

A TEORIA DOS PONTOS PRÓXIMOS  
SOBRE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS  
SEGUNDO ANDRÉ WEIL

ANTONIO CARLOS GILLI MARTINS

ORIENTADOR

PROF.DR.EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA

Dissertação apresentada ao Instituto  
de Matemática, Estatística e Ciência,  
da Computação da Universidade Estadual  
de Campinas como requisito parcial pa-  
ra a obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

Este trabalho foi realizado com auxílio financeiro  
do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq.).

Outubro de 1977.

**UNICAMP**  
**BIBLIOTECA CENTRAL**



COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

UNICAMP

AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PRE-  
ÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: **Antonio Carlos Gilli Martins**

Nº de Identificação: **755025**

Endereço para Correspondência: **Ferreira Penteado 928 ap.2 Campinas**

Curso: **Matemática**

Nome do Orientador: **Eduardo Sebastiani Ferreira**

Título da Dissertação ou Tese: **Teoria dos pontos próximos sobre varie-  
dades diferenciáveis segundo André Weil**

Data proposta para a Defesa: **19 de Dezembro de 1977**

( O Aluno deverá assinar um dos 3 itens abaixo )

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir des-  
ta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou  
Tese a interessados.

1/1  
Data

\_\_\_\_\_  
assinatura do aluno

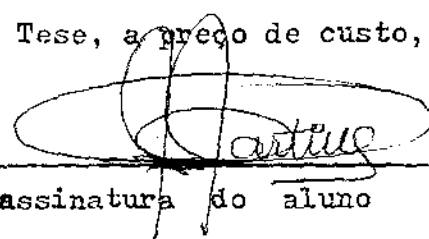
2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a  
partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha  
Dissertação ou Tese a interessados.

1/1  
Data

\_\_\_\_\_  
assinatura do aluno

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consul-  
te, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o forne-  
cimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a in-  
teressados.

25/10/77  
Data

  
\_\_\_\_\_  
assinatura do aluno

## AGRADECIMENTOS

Ao prof. Eduardo Sebastiani Ferreira que, com sua segura orientação, permitiu a realização deste trabalho,

Aos meus pais pela confiança e esforços feitos para que eu pudesse estudar,

Ao colega José Luís Boldrini e aos professores pelas discussões e ensinamentos,

Ao Conselho Nacional de Pesquisas - CNPq - pelo suporte financeiro que tornou possível a realização deste trabalho,

Enfim, a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização do mesmo.

A estes, uma palavra de gratidão.

Antonio Carlos Gilli Martins.

A TEORIA DOS PONTOS PRÓXIMOS  
SOBRE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS  
SEGUNDO ANDRÉ WEIL

Introdução.

CAPITULO 0-Notações e terminologias..... 1

CAPITULO 1-Álgebra local ..... 8

CAPITULO 2-A-pontos próximos..... 18

CAPITULO 3-Prolongamentos de  $V$  de espécie  $A$ ..... 28

CAPITULO 4-Transitividade do prolongamento..... 38

BIBLIOGRAFIA..... 45

## INTRODUÇÃO

Nos meados deste século, A. Weil se propoz a estudar algumas das idéias de seu mestre N. Bourbaki sobre a teoria dos pontos " próximos " ou " infinitamente vizinhos " sobre as variedades diferenciáveis que possuía dupla origem: a primeira era o retorno aos métodos de Fermat no cálculo infinitesimal de primeira ordem e , a segunda, a teoria dos jatos desenvolvida nos anos 40 por Ch. Ehresmann.

Essa teoria tem por objetivo fornecer, para o cálculo diferencial de ordem infinitesimal qualquer sobre uma variedade, métodos de cálculo e notações intrínsecas que sejam também bem adaptadas ao seu assunto, e, se possível, mais cômodas que estas do cálculo tensorial clássico, de primeira ordem.

Na presente dissertação, o objetivo não é o de desenvolver a teoria dos pontos " próximos " para o cálculo infinitesimal, mas sim o de aproveitá-la no sentido de generalizar a teoria dos jatos de Ehresmann e intenciona-se ainda em fornecer definições e resultados, ou seja, pré-requisitos, para a teoria de prolongamentos de tipo A de uma variedade, que, naturalmente, generalizam o conceito dos fibrados de referenciais no sentido de (5).

Quanto a sua aplicabilidade aos modelos matemáticos, espera-se que esses prolongamentos de tipo A sirvam de ferramentas para a resolução de problemas na teoria dos pseudo-grupos de Lie infinitos, assim como foram úteis no estudo de G-estruturas em Geometria Diferencial, recentemente, por Morimoto e Koszul, e, ainda, por Morimoto-Nagoya University, 1975- que forneceu toda a teoria de G-estruturas sob esse ponto de vista.

Dessa forma, no capítulo 0, é feita a abordagem dos elementos algébricos e geométricos básicos, com maior enfoque à álgebra das séries formais. No capítulo 1 a caracterização das álgebras locais através de quocientes da álgebra das séries formais por seus ideais de codimensão finita e, no capítulo 2, a teoria sobre os A-pontos de  $V$  próximos de  $x$  de  $V$ .

O capítulo 3 é destinado a dar ao conjunto dos A-pontos próximos a  $V$  uma estrutura de variedade fibrada sobre  $V$  e também fornecer alguns elementos para que, no capítulo 4, sejam dadas, finalmente, as noções de prolongamentos algébricos de tipo A e sua transitividade.

## CAPITULO 0

### NOTAÇÕES E TERMINOLOGIAS

Será feita, neste capítulo, uma revisão suscinta dos conceitos básicos que serão usados, com finalidade de fixar terminologia e notações. A intenção é a de ser breve na recapitulação, ao mesmo tempo em que todo esforço será feito para dar ao leitor os conhecimentos necessários à uma leitura proveitosa desta dissertação. Para exposições mais detalhadas, o leitor deverá se dirigir aos textos existentes na bibliografia, (c.f. (1), (2), (5)).

Um corpo  $K$  será, doravante, sempre suposto ser de característica zero.

Uma álgebra é um par  $(A, m)$  onde  $A$  é um espaço vetorial sobre um corpo  $K$  e  $m: A \times A \longrightarrow A$  uma aplicação bilinear, chamada de multiplicação da álgebra  $A$ . É mais comum, numa álgebra, escrever  $uv \in A$  em vez de  $m(u, v) \in A$  para indicar o produto de dois elementos  $u$  e  $v$  de  $A$  e fazer referência a álgebra  $A$  no lugar de  $(A, m)$ . A bilinearidade da multiplicação significa que:

$$u \cdot (v+w) = uv + uw \quad ,$$

$$(u + v)w = uw + vw \quad ,$$

$$(\lambda u)v = u(\lambda v) = \lambda(uv) \quad ,$$

quaisquer que sejam  $u, v, w$ , em  $A$  e  $\lambda$  em  $K$ .

Uma álgebra é dita associativa quando se tem  $u(vw) = (uv)w$  para todos  $u, v$  e  $w$  em  $A$ , comutativa quando  $uv = vu$  quaisquer que sejam  $u$  e  $v$  em  $A$  e diz-se ainda que  $A$  possui unidade se existe um elemento  $e$  em  $A$  tal que  $eu = ue = u$  para todo  $u$  em  $A$ . É claro que uma álgebra  $A$  possui, no máximo, uma unidade.

Sejam  $A$  e  $B$  duas álgebras. Uma aplicação linear  $f: A \longrightarrow B$  chama-se um homomorfismo de álgebras quando se tem  $f(uv) = f(u)f(v)$  quaisquer que sejam  $u$  e  $v$  em  $A$ . Quando existem unidades  $e$  em  $A$  e  $e'$  em  $B$  e, além disso, se tem  $f(e) = e'$ , então  $f$  é dito um homomorfismo unitário.

Se a álgebra  $A$  possui uma unidade  $e$ , existe um homomorfismo unitário natural  $h: K \longrightarrow A$  o qual leva o  $\lambda$  de  $K$  em  $h(\lambda) = \lambda e$ . Sendo  $e$  não nulo,  $h$  é injetor e fornece uma imersão canônica de  $K$  em  $A$ . Assim, identificando-se o  $\lambda$  de  $K$  com o  $\lambda e$  de  $A$  (o que equivale a identificar a unidade  $e$  de  $A$  com o  $1$  de  $K$ ), poder-se-á sempre considerar  $K \subset A$ , para toda álgebra  $A$  com unidade.

Se  $A$  é uma álgebra com unidade  $1$ , de dimensão finita sobre o corpo  $K$ , e se  $I$  é um ideal de  $A$ ,  $A/I$  é o espaço vetorial quociente sobre  $K$  cuja dimensão será

$$\dim(A/I) = \dim A - \dim I$$

e  $\dim(A/I)$  será chamada de codimensão de  $I$  sobre  $K$ .

Supondo-se  $A$  uma álgebra com unidade, de dimensão finita  $n$  e que  $I$  seja um ideal de  $A$  de codimensão  $1$ , tem-se, de imediato que  $A = (A/I) \oplus I$ . Isso decorre do fato de que  $I$  não contém a unidade de  $A$  e, assim sendo,  $A/I$  é identificado com  $K$ ,

e, se se tomar uma base para  $A$  constituída por  $v_1=1, v_2, \dots, v_n$ , os vetores  $v_2, v_3, \dots, v_n$  formarão uma base de  $I$  e logo  $A$  é soma direta de  $K$  com  $I$ .

Nas condições acima, vê-se, claramente, que o ideal  $I$  de  $A$  é maximal e único satisfazendo  $\dim(A/I)=1$  e  $A = I \oplus K$ .

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre  $K$ . A  $r$ -ésima potencia simétrica de  $V$  é um par  $(S^r(V), \psi)$  denotado apenas por  $S^r(V)$ , com as três propriedades seguintes:

1.)  $S^r(V)$  é um espaço vetorial sobre  $K$  e  $\psi$  é uma aplicação  $r$ -linear simétrica de  $V \times V \times \dots \times V$  em  $S^r(V)$ ;

$$2.) \dim S^r(V) = \binom{n-r+1}{r};$$

3.) A imagem de  $V \times V \times \dots \times V$  pela  $\psi$  gera  $S^r(V)$ .

As condições 2.) e 3.) quando acompanhadas de 1.) se tornam equivalentes a:

2!) Se  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  é uma base de  $V$  então os elementos da forma  $\psi(e_{m_1}, e_{m_2}, \dots, e_{m_r})$ , onde  $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r \leq n$ , constituem uma base de  $S^r(V)$ .

Considerando, para cada  $r \geq 0$ , a  $r$ -ésima potencia simétrica de  $V$  e lembrando que  $S^0(V)=K$ , o conjunto  $S(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(V)$  tem, de modo natural, uma estrutura de álgebra, pois se  $f \in S(V)$ , então  $f = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$  onde, com exceção de apenas um número finito dos  $f_j$ , todos os outros são nulos. Esta estrutura de álgebra é devida as seguintes operações: se  $f$  e  $g$  estão em  $S(V)$  e  $\alpha$  em  $K$ ,

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_n + g_n, \dots)$$

$$\alpha f = (\alpha f_0, \alpha f_1, \alpha f_2, \dots, \alpha f_n, \dots) \quad e$$

$$f \cdot g = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, \dots, \sum_{i+j=n} f_i g_j, \dots)$$

Decorrem das definições acima as seguintes propriedades de  $S(V)$ :

1.)  $S(V)$  munida da adição e produto por escalar é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre o corpo  $K$ . Também com a lei de composição interna  $f \cdot g$ ,  $S(V)$  se torna uma álgebra associativa, comutativa, com elemento unidade e livre pois tem apenas um número finito de geradores, a saber,  $1$  e uma base de  $V$ .

2.)  $S(V)$  é graduada, pois definindo  $S_i(V) = \bigoplus_{r=0}^i S^r(V)$ , isto é:  $S_i(V) = S^0(V) \oplus S^1(V) \oplus S^2(V) \oplus \dots \oplus S^i(V)$  e tomando em  $S_i(V)$  o elemento  $f = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_i)$  e, em  $S_k(V)$ , o elemento  $g = (g_0, g_1, g_2, \dots, g_k)$ , pela definição da multiplicação tem-se que

$f \cdot g = (f_0 g_0, f_1 g_0 + f_0 g_1, \dots, \sum_{r+s \leq i+k} f_r g_s, \dots, f_i g_k)$  e, claramente esse produto está em  $S_{i+k}(V)$ . Ainda observa-se que

$K = S_0(V) \subset S_1(V) \subset S_2(V) \subset \dots \subset S_n(V) \subset \dots$  e  $S(V) = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i(V)$ , com  $S_i(V) \cdot S_k(V) \subset S_{i+k}(V)$ .

