

A meus pais, Rosa,

Orlando e Renato.

Sobre a decomposição de
funções de H^p em átomos

IMECC

VERA LUCIA DA ROCHA LOPES

ORIENTADOR:

PROF. DR. CARLOS SEGOVIA FERNANDEZ

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Financiadora Nacional de Estudos e Projetos (FINEP).

junho de 1977.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS:

Ao Prof. Carlos Segovia Fernandez que nos honrou com uma orientação segura e uma dedicação sem par.

Ao Prof. Roberto A. Macías pela amabilidade e gentileza com que sempre se dispôs a nos auxiliar.

Aos colegas, amigos e a todos aqueles que, mesmo indiretamente, nos apoiaram e incentivaram.

Ao CNPq e FINEP pela ajuda financeira.

A Maria Helena Derigi pelo excelente trabalho da tilográfico.

ÍNDICE

CAPÍTULO 0 - Preliminares Básicos	1
CAPÍTULO I - A Decomposição de uma Função de S em partes "boa" e "ruim"	11
CAPÍTULO II - Uma Caracterização de Variável Real de H^p	33
BIBLIOGRAFIA	49

INTRODUÇÃO:

O objetivo deste trabalho é dar uma demonstração detalhada de um teorema de caracterização dos espaços $H^p(\mathbb{R})$ em termos de p -átomos, demonstrado por R.R. Coifman em [2].

No capítulo 0 introduzimos algumas definições, - teoremas e propriedades que não demonstramos mas que são considerados pré-requisito para os demais capítulos. Entre elas está o espaço $\mathcal{S}$ das funções teste para a definição de distribuições temperadas, que são os funcionais lineares e contínuos sobre $\mathcal{S}$. De posse das distribuições temperadas, apresentamos o espaço H^p que é o conjunto das distribuições temperadas que são limite de certas funções harmônicas. Salientamos também que para $p > 1$, H^p é isoformo a L^p e assim consideraremos apenas $0 < p \leq 1$.

Ainda no capítulo 0 apresentamos, com o teorema de Whitney e suas consequências, a decomposição de conjuntos abertos em cubos, e a partição da unidade a ela associada. Este teorema é indispensável à demonstração do tema 1 do capítulo 1. Este é um lema de tipo Calderón-Zygmund que Fefferman, - Riviere e Sagher demonstraram em [1]. Dedicamos o capítulo 1 à uma demonstração detalhada do lema 1 que é a decomposição de uma função de $\mathcal{S}$ em partes "boa" e "ruim" e que nos dá também uma majoração para a norma ∞ da parte boa e para a norma p_0 da função ruim onde p_0 é um número tal que $0 < p_0 \leq 1$.

Apresentamos a demonstração devido a grande importância que este lema tem na demonstração do teorema de Coifman, cuja demonstração, que é o objetivo deste trabalho, se encontra no capítulo 2. O teorema nos dá como condição necessária e suficiente para que uma distribuição temperada f pertença a $H^p(\mathbb{R})$, que f seja igual a $\sum \alpha_i a_i$ onde os a_i são p-átomos e os α_i números reais tais que $\sum |\alpha_i|^p < \infty$. Fazemos a demonstração para funções de $S \cap H^p$ e depois, usando o argumento de que $S \cap H^p$ é denso em H^p , completamos nosso objetivo.

CAPÍTULO 0:

Preliminares Básicos

Este capítulo consta de uma série de definições, teoremas e propriedades que usaremos nos demais capítulos. Não faremos aqui nenhuma demonstração pois elas podem ser encontradas nas respectivas referências.

(0.1) - Considerações Gerais sobre R^n .

R^n é o conjunto das n-uplas de números reais, ou seja, $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$. Chamaremos de R_+^{n+1} o conjunto dos pares (x, t) , onde x pertence a R^n e $t > 0$.

Tomaremos em R^n a norma $|x| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$.

Por um multi-índice α de ordem k , entendemos uma k-upla de números inteiros não negativos. A norma de α é definida por $|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i$. Dado um elemento x de R^n , e um multi-índice α de ordem n representaremos o monômio

$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ por x^α . Dada uma função f em R^n

com valores em R e um multi-índice α de ordem n , para designar a derivada parcial mista de ordem $|\alpha|$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}},$$
 usaremos as notações: $D^\alpha f(x)$ e

$(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x).$

Dado um aberto A contido em $\mathbb{R}^n$, uma função u de classe C^2 definida em A é dita harmônica se $\sum_{i=1}^n (\frac{\partial}{\partial x_i})^2 u(x) = 0$ para todo x em A .

Denotaremos por $m(E)$ a medida de Lebesgue do conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$ e usaremos a notação $\int_E f(x) dx$ ao invés de $\int_E f dm$.

Caso o domínio de integração não seja explicitado, fica subentendido que é o espaço todo.

(0.2) - Considerações Gerais sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ver [3]).

Chamaremos de $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$, ao conjunto das funções mensuráveis cuja potência p é Lebesgue integrável, ou seja, é o conjunto das funções mensuráveis tais que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$.

Como "norma" de uma função f de $L^p(\mathbb{R}^n)$, definimos $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Gostaríamos de observar que a "norma" que definimos acima só é realmente uma norma se $p \geq 1$.

Para $p < 1$, definimos $d(f, g) = \|f - g\|_p^p$, e temos que:

- (i) d é distância
- (ii) $(L^p(\mathbb{R}^n), d)$ é completo
- (iii) com a topologia induzida por d , $L^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topológico.

Por definição, denotamos por L^∞ o conjunto de todas as funções mensuráveis que são essencialmente limitadas e definimos como norma $\|f\|_\infty = \inf\{M : m(\{t : f(t) > M\}) = 0\}$ ou ainda $\|f\|_\infty = \inf\{\beta : |f| \leq \beta \text{ a.e.}\}$.

(0.3) - O Produto de Convolução (ver [7]).

Se f e g são duas funções pertencentes a $L^1(\mathbb{R}^n)$ sua convolução $h = f * g$ é a função cujo valor em x pertencente a $\mathbb{R}^n$ é $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ e é simples verificar que h pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$ e que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

De uma forma mais geral, $h = f * g$, está bem definida sempre que f pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, e g a $L^1(\mathbb{R}^n)$. O que nos garante tal afirmativa é o seguinte

Teorema de Young:

"Se f pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ e g pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$, então $h = f * g$ está bem definida a.e. e pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ainda mais $\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ ".

O produto de convolução satisfaz, entre outras, às seguintes propriedades:

- a) $f * g = g * f$ (comutativa)
- b) $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1 (f_1 * g) + \alpha_2 (f_2 * g)$ (bilinear)

(0.4) - O Espaço $S(\mathbb{R}^n)$ (ver [4] e [7]).

Chamamos de $S(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente S , o conjunto das funções ψ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tais que, quaisquer que sejam o multi-índice h e o inteiro k , existe uma constante $C_{\psi, h, k}$ tal que $|x|^k |D^h \psi(x)| \leq C_{\psi, h, k}$ para todo x em $\mathbb{R}^n$. As funções de S serão as nossas "funções-teste".

Se definirmos $\|\psi\|_m = \max_{|h|+k \leq m} \{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ |x|^k |D^h \psi(x)| \} \}$,

verificamos que $||\cdot||_m$ é uma norma para todo m . A partir das normas definidas acima, definimos a distância $d(\psi, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \frac{||\psi - \varphi||_m}{(1 + ||\psi - \varphi||_m)}$ e temos que (S, d) é um espaço métrico.

O espaço S satisfaz às seguintes propriedades:

- 1.) ψ_i converge para ψ se, e somente se, para todo m , $||\psi_i - \psi||_m$ converge para 0.
- 2.) (S, d) é completo e $\{\psi_i\}$ é uma seqüência de Cauchy se, e somente se, para todo m e para todo $\varepsilon > 0$, existir um $n_0(m, \varepsilon)$ tal que $||\psi_i - \psi_j||_m < \varepsilon$, se $i, j > n_0$.
- 3.) a injeção canônica de S em $L^p(\mathbb{R}^n)$ $i : S \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua para todo p e, chamando $i(S) = S$, temos que o fecho de S é igual a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(0.5) - *Distribuições Temperadas - O Dual de S (ver [4] e [7]).*

Chamamos de distribuição temperada a todo funcional linear e contínuo sobre S . Para denotar uma distribuição temperada, usaremos as notações: $L(\psi)$ ou (f, ψ) , ψ pertencente a S .

Exemplos:

- 1.) Quando f pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$, o funcional linear L_f , definido por $L_f(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx$, ψ em S é uma distribuição temperada (ver [7]).
- 2.) A distribuição δ^α , definida por $(\delta^\alpha, \psi) = D^\alpha \psi(0)$ para todo multi-índice α (ver [4]).

Chamamos de S' o conjunto de todas as distribuições

temperadas, ou seja, S' é o dual topológico de S . Portanto nos exemplos 1.) e 2.) temos que L_f e δ^α pertencem a S' .

Definição: "Dizemos que f_n converge para f em S' se, para cada ψ em S , $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \psi) = (f, \psi)$ ".

(0.6) - O Espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ (ver [5]).

Definiremos aqui os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ com os quais iremos trabalhar nos próximos capítulos. Gostaríamos porém de dar uma certa "motivação" para tal definição. Daremos então uma primeira definição de $H^p(\mathbb{R}^n)$, a partir da qual chegaremos na definição que será usada.

Definição (primeira): "Chamamos de $H^p(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $u(x, t)$, harmônicas em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, tais que

$$u^*(x) = \sup_{(y, t): |x-y| < t} |u(y, t)| \text{ pertence a } L^p(\mathbb{R}^n)".$$

Usaremos também o seguinte

Teorema:

"Dada $u(x, t)$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$, temos que:

(i) existe $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ em quase todo ponto e f pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

$$(ii) \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t) - f(x)|^p dx = 0$$

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \psi(x) dx$ existe para toda ψ em S , e define uma

distribuição temperada L , isto é, existe uma distribuição temperada L tal que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = L$, no sentido da convergência das distribuições temperadas".

Como consequência do teorema anterior temos que se $p \geq 1$, para toda ψ em S ,

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx = (f, \psi).$$

Observamos ainda que, para $0 < p < 1$, embora exista $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) (= f(x))$ em quase todo ponto; $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \psi(x) dx$ exista e defina uma distribuição temperada, a expressão $(f, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx$ não tem sentido pois, para $0 < p < 1$, $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)$ não é, em geral, localmente integrável (f não pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$).

$$\text{Definimos: } |||u|||_{H^p(\mathbb{R}^n)} = |||u^*|||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Agora então daremos a definição de $H^p(\mathbb{R}^n)$ que será usada daqui por diante.

Definição (segunda): "Chamamos de espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das distribuições temperadas f que são limite, quando t tende a 0 de funções harmônicas $u(x, t)$ em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, tais que $u^*(x)$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ ".

$$\text{Definimos: } |||f|||_{H^p(\mathbb{R}^n)} = |||u^*|||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Gostaríamos de salientar também que:

- (i) para $0 < p \leq 1$ $|||\cdot|||_{H^p}^p$ satisfaz a desigualdade triangular.
- (ii) H^p é completo para todo p .
- (iii) $S \cap H^p$ é denso em H^p , para todo p .

Observamos que a definição (segunda) é equivalente à definição dada anteriormente (primeira).

Do que observamos em (1) e usando a teoria da integral de Poisson (ver [5]), pode-se ver que, para $p \geq 1$, $H^p(\mathbb{R}^n)$ é isomorfo a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Enunciaremos agora um teorema que nos dá algumas caracterizações para funções de $H^p(\mathbb{R}^n)$. Precisamos antes da seguinte

Definição: "Dada ψ em $S(\mathbb{R}^n)$, definimos $\psi_t(x) = t^{-n} \psi(\frac{x}{t})$, $t > 0$ ".

Teorema (ver [8]):

"Para uma distribuição temperada f e um $p > 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)$, $u(x, t)$ pertencente a $H^p(\mathbb{R}^n)$ (definição primeira) onde o limite é tomado na convergência das distribuições temperadas.

