
6 + 2 + 2	6 + 4	6 + 4
6 + 3 + 1	6 + 2 + 2	6 + 1 + 1 + 1 + 1
5 + 4 + 1	4 + 4 + 2	4 + 4 + 1 + 1
5 + 3 + 2	4 + 2 + 2 + 2	4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
4 + 3 + 3	2 + 2 + 2 + 2 + 2	1 + 1 + ... + 1 + 1

**Teorema 4.4** Se  $A(n)$  é o número de partições de  $n$  da forma  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2s}$  tal que  $a_{2s} \geq s$ ,

$B(n)$  o número de partições de  $n$  em partes ímpares distintas  $\equiv \pm 3(\text{mod}8)$  ou pares

$\not\equiv 0(\text{mod}8)$

$C(n)$  o número de partições de  $n$  cujas partes  $\not\equiv 0, \pm 1, \pm 6, \pm 7, 8(\text{mod}16)$  então

$$A(n) = B(n) = C(n).$$

**Demonstração:** Consideremos a partição  $n = a_1 + \dots + a_{2s}$  onde  $a_{2s} \geq s$ . Subtraindo  $s$  de cada uma das partes obtemos uma partição de  $n - 2s^2$  em no máximo  $2s$  partes. Portanto as partições do tipo considerado acima são geradas por

$$\frac{q^{2s^2}}{(q)_{2s}}, \quad s \geq 1$$

Deste modo vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(n)q^n = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{2s^2}}{(q)_{2s}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s^2}}{(q)_{2s}} \quad (4.5)$$

São resultados conhecidos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q)_{2n}} = \frac{(-q^3; q^8)_{\infty} (-q^5; q^8)_{\infty} (q^8; q^8)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}$$

(identidade (39) de Slater [18], p. 157)

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q)_{2n}} = \frac{(q; q^8)_{\infty} (q^7; q^8)_{\infty} (q^6, q^{16})_{\infty} (q^{10}; q^{16})_{\infty} (q^8; q^8)_{\infty}}{(q)_{\infty}}$$

(identidade (83) de Slater [18], p. 160)

Reescrevendo os lados direitos destas identidades convenientemente, ou seja,

$$(-q^3; q^8)_{\infty} (-q^5; q^8)_{\infty} \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0(4)}}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - q^{2n}} \right)$$

e

$$\prod_{n \not\equiv 0, \pm 1, \pm 6, \pm 7(16)}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - q^n} \right) \quad \text{respectivamente,}$$

fica fácil concluir o teorema.

□

Como ilustração do Teorema (4.4) exibimos as partições que são consideradas referentes a  $n = 12$ :

$A(12)$	$B(12)$	$C(12)$
$11 + 1$	$12$	$12$
$10 + 2$	$10 + 2$	$5 + 5 + 2$
$9 + 3$	$6 + 6$	$5 + 4 + 3$
$8 + 4$	$6 + 4 + 2$	$5 + 3 + 2 + 2$
$7 + 5$	$6 + 2 + 2 + 2$	$4 + 4 + 4$
$6 + 6$	$5 + 4 + 3$	$4 + 4 + 2 + 2$
$6 + 2 + 2 + 2$	$5 + 3 + 2 + 2$	$4 + 3 + 3 + 2$
$5 + 3 + 2 + 2$	$4 + 4 + 4$	$4 + 2 + 2 + 2 + 2$
$4 + 4 + 2 + 2$	$4 + 4 + 2 + 2$	$3 + 3 + 3 + 3$
$4 + 3 + 3 + 2$	$4 + 2 + 2 + 2 + 2$	$3 + 3 + 2 + 2 + 2$
$3 + 3 + 3 + 3$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

## CAPÍTULO 5

### Interpretações alternativas com uso de cores e o conceito de $u$ -partição

Dividimos este capítulo em duas partes. Cada uma delas está baseada em um conceito que possibilita estender o método de se obter interpretações combinatórias, anteriormente utilizado. Na primeira parte utilizamos o conceito de partição de  $n$  com  $r$  cores e na segunda introduzimos e exploramos o conceito de  $u$ -partição.

No capítulo 2 fizemos uso do software “Axiom” para demonstrar a identidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2; q^2)_n}{(q)_{2n+1}} q^{n^2+n} = \frac{1}{(q)_{\infty}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{12n})(1 - q^{12n-3})(1 - q^{12n-9}).$$

Após, definimos partições de  $n$  do tipo  $k$  com duas cores. Utilizando este conceito foi possível fazer uma interpretação combinatória da identidade acima.

Aqui estenderemos o conceito mencionado acima, possibilitando a interpretação combinatória de muitas das identidades obtidas em Slater [18].

**Definição 5.1:** Uma partição de  $n$  do tipo  $k$  com  $r$  cores relativas ao retângulo  $k.(ak + b)$  é uma partição de  $n$  da forma

$$n = k.(ak + b) + \sum_{j=1}^{n_1} c_1(j) + \cdots + \sum_{j=1}^{n_r} c_r(j)$$

onde  $b \in \mathbb{Z}$  e  $a, c_1(j), \dots, c_r(j)$  são inteiros não-negativos.

Também usaremos a notação  $n = k(ak + b) + (c_1(1) + \cdots + c_1(n_1))_1 + \cdots + (c_r(1) + \cdots + c_r(n_r))_r$  para indicar partições de  $n$  do tipo  $k$  com  $r$  cores.

Observemos que quando  $r = 1$  não é necessário distinguir parcelas com cores, conforme pode ser visto em Santos e Mondek [16] onde a definição acima aparece particularizada para se dar uma demonstração combinatória para

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2-n}}{(q^2; q^2)_n} = 0.$$

Naquele trabalho aparecem as partições de  $n$  do tipo  $k$  da forma

$$n = k.(k - 1) + \sum_{j=1}^k m_j(2j).$$

Um outro exemplo para o caso  $r = 1$  pode ser dado pelas duas identidades de Rogers-Ramanujan. Utilizando este conceito podemos enunciar-las do seguinte modo:

“O número de partições de  $n$  do tipo  $k$  relativas ao retângulo  $k.(k + a)$  ( $a = 0$  ou  $1$ ) é igual ao número de partições de  $n$  em partes  $\equiv \pm(a + 1) \pmod{5}$ , para  $a = 0$  ou  $1$  respectivamente”.

Em virtude da similaridade das demonstrações dos seguintes resultados, vamos apresentar a demonstração de dois deles e indicar uma prova para os outros dois.

**Teorema 5.1** O número de partições de  $n$  do tipo  $k$  em 3 cores relativas ao retângulo  $k.(2k + 2)$  da forma  $n = k.(2k + 2) + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j(2j - 1) + \sum_{j=1}^{k+1} a_j(2j - 1) + \sum_{j=1}^k b_j(4j)$  onde  $\varepsilon_j = 0$  ou  $1$  para todo  $j$  e  $a_j, b_j \in \mathbb{Z}_+$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares distintas  $\equiv \pm 1 \pmod{6}$  ou partes pares  $\not\equiv 0 \pmod{6}$ .