3.) Para cada inteiro  $i \geq 0$ , existe uma aplicação linear injetora  $\xi_i$  de  $S^i(V)$  em  $S(V)$  que associa ao  $f_i$  de  $S^i(V)$  o elemento  $(0, 0, \dots, 0, f_i, 0, \dots)$ , cujos termos são todos nulos, com exceção, talvez, do  $i$ -ésimo que é igual ao  $f_i$ . Isso fornece uma imersão natural que identifica  $S^i(V)$  com sua imagem pela  $\xi_i$ .

As operações acima induzem em  $\hat{S}(V) = \prod_{i=0}^{\infty} S^i(V)$ , o completado de  $S(V)$ , uma estrutura de álgebra chamada de álgebra das séries formais sobre  $V$  e um elemento de  $\hat{S}(V)$  é uma sequência  $f = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$  com  $f_j$  em  $S^j(V)$ , para todo natural  $j$ . Da identificação de  $S^i(V)$  com  $\xi_i(S^i(V))$  tem-se que

cada  $S^1(V)$  é um subespaço vetorial de  $\hat{S}(V)$  e que  $S(V)$  é uma subálgebra de  $\hat{S}(V)$ .

As seguintes notações também serão usadas para  $\hat{S}(V)$ :

$$K((V)) \quad , \quad K((X_1, X_2, \dots, X_n)) \quad \text{ou} \quad K_n$$

onde  $K$  é o corpo e  $n = \dim V$ , e, para seus elementos

$$f = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots) \quad \text{ou} \quad P = P(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Considerando o subconjunto  $\mathcal{M}(V)$  de  $\hat{S}(V)$  constituído pelas  $f$  de  $\hat{S}(V)$  tais que  $f_0 = 0$ ,  $\mathcal{M}(V)$  é um ideal de  $\hat{S}(V)$  e um elemento  $f$  de  $\hat{S}(V)$  é inversível se, e somente se,  $f$  não pertence a  $\mathcal{M}(V)$ ; i.é: se, e somente se,  $f_0 \neq 0$ . De fato: se  $f$  está em  $\hat{S}(V)$  e é inversível, como o 1 também está em  $\hat{S}(V)$ , existe  $g$  em  $\hat{S}(V)$  tal que  $f \cdot g = 1$ , o que implica que  $f_0 \cdot g_0 = 1$  e portanto  $f_0 \neq 0$ . Reciprocamente, se  $f$  não está em  $\mathcal{M}(V)$  é possível construir uma  $g$  em  $\hat{S}(V)$  que seja a inversa da  $f$  e isso é feito por indução nas componentes da  $g$ . Como  $f_0 \neq 0$ , existe um  $g_0$  em  $K$  tal que  $g_0 = 1/f_0$ . Supondo-se agora ter construído  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$ , com  $n > 1$ , define-se o  $g_n$  pela seguinte fórmula:

$$g_n = - \frac{f_1 g_{n-1} + f_2 g_{n-2} + \dots + f_{n-1} g_1 + f_n g_0}{f_0}.$$

$g_n$  é bem definida e pertence a  $S^n(V)$  e é óbvio que o elemento  $g = (g_0, g_1, \dots, g_n, \dots)$ , o limite da sequência em  $\hat{S}(V)$ , satisfaz o desejado.

Verifica-se ainda que  $\mathcal{M}(V)$  é o ideal maximal de  $\hat{S}(V)$  e único com essa propriedade. Ora, demonstrar isso é o mesmo que mostrar que todo ideal  $\mathcal{J}$  não trivial de  $\hat{S}(V)$  está contido em  $\mathcal{M}(V)$ . Mas se existir um  $f$  em  $\mathcal{J}$  tal que  $f$  não esteja em  $\mathcal{M}(V)$ , pela

propriedade de  $\mathcal{M}(V)$  dada no parágrafo precedente,  $f$  é inversível e logo o 1 de  $\hat{S}(V)$  está em  $\mathcal{G}$  e portanto  $\mathcal{G} = \hat{S}(V)$ . Dessa forma, se  $\mathcal{G}$  é não trivial então  $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}(V)$ .

Como últimas observações sobre  $\hat{S}(V)$ , segue-se que  $\hat{S}(V) = \hat{S}^0(V) \oplus \mathcal{M}(V)$  e um resultado devido a Borel :

TEOREMA DE BOREL SOBRE SÉRIES DE TAYLOR:

A aplicação  $T$  definida na álgebra das funções numéricas de  $\mathbb{R}^n$  indefinidamente diferenciáveis, na álgebra das séries formais em  $n$  variáveis, que a cada  $f$  associa o desenvolvimento formal de Taylor da  $f$  na origem  $O$  do  $\mathbb{R}^n$  é sobrejetora.

Esse desenvolvimento formal aqui será denotado por: se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é uma  $n$ -tupla de inteiros não negativos,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$  e  $Df$  a diferencial da  $f$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ , então:

$$T(f) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha.$$

Demonstração : O leitor deverá consultar ( 4 ) .

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis (sempre de classe  $C^\infty$ ) de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $x_0$  um ponto de  $M$ ,  $y_0$  um ponto de  $N$  e  $f$  e  $g$  duas aplicações diferenciáveis definidas numa vizinhança de  $x_0$  em  $M$  com valores em  $N$  e tais que  $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ . Se  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  são cartas locais para  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, tem-se, então, coordenadas locais  $x^i$  com  $i=1, 2, \dots, m$ , e  $y^j$  com  $j=1, 2, \dots, n$ , definidas sobre  $U$  e  $V$ , respectivamente, e, segundo as quais  $f$  e  $g$  são representadas pelo sistema de funções numéricas

$$f^j(x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ e } g^j(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Dizer que  $f$  e  $g$  são equivalentes de ordem  $k$  no ponto  $x_0$ , com  $k$  sendo um inteiro positivo ou nulo, é dizer que as funções  $f^j$  e  $g^j$  têm as mesmas derivadas parciais no ponto  $x_0$  até a ordem  $k$  inclusive, para todo  $j=1,2,\dots,n$ . Ao se efetuar uma mudança de coordenadas nas vizinhanças dos pontos  $x_0$  e  $y_0$ , as aplicações  $f$  e  $g$  serão representadas por novas funções numéricas de  $m$  variáveis:

$\tilde{f}^j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)$  e  $\tilde{g}^j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)$ ,  $j=1,2,\dots,n$ , e as derivadas parciais de ordem  $\leq k$  dessas novas funções se expressarão, em função das derivadas parciais de ordem  $\leq k$  de  $f^j$  e  $g^j$ , por meio de polinômios. Isso mostra que, o fato de  $f$  e  $g$  serem equivalentes de ordem  $k$  numa vizinhança de  $x_0$ , não depende das cartas locais escolhidas para as vizinhanças de  $x_0$  e de  $y_0$ . A propriedade "ser equivalente de ordem  $k$ " numa vizinhança do ponto  $x_0$  define uma relação de equivalência sobre o conjunto das aplicações diferenciáveis  $f$ , definidas em vizinhanças de  $x_0$ , com valores em  $N$  e tais que  $f(x_0)=y_0$ . Uma classe de equivalência será denominada um jato de ordem  $k$  de  $M$  em  $N$ .

## CAPITULO 1

### ALGEBRA LOCAL

Pretende-se , neste capítulo, fornecer alguns elementos da teoria das álgebras locais bem como caracterizá-las através de quocientes da álgebra das séries formais por ideais de co-dimensão finita de  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$ .

Definição 1.1- Por uma álgebra local entender-se-á uma álgebra  $A$  de dimensão finita sobre o corpo  $R$  dos reais, associativa, comutativa, com elemento unidade  $1$  e possuindo um ideal  $I$  tal que  $A/I$  seja de dimensão  $1$  sobre  $R$  e que  $I^{m+1} = \{0\}$ , o ideal nulo de  $A$ , para um inteiro não negativo  $m$ .

Definição 1.2- Para uma álgebra local  $A$ , cujo ideal de codimensão  $1$  é  $I$ , o menor inteiro  $m$  tal que  $I^{m+1} = \{0\}$  é chamado de altura de  $A$ .

Levando-se em consideração o que já foi dito à respeito de álgebras em geral no capítulo 0, o corpo  $R$  será identificado aqui com o subespaço de  $A$  formado pelos múltiplos escalares do elemento unidade  $1$  de  $A$ , e  $A$  será sempre vista como sendo a soma direta de  $R$  com  $I$ . Escrever-se-á  $A = R \oplus I$  e  $I$  será, portanto, o único ideal maximal de  $A$ . Logo todo  $a$  em  $A$  se escreverá como  $a = a_0 + i_a$ , de modo único, onde  $a_0$  pertence a  $R$  e  $i_a$  a  $I$ .

Definição 1.3- Para todo  $a$  em  $A$ , a componente  $a_0$  de  $R$  da decomposição de  $a$  em soma direta será chamada de parte finita de  $a$ .

Exemplo 1.4- A álgebra dos números duais.

Seja  $A = \{a + b\tau : a, b \in R \text{ e } \tau \text{ é um elemento satisfazendo } \tau^2 = 0\}$ . Definindo-se naturalmente a adição, produto por escalar e a multiplicação para os elementos de  $A$ , vê-se, de imediato, que  $A$  é uma álgebra de dimensão 2 sobre  $R$ , comutativa, associativa, com uma unidade e um ideal gerado por  $\tau$ . Como  $\tau^2 = 0$ , tem-se que esse ideal  $I$  satisfaz  $I^2 = (0)$ , e daí  $A$  tem altura 1. Essa álgebra é conhecida como "a álgebra dos números duais". Outros exemplos irão, naturalmente, aparecer mais adiante, juntamente com suas interpretações geométricas.

Proposição 1.5- Seja  $A$  uma álgebra local com ideal maximal  $I$  de codimensão 1. Estando  $A/I$  identificado com  $R$ , a aplicação  $q$  de  $A$  em  $R$  dada por  $q(a) = a_0$ , a parte finita de  $a$ , é um homomorfismo canônico e sobrejetor.

Demonstração: É claro que a aplicação  $q$  é bem definida. Sendo

$a = a_0 + i_a$ ,  $b = b_0 + i_b$ ,  $a_0, b_0$  e  $\lambda \in R$  e  $i_a, i_b \in I$ , tem-se:

$$a + b = (a_0 + b_0) + (i_a + i_b), \quad \lambda a = \lambda a_0 + \lambda i_a \quad \text{e}$$

$$a \cdot b = a_0 \cdot b_0 + (a_0 i_b + i_a b_0 + i_a i_b). \text{ É decorrente das definições}$$

que  $q(a + \lambda b) = q(a) + \lambda q(b)$  e  $q(a \cdot b) = q(a) \cdot q(b)$ , para todos

$a$  e  $b$  em  $A$  e  $\lambda$  em  $R$ . Note-se ainda que esse homomorfismo não dependeu da base de  $A$ , daí o fato dele ser canônico. Como  $A$  contém

o elemento 1, dado qualquer  $a_0$  em  $R$ ,  $a_0 \cdot 1$  pertence a  $A$  e  $q(a_0 \cdot 1) = q(a_0) = a_0$ , obtendo-se, assim, a sobrejeção desejada.

Doravante, sempre que se usar uma álgebra local  $A$  deverá ficar claro ao leitor que ela possui um ideal maximal  $I$  de codimensão 1 e sempre poderá ser decomposta em  $R \oplus I$ . Quando houver necessidade de explicitar sua altura e seu ideal, a terna  $(A, I, m)$  conterá as informações desejadas.

Seja  $(A, I, m)$  uma álgebra local e suponha dada uma série formal  $P = P(X_1, X_2, \dots, X_h)$  com coeficientes em  $R$ . Sejam  $P_m = P_m(X_1, X_2, \dots, X_h)$  o polinômio de grau  $\leq m$ , soma dos termos de grau  $\leq m$  na série formal  $P$ , e  $i_1, i_2, \dots, i_h$  elementos de  $I$ . Por definição, o elemento  $P_m(i_1, i_2, \dots, i_h)$  de  $A$  será denotado por  $P(i_1, i_2, \dots, i_h)$ . Uma vez que  $A$  tem altura  $m$  e que  $I^{m+1} = \{0\}$ , todos os produtos do tipo  $i_1^{m_1} \cdot i_2^{m_2} \cdot \dots \cdot i_h^{m_h}$  com  $m_1 + m_2 + \dots + m_h > m$  são nulos e, portanto, tem sentido a identificação acima.

Lema 1.6- Dados  $i_1, i_2, \dots, i_h$  em  $I$ , a aplicação  $\phi$  definida em  $R((X_1, X_2, \dots, X_h))$  com valores em  $(A, I, m)$  dada por  $\phi(P) = P(i_1, i_2, \dots, i_h)$  é um homomorfismo de álgebras.