(ii) para alguma ψ em S tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1$, a função $f^+(x) = \sup_{t > 0} |f * \psi_t(x)|$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) para alguma ψ em S tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1$, a função $f^*(x) = \sup_{(y, t): |x-y| < t} |f * \psi_t(y)|$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iv) definindo, para cada ψ pertencente a S ,

$$|||\psi|||_N = \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \psi(x) \right| dx$$

então, para N suficientemente grande dependendo somente de p , a

função

$$f^{**}(x) = \sup_{||\psi||_{N^{\leq 1}}} \sup_{(y,t): |x-y| < 10t} |f * \psi_t(y)| \quad \text{pertence}$$

a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Ainda mais: } ||f^+||_{L^p}, ||f^*||_{L^p}, ||f^{**}||_{L^p}, ||f||_{H^p}$$

são equivalentes".

(0.7) - *Decomposição de Conjuntos Abertos em Cubos -
Partição da Unidade (ver [6]).*

No que segue F denotará um conjunto fechado arbitrário não vazio de $\mathbb{R}^n$, Ω seu complementar. Por um cubo entendemos um cubo fechado em $\mathbb{R}^n$ com lados paralelos aos eixos e, dois a dois de tais cubos serão considerados disjuntos, se seus interiores forem disjuntos. Para tal cubo Q , $\text{diam}(Q)$ denotará seu diâmetro e $\text{dist}(Q, F)$ sua distância a F .

O que queremos salientar neste item é a decomposição de um conjunto aberto arbitrário de $\mathbb{R}^n$ em uma união "disjunta" de cubos, adequada. Salientaremos também a partição da unidade baseada em tal decomposição.

Definição: "Dizemos que dois cubos Q_1 e Q_2 se tocam se suas fronteiras tem algum ponto comum".

Teorema (de Whitney):

"Seja F dado. Então existe uma coleção enumerável de cubos $F = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots\}$ tal que:

$$1.) \bigcup_k Q_k = \Omega = F^c.$$

2.) os Q_k são mutuamente disjuntos.

3.) existem constantes c_1 e c_2 , independentes de F tais que $c_1 \text{diam}(Q_k) \leq \text{dist}(Q_k, F) \leq c_2 \text{diam}(Q_k)$. Na realidade podemos tomar $c_1 = 1$ e $c_2 = 4$.

4.) se Q_1 e Q_2 se tocam, então $\frac{1}{4} \text{diam}(Q_2) \leq \text{diam}(Q_1) \leq 4 \text{diam}(Q_2)$.

5.) se Q pertence a F , então existem no máximo $N = (12)^n$ cubos em F que tocam Q .

6.) para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, cada ponto de Ω está contido no máximo em N dos cubos

$$Q_k^+ = (1 + \varepsilon)(Q_k - x_k) + x_k, \text{ onde } x_k \text{ é o centro de } Q_k.$$

Chamemos Q_0 o cubo unitário centrado na origem. Fixemos uma função de classe C^∞ , ψ , com as seguintes propriedades:

$$(i) \ 0 \leq \psi \leq 1$$

$$(ii) \ \psi(x) = 1; \text{ se } x \text{ pertence a } Q_0$$

$$(iii) \ \psi(x) = 0, \text{ se } x \text{ não pertence a } (1 + \varepsilon)Q_0$$

Seja agora ψ_k^* a função ψ ajustada ao cubo Q_k , ou seja $\psi_k^*(x) = \psi\left[\frac{(x-x_k)}{\ell_k}\right]$, onde x_k é o centro de Q_k e ℓ_k é o comprimento comum dos lados de Q_k .

Chamando $\text{supp } \psi$ ao suporte de ψ , temos que

$$\text{supp } \psi_k^* \subset (1 + \varepsilon)Q_k; \text{ além disso, se } x \text{ está em } Q_k, \quad \psi_k^*(x) = \psi\left[\frac{(x-x_k)}{\ell_k}\right] = 1 \text{ pois } \frac{(x-x_k)}{\ell_k} \text{ está em } Q_0.$$

Observemos ainda que $|(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \psi^*(x)| \leq A_\alpha [\text{diam}(Q_k)]^{-|\alpha|}$ para cada multi-índice α , onde os A_α são constantes independentes de k .

Definamos agora $\psi_k(x)$, para cada x em R^n por:

$\psi_k(x) = \frac{\psi_k^*(x)}{\phi(x)}$, onde $\phi(x) = \sum_k \psi_k^*(x)$. Temos que ϕ está bem definida e é diferenciável pois, do item 6.) do teorema de Whitney segue que o recobrimento dos Q_k é localmente finito.

Usando as propriedades acima mencionadas pode-se mostrar que existe uma constante c tal que $\psi_k(x) \geq c > 0$ para todo x em Q_k .

Se x pertence a $F^C(\Omega)$, $\sum_k \psi_k(x) = 1$; então, a família (ψ_k) é a partição da unidade, em F^C , que mencionamos.

Gostaríamos ainda de lembrar que, se y está em Ω^C , $\psi_k(y) = 0$. Então

$$\chi_\Omega (\equiv \text{função característica de } \Omega) = \sum_k \psi_k.$$

Demonstra-se também que, se x pertence a F^C .

$|(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \psi_k(x)| \leq c_\alpha [\text{diam}(Q_k)]^{-|\alpha|}$, onde c_α é uma constante que não depende de k .

CAPÍTULO I:

A Decomposição Básica de uma Função de S em Partes Boa e Ruim:

Para a demonstração do teorema de caracterização dos espaços $H^p(R)$ em termos de p -átomos reais, que é o objetivo do nosso trabalho, necessitamos de um lema de tipo Calderón-Zygmund, demonstrado por Fefferman, Riviere e Sagher (ver [1]).

Dedicamos este capítulo à sua demonstração.

Fixemos $0 < p_0 \leq p < 1$.

Lema 1 (de tipo Calderón-Zygmund) (ver [1]):

"Seja f pertencente a S , $\alpha > 0$ e $\Omega = \{x \in R^n : f^{**}(x) > \alpha\}$. Então f pode ser escrita como a soma de duas funções g e b que satisfazem:

$$I - \|g\|_{\infty} \leq c_1 \alpha$$

$$II - \|b\|_{H^{p_0}}^{p_0} \leq c_2 \int_{\Omega} (f^{**}(x))^{p_0} dx, \text{ onde } c_1 \text{ e } c_2 \text{ não dependem de } f \text{ e de } \alpha, \text{ só de } p \text{ e } p_0."$$

Demonstração:

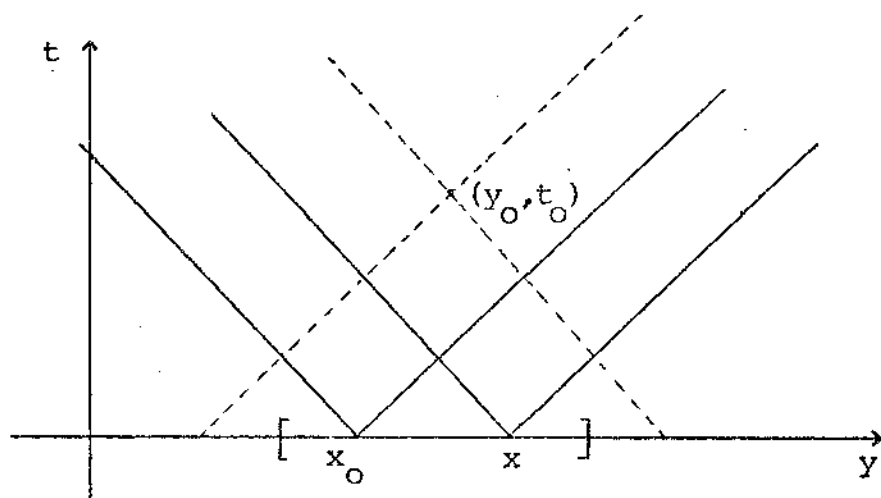
Provemos inicialmente que Ω é aberto:

$$\text{Temos que } f^{**}(x) = \sup_{||\psi||_N \leq 1} \sup_{(y,t): |x-y| < 10t} |f * \psi_t(y)|;$$

então, pela definição de $\sup$, dado x_0 em Ω existe ψ em S ,

com $\|\psi\|_N \leq 1$, tal que $\sup_{|x_0 - y| < 10t} |f * \psi_t(y)| > \alpha$. Usando novamente a definição de sup temos que existe um par (y_0, t_0) tal que $|f * \psi_{t_0}(y_0)| > \alpha$

Grãficamente:



Vemos então que existe um cubo aberto tal que: (i) x_0 pertence ao cubo; (ii) para todo x pertencente ao cubo, (y_0, t_0) pertence ao interior do cone em x . Então $f^{**}(x) > \alpha$ o que implica que x pertence a Ω e portanto o cubo está contido em Ω o que mostra que Ω é aberto como queríamos provar,

Como f está em S , temos que $m(\Omega) < \infty$ pois Ω é limitado.

Tendo mostrado que Ω é aberto (então Ω^c é fechado), o teorema de Whitney e suas conseqüências (ver (0.7)) nos dão a existência de cubos fechados (Q_j) e de uma família de funções suaves (ψ_j) satisfazendo as propriedades ali mencionadas.

Seja x_j o centro de Q_j e y_j um ponto em $R^n - \Omega$ satisfazendo

$$(2) \quad |y_j - x_j| \leq 10 d_j; \text{ como } y_j \in \Omega^c, \quad f^{**}(y_j) \leq \alpha.$$

Tomaremos como suporte de ψ_j , o cubo Q_j expandido do fator $\frac{6}{5}$, ou seja $\text{supp } \psi_j = \frac{6}{5} Q_j$ ($\varepsilon = \frac{1}{5}$).

Agora, dado Q_j , chamaremos de Q_j^* o cubo que tem o mesmo centro que Q_j e cujo lado é quatro vezes ℓ_j .

Como $f = f\chi_{R^n - \Omega} + f\chi_{\Omega}$ e $\chi_{\Omega} = \sum_j \psi_j$ temos que

$$f = f\chi_{R^n - \Omega} + \sum_j f\psi_j$$

Consideremos agora o espaço $L^2(d\mu)$ onde $d\mu = \psi_j(x)dx$, com o produto escalar $\int f(x)h(x)\psi_j(x)dx$.

Como ψ_j tem suporte compacto para todo j , $\int h(x)\psi_j(x)dx < \infty$ onde $h(x)$ é qualquer função contínua, o que mostra que as funções contínuas pertencem a $L^2(\psi_j(x)dx)$.

Chamando de W o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a M (um natural), temos que W é um sub-espaço de $L^2(\psi_j(x)dx)$ e W é fechado pois é de dimensão finita. Então, como $f \in L^2(\psi_j(x)dx)$, pelo teorema da projeção ortogonal em espaços de Hilbert, podemos escrever de uma única forma

$$f = P_j + h_j$$

onde P_j pertence a W e h_j é ortogonal a W , ou seja

$\int h_j(x)Q(x)\psi_j(x)dx = 0$ qualquer que seja o polinômio $Q(x)$ de grau menor ou igual a M .

Portanto, dado um polinômio $Q(x)$ de grau menor ou igual a M , o fato de que $f = P_j + h_j$ e $\int h_j(x)Q(x)\psi_j(x)dx = 0$, implica que

$$\int f(x) Q(x) \psi_j(x) dx = \int P_j(x) Q(x) \psi_j(x) dx$$

Sendo α um multi-índice tal que $|\alpha| \leq M$ temos que $(x - x_j)^\alpha$ pertence a W e então

$$\int f(x) (x - x_j)^\alpha \psi_j(x) dx = \int P_j(x) (x - x_j)^\alpha \psi_j(x) dx.$$

Feitas as observações acima, podemos definir a nossa função "boa" g por

$$g = f \chi_{R^n - \Omega} + \sum_j P_j \psi_j$$

A primeira coisa que faremos para provar a parte I do Lema 1 é mostrar que $\|P_j\|_{L^\infty(Q_j^*)} \leq b\alpha$ onde a constante b não depende de j .

