UM TEXTO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

ALUNO: BIBIANO MARTIN CERNA MAGUIÑA

ORIENTADOR: PROF. DR. MÁRIO CARVALHO DE MATOS

IMECC–UNICAMP
1995

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Cerna Maguiña, Bibiano Martin

C335t Um texto de variáveis complexas / Bibiano Martin Cerna Maguiña -- Campinas; [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : Mário Carvalho de Matos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Funções de variáveis complexas. 2. Funções analíticas. I. Matos, Mário Carvalho de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

UM TEXTO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Bibiano Martin Cerna Maguiña e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de fevereiro de 1996

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Tese de Mestrado defendida e aprovada em 23 de fevereiro de 1996 pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). JORGE MUJICA

Prof (a). Dr (a). RAIMUNDO LUIZ DE ALENCAR

"Dedico este trabalho
a minha família"

AGRADECIMENTO

Agradeço ao Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos pela competência, dedicação e paciência na orientação deste trabalho.

Agradeço a CAPES pela bolsa, sem a qual este trabalho não seria realizado.

Agradeço aos funcionários e professores do IMECC, que me propiciaram boas condições de estudo.

Agradeço a Juan Montealegre, Wagner Fernandes e Roger Paredes pelas muitas sugestões que foram consideradas, e a Fátima pela excelente digitação.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é essencialmente baseado no curso de Variáveis Complexas, oferecido no segundo semestre de 1993 no Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação da Universidade Estadual de Campinas, pelo Prof. Dr. Mario C. Matos. Nossa intenção foi fornecer um texto a nível de pós-graduação para um curso de Funções Analíticas Complexas, com exercícios resolvidos e propostos.

Damos ênfase ao enfoque das funções analíticas via séries de potências. A vantagem de tal perspectiva reside no fato de que os cursos posteriores sobre Funções Analíticas em Espaços de Banach são usualmente considerados através de séries de potências.

É conhecido que as funções analíticas se empregam com freqüência em distintas disciplinas teóricas e aplicadas: equações diferencias, geometría, hidrodinâmica, teoria analítica dos números, etc. O conhecimento dos princípios fundamentais da teoria das funções analíticas, é um fato indispensável na Educação Matemática Moderna. Atualmente esta teoria se desenvolveu tanto que torna-se difícil cobrir num só texto suas múltiplas ramificações. No texto serão tratados os assuntos usuais de um curso a nível de Mestrado, com numerosos exemplos para ilustrar os temas que são objeto de estudo. Em outros casos estes exemplos são apresentados de modo a comprovar que o teorema estudado perde seu valor em condições mais moderadas.

Cada parágrafo começa com os enunciados das definições, princípios e teoremas pertinentes, seguidos dos problemas resolvidos e propostos. Os resolvidos ilustram e ampliam a teoria. Os numerosos problemas propostos completam o material de cada parágrafo.

O texto está dividido em 19 parágrafos alguns dos quais brevemente descrevemos a seguir.

Séries de Potências. Iniciamos com as definições e critérios de convergência pontual, uniforme e absoluta para séries de funções definidas num domínio $D \subseteq \mathbb{K}$ com valores em $\mathbb{K}$, o corpo dos números reais ou complexos. Quando as séries de funções são as séries de potências, damos a fórmula de Cauchy-Hadamard que nos permite achar seu raio de convergência. Para seqüências de funções damos teoremas que nos garantem quando a função soma de uma série de funções é contínua e a integral (diferencial) de sua soma é igual a soma das integrais (diferenciais). Ao final enunciamos a propriedade da identidade para séries em forma geral e mostramos mediante um exemplo que esta não pode ser considerada tão evidente.

Operações com Séries de Potências. Aquí a convergência absoluta tem um papel importante, já que nos permite somar uma série absolutamente convergente na ordem que desejamos. Assim devido a este resultado é que podemos efetuar o produto de duas séries de potências que tem círculo de convergência com centro comum e efetuar a composição de duas séries de potências que satisfazem certas condições.

Funções Analíticas. Definimos uma função analítica sobre um conjunto aberto $A \subseteq I\!K$, via uma série de potências. Além disso, vemos que a função soma de uma série de potências é representada por sua série de Taylor e portanto ela é infinitamente diferenciável.

Conjuntos Determinantes de Analiticidade. Enunciamos um resultado que justifica a introdução dos chamados conjuntos determinantes de analiticidade. A seguir vemos que uma função analítica não nula definida num aberto conexo $A \subseteq I\!K$, só tem zeros isolados. Mostramos mediante vários exemplos a utilidade destes conjuntos.

Teorema do Módulo Máximo. Iniciamos este parágrafo com o teorema 5.1 (semelhante ao teorema de Liouville) válido somente no caso complexo, o qual é usado na prova do teorema do módulo máximo. Este resultado nos garante que uma função analítica não constante definida em um aberto A atinge seu módulo máximo na fronteira de A. Finalmente usando este resultado obtemos o lema de Schwarz.

Integrais sobre Caminhos. O objetivo deste parágrafo é reunir as definições, propriedades básicas de caminhos, integral sobre caminhos e homotopia. Estas noções serão fundamentais para a compreensão dos parágrafos posteriores, como por exemplo, o teorema de Cauchy.

Teorema de Cauchy. O Teorema, cujo enunciado e demonstração damos é um dos fundamentais na teoria das funções analíticas.

Existência de Primitivas de Funções Analíticas Complexas. Como uma primeira aplicação do teorema de Cauchy mostramos neste parágrafo a existência de primitivas para funções analíticas definidas num aberto $A \subseteq I\!K$, simplesmente conexo. Por meio de um exemplo mostramos a necessidade da condição do conjunto A ser simplesmente conexo.

Índice de Caminhos Fechados. Para as posteriores aplicações do teorema de Cauchy, é necessário saber determinar o número de voltas que dá uma curva regular fechada ao redor de um ponto de seu interior. Este parágrafo é dedicado a justificar que o índice de uma curva pode ser interpretado como tal número de voltas.

Fórmulas Integrais de Cauchy. São notáveis porque mostram, com hipóteses adequadas, que uma função analítica conhecida na fronteira de um conjunto pode ser determinada junto com sua derivada no seu interior. A partir destas fórmulas obtemos desigualdades que são usadas para provar o teorema de Liouville.

Diferenciabilidade Implica Analiticidade no Caso Complexo. É sabido que toda função analítica é diferenciável. Neste parágrafo vemos que na teoria de Variáveis Complexas, a relação entre analiticidade e diferenciabilidade é forte, porque toda função diferenciável é analítica. Neste contexto as condições de Cauchy-Riemann e o teorema de Morera constituem um critério de analiticidade.

Seqüência de Funções Analíticas Complexas. Estabelecemos em que condições o limite de uma seqüência de funções analíticas é analítica. É enunciado o Teorema de Arzela-Ascolí, para demonstrar o Teorema de Montel que é muito usado para decidir quando uma família de funções analítica é relativamente compacta com a topologia compacta aberta.