Demonstração: Que  $\phi$  é bem definida e linear decorre imediatamente das definições. Agora, se  $P$  e  $Q$  estão em  $R((X_1, X_2, \dots, X_h))$ , por um lado tem-se:

$$\begin{aligned} \phi(P \cdot Q) &= (P \cdot Q)(i_1, i_2, \dots, i_h) = (P \cdot Q)_m(i_1, i_2, \dots, i_h) = \\ &= \sum_{0 \leq j \leq m} \{P_j(i_1, i_2, \dots, i_h) \cdot Q_j(i_1, i_2, \dots, i_h)\}, \text{ e, por outro} \\ \text{lado:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(P) \cdot \phi(Q) &= P(i_1, i_2, \dots, i_h) \cdot Q(i_1, i_2, \dots, i_h) = \\ &= \sum_{0 \leq j \leq m} \{P_j(i_1, i_2, \dots, i_h) \cdot Q_j(i_1, i_2, \dots, i_h)\}, \text{ e, confrontan} \\ \text{do-se os resultados obtém-se } \phi(P \cdot Q) &= \phi(P) \cdot \phi(Q) \text{ e, assim, } \phi \text{ é um} \\ \text{homomorfismo de álgebras.} \end{aligned}$$

Proposição 1.7-Sejam  $i_1, i_2, \dots, i_h$  fixos em  $I$ . Supondo-se que, pela aplicação quociente  $q$  de  $I$  em  $I/I^2$ ,  $q(i_1), q(i_2), \dots, q(i_h)$  geram  $I/I^2$ , então a aplicação  $\phi$  de  $R((X_1, X_2, \dots, X_h))$  em  $A$  definida por  $\phi(P) = P(i_1, i_2, \dots, i_h)$  é um homomorfismo sobrejetor.

Demonstração:- Pelo lema 1.6,  $\phi$  é homomorfismo. A demonstração da sobrejetividade é feita por recorrência sobre a altura  $m$  de  $A$ , mas aqui só será feita para o caso particular de  $m=2$ , para efeito de simplicidade dos cálculos, mas, no caso geral, ela é análoga. Assim, se  $m=2$ ,  $I^3=(0)$  e  $I^2 \neq (0)$  e  $I/I^2$  é não trivial. O que se deseja é, a partir de um elemento  $a$  de  $A$ , construir uma série formal  $P$  de  $R((X_1, X_2, \dots, X_h))$ , cuja imagem pela  $\phi$  seja  $a$ . Ora, dado  $a$  em  $A$ ,  $a = a_0 + i_a$  com  $a_0$  em  $R$  e  $i_a$  em  $I$ . Como  $\{q(i_j) : j=1, 2, \dots, h\}$  gera  $I/I^2$  e  $q(i_a)$  está em  $I/I^2$ , tem-se que, para  $\lambda_j$  em  $R$ ,

$$q(i_a) = \sum_{j=1}^h \lambda_j q(i_j) = q\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j i_j\right) \quad \text{e que}$$

$i_a = \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j i_j\right) \bmod I^2$  i.é:  $i_a - \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j i_j\right) \in I^2$  e, portanto, é soma finita de elementos da forma  $f_r g_r$  com  $f_r$  e  $g_r$  em  $I$ , ou seja,

$$i_a - \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j i_j\right) = \sum_{r=1}^m f_r g_r, \text{ logo } i_a = \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j i_j\right) + \sum_{r=1}^m f_r g_r.$$

De modo análogo, cada  $f_r$  e cada  $g_r$ , com  $r=1, 2, \dots, m$ , pode ser escrito como:

$$f_r = \sum_{j=1}^h \sigma_j^r i_j + \sum_{s=1}^p d_s e_s, \quad g_r = \sum_{j=1}^h \rho_j^r i_j + \sum_{t=1}^n b_t c_t \quad \text{onde}$$

$\sigma_j^r, \rho_j^r \in R$ ,  $b_t, c_t, d_s, e_s \in I$ , para todo  $t, s$ . Dessa forma

$$f_r g_r = \sum_{j,k} \sigma_j^r \rho_k^r i_j i_k + \left(\sum_{j=1}^h \sigma_j^r i_j\right) \left(\sum_{t=1}^n b_t c_t\right) + \left(\sum_{s=1}^p d_s e_s\right) \left(\sum_{j=1}^h \rho_j^r i_j\right) +$$

$\left(\sum_{s=1}^p d_s e_s\right) \left(\sum_{t=1}^n b_t c_t\right)$ . Mas, sendo  $I^3=(0)$ , os três últimos termos da soma  $f_r g_r$  dão zero, assim:

$$a = a_0 + \sum_{j=1}^h \lambda_j i_j + \sum_{r=1}^m \left( \sum_{j,k}^h \sigma_j^r \rho_k^r i_j i_k \right) \quad \text{para } a \text{ em } A.$$

Toma-se ,então, a série formal (no caso um polinômio )

$$P = a_0 + \sum_{j=1}^h \lambda_j X_j + \sum_{r=1}^m \left( \sum_{j,k}^h \sigma_j^r \rho_k^r X_j X_k \right) \quad \text{e , portanto ,}$$

é sobrejetora.

Definição 1.8- A dimensão de  $I/I^2$  é chamada de largura de  $A$ .

Proposição 1.9- Se a largura de  $A$  é  $n$  ,então  $A$  é isomorfa a um quociente de  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$  por um ideal  $J$  de  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$ .

Demonstração- Como a largura de  $A$  é  $n$  ,então existem  $n$  elementos  $i_1, i_2, \dots, i_n$  linearmente independentes em  $I$  e que geram  $I/I^2$ . Então o homomorfismo  $\phi$  do lema 1.6 é ,pelo (1.7) sobrejetor . Tomando por  $J$  o núcleo de  $\phi$  e aplicando o teorema de isomorfismo para espaços vetoriais ( anéis, grupos, ...) tem-se que  $A$  é isomorfa a  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))/J$ .

Proposição 1.10- Todo quociente de  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$  por um ideal  $J$  de codimensão finita de  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$  e não trivial é uma álgebra local e sua largura é menor ou igual a  $n$ .

Demonstração: Como a codimensão de  $J$  é finita, o quociente  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))/J$  é uma álgebra local pois preserva a comutatividade, associatividade, e possui também um elemento neutro e seu ideal maximal será  $\mathcal{M}/J$ , onde  $\mathcal{M}$  é o ideal maximal da álgebra  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$ , Mas  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$  é uma álgebra graduada e ,pelo fato de  $J \subset \mathcal{M}$ , existe um inteiro  $k$ , não negativo ,

tal que  $J \supset M^k$ , assim  $(M/J)^k = (0)$  para esse  $k$  e, consequentemente,  $R((X_1, X_2, \dots, X_n)) / J$  terá uma altura  $\leq k$ . Para a verificação de que sua largura é  $\leq n$ , considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{q_1} & M/M^2 \\
 \downarrow q_2 & \searrow g & \downarrow h \\
 M/J & \xrightarrow{q_3} & (M/J)/(M/J)^2
 \end{array}$$

onde as  $q_i$ , com  $i=1,2,3$ , são as aplicações quocientes naturais,  $g=q_3 \circ q_2$ , portanto sobrejetora, e se deseja obter a  $h$  que seja linear e sobrejetora. Para se ter uma boa definição de  $h$  é necessário que o núcleo de  $q_1$  esteja contido no núcleo da  $g$  e assim definir  $h$  por  $h(q_1(x)) = g(x)$ . Para isso, se  $x$  está no núcleo de  $q_1$ , então  $x$  pertence a  $M^2$  e, sem perda de generalidade,  $x$  pode ser escrito como  $x_1 \cdot x_2$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  estão em  $M$ . Logo, para esse  $x$ ,  $g(x) = q_3(q_2(x))$  e  $q_2(x) = q_2(x_1 \cdot x_2) = q_2(x_1)q_2(x_2) = (x_1 + J)(x_2 + J)$  e  $q_2(x)$  está em  $(M/J)^2$ , portanto  $q_3(q_2(x)) = 0$  e  $x$  está no núcleo da  $g$ .  $h$ , como definida acima, é, dessa forma linear e sobrejetora e se tem que

$$\dim((M/J)/(M/J)^2) \leq \dim(M/M^2) = n, \text{ [c.f. corolário 1.11]} \text{ e, por conseguinte, a largura de } R((X_1, X_2, \dots, X_n))/J$$

é menor ou igual a  $n$ .

Das proposições (1.9) e (1.10) tira-se a conclusão de que a noção de álgebra local coincide com a noção de álgebra quociente, de dimensão finita sobre  $R$ , duma álgebra de séries formais sobre  $R$ , e ainda, o seguinte corolário:

Corolário 1.11. Se  $\mathcal{M}$  é o ideal maximal de  $R((X_1, X_2, \dots, X_n))$  formado das séries formais sem termos constantes, o quociente  $R((X_1, X_2, \dots, X_n)) / \mathcal{M}^{m+1}$  é uma álgebra local de altura  $m$  e largura  $n$  que será denotada por  $R_n^m$ .

Demonstração: É claro que  $R_n^m$  é uma álgebra local. Resta apenas mostrar que sua altura é  $m$  e sua largura é  $n$ . Mas  $\mathcal{M}^{m+1}$  é constituído por todas as séries formais cujas componentes  $f_i \in S^i(V)$  são nulas para todo  $0 \leq i \leq m+1$ , e contém todos os produtos de  $m+1$  ou mais elementos de  $\mathcal{M}$ , consequentemente  $(\mathcal{M} / \mathcal{M}^{m+1})^{m+1} = \{0\}$ . Como  $V$  é isomorfa à  $S^1(V)$ , identificando-se o elemento  $X_1$  de  $V$  com a sua imagem por esse isomorfismo, a série formal  $(0, X_1, 0, \dots, 0, \dots)$  está em  $\mathcal{M}$  e o produto dessa série por si mesma  $m$  vezes resulta em  $(0, 0, \dots, 0, X_1^m, 0, \dots)$ , com  $X_1^m \in S^m(V)$ , que claramente não pertence a  $\mathcal{M}^{m+1}$ . Assim,  $(\mathcal{M} / \mathcal{M}^{m+1})^m \neq \{0\}$  e a altura será  $m$ .  
Seja agora, para simplicidade de notação,  $\mathcal{J} = \mathcal{M} / \mathcal{M}^{m+1} = \{f + \mathcal{M}^{m+1} \mid f \text{ pertença a } \mathcal{M}\}$ .  $\mathcal{J}^2$  é o ideal de  $\mathcal{J}$  formado pelos elementos de  $\mathcal{J}$  que podem ser escritos como soma finita do tipo  $\tilde{g}\tilde{h}$  com  $\tilde{g}$  e  $\tilde{h}$  em  $\mathcal{J}$ . Assim,  $\mathcal{J} / \mathcal{J}^2 = \{\alpha + \mathcal{J}^2, \text{ com } \alpha \in \mathcal{J}\}$ .  
Observando-se que, para toda  $f$  em  $\mathcal{M}$ ,  $f$  pode ser decomposta por:  
 $(0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) = (0, f_1, 0, \dots, 0, \dots) + (0, 0, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots)$   
e que se  $\alpha \in \mathcal{J}$ , então  $\alpha = f + \mathcal{M}^{m+1}$ , para alguma  $f$  em  $\mathcal{M}$ , tem-se:  
 $\alpha = f + \mathcal{M}^{m+1} = (0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) + \mathcal{M}^{m+1} =$   
 $= \{(0, f_1, 0, \dots, 0, \dots) + \mathcal{M}^{m+1}\} + \{(0, 0, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) + \mathcal{M}^{m+1}\},$  e  
 $\alpha + \mathcal{J}^2 = \{(0, f_1, 0, \dots, 0, \dots) + \mathcal{M}^{m+1}\} + \{(0, 0, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) + \mathcal{M}^{m+1}\} + \mathcal{J}^2.$   
Mas  $(0, 0, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) + \mathcal{M}^{m+1}$  pertence a  $\mathcal{J}^2$ , o que implica em  
 $\alpha + \mathcal{J}^2 = \{(0, f_1, 0, \dots, 0, \dots) + \mathcal{M}^{m+1}\} + \mathcal{J}^2.$  Por esse procedimento

se  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$  e, pelo isomorfismo entre  $V$  e  $S^1(V)$ , o conjunto  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , imagem da base de  $V$  pelo isomorfismo, é uma base de  $S^1(V)$  e os elementos  $\alpha_i = (0, w_i, 0, \dots) + \mathcal{M}^{m+1}$ , com  $i=1, 2, \dots, n$ , constituem uma base para  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2$ , logo  $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2 = n$  e largura de  $R(\{X_1, X_2, \dots, X_n\})/\mathcal{M}^{m+1}$  é  $n$ .

Proposição 1.12- Seja  $(A, I, m)$  uma álgebra local. Toda subálgebra  $B$  de  $A$ , contendo a unidade 1 de  $A$  é uma álgebra local de altura menor ou igual a  $m$ .