Usando o fato de que $\int f(x) Q(x) \psi_j(x) dx = \int P_j(x) Q(x) \psi_j(x) dx$ para todo Q em W e fazendo a mudança de variáveis $x = x_j + d_j y$, temos que

$\int f(x_j + d_j y) Q(y) \psi_j(x_j + d_j y) dy = \int P_j(x_j + d_j y) Q(y) \psi_j(x_j + d_j y) dy$, pois, a aplicação que leva $Q(y)$ em $Q(x_j + d_j y)$ é uma bijeção em W .

Sendo $\pi_1^j, \pi_2^j, \dots, \pi_L^j$ uma base ortonormal de $W(\psi_j(x_j + d_j y))$, onde L depende somente de M e n , temos que $P_j(x_j + d_j y) = \sum_{r=1}^L a_r^j \pi_r^j(y)$.

Mostremos que os coeficientes dos polinômios da base são majorados por uma constante que só depende de M e n , não dependendo de j .

Para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leq M$, definamos o funcional linear $L_\gamma : W \rightarrow R$ por $L_\gamma(\sum_{|\beta| \leq M} b_\beta y^\beta) = b_\gamma$.

Fixemos em W a norma $\|Q\|^2 = \int_{|y| \leq 1} |Q(y)|^2 dy$;

como o número de multi-índice γ é finito $\|L_\gamma\| \leq c'$, então

$$|L_\gamma(Q)| \leq c' \|Q\|. \text{ Portanto } |L_\gamma(Q)| \leq c' \left(\int_{|y| \leq 1} |Q(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Sendo $\psi_j(x) \geq c$ em Q_j , segue que $\psi_j(x_j + d_j y) \geq c$ em $|y| \leq 1$, e então

$$\begin{aligned} |L_\gamma(Q)| &\leq c' (c^{-1} \int_{|y| \leq 1} |Q(y)|^2 \psi_j(x_j + d_j y) dy)^{1/2} \leq \\ &\leq c' c^{-1/2} \left(\int_{|y| \leq 1} |Q(y)|^2 \psi_j(x_j + d_j y) dy \right)^{1/2} \quad \text{onde} \end{aligned}$$

c não depende da ψ_j dada na partição da unidade.

Tomando então como Q um polinômio π_s^j da base, temos

$$|L_\gamma(\pi_s^j)| \leq c' c^{-1/2} \left(\int |\pi_s^j(y)|^2 \psi_j(x_j + d_j y) dy \right)^{1/2} \leq$$

$\leq c' c^{-1/2} = c(M, n)$, ou seja, os coeficientes dos polinômios da base são uniformemente limitados em j .

Retomando a expressão $P_j(x_j + d_j y) = \sum_{r=1}^L a_r^j \pi_r^j(y)$

e sendo $a_x^j = \int P_j(x_j + d_j y) \pi_r^j(y) \psi_j(x_j + d_j y) dy =$

$$= \int f(x_j + d_j y) \pi_r^j(y) \psi_j(x_j + d_j y) dy, \text{ fazendo a mudança}$$

de variáveis $x = x_j + d_j y$, a expressão de a_r^j fica

$$(3) \quad a_r^j = \int f(x) \pi_r^j \left[\frac{(x - x_j)}{d_j} \right] \psi_j(x) d_j^{-n} dx$$

Introduziremos uma nova função definida por:

$$\phi^{r,j}(u) = \pi_r^j \left[\frac{(y_j - x_j)}{d_j} - u \right] \psi_j(y_j - d_j u).$$

Vamos estimar a norma $|||\phi^{r,j}|||_N$:

$$\begin{aligned} \text{Temos } |||\phi^{r,j}|||_N &= \int (1 + |u|)^N \sum_{|\delta| \leq N} |D^\delta \phi^{r,j}(u)| du = \\ &= \int (1 + |u|)^N \sum_{|\delta| \leq N} \left[\sum_{|\alpha| + |\beta| = |\delta|} k_{\alpha,\beta} |D^\alpha \pi_r^j \left[\frac{(y_j - x_j)}{d_j} - u \right]| |D^\beta \psi_j(y_j - d_j u)| \right] du. \end{aligned}$$

Para que u pertença ao suporte da função que estamos integrando, temos que ter $|u| \leq 12$ e $\left| \frac{(y_j - x_j)}{d_j} - u \right| \leq 22$ pois

(i) $(y_j - d_j u)$ tem que pertencer a $\text{supp } \psi_j$, donde

$$|y_j - d_j u - x_j| \leq \frac{6}{5} d_j$$

$$|d_j u| - |y_j - x_j| \leq \frac{6}{5} d_j$$

$$d_j |u| \leq \frac{6}{5} d_j + |y_j - x_j| \leq \frac{6}{5} d_j + 10 d_j \quad (\text{ver (2)}) \quad \text{o}$$

que implica $|u| \leq 12$.

(ii) de $\left| \frac{(y_j - x_j)}{d_j} \right| \leq 10$ e $|u| \leq 12$, vem

$$\left| \frac{(y_j - x_j)}{d_j} - u \right| \leq 22.$$

Temos então

a) Para a função $\pi_r^j \left[\frac{(y_j - x_j)}{d_j} \right] - u$,

$$(i) \quad \left| \frac{(y_j - x_j)}{d_j} - u \right| \leq 22$$

(ii) os coeficientes de π_r^j são limitados superiormente por uma constante $C(M, n)$ (independente de j). Portanto os polinômios π_r^j ($r = 1, 2, \dots, L$) são limitados no conjunto em questão onde suas derivadas também o são, ou seja, existe k que depende apenas de M e n , não dependendo de j , tal que:

$$|D^\alpha (\pi_r^j \left[\frac{(y_j - x_j)}{d_j} \right] - u)| \leq k.$$

b) Para a função $\psi_j(y_j - d_j u)$, o teorema de Whitney e suas consequências (ver (0.7)) implicam que:

$$\begin{aligned} |D^\beta \psi_j(y_j - d_j u)| &= |(-d_j)^{|\beta|} D^\beta \psi_j(y_j - d_j u)| \leq \\ &\leq d_j^{|\beta|} c_\beta d_j^{-|\beta|} = c_\beta \end{aligned}$$

c) Como $|u| \leq 12$, então $1 + |u| \leq 13$ donde $(1 + |u|)^N \leq 13^N$.

Levando as conclusões tiradas em a), b) e c) para a expressão de $|||\phi^{r,j}|||_N$, temos então que $|||\phi^{r,j}|||_N \leq B$ onde a constante B não depende de j .

Retornando à expressão (3) vemos que

$$a_r^j = \int f(x) \pi_r^j \left[\frac{(x - x_j)}{d_j} \right] \psi_j(x) d_j^{-n} dx = \int f(x) \phi_{d_j}^{r,j}(y_j - x) dx = (\phi_{d_j}^{r,j} * f)(y_j).$$

Portanto $|a_r^j| = |\phi_{d_j}^{r,j} * f(y_j)|.$

Como $\psi = \frac{\phi^{r,j}}{|||\phi^{r,j}|||_N}$ tem $|||\psi|||_N = 1$, então

$$|f * \psi_{d_j}(y_j)| \leq f^{**}(y_j) \text{ e, como } \psi_{d_j}(y) = \frac{1}{|||\phi^{r,j}|||} \cdot \phi_{d_j}^{r,j}(y_j)$$

então

$$(4) \quad |f * \phi_{d_j}^{r,j}(y_j)| \leq |||\phi^{r,j}|||_N f^{**}(y_j) \leq B f^{**}(y_j) \leq B\alpha$$

Portanto $|a_r^j| \leq B\alpha$, independente de j .

Temos então que se x pertence a Q_j^* , $x = x_j + d_j y$ e $|y| \leq 4$. Como os coeficientes de π_r^j estão uniformemente limitados, então, para $|y| \leq 4$, $|\pi_r^j(y)| \leq K(M,n)$, donde $|P_j(x)| =$
 $= |\sum_{r=1}^L a_r^j \pi_r^j(y)| \leq \sum_{r=1}^L |a_r^j| |\pi_r^j(y)| \leq \sum_{r=1}^L K(M,n) B\alpha = b\alpha.$

Ou seja $||P_j||_{L^\infty(Q_j^*)} \leq b\alpha$, independente de j , como

queríamos mostrar.

Retomando a função $g = f\chi_{R^n - \Omega} + \sum_j P_j \psi_j$ vemos que:

$$|g(x)| \leq |f(x)\chi_{R^n - \Omega}(x)| + \sum_j |P_j(x)| \psi_j(x) \leq |f(x)\chi_{R^n - \Omega}(x)|$$

$$+ \sum_j b\alpha \psi_j(x) = |f(x)\chi_{R^n - \Omega}(x)| + b\alpha \sum_j \psi_j(x)$$

$$= |f(x)\chi_{R^n - \Omega}(x)| + b\alpha \chi_\Omega(x)$$

Estudemos agora a majoração de $|f(x)\chi_{R^n - \Omega}|$. Temos então que considerar $x \in \Omega^c$, apenas; gostaríamos de lembrar que se $x \in \Omega^c$, $f^{**}(x) \leq \alpha$.

Provemos que $f^{**}(x) \leq \alpha$ implica $|f(x)| \leq \alpha \cdot a^{-1}$

$f^{**}(x) = \sup_{|||\phi|||_N \leq 1} \sup_{(y,t): |x-y| < 10t} |f * \phi_t(y)|$. Tomando uma ψ

com $|||\psi|||_N = 1$, $\text{supp } \psi$ compacto e tal que $\int \psi(z) dz = a \neq 0$, temos

$f * \psi_t(y) = \int f(z) \psi_t(y-z) dz = t^{-n} \int f(x) \psi\left[\frac{(y-z)}{t}\right] dz$. Agora, fazendo a mudança de variáveis $r = \frac{(y-z)}{t}$, donde $dr = t^n dz$, vem:

$$f * \psi_t(y) = t^{-n} t^n \int f(y-tr) \psi(r) dr = \int f(y-tr) \psi(r) dr.$$

E, quando t tende a 0, $f * \psi_t(x)$ tende a $\int f(y) \psi(r) dr =$

$= f(y) \int \psi(r) dr = f(y) \cdot a$. Mas, $f^{**}(x) \geq \sup_{|||\phi|||_N \leq 1} |f * \phi_t(y)| \geq$

$\geq |f * \psi_t(x)|$ para todo t . Então, fazendo t tender a 0 temos

$f^{**}(x) \geq a|f(x)|$ donde $|f(x)| \leq \alpha a^{-1}$, como queríamos provar.

Então $|g|$ fica:

$$|g| \leq |f(x)\chi_{R^n - \Omega}| + b\alpha\chi_{\Omega}$$

$$\leq a^{-1}\alpha\chi_{R^n - \Omega} + b\alpha\chi_{\Omega}$$

$$\leq c_1\alpha\chi_{R^n - \Omega} + c_1\alpha\chi_{\Omega} = c_1\alpha\chi_{R^n} \quad \text{onde}$$

$c_1 = \max\{a^{-1}, b\}$. E, sendo $||g||_{\infty} = \inf\{\beta : |g| \leq \beta \text{ a.e}\}$ segue que $||g||_{\infty} \leq c_1\alpha$, onde c_1 não depende de α , o que prova a parte I

do Lema 1.

Como queremos decompor $f = g + b$, então, para nossa função "ruim" b , definiremos $b = f - g$, donde

$$b = (f \chi_{R^n - \Omega} + \sum_j f \psi_j) - (f \chi_{R^n - \Omega} + \sum_j P_j \psi_j) = \sum_j (f - P_j) \psi_j. \quad \text{Chamando}$$

de $b_j(x) = (f(x) - P_j(x)) \psi_j(x)$, teremos então que

$$(5) \quad b = \sum_j b_j.$$

Passemos então à demonstração da parte II do lema 1, que é a determinação da norma H^{p_0} de b . Da equivalência das normas de H^p e L^p (ver (0.6)) e, como $b = \sum_j b_j$, é suficiente acharmos uma estimativa para $|b_j^+(x)|_{p_0}$.