**Demonstração.** Consideremos a partição

$$n = k(2k + 2) + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j(2j - 1) + \sum_{j=1}^{k+1} a_j(2j - 1) + \sum_{j=1}^k b_j(4j)$$

nas condições do enunciado. Denotando esta partição como

$$\begin{aligned} n = & k(2k + 2) + (\varepsilon_1.1 + \varepsilon_2.3 + \dots + \varepsilon_k.(2k - 1))_1 + (a_1.1 + \dots + a_{k+1}.(2k + 1))_2 \\ & + (b_1.4 + \dots + b_k(4k))_3 \end{aligned}$$

vemos que as contribuições das cores 1, 2 e 3 nesta soma são com partes ímpares distintas  $\leq 2k - 1$ , com partes ímpares  $\leq 2k + 1$  e com partes múltiplas de  $4 \leq 4k$  respectivamente, para cada  $k \geq 0$ . Assim temos que as expressões

$$\frac{(-q; q^2)_k}{(q; q^2)_{k+1}(q^4; q^4)_k}, \quad k \geq 0$$

geram as partições de  $n$  do tipo  $k$  com 3 cores relativas ao retângulo  $k(2k + 2)$ .

Agora fazemos uso da identidade de número 27 em Slater [18], p. 154

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{2n(n+1)}}{(q; q^2)_{n+1}(q^4; q^4)_n} = \frac{(-q; q^6)_{\infty}(-q^5; q^6)_{\infty}(q^6; q^6)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}$$

para completar a demonstração. □

Apresentamos abaixo as partições de  $n = 11$  referentes ao resultado anterior:

0(2.0 + 2) + (1 + ... + 1) <sub>2</sub>	11
1(2.1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (3 + 3) <sub>2</sub>	10 + 1
1(2.1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (3 + 1 + 1 + 1) <sub>2</sub>	8 + 2 + 1
1(2.1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (1 + 1) <sub>2</sub> + (4) <sub>3</sub>	7 + 4
1(2.1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (1 + ... + 1) <sub>2</sub>	7 + 2 + 2
1(2.1 + 2) + (3) <sub>2</sub> + (4) <sub>3</sub>	5 + 4 + 2
1(2.1 + 2) + (3 + 3 + 1) <sub>2</sub>	5 + 2 + 2 + 2
1(2.1 + 2) + (3 + 1 + 1 + 1 + 1) <sub>2</sub>	4 + 4 + 2 + 1
1(2.1 + 2) + (1 + ... + 1) <sub>2</sub> + (4) <sub>3</sub>	4 + 2 + 2 + 2 + 1
1(2.1 + 2) + (1 + ... + 1) <sub>2</sub>	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1

**Teorema 5.2** O número de partições de  $n$  do tipo  $k$  com 3 cores relativas ao retângulo  $k.(k + 2)$  da forma  $n = k.(k + 2) + \sum_{j=1}^{k+1} \varepsilon_j(2j - 1) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(4j - 2) + \sum_{j=1}^{2k} a_j(2j)$  onde  $\varepsilon_j, \lambda_j = 0$  ou 1 e  $a_j \in \mathbb{Z}_+$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares distintas ou partes pares  $\neq 0, \pm 4 \pmod{16}$ .

**Demonstração.** Seja  $k \geq 0$  e

$$n = k.(k + 2) + \sum_{j=1}^{k+1} \varepsilon_j(2j - 1) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(4j - 2) + \sum_{j=1}^{2k} a_j(2j)$$

onde  $\varepsilon_j, \lambda_j = 0$  ou  $1$  e  $a_j \in \mathbb{Z}_+$ . Reescrevemos  $n = k.(k + 2) + (\varepsilon_1.1 + \varepsilon_2.3 + \dots + \varepsilon_{k+1}(2k + 1))_1 + (\lambda_j.2 + \dots + \lambda_k(4k - 2))_2 + (a_1.2 + \dots + a_{2k}.(4k))_3$ . Vemos que as cores 1, 2 e 3 somente podem contribuir com partes ímpares distintas  $\leq 2k + 1$ , com partes pares distintas  $\leq 4k - 2$  e com partes pares  $\leq 4k$ , respectivamente. Portanto as expressões

$$\frac{(-q; q^2)_{k+1}(-q^2; q^4)_k}{(q^2; q^2)_{2k+1}}; k \geq 0$$

geram as partições de  $n$  do tipo  $k$  com 3 cores relativas ao retângulo  $k.(k + 2)$ .

Por outro lado conhecemos a igualdade

(identidade (70) de Slater [18], p. 159)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_{n+2}(-q; q^4)_n}{(q^2; q^2)_{2n+1}} q^{n(n+2)} &= \frac{(q^4; q^{16})_{\infty}(q^{12}; q^{16})_{\infty}(q^{16}; q^{16})_{\infty}(-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \\ &= (-q; q^2)_{\infty} \cdot \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq 0, \pm 2(\delta)}}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n}} \end{aligned}$$

que completa a demonstração. □

Para uma ilustração do teorema acima exibimos, a seguir, as partições do tipo  $k$  e as partições mencionadas no enunciado para o caso  $n = 10$ :

0.(0 + 2) + (2 + 2 + 2 + 2 + 2) <sub>3</sub>	10
1.(1 + 2) + (3) <sub>1</sub> + (2) <sub>2</sub> + (2) <sub>3</sub>	9 + 1
1.(1 + 2) + (3) <sub>1</sub> + (2 + 2) <sub>3</sub>	8 + 2
1.(1 + 2) + (3) <sub>1</sub> + (4) <sub>3</sub>	7 + 3
1.(1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (2) <sub>2</sub> + (2 + 2) <sub>3</sub>	7 + 2 + 1
1.(1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (2) <sub>2</sub> + (4) <sub>3</sub>	6 + 3 + 1
1.(1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (6) <sub>3</sub>	6 + 2 + 2
1.(1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (4 + 2) <sub>3</sub>	5 + 3 + 2
1.(1 + 2) + (1) <sub>1</sub> + (2 + 2 + 2) <sub>3</sub>	5 + 2 + 2 + 1
2.(2 + 2) + (2) <sub>2</sub>	3 + 2 + 2 + 2 + 1
2.(2 + 2) + (2) <sub>3</sub>	2 + ... + 2

Nos dois seguintes resultados não apresentamos os detalhes das demonstrações em virtude delas seguirem os mesmos passos dos dois anteriores. Indicamos apenas,

em cada caso, a identidade de Slater usada na demonstração.

**Teorema 5.3** O número de partições de  $n$  do tipo  $k$  com 2 cores relativas ao retângulo  $k.(3k)$  da forma  $n = 3k^2 + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j(2j) + \sum_{j=1}^{2k} a_j(2j)$  onde  $\varepsilon_j = 0$  ou  $1$  e  $a_j \in \mathbb{Z}_+$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares distintas  $\equiv \pm 3, 5(\text{mod}10)$  ou partes pares  $\equiv \pm 4, \pm 6(\text{mod}20)$

Uma demonstração deste teorema pode ser dada fazendo uso da equação 100 de Slater [18], p. 162 ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2; q^2)_n q^{3n^2}}{(q^2; q^2)_{2n}} = \frac{(q; q^{10})_{\infty} (q^9; q^{10})_{\infty} (q^8; q^{20})_{\infty} (q^{12}; q^{20})_{\infty} (q^{10}; q^{10})_{\infty} (-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}$$

**Teorema 5.4** O número de partições de  $n$  do tipo  $k$  com 2 cores relativas ao retângulo  $k.(k+2)$  da forma  $n = k(k+2) + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j(2j) + \sum_{j=1}^{2k+2} a_j.j$  onde  $\varepsilon_j = 0$  ou  $1$  e  $a_j \in \mathbb{Z}_+$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares ou partes pares  $\equiv \pm 2, \pm 8, \pm 12, \pm 14(\text{mod}32)$ .