Demonstração-Resta apenas mostrar que  $B$  possui um ideal maximal  $J$ , com  $B = R \oplus J$  e  $J^{k+1} = \{0\}$ , com  $0 \leq k \leq m$ . Seja então  $J = B \cap I$ .  $J$  assim definido é um ideal maximal de  $B$  e tem dimensão, sobre  $R$ , igual a  $\dim B - 1$ . De fato:  $\dim(B \cap I) = \dim B + \dim I - \dim(B + I) = \dim B + \dim I - \dim A = (\dim B) - 1$ , pois  $A \subset B + I \subset A$  e  $B \cap I$  é maximal em  $B$  pois não contém a unidade 1, logo  $B = R \oplus J$ . Agora, como para todos  $j_1, j_2, \dots, j_{m+1}$  em  $J$  o produto  $j_1 j_2 \dots j_{m+1} = 0$ , existe um inteiro não negativo  $k \leq m$  tal que  $J^{k+1} = \{0\}$  e  $J^k \neq \{0\}$ , donde a altura de  $B$  é menor ou igual a altura de  $A$ .

Proposição 1.13-Seja  $(A, I, m)$  uma álgebra local. Toda álgebra quociente de  $A$  por um ideal  $J$  de  $A$  é uma álgebra local e tem altura menor ou igual a  $m$ .

Demonstração: Seja  $B = A/J$  a tal álgebra quociente de  $A$ . Como  $I/J$  é o ideal maximal de  $B$  e a associatividade e a comutatividade são preservadas pelo quociente, e, também, dimensão de  $B$  é finita e  $B$  possui 1+J por unidade,  $B$  é uma álgebra associativa, comutativa, com unidade, de dimensão finita sobre  $R$  e com ideal  $I/J$ .

e, restando apenas demonstrar que, sua altura é  $\leq m$ . Mas se a altura de  $B$  fosse  $k$  com  $k > m$ , então  $(I/J)^k \neq (0)$  e  $(I/J)^{k+1} = \{\bar{0}\}$ , onde  $\bar{0}$  denota a classe de equivalência do elemento neutro aditivo de  $I$  em  $I/J$ , e, portanto, existiria um  $\bar{q}$  em  $(I/J)^k$  com  $\bar{q} \neq \bar{0}$ . Como  $q$  é soma finita de produtos de  $k$  elementos de  $I/J$ , pelo menos um desses produtos é não nulo, i.é:  $\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot \dots \cdot \bar{q}_k \neq \bar{0}$  com  $q_1, q_2, \dots, q_k$  em  $I$ . Mas  $\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot \dots \cdot \bar{q}_k = \overline{q_1 q_2 \dots q_k} = \bar{0}$ , devido ao fato de altura de  $A$  ser  $m$  e  $m < k$ , obtendo-se assim uma contradição. Logo  $k \leq m$ .

Proposição 1.14- Sejam  $(A, I, m)$  e  $(B, J, n)$  duas álgebras locais. Então seu produto tensorial  $A \otimes B$  é uma álgebra local de altura  $m+n$  com ideal maximal  $A \otimes J + I \otimes B$ .

Demonstração- É claro que o produto tensorial de duas álgebras de dimensão finita é ainda uma álgebra de dimensão finita com a multiplicação definida por:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2),$$

e, como  $A$  e  $B$  são comutativas, associativas, com unidades  $e$  e  $f$ , respectivamente,  $A \otimes B$ , com a operação definida acima também será associativa, comutativa e terá por unidade  $e \otimes f$ . Também demonstra-se facilmente pelas definições que  $A \otimes J$  e  $I \otimes B$  são ideais de  $A \otimes B$  e, conseqüentemente,  $A \otimes J + I \otimes B$  é ideal de  $A \otimes B$ . Como  $A \otimes J \cap I \otimes B = I \otimes J$ , tem-se:  $\dim(A \otimes J + I \otimes B) = \dim(A \otimes J) + \dim(I \otimes B) - \dim(A \otimes J \cap I \otimes B) = \dim A \cdot \dim J + \dim I \cdot \dim B - \dim I \cdot \dim J = \dim A \cdot \dim B - 1$ . Assim  $A \otimes J + I \otimes B$  é maximal em  $A \otimes B$  e sua altura é  $m+n$ , pois sendo  $\alpha$  um elemento de  $(A \otimes J + I \otimes B)^{m+n+1}$ , então  $\alpha$  é soma finita de produtos de  $m+n+1$  elementos da forma:

$$(a_1 \otimes b_1 + c_1 \otimes d_1) \cdot (a_2 \otimes b_2 + c_2 \otimes d_2) \cdots (a_{m+n+1} \otimes b_{m+n+1} + c_{m+n+1} \otimes d_{m+n+1}).$$

Através de alguns cálculos mostra-se que o menor inteiro não negativo tal que os produtos acima não são necessariamente zero é  $m+n$ , e para os produtos de  $m+n+1$  fatores já resulta em zero, donde a altura de  $A \otimes B$  é  $n+m$  e a proposição fica verificada.

## CAPITULO 2

### A - PONTOS PRÓXIMOS

Neste capítulo, o conceito de álgebras locais passará a ter um significado geométrico, induzindo, assim, a definição de um A-ponto de  $V$  próximo de  $x$ , com  $x$  sendo um ponto sobre uma variedade  $V$  diferenciável de classe  $C^\infty$ , e  $A$  uma álgebra local. No que se seguirá, a palavra diferenciável será sempre usada no lugar de " indefinidamente diferenciável " ou " de classe  $C^\infty$  " e o qualificativo poderá ser até omitido quando não houver perigo de confusão.

Seja  $D(V)$  a álgebra das funções diferenciáveis definidas em  $V$  com valores em  $R$ . Essa álgebra é associativa, comutativa, possuindo por unidade a aplicação constante igual a 1 e de dimensão infinita sobre  $R$ . Fixado um ponto  $x$  em  $V$ , o conjunto

$$I(x) = \{ f \in D(V) \text{ tais que } f(x)=0 \}$$

é um ideal de  $D(V)$  e maximal com essa propriedade. Assim tem-se a seguinte proposição:

Proposição 2.1-  $(I(x))^{m+1}$  é o ideal de  $D(V)$  formado por todas as funções de  $D(V)$  que se anulam em  $x$  bem como todas as suas derivadas de ordem  $\leq m$ .

Demonstração: Seja  $J$  o ideal de  $D(V)$  formado por todas as funções de  $D(V)$  que se anulam em  $x$  bem como todas as suas derivadas de ordem  $\leq m$ . Deseja-se mostrar que  $J = (I(x))^{m+1}$ . Seja  $f \in (I(x))^{m+1}$ , então  $f$  é uma soma finita de produtos de  $m+1$  elementos de  $I(x)$ , e, sem perda de generalidade, pode-se supor  $f$  como sendo dada apenas por  $f_1 f_2 \dots f_{m+1}$ , com as  $f_i$  em  $I(x)$ , para todo  $i=1, 2, \dots, m+1$ . Tomando-se uma carta local para  $x \in V$  e aplicando-se as regras elementares de diferenciação de funções, vê-se que  $f_1 f_2 \dots f_{m+1}(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_{m+1}(x) = 0$  e que todas as derivadas de ordem  $\leq m$  também se anulam em  $x \in V$ , logo  $(I(x))^{m+1} \subset J$ . Supondo-se agora que  $f \in J$ , que  $(U, \phi)$  é uma carta local para  $x$ , que  $\dim V = n$  e que  $\phi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ , como  $f(x) = 0$  a composta  $f \circ \phi^{-1}$  também se anula no ponto  $0$  de  $\mathbb{R}^n$  bem como todas as suas derivadas de ordem  $\leq m$ . Tomando-se agora o desenvolvimento de Taylor de  $f \circ \phi^{-1}$  em torno da origem do  $\mathbb{R}^n$  tem-se

$$(f \circ \phi^{-1})(h) = (f \circ \phi^{-1})(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(0) h^i + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha (f \circ \phi^{-1})(0) h^\alpha + \mathcal{Q}_m(x)$$

$$\text{onde } \mathcal{Q}_m(x) = \sum_{|\beta|=m+1} D^\beta (f \circ \phi^{-1})(th) h^\beta, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), 0 < t < 1,$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$  e as demais notações são como as definidas no teorema de Borel (c.f. pag-6-) e  $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ , mas, como  $f \circ \phi^{-1}$  tem todas as derivadas nulas até a ordem  $m$ , ter-se-á apenas  $(f \circ \phi^{-1})(h) = \mathcal{Q}_m(x)$ . Como cada  $h^{\beta_1}$  de  $h^\beta$  pertence a  $I(0)$ , i.é: o ideal das funções diferenciáveis de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$  que se anulam na origem do  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \circ \phi^{-1} \in (I(0))^{m+1}$  e assim  $f \in (I(x))^{m+1}$ . Portanto o resultado desejado está demonstrado.

Notação :  $D^m(V, x)$  indicará a álgebra quociente  $D(V)/[I(x)]^{m+1}$ .

Proposição 2.2- Sendo  $n = \dim V$ ,  $D^m(V, x)$  é uma álgebra local isomorfa a  $R_n^m = R((X_1, X_2, \dots, X_n))/\mathcal{M}^{m+1}$ .

Demonstração: Seja  $(U, \phi)$  uma carta local para  $x$  em  $V$  com  $\phi(0) = 0$ . Que  $D^m(V, x)$  é uma álgebra local é decorrente das definições. Como  $R_n^m$  não é nada mais do que a álgebra dos polinômios, sobre  $R$ , de grau  $\leq m$  em  $n$  indeterminadas (a verificação é imediata) e, como pela proposição (2.1) com a carta local  $(U, \phi)$  dada acima,  $D^m(V, x)$  também é a álgebra de polinômios sobre  $R$  de grau  $\leq m$  em  $n$  indeterminadas, logo o isomorfismo segue.

Corolário 2.3- O quociente de  $D(V)$  pelo ideal  $\theta(x)$ , das funções que se anulam em  $x$  bem como todas as suas derivadas, é isomorfo a  $R_n$ .

Demonstração: Considerando-se que, se  $(U, \phi)$  é uma carta local para  $x$  em  $V$  com  $\phi(x) = 0$ , a álgebra das funções numéricas diferenciáveis em  $x$  é isomorfa a álgebra das funções numéricas diferenciáveis na origem do  $R^n$ , tem-se o diagrama abaixo que, pelo teorema de isomorfismo de anéis (grupos, álgebras, ...), demonstra o desejado:

$$\begin{array}{ccccc}
 D(V) & \longleftrightarrow & D(R^n) & \xrightarrow{T} & R_n \\
 & & \downarrow Q & & \nearrow \\
 D(V)/\theta(x) & \longleftrightarrow & D(R^n)/\theta(0) & & 
 \end{array}$$

onde  $T : D(R^n) \longrightarrow R_n$  é a dada pelo teorema de Borel (c.f. pag 6)

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

e  $Q$  é a aplicação quociente natural de  $D(\mathbb{R}^n)$  no seu quociente por  $\mathcal{O}(0)$ .

Observação 2.4- Esse corolário significa, em outras palavras, que existem sobre  $V$  funções diferenciáveis cujo desenvolvimento formal de Taylor no ponto  $x$  é uma série formal arbitrária nas coordenadas locais do ponto  $x$ . Também, se  $x$  é dado, poder-se-á, em tudo que se segue, trocar  $D(V)$  pela álgebra dos germes de funções diferenciáveis em  $x$  (c.f. (6)).

Seja  $A$  uma álgebra local com ideal maximal  $I$ . Sejam  $V$  uma variedade diferenciável e  $D(V)$  a álgebra das funções numéricas diferenciáveis sobre  $V$  e  $x$  um ponto de  $V$ .

Definição 2.5- Chama-se um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  a todo homomorfismo de  $D(V)$  em  $A$  tal que a parte finita da imagem de  $f$  de  $D(V)$  em  $A$  seja igual a  $f(x)$ .

Segundo A. Weil [c.f. (7)], um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  poderá ainda levar qualquer um dos seguintes nomes: ponto próximo de  $x$  de espécie  $A$  sobre  $V$  ou infinitamente vizinho (próximo) de  $x$  de espécie  $A$  sobre  $V$ . Ainda, se  $x'$  é um tal ponto, o elemento de  $A$  que  $x'$  associa ao  $f$  de  $D(V)$  será denotado por uma das notações seguintes:

$$f(x') \quad , \quad x'(f) \quad \text{ou} \quad {}^A f(x') \quad .$$

Por definição ainda se tem:

$$f(x') = f(x) \bmod I$$

ou

$$f(x') - f(x) \in I \quad .$$

Exemplos de pontos próximos de  $x$  de espécie  $A$  sobre  $V$ .

2.6- Sejam  $V$  uma variedade diferenciável e  $A$  uma álgebra local com ideal maximal  $I$ . A aplicação  $x'$  de  $D(V)$  em  $A$  dada por  $x'(f) = f(x)$  é um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$ .

2.7- A aplicação  $x'$  de  $D(\mathbb{R}^n)$  em  $\mathbb{R}_n^m$  que a cada  $f$  associa seu desenvolvimento de Taylor de ordem  $m$  na origem  $0$  de  $\mathbb{R}^n$  define um  $\mathbb{R}_n^m$ -ponto de  $\mathbb{R}^n$  próximo de  $0$ .