Seja $b_j^+(x) = \sup_{t>a} |\psi_t * b_j(x)|$ onde ψ pertence a S , $\text{supp } \psi$ contido na bola unitária e $\int \psi(x) dx = 1$. Tomaremos o ponto x_j , centro de Q_j , como sendo a origem. Queremos estimar $|\psi_t * b_j(x)|$. Temos

$$\begin{aligned} (6) \quad |\psi_t * b_j(x)| &= \left| \int \psi_t(x-y) b_j(y) dy \right| \\ &= |t^{-n} \int \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] |f(y) - P_j(y)| \psi_j(y) dy|. \end{aligned}$$

Dividiremos no nosso estudo em três casos:

Caso 1: $x \in Q_j^*$ e $t \ll d_j$.

Da expressão (6) temos que

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

$$(7) \quad |\psi_t * b_j(x)| \leq |t^{-n} \int \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] f(y) \phi_j(y) dy| \\ + |t^{-n} \int \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] p_j(y) \phi_j(y) dy|.$$

Para a majoração da primeira parcela da expressão (7) introduziremos a função ϕ cuja definição é $\phi(z) = \psi(z) \phi_j(x - tz)$.

$$\text{Temos que } |f * \phi_t(x)| = \left| \int f(y) \phi_t(x - y) dy \right| = |t^{-n} \int f(y) \left[\frac{(x-y)}{t}\right] dy| = \\ = |t^{-n} \int f(y) \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) \phi_j\left(x - t \frac{x-y}{t}\right) dy| \\ = |t^{-n} \int f(y) \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) \phi_j(y) dy|.$$

$$\text{Majoremos } |||\phi|||_N = \sum_{|\alpha| \leq N} \int (1 + |z|)^N |D^\alpha \phi(z)| dz.$$

$$\text{Mas } |D^\alpha \phi(z)| = \left| \sum_{|\beta| + |\gamma| = |\alpha|} c_{\beta, \gamma} D^\beta(\psi(z)) D^\gamma(\phi_j(x - tz)) \right| \\ = \left| \sum_{|\beta| + |\gamma| = |\alpha|} c_{\beta, \gamma} (-t)^{|\gamma|} D^\gamma(\phi_j(x - tz)) D^\beta \psi(z) \right|$$

Pelo teorema de Whitney e suas consequências (ver (0.7)), temos que $|(-t)^{|\gamma|} D^\gamma \phi_j(x - tz)| \leq t^{|\gamma|} d_j^{-|\gamma|} c_\gamma$. Então, incluindo to das as constantes $c_{\gamma, \beta}$, c_γ e as da somatória numa constante sô, c , vem:

$$|D^\alpha \phi(z)| \leq c \sum_{|\beta| + |\gamma| = |\alpha|} t^{|\gamma|} d_j^{-|\gamma|} |D^\beta \psi(z)| \quad \text{e, como}$$

$$t \leq d_j$$

$$|D^\alpha \phi(z)| \leq c \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} |D^\beta \psi(z)|. \quad \text{Integrando ambos os mem}$$

bro da desigualdade acima, obtemos que $|||\phi|||_N \leq c |||\psi|||_N$.

Retornemos à igualdade

$$|t^{-n} \int f(y) \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] \psi_j(y) dy| = |\phi_t * f(x)|; \text{ como}$$

$$|\phi_t * f(x)| \leq |||\phi|||_N f^{**}(x) \text{ (ver (4)) e } |||\phi|||_N \leq |||\psi|||_N, \text{ te}$$

$$\text{mos: } |\phi_t * f(x)| \leq c |||\psi|||_N f^{**}(x) = df^{**}(x).$$

Passando agora à segunda parcela da soma (7), vem:

$$|t^{-n} \int \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] P_j(y) \psi_j(y) dy| \leq \int |t^{-n} \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right]| |P_j(y)| |\psi_j(y)| dy.$$

Como vimos na demonstração da parte I, para

$$y \in \text{supp } \psi_j, \quad |P_j(y)| < b\alpha.$$

Sabemos que $\psi_j(y) \leq 1$, donde $|\psi_j(y)| \leq 1$. Então

$$|t^{-n} \int \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] P_j(y) \psi_j(y) dy| \leq b\alpha \int |\psi(x-y)| dy$$

Mas $\int |\psi_t(x-y)| dy \leq |||\psi|||_M$ para todo M , portanto

$$|t^{-n} \int \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] P_j(y) \psi_j(y) dy| \leq k\alpha \leq kf^{**}(x) \text{ pois } x \text{ está em } Q_j^* \text{ por hipótese.}$$

A conclusão do caso 1 é pois

$$|\psi_t * b_j(x)| \leq |t^{-n} \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) \psi_j(y) dy| + |t^{-n} \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) P_j(y) \psi_j(y) dy|$$

$$\leq df^{**}(x) + kf^{**}(x) = c'f^{**}(x).$$

Caso 2: $x \in Q_j^*$ e $t \geq d_j$.

Aqui também consideraremos a desigualdade (7) só que, para a majoração da primeira parcela introduziremos a função ϕ , agora definida

por: $\phi(z) = \Psi\left[\frac{d_j z}{t}\right] \psi_j(x - d_j z)$. Então temos:

$$|f * \phi_{d_j}(x)| = \left| \int f(y) \phi_{d_j}(x - y) dy \right| =$$

$$= |d_j^{-n} \int \phi\left[\frac{(x-y)}{d_j}\right] f(y) dy| =$$

$= |d_j^{-n} \int \Psi\left(\frac{x-y}{t}\right) \psi_j(y) f(y) dy|$. Agora, $t \geq d_j$ o
que implica $t^{-n} \leq d_j^{-n}$ e assim

$$|t^{-n} \int \Psi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) \psi_j(y) dy| \leq |d_j^{-n} \int \Psi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) \psi_j(y) dy| = |f * \phi_{d_j}(x)| \leq$$

$$\leq |||\phi|||_N f^{**}(x) \quad (\text{ver (4)}).$$

Com raciocínio análogo ao feito para o caso 1 mostramos que

$$|||\phi|||_N \leq r |||\psi|||_N \leq rm, \text{ donde } |f * \phi_{d_j}(x)| \leq rm f^{**}(x) \leq$$

$$\leq \bar{d} f^{**}(x). \text{ Portanto } |t^{-n} \int f(y) \Psi\left(\frac{x-y}{t}\right) \psi_j(y) dy| \leq \bar{d} f^{**}(x).$$

Para a segunda parcela de (7), como x pertence a Q_j^* por hipótese, estamos em situação idêntica à do caso 1, o que nos dá:

$$|t^{-n} \int \Psi\left(\frac{x-y}{t}\right) p_j(y) \psi_j(y) dy| \leq k\alpha \leq k f^{**}(x).$$

Portanto, para o caso 2 temos:

$$|\Psi_t * b_j(x)| \leq |t^{-n} \int \Psi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) \psi_j(y) dy| + |t^{-n} \int \Psi\left(\frac{x-y}{t}\right) p_j(y) \psi_j(y) dy| \leq$$

$$\leq \bar{d} f^{**}(x) + k f^{**}(x) = c'' f^{**}(x).$$

Caso 3: $x \notin Q_j^*$.

Consideraremos apenas o caso $t > \frac{|x|}{2} > \frac{6}{5} d_j$, visto que:

(i) se $\frac{|x|}{2} \leq \frac{6}{5} d_j < 2 d_j$, então $|x| < 4 d_j$ o que não pode acontecer pois estamos considerando $x \notin Q_j^*$.

(ii) se $t \leq \frac{|x|}{2}$ e $\frac{|x|}{2} > \frac{6}{5} d_j > d_j$, teremos:

$t + \frac{6}{5} d_j \leq \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2} = |x|$ donde $|x| \geq t + \frac{6}{5} d_j$. Como $\text{supp } \psi$ é $|z| \leq 1$, então $|\frac{(x-y)}{t}| \leq 1$, o que implica $|x-y| \leq t$ e $|x| - |y| \leq |x-y| \leq t$; portanto, $|x| - t \leq |y|$ e, como y está no suporte de ψ_j , $|y| < \frac{6}{5} d_j$, então $|x| < t + \frac{6}{5} d_j$ o que contradiz a estimativa $|x| \geq t + \frac{6}{5} d_j$.

Queremos então estimar $|\psi_t * b_j(x)| =$
 $= \left| \int t^{-n} \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] (f(y) - P_j(y)) \psi_j(y) dy \right|$. Olhemos agora $\psi\left(\frac{x}{t} - \frac{y}{t}\right)$. Se considerarmos a função de r $\psi\left(\frac{x}{t} - r\left(\frac{y}{t}\right)\right)$, então, para $r = 1$ temos $\psi\left(\frac{x}{t} - \frac{y}{t}\right)$. Desenvolveremos $\psi\left(\frac{x}{t} - r\left(\frac{y}{t}\right)\right)$ pela fórmula integral de Taylor, em torno de $r = 0$. Lembremos antes que, sendo α um multi-índice, $D^{m+1} \psi\left(\frac{x}{t} - r\left(\frac{y}{t}\right)\right) = \sum_{|\alpha|=m+1} (-1)^{|\alpha|} t^{-|\alpha|} y^\alpha D^\alpha \psi\left(\frac{x}{t} - r\left(\frac{y}{t}\right)\right)$. A fórmula de Taylor para $r = 1$ nos dá:

$$\psi\left(\frac{x}{t} - 1\left(\frac{y}{t}\right)\right) = P_M(y) + R_M(y) \text{ com grau } P_M(y) \leq M \text{ e}$$

$$R_M(y) = \frac{(-1)^{M+1}}{M!} t^{-(M+1)} \sum_{|\alpha|=M} c_\alpha y^\alpha \int_0^1 D^\alpha \psi\left(\frac{x}{t} - s\left(\frac{y}{t}\right)\right) (1-s)^M ds. \text{ Então}$$

$$\left| \int t^{-n} \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) [f(y) - P_j(y)] \psi_j(y) dy \right| \leq \left| \int t^{-n} P_M(y) [f(y) - P_j(y)] \psi_j(y) dy \right|$$

+ $\left| \int t^{-n} R_M(y) [f(y) - P_j(y)] \psi_j(y) dy \right|$. Devido à escolha de $P_j(y)$, e como grau de $P_M(y) \leq M$, então

$$\left| \int t^{-n} [f(y) - P_j(y)] \psi_j(y) P_M(y) dy \right| = \left| t^{-n} \left[\int f(y) \psi_j(y) P_M(y) dy \right. \right.$$

$$\left. - \int P_j(y) \psi_j(y) P_M(y) dy \right] \right| = |t^{-n} \cdot 0| = 0. \quad \text{Portanto deve}$$

mos estudar apenas $\left| \int t^{-n} R_M(y) [f(y) - P_j(y)] \psi_j(y) dy \right|$. Para isto, introduzindo a função $\phi(z) = R(y_j - d_j z) \psi_j(y_j - d_j z)$, podemos escre

$$\text{ver: } |\phi_{d_j} * f(y_j)| = |d_j^{-n} \int \phi\left[\frac{(y_j - y)}{d_j}\right] f(y) dy| =$$

$$= |d_j^{-n} \int R_M(y_j - d_j \frac{y_j - y}{d_j}) \psi_j(y_j - d_j \frac{y_j - y}{d_j}) f(y) dy| =$$

$$= |d_j^{-n} \int R_M(y) \psi_j(y) f(y) dy| \geq |t^{-n} \int R_M(y) \psi_j(y) f(y) dy|.$$

Achemos uma majoração para $|||\phi|||_N = \sum_{|\gamma| \leq N} (1 + |z|)^N |D^\gamma \phi(z)| dz$.

Sabemos que $|D^\gamma \phi(z)| = \left| \sum_{|\beta_1| + |\beta_2| = |\gamma|} c_{\beta_1, \beta_2} D^{\beta_1} R_M(y_j - d_j z) D^{\beta_2} \psi_j(y_j - d_j z) \right|$.