A identidade (123) de Slater [18], p. 165

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2; q^2)_n q^{n(n+2)}}{(q)_{2n+2}} = \frac{(q^6; q^{16})_{\infty} (q^{10}; q^{16})_{\infty} (q^4; q^{32})_{\infty} (q^{28}; q^{32})_{\infty} (q^{16}; q^{16})_{\infty}}{(q)_{\infty}}$$

permite uma prova para o teorema acima.

Iniciamos a segunda parte deste capítulo introduzindo um novo conceito que permite a interpretação combinatória de diversas das identidades encontradas em Slater [18].

**Definição 5.2** Uma  $u$ -partição de  $n$   $(j, k)$ -colorida é uma partição de  $n$  em  $j + k$  partes tal que  $j$  partes são azuis e  $k$  partes são brancas onde estas últimas possuem exatamente  $u$  1's.

Denotaremos por  $n = a_1 + \dots + a_j \oplus b_1 + \dots + b_k$  uma  $u$ -partição de  $n$   $(j, k)$ -colorida onde os  $a_{\nu_s}$  são as partes azuis e os  $b_{m'_s}$  são as partes brancas.

Observamos que nos resultados combinatórios anteriormente apresentados não envolvendo cores, podemos utilizar este novo conceito particularizado para o caso  $k = 0$ . Assim “o número de partições de  $n$  em  $j$  partes” pode ser substituído por “o número de  $u$ -partições de  $n$   $(j, 0)$ -colorida”. É claro que neste caso o único valor possível a considerar para  $u$  é zero.

Nosso primeiro resultado envolvendo  $u$ -partição é o teorema abaixo.

**Teorema 5.5** O número de  $u$ -partições de  $n$   $(s, s)$ -colorida onde as partes azuis são  $\equiv (s+1)(\text{mod}2)$  e  $\geq s+1$ , as  $s-u$  partes brancas são pares distintos  $\leq 2s$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes  $\equiv 3, 4, 5(\text{mod}8)$ .

**Demonstração:** Consideremos uma  $u$ -partição  $n = a_1 + \dots + a_s \oplus b_1 + \dots + b_s$  conforme nossa hipótese. Subtraindo  $s+1$  de cada parte azul e tirando 1 de cada parte branca, obtemos uma partição de

$$n - s(s+1) - s$$

em no máximo  $s$  partes pares e exatamente  $s-u$  partes ímpares distintas  $\leq 2s-1$ . Assim vemos que uma  $u$ -partição como descrita acima é gerada por expressões da forma

$$\frac{q^{s(s+2) + \sum_{j=1}^{s-u} (2k_j - 1)}}{(q^2; q^2)_s} \quad \text{onde} \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{s-u} \leq s.$$

Portanto ao variarmos  $0 \leq u \leq s$  fica claro que o conjunto de todas  $u$ -partições de  $n$  é gerado por

$$\frac{(-q; q^2)_s}{(q^2; q^2)_s} q^{s(s+2)}$$

ou seja,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_s}{(q^2; q^2)_s} q^{s(s+2)}$$

é uma função geradora para nossas  $u$ -partições  $(s, s)$ -colorida.

Por outro lado é sabido que vale a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{n(n+2)}}{(q^2; q^2)_n} = \frac{(-q; q^2)_{\infty} (q; q^8)_{\infty} (q^7; q^8)_{\infty} (q^8; q^8)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}$$

(identidade (34) de Slater [18], p. 155)

cujo lado direito pode facilmente ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \frac{(-q; q^8)_{\infty} (-q^3; q^8)_{\infty} (-q^5; q^8)_{\infty} (-q^7; q^8)_{\infty} (q; q^8)_{\infty} (q^7; q^8)_{\infty} (q^8; q^8)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \\ = & \frac{(-q^3; q^8)_{\infty} (-q^5; q^8)_{\infty} (q^2; q^{16})_{\infty} (q^{14}; q^{16})_{\infty} (q^8; q^{16})_{\infty} (q^{16}; q^{16})_{\infty}}{(q^2; q^{16})_{\infty} (q^4; q^{16})_{\infty} (q^6; q^{16})_{\infty} (q^8; q^{16})_{\infty} (q^{10}; q^{16})_{\infty} (q^{12}; q^{16})_{\infty} (q^{14}; q^{16})_{\infty} (q^{16}; q^{16})_{\infty}} \\ = & \frac{(-q^3; q^8)_{\infty} (-q^5; q^8)_{\infty}}{(q^4; q^{16})_{\infty} (q^6; q^{16})_{\infty} (q^{10}; q^{16})_{\infty} (q^{12}; q^{16})_{\infty}} \\ = & \frac{(-q^3; q^8)_{\infty} (-q^5; q^8)_{\infty}}{(q^4; q^8)_{\infty} (-q^3; q^8)_{\infty} (q^3; q^8)_{\infty} (-q^5; q^8)_{\infty} (q^5; q^8)_{\infty}} \\ = & \frac{1}{(q^3; q^8)_{\infty} (q^4; q^8)_{\infty} (q^5; q^8)_{\infty}} \end{aligned}$$

e isto completa a demonstração.  $\square$

Acompanhando o teorema anterior segue a listagem das partições consideradas no enunciado, quando  $n = 16$ :

$14 \oplus 2$	$13 + 3$
$7 + 3 \oplus 4 + 2$	$12 + 4$
$5 + 5 \oplus 4 + 2$	$11 + 5$
$11 + 3 \oplus 1 + 1$	$5 + 5 + 3 + 3$
$9 + 5 \oplus 1 + 1$	$5 + 4 + 4 + 3$
$7 + 7 \oplus 1 + 1$	$4 + 4 + 4 + 4$
$4 + 4 + 4 \oplus 2 + 1 + 1$	$4 + 3 + 3 + 3 + 3$

Prosseguimos com

**Teorema 5.6** O número de  $u$ -partições de  $n$   $(2s + 1, s)$ -colorida tal que as partes azuis  $a_1, \dots, a_{2s+1}$  satisfazem  $a_j - a_{j+1} \geq 2$  para  $1 \leq j < s$  e as  $s - u$  partes

brancas são pares distintos  $\leq 2s$  é igual ao número de partições de  $n - 1$  em partes  $\neq 0, \pm 2 \pmod{12}$ .

