

TEOREMA

DE

THOM-PONTRJAGIN

CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. José Carlos de Souza Kihl.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

Campinas, fevereiro de 1979.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À meus pais,

aos meus irmãos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I: Variedades Diferenciáveis

1.1	Conceitos básicos	1
1.2	Transversalidade	9

CAPÍTULO II: Fibrados Vetoriais e Aproximação

2.1	Fibrados Vetoriais	11
2.2	Fibrado Tangente	17
2.3	Fibrado Normal	18
2.4	Vizinhança Tubular	19
2.5	Fibrado Universal	21
2.6	Aproximação	22

CAPÍTULO III: O Teorema de Thom-Pontrjagin

34

BIBLIOGRAFIA

49

INTRODUÇÃO

A noção de variedades cobordantes foi dada pela primeira vez por [3] (Henry Poincaré: Analysis Situs, Journal de l'École Polytechnique, 1 (1895), 1-121), que a usou numa tentativa para construir a teoria de homologia para variedades diferenciáveis. Seu conceito de homologia de variedades coincide com o conceito de cobordismo usado hoje. Diremos que duas variedades diferenciáveis compactas M_1 e M_2 , ambas de dimensão m , estão na mesma classe de cobordismo se existe uma variedade diferenciável compacta W de dimensão $m+1$ com bordo ∂W difeomorfa à união disjunta de M_1 e M_2 . Veremos no capítulo III que cobordismo é uma relação de equivalência.

Como a coleção de todas as variedades diferenciáveis não é um conjunto, consideraremos então somente variedades diferenciáveis compactas que podem ser mergulhadas em $\mathbb{R}^n$, para algum n . Nos restringimos às variedades compactas para obtermos uma teoria de cobordismo não trivial, pois qualquer variedade fechada M é bordo.

O conjunto de classes de cobordismo de tais variedades é conhecido como o anel de cobordismo não orientado n . A soma é obtida da união disjunta de representativos, e o produto é induzido pelo produto cartesiano dos mesmos.

A estrutura do anel de cobordismo não orientado foi completamente determinada por Thom no seu famoso artigo [5] : "Quelques propriétés globales des variétés différentiables".

Estaremos interessados em apresentar e demonstrar o teorema de Thom-Pontrjagin, ou seja: "O grupo de cobordismo η_m é isomorfo ao grupo de homotopia $\pi_{n+k}(T_k)$, para $k > n+2$, onde T_k é o espaço de Thom do fibrado Universal γ_m^k ".

Com este propósito iniciamos o estudo, incluindo no capítulo I alguns conceitos e resultados básicos: definimos variedade diferenciável, apresentamos uma noção de diferenciabilidade de funções entre variedades, os conceitos de valores regulares, partição da unidade e transversalidade.

O capítulo II é uma introdução à teoria de fibrados vetoriais, com ênfase nos fibrados tangente e normal de uma variedade. Apresentamos também alguns teoremas de aproximação.

Os conceitos apresentados nos capítulos I e II nos fornecem os elementos para desenvolver o capítulo III, onde estudamos os grupos de cobordismo η_m , e finalizamos com o Teorema de Thom-Pontrjagin citado anteriormente.

Quero externar aqui meu agradecimento ao Prof.Dr. José Carlos de Souza Kiihl pela proposição do trabalho, pela orientação e pelo incentivo. Agradeço ainda ao Prof. Dr. Mauro Bianchini que me iniciou no campo das pesquisas matemáticas.

Finalmente, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), que concedeu bolsas de estudo, possibilitando assim a realização deste trabalho.

CAPÍTULO I

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

O objetivo deste capítulo é definir certos conceitos básicos como variedade diferenciável, aplicação diferenciável, imersão, mergulho, difeomorfismo, partição diferenciável da unidade e transversalidade. Apresentamos também alguns resultados que envolvem os tópicos acima, e suas demonstrações podem ser encontradas em [1] (Milnor).

Consideramos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ como o espaço de todas sequências infinitas de números reais, $x=(x^1, x^2, \dots)$, com $x^i=0$ para $i>m$; o semi-espaço euclidiano H^m é o subconjunto de $\mathbb{R}^m$ para o qual $x^m \geq 0$.

Seja $\|x\| = \max |x^i|$. $C^m(r)$ denota o conjunto dos x tais que $\|x\| < r$; e $C^m(x_0, r)$ o conjunto dos x com $\|x-x_0\| < r$. O fecho de um cubo C é denotado por $\bar{C}$.

1. CONCEITOS BÁSICOS

Definição 1.01 :

Um espaço topológico M é uma variedade topológica de dimensão m se:

- (1) M é Hausdorff
- (2) M tem uma base enumerável, e
- (3) Cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa com um subconjunto de H^m ou de $\mathbb{R}^m$.

Se $h: U \longrightarrow H^m$ (ou $\mathbb{R}^m$) é o homeomorfismo da vizinhança U de x em M com um conjunto aberto em H^m (ou $\mathbb{R}^m$), o par (U, h) é chamado um sistema de coordenadas em M (obs: podemos denotar por $h(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x))$).

Se $h(U)$ é um conjunto aberto em H^m e $h(x)$ está em $\mathbb{R}^{m-1}$, então x é um ponto fronteira de M . O conjunto de todos estes pontos é o bordo de M (denotado por ∂M), e M é chamado uma m -variedade com bordo.

Uma estrutura diferenciável $\mathcal{D}$ de classe C^r em M é uma coleção de sistemas de coordenadas (U, h) em M , satisfazendo três condições:

- (1) Os sistemas de coordenadas em $\mathcal{D}$ cobrem M
- (2) Se (U_1, h_1) e (U_2, h_2) estão em $\mathcal{D}$, então $h_1 h_2^{-1}: h_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (ou H^m) é diferenciável de classe C^r .
- (3) A coleção $\mathcal{D}$ é maximal com relação à propriedade (2), isto é, se qualquer sistema de coordenadas que não está em $\mathcal{D}$ é acrescentado à coleção $\mathcal{D}$, então a propriedade (2) falha.

Uma variedade diferenciável C^r de dimensão m é uma variedade topológica de dimensão m , juntamente com uma estrutura diferenciável $\mathcal{D}$ de classe C^r em M .

Se M e N são variedades diferenciáveis (C^r) de dimensões m e n , respectivamente, A um subconjunto aberto de M e $f: A \longrightarrow N$, então f é diferenciável (de classe C^r) se para todos pares (U, h) e

(V, k) de sistemas de coordenadas de M e N , respectivamente, para os quais $f(A \cup U) \subset V$, a composta:

$$kfh^{-1}: h(A \cup U) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável (de classe C^r).

Um difeomorfismo $f: M \longrightarrow N$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável.

Se M é uma variedade diferenciável m -dimensional de classe C^r , e N um subconjunto de M , então N é uma subvariedade de M de classe C^r e dimensão n se existe uma cobertura de N por sistemas de coordenadas (U_i, h_i) de M tal que $h_i(U_i \cap N)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.02 :

Seja f uma aplicação de classe C^1 de um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$ tendo posto n no ponto x . Então f é um homeomorfismo de alguma vizinhança de x sobre uma vizinhança de $f(x)$ em $\mathbb{R}^m$.

Demonstração:

Ver Munkres [2] pag. 12.

Corolário 1.03 : (Teorema da Função Inversa).

Seja f aplicando o subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$, sendo f de classe C^r e tendo posto m em x . Então f é um difeomorfismo de classe C^r de uma vizinhança de x sobre uma vizinhança em $\mathbb{R}^m$ de $f(x)$.

Demonstração:

Ver Munkres [2] pag. 13.

Corolário 1.04 :

Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r tal que f tem posto m na origem e $f(0)=0$. Existe um difeomorfismo C^r g de uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$ sobre outra tal que

$$gf(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

Demonstração:

Ver Munkres [2] pag. 14.

Definições 1.05 :

Se $f: M_1 \longrightarrow M_2$, o posto de f em x é o posto de $D(h_2 f h_1^{-1})$ em $h_1(x)$, onde (U_1, h_1) e (U_2, h_2) são sistemas de coordenadas sobre x e $f(x)$, respectivamente.

A aplicação diferenciável $f: M^n \longrightarrow N^p$ é uma imersão se o posto de f é n em cada ponto x de M^n ($n \leq p$). Se f é um homeomorfismo sobre sua imagem e uma imersão então f é chamada um mergulho.

Se $f: M^n \longrightarrow N^p$, então o ponto y de N^p é um valor regular de f se posto $f = p$ em cada ponto do conjunto $f^{-1}(y)$. Caso contrário, y é um valor crítico de f . (Se y não está em $f(M^n)$, y é um valor regular de f).

Observações:

(1) Se A é uma subvariedade diferenciável de M , a inclusão

$A \longrightarrow M$ é um mergulho, e reciprocamente, se $f: M_1 \longrightarrow M$ é um mergulho então $f(M_1)$ é uma subvariedade diferenciável de M .

(2) Se y é um valor regular de $f: M^n \longrightarrow N^p$, então $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade diferenciável de M^n de dimensão $n-p$ (ou é vazio).

Definição 1.06 :

Seja $M(p,n)$ o espaço vetorial das matrizes reais $p \times n$, com a estrutura diferenciável do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{pn}$, e indiquemos com $M(p,n;k)$ o subconjunto formado pelas matrizes de posto k . Assim $M(p,n;n)$ é um subconjunto aberto de $M(p,n)$. (se $p \geq n$). O subconjunto $M(p,n;k)$ é uma subvariedade diferenciável de $M(p,n)$ de dimensão $k(p+n-k)$, onde $k \leq \min(p,n)$.