Singularidades Isoladas e Zeros de Funções Analíticas. Nos parágrafos 13 e 14 obtemos algumas propriedades das funções que são analíticas sobre um disco aberto e sobre um disco aberto perfurado em seu centro. Os resultados podem ser usados para descrever o comportamento de uma função que é analítica em algum domínio, pois dado qualquer ponto do domínio podemos achar um disco aberto ao redor do ponto que está contido em seu domínio. Muitos dos resultados destas seções são preparatório para os parágrafos posteriores, onde o comportamento global de uma função analítica sobre um domínio será estudado.

Aplicação da Teoria dos Resíduos para Cálculo de Integrais Reais. No parágrafo 15 é estudado a teoria dos resíduos e como uma aplicação dela deduzimos o princípio do argumento e o teorema de Rouché. Como outra aplicação da teoria de resíduos vemos no parágrafo 16 que as integrais reais difícies de ser calculadas por métodos reais, podem ser calculados por meio de uma integral sobre um caminho apropriadamente escolhido de uma função complexa convenientemente selecionada.

Representação de Funções Meromorfas por Frações Parciais. Enfocamos a maneira de representar uma função meromorfa com infinitos polos, ordenados por seu módulo em forma não decrescente por frações parciais. Isto é sempre possível de ser realizado, como foi provado por Mittag-Leffer. (Teorema 17.1).

Produtos Infinitos. O objetivo desta seção é mostrar como as funções inteiras que tem uma quantidade infinita de zeros, ordenados por seu módulo em forma não decrescente, podem ser representados como um produto infinito de funções especiais. Neste contexto as funções enteiras podem ser consideradas como uma generalização dos polinômios.

Teorema da Aplicação de Riemann. Neste parágrafo nos ocupamos do problema fundamental da teoria das transformações conformes, relativa a possibilidade de transformar biunívoca e conformemente um conjunto aberto simplesmente conexo em outro.

Para poder ler o texto, basta ter os conhecimientos de espaços métricos e análise real, dados na graduação da faculdade de Matemáticas. Denotamos por (**R**) as definições, teoremas, proposições e lemas que supomos já são conhecidos pelo leitor.

§ 1. SÉRIES DE POTÊNCIAS

Em todo este trabalho $\mathbb{K}$ designa ou o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ e $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \cdots, n, \cdots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.1 DEFINIÇÃO: Uma *série de potências ao redor* de $a \in \mathbb{K}$ é uma série de funções da forma $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ com $\alpha_k \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N}_0$. É usual chamar α_k o *k-ésimo coeficiente da série.*

(R) 1.2 DEFINIÇÃO: Dada uma série de funções $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ definidas em $D \subset \mathbb{K}$ com valores em $\mathbb{K}$, diz-se que essa *série converge pontualmente sobre $B \subset D$ a uma função $f(z)$* se:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall z \in B)(\exists N(\varepsilon, z) > 0) \ \text{ tal que}$$
$$n \geq N(\varepsilon, z) \Rightarrow \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Diz-se que a *convergência é uniforme sobre B* se:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0) \ \text{ tal que}$$
$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{z \in B} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Vamos dizer que $f(z)$ é a *função soma da série sobre B* e $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$ *a n-ésima soma parcial da série no ponto z.*

É claro que toda série uniformemente convergente é pontualmente convergente.

(R) 1.3 CRITÉRIO DE CAUCHY: Uma série de funções $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ definidas em $D \subset \mathbb{K}$ com valores em $\mathbb{K}$ converge uniformemente sobre $B \subset D$ se, e somente se,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0) \ \text{ tal que}$$
$$m \geq n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{z \in B} \left| \sum_{k=n}^{m} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Note que não se precisa conhecer o limite da série para demonstrar a convergência uniforme se fazemos uso deste critério.

Lembremos que uma série de funções $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge *uniformemente (pontualmente) e absolutamente sobre B* se a série de funções $\sum_{k=1}^{\infty} | f_k(z) |$ converge uniformemente (pontualmente) sobre B.

Convergência uniforme (pontual) e absoluta sobre B implica convergência uniforme (pontual) sobre B. Todavia a recíproca é falsa, como vemos pelo contra-exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge, mas } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

(R) 1.4 CRITÉRIO DE WEIERSTRASS: Seja $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ uma série de funções definidas em $D \subset I\!\!K$ com valores em $I\!\!K$ tal que existe $M_k > 0, k \in I\!\!N_0$ satisfazendo

(i) $\sup_{z \in D} | f_k(z) | \leq M_k \qquad (\forall\, k \in I\!\!N_0)$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} M_k = M < +\infty$.

Então a série converge uniformemente e absolutamente sobre D e temos

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} | f_k(z) | \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_k = M \qquad (\forall z \in D).$$

Este critério dá uma condição suficiente mas não necessária de convergência uniforme.

Note que uma série uniformemente convergente não tem que ser necessariamente absolutamente convergente e reciprocamente.

EXEMPLOS:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. A série é absolutamente convergente pontualmente em $\mathbb{R}$ mas não é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$. A série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ mas não é absolutamente convergente pontualmente em $\mathbb{R}$ (e não é aplicável o critério de Weierstrass).

1.5 LEMA DE ABEL: Seja $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ uma série de potências ao redor de a. Se $b \in \mathbb{K}, b \neq a$ e

$$| \alpha_k (b-a)^k | \leq M < +\infty \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N}_0),$$

então a série converge absoluta e uniformemente sobre $\overline{B}_R(a)$ para todo $R \in]0, | b-a | [$ e absoluta e pontualmente em $B_{|b-a|}(a)$.

Aqui, conforme é usual, $B_r(a) = \{x \in \mathbb{K}; | x-a | < r\}$ e $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{K}; | x-a | \leq r\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $B_{|b-a|}(a) = \bigcup_{R \in]0,|b-a|[} \overline{B}_R(a)$, basta mostrar a convergência absoluta e uniforme sobre cada $\overline{B}_R(a), R \in]0, | b-a | [$. Assim, se $z \in \overline{B}_R(a)$ temos

$$| f_k(z) | = | \alpha_k (z-a)^k | = | \alpha_k || b-a |^k \frac{| z-a |^k}{| b-a |^k} \leq M \frac{| z-a |^k}{| b-a |^k} \leq M \left(\frac{R}{| b-a |} \right)^k = M_k.$$

Então

$$\sup_{z \in \overline{B}_R(a)} | f_k(z) | \leq M_k \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N}_0)$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k = \frac{M}{1 - \frac{R}{|b-a|}} < +\infty.$$

Logo por 1.4 a série converge uniformemente e absolutamente sobre $\overline{B}_R(a)$ □

1.6 COROLÁRIO: Se a série de potênciais $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ diverge (não converge) num ponto $z = b \neq a$ então ela diverge em cada $a \in \mathbb{K} \setminus \overline{B}_{|b-a|}(a)$.