**Demonstração:** Seja  $n = a_1 + \dots + a_{2s+1} \oplus b_1 + \dots + b_s$  uma  $u$ -partição de  $n$  satisfazendo o enunciado. Podemos subtrair  $1, 3, 5, \dots, 2s - 1$  de  $a_s, a_{s-1}, \dots, a_1$  respectivamente e tirar 1 de cada uma das partes restantes e daí obter uma partição de

$$n - (s^2 + 2s + 1)$$

em no máximo  $2s+1$  partes azuis e exatamente  $s-u$  partes brancas ímpares distintas  $\leq 2s - 1$ . Deste modo vemos que nossa  $u$ -partição é gerada por expressões da forma

$$\frac{q^{s(s+2)+1+\sum_{j=1}^{s-u}(2k_j-1)}}{(q)_{2s+1}} \quad \text{onde} \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{s-u} \leq s.$$

Assim, variando  $0 \leq u \leq s$  vemos que as  $u$ -partições de  $n$  são geradas por

$$\frac{(-q; q^2)_s}{(q)_{2s+1}} q^{s(s+2)+1}$$

e isto se traduz na afirmação de que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_s q^{s(s+2)+1}}{(q)_{2s+1}}$$

é uma função geradora para as nossas  $u$ -partições  $(2s + 1, s)$ -colorida.

Agora utilizando o resultado

(identidade (50) de Slater [18], p. 157)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n q^{n(n+2)}}{(q)_{2n+1}} = \frac{(q^2; q^{12})_{\infty} (q^{10}; q^{12})_{\infty} (q^{12}; q^{12})_{\infty}}{(q)_{\infty}}$$

podemos multiplicar ambos os lados por  $q$  e concluir o teorema. □

A ilustração do teorema acima está feita no que se segue para  $n = 8$ :

8	7
$4 + 1 + 1 \oplus 2$	$6 + 1$
$3 + 2 + 1 \oplus 2$	$5 + 1 + 1$
$2 + 2 + 2 \oplus 2$	$4 + 3$
$5 + 1 + 1 \oplus 1$	$4 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 1 \oplus 1$	$3 + 3 + 1 + 1$
$3 + 3 + 1 \oplus 1$	$3 + 1 + \cdots + 1$
$3 + 2 + 2 \oplus 1$	$1 + 1 + \cdots + 1 + 1$

Finalizamos esta seção com o seguinte resultado:

**Teorema 5.7** O número de  $u$ -partições de  $n$   $(2s, s)$ -colorida tal que as partes azuis são ímpares onde  $a_j - a_{j+1} \geq 2$  para  $1 \leq j < s$  e as  $s - u$  partes brancas são pares distintos  $\leq 2s$  é igual ao número de partições de  $n$  em partes ímpares distintas  $\not\equiv \pm 1 \pmod{14}$  ou partes pares  $\not\equiv 0, \pm 2, \pm 12, 14 \pmod{28}$ .

**Demonstração** Considere  $n = a_1 + \cdots + a_{2s} \oplus b_1 + \cdots + b_s$  uma  $u$ -partição de  $n$  com as condições descritas em nosso enunciado. Após subtrairmos  $1, 3, 5, \dots, 2s - 1$  de  $a_s, a_{s-1}, \dots, a_1$  respectivamente e  $1$  das demais partes, obtemos uma partição de

$$n - (s^2 + 2s)$$

em no máximo  $2s$  partes pares e exatamente  $s - u$  partes ímpares distintas  $\leq 2s - 1$ .

Logo as expressões

$$\frac{q^{s(s+2) + \sum_{j=1}^{s-u} (2k_j - 1)}}{(q^2; q^2)_{2s}} \quad \text{onde} \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{s-u} \leq s.$$

geram toda  $u$ -partição do tipo considerado, isto é,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_s q^{s(s+2)}}{(q^2; q^2)_{2s}}$$

é uma função geradora para nossas  $u$ -partições  $(2s, s)$ -colorida.

Como vale a igualdade

(identidade (118) de Slater [18], p. 165)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n} q^{n(n+2)} &= \frac{(-q; q^2)_{\infty} (q; q^{14})_{\infty} (q^{13}; q^{14})_{\infty} (q^{12}; q^{28})_{\infty} (q^{16}; q^{28})_{\infty} (q^{14}; q^{14})_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \\ &= \prod_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm 1(7)}}^{\infty} (1 + q^{2n-1}) \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm 1, \pm 6, 7(14)}}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - q^{2n}} \right) \end{aligned}$$

concluimos a demonstração. □

Abaixo apresentamos as  $u$ -partições e partições de  $n = 15$  que ilustram o resultado anterior:

13 + 1 $\oplus$ 1	11 + 4
11 + 3 $\oplus$ 1	10 + 5
9 + 5 $\oplus$ 1	9 + 6
7 + 7 $\oplus$ 1	8 + 7
9 + 1 + 1 + 1 $\oplus$ 2 + 1	8 + 4 + 3
7 + 3 + 1 + 1 $\oplus$ 2 + 1	7 + 5 + 3
5 + 3 + 3 + 1 $\oplus$ 2 + 1	7 + 4 + 4
7 + 1 + 1 + 1 $\oplus$ 4 + 1	6 + 6 + 3
5 + 3 + 1 + 1 $\oplus$ 4 + 1	6 + 5 + 4
5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 $\oplus$ 1 + 1 + 1	4 + 4 + 4 + 3

## CAPÍTULO 6

### Nova interpretação combinatória para as identidades de Rogers-Ramanujan

Nosso objetivo neste capítulo é a obtenção de interpretações combinatórias, distintas daquelas usuais que apresentamos no capítulo 4 e da apresentada por Bressoud em Andrews [6], p. 59, para as duas famosas identidades de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})} \quad (6.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n-2})(1 - q^{5n-3})} \quad (6.2)$$

Para atingir este objetivo empregamos uma técnica de construção de conjuntos de partições a partir de identidades conhecidas.

Destacamos aqui, que este método também se mostrou eficaz quando aplicado a outras identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

Utilizamos as seguintes identidades

(identidade (16) de Slater [18], p. 153)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} &= \frac{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty} (q^5; q^5)_{\infty} (-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} & (6.3) \\ &= \frac{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty} (q^5; q^5)_{\infty}}{(q)_{\infty}} \cdot \frac{(-q; q^2)_{\infty}}{(-q)_{\infty}} \\ &= \frac{1}{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty}} \cdot \frac{1}{(-q^2; q^2)_{\infty}} \end{aligned}$$

e

(identidade (20) de Slater [18], p. 154)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^4; q^4)_n} = \frac{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty} (q^5; q^5)_{\infty} (-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(q^2; q^5)_\infty (q^3; q^5)_\infty (q^5; q^5)_\infty \cdot (-q; q^2)_\infty}{(q)_\infty \cdot (-q)_\infty} \\
&= \frac{1}{(q; q^5)_\infty (q^4; q^5)_\infty} \cdot \frac{1}{(-q^2; q^2)_\infty}
\end{aligned}$$

Assim vemos que estas últimas identidades estão relacionadas com as de Rogers-Ramanujan pelas relações

$$\begin{aligned}
(-q^2, q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^4; q^4)_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} \\
(-q^2, q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Associadas às identidades (6.3) e (6.4) definimos para  $i = 1, 2$

$$F_i(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2+(4-2i)n}}{(q^4; q^4)_n} \tag{6.6}$$