Teorema 1.07 :

Seja U um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, e $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável, onde $p \geq 2n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma matriz $p \times n$ $A = (a_j^i)$ com $|a_j^i| < \varepsilon$, tal que

$$g(x) = f(x) + A \cdot x$$

é uma imersão.

Demonstração:

Ver Milnor [1] pag. 12.

Teorema 1.08 :

Seja U um conjunto aberto no $\mathbb{R}^n$, e $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma matriz $p \times n$ $A = (a_j^i)$ e outra $p \times 1$ $B = (b_j^i)$ com $|a_j^i|, |b_j^i| < \varepsilon$ tal que

$$g(x) = f(x) + A \cdot x + B$$

tem a origem como um valor regular.

Demonstração:

Ver Milnor [1] pag. 13.

Lema 1.09 :

Toda variedade diferenciável M^n pode ser mergulhada diferencialmente no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n+1}$ como um subconjunto fechado.

Demonstração:

Ver Milnor [1] pag. 21.

Definições 1.10 :

Seja X um espaço topológico. Uma cobertura de X é localmente finita se todo ponto de X tem uma vizinhança que intercepta somente um número finito de elementos da cobertura.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas coberturas de X . $\mathcal{C}$ é um refinamento de $\mathcal{C}'$ quando, para todo C em $\mathcal{C}$, existe algum C' em $\mathcal{C}'$ tal que C está contido em C' .

Um espaço Hausdorff é paracompacto se toda cobertura aberta admite um refinamento aberto localmente finito.

Teorema 1.11 :

Se X é localmente compacto e Hausdorff tendo uma base e numerável então X é paracompacto.

Demonstração:

Ver Milnor [1] pag. 14.

Consequência:

Toda variedade M é paracompacta.

Lema 1.12 :

Seja M um espaço topológico paracompacto e $\{ U_\alpha \}$ uma cobertura aberta de M . Então existe uma cobertura aberta localmente finita $\{ C_\alpha \}$ com $C_\alpha \subset U_\alpha$ para cada α .

Demonstração:

Pela definição de espaço paracompacto, a cobertura $\{ U_\alpha \}$ admite um refinamento aberto $\{ W_\beta \}$ localmente finito. Escolhemos $\alpha(\beta)$ tal que $W_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$ para cada β .

$$\text{Seja } C_{\alpha_0} = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha_0} W_\beta.$$

Dada uma vizinhança interceptando somente um número finito de W_β 's, também interceptará somente um número finito de C_α 's.

Teorema 1.13 :

Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional e $\{ U_\alpha \}$ uma cobertura aberta de M . Existe uma coleção (V_j, h_j) de sistemas de coordenadas em M tal que:

- (1) $\{ V_j \}$ é um refinamento localmente finito de $\{ U_\alpha \}$.
- (2) $h_j(V_j) = C^n(3)$.
- (3) Se $W_j = h_j^{-1}(C(1))$, então $\{ W_j \}$ cobre M .

Demonstração:

Sabemos que toda variedade é paracompacta, e pelo lema

1.12 deste capítulo, existe uma cobertura aberta localmente finita $\{ C_\alpha \}$ com $C_\alpha \subset U_\alpha$ para cada α .

Dado x em M , tomemos um sistema de coordenadas (V_j, h_j) de x em M tal que $h_j(V_j) = C^n(3)$ e $V_j \subset C_\alpha$ para algum α .

Seja $W_j = h_j^{-1}(C(1))$. Como h_j é um homeomorfismo temos que W_j é aberto. A família $\{ W_j \}$ cobre M e $\{ V_j \}$ é localmente finita, pois $V_j \subset C_\alpha$ para algum α , onde $\{ C_\alpha \}$ é uma cobertura localmente finita.

Lema 1.14 :

Existe uma função $C^\infty \phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que é igual a 1 em $\bar{C}(1)$, $0 < \phi < 1$ em $C(2) - \bar{C}(1)$ e $\phi = 0$ em $\mathbb{R}^n - \dot{C}(2)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \text{Seja } \lambda(x) &= e^{-1/x} \quad \text{para } x > 0 \\ &= 0 \quad \text{para } x \leq 0 \end{aligned}$$

então λ é uma função C^∞ , e é positiva para $x > 0$.

Seja

$$\psi(x) = \frac{\lambda(2+x) \cdot \lambda(2-x)}{\lambda(2+x) \cdot \lambda(2-x) + \lambda(x-1) + \lambda(-x-1)}$$

ψ é uma função C^∞ tal que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 1 & \text{para } |x| &\leq 1 \\ 0 < \psi(x) &< 1 & \text{para } 1 < |x| < 2 \\ \psi(x) &= 0 & \text{para } |x| &\geq 2 \end{aligned}$$

Tomemos finalmente,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n \psi(x_i)$$

Definição 1.15 :

Se ϕ é uma função não-negativa definida em M , o suporte de ϕ (notação: $\text{supp } \phi$) é o fecho do conjunto de x em M com $\phi(x) > 0$

Sejam M uma variedade diferenciável C^k , $\{V_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M e $\{\psi_j\}_{j \in J}$, onde $\psi_j: M \rightarrow \mathbb{R}^+$ é de classe C^k . A coleção $\{\psi_j\}_{j \in J}$ é uma partição diferenciável (C^k) da unidade subordinada à cobertura $\{V_i\}_{i \in I}$ se:

- (1) Qualquer j em J , existe i em I tal que $\text{supp } \psi_j \subset V_i$.
- (2) $\{\text{supp } \psi_j\}_{j \in J}$ é localmente finita.
- (3) $\sum_{j \in J} \psi_j(x) = 1$

Toda variedade diferenciável M e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura de M admite uma partição diferenciável da unidade subordinada a esta cobertura.

2. TRANSVERSALIDADE.

Sejam $f: M^n \rightarrow N^p$ uma aplicação diferenciável de classe C^k e S^{p-q} uma subvariedade diferenciável de N . Seja $f(x) \in S$, $(u^1, \dots, u^n)$ um sistema de coordenadas sobre x , e $(v^1, \dots, v^p)$ um sistema de coordenadas sobre $f(x)$ tal que em S temos $v^1 = \dots = v^q = 0$

Definição 2.01 :

f é transversal a S em x se:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial v^i}{\partial u^j} & i = 1, \dots, q \\ & j = 1, \dots, n \end{array}$$

tem posto q em x .

Dizemos que f é transversal a S se, para todo ponto x em $f^{-1}(S)$, f é transversal a S em x .

Lema 2.02 :

Se $f: M^n \longrightarrow N^p$ é transversal a S^{p-q} então $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão $n-q$ (ou é vazia).

Demonstração:

Seja $\pi: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ a projeção de $\mathbb{R}^p$ sobre as q primeiras componentes, e $(V, h) = (v^1, \dots, v^p)$ o sistema de coordenadas que satisfaz a condição de transversalidade ($v^1 = \dots = v^q = 0$).

Temos $S \cap V = h^{-1}\pi^{-1}(0)$, onde $0 \in \mathbb{R}^q$ e

$$f^{-1}(S \cap V) = (\pi h f)^{-1}(0)$$

Como $\pi h f$ tem posto q em $x \in f^{-1}(S \cap V)$ temos que a origem é um valor regular de $\pi h f$. Então $(\pi h f)^{-1}(0)$ é uma subvariedade diferenciável de M de dimensão $n-q$.

CAPÍTULO II

FIBRADOS VETORIAIS E APROXIMAÇÃO.

1. FIBRADOS VETORIAIS.

Definição 1.01 :

Um fibrado vetorial ξ n-dimensional é uma terna (E, π, B) onde E, B são espaços topológicos, B Hausdorff e π é uma aplicação contínua de E sobre B (projeção) satisfazendo:

(1) $\pi^{-1}(b)$ é um espaço vetorial de dimensão n para cada b em B .

$F_b = \pi^{-1}(b)$ é chamado uma fibra.

(2) Para cada b em B , existe uma vizinhança U de b e um homeomorfismo

$$\psi: U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

tal que ψ é um isomorfismo linear de $b' \times \mathbb{R}^n$ sobre $\pi^{-1}(b')$, para cada b' em U . Se $U=B$, o fibrado é chamado fibrado trivial.

Se ξ, η são fibrados vetoriais n -dimensional e p -dimensional, respectivamente, definimos o fibrado produto $\xi \times \eta$ como segue:

$$E(\xi \times \eta) = E(\xi) \times E(\eta)$$

$$B(\xi \times \eta) = B(\xi) \times B(\eta)$$

$$(\pi \times \lambda)(x, y) = (\pi(x), \lambda(y))$$

onde, π, λ são as projeções em ξ, η , respectivamente.

Definição 1.02 :

Sejam ξ, η dois fibrados vetoriais n -dimensionais. Uma aplicação de fibrado $f: \xi \longrightarrow \eta$ é uma aplicação contínua de $E(\xi)$ em $E(\eta)$ que leva fibra isomorficamente em fibra.

A aplicação induzida $f_B: B(\xi) \longrightarrow B(\eta)$ é contínua.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ \downarrow \pi_\xi & & \downarrow \pi_\eta \\ B(\xi) & \xrightarrow{f_B} & B(\eta) \end{array}$$

Se $B(\xi) = B(\eta)$ e a aplicação induzida é a identidade, f é chamada uma equivalência. Se existe uma equivalência de ξ sobre η , denotamos $\xi \approx \eta$.