1.) Majoraremos $D^{\beta_1} R_M(y_j - d_j z)$. Temos que $R_M(y) =$

$$= \frac{(-1)^{M+1}}{M!} t^{-(M+1)} \sum_{|\alpha| = M+1} c_\alpha y^\alpha \int_0^1 D^\alpha \psi\left(\frac{x}{t} - s\left(\frac{y}{t}\right)\right) (1-s)^M ds. \quad \text{Então}$$

$$D^{\beta_1} R_M(y) = \frac{(-1)^{M+1}}{M!} t^{-(M+1)} \sum_{|\alpha| = M+1} \sum_{|\gamma_1| + |\gamma_2| = |\beta_1|} c_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} t^{-|\gamma_2|} D^{\gamma_1}(y)^\alpha.$$

. $\int_0^1 (-s)^{|\gamma_2|} D^{\alpha + \gamma_2} \psi\left(\frac{x}{t} - s\left(\frac{y}{t}\right)\right) (1-s)^M ds$. Abandonando as somatórias estudemos um único termo que é igual a

$$k_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} t^{-(M+1) - |\gamma_2|} D^{\gamma_2}(y^\alpha) \int_0^1 (-s)^{|\gamma_2|} D^{\alpha + \gamma_2} \psi\left(\frac{x}{t} - s\left(\frac{y}{t}\right)\right) (1-s)^M ds.$$

Queremos mostrar que a expressão acima é menor ou igual a

$$(8) \quad p_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} d_j^{-|\beta_1|} \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}. \text{ Primeiramente observamos que:}$$

sendo ψ fixa com suporte em $|z| \leq 1$, $|\alpha| + |\gamma_2|$ fixo o que implica que $D^{\alpha + \gamma_2}(\psi)$ tem supremo finito, então existe uma constante k tal que $\left| \int_0^1 (-s)^{|\gamma_2|} D^{\alpha + \gamma_2} \psi\left(\frac{x}{t} - s\left(\frac{y}{t}\right)\right) (1-s)^M ds \right| \leq k$. Temos

$|\alpha| = M+1$ e ainda observamos que $|\alpha| \geq |\gamma_1|$ pois, se $|\alpha| < |\gamma_1|$,

então $D^{\gamma_1}(y^\alpha) = 0$ o que torna trivial a desigualdade (8). Portan-

$$\text{to } |k_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} t^{-(M+1) - |\gamma_2|} D^{\gamma_2}(y^\alpha) \int_0^1 (-s)^{|\gamma_2|} D^{\alpha + \gamma_2} \psi\left(\frac{x}{t} - s\left(\frac{y}{t}\right)\right) (1-s)^M ds|$$

$$\leq k_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} k t^{-(M+1)} t^{-|\gamma_2|} p_{\alpha, \gamma_1} |y|^{|\alpha| - |\gamma_2|}$$

$$= k_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} k p_{\alpha, \gamma_1} t^{-(M+1)} t^{-|\gamma_2|} |y|^{M+1 - |\gamma_1|}. \text{ Como } t > \frac{1}{2}|x| > d_j$$

o que implica $t^{-1} < 2|x|^{-1} < d_j^{-1}$ e y está no $\text{supp } \psi_j$ donde

$$\begin{aligned}
|y| &\leq \frac{6}{5} d_j, \text{ então } k_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} k p_{\alpha, \gamma_1} t^{-M+1} t^{-|\gamma_2|} |y|^{M+1-|\gamma_1|} \leq \\
&\leq k_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} k p_{\alpha, \gamma_1} 2^{-(M+1)} |x|^{-M+1} d_j^{-|\gamma_2|} \left(\frac{6}{5}\right)^{M+1-|\gamma_1|} d_j^{M+1-|\gamma_1|} \text{ e, chamando} \\
\text{do } p_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} &= k_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} k p_{\alpha, \gamma_1} 2^{-(M+1)} \left(\frac{6}{5}\right)^{M+1-|\gamma_1|}, \\
&= p_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} |x|^{-M+1} d_j^{-|\gamma_2|} d_j^{M+1-|\gamma_1|} = p_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} d_j^{-(|\gamma_1|+|\gamma_2|)} \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1} = \\
&= p_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} d_j^{-|\beta_1|} \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}.
\end{aligned}$$

Para $R_M(y)$, cada termo de $|D^{\beta_1}(R_M(y))|$ é menor ou igual a $p_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} d_j^{-|\beta_1|} \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}$, donde concluímos que cada termo da soma de $D^{\beta_1}(R_M(y_j - d_j z))$ é menor ou igual, em módulo, a $d_j^{|\beta_1|} p_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2} d_j^{-|\beta_1|} \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}$. Então

$$(9) \quad |D^{\beta_1} R_M(y_j - d_j y)| \leq k \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}, \text{ onde } k \text{ reúne todas as constantes.}$$

2.) Majoraremos $D^{\beta_2} \psi_j(y_j - d_j z)$. Temos que $|D^{\beta_2} \psi_j(y_j - d_j z)| = d_j^{|\beta_2|} |D^{\beta_2} \psi_j(y_j - d_j z)|$ e, pelo teorema de Whitney (ver (0.7)),

$$\text{vem: } d_j^{|\beta_2|} |D^{\beta_2} \psi_j(y_j - d_j z)| \leq d_j^{|\beta_2|} c_{\beta_2} d_j^{-|\beta_2|} = c_{\beta_2}.$$

Então cada parcela de $|D^\gamma \phi(z)| =$

$$= \left| \sum_{|\beta_1| + |\beta_2| = |\gamma|} c_{\beta_1, \beta_2} D^{\beta_1} R_M(y_j - d_j z) D^{\beta_2} \psi_j(y_j - d_j z) \right| \text{ é menor ou}$$

igual a $c_{\beta_1, \beta_2} K \left(\frac{d_j}{|x|} \right)^{M+1} c_{\beta_2}$. Como temos um número finito de par-

celas na soma, agrupando todas as constantes em A vem

$$|D^\gamma \phi(z)| \leq A \left(\frac{d_j}{|x|} \right)^{M+1}. \text{ E, do fato de } y_j - d_j z \text{ pertencer a}$$

a $\text{supp } \psi_j$ concluímos que $|x_j - y_j - d_j z| \leq \frac{6}{5} d_j$ e então

$$|d_j z| \leq |x_j - y_j| + \frac{6}{5} d_j \leq 10 d_j + \frac{6}{5} d_j \text{ de onde vem } |z| < 12.$$

$$\text{Portanto } |||\phi|||_N \leq C \left(\frac{d_j}{|x|} \right)^{M+1}.$$

Voltemos agora à estimativa de $|\psi_t * b_j(x)|$. Já vi-

$$\text{mos que } |\psi_t * b_j(x)| = \left| \int t^{-n} \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) [f(y) - p_j(y)] \psi_j(y) dy \right|$$

$$\leq \left| \int t^{-n} R_M(y) [f(y) - p_j(y)] \psi_j(y) dy \right|$$

$$\leq \left| \int t^{-n} R_M(y) f(y) \psi_j(y) dy \right| + \left| \int t^{-n} R_M(y) p_j(y) \psi_j(y) dy \right| \dots \text{E, do que foi}$$

$$\text{visto acima } \left| \int t^{-n} R_M(y) f(y) \psi_j(y) dy \right| \leq \left| \int d_j^{-n} R_M(y) f(y) \psi_j(y) dy \right| \leq$$

$$\leq |\phi_{d_j} * f(y_j)| \leq |||\phi|||_N f^{**}(y_j) \text{ (ver (4)).}$$

Levando em conta que $|||\phi|||_N \leq C\left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}$ e $f^{**}(y_j) < \alpha$, podemos

escrever $|\int t^{-n} R_M(y) f(y) \psi_j(y) dy| \leq C\alpha \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}$. Por outro lado

$$|t^{-n} \int R_M(y) P_j(y) \psi_j(y) dy| \leq |d_j^{-n} \int R_M(y) P_j(y) \psi_j(y) dy|$$

$$\leq d_j^{-n} \int |R_M(y)| |P_j(y)| |\psi_j(y)| dy. \text{ Como } y \text{ pertencer a } \text{supp } \psi_j$$

acarreta que y pertence a Q_j^* , então valem as desigualdades

$$(i) \quad |R_M(y)| \leq K \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1} \quad (\text{ver (9)})$$

$$(ii) \quad |\psi_j(y)| \leq c_0 \quad (\text{ver teorema de Whitney (0.7)}) \quad \text{o que implica}$$

$$\text{que } |t^{-n} \int R_M(y) P_j(y) \psi_j(y) dy| \leq d_j^{-n} K \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1} c_0 \int_{|y| \leq \frac{6}{5} d_j} |P_j(y)| dy$$

$$\leq d_j^{-n} K \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1} c_0 d_j^n \|P_j\|_{L^\infty(Q_j^*)}$$

$$\leq d_j^{-n} d_j^n K \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1} c_0 q b \alpha = \bar{C} \alpha \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}.$$

Portanto a conclusão para o caso 3 é

$$|\psi_t * b_j(x)| \leq C\alpha \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1} + \bar{C}\alpha \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1} = \bar{\bar{C}}\alpha \left(\frac{d_j}{|x|}\right)^{M+1}$$

No caso geral, de x_j não ser a origem, concluímos

que

$$(10) \quad b_j^+(x) = \sup_{t>0} |\psi_t * b_j(x)| \leq \begin{cases} \bar{C} f^{**}(x) & \text{se } x \in Q_j^* \\ \bar{\bar{C}} \left(\frac{d_j}{|x-x_j|}\right)^{M+1} & \text{se } x \notin Q_j^* \end{cases}$$

Conseqüentemente, para $p_0 \leq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} (b_j^+(x))^{p_0} dx &\leq \int_{Q_j^*} [\bar{c} f^{**}(x)]^{p_0} dx + \int_{R^n - Q_j^*} \bar{c}^{p_0} c_2^{p_0} \left(\frac{d_j}{|x-x_j|} \right)^{(M+1)p_0} dx \\ &= c_1 \int_{Q_j^*} (f^{**}(x))^{p_0} dx + c_2^{p_0} \int_{R^n - Q_j^*} \left(\frac{d_j}{|x-x_j|} \right)^{(M+1)p_0} dx. \end{aligned}$$

Se M é tão grande que $(M+1)p_0 > n$, então a segunda parcela

$$\int_{R^n - Q_j^*} \left(\frac{d_j}{|x-x_j|} \right)^{M+1} dx, \quad \text{converge e temos ainda que}$$

$$c_2^{p_0} \int_{R^n - Q_j^*} \left(\frac{d_j}{|x-x_j|} \right)^{(M+1)p_0} dx \leq c_2^{p_0} d_j^{(M+1)p_0} \int_{|x| > c d_j} |x|^{-(M+1)p_0} dx$$

e, mudando para coordenadas esféricas $|x| = \rho$, $dx = \rho^{n-1} d\rho d\Omega$ onde $d\Omega$ é a medida da esfera, vem:

$$c_2^{p_0} d_j^{(M+1)p_0} \int_{|x| > c d_j} |x|^{(M+1)p_0} dx =$$

$$= c_2^{p_0} d_j^{(M+1)p_0} \int_{c d_j}^{\infty} \rho^{-(M+1)p_0 + n - 1} d\rho d\Omega. \quad \text{Mas } \int d\Omega = \Gamma \quad \text{e, como}$$

$$-(M+1)p_0 + n - 1 < -1, \quad \int_{c d_j}^{\infty} \rho^{-(M+1)p_0 + n - 1} d\rho \quad \text{converge e então}$$

$$c_2^{p_0} d_j^{(M+1)p_0} \int_{c d_j}^{\infty} \rho^{-(M+1)p_0 + n - 1} d\rho d\Omega = \frac{c_2^{p_0} d_j^{(M+1)p_0} \Gamma(c d_j)^{-(M+1)p_0 + n}}{[(M+1)p_0 - n]} =$$

$$= r \alpha^{p_0} d_j^n = S \alpha^{p_0} m(Q_j). \text{ Portanto}$$

$$c_2 \alpha^{p_0} \int_{R^n - Q_j^*} \left(\frac{d_j}{|x - x_j|} \right)^{(M+1)p_0} dx \leq S \alpha^{p_0} m(Q_j). \text{ Agora, } S \alpha^{p_0} m(Q_j) =$$

$$= S \int_{Q_j} \alpha^{p_0} dx < S \int_{Q_j} (f^{**}(x))^{p_0} dx \text{ pois } x \in Q_j \text{ donde } f^{**}(x) > \alpha.$$

$$\text{Assim } \int (b_j^+(x))^{p_0} dx \leq (c_1 + S) \int_{Q_j^*} (f^{**}(x))^{p_0} dx \quad e$$

$$\text{concluimos que } ||b_j^+||_{p_0}^{p_0} = \left(\int |b_j^+(x)|^{p_0} dx \right) \leq c_1 \int_{Q_j^*} (f^{**}(x))^{p_0} dx.$$