Temos que estas funções satisfazem as equações funcionais

$$\begin{aligned}
F_1(z) - F_1(zq^4) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zq^4)^n q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} (1 - q^{4n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} (1 - q^{4n}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_{n-1}} \stackrel{n \mapsto n+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1} q^{n^2+4n+3}}{(q^4; q^4)_n} \\
&= zq^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zq^2)^n q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} \quad \text{isto é,} \\
F_1(z) &= zq^3 F_1(zq^2) + F_1(zq^4)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

e

$$F_1(z) = F_2(zq^2) \tag{6.8}$$

As expressões

$$\frac{z^n q^{n^2+(4-2i)n}}{(q^4; q^4)_n}$$

que aparecem em (6.6) serão vistas como funções geradoras para partições de  $m$  em  $n$  partes. O desenvolvimento destas expressões nos dá parcelas do tipo  $z^n q^m$ . Assim vemos que o expoente de  $z$  indicará o número de partes onde as partes satisfazem algumas propriedades. Para determinar estas propriedades apresentamos abaixo a construção de dois conjuntos de partições,  $A$  e  $B$ , utilizando (6.7) e (6.8). Os conjuntos  $A$  e  $B$  são respectivamente associados às funções  $F_1(z)$  e  $F_2(z)$ . Eles são formados pelas partições que são determinadas pela interpretação que fazemos de (6.6) e das equações funcionais (6.7) e (6.8).

Inicialmente fazemos três importantes observações:

**Observação (1):** a igualdade (6.8) nos diz que se encontrarmos qualquer um dos dois conjuntos  $A$  ou  $B$  o outro fica automaticamente determinado, já que  $F_1(z) = F_2(zq^2)$  indica que as partições de  $A$  podem ser obtidas das partições de  $B$  adicionando-se 2 a cada parte destas últimas.

**Observação (2):** a igualdade (6.7) implica que o conjunto  $A$  pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos:  $A = A_1 \dot{\cup} A_2$  onde nas partições de  $A_1$  existe uma parte igual a 3 e as demais partes são obtidas das partições do próprio  $A$  adicionando-se 2 a cada parte e  $A_2$  é composto daquelas partições que podem ser obtidas de partições do próprio  $A$  adicionando-se 4 a cada parte.

**Observação (3):** dado um elemento  $\pi = a_1 + \dots + a_n \in A$ , pela observação anterior existem algumas operações que podem ser realizadas no conjunto  $A$ : se  $\pi \in A_2$  então podemos subtrair ou adicionar 4 a cada parte de  $\pi$  de modo que o elemento resultante continue sendo um elemento de  $A$ . Se  $\pi \in A_1$  então ao adicionarmos 4 a cada parte de  $\pi$ , o novo elemento obtido ainda pertence ao conjunto  $A$ . Sendo, neste caso,

$\pi = a_1 + \dots + a_{n-1} + 3$ , a partição obtida de  $\pi$  retirando-se a parte igual a 3 e subtraindo 2 de cada uma das partes restantes, a saber,  $(a_1 - 2) + \dots + (a_{n-1} - 2)$  também pertence a  $A$ .

### Construção do Conjunto $A$

Seja  $\pi = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  uma partição em  $A$ .

Pela observação (1) temos que  $a_j \geq 2$  para  $1 \leq j \leq n$ . A observação (2) implica que ou  $a_n = 3$  e  $a_{n-1} \geq 4$  já que  $F_1(zq^2) = F_2(zq^4)$  ou  $a_n \geq 6$  pois  $F_1(zq^4) = F_2(zq^6)$ .

Agora, com estas informações, temos que  $a_j \geq 3$  para  $1 \leq j \leq n$ . Logo se  $\pi \in A_1$  então  $a_n = 3$  e  $a_{n-1} \geq 5$  ou se  $\pi \in A_2$  então  $a_n \geq 7$ .

Completaremos nossa construção por meio de três lemas:

**Lema 6.1.** Se  $\pi = a_1 + a_2 + \dots + a_n \in A$  então  $a_j \equiv 1 \pmod{2}$  para  $1 \leq j \leq n$ .

**Demonstração:** Suponhamos que exista  $j_0$  tal que  $a_{j_0}$  seja par. Pela observação (3), após um número finito de subtrações de 2's ou 4's de cada parte, podemos supor  $j_0 = n$  ou  $a_n = 3$  e  $j_0 = n-1$ . No primeiro caso temos  $a_n$  par e após um número finito de subtrações de 4's de cada parte teríamos que  $a'_1 + a'_2 + \dots + 8$  ou  $a''_1 + a''_2 + \dots + 10 \in A$ , o que é um absurdo pois isto implicaria que  $(a'_1 - 4) + (a'_2 - 4) + \dots + 4$  ou  $(a''_1 - 4) + (a''_2 - 4) + \dots + 6 \in A$  e nenhuma destas partições está em  $A_1 \dot{\sim} A_2$ .

No segundo caso  $\pi \in A_1$  daí  $(a_1 - 2) + \dots + (a_{n-1} - 2) \in A$  com  $(a_{n-1} - 2)$  par. Agora aplicamos o mesmo argumento usado no caso anterior para concluir a demonstração.  $\square$

O lema seguinte caracteriza a classe de equivalência (módulo 4) à qual a menor parte de uma partição em  $A$  pertence.

**Lema 6.2.** Se  $\pi = a_1 + a_2 + \dots + a_n \in A$  então  $a_n \equiv 3 \pmod{4}$ .

**Demonstração:** Pelo Lema (6.1) sabemos que as partes de uma partição em  $A$ , sendo ímpares, são  $\equiv 1$  ou  $3 \pmod{4}$ . Suponhamos  $a_n \equiv 1 \pmod{4}$ . Pela observação (3), este elemento  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in A_2$ , logo após um número finito de subtrações de 4's de cada parte, concluímos que  $a'_1 + a'_2 + \dots + 9 \in A$  o que é absurdo pois este fato implicaria que  $(a'_1 - 4) + (a'_2 - 4) + \dots + 5 \in A$  e esta partição não pertence a  $A_1 \dot{\sim} A_2$ .  $\square$

O seguinte lema afirma que partes consecutivas de uma partição em  $A$  são incongruentes módulo 4.

**Lema 6.3.** Se  $\pi = a_1 + a_2 + \dots + a_n \in A$  então  $a_j \not\equiv a_{j+1} \pmod{4}$  para  $1 \leq j < n$ .

**Demonstração:** Suponhamos que exista  $j$  para o qual  $a_j \equiv a_{j+1} \pmod{4}$ . Seja  $j_0$  o maior índice tal que  $a_{j_0} \equiv a_{j_0+1} \pmod{4}$ .

Pelo Lema (6.2) e observação (3) podemos supor, após um número finito de subtrações de 4's de cada parte, se necessário, que

$$\pi = a_1 + a_2 + \dots + a_{j_0} + a_{j_0+1} + \dots + a_{n-1} + 3.$$

Se  $j_0 = n - 1$  então  $a_{n-1} = 3 + 4k$  e pela observação (2) temos que  $(a_1 - 2) + (a_2 - 2) + \dots + (1 + 4k) \in A$ , o que contraria o Lema (6.2).