EXEMPLOS:

(1) Seja $p > 0$ e tomemos a série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} z^k$.
Neste caso temos:

$$\frac{1}{k^p} \leq 1 \qquad (\forall\, k \in I\!N).$$

Pelo Lema de Abel obtemos convergência pontual e absoluta sobre $B_1(0)$ e convergência uniforme e absoluta sobre $\overline{B}_R(a)$ se $R \in]0,1[$.
(2) Onde $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} z^k$ diverge?
Notemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ diverge se $p \in]0,1[$ e converge se $p > 1$. Assim $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^p}$ diverge no ponto 1 se $p \in]0,1[$.
Pelo Corolário 1.6, ela diverge se $\mid z \mid > 1$ e $p \in]0,1[$.

Para $\delta > 0$ e $p > 1$ temos:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(1+\delta)^k}{k^p} = +\infty.$$

Assim $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^p}$ diverge se $\mid z \mid > 1$ e $p > 1$.

Notemos que para $p \in]1, +\infty[$ a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^p}$ converge uniformemente sobre $\overline{B}_1(0)$.

1.8 OBSERVAÇÃO: A chamada fórmula de Cauchy-Hadamard permite achar um $R \in [0, +\infty]$ tal que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ converge absoluta e pontualmente sobre $B_R(a)$ e diverge nos pontos de $I\!K \setminus \overline{B}_R(a)$.

(R) 1.9 DEFINIÇÃO: Dada uma seqüência $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ de números reais vamos tomar $a_n = sup\{\alpha_k; k \geq n\}$ para $n \in I\!N$. Logo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência não crescente e portanto tem limite. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, temos que A pode ser $-\infty, +\infty$ ou um número real. A é chamado *limite superior da seqüência* $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ e é denotado $A = \overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} sup\ \alpha_k$.

(R) 1.10 OBSERVAÇÃO: Seja $A = \overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k$

(1) $\overline{\lim_{k\to\infty}} \alpha_k = A \in I\!R \Leftrightarrow$ (i) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists k_\varepsilon > 0) k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \alpha_k < A + \varepsilon$
e (ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\forall k \in I\!N)(\exists n_k \geq k)\alpha_{n_k} > A - \varepsilon$.

(2) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\alpha_k = +\infty \Leftrightarrow$ existe uma subseqüência $(\alpha_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = +\infty$.

(3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\alpha_k = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = -\infty$.

(R) 1.11 CRITÉRIO DA RAIZ: Seja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ uma série de elementos de $I\!\!K$ e vamos considerar $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \mid \alpha_k \mid^{1/k}= A \geq 0$. Então:

1) Se $A < 1$ então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mid \alpha_k \mid$ converge.

2) Se $A > 1$ então existe uma subseqüência $(\alpha_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ de $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \mid \alpha_{k_n} \mid = +\infty$.

3) Se $A = 1$ nada se pode dizer em geral.

1.12 TEOREMA: (*A Fórmula de Cauchy-Hadamard*). Dada a série de potênciais $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$, seja $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \mid \alpha_k \mid^{1/k}}$. Então

i) A série converge absoluta e pontualmente sobre $B_R(a)$.

ii) A série converge absoluta e uniformemente sobre $\overline{B}_\rho(a), 0 < \rho < R$.

iii) Se $\mid z-a \mid > R$ então existe uma subseqüência $(\alpha_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \mid \alpha_{k_n} \mid\mid z-a \mid^{k_n}= +\infty$.

iv) Se $\mid z-a \mid = R$, nada pode ser afirmado em geral.

Neste caso diz-se que R é o *raio de convergência da série* e $B_R(a)$ é o *círculo de convergência da série.*

DEMONSTRAÇÃO:

a) $z \in B_R(a)$ então $\mid z-a \mid < R$, e assim

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}[\mid \alpha_k \mid\mid z-a \mid^k]^{1/k} = \mid z-a \mid \overline{\lim_{k\to\infty}} \mid \alpha_k \mid^{1/k} = \mid z-a \mid \cdot \frac{1}{R} < 1.$$

O critério da raíz fornece (i).

b) Seja $0 < \rho < R$. Então $z \in \overline{B}_\rho(a) \Rightarrow \mid z - a \mid \leq \rho$. Tome $z_0 \in B_R(a) \setminus \overline{B}_\rho(a)$, logo $\mid z - a \mid < \mid z_0 - a \mid < R$ e daí $\mid \alpha_k \mid\mid z - a \mid^k \leq \mid \alpha_k \mid\mid z_0 - a \mid^k \qquad (\forall\, z \in \overline{B}_\rho(a))$. Desta relação temos:

$$\sup_{z \in \overline{B}_\rho(a)} \mid \alpha_k \mid\mid z - a \mid^k \leq \mid \alpha_k \mid\mid z_0 - a \mid^k$$

e como $\sum_{k=0}^{\infty} \mid \alpha_k \mid\mid z_0 - a \mid^k < +\infty$, verifica-se então o critério de *Weierstrass* e a série $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ converge uniforme e absolutamente sobre $\overline{B}_\rho(a)$.

c) $\mid z - a \mid > R \Rightarrow \overline{\lim_{k \to \infty}} [\mid \alpha_k \mid\mid z - a \mid^k]^{1/k} = \dfrac{\mid z - a \mid}{R} > 1$; o critério da raíz implica o resultado. □

(R) 1.13 TEOREMA: Se $f_k(z), k = 1, 2, \cdots$ são funções contínuas em $D \subset I\!\!K$ e se a série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ sobre $D \subset I\!\!K$, então $f(z)$ é contínua em D.

Este resultado é muito usado para demonstrar que uma série dada não é uniformemente convergente, bastando verificar que a função soma $f(z)$ é descontínua em algum ponto.

EXEMPLO: Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, para $x \in I\!\!R$. Note que $f_k(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^k}$ é função contínua em $I\!\!R$ para $k \in I\!\!N_0$. Se $x \neq 0$ a soma da série $f(x) = 1 + x^2$. Se $x = 0$ temos a soma da série é $f(0) = 0$. Como $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$, temos que f é descontínua em $x = 0$. Logo a série não pode ser uniformemente convergente em $I\!\!R$.

(R) 1.14 TEOREMA: Se $f_k(z), k = 1, 2, \cdots$ são contínuas em $D \subset I\!\!R$ e se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ em D, então

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_2} f_k(z)dz \quad \text{com} \quad z_1, z_2 \in D.$$

(R) 1.15 TEOREMA: Se $f_k(z), k = 1, 2, \cdots$ são contínuas e tem derivadas contínuas em $D \subset I\!\!R$ e se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge a $f(z)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z)$ é uniformemente convergente em D então

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z), \qquad (\forall z \in D).$$

1.16 PROPOSIÇÃO: Se $f(z)$ denota a função soma de uma série de potências em seu círculo de convergência $B_r(a)$, então f é contínua em $B_r(a)$.