Exemplos menos triviais aparecerão naturalmente no decorrer da dissertação.

Proposição 2.8- Seja  $x'$  um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$ . A imagem em  $A$  do ideal  $I(x)$ , das funções que se anulam no ponto  $x$ , por  $x'$  está contida no ideal maximal  $I$  de  $A$ .

Demonstração: Como, por definição de  $A$ -ponto próximo, para toda  $f$  em  $D(V)$ ,  $x'(f) \equiv f(x) \pmod{I}$  e, para  $f$  em  $I(x)$ ,  $f(x) = 0$ ,  $x'(f) \equiv 0 \pmod{I}$ , consequentemente  $x'(f) \in I$  e portanto  $x'(I(x)) \subset I$ .

Proposição 2.9- Sendo  $(I(x))^{m+1}$ , o ideal das funções que se anulam em  $x$  bem como suas derivadas de ordem  $\leq m$ , e  $x'$  um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$ , então  $x'((I(x))^{m+1})$  está contido em  $I^{m+1}$ .

Demonstração: Como todo  $g$  em  $(I(x))^{m+1}$  é escrito como soma finita de produtos de  $m+1$  elementos de  $I(x)$ , é suficiente mostrar a proposição para  $g = g_1 g_2 \dots g_{m+1}$  porque daí o resultado segue por linearidade. Mas  $x'$  é um homomorfismo de álgebras e  $x'(g) = x'(g_1 g_2 \dots g_{m+1}) = x'(g_1) x'(g_2) \dots x'(g_{m+1})$ , portanto, pela proposição (2.8), o resultado segue.

Corolário 2.10- Se  $A$  é uma álgebra local de altura  $m$ , então a imagem de  $(I(x))^{m+1}$  por um ponto  $x'$ ,  $A$ -próximo de  $x$ , está contida em  $I^{m+1} = (0)$ .

Como consequência de (2.8), (2.9) e (2.10) tem-se que todo  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  determina a altura de  $A$  e também um homomorfismo, em  $A$ , da álgebra  $D^m(V, x)$ , e reciprocamente.

Proposição 2.11- Se se escrever  $x'(f) = f(x) + L(f)$  em  $R \oplus I$ , a aplicação  $L : D(V) \longrightarrow I$  que a cada  $f$  associa o  $L(f)$  da decomposição acima é linear em  $R$ .

Demonstração: Sejam  $f$  e  $g$  em  $D(V)$  e  $\lambda$  em  $R$ . Então  $f + \lambda g \in D(V)$  e  $L(f + \lambda g) = L(f) + \lambda L(g)$  pois, como  $x'(f + \lambda g) = x'(f) + \lambda x'(g)$ , tem-se  $(f + \lambda g)(x) + L(f + \lambda g) = f(x) + \lambda g(x) + L(f) + \lambda L(g)$  e, pela unicidade da decomposição em soma direta, o resultado vale.

Proposição 2.12- Dizer que um  $A$ -ponto  $x'$  de  $V$  próximo de  $x$  é um homomorfismo equivale a dizer que para todos  $f$  e  $g$  em  $D(V)$  vale  $L(fg) = L(f)g(x) + f(x)L(g) + L(f)L(g)$ .

Demonstração: Sejam  $f$  e  $g$  em  $D(V)$ . Então, desenvolvendo-se ambos os lados de  $x'(fg) = x'(f)x'(g)$  tem-se:

$$(fg)(x) + L(fg) = (f(x) + L(f))(g(x) + L(g))$$

$$f(x)g(x) + L(fg) = f(x)g(x) + L(f)g(x) + f(x)L(g) + L(f)L(g)$$

e, novamente, pela unicidade da decomposição

$L(f)L(g) = f(x)L(g) + L(f)g(x) + L(f)L(g)$ , quaisquer que sejam  $f$  e  $g$  em  $D(V)$ . Reciprocamente, se uma aplicação linear  $L$  como definida acima é dada, define-se um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  tomando-se por  $x'$  aquele homomorfismo de álgebras que, para toda

$f$  em  $D(V)$ , coincide com o valor  $f(x) + L(f)$ , isto é;  $x'(f) = f(x) + L(f)$ . Verifica-se imediatamente que  $x'$  é bem definido e que satisfaz a definição de A-ponto de  $V$  próximo de  $x$ .

Como um caso particular de (2.12), se altura de  $A$  for 1, ter-se-á  $I^2 = (0)$  e o termo  $L(f)L(g)$ , estando em  $I^2$ , é zero. Desta forma  $L(fg)$  se reduz a  $L(f)g(x) + f(x)L(g)$ . e se  $I$  é gerado por um elemento  $\tau$  com  $\tau^2 = 0$  (c.f. exemplo 1.4), a noção de A-ponto de  $V$  próximo de  $x$  se identifica com a noção de vetor tangente a  $V$  em  $x$ , pois um vetor tangente pode ser sempre entendido como uma derivação (c.f. (6) pág 62). Historicamente, esse era o ponto de vista de Fermat em seus trabalhos sobre o cálculo diferencial e, ainda mais, usou a letra  $o$  onde aqui se usou  $\tau$ .

Definição 2.13- O homomorfismo canônico de  $D(V)$  em  $D^m(V, x)$  que define o ponto próximo do exemplo (2.7) é dito ponto próximo de  $x$  canônico de posto  $m$ .

Lema 2.14- Para todo ponto  $x'$  próximo de  $x$ , o valor de  $x'$  em toda função constante  $c$  de  $D(V)$  é a própria constante  $c$ .

Demonstração: Como  $x'(c) = x'(1.c) = c x'(1)$  para todo  $c$  (e aqui identifica-se a função com o número real  $c$ ) em  $R$ , é suficiente demonstrar o lema para  $c=1$ . Sabendo-se que  $x'(1) = 1 + L(1)$ , resta mostrar que  $L(1) = 0$ . Se  $L(1) \neq 0$  então:

$$x'(1) = x'(1.1) = x'(1) x'(1)$$

$$1 + L(1) = (1 + L(1)).(1 + L(1))$$

$$= 1 + L(1) + L(1) + L(1)L(1) \text{ e, assim,}$$

$0 = L(1).(1 + L(1))$  e  $L(1) = -1$  e portanto o escalar 1 está em  $I$ , o que é um absurdo. Logo  $L(1)=0$  e  $x'(1)=1$ .

Proposição 2.15-Se a variedade  $V$  é a reta numérica  $R$  e supondo-se  $x'$  um  $A$ -ponto de  $R$  próximo de  $x_0$  de  $R$ ,  $x'$  é completamente determinado se se conhecer  $x'(i)$  em  $A$ , valor que  $x'$  associa a aplicação identidade de  $R$  considerada como um elemento de  $D(R)$ .

Demonstração: De fato: supondo-se conhecidos  $x'(i) = x_0 + L(i)$  e  $n =$  altura de  $A$ , para cada  $f$  dada em  $D(R)$  e pela fórmula de Taylor com resto tem-se, numa vizinhança de  $x_0$ , a expressão:

$$(I) \quad f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

onde o ponto  $x_1$  está no intervalo aberto  $(x_0, x_0+x)$  e depende funcionalmente de  $x$ , i.é :  $x_1 = g(x)$ , e como se vê facilmente,

$$\frac{f^{(n+1)}(g(x))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \text{ é função em } D(R) \text{ e (I) poderá ser re}$$

escrita por:

$$(II) \quad f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(g(x))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Convencionar-se-á neste ponto que aplicar o ponto próximo  $x'$  a  $f$  é o mesmo que aplicar  $x'$  ao desenvolvimento de Taylor da  $f$  pois pode-se ainda identificar  $x$  com a aplicação identidade de  $R$  pensada como sendo a carta global da variedade  $R$ . Desta forma, usando-se o lema 2.14 e as propriedades do homomorfismo  $x'$  tem-se:

$$x'(f) = x'(f(x_0)) + \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x'(x-x_0))^j + \frac{x'(f^{(n+1)}(g(x)))}{(j+1)!} (x'(x-x_0))^{j+1} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(L(i)) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (L(i))^n, \text{ pois } x'(x-x_0) = x'(x) - x_0 = L(i) \text{ e}$$

$$\frac{x'(f^{(n+1)}(g(x)))}{(n+1)!} (x'(x-x_0))^{n+1} \in I^{n+1} = (0).$$

O teorema que virá a seguir será de muita importância porque ele permitirá saber como um A-ponto  $x'$  próximo de  $x$  em  $V$  atuará sobre uma função qualquer conhecendo-se apenas como ele atua nas vizinhanças coordenadas ( ou coordenadas locais ) do ponto  $x$  em  $V$ .

Teorema 2.16: Um A-ponto  $x'$  de  $V$  próximo de  $x_0$  fica completamente determinado sabendo-se os valores , em  $A$ , de  $x'$  nas coordenadas locais de  $x_0$  de  $V$ .

Demonstração: Supondo-se que a altura de  $A$  seja  $m$  e que a dimensão de  $V$  seja  $n$  e ainda que  $(U, \phi)$  seja uma carta local para  $x_0$  em  $V$  com  $\phi(x_0)=0$  (para efeito de simplicidade ), se  $X^1, X^2, \dots, X^n$  são as funções coordenadas do ponto  $x_0$  e  $x'(X^i)=L(X^i), i=1, 2, \dots, n$ , como a composta  $f \circ \phi^{-1}$  é  $D(R^n)$ , pode-se calcular sua fórmula de Taylor com resto, em torno da origem  $\phi(x_0)=0$  do  $R^n$ , obtendo-se:

$$(f \circ \phi^{-1})(\tilde{x}) = (f \circ \phi^{-1})(0) + \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha (f \circ \phi^{-1})(0) \tilde{x}^\alpha + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha (f \circ \phi^{-1})(0) \tilde{x}^\alpha}{\alpha!} + \mathcal{R}_m(x),$$

onde as notações são as mesmas do teorema de Bôrel (c. f. pág 6) e  $\tilde{x}=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)=\phi(x)$  e  $x$  numa vizinhança de  $x_0$ ,  
 $\mathcal{R}_m(x) = \sum_{|\beta|=m+1} \frac{D^\beta (f \circ \phi^{-1})(g(x))}{\beta!} \tilde{x}^\beta$ . Como  $\tilde{x}_i = \pi_i(\tilde{x}) = \pi_i(\phi(x)) =$

$=(\pi_i \circ \phi)(x) = X^i(x)$  é identificada com a  $i$ -ésima função coordenada de  $x_0$  em  $(U, \phi)$ , o desenvolvimento acima assumirá a seguinte forma:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha (f \circ \phi^{-1})(0) X^\alpha(x) + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha (f \circ \phi^{-1})(0) X^\alpha(x) + \mathcal{R}_m(x)$$

Observando-se que  $\mathcal{R}_m(x) \in (I(x))^{m+1}$  e, de acordo com a convenção feita e ainda pelo fato de  $x'(\mathcal{R}_m(x)) \in I^{m+1}=(0)$  tem-se, ao se aplicar  $x'$  nessa última expansão em Taylor :

$$\begin{aligned}
 x'(f) &= x'(f(x_0)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})(0)}{\partial x^i} x'(X^i) + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha (f \circ \phi^{-1})(0) x'(X^\alpha) = \\
 &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})(0)}{\partial x^i} L(X^i) + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha (f \circ \phi^{-1})(0)}{\alpha!} (L(X))^\alpha
 \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

Seja  $\phi$  uma aplicação diferenciável de uma variedade  $V$  em uma outra  $W$ . A aplicação de  $D(W)$  em  $D(V)$  que a cada  $g$  em  $D(W)$  associa  $g \circ \phi$  é, claramente um homomorfismo entre as álgebras  $D(W)$  e  $D(V)$ .

Definição 2.17:- Composto-se esse homomorfismo acima com o homomorfismo de  $D(V)$  em  $A$  que define um  $A$ -ponto próximo de  $x$  de  $V$ , obtém-se um  $A$ -ponto de  $W$  próximo de  $\phi(x)$  que será denotado por  $\phi(x')$  ou mais explicitamente por  $A_{\phi(x')}$ .

### CAPITULO 3

#### PROLONGAMENTO DE V DE ESPÉCIE A

Este capítulo é destinado a dar ao conjunto dos A-pontos de V próximos de V uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão finita, bem como demonstrar alguns resultados sobre o prolongamento de V de espécie A que serão úteis no capítulo seguinte.

O conjunto de todos os A-pontos de V próximos de x de V será denotado por  $A_{V_x}$ ,  $A_V = \bigcup_{x \in V} (A_{V_x})$  será o conjunto de todos os A-pontos de V próximos de V e definir-se-á a aplicação projeção  $\pi_A: A_V \longrightarrow V$  por  $\pi_A(A_{V_x}) = x$  para x em V.