Lema 1.03 :

Sejam um fibrado η com projeção $\lambda: E(\eta) \longrightarrow B(\eta)$, e uma aplicação $f: B_1 \longrightarrow B(\eta)$. Então existe um fibrado $\pi: E_1 \longrightarrow B_1$ e uma aplicação de fibrado $g: E_1 \longrightarrow E(\eta)$, tal que $\lambda g = f\pi$. (notação: $E_1 = f^*\eta$, e é chamado fibrado induzido)

Demonstração.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \lambda \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B(\eta) \end{array}$$

Definimos:

$$E_1 = \{ (b, x) \in B_1 \times E(\eta) \mid f(b) = \lambda(x) \},$$

$$\pi(b, x) = b$$

$$g(b, x) = x$$

E_1 é um fibrado vetorial.

De fato:

Sejam $V \subset B(\eta)$ tal que $\psi: V \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E(\eta)$ é um homeomorfismo e $U \subset B_1$ tal que $f(U) \subset V$.

Definimos,

$$\psi_1: U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E_1, \text{ por}$$

$$\psi_1(b, a) = (b, \psi(f(b), a))$$

Temos:

(1) ψ_1 é uma aplicação contínua.

(2) ψ_1 é 1-1.

Suponhamos $\psi_1(b, a) = \psi_1(b', a')$, então

$(b, \psi(f(b), a)) = (b', \psi(f(b'), a'))$, o que implica $b = b'$, e $\psi(f(b), a) = \psi(f(b'), a')$.

Portanto, $\psi(f(b), a) = \psi(f(b), a')$, e sendo ψ um isomorfismo em cada fibra, temos $a = a'$.

(3) A imagem de ψ_1 é $\pi^{-1}(U)$, isto é:

$$\psi_1(U \times \mathbb{R}^n) = \pi^{-1}(U)$$

$$\psi_1(b, a) = (b, \psi(f(b), a)) \in \pi^{-1}(U), \text{ pois } \pi(\psi_1(b, a)) = b \in U$$

Por outro lado, seja $(b, x) \in \pi^{-1}(U) \subset E_1$, então $f(b) = \lambda(x) \in V$.

Assim temos:

$$\begin{aligned} (b, p\psi^{-1}(x)) &= (b, \psi(f(b), p\psi^{-1}(x))) \\ &= (b, \psi(\lambda(x), p\psi^{-1}(x))) \\ &= (b, x) \end{aligned}$$

onde p projeta $V \times \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

(4) A inversa ψ_i^{-1} é contínua, pois:

$$\psi_i^{-1}: (b, x) \longrightarrow (b, p\psi^{-1}(x))$$

Finalmente, a aplicação g é um isomorfismo em cada fibra, isto é, para cada $b \in B_1$ temos $g_b(x) = g(b, x) = x$, portanto g_b é um isomorfismo.

Definição 1.04 :

Se ξ, η são fibrados sobre B , então $g: E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ é um homomorfismo se:

- (1) g aplica fibra linearmente em fibra, e
- (2) A aplicação induzida em B é a identidade.

Um mergulho de fibrados é um homomorfismo 1-1.

Teorema 1.05 :

Se $f: E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ aplica fibra linearmente em fibra, então f pode ser fatorada em um homomorfismo seguido por uma aplicação de fibrado.

Demonstração:

Seja o diagrama,

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ B(\xi) & \xrightarrow{f_B} & B(\eta) \end{array}$$

onde, π_1, π_2 são as projeções em ξ, η , respectivamente, e f_B a

aplicação induzida por f .

Tomemos $E_1 = f_B^* \eta$, o fibrado induzido por f_B . Então pelo lema 1.03 do capítulo II existe um fibrado $\pi: E_1 \longrightarrow B(\xi)$ e uma aplicação de fibrado $g: E_1 \longrightarrow E(\eta)$ tal que $\pi_2 g = f_B \pi$.

Seja $h: E(\xi) \longrightarrow B(\xi) \times E(\eta)$ dada pela equação:

$$h(e) = (\pi_1(e), f(e))$$

Temos:

(1) A imagem de h está contida em $E_1 \subset B(\xi) \times E(\eta)$, pois:

$$f_B(\pi_1(e)) = \pi_2(f(e))$$

o que implica que $(\pi_1(e), f(e)) \in E_1$ (pela definição de E_1).

(2) A aplicação h_B induzida por h é a identidade, como podemos ver pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{h} & E_1 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ B(\xi) & \xrightarrow{h_B} & B(\xi) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} p & \xrightarrow{\pi_1^{-1}} & \pi_1^{-1}(p) & \xrightarrow{h} & \pi_1(\pi_1^{-1}(p)) \times f(\pi_1^{-1}(p)) & = & p \times f(\pi_1^{-1}(p)) \\ & & & & & & \downarrow \pi \\ & & & & & & p \end{array}$$

Portanto, h_B é a identidade.

(3) h aplica fibra linearmente em fibra.

$$h: \pi_1^{-1}(p) \longrightarrow (p, f(\pi_1^{-1}(p)))$$

Por (2) e (3) h é um homomorfismo, e temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 E(\xi) & \xrightarrow{h} & E_1 & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\
 \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi_2 \\
 B(\xi) & \xrightarrow{i} & B(\xi) & \xrightarrow{f_B} & B(\eta)
 \end{array}$$

o que implica $f = gh$.

Lema 1.06 :

Sejam ξ, η fibrados sobre B de dimensões n, p , respectivamente, e $g: \xi \longrightarrow \eta$ um homomorfismo. Se g é sobre, então o Kernel de g é um fibrado. Se g é 1-1, então coker g (isto é, o quociente, $\eta/\text{imagem } g$) é um fibrado.

Demonstração:

Ver Milnor [1] pág. 34.

Definição 1.07 :

Sejam ξ, η dois fibrados sobre B . A soma de Whitney $\xi \oplus \eta$ é um fibrado definido como segue:

Considere o fibrado produto $E(\xi) \times E(\eta) \longrightarrow B \times B$; seja d a aplicação diagonal $B \longrightarrow B \times B$. O fibrado induzido $d^*(\xi \times \eta)$ é definido como a soma de Whitney $\xi \oplus \eta$.

Lema 1.08 :

Seja B paracompacto e $0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{i} \eta \xrightarrow{\psi} \zeta \longrightarrow 0$ uma sequência exata de homomorfismos de fibrados. Então existe uma equivalência $f: \eta \longrightarrow \xi \oplus \zeta$, com $f i$ a inclusão natural e ψf^{-1} a projeção natural.

Demonstração :

Ver Milnor [1] pág. 37.

2. FIBRADO TANGENTE.

Definição 2.01 :

Seja M uma variedade n -dimensional de classe C^r , e x um ponto de M . Um vetor tangente em x é uma correspondência associando a todo sistema de coordenadas $(u^1, \dots, u^n)$ sobre x um elemento $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ de $\mathbb{R}^n$, tal que se $(\beta^1, \dots, \beta^n)$ está associado ao sistema de coordenadas $(v^1, \dots, v^n)$, então $\alpha^i = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \beta_j$.

O operador derivação X é definido por:

$$X = \sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

e associa a cada função diferenciável f definida em uma vizinhança de x , um número real. As seguintes condições são satisfeitas:

- (1) Se g é uma restrição de f , $X(g) = X(f)$.
- (2) $X(cf + dg) = cX(f) + dX(g)$ (c, d números reais).
- (3) $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot X(g)$

Definição 2.02 :

Seja M uma variedade de classe C^r , e $E(\tau)$ o conjunto de todos os vetores tangentes a M . Seja $\pi: E(\tau) \longrightarrow M$ levando o vetor tangente $\vec{v}$ em x , no ponto x . $E(\tau)$ é chamado o fibrado tangente de M e π é a aplicação projeção.

Se $(U, h) = (u^1, \dots, u^n)$ é um sistema de coordenadas em M , definimos:

$$\psi_u: U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E(\tau)$$

pela equação:

$$\psi_u(x_0, a^1, \dots, a^n) = \text{o vetor tangente } X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial u^i} \text{ em } x_0.$$

Como ψ_u é um homeomorfismo temos que $E(\tau)$ é um espaço topológico, e além disso, $\psi_v^{-1} \psi_u$ é uma aplicação C^r definida em $(U \setminus V) \times \mathbb{R}^n$, assim $E(\tau)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

A aplicação π é diferenciável de posto n .

Definição 2.03 :

Seja a aplicação $f: M_1 \longrightarrow M_2$, onde M_1 e M_2 são variedades diferenciáveis. f induz uma aplicação $df: E(\tau_1) \longrightarrow E(\tau_2)$, linear em cada fibra, definida pela equação:

$$df(X) = Y$$

onde, $Y(g) = X(gf)$.

Se X é um vetor em x_0 , então Y é um vetor em $f(x_0)$.

Chamamos df de aplicação derivada.

3. FIBRADO NORMAL DE UMA IMERSÃO.

Definição 3.01 :

Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis, f uma imersão de M_1 em M_2 , e τ_1, τ_2 , os fibrados tangentes de M_1, M_2 , respectivamente.

A aplicação $df: E(\tau_1) \longrightarrow E(\tau_2)$ pode ser fatorada em um homomorfismo h de $E(\tau_1)$ em $E(f^* \tau_2)$ seguido por uma aplicação de fibrado g (isto é possível pelo teorema 1.05 do capítulo II). Como f é uma imersão então h é um homomorfismo 1-1, e por 1.06

do capítulo II, $f^*\tau_2/\text{imagem } h$ é chamado o fibrado Normal, e é denotado por v_f .