Se  $j_0 < n - 1$  então novamente aplicando a observação (3) vale que  $\pi' = (a_1 - 2) + \dots + (a_{j_0} - 2) + (a_{j_0+1} - 2) + \dots + (a_{n-1} - 2) \in A$ . Para este  $\pi'$  também podemos supor, como foi feito para  $\pi$ , que

$$\pi' = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{j_0} + a'_{j_0+1} + \dots + 3.$$

Assim por repetição do argumento acima podemos supor, após um número finito de subtrações de 2's ou 4's de cada parte, que

$$\pi' = a'_1 + a'_2 + \dots + (3 + 4\ell) + 3,$$

ou seja,  $j_0 = n' - 1$ , e vimos acima que este fato nos conduz a uma contradição. Portanto nossa prova está completa.  $\square$

Como as propriedades obtidas nos três lemas anteriores determinam a classe módulo 4 à qual cada parte, de uma partição em  $A$ , pertence, a única restrição que devemos analisar para completar a caracterização do conjunto  $A$  é se haveria exigência quanto a diferença entre as partes. Mas pela observação (3), toda partição da forma

$$(2n + 1 + 4k_1) + (2n - 1 + 4k_2) + \cdots + (5 + 4k_{n-1}) + (3 + 4k_n)$$

pertence a nosso conjunto  $A$ , independentemente dos valores dos  $k_j$ 's.

Portanto os resultados dos lemas acima, de fato, definem univocamente o conjunto  $A$ . Resumimos no seguinte teorema as propriedades que caracterizam o conjunto  $A$ .

**Teorema 6.1:** Se uma partição  $\pi$  de um inteiro  $m$ ,  $\pi = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in A$  então

$$\begin{aligned} a_j &\equiv 1 \pmod{2} && \text{para } 1 \leq j \leq n \\ a_n &\equiv 3 \pmod{4} && \text{e} \\ a_j &\not\equiv a_{j+1} \pmod{4} && \text{para } 1 \leq j < n. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Pela observação (1), a caracterização do conjunto  $B$  pode ser deduzida conhecendo-se os elementos do conjunto  $A$ , pois já observamos que  $a_1 + \cdots + a_s \in A$  se, e somente se,  $(a_1 - 2) + \cdots + (a_s - 2) \in B$ . Portanto podemos caracterizar o conjunto  $B$  no seguinte resultado.

**Teorema 6.2:** Se uma partição  $\pi$  de um inteiro  $m$ ,  $\pi = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in B$  então

$$\begin{aligned} a_j &\equiv 1 \pmod{2} && \text{para } 1 \leq j \leq n \\ a_n &\equiv 1 \pmod{4} && \text{e} \\ a_j &\not\equiv a_{j+1} \pmod{4} && \text{para } 1 \leq j < n. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Apresentamos na tabela abaixo, todas as representações de  $m = 35$  e de  $m = 40$  pertencentes ao conjunto  $A$ :

35	37 + 3
27 + 5 + 3	33 + 7
23 + 9 + 3	29 + 11
19 + 13 + 3	25 + 15
19 + 9 + 7	21 + 19
15 + 13 + 7	25 + 7 + 5 + 3
11 + 9 + 7 + 5 + 3	21 + 11 + 5 + 3
	17 + 15 + 5 + 3
	17 + 11 + 9 + 3
	13 + 11 + 9 + 7

Observando, com o auxílio do software “Axiom”, o desenvolvimento em série de potências de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+2)}}{(q^4; q^4)_n}$$

foi possível a formulação de uma conjectura que nos dá a caracterização dos inteiros  $m$  que possuem representação em  $A$ . A prova desta conjectura está feita no seguinte teorema, onde denotamos por  $p_A(m)$  o número de partições de  $m$  pertencentes a  $A$ .

**Teorema 6.3:** Seja  $m \in \mathbb{Z}_+^*$ . Então  $p_A(m) = 0$  se, e somente se  $m = 4$  ou  $m \not\equiv 0, 3 \pmod{4}$ .

**Demonstração:** Seja  $\pi = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in A$  uma partição de  $m$ .

Consideremos os dois casos:

Caso  $n = 2t$ . Como pelo Teorema (6.1)  $a_{2t} \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $a_k$  é ímpar para todo  $1 \leq k \leq n$  e  $a_k \not\equiv a_{k+1} \pmod{4}$ , temos que

$$\begin{aligned} a_{2j-1} &= 1 + 4k_{2j-1}, \quad k_{2j-1} > 0 \quad \text{e} \\ a_{2j} &= 3 + 4k_{2j}, \quad k_{2j} \geq 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq t, \end{aligned}$$

logo

$$m = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2t}$$

$$\begin{aligned}
&= t \cdot 1 + 4k' + t \cdot 3 + 4 \cdot k'' \\
&\quad \text{(onde } k' = \sum_{j=1}^t k_{2j-1} \text{ e } k'' = \sum_{j=1}^t k_{2j}) \\
&= t(1 + 3) + 4(k' + k'') \\
&\equiv 0 \pmod{4}.
\end{aligned}$$

Caso  $n = 2t + 1$ . Neste caso

$$\begin{aligned}
a_{2j+1} &= 3 + 4k_{2j-1}, \quad k_{2j+1} \text{ para } 0 \leq j \leq t & \text{ e} \\
a_{2j} &= 1 + 4k_{2j}, \quad k_{2j} > 0 \text{ para } 1 \leq j \leq t
\end{aligned}$$

e, efetuando de modo similar ao caso anterior, obtemos que

$$m \equiv 3 \pmod{4}.$$

É fácil ver que  $p_A(4) = 0$ .

Agora resta mostrar que  $p_A(m) \neq 0$  quando  $m \equiv 0$  ou  $3 \pmod{4}$  e  $m \neq 4$ . Para  $m \equiv 3 \pmod{4}$  a partição  $\pi = m \in A$  e se  $m \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $m > 4$  então

$$\begin{aligned}
m &= 4k \quad \text{com } k \geq 2 \\
&= (4k - 3) + 3 \in A,
\end{aligned}$$

pois  $4k - 3 \geq 5$  e  $4k - 3 \equiv 1 \pmod{4}$ .

Portanto a demonstração está completa.  $\square$

Também para o conjunto  $B$  onde  $p_B(m)$  denota o número de partições de  $m$  pertencentes a  $B$ , temos

**Teorema 6.4:** Para todo  $m \in \mathbb{Z}_+^*$  temos que  $p_B(m) = 0$  se, e somente se,  $m \not\equiv 0, 1 \pmod{4}$ .

**Demonstração:** Seja  $\pi = a_1 + \dots + a_n \in B$  uma partição de  $m$ .

Existem dois casos a considerar.