DEMONSTRAÇÃO: $\alpha_k(z-a)^k$ é função contínua em $I\!\!K$ e a série converge uniformemente em cada $\overline{B}_R(a)$ com $R < r$. Logo f é contínua em cada $\overline{B}_R(a)$ com $R < r$ e daí será contínua em $B_r(a) = \bigcup_{R<r} \overline{B}_R(a)$. □

É comum dizer que f é representada pela série de potências em seu círculo de convergência. A pergunta natural que se faz é a seguinte: Se f é representada pelas séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(z-a)^k$ em $B_r(a)$ para algum $r > 0$, como se relacionam α_k e β_k para cada k?. Para responder isso vamos usar o seguinte resultado.

1.17 TEOREMA: Se f é representada pela série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$ em seu círculo de convergência $B_r(a)$, então, exceto quando todos os α_k são nulos para $k \in I\!\!N$, existe $0 < R < r$ tal que $f(z) \neq f(a)$ se $z \neq a$ e $z \in B_R(a)$. Em particular se $f(a) = 0$, a é um *zero isolado de* f exceto no caso em que $\alpha_k = 0$ para cada $k \in I\!\!N_0$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que nem todos os $\alpha_k, k \in I\!\!N$ são nulos. Seja n o menor natural tal que $\alpha_n \neq 0$. Podemos escrever que

$$f(z) - f(a) = (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+n}(z-a)^k \qquad (\forall\ z \in B_r(a)).$$

$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+n}(z-a)^k$ converge pontualmente a uma função contínua $g(z)$ sobre $B_r(a)$ (*Cauchy-Hadamard*). Como $g(a) = \alpha_n \neq 0$, existe $R, 0 < R < r$ tal que para qualquer $z \in B_R(a), g(z) \neq 0$. De $f(z) - f(a) = (z-a)^n g(z) (\forall z \in B_r(a))$ segue que $f(z) \neq f(a)$ se $z \neq a$ e $z \in B_R(a)$. □

1.18 PROPOSIÇÃO: Se $f(z)$ for representada pelas séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(z-a)^k$ em $B_r(a)$ para algum $r > 0$ então $\alpha_k = \beta_k$ para todo $k \in I\!\!N_0$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue dos fatos $f(a) = \alpha_0 = \beta_0$ e $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k - \beta_k)(z-a)^k = f(z) - f(z) = 0$ para $z \in B_r(a)$. Aplicando 1.17 obtemos o resultado. $\square$

Para que o leitor compreenda que o teorema 1.18 não se pode considerar por si mesmo evidente, enunciamos a propriedade da identidade para as séries em forma geral. Se dirá que as séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z)$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k(z)$ onde $f_k(z), k \in \mathbb{N}_0$ são funções, possue a propriedade de identidade num conjunto E, se da igualdade $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k(z)$ convergentes pontualmente neste conjunto, se obtem a igualdade dos coeficientes correspondentes $a_k = b_k \ \forall \ k \in \mathbb{N}_0$.

EXEMPLO: $f_0(z) = 1, f_k(z) = z^k - z^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$ não tem a propriedade de identidade no círculo $|z| < 1$ de fato: $\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = z^n$, e como para $|z| < 1 : \lim_{n \to \infty} z^n = 0$, a série dada é pontualmente convergente no interior do círculo $|z| < 1$ e sua soma é igual a zero. Portanto se a série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z)$é pontualmente convergente no interior do círculo $|z| < 1$ e sua soma é $f(z)$, então todas as séries $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + \lambda) f_k(z)$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é arbitrário, também são pontualmente convergentes no interior do círculo $|z| < 1$ e possuem a mesma soma $f(z)$.

§ 2. OPERAÇÕES COM SÉRIES DE POTÊNCIAS

Se $f(z)$ representa a soma da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$ em seu círculo de convergência $B_{r_1}(a)$ e $g(z)$ representa a soma da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(z-a)^k$ em seu círculo de convergência $B_{r_2}(a)$, então $f+g$ e $f-g$ representam as somas respectivas das séries de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)(z-a)^k \;\text{ e }\; \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k-\beta_k)(z-a)^k$$

em $B_r(a)$ onde $r = Min\{r_1, r_2\}$.

(R) 2.1 TEOREMA: Dada uma série $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ absolutamente convergente de elementos de $I\!\!K$, supõe-se que $I\!\!N_0 = \bigcup_{j=0}^{\infty}S_j$; onde $S_j \neq \Phi$ e $S_i \cap S_j = \Phi$ se $i \neq j$. Então para $j \in I\!\!N_0$, $\sum_{n\in S_j} a_n$ converge absolutamente e sendo $A_j = \sum_{n\in S_j} a_n$ tem-se $\sum_{k=0}^{\infty}a_k = \sum_{j=0}^{\infty}A_j$.
Este resultado permite *"somar"* uma série absolutamente convergente na ordem em que se desejar.

2.2 TEOREMA: Sejam $f(z)$ e $g(z)$ as somas das séries de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k \;\text{ e }\; \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(z-a)^k \tag{1}$$

em seu círculo de convergência $B_{r_1}(a)$ e $B_{r_2}(a)$. Então $f(z)g(z)$ é a soma da série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(z-a)^k \tag{2}$$

em $B_r(a)$, com $r = Min\{r_1, r_2\}$, e $\gamma_k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\beta_{k-j}$.

A série (2) é chamada *Produto de Cauchy* das séries (1).

DEMONSTRAÇÃO: Para $n \in I\!N_0$ e $| z-a | < r$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} | \alpha_j || \beta_{k-j} || z-a |^k &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} | \alpha_j || \beta_{k-j} || z-a |^j | z-a |^{k-j} \\
&\leq \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\substack{j+\ell=k \\ 0\leq j\leq n \\ 0\leq \ell\leq n}} | \alpha_j || z-a |^j | \beta_\ell || z-a |^\ell \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} | \alpha_j || z-a |^j\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} | \beta_\ell || z-a |^\ell\right).
\end{aligned}$$

Como as séries (1) convergem em tal z segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} | \alpha_j || \beta_{k-j} || z-a |^k < +\infty.$$

Sendo $A = \{(j, k-j) \in I\!N_0 \times I\!N_0; j \leq k \text{ e } k \in I\!N_0\}$ é fácil ver que $A = I\!N_0 \times I\!N_0$. Tomando a enumeração de A da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3),\cdots \\
&\cdots,(k,0),(k-1,1),\cdots,(1,k-1),(0,k),\cdots,
\end{aligned}$$

que equivale a seguir a ordem das setas abaixo:

$$\begin{array}{llllll}
 & (0,0) & (0,1) & (0,2)\quad(0,3) & \cdots\quad(0,k-1) & (0,k)\cdots \\
 & (1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots\quad(1,k-1) & \cdots \\
\hookrightarrow & (2,0) & (2,1) & \cdots & & \\
\hookrightarrow & (3,0) & \cdots & & & \\
\hookrightarrow & (k-1,0) & (k-1,1) & \cdots & & \\
\hookrightarrow & (k,0) & \cdots & & & \\
 & \cdots & \cdots & & &
\end{array}$$

o que se provou acima foi que a série $\sum_{(j,k-j)\in A} \alpha_j\beta_{k-j}(z-a)^j(z-a)^{k-j}$ é absolutamente convergente. Logo podemos usar 2.1 com $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} S_j$, sendo $S_j = \{(j,n); n \in I\!N_0\}$ para cada $j \in I\!N_0$. Assim,

$$\sum_{(j,k-j)\in A} \alpha_j(z-a)^j\beta_{k-j}(z-a)^{k-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_j(z-a)^j\beta_n(z-a)^n\right]$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j(z-a)^j\left[\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(z-a)^n\right] = \left[\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j(z-a)^j\right]g(z) = f(z)g(z).$$