A sequência $0 \longrightarrow \tau_1 \xrightarrow{h} f^*\tau_2 \longrightarrow v_f \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de homomorfismos. Então pelo lema 1.08 do capítulo II, $f^*\tau_2$ é equivalente a $\tau_1 \oplus v_f$. Se colocarmos uma métrica Riemanniana em $f^*\tau_2$, v_f é equivalente ao complemento ortogonal da imagem de τ_1 .

4. VIZINHANÇA TUBULAR.

Definição 4.01 :

Seja $h: M_1 \longrightarrow M_2$ um mergulho (onde $M_1 = M^n$ e $M_2 = \mathbb{R}^{n+k}$) e v_h o fibrado normal deste mergulho. Sejam v_1 o fibrado tangente a M_1 e τ_2 o fibrado tangente a M_2 . Como M_2 é metrizável, v_h é equivalente ao complemento ortogonal da imagem de τ_1 em τ_2 ; este complemento denotamos por v^k .

Seja a aplicação diferenciável

$$G: E(\tau_2) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

que leva o vetor v , com base em x , no ponto $x+v$ em $\mathbb{R}^{n+k}$, e denotemos por g a restrição de G a $E(v^k)$, isto é, $g = G|_{E(v^k)}$. Consideremos M^n como os vetores nulos de $E(v^k)$.

Lema 4.02 :

Se $f: X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo local e a restrição de f ao subconjunto fechado A é um homeomorfismo, então f é um homeomorfismo em alguma vizinhança V de A . (X, Y são espaços de Hausdorff com bases enumeráveis, X é localmente compacto).

Demonstração :

Ver Milnor [1] pág. 58.

Teorema 4.03 :

Existe uma vizinhança de M^n em $E(v^k)$ que é aplicada difeomorficamente sobre uma vizinhança de M^n em $\mathbb{R}^{n+k}$.

Demonstração :

A função $g = G|_{E(v^k)}$ definida anteriormente é diferenciável e tem posto $n+k$ nos pontos de $M^n \subset E(v^k)$. Assim g tem posto $n+k$ em alguma vizinhança de M^n em $E(v^k)$, sendo assim um homeomorfismo local nos pontos de M^n .

Pelo lema anterior g é um homeomorfismo em alguma vizinhança U de M^n .

Corolário 4.04 :

Qualquer subvariedade diferenciável S de $\mathbb{R}^{n+k}$ tem uma vizinhança U tal que S é um retrato diferenciável de U .

Demonstração :

Seja a projeção $\pi: E(v^k) \longrightarrow M^n$, e pelo teorema acima existe uma vizinhança U de M^n em $E(v^k)$ que é aplicada difeomorficamente sobre uma vizinhança V de M^n em $\mathbb{R}^{n+k}$.

Temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M^n & U & \xrightarrow{g} V \subset M^n \subset \mathbb{R}^{n+k} \\
 \downarrow \pi & \swarrow & \\
 & M^n &
 \end{array}$$

Portanto, a projeção π induz (sob g) uma aplicação diferenciável de uma vizinhança de M^n em $\mathbb{R}^{n+k}$ sobre M^n que é a identidade em M^n .

Definição 4.05 :

Seja a variedade compacta M^n mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$. Pelo teorema 4.03 deste capítulo, existe uma vizinhança de M^n em $\mathbb{R}^{n+k}$ que é difeomorfa ao subconjunto $E_{2\epsilon}(v^k)$ de $E(v^k)$. Tal vizinhança é chamada uma vizinhança tubular de M^n .

5. FIBRADO UNIVERSAL.

Definição 5.01 :

A variedade de Grassmann $G_{p,n}$ é o conjunto de todos subespaços n -dimensionais de $\mathbb{R}^{n+p}$.

Seja $E(\gamma_p^n) = \{(H, x) \in G_{p,n} \times \mathbb{R}^{n+p} / x \in H\}$.

$E(\gamma_p^n)$ é chamado o fibrado Universal.

A projeção π aplica (H, x) em H , sendo a fibra um subespaço n -dimensional de $\mathbb{R}^{n+p}$, e γ_p^n é um fibrado vetorial n -dimensional sobre $G_{p,n}$.

Definição 5.02 :

ξ é um fibrado vetorial diferenciável se $E(\xi)$ e $B(\xi)$ são variedades diferenciáveis e se os homeomorfismos:

$$U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

que especifica a estrutura de produto local, podem ser escolhidos como difeomorfismos.

6. APROXIMAÇÃO.

Definição 6.01 :

Sejam $f, g: X \longrightarrow Y$, onde Y é metrizável, e $\delta(x)$ uma função contínua positiva definida em X . Então g é uma δ -aproximação para f se $d(f(x), g(x)) < \delta(x)$ para todo x .

Teorema 6.03 :

Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável ($p \geq 2n$), e uma função contínua positiva δ , definida em M^n . Existe uma imersão $g: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ que é uma δ -aproximação para f . Se posto $f = n$ no conjunto fechado N , podemos escolher $g|_N = f|_N$.

Demonstração :

Consideremos o caso que posto $f = n$ no conjunto N . Assim posto $f = n$ em uma vizinhança U de N .

Seja a cobertura $\{U, M^n - U\}$ de M^n .

Tomemos o refinamento (V_i, h_i) da cobertura acima que existe pelo teorema 1.13 do capítulo I. Pela notação usada no teorema do capítulo I citado acima temos:

$$h_i(W_i) = C(1) \quad \text{e} \quad h_i(V_i) = C(3)$$

$$\text{Definimos } h_i(U_i) = C(2).$$

Indexemos os V_i com inteiros positivos e negativos de tal modo que os V_i com índices não-negativos são aqueles contidos em U .

$$\text{Seja } \epsilon_i = \min_{x \in U_i} \delta(x)$$

Vamos agora, definir uma sequência de funções $\{f_k\}$ por indução sobre k , tal que se $k \rightarrow \infty$ a sequência tende a uma função g que é uma δ -aproximação para f .

Seja $f_0 = f$.

Suponhamos que $f_{k-1}: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ seja dada, tendo posto n em $N_{k-1} = \bigcup_{j < k} W_j$.

Tomemos $f_{k-1}h_k^{-1}: C(3) \rightarrow \mathbb{R}^p$, e uma matriz $p \times n$ A .

Seja $F_A: C(3) \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida pela equação:

$$F_A(x) = f_{k-1}h_k^{-1}(x) + \phi(x)A(x),$$

onde ϕ foi definida no lema 1.14 do capítulo I.

Queremos que $F_A(x)$ tenha posto n no conjunto

$$K = h_k(N_{k-1} \cap \bar{U}_k)$$

Seja a aplicação contínua:

$$H: K \times M(p,n) \rightarrow M(p,n)$$

$$(x,A) \longmapsto D(F_A(x))$$

onde, $D(F_A(x)) = D(f_{k-1}h_k^{-1}(x)) + A(x) \cdot D\phi(x) + \phi(x) \cdot A$.

A aplicação H leva $K \times o$ no subconjunto aberto $M(p,n;n)$ de $M(p,n)$, pois em algum elemento de $K \times o$ temos:

$$D(F_0(x)) = D(f_{k-1}h_k^{-1}(x))$$

que tem posto n em K .

Então como H é contínua, se A é suficientemente pequeno, H levará $K \times A$ em $M(p,n;n)$.

Agora, desejamos que A seja suficientemente pequeno tal que $\|A \cdot x\| < \epsilon_k/2^k$ para todo $x \in C(3)$.

Pelo teorema 1.07 do capítulo I A pode ser escolhido arbitariamente pequeno de modo que $f_{k-1}h_k^{-1}(x) + A(x)$ tenha posto n em $C(2)$.

Escolhemos A satisfazendo as condições citadas acima.

Definimos $f_k: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^P$, pela equação:

$$\begin{aligned} f_k(y) &= f_{k-1}(y) + \phi(h_k(y)) \cdot A(h_k(y)) & \text{para } y \in V_k. \\ &= f_{k-1}(y) & \text{para } y \in M - \bar{U}_k \end{aligned}$$

A função f_k está bem definida, pois para $y \in V_k - \bar{U}_k$ temos que $h_k(y) \in \mathbb{R}^n - C(2)$, portanto $\phi(h_k(y)) = 0$. Além disso, f_k é diferenciável. Como $F_A(x)$ tem posto n no conjunto K , então f_k tem posto n em N_{k-1} , e o fato de $f_{k-1}h_k^{-1}(x) + A(x)$ ter posto n em $C(2)$ implica que f_k tem posto n em $\bar{W}_k$.

Finalmente, f_k é uma $\delta/2^k$ aproximação para f_{k-1} , pois:

$$\begin{aligned} \|f_k(y) - f_{k-1}(y)\| &= \|f_{k-1}(y) + \phi(h_k(y)) \cdot A(h_k(y)) - f_{k-1}(y)\| \\ &= \|\phi(h_k(y))\| \cdot \|A(h_k(y))\| \\ &\leq 1 \cdot \varepsilon_k / 2^k < \delta(y) / 2^k \quad \text{para } y \in V_k; \end{aligned}$$

e para $y \in M - \bar{U}_k$ é trivial.

Definimos $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$.

Como a cobertura V_i é localmente finita, todos os f_k coincidem em um conjunto compacto para k suficientemente grande. Portanto, temos que g é diferenciável e com posto n .