Caso  $n = 2t$ . Pelo Teorema (6.2) temos que cada  $a_j$  é ímpar,  $a_{2t} \equiv 1 \pmod{4}$  e partes consecutivas são incongruentes módulo 4. Assim, temos

$$\begin{aligned} a_{2j-1} &= 3 + 4k_{2j-1}, \quad k_{2j-1} \geq 0 \\ a_{2j} &= 1 + 4k_{2j}, \quad k_{2j} \geq 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq t, \end{aligned}$$

disto segue que

$$\begin{aligned} m &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2t} \\ &= t \cdot 3 + 4k' + t \cdot 1 + 4k'' \\ &\quad \left( \text{onde } k' = \sum_{j=1}^t k_{2j-1} \quad \text{e} \quad k'' = \sum_{j=1}^t k_{2j} \right) \\ &= t(3 + 2) + 4(k' + k'') \\ &\equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Caso  $n = 2t + 1$ . Neste caso temos que

$$\begin{aligned} a_{2j+1} &= 1 + 4k_{2j+1}, \quad k_{2j+1} \geq 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq t \quad \text{e} \\ a_{2j} &= 3 + 4k_{2j}, \quad k_{2j} \geq 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq t \end{aligned}$$

disto concluímos, de modo análogo ao anterior, que

$$m \equiv 1 \pmod{4}.$$

Por outro lado, se  $m \equiv 0 \pmod{4}$  então  $m = 4k$  com  $k \geq 1$  e a partição de  $m$

$$(4k - 1) + 1 \in B$$

isto é,  $p_B(m) \neq 0$  ou se  $m \equiv 1 \pmod{4}$ , ou seja,  $m = 1 + 4\ell$  então a partição  $\pi = m$  de  $m$  é um elemento de  $B$  o que implica em  $p_B(m) \neq 0$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Os Teoremas (6.1) e (6.2) nos permitiram demonstrar os seguintes resultados combinatórios:

**Teorema 6.5:** O número de partições de  $m = a_1 + \dots + a_s$  tal que  $a_j \equiv (s+2) \pmod{4}$  e  $a_j \geq s+2$  para  $1 \leq j \leq s$  é igual ao número de partições de  $m$  satisfazendo às condições dadas em (6.9).

**Demonstração:** Seja  $m = a_1 + \dots + a_s$  com  $a_j \geq s+2$  e  $a_j \equiv (s+2) \pmod{4}$  para todo  $j$ . Subtraindo-se  $s+2$  de cada parte, obtemos uma partição de  $m - s(s+2)$  em no máximo  $s$  partes  $\equiv 0 \pmod{4}$ . Isto nos diz que as expressões

$$\frac{q^{s(s+2)}}{(q^4; q^4)_s}$$

geram todas as partições do tipo considerado.

Portanto

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{s(s+2)}}{(q^4; q^4)_s}$$

é uma função geradora para o número de partições.

Por outro lado olhando para

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n(n+2)}}{(q^4; q^4)_n}$$

temos pelo Teorema (6.1), para cada  $n$ , que a parcela

$$\frac{z^n q^{n(n+2)}}{(q^4; q^4)_n} = z^n (\dots + q^{a_1 + \dots + a_n} + \dots)$$

apresenta, nos expoentes de  $q$ , todos os elementos do conjunto  $A$  com exatamente  $n$  partes.

Portanto fixando  $m \in \mathbb{Z}_+^*$  e pondo  $z = 1$  em  $F_1(z)$ , teremos como coeficiente de  $q^m$  o número total de partições de  $m$  em  $A$ , sem restrição quanto ao número de partes. Isto é, este coeficiente é exatamente o número de partições de  $m$  satisfazendo

às condições de (6.9). Deste modo, vemos que este número é o coeficiente de  $q^m$  no desenvolvimento de

$$F_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+2)}}{(q^4; q^4)_n}$$

Assim podemos afirmar que  $F_1(1)$  é uma função geradora para as partições satisfazendo às condições de (6.9) e isto completa a demonstração.  $\square$

Ilustramos o resultado anterior para o caso  $n = 36$ . Na coluna da direita estão as partições satisfazendo às condições de (6.9):

32 + 4	33 + 3
28 + 8	29 + 7
24 + 12	25 + 11
20 + 16	21 + 15
18 + 6 + 6 + 6	21 + 7 + 5 + 3
14 + 10 + 6 + 6	17 + 11 + 5 + 3
10 + 10 + 10 + 6	13 + 11 + 9 + 3

Enunciaremos a seguir, sem demonstração, um teorema cuja demonstração segue a partir do Teorema (6.2) de forma similar ao que fizemos no Teorema (6.5).

**Teorema 6.6:** O número de partições de  $m = a_1 + \dots + a_s$  tal que  $a_j \equiv s \pmod{4}$  e  $a_j \geq s$  para  $1 \leq j \leq s$  é igual ao número de partições de  $m$  que satisfazem às condições dadas em (6.10).

Vamos agora reescrever as equações de números 16 e 20 de Slater [18], que se encontram no início deste capítulo.

Os lados direitos daquelas identidades (6.3) e (6.4) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}
 & \frac{(q; q^{10})_{\infty} \cdot (q^6; q^{10})_{\infty} \cdot (q^4; q^{10})_{\infty} \cdot (q^9; q^{10})_{\infty} \cdot (q^5; q^{10})_{\infty} \cdot (q^{10}; q^{10})_{\infty} \cdot (-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \\
 = & \frac{(q^2; q^{20})_{\infty} \cdot (q^6; q^{20})_{\infty} \cdot (q^{16}; q^{20})_{\infty} \cdot (q^4; q^{20})_{\infty} \cdot (q^{14}; q^{20})_{\infty} \cdot (q^{18}; q^{20})_{\infty} \cdot (q^{10}; q^{20})_{\infty} \cdot (q^{10}; q^{20})_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (q^{20}; q^{20})_\infty \cdot (-q^3; q^{10})_\infty (-q^7; q^{10})_\infty \\
& (\text{pois } (-q; q^2)_\infty = (-q; q^{10})_\infty (-q^3; q^{10})_\infty (-q^5; q^{10})_\infty (-q^7; q^{10})_\infty (-q^9; q^{10})_\infty) \\
= & \frac{(-q^3; q^{10})_\infty (-q^7; q^{10})_\infty}{(q^8; q^{20})_\infty (q^{12}; q^{20})_\infty} \cdot (q^{10}; q^{20})_\infty
\end{aligned}$$

e

$$\frac{(-q; q^{10})_\infty (-q^9; q^{10})_\infty}{(q^4; q^{20})_\infty (q^{16}; q^{20})_\infty} \cdot (q^{10}; q^{20})_\infty$$

respectivamente.

Assim temos as igualdades

$$\frac{1}{(q^{10}; q^{20})_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} = \frac{(-q^3; q^{10})_\infty (-q^7; q^{10})_\infty}{(q^8; q^{20})_\infty (q^{12}; q^{20})_\infty} \quad (6.11)$$

e

$$\frac{1}{(q^{10}; q^{20})_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^4; q^4)_n} = \frac{(-q; q^{10})_\infty (-q^9; q^{10})_\infty}{(q^4; q^{20})_\infty (q^{16}; q^{20})_\infty} \quad (6.12)$$

respectivamente.

Consideremos os conjuntos de partições

$C_1 := \{b_1 + \dots + b_r \mid \text{as partes pares são } \equiv 10 \pmod{20} \text{ e as partes ímpares, vistas separadamente, satisfazem (6.9)}\}$

e

$C_2 := \{b_1 + \dots + b_r \mid \text{as partes pares são } \equiv 10 \pmod{20} \text{ e as partes ímpares, vistas separadamente, satisfazem (6.10)}\}$

Deste modo podemos obter os seguintes teoremas, cujas demonstrações seguem das igualdades (6.11) e (6.12).