□

2.3 TEOREMA: Seja $f_k(z)$ a soma da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{kn}(z-a)^n$ em seu círculo de convergência $B_{r_k}(a), k = 1, 2, \cdots p$. Então $f_1(z)\cdots f_p(z)$ é a soma da série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(z-a)^k$$

em $B_r(a), r = Min\{r_1, \cdots, r_p\}$, onde

$$\gamma_n = \sum_{k_1+\cdots+k_{p=n}} \alpha_{1k_1}\cdot\alpha_{2k_2}\cdot\cdots\cdot\alpha_{p_{k_p}}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Observe o caso anterior para ver que

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\alpha_{1k_1}(z-a)^{k_1}\right)\cdots\left(\sum_{k_p=0}^{\infty}\alpha_{p_{k_p}}(z-a)^{k_p}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\quad\sum_{k_1+\cdots+k_{p=j}}\alpha_{1k_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{pk_p}(z-a)^{k_1+\cdots+k_p}$$

converge absolutamente para $n \to +\infty$ e portanto pode ser somada da maneira que desejamos. □

2.4 OBSERVAÇÃO: Se $f(z)$ é a soma da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$ em seu círculo de convergência $B_r(a)$, então a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \mid \alpha_k \mid (z-a)^k$ tem r como raio de convergência e passaremos a chamar sua função soma por $\tilde{f}(z)$. Usaremos tal notação na demonstração do próximo resultado.

2.5 TEOREMA: Seja $f(z)$ a soma da série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k \tag{3}$$

em seu círculo de convergência $B_{r_1}(a)$. Suponha que $g(u)$ é a soma da série de potências

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\beta_\ell(\mu-b)^\ell \tag{4}$$

em seu círculo de convergência $B_{r_2}(b)$. Se o valor $f(a) \in B_{r_2}(b)$ é possível achar $r > 0, r < r_1$ tal que $f(B_r(a)) \subset B_{r_2}(b)$ e $(g \circ f)(z)$ é a soma de uma série de potências ao redor de a em $B_r(a)$.

DEMONSTRAÇÃO: Caso I: $a = 0$ e $b = 0$. Aqui $f(0) \in B_{r_2}(0)$ e portanto $\tilde{f}(0) = | f(0) |$. Como $\tilde{f}(0) \in B_{r_2}(0)$, e $\tilde{f}(z)$ é contínua em zero, existe $\delta > 0, \delta < r_1$ tal que $z \in B_\delta(0) \Rightarrow \tilde{f}(z) \in B_{r_2}(0)$. Como $| z | \in B_\delta(0)$ para $z \in B_\delta(0)$, temos $\tilde{f}(| z |) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} | \alpha_k || z |^k \in B_{r_2}(0)$. Além disso, $\tilde{g}$ dada por $\tilde{g}(\mu) = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} | \beta_\ell | \mu^\ell$ é absolutamente convergente sobre $B_{r_2}(0)$ e para $z \in B_\delta(0)$:

$$\tilde{g}(\tilde{f}(| z |)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} | \beta_\ell | \left[\sum_{k=0}^{\infty} | \alpha_k || z |^k\right]^\ell .$$

Então

$$\tilde{g}(\tilde{f}(z)) = | \beta_0 | + \sum_{\ell=1}^{\infty} | \beta_\ell | \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_\ell=0}^{\infty} | \alpha_{k_1} | \cdots | \alpha_{k_\ell} || z |^{k_1} \cdots | z |^{k_\ell} . \tag{5}$$

Logo podemos somá-la da maneira que desejarmos. Portanto (5) ficará

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{f}(z)) &= \beta_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty}\beta_\ell\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k\Big)^\ell = g\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k\Big) \\
g(f(z)) &= (g \circ f)(z) \qquad\qquad \forall\, z \in B_\delta(0).
\end{aligned}$$

No caso geral de a e b quaisquer, consideramos as funções:

i) $F(z) = f(z + a) - b$ que é representada pela série de potências

$$\begin{aligned}
F(z) &= \alpha_0 - b + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k \qquad \text{para } z \in B_{r_1}(0) \\
F(0) &= \alpha_0 - b
\end{aligned}$$

ii) $G(u) = g(u + b)$ que é representada pela série de potências

$$G(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\beta_\ell u^\ell \qquad \text{para } B_{r_2}(0).$$

Temos

$$F(0) = \alpha_0 - b = f(a) - b \in B_{r_2}(0).$$

Pelo caso já demonstrado existe $\delta > 0, \delta < r_1$, tal que $F(B_\delta(0)) \subset B_{r_2}(0)$ e $(G \circ F)(z)$ é representada por uma série de potências ao redor de zero em $B_\delta(0)$. Isto se traduz em $f(B_\delta(0)) \subset B_{r_2}(b)$ e $(g \circ f)(z)$ é representada por uma série de potências ao redor de a em $B_\delta(a)$. □

2.6 OBSERVAÇÃO: Examinando a demonstração anterior com cuidado vemos que a série de potências ao redor de a representando $(g \circ f)(z)$ é obtida pela substituição formal em (4) de u pela série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ para cada $z \in B_\delta(0)$.

2.7 CONSEQUÊNCIA: Seja $g(z)$ a soma da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ em seu círculo de convergência $B_r(a)$. Se $b \in B_r(a)$, então existe $\delta > 0, \delta < r$, tal que $B_\delta(b) \subset B_r(a)$ e

$$g(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_\ell (z-b)^\ell$$

para $z \in B_\delta(b)$. Neste caso $\delta = r - \mid b - a \mid$ e

$$\beta_\ell = \sum_{k \geq \ell} \alpha_k \binom{k}{\ell} (b-a)^{k-\ell}$$

para $\ell \in \mathbb{N}_0$.

De fato, basta usar (2.5) com

$$f(z) = b + (z-b), z \in \mathbb{K}.$$

Neste caso $g \circ f(z) = g(z)$ para $z \in B_\delta(a)$ e $\delta = r - \mid b - a \mid$. Note que a *"substituição formal"* fornece

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (f(z)-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k [(z-b)+(b-a)]^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (b-a)^{k-j} (z-b)^j \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{k\geq j}\alpha_k\binom{k}{j}(b-a)^{k-j}\right](z-b)^j$$

$$(g\circ f)(z) = g(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j(z-b)^j.\square$$

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine os raios de convergência das séries em $\mathbb{C}$

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n, \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n} \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$$

SOLUÇÃO. Usamos a relação $R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid \alpha_n \mid^{1/n}\right)^{-1}$.