A função g é uma δ -aproximação para f , pois:

$$\|f(x) - g(x)\| = \|f(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)\|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \| f(x) - f_k(x) \| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta$$

Lema 6.03 :

Se $p > 2n$, qualquer imersão $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ pode ser δ -aproximada por uma imersão g 1-1. Se f é 1-1 em uma vizinhança U do conjunto fechado N , podemos escolher $g|_N = f|_N$.

Demonstração :

Seja $\{ U_\alpha \}$ uma cobertura de M tal que $f|_{U_\alpha}$ é um mergulho. Pelo teorema 1.13 do capítulo I existe um refinamento localmente finito (V_i, h_i) por sistemas de coordenadas.

Seja ϕ a função contínua definida no lema 1.14 do capítulo I.

Definimos funções diferenciáveis ϕ_i como segue:

$$\begin{aligned} \phi_i(y) &= \phi(h_i(y)) & \text{para } y \in V_i \\ &0 & \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

Podemos assumir que (V_i, h_i) refina a cobertura $\{U, M-N\}$, e que os V_i com índices não-positivos são aqueles contidos em U .

Definimos agora uma sequência de funções diferenciáveis $\{ f_k \}$ por indução sobre k , tal que se $k \longrightarrow \infty$ a sequência tende a uma função g que é uma δ -aproximação para f .

Seja $f_0 = f$

Dada a imersão $f_{k-1}: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, definimos f_k pela equação:

$$f_k(y) = f_{k-1}(y) + \phi_k(y)b_k$$

onde, b_k é um ponto de $\mathbb{R}^p$.

Escolhemos b_k satisfazendo três condições:

- (1) Como no teorema anterior, se b_k é escolhido suficientemente pequeno, f_k terá posto n .
- (2) b_k deve ser suficientemente pequeno para que f_k seja uma $\delta/2^k$ aproximação para f_{k-1} .

Seja $N^{2n} = \{(y, y_0) \in M^n \times M^n / \phi_k(y) \neq \phi_k(y_0)\}$.

N^{2n} é um subconjunto aberto de $M^n \times M^n$.

Seja a aplicação diferenciável $G: N^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dada pela equação:

$$G(y, y_0) = - \frac{f_{k-1}(y) - f_{k-1}(y_0)}{\phi_k(y) - \phi_k(y_0)}$$

- (3) Como $2n < p$, b_k pode ser escolhido arbitrariamente pequeno e não na imagem de G , pois a imagem de G terá medida zero.

Segue que:

$f_k(y) - f_k(y_0) = 0$ se, e somente se, $\phi_k(y) - \phi_k(y_0) = 0$, e

$$f_{k-1}(y) - f_{k-1}(y_0) = 0 \quad (k > 0)$$

De fato:

$$0 = f_k(y) - f_k(y_0) = f_{k-1}(y) + \phi_k(y)b_k - f_{k-1}(y_0) - \phi_k(y_0)b_k$$

$$0 = [f_{k-1}(y) - f_{k-1}(y_0)] + [\phi_k(y) - \phi_k(y_0)] b_k$$

Como b_k não pertence à imagem de G , devemos ter

$\phi_k(y) - \phi_k(y_0)$ igual a zero o que implica também que $f_{k-1}(y) - f_{k-1}(y_0) = 0$. A recíproca também vale.

Definimos $g(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y)$

Se $g(y) = g(y_0)$ e $y \neq y_0$ temos: $f_{k-1}(y) = f_{k-1}(y_0)$, e

$$\phi_k(y) = \phi_k(y_0) \quad (k > 0)$$

Então $f(y) = f(y_0)$, e assim y e y_0 não podem pertencer a qualquer um dos conjuntos U_i .

Finalmente, g é uma δ -aproximação para f :

$$\begin{aligned} \|g(y) - f(y)\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(y) - f(y) \right\| = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(y) - f(y)) \right\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(y) - f(y)\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta \end{aligned}$$

Teorema 6.04 :

Sejam $f: M^n \longrightarrow N^p$ diferenciável, N_1^{p-q} uma subvariedade fechada de N , e A um subconjunto fechado de M tal que a condição de transversalidade regular para f e N_1 vale para cada x em $A \cap f^{-1}(N_1)$. Seja δ uma função contínua positiva definida em M . Então existe uma aplicação diferenciável $g: M^n \longrightarrow N^p$ tal que:

- (1) g é uma δ -aproximação para f .
- (2) g é transversa regular em N_1 , e
- (3) $g|_A = f|_A$

Demonstração :

Existe uma vizinhança U de A em M tal que f satisfaz a condição de transversalidade regular em $U \cap f^{-1}(N_1)$.

Podemos cobrir N com $N - N_1 = Y_0$ e sistemas de coordenadas (Y_i, k_i) para $i > 0$, com funções coordenadas $(v^1, \dots, v^n)$ tal que $v^1 =$

$= \dots = v^q = 0$ em N_1 .

Sendo $\{f^{-1}(Y_i)\}$ e $\{U, M-A\}$ coberturas de M , pelo teorema 1.13 do capítulo I conseguimos um refinamento (V_i, h_i) de ambas as coberturas. Então temos: $h_j(V_j) = C(3)$, $h_j(U_j) = C(2)$, e $h_j(W_j) = C(1)$. Pelo teorema citado acima temos também que $\{W_j\}$ cobre M .

Os V_j são indexados com inteiros positivos e negativos tal que os V_j que estão contidos em U são aqueles de índices não-positivos.

Definimos $\phi_i(x) = \phi(h_i(x))$ para $x \in V_i$
 $= 0$ caso contrário.

onde, ϕ foi construída no lema 1.14 do capítulo I.

Para cada j escolhemos $i(j) \geq 0$ tal que $f(V_j) \subset Y_{i(j)}$.

Seja $f_0 = f$.

Consideremos f_{k-1} definida e satisfazendo a condição de transversalidade regular em cada ponto da intersecção de $f^{-1}(N_1)$ com $\bigcup_{j < k} \bar{W}_j$. Consideremos também que $f_{k-1}(\bar{U}_j) \subset Y_{i(j)}$ para cada j .

Tomando $i = i(k)$, segue que em particular, $f_{k-1}(\bar{U}_k)$ está contido em Y_i .

Seja $\pi_{k,i} f_{k-1} h_k^{-1}: C(2) \longrightarrow \mathbb{R}^q$.

Pelo teorema 1.08 do capítulo I existe uma função $L(x) = A(x) + B$ tal que, quando somada à função anterior, a aplicação resultante tem a origem como um valor regular.

Consideremos $\mathbb{R}^q$ como as q primeiras coordenadas em $\mathbb{R}^p$, e definimos:

$$f_k(x) = k_1^{-1} (k_1 f_{k-1}(x) + L(h_k(x)) \phi_k(x)) \quad \text{para } x \text{ em uma vizinhança de } \bar{U}_k.$$

$$= f_{k-1}(x) \quad \text{para } x \text{ em } M - U_k.$$

L deve ser escolhido satisfazendo algumas condições:

- (1) L deve ser suficientemente pequeno tal que $k_1 f_{k-1} + L \phi_k$ pertence a $C(1)$ para x em $\bar{U}_k$.
- (2) Escolhemos L tal que $f_k(\bar{U}_j)$ está contido em $Y_{i(j)}$, para cada j. Isto é possível desde que somente um número finito dos conjuntos $\bar{U}_j$ podem interceptar $\bar{U}_k$. (pois $\{V_j\}$ é localmente finita).
- (3) Escolhemos L suficientemente pequeno tal que f_k é uma $\delta/2^k$ aproximação para f.

Por definição f_k satisfaz a condição de transversalidade de regular para N em cada ponto de $f_k^{-1}(N_1) \cap \bar{W}_k$, mas queremos que L seja suficientemente pequeno tal que a condição seja satisfeita em cada ponto da intersecção de $f_k^{-1}(N_1)$ com $\bigcup_{j < k} \bar{W}_j$. Para isto é suficiente considerar a intersecção de $f_k^{-1}(N_1)$ com $\bar{U}_k$. Seja esta intersecção denotada por K.

Consideremos a função:

$$F: K \times L \longrightarrow N \times M(q, n) \\ (x, L) \longrightarrow (f_k(x), D(k_1 f_k h_k^{-1})(h_k(x)))$$

que é contínua e $F(K \times 0)$ está contido em:

$$[(N - N_1) \times M(q, n)] \cup [N \times M(q, n; q)]$$

conjunto este aberto em $N \times M(q,n)$.

Assim, para L suficientemente pequeno, (K,L) é levado em $[(N - N_1) \times M(q,n)] \cup [N \times M(q,n;q)]$, tal que f_k satisfaz a condição de transversalidade regular para N_1 em cada ponto de $f_k^{-1}(N_1) \cap (\bigcup_{j \leq k} \bar{W}_j)$.

Finalmente definimos:

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

Lema 6.05 :

Sejam A um subconjunto fechado da variedade diferenciável M , $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em A , e δ uma função contínua positiva definida em M .

Nestas condições existe $g: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

- (1) g é diferenciável.
- (2) g é uma δ -aproximação para f .
- (3) $g|_A = f|_A$

Demonstração .:

Provaremos o lema no caso $m = 1$.

Para $x \in A$, $f|_A$ pode ser estendida a uma função diferenciável f_x em uma vizinhança N_x de x . Seja N_x escolhida suficientemente pequena tal que $|f_x(y) - f(y)| < \delta(y)$ para $y \in N_x$.

Para $x \in M-A$, escolhemos uma vizinhança de x suficientemente pequena tal que $|f(y) - f(x)| < \delta(y)$ para $y \in N_x$. Definimos $f_x(y) = f(x)$ para $y \in N_x$.