Observação 3.1- Se  $x' \in A_{V_x}$  e  $f \in D(V)$  é identicamente nula em uma vizinhança de x, então decorre de (2.17) que  $x'(f) = 0$ . Isso mostra que pode-se considerar  $x'(f)$  para qualquer função diferenciável f definida em uma vizinhança de x, se  $x' \in A_{V_x}$ .

Observação 3.2- Se  $A = R_p^r$ , a noção de A-ponto próximo não é nada mais de que a noção de  $p^r$ -jatos de Ehresmann (c.f. (2.7) e (3)).

Teorema 3.3- Seja  $(U, \phi)$  uma carta local para  $x_0$  em  $V$  com sistema de coordenadas  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ . Se  $\{B^0=1, B^1, B^2, \dots, B^N\}$  é uma base para a álgebra  $A$ , onde  $\{B^1, B^2, \dots, B^N\}$  gera o ideal maximal  $I$  de  $A$ , define-se  $x_{i\lambda} : \Pi_A^{-1}(U) \longrightarrow R$  por

$$(3.4) \quad x'(x^i) = \sum_{\lambda=0}^N x_{i\lambda} (x') B^\lambda,$$

para qualquer  $x' \in \Pi_A^{-1}(U)$ , onde aqui é usada a observação (3.1) para  $f=x^i, i=1, 2, \dots, n$ . Então  $A_V$  se torna uma variedade diferenciável de dimensão igual a  $\dim V$ ,  $\dim_R A = n \cdot (N+1)$  pelas vizinhanças coordenadas  $\Pi_A^{-1}(U)$  e com funções coordenadas  $x_{i\lambda}, i=1, 2, \dots, n$  e  $\lambda=0, 1, 2, \dots, N$ , induzidas pelas  $x^1, x^2, \dots, x^n$  de  $x$  sobre  $U$ .

Demonstração: Primeiramente deve-se observar que, da maneira como foram definidas as funções  $x_{i\lambda}$  de  $\Pi_A^{-1}(U)$  em  $R$ , existe uma bijeção  $\xi$  entre  $\Pi_A^{-1}(U)$  e  $x^1(U) \times R^N \times x^2(U) \times R^N \times \dots \times x^n(U) \times R^N = \Omega \subset R^k$ , onde  $k=n(N+1)$  e  $x^i: U \longrightarrow R$  são as funções coordenadas do ponto  $x_0$  induzidas pela carta local  $(U, \phi)$ , e  $\xi$  é dada por:

$$\xi(x') = (x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1N}, x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2N}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nN})$$

com  $x_{i\lambda} = x_{i\lambda}(x')$  é dado no enunciado do teorema. Por (2.16)  $\xi$  é bem definida e injetora, pois se  $\xi(x') = \xi(y')$  para dois  $A$ -pontos próximos na vizinhança de  $x_0$ , então  $x_{i\lambda} = y_{i\lambda}$  para todos  $i$  e  $\lambda$  e, portanto,  $x'(x^i) = y'(x^i), i=1, 2, \dots, n$ , e assim  $x'=y'$ . Para a sobrejeção, se  $b = (b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1N}, \dots, b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nN})$  é dado em  $\Omega$ , então existe um  $z$  em  $U$  com  $\phi(z) = (b_{10}, b_{20}, \dots, b_{n0})$ , i.é:  $x^i(z) = b_{i0}$ , para  $i=1, 2, \dots, n$  e

$$z'(x^i) = \sum_{\lambda=0}^N b_{i\lambda} B^\lambda$$

define um  $A$ -ponto de  $V$

próximo de  $z$ , que está claramente em  $\pi_A^{-1}(U)$  com  $\xi(z') = b$ . Transportando-se agora para  $\pi_A^{-1}(U)$  a topologia de  $R^{n(N+1)}$  de modo que  $\xi$  seja homeomorfismo, tem-se, assim, um sistema de coordenadas locais para  $A_V$ .

Agora, se  $\pi_A^{-1}(U_1) \cap \pi_A^{-1}(U_2)$  é não vazio, com  $(U_1, \phi)$  e  $(U_2, \psi)$  cartas locais em  $V$ , então existe um  $A$ -ponto próximo  $x'$  de  $x$ , com  $x \in U_1 \cap U_2$ . Se as coordenadas locais de  $x$  em  $(U_1, \phi)$  são  $x^1, x^2, \dots, x^n$  e em  $(U_2, \psi)$  são  $y^1, y^2, \dots, y^n$  então

$$\begin{aligned} x'(x^i) &= \sum_{\lambda=0}^N a_{i\lambda} B^\lambda & \text{com } (a_{i\lambda}) \text{ em } \Omega_1 \\ (\triangle) \quad x'(y^j) &= \sum_{\lambda=0}^N b_{j\lambda} B^\lambda & \text{com } (b_{j\lambda}) \text{ em } \Omega_2 \end{aligned}$$

onde  $\Omega_1 = x^1(U_1) \times R^N \times \dots \times x^n(U_1) \times R^N$  (de modo análogo  $\Omega_2$ )  
 $a = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1N}, a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2N}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nN}) = (a_{i\lambda})$   
 $a_0 = (a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0})$  e, também, analogamente,  $b = (b_{j\lambda})$  e  $b_0 = (b_{j0})$   
para  $j=1, 2, \dots, n$ ,  $\lambda=1, 2, \dots, N$ . Calculando-se o desenvolvimento de Taylor de  $y^j$  em torno de  $x$ , mas com  $x \in U_1 \cap U_2 \subset U_1$ , tem-se:  
 $y^j = y^j(x) + \sum_{i=1}^n D^i(y^j \circ \phi^{-1})(a_0)(x^i - a_{i0}) + \dots +$

$$+ \dots + \sum_{|\alpha| \geq m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha(y^j \circ \phi^{-1})(a_0) \{(x - a_0)\}^\alpha + \mathcal{R}_m(x, a_0) \text{ onde}$$

$$D^i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ com } i=1, 2, \dots, n. \quad D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}$$

$\{(x - a_0)\}^\alpha = (x^1 - a_{10})^{\alpha_1} (x^2 - a_{20})^{\alpha_2} \dots (x^n - a_{n0})^{\alpha_n}$  e  $\mathcal{R}_m$  é o resto de ordem  $m+1$ . Supondo-se que a altura de  $A$  seja  $m$ , o lado esquerdo de  $(\triangle)$  fica:

$$x'(y^j) = y^j(x) + \sum_{i=1}^n D^i(y^j \circ \phi^{-1})(a_0)(x^i - a_{i0}) + \dots +$$

$$+ \dots + \sum_{|\alpha| \geq m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha(y^j \circ \phi^{-1})(a_0) \{(x'(x) - a_0)\}^\alpha \quad \text{e, assim:}$$

$$x'(y^j) = y^j(x) + \sum_{i=1}^n D^i(y^j \circ \phi^{-1})(a_0) L(x^i) + \dots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha(y^j \circ \phi^{-1})(a_0) (L(x))^\alpha$$

com  $L(x^i) = x'(x^i - a_{i0}) = a_{i1} B^1 + a_{i2} B^2 + \dots + a_{iN} B^N$ ,  $i=1,2,\dots,n$  e  
 $(L(x))^\alpha = (L(x^1))^{\alpha_1} (L(x^2))^{\alpha_2} \dots (L(x^n))^{\alpha_m}$ . Escrevendo-se cada produto  $B^1 \cdot B^k$  de  $I^2 \subset I$  como combinação linear de  $B^1, B^2, B^3, \dots, B^N$  e confrontando-se a expressão acima com o lado direito de ( $\Delta$ ) após alguns cálculos verifica-se que os elementos  $b_{j\lambda}$  de  $b$  dependem polinomialmente de  $D^\beta(y^j \circ \phi^{-1})(a_0)$ , dos escalares  $y_{1s}^k$

das combinações lineares dos produtos  $B^k \cdot B^1$  e dos números  $a_{i\lambda}$  de  $a$ . Logo as mudanças de coordenadas em  $A_V$  são de classe  $C^\infty$  e portanto  $A_V$  tem uma estrutura diferenciável de classe  $C^\infty$  e é uma variedade diferenciável de dimensão  $n \cdot (N+1) = \dim V \cdot \dim_R A$ . Observa-se ainda que esta estrutura diferenciável não depende da base escolhida para  $A$ , pois mudanças de base, neste caso, são dadas através de matrizes inversíveis, constante, e portanto de classe  $C^\infty$ .

Definição 3.5: A variedade  $A_V$  definida acima, com a projeção  $\pi_A: A_V \longrightarrow V$  é chamada de fibrado dos A-pontos de V próximos de V ou de prolongamento de espécie A de V.

Exemplo 3.6: O prolongamento de espécie A de uma variedade V qualquer, onde a álgebra A é a álgebra dos números duais, é sempre visto como o fibrado tangente a V e isso porque: Se  $X \in T_x V$ , X é identificado com  $x' \in A_{V_x}$  definido por  $x'(f) = f(x) + (Xf)\tau$  para toda f em  $D(V)$ .

Exemplo 3.7: Se  $A = R_n^p$ , pela observação (3.2),  $A_V$  é o fibrado dos referenciais de ordem p sobre V (c.f. (5), pags 38—45).

Definição 3.8- Sejam  $V$  e  $W$  variedades e  $\phi: V \longrightarrow W$  uma aplicação diferenciável. Define-se  $A_\phi: A_V \longrightarrow A_W$  por

$$(3.8) \quad (A_\phi(x'))(g) = x'(g \circ \phi)$$

para todo  $x'$  em  $A_V$  e toda  $g$  em  $D(W)$  e chama-se à  $A_\phi$  de prolongamento de  $\phi$  de espécie  $A$ .

Esse prolongamento é bem definido pois se  $x'=y'$ , então  $x'(f)=y'(f)$  para toda  $f$  em  $D(V)$ . Mas para toda  $g$  em  $D(W)$   $g \circ \phi \in D(V)$  e logo  $x'(g \circ \phi) = y'(g \circ \phi)$  e assim  $(A_\phi(x'))(g) = (A_\phi(y'))(g)$  e portanto  $A_\phi(x') = A_\phi(y')$ .

Corolário 3.9-  $A_\phi: A_V \longrightarrow A_W$  é diferenciável para toda  $\phi: V \longrightarrow W$ , que seja diferenciável.

Demonstração: Como por definição  $A_\phi$  leva um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  em um  $A$ -ponto de  $W$  próximo de  $\phi(x)$ , tomando-se cartas locais  $(U, \psi)$  para  $x$  e  $(\bar{U}, \bar{\psi})$  para  $\phi(x)$ , que induzem as cartas locais  $(\Pi_A^{-1}(U), \Gamma)$  para  $x'$  e a  $(\Pi_A^{-1}(\bar{U}), \bar{\Gamma})$  para  $\phi(x)'$ , a composta  $\bar{\Gamma} \circ A_\phi \circ \Gamma^{-1}: \Omega \subset \mathbb{R}^{n(N+1)} \longrightarrow \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^{m(N+1)}$  será, pelo mesmo raciocínio feito na demonstração de teorema 3.3, diferenciável.

Teorema 3.10- Sejam  $\pi_i: M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ ,  $i=1,2$ , as projeções usuais. Então  $A_{(M_1 \times M_2)}$  é identificada com  $A_{M_1} \times A_{M_2}$  através de

$$z' = (A_{\pi_1}(z'), A_{\pi_2}(z'))$$

para todo  $z'$  de  $A_{(M_1 \times M_2)}$ .

Demonstração- A demonstração consiste mais em interpretar o enunciado do teorema do que, propriamente, efetuar cálculos, pois, se

$(x, y) \in M_1 \times M_2$ , uma carta local para  $(x, y)$  é da forma

$(U_1 \times U_2, \psi_1 \times \psi_2)$  onde  $(U_1, \psi_1)$  é carta local para  $x$  em  $M_1$  e  $(U_2, \psi_2)$  para  $y$  em  $M_2$ . Essa carta  $(U_1 \times U_2, \psi_1 \times \psi_2)$  induz em  $(U_1 \times U_2)$  um sistema de coordenadas locais  $z^1, \dots, z^{m_1}, z^{m_1+1}, \dots, z^{m_1+m_2}$ , onde  $z^i = x^i$ , para  $i=1, 2, \dots, m_1 = \dim M_1$ , e  $z^{m_1+j} = y^j$  com  $j=1, 2, \dots, m_2 = \dim M_2$ , isto é, induz o sistema

$x^1, x^2, \dots, x^{m_1}, y^1, y^2, \dots, y^{m_2}$ , com  $x^1, x^2, \dots, x^{m_1}$  sistema de coordenadas locais para  $x$  e  $y^1, y^2, \dots, y^{m_2}$  para  $y$ , em  $(U_1, \psi_1)$  e  $(U_2, \psi_2)$  respectivamente. Ora, se  $z'$  é um ponto próximo de espécie  $A$  de  $(x, y)$ ,  ${}^A\pi_1(z')$  define um  $A$ -ponto de  $M_1$  próximo de  $x$  e  ${}^A\pi_2(z')$  um de  $M_2$  próximo de  $y$  que são, exatamente, as restrições de  $z'$  às coordenadas respectivas de  $x$  e de  $y$ , i.é: se

$$z'(z^i) = \sum_{\lambda=0}^N z_{i\lambda} B^\lambda \quad \text{para } i=1, 2, \dots, m_1 \text{ e}$$

$$z'(z^{m_1+j}) = \sum_{\lambda=0}^N z_{(m_1+j)\lambda} B^\lambda \quad \text{para } j=1, 2, \dots, m_2$$

então  $\{{}^A\pi_1(z')\} (z^i) = z'(z^i \circ \pi_1) = z'(x^i)$ ,  $z^i \in D(M_1)$ ,  $i=1, 2, \dots, m_1$  ou seja  ${}^A\pi_1(z') = z'$  restrita à  $M_1$ , e, analogamente, para  $j=1, 2, \dots, m_2$   $\{{}^A\pi_2(z')\} = z'$  restrita à  $M_2$ , se se pensar em  $z^{m_1+j}$  como elemento de  $D(M_2)$ .