(a) Se $\alpha_n = \dfrac{n!}{n^n}$, afirmamos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$. Para isto usamos a relação conhecida ($e^n = 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\cdots$) e é fácil mostrar que $\dfrac{n^n}{n!} < e^n < (2n+1)\dfrac{n^n}{n!}$, donde obtemos nossa afirmação. Logo $R = e$.

(b) De $\alpha_n = 1$ para $n = 2^k$ e $\alpha_n = 0$ para $n \neq 2^k$, segue $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\mid \alpha_n \mid} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[2^k]{1} = 1$.

(c) Se $\mid a \mid\leq 1$ então $\mid n+a^n \mid\leq n+1$. Se $\alpha_n = n+a^n$ temos $\mid \alpha_n \mid=\mid n+a^n \mid\leq n+1$ e

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\mid n+a^n \mid} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1 \qquad (i)$$

Além disso $\mid n+a^n \mid\geq n- \mid a \mid^n\geq n-1$, pois $- \mid a \mid^n\geq -1$. Então temos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\mid n+a^n \mid} \geq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n-1} = 1 \qquad (ii)$$

De (i) e (ii) segue $R = 1$.

Se $\mid a \mid> 1$, temos $\mid n+a^n \mid\leq n+ \mid a \mid^n\leq 2 \mid a \mid^n$ para n suficientemente grande. Como $\mid \alpha_n \mid=\mid n+a^n \mid\leq 2 \mid a \mid^n$ obtemos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\mid \alpha_n \mid} \leq\mid a \mid \qquad (iii)$$

Além disso $a = |a| e^{i\theta}$ e $a^n = |a|^n e^{in\theta}$. Logo temos que $|\alpha_n| = |n + a^n| = \sqrt{(n + |a|^n \cos n\theta)^2 + (|a|^n \operatorname{sen} n\theta)^2} \geq |a|^n$. Daí

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \geq |a| \qquad (iv)$$

De (iii) e (iv) $R = \dfrac{1}{|a|}$

2. Ache a soma das seguintes séries para $z \in \mathbb{C}$

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ para $|z| \neq 1$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{z^{n+1}}$ para $|z| > 1$

SOLUÇÃO. (a) Como

$$\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \frac{1}{(1-z)}\left[\frac{1}{1-z^n} - \frac{1}{1-z^{n+1}}\right],$$

temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} &= \frac{1}{(1-z)}\left[\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1-z^n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1-z^{n+1}}\right] \\
&= \frac{1}{(1-z)}\left[\frac{1}{1-z} + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{1-z^n} - \frac{1}{1-z^{k+1}} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{1-z^{n+1}}\right] \\
&= \frac{1}{(1-z)}\left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{k+1}}\right] = (i)
\end{aligned}$$

Se $|z| < 1$, então, quando $k \to \infty$, tem-se: $(i) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. Se $|z| > 1$ então, quando $k \to \infty$, tem-se $\displaystyle\lim_{k\to\infty} (i) = \frac{1}{(1-z)^2}$.

(b) Seja

$$S_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{n-1}{z^{n+1}} = \frac{k-1}{z^{k+1}} + \sum_{n=2}^{k-1} \frac{n-1}{z^{n+1}} \qquad (ii)$$

Se $n - 1 = N$ então

$$\sum_{n=2}^{k-1} \frac{n-1}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^3} + \sum_{N=2}^{k-2} \frac{1}{z^{N+2}} + \frac{1}{z} S_k - \left[\frac{k-1}{z^{k+2}} + \frac{k-2}{z^{k+1}} \right] \qquad (iii)$$

De (ii) e (iii) temos:

$$S_k = \frac{1}{(1-z)} \left[\frac{(k-1)}{z^{k+1}} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{z^{n+1}} \right]$$

Agora, quando $k \to \infty$, temos $S = \lim_{k\to\infty} S_k = \dfrac{1}{z(1-z)^2}$.

3. Some as seguintes séries para $|z| < 1, z \in \mathbb{R}$

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{(d)} \sum (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

SOLUÇÃO. (a) sabemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{se} \quad |z| < 1 \qquad (i)$$

e a série converge uniformemente e absolutamente em $B_\rho(0)$ onde $0 < \rho < 1$. Portanto, integrando (i) de 0 a z, onde $z \in B_\rho(0)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx &= \int_0^z \frac{1}{1-x} dx \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z x^n dx &= -\ell n \mid 1-z \mid \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} &= -\ell n \mid 1-z \mid \end{aligned}$$

(b) Por (a) podemos derivar ambos lados de (i) e obter

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Logo temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

(c) Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2k} = \frac{1}{(1-z^2)}$ se $| z |< 1$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} dz &= \int_0^z \frac{1}{1-x^2} dz \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} &= \frac{1}{2} \ell n \left| \frac{1+z}{1-z} \right|\end{aligned}$$

(d) Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ para $| z |< 1$. Logo

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dz = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dz$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \ell n \mid 1+z \mid .$$

4. Se o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ são iguais a R_1 e R_2 respectivamente, prove que o raio de convergência R de $\sum a_n b_n z^n$ satisfaz $R \geq R_1 R_2$.

SOLUÇÃO. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que

$$| a_n |^{1/n} < \frac{1}{R_1} + \varepsilon, | b_n |^{1/n} < \frac{1}{R_2} + \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$.

Portanto:

$$| a_n b_n |^{1/n} < \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} + \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \varepsilon^2$$

para todo $n \geq n_0$. Consequentemente $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \mid a_n b_n \mid^{1/n} \leq \frac{1}{R_1 R_2}$ e daí $R \geq R_1 R_2$.

5. O raio de convergência R^1 de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n, b_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ satisfaz $R^1 \leq \frac{R_1}{R_2}$, onde R_1 é raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e R_2 é raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

SOLUÇÃO. É suficiente notar que $a_n = b_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ e pelo exercício (4) temos $R_1 \geq R_2 R^1$ i. é.

$$R^1 \leq \frac{R_1}{R_2}.$$

6. Se $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |^2 < +\infty, | f_n(z) | \leq | b_n |$ para todos $z \in B_R(0), n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n=1}^{\infty} | b_n |^2 < +\infty$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(z)$ converge uniforme e absolutamente em $B_R(0)$.

SOLUÇÃO

$$\sup_{z \in B_R(0)} \left| \sum_{k=n}^{m} a_k f_k(z) \right| \leq \sup_{z \in B_R(0)} \sum_{k=n}^{m} | a_k || f_k(z) |. \tag{i}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que para todos $n, m > N(\varepsilon)$ temos:

$$\sum_{k=n}^{m} | a_k |^2 < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=n}^{m} | b_k |^2 < \varepsilon.$$

Como, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m} | a_k || f_k(z) | &\leq \left(\sum_{k=n}^{m} | a_k |^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=n}^{m} | f_k(z) |^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{m} | a_k |^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=n}^{m} | b_k |^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

segue que

$$\sup_{z \in B_R(0)} \sum_{k=n}^{m} | a_k || f_k(z) | \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

para quaisquer $n, m > N(\varepsilon)$.