Seja ψ_α uma partição diferenciável da unidade com $\text{supp} \psi_\alpha$ contido em algum N_x , digamos $N_{x(\alpha)}$ para cada α .

Finalmente, definimos :

$$g(y) = \sum \psi_\alpha(y) f_{x(\alpha)}(y)$$

que é diferenciável e uma δ -aproximação para f .

Lema 6.06 :

Seja $f: M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação contínua entre variedades diferenciáveis, que é diferenciável em um subconjunto fechado A de M_1 . Seja $\varepsilon(x) > 0$, e considere em M_2 a métrica determinada por algum mergulho de M_2 em $\mathbb{R}^p$.

Então existe $g: M_1 \longrightarrow M_2$ tal que:

- (1) g é diferenciável.
- (2) g é uma δ -aproximação para f .
- (3) $g|_A = f|_A$.

Demonstração :

Existe uma vizinhança U de M_2 em $\mathbb{R}^p$ da qual M_2 é um retrato diferenciável. Seja ρ a retração diferenciável de U sobre M_2 .

Escolhemos $\delta(x)$ uma função positiva definida em M_2 tal que a vizinhança cúbica de $f(x)$ de raio $\delta(x)$ está em U , e sua imagem sob ρ tem raio menor que $\varepsilon(x)$.

Seja $f_1: M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável que é uma δ -aproximação para f , tal que $f_1|_A = f|_A$ (isto é possível pelo lema anterior).

Definimos $g(x) = \rho(f_1(x))$.

Assim g é uma δ -aproximação para f , pois:

para $x \in A$ temos:

$$|g(x) - f(x)| = |\rho(f_1(x)) - f(x)| = |\rho(f(x)) - f(x)|,$$

e como $f(x)$ está em M_2 , $|g(x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0$.

para $x \in M_1 - A$ temos:

$$|g(x) - f(x)| = |\rho(f_1(x)) - f(x)|$$

mas, $f_1(x) \in U$ (pois, $|f_1(x) - f(x)| < \delta(x)$ implica $f_1(x) \in U$).

Portanto, $|\rho(f_1(x)) - f(x)| < \varepsilon(x)$.

Lema 6.07 :

Seja $f: M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação contínua entre variedades diferenciáveis, e consideremos M_2 tendo uma métrica obtida pelo seu mergulho em algum espaço euclidiano. Dado $\varepsilon(x)$, existe um $\delta(x)$ tal que se $g: M_1 \longrightarrow M_2$ é uma δ -aproximação para f , g é homotópica a f sob a homotopia $F(x,t)$ com:

- (1) $F(x,t) = f(x)$ para qualquer x tal que $g(x) = f(x)$, e
- (2) $F(x,t)$ é uma ε -aproximação para f , $t \in [0,1]$.

Demonstração :

Sejam U , ρ e $\delta(x)$ escolhidos como no lema anterior, e $g: M_1 \longrightarrow M_2$ uma δ -aproximação para f , isto é, $|g(x) - f(x)| < \delta(x)$, o que implica que $g(x)$ pertence a U . Então o segmento de reta de $g(x)$ a $f(x)$ está em U , assim;

$$F(x,t) = \rho(tg(x) + (1-t)f(x))$$

está bem definida.

Se $g(x) = f(x)$ temos:

$F(x,t) = \rho(tf(x) + (1-t)f(x)) = \rho(f(x)) = f(x)$, pois $f(x)$ pertence a M_2 .

Além disso $F(x,t)$ é uma ϵ -aproximação para f , qualquer t . De fato:

$$|F(x,t) - f(x)| = |\rho(tg(x) + (1-t)f(x)) - f(x)| < \epsilon(x)$$

pois, $tg(x) + (1-t)f(x)$ está em U .

CAPÍTULO III

O TEOREMA DE THOM-PONTRJAGIN.

Definição 1.01 :

Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis compactas n -dimensionais. M_1 e M_2 estão na mesma classe de cobordismo se existe uma variedade com bordo diferenciável Q $(n+1)$ -dimensional e compacta tal que Q é difeomorfo à união disjunta de M_1 e M_2 (denotada por $M_1 + M_2$).

Se M_1 e M_2 estão na mesma classe de cobordismo denotamos por $M_1 \sim M_2$.

Lema 1.02 :

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstração :

(1) Reflexividade.

$M \sim M$ pois, $M + M$ é difeomorfo a $\partial(M \times [0,1])$.

(2) Simetria.

Se $M_1 \sim M_2$, então existe Q $(n+1)$ -variedade diferenciável com bordo e compacta tal que $M_1 + M_2$ é difeomorfo a ∂Q , o que implica também que $M_2 \sim M_1$.

(3) Transitividade.

Sejam $M_1 + M_2$ difeomorfo com ∂Q_1 , e $M_2 + M_3$ difeomorfo com ∂Q_2 , sendo h_1 e h_2 os difeomorfismos, respectivamente.

Formaremos um novo espaço Q_3 de $Q_1 \cup Q_2$, identificando cada ponto de $h_1(M_2)$ com sua imagem sob $h_2 h_1^{-1}$.

Assim, existe um homeomorfismo h :

$$h: M_2 \times (-1,1) \longrightarrow Q_3$$

tal que $h|_{M_2 \times 0} \equiv h_1$, e h é um difeomorfismo de $M_2 \times [0, (-1)^{\frac{1}{2}})$

em Q_1 , para $i = 1, 2$. Se tomarmos isto como um sistema de coordenadas em Q_3 , Q_3 torna-se uma variedade diferenciável com bordo, e $M_1 + M_2$ é difeomorfo com ∂Q_3 .

Definição 1.03 :

Seja ξ um fibrado vetorial com $B(\xi)$ compacto, e $T(\xi)$ a compactificação de $E(\xi)$ acrescentando-se um ponto que será denotado por ∞ .

$T(\xi)$ é chamado o espaço de Thom de ξ .

Consideremos ξ com uma métrica Riemanniana. $T_\epsilon(\xi)$ será o espaço obtido de $E(\xi)$ identificando-se todos os vetores de comprimento maior ou igual a ϵ , a um ponto.

Seja $\alpha(x)$ uma função C^∞ com $\alpha'(x) \geq 0$ tal que $\alpha(x) \equiv 1$ em uma vizinhança de $x = 0$, e $\alpha(x) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow 1$.

A aplicação:

$$f: E(\xi) \longrightarrow T(\xi)$$

definida por:

$$f(e) = e\alpha(\|e\|/\epsilon)$$

induz um homeomorfismo de $T_\epsilon(\xi)$ sobre $T(\xi)$ que é um difeomorfismo no conjunto $E_\epsilon(\xi)$ consistindo dos vetores de comprimento menor que ϵ .

$$\begin{array}{ccc}
 E(\xi) & \xrightarrow{f} & T(\xi) \\
 \downarrow p & \nearrow h & \\
 T_\varepsilon(\xi) & &
 \end{array}$$

onde, p é a projeção.

Seja ξ^k um fibrado vetorial com $B(\xi)$ compacto e m -dimensional. Consideremos $E(\xi^k)$ com uma métrica dada pelo mergulho de $E(\xi^k)$ como uma subvariedade fechada em algum espaço euclidiano.

Nestas condições temos o seguinte lema:

Lema 1.04 :

Todo elemento f de $\pi_{n+k}(T(\xi^k), \infty)$ é homotópico à uma função h que pertence a $\pi_{n+k}(T(\xi^k), \infty)$ tal que $h^{-1}(B(\xi))$ é uma subvariedade diferenciável compacta de $\bar{C}_{n+k}$.

Demonstração :

A aplicação f pode ser representada por:

$$f: (\bar{C}_{n+k}, \bar{C}_{n+k}) \longrightarrow (T(\xi^k), \infty)$$

onde, $\bar{C}_{n+k}$ é o cubo fechado $[0, 1]^{n+k}$ e $\bar{C}_{n+k}$ é a fronteira deste cubo.

Sejam $U = f^{-1}(E(\xi^k))$ que está contido em C_{n+k} , $g: U \longrightarrow E(\xi^k)$ uma δ -aproximação diferenciável para $f|_U$, onde δ é tal que $\delta < 1$, e g é homotópica a f , sendo a homotopia F também uma 1-aproximação para f (F será contínua se definirmos $F(x, t) \equiv \infty$ para x em $\bar{C}_{n+k} - U$).

Pelo teorema 6.04 do capítulo II, g pode ser aproximada por uma aplicação diferenciável $h: U \longrightarrow E(\xi)$ que é transversa regular na subvariedade $B(\xi)$ de $E(\xi)$. Podemos escolher a aproximação suficientemente próxima tal que g é homotópica a h , sendo a homotopia $H(x,t)$ uma 1-aproximação para g , qualquer t .

Extendemos h para $\bar{C}_{n+k}$ definindo $h(x) \equiv \infty$ para x em $\bar{C}_{n+k} - U$.

Assim h está na classe de homotopia de f .

Como h é transversa em $B(\xi)$ temos que $h^{-1}(B(\xi))$ é uma subvariedade diferenciável M^n de U , sendo fechada em $\bar{C}_{n+k}$, portanto, compacta.

Definição 1.05 :

Seja a aplicação:

$$\lambda: \pi_{n+k}(T(\xi^k), \infty) \longrightarrow \eta_n$$

associando a classe de homotopia de h à classe de cobordismo de $M^n = h^{-1}(B(\xi))$.

Teorema 1.06 :

λ é um homomorfismo bem definido.