Uma vez encontrada uma estimativa para $||b_j^+||_{p_0}^{p_0}$ é fácil encontrar uma para $||b^+||_{p_0}^{p_0}$ pois sendo $b(x) = \sum_j b_j(x)$, então $b^+(x) = \sup_{t>0} |\psi_t * b(x)| = \sup_{t>0} \left| \sum_j \psi_t * b_j(x) \right| \leq \sum_j \sup_{t>0} |\psi_t * b_j(x)| = \sum_j b_j^+(x)$. Portanto $b^+(x) \leq \sum_j b_j^+(x)$. Como $p_0 \leq 1$,

$$(b^+(x))^{p_0} \leq \sum_j (b_j^+(x))^{p_0} \text{ e então, } ||b^+||_{p_0}^{p_0} = \int_{R^n} (b^+(x))^{p_0} dx$$

$$\leq \sum_j \int_{R^n} (b_j^+(x))^{p_0} dx \leq c_1 \sum_j \int_{Q_j^*} (f^{**}(x))^{p_0} dx =$$

$$= c \int_{R^n} \left[\sum_j \chi_{Q_j^*}(x) \right] (f^{**}(x))^{p_0} dx.$$

A geometria dos cubos de Whitney é tal que se x pertence a Q_j^* , x não pertence a mais que um número r de cubos Q_j , donde $\sum_j \chi_{Q_j^*}(x) \leq r \chi_\Omega(x)$. Assim

$$||b^+||_{P_0}^{P_0} \leq C \int_{R^n} \left[\sum_j \chi_{Q_j^*}(x) \right] (f^{**}(x))^{P_0} dx \leq$$

$$\leq Cr \int_{\Omega} (f^{**}(x))^{P_0} dx = \bar{C} \int_{\Omega} (f^{**}(x))^{P_0} dx$$

e, como $||b||_{H_{P_0}}^{P_0}$ é equivalente a $||b^+||_{P_0}^{P_0}$ (ver (0.6)) temos

$$||b||_{H_{P_0}}^{P_0} \leq c_2 \int_{\Omega} (f^{**}(x))^{P_0} dx \text{ com } c_2 \text{ independente de } f \text{ e de}$$

α , o que termina a demonstração da parte II do lema 1.

Uma Caracterização de Variável Real de H^p :

De posse do lema 1 demonstrado no capítulo anterior podemos demonstrar o teorema que nos dá uma condição necessária e suficiente para que uma distribuição temperada f pertença a $H^p(\mathbb{R})$.

Daremos, em primeiro lugar, a seguinte definição (ver [2]): "Seja $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mensurável. Dizemos que a é p -átomo se:

- (i) a tem suporte em um intervalo I ; (ii) $|a(x)| \leq (m(I))^{-1/p}$;
 (iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k a(x) dx = 0$ para todo k , tal que $0 \leq k \leq [\frac{1}{p}] - 1$,
 onde $[\frac{1}{p}] =$ maior inteiro contido em $\frac{1}{p}$."

Passemos agora ao teorema de caracterização demonstrado por Ronald R. Coifman (ver [2]).

Teorema:

"Uma distribuição temperada f está em $H^p(\mathbb{R})$ se e somente se existem α_i reais e $a_i(x)$ p -átomos (para $i = 0, 1, 2, \dots$), tais que $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i$, com $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$. Além disso,

$A \|f\|_{H^p}^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p \leq B \|f\|_{H^p}^p$, onde as constantes A e B dependem apenas de p ."

Demonstração:

I.) Neste ítem demonstraremos que, se existem α_i em $\mathbb{R}$ para todo i , e a_i p -átomos para $i = 0, 1, 2, \dots$ com

$\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$ tais que $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i$, então f pertence a H^p e demonstraremos também que existe A , dependendo apenas de p tal que $A \|f\|_{H^p}^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p$.

Gostaríamos de lembrar que, mostrar que f pertence a H^p é equivalente a mostrar que f^+ pertence a L^p (ver (0.6)) e também que estamos trabalhando com distribuições temperadas e não com funções.

Observemos inicialmente que todo p -átomo a pertence a L^p e portanto $\int a(x)\psi(x)dx$ define uma distribuição temperada (ver (0.5)). Além disso, como mostraremos mais adiante, existe uma constante K_p que só depende de p tal que $\|a\|_{H^p}^p \leq K_p$ para todo p -átomo a .

Como H^p é completo para todo p (ver (0.6)), para provar que $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i$ é convergente em H^p basta provar que a sequência é de Cauchy. Mas para todo $\epsilon > 0$, como $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p$ converge, $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i\|_{H^p}^p \leq \|\sum_{i=m+1}^n \alpha_i a_i\|_{H^p}^p$ para $m < n$ e, do que vimos em (0.6)

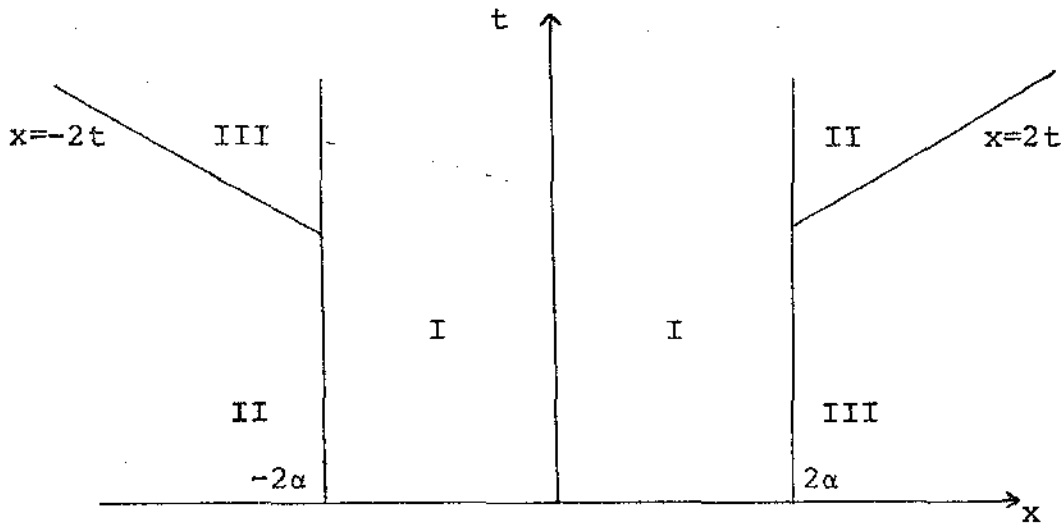
$$\begin{aligned} \|\sum_{i=m+1}^n \alpha_i a_i\|_{H^p}^p &\leq \sum_{i=m+1}^n \|\alpha_i a_i\|_{H^p}^p = \\ &= \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i|^p \|a_i\|_{H^p}^p \leq K_p \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i|^p < K_p \epsilon \end{aligned}$$

como queríamos.

Uma vez verificado que $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i(x)$ define uma distribuição temperada f , passemos então à prova de que $\|a\|_{H^p}^p \leq K_p$. Lembrando que, para um átomo genérico a , $a^+(x) = \sup_{t>0} |a * \psi_t(x)|$, onde ψ pertence a S e é tal que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 1$, o que temos a fazer é achar uma estimativa para $a * \psi_t(x)$. Tomemos uma $\psi > 0$ com suporte em $[-1, 1]$ e chamemos $\text{supp } a = [-\alpha, \alpha]$. Temos então

$$(11) \quad a * \psi_t(x) = \int a(y) \psi_t(x - y) dy = t^{-1} \int a(y) \psi\left[\frac{(x - y)}{t}\right] dy.$$

Dividiremos o nosso estudo em três casos:



Caso 1: $|x| \leq 2\alpha, \quad t > 0$

$$\text{Então} \quad |a * \psi_t(x)| = |t^{-1} \int a(y) \psi\left[\frac{(x - y)}{t}\right] dy|$$

$$\leq t^{-1} \int |a(y)| |\psi\left[\frac{(x - y)}{t}\right]| dy \leq$$

$$\leq [m(I)]^{-1/p} \int_{-\alpha}^{\alpha} |t^{-1} \psi\left[\frac{(x - y)}{t}\right]| dy. \quad \text{E, fazendo a mudança de}$$

variáveis $z = (\frac{x-y}{t})$, donde $dz = t^{-1}dy$, quando $y = -\alpha$ então $z = (\frac{x+\alpha}{t})$ e, quando $y = \alpha$, $z = (\frac{x-\alpha}{t})$. Temos $|a * \psi_t(x)|$

$$\leq [m(I)]^{-1/p} \int_{-\alpha}^{\alpha} |t^{-1} \psi[\frac{(x-y)}{t}]| dy$$

$$\leq [m(I)]^{-1/p} \int_{(x-\alpha)/t}^{(x+\alpha)/t} |\psi(z)| dz$$

$$\leq [m(I)]^{-1/p} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(z)| dz. \text{ Como } m(I) = 2\alpha \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(z)| dz = 1,$$

então $|a * \psi_t(x)| \leq (2\alpha)^{-1/p}$.

Portanto, a conclusão que temos para o caso 1 é que

$$a^+(x) = \sup_{t>0} |a * \psi_t(x)| \leq (2\alpha)^{-1/p}.$$

Caso 2: $|x| > 2\alpha$ e $|x| > 2t$

Neste caso, observemos que $a * \psi_t(x)$ é diferente de zero apenas quando $\frac{(x-y)}{t}$ pertencer ao suporte de ψ , ou seja $|\frac{(x-y)}{t}| \leq 1$, o que implica $|x| - |y| \leq |x-y| \leq t$ e então $|x| - |y| < t$ donde $|x| < t + |y|$. Agora, por hipótese, $\alpha < \frac{|x|}{2} < \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2} - t$ pois $\frac{|x|}{2} - t > 0$; então $\alpha < |x| - t$ e, como vimos acima $|x| - t < |y|$ donde $|y| > \alpha$ o que implica $a(y)=0$.