Logo

$$\sup_{z\in B_R(0)}\left|\sum_{k=n}^{m} a_k f_k(z)\right| < \varepsilon$$

para todos $n, m > N(\varepsilon)$. Portanto $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k f_k(z)$ converge uniforme e absolutamente em $B_R(0)$.

7. Se ρ é o raio de convergência de $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)$ converge, mostre que $\rho = +\infty$.

SOLUÇÃO. Sabemos que $\rho = \left[\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \mid a_k \mid^{1/k}\right]^{-1}$.

Como $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ então tem-se:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\mid a_k \mid} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{\mid f^{(k)}(0) \mid}{k!}}.$$

Pelo exercício (1) parte (a) sabemos que $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{k!}{k^k}} = \dfrac{1}{e}$. Consequentemente temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\mid a_k \mid} &= \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{\mid f^k(0) \mid}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{\mid f^k(0) \mid}{k^k}} \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{k^k}{k!}} \\
&= e\,\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{\mid f^{(k)}(0) \mid}{k^k}} = 0,
\end{aligned}$$

pois $\mid f^k(0) \mid \leq M$ para $k = 0, 1, 2, \cdots$ e algum $M > 0$.

8. Mostre que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n}$ converge em cada ponto $z = e^{i\theta} \neq -1$ da circunferência unitária.

SOLUÇÃO. Para isso usaremos o seguinte fato: se $w_k = a_k b_k$ com $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ e a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mid b_k - b_{k+1} \mid$ é convergente, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ também é convergente. Em nosso caso, fazemos $a_k = (-1)^{k-1}e^{ik\theta}$ e $b_k = \frac{1}{k}$. Portanto $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{ik\theta}\right| = \frac{|\ e^{i\theta} - (-1)^n e^{i(n+1)\theta}\ |}{|\ 1+e^{i\theta}\ |} \leq \frac{2}{|\ 1+e^{i\theta}\ |}$, $|\ b_{k+1} - b_k\ |= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |\ b_{k+1} - b_k\ |= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} < +\infty$. Logo é claro que $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{ik\theta}}{k}$ é convergente.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache o raio de convergência das seguintes séries:

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n^4+2n^3}{5n^4+23n^3}\right)^n z^n$

   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n(2n)!}(z-1)^n$

   (iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}z^n, k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$

   (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{c^n}, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ é $R (0 < R < +\infty)$.
   Ache os raios de convergência das séries:

   (i) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)c_n z^n$

   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$

   (iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}z^n$

   (iv) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)c_n z^n$.

3. A série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ tem raio de convergência 1. Mostre que sua soma representa uma função injetora em $B_{2/3}(0)$.

   Sugestão: para $z, w \in \mathbb{C}$, e $n \geq 2$, $z^n - w^n = (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1})$.

4. Seja P_n uma seqüência de polinômios complexos. Mostre que $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente em $\mathbb{C}$ se, e só se, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ e alguma seqüência convergente $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de números complexos $P_n = P_{n_0} + c_n$ para todo $n \geq n_0$.

5. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2+n}$ converge uniformemente em $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : | Im(z) | \leq \frac{1}{2} \right\}$ mas não é absolutamente convergente em qualquer ponto de S.

§ 3. FUNÇÕES ANALÍTICAS

3.1 DEFINIÇÃO: Seja f uma função com valores em $I\!K$ definida no aberto $A \subset I\!K$. Se $a \in A$, diz-se que f é *analítica no ponto* a se existir $\rho > 0$ e uma série de potências $\sum \alpha_k(z-a)^k$ tais que $B_\rho(a) \subset A$ e $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z-a)^k$ para $z \in B_\rho(a)$. Diz-se f é *analítica em* A se f for analítica em cada ponto de A.

3.2 EXEMPLOS:

(1) Por 2.7 é claro que a soma de uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z-a)^k$ é uma função analítica no círculo de convergência dessa série.

(2) Um polinômio de grau n, isto é: uma função

$$\begin{aligned} P : I\!K &\to I\!K \\ z &\mapsto P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \end{aligned}$$

é uma função analítica em $I\!K$.

(3) Vamos tomar $f : A \to I\!K$ analítica em A e $g : B \to I\!K$ analítica em B, com A e B abertos e $f(A) \subset B$. O fato de $g \circ f$ ser analítica em A é consequência de 2.5 aplicado localmente.

(4) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ é analítica em $B_1(0)$ pois $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ para todo $z \in B_1(0)$.

(5) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ é analítica em $I\!K \setminus \{0\}$. De fato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + (z-a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-a}{a}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} (z-a)^k \qquad (\forall\, z \in B_{|a|}(a), a \neq 0). \end{aligned}$$

(6) Se f é analítica em $A \subset I\!K$ então $\dfrac{1}{f}$ é analítica em $A \setminus f^{-1}(\{0\})$. Isto segue da composição de f com $\dfrac{1}{z}$ e por (3). Em particular se P é um polinômio de grau n, então $\dfrac{1}{P}$ é analítica em $I\!K \setminus P^{-1}(\{0\})$.

(7) Se f e g são analíticas em A então $f+g, f-g, f\cdot g$ são analíticas em A. Basta aplicar os resultados correspondentes de séries de potências.

(8) Se f e g são analíticas em A e $g \neq 0$ em A então $\frac{f}{g}$ é analítica em $A \setminus g^{-1}(\{0\})$. Isto por (7) e (6). Em particular funções racionais da forma $\frac{P}{Q}$, com P, Q polinômios, $Q \neq 0$, são analíticas em $I\!K \setminus Q^{-1}(\{0\})$.

(R) 3.3 DEFINIÇÃO: Se $f : A \to I\!K$ for dada, diz-se que f é *derivável no ponto* $a \in A$ se $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ existe. Neste caso $f'(a)$ é chamado *derivada de* f *em* a.