Esse procedimento é obviamente reversível, ou seja, a partir de um  $A$ -ponto de  $M_1$  próximo de  $x$  e de um  $A$ -ponto de  $M_2$  próximo de  $y$ , dadas as coordenadas locais de  $x$  e de  $y$ , pode-se facilmente achar um  $z'$ ,  $A$ -ponto de  $M_1 \times M_2$  próximo de  $(x, y)$ , com a propriedade do enunciado do teorema fazendo o mesmo raciocínio, mas no sentido contrário, e, portanto, essa identificação é bem definida. As unicidades dos pontos próximos em questão são decor-

rentes das definições de prolongamentos e pela própria construção deles.

Corolário 3.11- A identificação  $\theta$  de  $A_{(M_1 \times M_2)}$  com  $A_{M_1} \times A_{M_2}$  é um difeomorfismo.

Demonstração: imediata por (3.9).

Corolário 3.12- Se  $M, M_1, M_2$  são variedades diferenciáveis, então:

- 1.)  $A(1_M) = 1_{(A_M)}$  onde  $1_M$  é a aplicação identidade de  $M$ , e  $1_{(A_M)}$  é a identidade em  $A_M$ ;
- 2.) Se  $\pi_i$  (respect.  $\bar{\pi}_i$ ) é a projeção de  $M_1 \times M_2$  (respect.  $A_{M_1} \times A_{M_2}$ ) sobre  $M_i$  (respect.  $A_{M_i}$ ),  $i=1,2$ , então  $A\pi_i = \bar{\pi}_i, i=1,2$ .

Demonstrações: 1.) Dado  $x'$  em  $A_M$ , como  $1_M$  é diferenciável, ela admite o prolongamento  $A(1_M)$  de  $A_M$  em  $A_M$ . Mas, por definição:

$$(A(1_M)(x'))(g) = x'[g \circ 1_M] = x'[g] \text{ para toda } g \text{ em } D(M), \text{ logo}$$

$$A(1_M)(x') = x' \text{ para todo } x' \text{ em } A_M. \text{ Assim } A(1_M) = 1_{(A_M)}.$$

2.) Como  $A_{(M_1 \times M_2)}$  e  $A_{M_1} \times A_{M_2}$  são difeomorfos, tem-se que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} A_{(M_1 \times M_2)} & \xrightarrow{A\pi_i} & A_{M_i} \\ \uparrow \theta & & \uparrow 1_{(A_{M_i})} \\ A_{M_1} \times A_{M_2} & \xrightarrow{\bar{\pi}_i} & A_{M_i} \end{array}$$

para  $i=1,2$  e

o resultado segue imediatamente.

Lema 3.13- Sejam  $\phi_1: M_1 \longrightarrow N_1$ ,  $\phi_2: M_2 \longrightarrow N_2$  e  $\psi: N_1 \longrightarrow N$  aplicações diferenciáveis, com  $M_1, M_2, N_1, N_2$  e  $N$  variedades diferenciáveis. Então :

$$1.) \text{ Se } \phi_1 \text{ é sobrejetora } A(\psi \circ \phi_1) = A\psi \circ A\phi_1$$

$$2.) A(\phi_1 \times \phi_2) = A\phi_1 \times A\phi_2$$

Demonstração: 1.) Como  $\psi \circ \phi_1$  é diferenciável, seu prolongamento existe e é definido por  $A(\psi \circ \phi_1)(x')(g) = x'(g \circ (\psi \circ \phi_1))$  para  $x'$  em  $A_{M_1}$  e  $g$  em  $D(N)$ . Mas

$$(A\psi(A\phi_1(x')))(g) = (A\phi_1(x'))(g \circ \psi) = x'((g \circ \psi) \circ \phi_1) = x'(g \circ (\psi \circ \phi_1)) =$$

$$= (A(\psi \circ \phi_1)(x'))(g) \quad \text{para todo } x' \text{ em } A_{M_1} \text{ e toda } g \text{ em } D(N).$$

Portanto

$$A(\psi \circ \phi_1) = A\psi \circ A\phi_1.$$

2.) Observando-se que, se  $\pi_i: M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$  e  $p_i: N_1 \times N_2 \longrightarrow N_i$ , para  $i=1,2$ , são as projeções naturais, o diagrama (I) abaixo é comutativo

$$(I) \quad \begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \xrightarrow{\phi_1 \times \phi_2} & N_1 \times N_2 \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ M_i & \xrightarrow{\phi_i} & N_i \end{array} \quad i=1,2.$$

e que também

$$(II) \quad \begin{array}{ccccc} A_{(M_1 \times M_2)} & \xrightarrow{A(\phi_1 \times \phi_2)} & A_{(N_1 \times N_2)} & \xrightarrow{A p_i} & A_{N_i} \\ \theta \updownarrow & & & & \updownarrow 1_{(A_{N_i})} \\ A_{M_1} \times A_{M_2} & \xrightarrow{A\phi_1 \times A\phi_2} & A_{N_1} \times A_{N_2} & \xrightarrow{\bar{p}_i} & A_{N_i} \end{array}$$

$i=1,2$ , é comutativo, pois se  $x'$  está em  $A_{(M_1 \times M_2)}$ , tem-se, por

um lado :

$$\begin{aligned} (\bar{p}_i \circ ({}^A\phi_1 \times {}^A\phi_2) \circ \theta)(z') &= (\bar{p}_i \circ ({}^A\phi_1 \times {}^A\phi_2))({}^A\pi_1(z'), {}^A\pi_2(z')) = \\ &= \bar{p}_i({}^A\phi_1({}^A\pi_1(z')), {}^A\phi_2({}^A\pi_2(z'))) = \\ &= \bar{p}_i({}^A(\phi_1 \circ \pi_1)(z'), {}^A(\phi_2 \circ \pi_2)(z')) \quad \text{onde } \theta \end{aligned}$$

é o difeomorfismo entre  ${}^A(M_1 \times M_2)$  e  ${}^A M_1 \times {}^A M_2$ , e por outro lado:

$$({}^A p_i \circ {}^A(\phi_1 \times \phi_2))(z') = {}^A(p_i \circ (\phi_1 \times \phi_2))(z'). \quad \text{Comparando-se}$$

ambos os lados e usando o diagrama (I), o (II) é comutativo para  $i=1,2$ , e o resultado

$${}^A\phi_1 \times {}^A\phi_2 = {}^A(\phi_1 \times \phi_2) \text{ segue.}$$

Lembrando-se que, para qualquer que seja a álgebra local  $A$  foi convencionado considerar  $R$  como subespaço de  $A$ , e, nestas condições, se  $x$  está na variedade  $V$ , a aplicação de  $D(V)$  em  $R \subset A$  dada por  $f \longrightarrow f(x)$  define um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  (c.f. exemplo 2.6) que será identificado com o  $x$ . Assim  $V$  se ache identificada com uma subvariedade  $\mathcal{S}$  de  ${}^A V$  que constitui exatamente dos ponto próximos do tipo acima.

Realmente: se  $x'$  é um ponto de tipo acima, tomando-se uma carta local em  ${}^A V$  de  $x'$  com coordenadas locais dadas por  $\{x_{i\lambda}$  com  $i=1,2,\dots,n$  e  $\lambda=0,1,2,\dots,N\}$ , cada  $x_i$  é obtido através da carta local  $(U, \phi)$  de  $x$  com coordenadas locais  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ , da maneira habitual

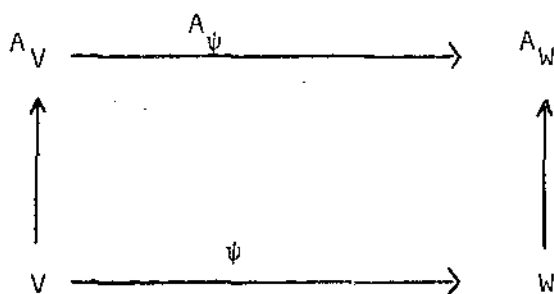
$$x'(x^i) = \sum_{\lambda=0}^N x_{i\lambda} B^\lambda = x_{i0} \quad \text{para todo } i=1,2,\dots,n, \text{ devido}$$

a condição imposta ao  $x'$ , i.é:  $x'(x^i) = x^i(x) = x_{i0}$ . Assim associou-se a esse ponto próximo a  $n(N+1)$ -úpla de números reais:

$$(a_{10}, 0, 0, \dots, 0, a_{20}, 0, \dots, 0, \dots, 0, a_{n0}, 0, \dots, 0)$$

e uma carta local para  $x'$  nesse subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $A_V$  é a restrição a  $\mathcal{S}$  de uma carta para  $x'$  em  $A_V$ , donde  $\mathcal{S}$  é uma subvariedade de  $A_V$  com dimensão igual a de  $V$ .

Se  $W$  também é uma variedade, analogamente  $W$  será identificada com uma subvariedade de  $A_W$  e é imediato que, se  $\psi$  é uma aplicação diferenciável de  $V$  em  $W$ ,  $A_\psi$  induz sobre  $V$   $A_V$  a mesma aplicação  $\psi$  de  $V$  em  $W$ , considerando-se  $W$  como contido em  $A_W$ , ou seja, o diagrama abaixo é comutativo



onde as setas verticais indicam as inclusões mencionadas.

## CAPITULO 4

### TRANSITIVIDADE DO PROLONGAMENTO

Neste último capítulo será feito um estudo suscinto sobre algumas propriedades do prolongamento de espécie  $A$  de uma variedade  $V$ , sobre o comportamento dos prolongamentos das leis de composição interna de uma álgebra  $B$  pela álgebra  $A$  e, por fim o que significa a transitividade do prolongamento.

Supondo-se que, em uma variedade  $V$ , exista uma lei de composição interna  $f$  diferenciável, seu prolongamento  $A_f$  será uma lei de composição interna sobre a variedade  $A_V$  e se  $f$  é comutativa (respect. associativa), o mesmo acontecerá com  $A_f$ . A demonstração que se seguirá será para o caso comutativo, mas para o associativo o procedimento é análogo. Para simplicidade dos cálculos, supor-se-á  $V$  uma variedade de dimensão 2,  $A$  terá uma base formada por  $\{1, B\}$  e sua altura será também igual a 2.

Sejam  $(x, y)$  em  $V \times V$ ,  $(U_1, \psi_1)$  carta local para  $x$  induzindo as coordenadas locais  $\{x^1, x^2\}$ ,  $(U_2, \psi_2)$  carta local para  $y$  com coordenadas locais  $\{y^1, y^2\}$ ,  $x'$  um  $A$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  dado por  $x'(x^1) = a_{10} + a_{11}B$ ,  $x'(x^2) = a_{20} + a_{21}B$  e  $y'$  um  $A$ -ponto de  $V$

próximo de  $y$  dado por  $y'(y^1) = b_{10} + b_{11}B$  e  $y'(y^2) = b_{20} + b_{21}B$ .