**Teorema 6.7:** O número de partições de  $m$  em  $C_1$  é igual ao número de partições de  $m$  em partes ímpares distintas  $\equiv \pm 3 \pmod{10}$  ou partes pares  $\equiv \pm 8 \pmod{20}$ .

Apresentamos abaixo uma ilustração deste teorema para  $n = 31$ :

31	28 + 3
23 + 5 + 3	23 + 8
20 + 11	13 + 8 + 7 + 3
19 + 9 + 3	12 + 12 + 7
15 + 13 + 3	12 + 8 + 8 + 3
7 + 9 + 15	8 + 8 + 8 + 7

**Teorema 6.8:** O número de partições de  $m$  em  $C_2$  é igual ao número de partições de  $m$  em partes ímpares distintas  $\equiv \pm 1 \pmod{10}$  ou partes pares  $\equiv \pm 4 \pmod{20}$ .

Exibimos a seguir uma ilustração do Teorema (6.8) no caso  $n = 25$ :

25	24 + 1
21 + 3 + 1	21 + 4
20 + 5	11 + 9 + 4
17 + 7 + 1	16 + 9
13 + 11 + 1	16 + 4 + 4 + 1
13 + 7 + 5	9 + 4 + 4 + 4 + 4
9 + 7 + 5 + 3 + 1	4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1

### Aplicação para as Identidades de Rogers-Ramanujan

Nesta seção vamos apresentar nossa principal aplicação dos Teoremas (6.1) e (6.2), a saber, a obtenção de uma nova interpretação combinatória para as duas identidades de Rogers-Ramanujan.

Primeiramente, como já observamos no início deste capítulo, valem as igualdades:

$$(-q^2; q^2)_\infty \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^4; q^4)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} \quad (6.13)$$

e

$$(-q^2; q^2)_\infty \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} \quad (6.14)$$

que podem ser deduzidas diretamente das equações 14 e 16 no caso da primeira igualdade e das equações 18 e 20 no caso da segunda; todas em Slater [18], p. 153 e 154.

Vamos considerar dois novos conjuntos de partições:

$X_0 := \{b_1 + \dots + b_r \mid \text{as partes são distintas e as partes ímpares, vistas separadamente, satisfazem (6.10)}\}$

$X_1 := \{b_1 + \dots + b_r \mid \text{as partes são distintas e as partes ímpares, vistas separadamente, satisfazem (6.9)}\}$

Antes de enunciarmos nosso último resultado, faremos algumas observações sobre a igualdade (6.13) (considerações similares podem ser feitas para a igualdade (6.14)): a identificação do conjunto  $B$  dada no Teorema (6.2) nos diz que o coeficiente de  $q^m$  no desenvolvimento de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^4; q^4)_n} = 1 + q + q^{3+1} + q^5 + \dots$$

é o número de partições de  $m$  satisfazendo às condições dadas em (6.10). Portanto o coeficiente de  $q^{m'}$  (para  $m' = m + \sum \{\text{pares distintos}\}$ ) no desenvolvimento do lado esquerdo da igualdade (6.13), isto é, em

$$(1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6) \cdot \dots \cdot (1 + q + q^{3+1} + q^5 + \dots),$$

pode ser interpretado como o número de partições de  $m'$  pertencentes a  $X_0$ .

Assim segue das igualdades (6.13) e (6.14) o seguinte teorema.

**Teorema 6.9:** O número de partições de  $m$  pertencentes a  $X_i$  é igual ao número de partições de  $m$  em partes  $\equiv \pm(1+i)(\text{mod}5)$  ( $i = 0$  ou  $1$  respectivamente).

Nos exemplos abaixo ilustramos o último teorema. Para  $i = 0$ , apresentamos os elementos referentes a

$$n = 11$$

Partições em $X_0$	Partições em partes $\equiv \pm 1 \pmod{5}$
9 + 2	11
8 + 2 + 1	9 + 1 + 1
7 + 4 + 1	6 + 4 + 1
6 + 5	6 + 1 + $\dots$ + 1
6 + 4 + 1	4 + 4 + 1 + 1 + 1
5 + 4 + 2	4 + 1 + $\dots$ + 1
5 + 3 + 2 + 1	1 + 1 + $\dots$ + 1 + 1,

e para  $i = 1$  os elementos associados a

$$n = 13$$

Partições em $X_1$	Partições em partes $\equiv \pm 2 \pmod{5}$
11 + 2	13
10 + 3	8 + 3 + 2
8 + 3 + 2	7 + 3 + 3
7 + 6	7 + 2 + 2 + 2
7 + 4 + 2	3 + 3 + 3 + 2 + 2
6 + 4 + 3	3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2

## Referências

- [1] Andrews, G. E., The theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1976.
- [2] ———. Partitions: yesterday and today, New Zealand Math. Soc., Wellington, 1979.
- [3] ———. Multiple series Rogers-Ramanujan type identities, Pacific J. Math. 114 (1984), 267-283.
- [4] ———. Combinatorics and Ramanujan's "lost" notebook, London Math. Soc. Lecture Note Series, N<sup>o</sup> 103, Cambridge Univ. Press, London 1985.
- [5] ———. The fifth and seventh order mock theta functions, Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986) 113-134.
- [6] ———.  $q$ -series: their development and application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra; CBMS Regional Conf. Ser. in Math. n<sup>o</sup> 66, Am. Math. Soc. Providence, R.I., 1986.
- [7] ———. Number Theory, Dover Publications, Inc. New York, 1994.
- [8] Andrews, G.E., Santos, J.P.O., Rogers-Ramanujan Type Identities for Partitions with Attached Odd Parts. The Ramanujan Journal, vol. 1, p. 91-99 (1997).
- [9] Bailey, W. N., Series of hypergeometric type wich are infinite in both directions, Quart. J. Math. (Oxford), 7, 105-115, 1936.
- [10] Bromwich, T. J. P.A., An introduction to the theory of infinite series, Macmillan, New York, 1965.
- [11] Fine, N. J., Basic hypergeometric series and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 27, Am. Math. Soc. Providence, 1988.

- [12] Gasper, G. and Rahman. M., Basic hypergeometric series, Encyclopedia of Mathematics and Applications, vol. 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [13] Hirschhorn, M.D., Some partition theorems of the Rogers-Ramanujan type, J. Combinatorial theory, Series A, vol. 27, n<sup>o</sup> 1. 33-37 (1979).
- [14] MacMahon, P.A., Combinatory analysis, Chelsea-Publishing Company, 1960.
- [15] Santos, J. P. O., Computer Algebra and identities of the Rogers-Ramanujan type, Ph. D. Thesis, Pennsylvania State University, 1991.
- [16] Santos, J. P. O. e Mondek, P., Sobre a obtenção e demonstração combinatória de novas identidades do tipo Rogers-Ramanujan, XIX CNMAC - Goiânia (1996).
- [17] Slater, L. J., A new proof of Rogers' transformations of infinite series, Proc. London Math. Soc. (2) 53, 460-475, 1951.
- [18] ————. Further identities of the Rogers-Ramanujan type, Proc. London Math. Soc. (2) 54, 147-167, 1952.
- [19] ————. Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.