$$\text{Portanto } |a * \psi_t(y)| = |t^{-1} \int a(y) \psi_t(x-y) dy| = 0,$$

donde, para o caso 2 temos:

$$\sup_{0 < t < |x|/2} |a * \psi_t(x)| = 0 \text{ para todo } x.$$

Caso 3: $|x| > 2\alpha$ e $|x| \leq 2t$

Queremos achar uma estimativa para

$a * \psi_t(x) = t^{-1} \int a(y) \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] dy$. Desenvolvendo $\psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right]$ pela fórmula de Taylor em torno de $\frac{x}{t}$, como função de $\frac{y}{t}$, temos:

$$\psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] = \psi\left(\frac{x}{t}\right) + (-1) D \psi(x_0) \left(\frac{-y}{t}\right) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\left(\left[\frac{1}{p}\right]-1\right)} \left(\frac{-y}{t}\right)^{\left[\frac{1}{p}\right]-1} D^{\left(\left[\frac{1}{p}\right]-1\right)} \psi(x_0) / \left(\left[\frac{1}{p}\right]-1\right)! +$$

$$+ (-1)^{\left[\frac{1}{p}\right]} \left(\frac{-y}{t}\right)^{\left[\frac{1}{p}\right]} D^{\left[\frac{1}{p}\right]} \psi(\xi) / \left[\frac{1}{p}\right]! = P\left(\frac{y}{t}\right) + R\left(\frac{y}{t}\right), \text{ onde}$$

gr $P\left(\frac{y}{t}\right) = \left[\frac{1}{p}\right] - 1$. Como a aplicação que associa $Q\left(\frac{y}{t}\right)$ com $Q(y)$ é

uma bijeção, podemos escrever $\psi\left(\frac{x}{t} - \frac{y}{t}\right) = P(y) + R(y)$ onde

gr $P(y) = \left[\frac{1}{p}\right] - 1$ e $R(y)$ é tal que

$$|R(y)| = |(-1)^{\left[\frac{1}{p}\right]} (-y)^{\left[\frac{1}{p}\right]} D^{\left[\frac{1}{p}\right]} \psi(\xi) / \left[\frac{1}{p}\right]!| = 1 \cdot |D^{\left[\frac{1}{p}\right]} \psi(\xi) / \left[\frac{1}{p}\right]!| | -y |^{\left[\frac{1}{p}\right]}; \text{ e, da}$$

desigualdade $|D^{\left[\frac{1}{p}\right]} \psi(\xi) / \left[\frac{1}{p}\right]!| \leq c$, concluímos que $|R(y)| \leq c |y|^{\left[\frac{1}{p}\right]}$.

$$\text{Temos então } |a * \psi_t(x)| = \left| t^{-1} \int a(y) \psi\left[\frac{(x-y)}{t}\right] dy \right| =$$

$$= \left| t^{-1} \int a(y) [P(y) - R(y)] dy \right| \leq \left| t^{-1} \int a(y) P(y) dy \right| + \left| t^{-1} \int a(y) R(y) dy \right| \dots$$

Como $\text{gr } P(y) = \left[\frac{1}{p}\right] - 1$ e a é um p -átomo, $\int a(y)P(y)dy = 0$ donde $|t^{-1} \int a(y)P(y)dy| = 0$. Portanto $|a * \psi_t(x)| = |t^{-1} \int a(y)R(y)dy|$

$$\leq t^{-1} \int |a(y)| |R(y)| dy \leq c(m(I)) \int_{-\alpha}^{\alpha} |y|^{\left[\frac{1}{p}\right]} / t^{\left[\frac{1}{p}\right]} dy =$$

$$= c.t^{-1}.t^{-\left[\frac{1}{p}\right]} (m(I))^{-\frac{1}{p} + \left[\frac{1}{p}\right] + 1}. \text{ Como } |x| \leq 2t, c.t^{-1}.t^{-\left[\frac{1}{p}\right]} (m(I))^{-\frac{1}{p} + \left[\frac{1}{p}\right] + 1} \leq$$

$$\leq c.2^{-\left[\frac{1}{p}\right] - 1} . |x|^{-\left[\frac{1}{p}\right] - 1} (m(I))^{\left[\frac{1}{p}\right] + 1 - \frac{1}{p}} = k |x|^{-\left[\frac{1}{p}\right] - 1} (m(I))^{\left[\frac{1}{p}\right] + 1 - \frac{1}{p}}.$$

Do que vimos no caso 2 e acima, temos que, para

$$|x| > 2\alpha, \quad a^+(x) = \sup_{t>0} |a * \psi_t(x)| \leq k |x|^{-\left[\frac{1}{p}\right] - 1} (m(I))^{\left[\frac{1}{p}\right] + 1 - \frac{1}{p}}.$$

Reunindo os casos 1, 2 e 3, concluímos que, qualquer que seja $t > 0$,

$$||a^+(x)||_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} |a^+(x)|^p dx =$$

$$= \int_{-2\alpha}^{2\alpha} |a^+(x)|^p dx + \int_{2\alpha}^{2t} |a^+(x)|^p dx + \int_{-2t}^{-2\alpha} |a^+(x)|^p dx$$

$$\leq [(m(I))^{-\frac{1}{p}}]^p \int_{-2\alpha}^{2\alpha} dx + \int_{2\alpha}^{2t} |a^+(x)|^p dx + \int_{-2t}^{-2\alpha} |a^+(x)|^p dx.$$

$$\text{Agora, } \int_{2\alpha}^{2t} |a^+(x)|^p dx \leq [k(m(I))^{\left[\frac{1}{p}\right] + 1 - \frac{1}{p}}]^p \int_{2\alpha}^{2t} (|x|^{-\left[\frac{1}{p}\right] - 1})^p dx =$$

$$\begin{aligned}
&= k^p(2\alpha)^{p[\frac{1}{p}] + p - 1} \frac{|x|^{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1}}{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1} \Bigg|_{2\alpha}^{2t} \\
&\leq k^p(2\alpha)^{p[\frac{1}{p}] + p - 1} \frac{|x|^{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1}}{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1} \Bigg|_{2\alpha}^{\infty} \\
&\leq k^p(2\alpha)^{p[\frac{1}{p}] + p - 1} \frac{(-2\alpha)^{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1}}{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1} = \\
&= \frac{(-1)^{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1}}{-[\frac{1}{p}] \cdot p - p + 1} k^p(2\alpha)^0 = c_p \quad \text{onde } c_p \text{ depende apenas}
\end{aligned}$$

de p e não do átomo considerado. Com raciocínio análogo concluímos que $\int_{-2t}^{-2\alpha} |a^+(x)|^p dx \leq c_p$. Portanto

$$\begin{aligned}
||a^+(x)||_p^p &\leq [(m(I))^{-\frac{1}{p}}]^p \int_{-2\alpha}^{2\alpha} dx + \int_{2\alpha}^{2t} |a^+(x)|^p dx \\
&\quad + \int_{-2t}^{-2\alpha} |a^+(x)|^p dx \leq (2\alpha)^{-1} \cdot 4\alpha + 2c_p = 2(1 + c_p),
\end{aligned}$$

o que prova que, qualquer que seja o p -átomo a , com suporte contido em $[-\alpha, \alpha]$, $||a^+||_p^p \leq 2(1 + c_p)$, donde $||a||_{H^p}^p \leq K_p$ (ver (0.6)), como queríamos.

Agora, como $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i$ e $f^+(x) = \sup_{t>0} |f * \psi_t(x)|$,

temos

$$f^+(x) = \sup_{t>0} |(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i * \psi_t)(x)| = \sup_{t>0} |\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (a_i * \psi_t)(x)|$$

$$\leq \sum |\alpha_i| \sup_{t>0} |a_i * \psi_t(x)| = \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| a_i^+(x). \quad \text{Portanto}$$

$$||f^+(x)||_p^p = ||\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| a_i^+(x)||_p^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p ||a_i^+(x)||_p^p \leq K_p \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p$$

e, como $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$, temos $||f^+(x)||_p^p < \infty$ donde f^+ pertence a L^p , como queríamos demonstrar.

Observando que $||\cdot||_{H^p}^p$, para $0 < p \leq 1$, satisfaz a desigualdade triangular e que $||f^+||_p$ é equivalente a $||f||_{H^p}$, vem

$$||f||_{H^p}^p = ||\sum \alpha_i a_i||_{H^p}^p \leq \sum |\alpha_i|^p ||a_i||_{H^p}^p \leq c_p^p \sum |\alpha_i|^p. \quad \text{Então}$$

$c_p^{-p} ||f||_{H^p}^p \leq \sum |\alpha_i|^p$ e, fazendo $c_p^{-p} = A$, temos:

$A ||f||_{H^p}^p \leq \sum |\alpha_i|^p$, onde A só depende de p .

II.) Passaremos agora à demonstração de que se f é uma distribuição temperada pertencente a $H^p(R)$, então existem α_i reais e a_i p-átomos ($i = 0, 1, 2, \dots$) tais que $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i a_i$ com $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$. Mostraremos também que existe B , dependendo apenas de p tal que $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^p \leq B ||f||_{H^p}^p$, o que terminará a demonstração do teorema.

Nesta parte é que usaremos o lema 1, com $p = p_0$. To

memos f pertencente a $S \cap H^p$. Dados $\alpha = 2^k$ e $\alpha = 2^{k+1}$, o lema 1 nos dá que $f = b_{2^k} + g_{2^k}$ e $f = b_{2^{k+1}} + g_{2^{k+1}}$ donde

$$(12) \quad b_{2^k} - b_{2^{k+1}} = g_{2^{k+1}} - g_{2^k}.$$

Gostaríamos agora de fazer algumas observações:

(i) Se $\gamma > \beta$, então $\Omega_\gamma = \{x \in \mathbb{R} : f^{**}(x) > \gamma\} \subset \{x \in \mathbb{R} : f^{**}(x) > \beta\} = \Omega_\beta$, ou seja $\Omega_\gamma \subset \Omega_\beta$. Como $2^{k+1} > 2^k$ então $\Omega_{2^{k+1}} \subset \Omega_{2^k}$.

(ii) Se chamarmos de $(J_{j,\alpha})_{j \in \Lambda_\alpha}$ os intervalos que são as componentes conexas dos abertos Ω_α , temos também que, para cada j , $J_{j,2^{k+1}}$ está contido em algum $J_{i,2^k}$.

(iii) Como $b_{2^k} = f - g_{2^k}$, pelo teorema de Whitney (ver (0.7)) temos que $\text{supp } b_{2^k} \subset \Omega_{2^k}$.

Feitas as observações acima, mostremos que

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})$ converge em H^p . O lema 1 nos dá que, para cada k , $b_{2^k} = \sum_j b_{j,2^k}$ (ver (5)), onde, por (10) vemos que

$$(b_{j,2^k})^+(x) \leq \begin{cases} \bar{c} f^{**}(x) & \text{se } x \in Q_{j,2^k}^* \\ \bar{c} \alpha \left(\frac{d_{j,2^k}}{|x - x_{j,2^k}|} \right)^{M+1} & \text{se } x \notin Q_{j,2^k}^* \end{cases}$$

Temos ainda que $\text{supp } b_{2^k} \subset \Omega_{2^k}$, $\text{supp } b_{2^{k+1}} \subset \Omega_{2^{k+1}}$ e

$\Omega_{2^{k+1}} \subset \Omega_{2^k}$; então, se x não pertence a Ω_{2^k} , x também não pertence a $\Omega_{2^{k+1}}$ e portanto x não pertence a $Q_{j,2^k}$ para todo j . Agora de (12) temos $(b_{2^k} - b_{2^{k+1}})^+(x) = (g_{2^{k+1}} - g_{2^k})^+(x)$ e do lema 1

$$(g_{2^{k+1}} - g_{2^k})^+(x) \leq g_{2^{k+1}}^+(x) + g_{2^k}^+(x)$$

$$\leq \|g_{2^{k+1}}\|_\infty + \|g_{2^k}\|_\infty \leq c_1 2^k + c_1 2^{k+1} = c_2 2^k.$$

Temos então:

$$(b_{2^k} - b_{2^{k+1}})^+(x) \leq \begin{cases} c_2 2^k & \text{se } x \in \Omega_{2^k} \\ c_1 2^k \left[\left(\frac{d_{j,2^k}}{|x - x_{j,2^k}|} \right)^{M+1} + c'' 2^{k+1} \left(\frac{d_{j,2^{k+1}}}{|x - x_{j,2^{k+1}}|} \right)^{M+1} \right] & \text{se } x \notin \Omega_{2^k} \end{cases}$$

Como $p < 1$,

$$\begin{aligned} & \int [(b_{2^k} - b_{2^{k+1}})^+(x)]^p dx = \\ &= \int_{\Omega_{2^k}} [(b_{2^k} - b_{2^{k+1}})^+(x)]^p dx + \int_{R^n - \Omega_{2^k}} [(b_{2^k} - b_{2^{k+1}})^+(x)]^p dx \\ &\leq c^p 2^{kp} m(\Omega_{2^k}) + d^p 2^{kp} m(\Omega_{2^k}) = K 2^{kp} m(\Omega_{2^k}). \end{aligned}$$

Então $\|b_{2^k} - b_{2^{k+1}}\|_{H^p}^p \leq c_2^{kp} m(\Omega_{2^k})$. Portanto

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|b_{2^k} - b_{2^{k+1}}\|_{H^p}^p \leq c \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp} m(\Omega_{2^k})$. Agora, como $0 < p < 1$,

resulta que λ^p é decrescente. Temos ainda que $m(\{x : f^{**}(x) > \lambda\})$ é também decrescente em λ . Isso nos dá:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|b_{2^k} - b_{2^{k+1}}\|_{H^p}^p &\leq c \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp} m(\Omega_{2^k}) = 2c \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(p-1)} m(\Omega_{2^k}) 2^{k-1} = \\ &= 2c \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)(p-1)} m(\Omega_{2^{k+1}}) 2^k \\ &\leq 2c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k < \lambda \leq 2^{k+1}} \lambda^{k-1} m(\Omega_{\lambda}) d\lambda = \\ &= \frac{2c}{p} \int \lambda^{p-1} m(\Omega_{\lambda}) d\lambda = \frac{2c}{p} \int |f^{**}(x)|^p dx \quad (\text{ver [5]}). \end{aligned}$$

Como f está em H^p , $\int |f^{**}(x)|^p dx < \infty$; então $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})$ é absolutamente convergente em H^p e, como H^p é completo para todo p , $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})$ converge em H^p , como queríamos provar.