Demonstração :

Sejam h_0, h_1 aplicações que pertencem à mesma classe de homotopia em $\pi_{n+k}(T(\xi^k), \infty)$, sendo a aplicação:

$$H: (\bar{C}_{n+k} \times I, \bar{C}_{n+k} \times I) \longrightarrow (T(\xi^k), \infty)$$

a homotopia entre $h_0 = H(x, 0)$, e

$$h_1 = H(x, 1).$$

onde, h_0 e h_1 satisfazem:

- (1) h_i é diferenciável em $h_i^{-1}(E(\xi))$.
- (2) h_i é transversa regular em $B(\xi)$. ($i = 0, 1$).

Devemos mostrar que $h_0^{-1}(B)$ e $h_1^{-1}(B)$ pertencem a mesma classe de cobordismo.

Assumimos que:

$$H(x, t) = H(x, 0) \quad \text{para } t \leq 1/3, \text{ e}$$

$$H(x, t) = H(x, 1) \quad \text{para } t \geq 2/3.$$

Seja $U = H^{-1}(E(\xi)) \cap [\bar{C}_{n+k} \times (0, 1)]$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+k+1}$, e $A = U \cap [\bar{C}_{n+k} \times ((0, 1/4] \cup [3/4, 1))]$ fechado em U .

Pelo teorema 6.05 do capítulo II, existe

$$G: U \longrightarrow E(\xi)$$

uma 1-aproximação diferenciável para H tal que $G|_A = H|_A$, e G é diferenciável em A .

Como h_0 e h_1 são transversas em B então G satisfaz a condição de transversalidade regular para $B(\xi)$ nos pontos de A .

Pelo teorema 6.04 do capítulo II, existe uma aplicação diferenciável $F: U \longrightarrow E(\xi)$ tal que :

- (a) $G|_A = F|_A$.
- (b) F é transversa regular em $B(\xi)$, e
- (c) F é uma 1-aproximação para G .

Como G é uma 1-aproximação para H , e F é uma 1-aproximação para G então F é uma 2-aproximação para H , e desse modo F tor

na-se contínua se definirmos $F(x,t) \equiv \infty$ para (x,t) em

$\bar{C}_{n+k} \times (0,1) - U$. Além disso, se definirmos $F(x,t) = H(x,t)$ para $t = 0,1$, F será contínua em $\bar{C}_{n+k} \times [0,1]$.

Portanto, $F^{-1}(B)$ é um subconjunto compacto de $\bar{C}_{n+k} \times [0,1]$, sendo fechado e limitado.

Como $F|_U$ é transversa em B então $(F|_U)^{-1}(B)$ é uma $(n+1)$ variedade diferenciável de $\bar{C}_{n+k} \times (0,1)$.

Temos:

$$(F|_U)^{-1}(B) \cap (\bar{C}_{n+k} \times t) = \begin{cases} h_0^{-1}(B) \times t & \text{para } t \leq 1/4. \\ h_1^{-1}(B) \times t & \text{para } t \geq 3/4. \end{cases}$$

Assim $F^{-1}(B)$ é uma variedade com bordo diferenciável cujo bordo é $h_0^{-1}(B) + h_1^{-1}(B)$, o que implica que λ está bem definida.

Teorema 1.07 :

Se ξ^k é o fibrado Universal γ_m^k onde $k \geq n+1$ e $m \geq n$, então

$$\lambda: \pi_{n+k}(T(\gamma_m^k),) \longrightarrow n$$

é sobre.

Demonstração :

Seja M^n uma variedade compacta n -dimensional e $k \geq n+1$.

Como $2n+1 \leq n+k$, pelo lema 1.09 do capítulo I, M^n pode ser mergulhada em C_{n+k} . Seja ν^k o fibrado normal deste mergulho. A métrica Riemanniana em $E(\nu^k)$ é a derivada do produto escalar natural no fibrado tangente de $\mathbb{R}^{n+k}$, no qual ν^k está contido.

Pelo teorema da vizinhança tubular, para ε pequeno o subconjunto $E_{2\varepsilon}(v^k)$ de $E(v^k)$ é difeomorfo a uma vizinhança tubular de M^n em C_{n+k} . Seja U a imagem de $E_\varepsilon(v^k)$ por este difeomorfismo.

Seja $\bar{C}_{n+k}/\bar{C}_{n+k} - U$ o espaço obtido de $\bar{C}_{n+k}$ identificando-se $\bar{C}_{n+k} - U$ a um ponto.

Consideremos as seguintes aplicações:

- (1) p_1 a projeção de $\bar{C}_{n+k}$ sobre $\bar{C}_{n+k}/\bar{C}_{n+k} - U$.
- (2) p_2 o difeomorfismo de U sobre $E_\varepsilon(v^k)$ seguido pela aplicação de $T_\varepsilon(v^k)$ que identifica todos os vetores de comprimento maior ou igual a ε . A aplicação p_2 pode ser estendida a $\bar{C}_{n+k}$ definindo-se $p_2 \equiv \infty$ em $\bar{C}_{n+k} - U$.
- (3) p_3 é o homeomorfismo de $T_\varepsilon(v^k)$ sobre $T(v^k)$.
- (4) p_4 é a aplicação de fibrado, induzida pelo mergulho f de M^n em $\mathbb{R}^{n+k}$ $\mathbb{R}^{m+k}$.

$$\begin{array}{ccc} E(v^k) & \xrightarrow{p_4} & E(\gamma_m^k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^n & & G_{km} \end{array}$$

onde, G_{km} é a variedade de Grassmann de m -planos no espaço euclidiano $m+k$ dimensional.

Como as fibras de v^k e γ_m^k tem dimensão k , então p_4 satisfaz a condição de transversalidade regular para G_{km} em cada ponto de M^n .

Extendemos p_4 de modo natural a uma aplicação de $T(v^k)$ em $T(\gamma_m^k)$.

Finalmente, seja $g = p_4 p_3 p_2 p_1$.

Assim temos:

- (1) $g|_{\bar{C}_{n+k}} \equiv \infty$
- (2) $M^n = g^{-1}(G_{km})$, e
- (3) g é transversa regular em G_{km} .

Seja $[g]$ a classe de homotopia de g em $\pi_{n+k}(T(\gamma_m^k), \infty)$. Portanto, por definição, a classe de cobordismo de M^n é a imagem de $[g]$ pela aplicação λ , isto é :

$$\lambda [g] = [M^n].$$

$$\begin{array}{ccccc}
 M^n & \subseteq & U \subseteq \text{int } \bar{C}_{n+k} \subseteq \bar{C}_{n+k} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow p_1 & \\
 E_\epsilon(v^k) & \longrightarrow & T_\epsilon(v^k) & \xleftarrow{p_2} & \bar{C}_{n+k}/\bar{C}_{n+k} - U \\
 \downarrow & & \downarrow p_3 & & \\
 E(v^k) & \longrightarrow & T(v^k) & & \\
 \downarrow p_4 & & \downarrow p_4 & & \\
 G_{nk} \longleftarrow E(\gamma_n^k) \longrightarrow & T(\gamma_m^k) & & &
 \end{array}$$

Teorema 1.08 :

Se ξ^k é o fibrado Universal γ_m^k com $k \geq n+2$, $m > n$ então λ é 1-1.

Demonstração :

Temos $\lambda: \pi_{n+k}(T(\gamma_m^k), \infty) \longrightarrow n$.

Um elemento de $\pi_{n+k}(T(\gamma_m^k), \infty)$ pode ser representado pela aplicação:

$$f: (\bar{C}_{n+k}, \bar{C}_{n+k}) \longrightarrow (T(\gamma_m^k), \infty)$$

que é diferenciável em $f^{-1}(E)$ e transversa regular em G_{mk} .

Pela definição de λ temos:

$$\lambda([f]) = [M^n]$$

onde, $[f]$ representa a classe de homotopia de f e $[M^n]$ representa a classe de cobordismo de $M^n = f^{-1}(G_{mk})$.

Desejamos mostrar que se M^n é o bordo de uma $(n+1)$ -variedade com bordo Q , então f é homotópica a uma aplicação constante.

M^n é uma subvariedade de C_{n+k} . Seja seu fibrado normal ν^k . Escolhemos ϵ tal que $E_{2\epsilon}(\nu^k)$ é difeomorfo com a 2ϵ -vizinhança de M^n e U a imagem dos vetores de $E_\epsilon(\nu^k)$.

Consideremos uma métrica Riemanniana em γ_m^k , e seja escolhido tal que $\|x\| \geq \epsilon$ implica $\|f(x)\| \geq \delta$ para todo x em $E(\nu^k)$.

Passo 1 .

A aplicação f é homotópica a uma aplicação f_1 tal que:

(1) f_1 é diferenciável em $f^{-1}(E)$ e transversa regular em G_{mk} .

$$(2) f = f_1 \text{ em } M^n = f_1^{-1}(G_{mk}).$$

(3) f_1 leva o complementar de U_ε em ∞ .

Definimos:

$$F: E(\gamma_m^k) \times I \longrightarrow T(\gamma_m^k)$$

pela equação:

$$F(e, t) = e\alpha(t\|e\|/\delta)$$

onde α é a função definida na pág. .

Agora, basta tomarmos $f_1(x) = F(f(x), 1)$. Portanto,
 $f_1(x) = f(x)\alpha(\|f(x)\|/\delta)$.

Se $x \in M^n = f^{-1}(G_{mk})$ então $f(x)$ está em G_{mk} , o que implica que $\|f(x)\| = 0$. Portanto, $f_1(x) = f(x)\alpha(0) = f(x)$. Desse modo, $f_1(x) = f(x)$ em $M^n = f_1^{-1}(G_{mk})$.