Deseja-se mostrar que  $A_{f(x',y')} = A_{f(y',x')}$  para todos  $x'$  em  $A_{V_x}$  e  $y'$  em  $A_{V_y}$ . Mas  $A_{f(x',y')}(g) = (x',y')(g \circ f)$  para toda  $g$  em  $D(V)$ , assim desenvolvendo  $g \circ f$  em Taylor na carta  $U_1 \times U_2$  de  $(x,y)$ , tem-se, devido a convenção usada em (2.15) e (2.16), que:

$$\begin{aligned} g \circ f &= g(f(x,y)) + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^1}(x,y)(x^1 - a_{10}) + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^2}(x,y)(x^2 - a_{20}) + \\ &+ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y^1}(x,y)(y^1 - b_{10}) + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y^2}(x,y)(y^2 - b_{20}) + \mathcal{O}_2(x,y) \end{aligned}$$

e, aplicando-se  $(x',y')$  na expressão acima:

$$\begin{aligned} (\Delta) \quad (x',y')(g \circ f) &= g(f(x,y)) + \left\{ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^1}(x,y) a_{11} + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^2}(x,y) a_{21} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y^1}(x,y) b_{11} + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y^2}(x,y) b_{21} \right\} B. \end{aligned}$$

Desenvolvendo-se agora  $g \circ f$  na carta  $(U_2 \times U_1)$  do ponto  $(y,x)$  e aplicando  $(y',x')$  nesse desenvolvimento do mesmo modo que o feito acima obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned} (\Delta\Delta) \quad (y',x')(g \circ f) &= g(f(y,x)) + \left\{ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y^1}(y,x) b_{11} + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y^2}(y,x) b_{21} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^1}(y,x) a_{11} + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^2}(y,x) a_{21} \right\} B \end{aligned}$$

como para toda  $g$  em  $D(V)$ ,  $\frac{\partial^k(g \circ f)}{\partial x^i \partial y^j}(y,x) = \frac{\partial^k(g \circ f)}{\partial y^j \partial x^i}(x,y)$

para  $0 \leq i+j = k$ ,  $(y',x')(g \circ f) = (x',y')(g \circ f)$  acarretando em

$A_{f(x',y')}(g) = A_{f(y',x')}(g)$  para toda  $g$  em  $D(V)$  e portanto

$$A_{f(x',y')} = A_{f(y',x')} \text{ para todo } x' \text{ em } A_{V_x} \text{ e } y' \text{ em } A_{V_y}.$$

Através desse resultado, conclui-se que, se  $G$  é um grupo de Lie com multiplicação  $\mu$ ,  $A_G$  também será um grupo de Lie com a multiplicação  $A_\mu: A_G \times A_G \longrightarrow A_G$ .

Lema 4.1: Seja  $V=R$  com a sua estrutura de corpo. Prolongando-se a  $A_R$  as leis de composição internas de  $R$ ,  $A_R$  tem uma estrutura de álgebra que é isomorfa a  $A$ .

Demonstração: Como os prolongamentos da adição e da multiplicação de  $R$  não são nada mais do que a adição e multiplicação no prolongamento, ainda tendo-se que  $\dim_R(A_R) = \dim_R A$ ,  $\dim_R R = \dim_R A$ , o isomorfismo é dado por  $x' \longmapsto x'(i)$  onde  $i$  é a coordenada natural de  $R$  (c.f. 2.15).

Supondo-se que  $V$  seja um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre  $R$  (então  $V$  é isomorfa ao  $R^n$ ), o prolongamento a  $A_V$  da adição de vetores de  $V$  determina sobre  $A_V$  uma estrutura de grupo abeliano. Por outro lado, pode-se ainda prolongar à

$$A(R \times V) = A_R \times A_V = A \times A_V$$

a multiplicação  $m$  de  $R \times V$  em  $V$  dada por  $m(\lambda, v) = \lambda v$ . Através dessas duas leis,  $A_V$  tem uma estrutura de A-módulo. Ainda mais, se se fixar uma base de  $V$ ,  $A_V$  com essa estrutura de A-módulo se identificará, canonicamente, com o produto tensorial  $A \otimes V$ , considerado como um A-módulo. De fato: como  $V$  é isomorfa ao  $R^n$ ,  $A_V$  isomorfa a  $A^n = A \times A \times \dots \times A$  ( $n$  vezes), como ainda  $A$  é isomorfa a  $A \otimes R$  tem-se:

$$A_V \cong A^n \cong (A \otimes R)^n \cong A \otimes R^n \cong A \otimes V.$$

Além disso, se existir em  $V$  uma multiplicação que a torna uma álgebra comutativa sobre  $R$ , o prolongamento dessa multiplicação a  ${}^A V$  determina, juntamente com as leis precedentes, uma estrutura de álgebra em  ${}^A V$  de forma que  ${}^A V$  se identifica, ainda canonicamente, com  $A \otimes V$  munido da estrutura correspondente.

Lema 4.2 - Seja  $B$  uma álgebra local e  $V$  uma variedade. Dado  $x'$  em  ${}^B V$ , a aplicação  $f \longrightarrow {}^B f(x')$  define um homomorfismo entre  $D(V)$  e  ${}^B R = B$ .

Demonstração: Dado  $x'$  em  ${}^B V$ , como  $f: V \longrightarrow R$  é diferenciável, seu prolongamento  ${}^B f: {}^B V \longrightarrow {}^B R = B$  é dado por:

$$({}^B f(x'))(h) = x'(hof) \quad \text{qualquer que seja } h \text{ em } D(V),$$

e, ainda, define um  $B$ -ponto de  $R$  próximo de  $f(x)$ . Mas por (2.15) é suficiente conhecer esse  $B$ -ponto próximo na aplicação identidade de  $R$ , ou seja:

$$({}^B f(x'))(1) = x'(1of) = x'(f) \text{ para toda } f \text{ em } D(V).$$

Como por definição  $x'$  é um homomorfismo de álgebras tem-se:

$${}^B(f + \lambda g)(x') = {}^B f(x') + \lambda {}^B g(x')$$

$${}^B(f \cdot g)(x') = {}^B f(x') \cdot {}^B g(x') \quad \text{para todas } f$$

e  $g$  em  $D(V)$  e todo  $\lambda$  em  $R$ , e portanto o resultado segue.

Lema 4.3 - Sejam  $A$  e  $B$  duas álgebras locais e  $V$  uma variedade. Dado  $x''$  em  ${}^A({}^B V)$ , a aplicação  $f \longrightarrow {}^A({}^B f)(x'')$  é um homomorfismo entre as álgebras  $D(V)$  e  ${}^A B = A \otimes B$ .

Demonstração: Como  $B$  é uma álgebra de dimensão finita  $k$  sobre  $R$ ,

B tem uma estrutura diferenciável definida por uma carta global com funções coordenadas sendo transformações lineares de B em R, aqui denotadas por  $\beta^1, \beta^2, \beta^3, \dots, \beta^k$ , e assim :

$$\begin{aligned}
 {}^A_{(B(f+\lambda g))(x'')}(\beta^j) &= {}^A_{(Bf + \lambda Bg)(x'')}(\beta^j) \quad (\text{por 4.2}) \\
 &= x''(\beta^j \circ (Bf + \lambda Bg)) \quad (\text{pela definição}) \\
 &= x''(\beta^j \circ Bf + \lambda \beta^j \circ Bg) \quad (\text{linearidade de } \beta^j) \\
 &= x''(\beta^j \circ Bf) + \lambda x''(\beta^j \circ Bg) \quad (x'' \text{ é linear}) \\
 &= ({}^A_{Bf}(x''))(\beta^j) + \lambda ({}^A_{Bg}(x''))(\beta^j) \\
 &= ({}^A_{(Bf) + \lambda (Bg)}(x''))(\beta^j)
 \end{aligned}$$

portanto  $({}^A_{Bf}(x''))$  é linear. Agora, dado  $x''$  em  $({}^A_{BV})$ ,  $x''$  sendo um A-ponto de  $B_V$  próximo de  $x'$ , com relação ao produto de funções tem-se :

$$B(f.g)(x') = (Bf)(x') \cdot (Bg)(x') = (Bf.Bg)(x') \quad \text{i.é:}$$

$$B(f.g) = \text{prod}_B \circ (Bf \times Bg) \quad \text{onde } \text{prod}_B \text{ é a multipli}$$

cação da álgebra B. Mas, se  $\text{prol}_A$  é o prolongamento da estrutura algébrica de B de espécie A, pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 {}^A_{(BV) \times (BV)} & \xrightarrow{{}^A_{(Bf \times Bg)}} & {}^A_B \times {}^A_B & \xrightarrow{{}^A_{\text{prod}_B}} & {}^A_B \\
 \uparrow & & & & \uparrow \text{prol}_A \\
 B_V \times B_V & \xrightarrow{Bf \times Bg} & B \times B & \xrightarrow{\text{prod}_B} & B
 \end{array}$$

${}^A_{\text{prol}}_{(B_V \times B_V)}$

observa-se que:

$$\begin{aligned} A_{(B(f.g))} &= A_{\text{prod}_B} \circ A_{(B_f \times B_g)} \\ &= \text{prod}_{A \otimes B} \circ (A_{B_f} \times A_{B_g}) \quad (\text{lema 3.13-2}) \\ &= A_{B_f} \text{prod}_{A \otimes B} A_{B_g} \quad \text{para todas} \end{aligned}$$

$f$  e  $g$  em  $D(V)$  e  $x''$  fixado, o que demonstra o lema.

Corolário 4.4- Se  $x''$  de  $A_{(B_V)}$  é um  $A$ -ponto próximo de  $x'$  de  $B_V$  e  $x'$  um  $B$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  de  $V$ , a aplicação  $z'$  de  $D(V)$  em  $A \otimes B$  definida por

$$z'(f) = A_{B_f}(x'')$$

é um homomorfismo de álgebras cuja parte finita de  $A_{B_f}(x'')$ , considerado como um elemento de  $A \otimes B$ , é  $f(x)$ .

Feito tudo isso, está-se agora em condições de enunciar e demonstrar o teorema fundamental da transitividade dos prolongamentos:

TEOREMA 4.5 - SEJAM  $A$  E  $B$  DUAS ALGEBRAS LOCAIS E  $V$  UMA VARI-  
EIDADE DIFERENCIÁVEL. EXISTE UM ISOMORFISMO CANÔNICO ENTRE O PRO-  
LONGAMENTO DE ESPECIE  $A \otimes B$  DE  $V$  E O PROLONGAMENTO DE ESPE-  
CIE  $A$  DO PROLONGAMENTO DE ESPECIE  $B$  DE  $V$ .

Demonstração : Seja  $f$  em  $D(V)$ . Pode-se então efetuar seu prolon-  
gamento de espécie  $B$  obtendo-se, assim,  $B_f: B_V \longrightarrow B_R = B$ ,

e depois o de espécie  $A$  resultando em  ${}^A({}^B f): {}^A({}^B V) \longrightarrow {}^A B = A \otimes B$ . Se  $x''$  pertence a  ${}^A({}^B V)$  e é fixado,  ${}^A({}^B f)(x'')$  é pois um elemento de  $A \otimes B$ . Pelos lemas (4.2), (4.3) e pelo corolário (4.4), a aplicação  $f \longmapsto {}^A({}^B f)(x'')$  é um homomorfismo de  $D(V)$  em  $A \otimes B$  e se  $x''$  é um  $A$ -ponto de  ${}^B V$  próximo de  $x'$  que, por sua vez, é um  $B$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  de  $V$ , a parte finita de  ${}^A({}^B f)(x'')$  é  $f(x)$ . Desta forma a aplicação  $z' : D(V) \longrightarrow A \otimes B$  dada por

$$z'(f) = {}^A({}^B f)(x'')$$

define um  $A \otimes B$ -ponto de  $V$  próximo de  $x$  e a aplicação  $x'' \longleftrightarrow z'$  é, nestas condições, uma aplicação canônica de  ${}^A({}^B V)$  no prolongamento de espécie  $A \otimes B$  de  $V$ . Resta mostrar que essa aplicação é um isomorfismo da primeira variedade na segunda. Mas como isso é uma propriedade puramente local com relação a  $V$ , é suficiente verificá-lo quando  $V$  é um subconjunto aberto de um espaço vetorial  $E$ . Ora, já se sabe que  ${}^A({}^B E)$  e  $A \otimes (B \otimes E)$  são isomorfos e que o  $A \times B$ -prolongamento de  $E$  também é isomorfo a  $(A \otimes B) \otimes E$  e que o produto tensorial é associativo e assim o diagrama

$$\begin{array}{ccc} {}^A({}^B E) & \xleftrightarrow{\quad} & A \otimes (B \otimes E) \\ \downarrow & & \updownarrow \\ (A \otimes B)_E & \xleftrightarrow{\quad} & (A \otimes B) \otimes E \end{array} \quad \text{é comutativo}$$

e, portanto, o resultado segue.

Corolário 4.6-  ${}^A({}^B V)$  é difeomorfo à  $(A \otimes B)_V$ .

# BIBLIOGRAFIA

- (1) BOURBAKI, N. Comutative álgebra. Paris, Hermann. 1961, cap.3 .
- (2) LIMA, E. L. Cálculo tensorial. Rio de Janeiro, IMPA, 1965.  
(Notas de matemática , 32)
- (3) MORIMOTO, A. Prolongations of geometric structures. Nagoya Univ., Mathematical Institute, 1969.
- (4) NARASIMHAN, R. Analysis on real and complex manifolds. Paris, Masson & Cia, 1968.
- (5) RODRIGUES, A. A. M. G-structures et pseudo-groupes de Lie. Université de Grenoble, 1969. Notas de um curso dado em 1967-68.
- (6) SAGLE, A.A.; WALDE, R. E. Introduction to Lie groups and Lie algebras. New York, Academic Press, 1973.
- (7) WEIL, A. Théorie des points proches sur les variétés différentiables. Colloq. Geom. Diff. Strasbourg, 1953. p. 111-117.