Para cada k temos que $b_{2^k} = \sum_j b_{j,2^k}$ e, dividindo

Ω_{2^k} em suas componentes conexas, temos, para x pertencente a $J_{n,2^k}$

$$b_{2^k}(x) = \sum_{\substack{\text{supp } b_{j,2^k} \subset J_{n,2^k}}} b_{j,2^k}(x). \quad \text{E também, como } \Omega_{2^{k+1}} \subset \Omega_{2^k},$$

$$b_{2^{k+1}}(x) = \sum_{\substack{\text{supp } b_{j,2^{k+1}} \subset J_{n,2^k}}} b_{j,2^{k+1}}(x).$$

Definiremos então as funções $c_{i,k}$ por

$$c_{i,k}(x) = \left[\left(\sum_{\substack{\text{supp } b_{j,2^k} \subset J_{i,2^k}}} b_{j,2^k} - \sum_{\substack{\text{supp } b_{j,2^{k+1}} \subset J_{i,2^k}}} b_{j,2^{k+1}} \right) \right](x).$$

Observemos que:

$$(i) \text{ para } x \in J_{n,2^k}, \quad c_{i,k}(x) = (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})(x) = (g_{2^{k+1}} - g_{2^k})(x).$$

$$(ii) \text{ como vimos no lema 1, sendo } b_{j,2^k}(x) = (f(x) - P_{j,2^k}(x)) \phi_{j,2^k}(x)$$

$$\text{e } M = \left[\frac{1}{p} \right] - 1, \text{ então } \int b_{j,2^k}(x) x^m dx = 0 \text{ para todo } 0 < m \leq \left[\frac{1}{p} \right] - 1.$$

$$(iii) \text{ supp } c_{i,k} \subset J_{j,2^k}.$$

$$(iv) \int c_{i,k}(x) x^m dx = 0 \text{ para todo } 0 < m \leq \left[\frac{1}{p} \right] - 1.$$

$$(v) \|c_{i,k}(x)\|_{\infty} \leq \|g_{2^{k+1}}(x) - g_{2^k}(x)\|_{\infty}$$

$$\leq \|g_{2^{k+1}}(x)\|_{\infty} + \|g_{2^k}(x)\|_{\infty}$$

$$\leq c2^{k+1} + c2^k = s2^k.$$

Então, se definirmos

$$a_{i,k}(x) = [s(m(J_{i,2^k}))^{\frac{1}{p}} 2^k]^{-1} c_{i,k}(x), \text{ fazendo } r_{i,k} = [s(m(J_{i,2^k}))^{\frac{1}{p}} 2^k]^{-1},$$

teremos:

$$a) \text{ supp } a_{i,k} = \text{supp } c_{i,k} \subset J_{i,2^k}.$$

$$b) \quad ||a_{i,k}(x)||_{\infty} = ||r_{i,k} c_{i,k}(x)||$$

$$\leq s \cdot 2^k \cdot s^{-1} \cdot 2^{-k} m(J_{i,2^k})^{-\frac{1}{p}} = [m(J_{j,2^k})]^{-\frac{1}{p}}.$$

$$c) \quad \int_{-\infty}^{\infty} a_{i,k}(x) x^m dx = r_{i,k} \int_{-\infty}^{\infty} c_{i,k}(x) x^m dx = 0.$$

De acordo com a definição, os itens a), b) e c) acima nos mostram que, para todo i e para todo k , $a_{i,k}$ é um p -átomo real. E, como já vimos anteriormente, $\int a_{i,k}(x) \psi(x) dx$ define uma distribuição temperada quaisquer que sejam i , k e ψ em S .

Temos então que $b_{2^k} - b_{2^{k+1}} = \sum_{i \in A_{2^k}} \alpha_{i,k} a_{i,k}(x)$, onde

de $\alpha_{i,k} = s [m(J_{i,2^k})]^{-\frac{1}{p}} \cdot 2^k$ é tal que $\sum_i |\alpha_{i,k}|^p = s 2^{kp} m(\Omega_{2^k})$, donde

$$\sum_k \sum_i |\alpha_{i,k}|^p \leq c ||f^{**}(x)||_p^p \text{ e portanto } \sum_k \sum_i |\alpha_{i,k}|^p \leq B ||f||_{H^p}^p \text{ com } B$$

dependendo apenas de p .

Mostramos então que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})$ converge em H^p e pode ser escrito como combinação linear de átomos. Se provarmos agora que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})$ converge para f , no sentido das distribuições temperadas, teremos terminado a demonstração do teorema para $f \in S \cap H^p$.

Para toda ψ em S ,

$$(13) \quad (\sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})(x), \psi(x)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-N}^N (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})(x), \psi(x) \right) = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \sum_{k=-N}^N (g_{2^{k+1}} - g_{2^k})(x) \psi(x) dx = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int g_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx - \int g_{2^{-N}}(x) \psi(x) dx \right] = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int f(x) \psi(x) dx - \int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx - \int g_{2^{-N}}(x) \psi(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Agora, do lema 1 temos que $\left| \int g_{2^{-N}}(x) \psi(x) dx \right| \leq c 2^{-N} \int |\psi(x)| dx$. Como ψ é integrável, quando N tende a ∞ , então

$$(14) \quad \int g_{2^{-N}}(x) \psi(x) dx \text{ tende a } 0.$$

Temos ainda que:

$$\int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx = \int b_{2^{N+1}}(x) h(y-x) dx, \text{ onde } h(z) = \psi(y-z) \text{ e en-}$$

tão $h(y-x) = \psi(y-y+x)$. Portanto $\int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx = b_{2^{N+1}} * h(y)$

$$\text{donde } \left| \int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx \right| = |b_{2^{N+1}} * h(y)| \leq |||h|||_N b_{2^{N+1}}^{**}(y) \quad (\text{ver}$$

$$(4)). \text{ Mas } |||h|||_N = \int_{-\infty}^{\infty} (1+|z|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha h(z)| dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1+|z|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \psi(y-z)| dz \text{ e fazendo a}$$

mudança de variáveis $x = y - z$, temos

$$|||h|||_N \leq \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|+|y|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \psi(x)| dx \quad (|y| \leq 1)$$

$$\leq 2^N \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \psi(x)| dx \quad \text{o que implica}$$

$$|||h|||_N \leq 2^N |||\psi|||_N. \quad \text{Então } \left| \int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx \right| \leq 2^N |||\psi|||_N b_{2^{N+1}}^{**}(y).$$

Elevando ambos os membros à potência p , integrando em $|y| \leq 1$, e elevando a $\frac{1}{p}$ fica:

$$\left| \int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx \right| \leq 2^N |||\psi|||_N \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (b_{2^{N+1}}^{**}(y))^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e temos:}$$

a) $\alpha_{m(\Omega_\alpha)}^p \leq \int (f^{**}(x))^p dx < \infty$ pois $f \in H^p$.

b) $\lim_{N \rightarrow \infty} m(\Omega_{2^{N+1}}) = 0$.

c) Como $||b_{2^{N+1}}^{**}||_p$ é equivalente a $||b_{2^{N+1}}^+||_p$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} (b_{2^{N+1}}^{**}(x))^p dx \leq c \int_{\Omega_{2^{N+1}}} (f^{**}(x))^p dx \quad (\text{ver lema 1}) \quad \text{então}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (b_{2^{N+1}}^{**}(x))^p dx \quad \text{tende a } 0 \quad \text{quando } N \quad \text{tende a } \infty.$$

d) $\int_{-1}^1 (b_{2^{N+1}}^{**}(x))^p dx$ tende a 0 quando N tende a ∞ pois

$$\int_{-1}^1 (b_{2^{N+1}}^{**}(x))^p dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (b_{2^{N+1}}^{**}(x))^p dx.$$

Portanto, quando N tende a ∞ , da desigualdade

$$\left| \int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx \right| \leq 2^N |||\psi|||_N ((m(I))^{-1} \int_{-1}^1 b_{2^{N+1}}^{**}(y) dy)^{\frac{1}{p}} \quad \text{concluimos}$$

que

$$(15) \quad \int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx \quad \text{tende a } 0.$$

Levando (14) e (15) na expressão final de (13) podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int f(x) \psi(x) dx - \int b_{2^{N+1}}(x) \psi(x) dx - \int g_{2^{-N}}(x) \psi(x) dx \right] = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f(x) \psi(x) dx = \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_{2^k} - b_{2^{k+1}})(x) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Como observamos, o teorema foi mostrado somente para $f \in S \cap H^p$; usaremos agora o fato de que $S \cap H^p$ é denso em H^p para mostrar que o teorema vale para toda f em H^p , o que finaliza o nosso trabalho.

Seja f em H^p . Temos então que existe uma seqüência $\{f_n\}$ de funções em S , tais que $\|f - f_n\|_{H^p}^p \leq 2^{-n}$. Fazendo $f_0 = 0$, podemos escrever $f = f_1 - f_0 + f_2 - f_1 + f_3 - f_2 + \dots + f_{n+1} - f_n + \dots$

Chamando $g_n = f_n - f_{n+1}$, temos $f_k = \sum_{n=1}^k g_n$, donde $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k g_n$. Como f_n está em S para todo n , então g_n está em S para todo n e, pelo teorema demonstrado, existem λ_i^n reais e b_i^n p -átomos $i = 0, 1, 2, \dots$ tais que, para cada n , $g_n = \sum_i \lambda_i^n a_i^n$ com

$$\sum |\lambda_i^n|^p \leq c \|g_n\|_{H^p}^p. \text{ Então } f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \lambda_i^n a_i^n \text{ com } \sum_n \sum_i |\lambda_i^n|^p \leq \\ \leq c \sum_n \|f_n - f_{n+1}\|_{H^p}^p \leq c \sum_n [\|f_n - f\|_{H^p}^p + \|f - f_{n+1}\|_{H^p}^p]$$

$$\leq c \sum_n 2 \cdot 2^{-n} \leq c, \text{ o que termina a nossa prova.}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. Fefferman, N. M. Riviere, Y. Sagher, Interpolation between H^p spaces: the real method, Trans. Amer. Math. Soc. 191 (1974), 75-81.
- [2] R. R. Coifman, A real variable characterization of H^p , Studia Mathematica L1 (1974), 269-273.
- [3] H. L. Royden, Real Analysis, 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.
- [4] U. Mosco, Transformada de Fourier y Distribuciones, Cuadernos del Instituto de Matematica "Beppo Levi", Rosario, Argentina, 1972.
- [5] R. Macías e C. Segovia, Alguns Aspectos da Teoria dos Espaços de Hardy, Monografias de Matemática Pura e Aplicada, 5, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 1977.
- [6] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Math Series 30, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.
- [7] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces, Princeton Univ. Press, 1971.
- [8] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-194.