Como f é transversa regular em G_{mk} , $f_1^{-1}(G_{mk}) = f^{-1}(G_{mk}) = M^n$ e $f_1(x) = f(x)$ em M^n então f também é transversa regular em G_{mk} .

Finalmente se x está fora de U_ε então $\|f(x)\| \geq \delta$.
 Portanto, $\alpha(\|f(x)\|/\delta) = \infty$, o que implica que $f_1(x) = \infty$.

Passo 2.

Pelo difeomorfismo de $U_{2\varepsilon}$ com $E_{2\varepsilon}$, f_1 induz uma aplicação $\bar{f}_1$ de $\bar{E}_\varepsilon(v^k)$ em $T(\gamma_m^k)$ que leva $\partial(E_\varepsilon)$ em ∞ .

$$\begin{array}{ccc}
 M^n & \xrightarrow{U_\varepsilon} & U_{2\varepsilon} \xrightarrow{\bar{C}_{n+k}} T(\gamma_m^k) \\
 & & \uparrow \text{difeo} \\
 & & E_{2\varepsilon} \supset \bar{E}_\varepsilon \xrightarrow{\bar{f}_1} T(\gamma_m^k)
 \end{array}$$

Qualquer homotopia de $\bar{f}_1$ que leva $\partial(E_\epsilon)$ em ∞ induz uma homotopia de f_1 .

A aplicação $\bar{f}_1$ é homotópica a uma aplicação $\bar{f}_2$ tal que:

- (1) $\bar{f}_2$ é diferenciável em $\bar{f}_2^{-1}(E)$ e transversa regular em G_{mk} .
- (2) $\bar{f}_2 \equiv \bar{f}_1$ em $M^n = \bar{f}_2^{-1}(G_{mk})$.
- (3) $\bar{f}_2$ é localmente uma aplicação de fibrado em alguma vizinhança de M^n .

A homotopia deixa $\partial(E_\epsilon)$ em ∞ .

Consideremos a aplicação:

$$G: \bar{E}_\epsilon(v^k) \times I \longrightarrow T(\gamma_m^k)$$

dada pela equação:

$$G(e, t) = \bar{f}_1(te)/t$$

Se $e \neq 0$ então :

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(e, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{f}_1(te)}{t}$$

é diferente de zero, pois $\bar{f}_1$ é diferenciável e transversa regular.

Vamos construir uma aplicação H tal que:

$$H: \partial(E_\epsilon) \times I \longrightarrow \infty$$

Escolhemos $\delta > 0$ tal que $\|x\| \geq \epsilon$ implica $\|G(x, t)\| \geq \delta$ para $x \in \bar{E}_\epsilon(v^k)$, $t \in I$.

Seja a aplicação:

$$H: \bar{E}_\epsilon(v^k) \times I \longrightarrow T(\gamma_m^k)$$

dada por

$$H(e, t) = [G(e, t)] \alpha(t\|G(e, t)\|/\delta)$$

Definimos $\bar{f}_2 \equiv H(e, 0)$. Então $\bar{f}_2$ é uma aplicação de fibrado para $\|e\|$ pequeno, pois $\alpha(x) \equiv 1$ para x pequeno.

As aplicações $H(e, 1) = \bar{f}_1(e) \alpha(\|\bar{f}_1(e)\|/\delta)$ e $\bar{f}_1$ são homotópicas. A homotopia é definida pela equação:

$$K(e, t) = \bar{f}_1(e) \alpha(t\|\bar{f}_1(e)\|/\delta)$$

Passo 3 .

Seja Q a $(n+1)$ -variedade com bordo tal que $M^n = \partial Q$, e um difeomorfismo $h: M^n \times [0, 1] \longrightarrow Q$ tal que $h(M^n \times 0) = \partial Q$.

Definimos $h_1: Q \longrightarrow C_{n+k} \times I$ como segue:

$$h_1(x) = (y, t) \quad , \quad \text{se } x = h(y, t) \text{ onde } y \in M^n \text{ e } 0 \leq t \leq 1/2$$

$$h_1(x) = p \quad , \quad \text{se } x \text{ não está na imagem de } h, \text{ onde } p \text{ é algum ponto fixo do interior de } C_{n+k} \times I.$$

$$h_1(x) = (1 - \beta(t)) (y, 1/2) + \beta(t)p \quad , \quad \text{se } x = h(y, t) \text{ onde } y \in M^n, \\ 1/2 \leq t \leq 1, \text{ e } \beta(t) \text{ é uma função } C^\infty \text{ com} \\ \beta'(t) \geq 0, \beta(t) \equiv 0 \text{ em uma vizinhança de } t = 1$$

A aplicação h_1 é diferenciável de $\text{int } Q$ em $\text{int}(C_{n+k} \times I)$ e h_1 é uma imersão 1-1 em uma vizinhança de ∂Q .

Como $\dim(C_{n+k} \times I) = n+k+1 > 2(n+1)$, pelo lema 6.03 do capítulo II h_1 pode ser aproximada por uma imersão:

$$h_2: Q \longrightarrow C_{n+k} \times I$$

tal que $h_2 \equiv h_1$ em uma vizinhança de ∂Q , e sendo Q compacto h_2 é um mergulho.

Portanto, Q pode ser considerada como um subconjunto de $C_{n+k} \times I$.

Passo 4.

Seja a aplicação $\bar{f}_2$ obtida no passo 2.

Consideremos $f_2 : \bar{C}_{n+k} \times 0 \longrightarrow T(\gamma_m^k)$

dada por:

$$f_2(x, 0) = \bar{f}_2(x)$$

A aplicação f_2 é uma aplicação de fibrado quando restrita a uma pequena vizinhança tubular de $M^n \times 0$ em $C_{n+k} \times 0$. Extendemos f_2 a $\bar{C}_{n+k} \times [0, b)$ para b pequeno do seguinte modo:

$$f_2^*(x, t) = f_2(x, 0)$$

(f_2^* é a extensão).

Suponhamos que existe uma aplicação

$$g : N \longrightarrow T(\gamma_m^k)$$

(onde N é a ε' -vizinhança de Q em $C_{n+k} \times I$), tal que $f_2 = g$ em alguma vizinhança de ∂Q em $C_{n+k} \times I$, e aplica cada ponto de $N-Q$ em um vetor não nulo em $E(\gamma_m^k)$.

Escolhemos δ tal que se a distância de x a Q é maior ou igual a $\varepsilon/2$, então $\|g(x)\| \geq \delta$.

Definimos:

$$g_1 : C_{n+k} \times I \longrightarrow T(\gamma_m^k)$$

pelas equações:

$$\begin{aligned} g_1(x, s) &= g(x, s) \alpha(\|g(x, s)\|/\delta) && \text{para } (x, s) \text{ em } N \\ g_1(x, s) &= \infty && \text{caso contrário} \end{aligned}$$

As aplicações $g_1|_{C_{n+k} \times 0}$ e f_2 são homotópicas, sendo a

homotopia:

$$K : C_{n+k} \times 0 \times I \longrightarrow T(\gamma_m^k)$$

dada por :

$$K((x,0),t) = g(x,0) \alpha(t\|g(x,0)\|/\delta) \quad \text{para } (x,0) \text{ em } N$$

$$= \infty \quad \text{caso contrário.}$$

Quando $t = 0$ temos :

$$K((x,0),0) = g(x,0) \quad \text{para } (x,0) \text{ em } N$$

$$= \infty \quad \text{caso contrário.}$$

Portanto, $K((x,0),0) = f_2(x,0)$.

Para $t = 1$ temos :

$$K((x,0),1) = g(x,0) \alpha(\|g(x,0)\|/\delta) \quad \text{para } (x,0) \text{ em } N$$

$$= \infty \quad \text{caso contrário.}$$

$$\text{Assim } K((x,0),1) = g_1 \Big|_{C_{n+k} \times 0} (x,0).$$

Além disso $g_1 \Big|_{C_{n+k} \times 0} \equiv \infty$, isto é, $g_1 \Big|_{C_{n+k} \times 0}$ é cons -

tante.

Provamos então que a aplicação f é homotópica a $g_1 \Big|_{C_{n+k}}$ que é constante, o que conclui a demonstração.

Teorema 1.09 : "TEOREMA DE THOM-PONTRJAGIN"

O grupo de cobordismo π_n é isomorfo ao grupo de homotopia $\pi_{n+k}(T_k)$, para $k \geq n+2$.

Demonstração:

Segue dos teoremas 1.07 e 1.08 anteriores.

Observação:

Em [5] Thom determinou que o anel de cobordismo das variedades fechadas não orientadas η_* é isomorfo como álgebra sobre $\mathbb{Z}_2$ à álgebra dos polinômios em indeterminadas u_n , onde o grau de u_n é igual a n , e n é qualquer número natural exceto os da forma $2^s - 1$ (veja [4]). Isto é, $\eta_* = \mathbb{Z}_2 [u_2, u_4, u_5, \dots]$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Milnor, John : Differential Topology. Lectures by John Milnor, Princeton University, Fall term 1958 .
Notes by James Munkres.
- [2] Munkres, James R. : Elementary Differential Topology .
Lectures given at Massachusetts Institute of
Technology. Fall, 1961.
- [3] Poincaré, H. : Analysis Situs, Journal de l'École Polytechnique, 1(1895).
- [4] Stong, R. : Notes on Cobordism Theory, Princeton Univ.
Press, Princeton, New Jersey, 1968.
- [5] Thom, R. : Quelques propriétés globales des variétés
différentiables. Comment. Math. Helv.