3.4 PROPOSIÇÃO: Se f é soma de uma série de potências $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$ em $B_r(a)$, $r>0$ então f é derivável em $B_r(a)$ ($f'(a)$ existe para $z \in B_r(a)$) e

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k(z-a)^{k-1} \qquad (\forall z \in B_r(a)).$$

DEMONSTRAÇÃO: Fixemos $z \in B_r(a)$ e seja $\delta > 0, \delta < r - \mid z-a \mid$. Para $\mid h \mid < \delta$ temos

$$f(z+h) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a+h)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(z-a)^{k-j}h^j. \tag{1}$$

(1) é absolutamente convergente pois:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mid\alpha_k\mid\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mid z-a\mid^{k-j}\mid h\mid^{j} = \sum_{k=0}^{\infty}\mid\alpha_k\mid(\mid z-a\mid + \mid h\mid)^k < +\infty,$$

uma vez que $\mid z-a \mid + \mid h \mid < \mid z-a \mid + \ r \ - \mid z-a \mid = r$ e o raio de convergência da série é maior ou igual a r. Logo podemos somar (1) da seguinte maneira

$$f(z+h) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k + \left[\sum_{k=0}^{\infty}k\alpha_k(z-a)^{k-1}\right]h + \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{2}\alpha_k(z-a)^{k-2}\right]h^2 + \cdots\cdots$$

e obter,

$$f(z+h) - f(z) = f_1(z)h + f_2(z)h^2 + \cdots\cdots$$

onde

$$f_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \binom{k}{n} (z-a)^{k-n}.$$

Então:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z) + f_2(z)h + \cdots\cdots$$

A série do lado direito pode ser pensada como uma série de potências de h em $B_\delta(0)$ convergindo aí absoluta e pontualmente pelos resultados anteriores. Logo sua função soma $g(h)$ é contínua em 0 e podemos escrever:

$$f_1(z) = g(0) = \lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z).$$

□

3.5 CONSEQUÊNCIA: Se $f(z)$ é a soma de uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ em $B_r(a), r > 0$, então as derivadas $f^{(n)}(z)$ para $n \in I\!N$ existem em $B_r(a)$ e são funções analíticas em $B_r(a)$.

Basta notar em 3.4 que $f'(z)$ é analítica em $B_r(a)$ e é a soma de uma série de potências ao redor de a em $B_r(a)$.

Note que $f^{(n)}(z)$ pode ser obtida formalmente derivando a série de potências n vezes termo a termo.

3.6 OBSERVAÇÃO: Nas condições de 3.5 podemos escrever

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k \qquad \forall\, z \in B_r(a).$$

Basta notar que: $f(a) = \alpha_0, f'(a) = \alpha_1, \cdots f^{(k)}(a) = k!\ \alpha_k, \cdots$. Portanto funções somas de séries de potências são representadas por suas *séries de Taylor* ao redor de a em $B_r(a)$.

Podemos então enunciar:

3.7 TEOREMA: Se f é analítica em A, então f é infinitamente derivável em A e é representada por sua série de Taylor ao redor de a numa bola $B_r(a) \subset A$.

Isto segue dos resultados anteriores aplicados a cada $a \in A$. $\square$

3.8 PROPOSIÇÃO: Seja $g(z)$ a soma da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ em $B_r(a), r > 0$. Tome a série de potências (que tem o mesmo raio de convergência que a primeira série) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1}(z-a)^{k+1}$. Ela define uma função analítica $f(z)$ em $B_r(a)$ tal que $f'(z) = g(z)$ para todo $z \in B_r(a)$.

3.9 OBSERVAÇÃO: Veja que ao contrário do Teorema 3.7, aqui não podemos ainda passar do resultado local para o global. Isto é, dada g analítica no aberto A, não sabemos ainda achar f analítica em A tal que $f'(z) = g(z)$ para todo $z \in A$. O que 3.8 fornece é o seguinte: para todo $a \in A$, existe $f_a(z)$ analítica em $B_r(a) \subset A$ tal que $f_a'(z) = g(z)$ para todo $z \in B_r(a)$.

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Se h analítica em um disco $B_r(0), r > 1$, satisfaz à relação

$$2h(2z) = h(z) + h\left(z + \frac{1}{2}\right). \tag{i}$$

com $z, z + \frac{1}{2}, 2z$ pertencendo a $B_r(0)$, então $h \equiv$ constante.

SOLUÇÃO. De (i) segue que $4h'(2z) = h'(z) + h'\left(z + \frac{1}{2}\right)$. Escolha $1 < t < r$, seja $M = \max_{z \in \overline{B}_t(0)} \mid h'(z) \mid$ e note que $\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ pertencem a $B_t(0)$ se $z \in B_t(0)$. Aplicamos a identidade a h' com $\frac{1}{2}z$ em lugar de z e obtemos

$$\begin{aligned} \mid 4h'(z) \mid &\leq \left|h'\left(\frac{1}{2}z\right)\right| + \left|h'\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right)\right| \leq M + M, \\ \max_{z \in \overline{B}_t(0)} \mid 4h'(z) \mid &= 4M \leq 2M \qquad \text{e} \qquad M = 0. \end{aligned}$$

Portanto $h' = 0$ e $h =$ constante (mostre isto !).

2. Seja $g : S_1(0) = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid = 1\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua e defina $h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta$ para $z \in B_1(0)$. Mostre que $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ para $z \in B_1(0)$

com $a_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta$ se $k \in I\!N_0$.

SOLUÇÃO. Sabemos que $\dfrac{1}{1 - ze^{-i\theta}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-ik\theta}$ para $| ze^{-i\theta} | = | z | < 1$. Portanto temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-ik\theta} g(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} g(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta\right] z^k. \end{aligned}$$

Daí segue que $h(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ para $| z | < 1$, com $a_k = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta$. Logo h é analítica em $B_1(0)$.

3. Se f é analítica em $B_R(0)$ e $f(re^{i\theta}) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta), 0 < r < R$, prove que os coeficientes $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ satifazem $a_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} iQ(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$.

SOLUÇÃO. Sendo $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, temos $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + i\beta_n)z^n$. Logo

$$\begin{aligned} \text{(i)} \qquad P(r,\theta) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \; cos\; n\theta - \beta_n \; sen\; n\theta)r^n. \\ \text{(ii)} \qquad Q(r,\theta) &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n \; cos\; n\theta - \alpha_n \; sen\; n\theta)r^n. \end{aligned}$$

Tomando $P(\rho,\theta)cos\; m\theta$ e integrando sobre $[0, 2\pi]$ para ρ fixo, $0 < \rho < R$, temos $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta)cos\; m\theta \; d\theta = \alpha_m\rho^m \int_0^{2\pi} cos^2 m\theta \; d\theta$. Desta relação tem-se $\alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta)d\theta$ e $\alpha_m = \dfrac{1}{\pi\rho^m}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta)cos\; m\theta \; d\theta$.

Tomando $P(\rho,\theta)sen\; m\theta$ temos $\beta_m = -\dfrac{1}{\pi\rho^m}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta)sen\; m\theta \; d\theta, m \geq 0$. Logo:

$$
\begin{aligned}
a_n = \alpha_n + i\beta_n &= \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta) cos\ m\theta\ d\theta - \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta) sen\ m\theta\ d\theta \\
&= \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta)[cos\ m\theta - i\ sen\ m\theta] d\theta \\
&= \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta) e^{-\rho m\theta} d\theta \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mesma operação para $Q(\rho,\theta)$ obtemos o resultado do exercício.

4. Se f é analítica em $B_1(0), f(0) = 1$ e $Re(f(z)) > 0$ em $B_1(0)$, prove que $\mid a_n \mid \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, com $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

SOLUÇÃO. Pelo exercício (3) sabemos $P(\rho,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\ cos\ n\theta - \beta_n\ sen\ n\theta)\rho^n$ e $a_m = \dfrac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta)e^{-im\theta}d\theta$. Desta última relação temos $\mid a_m \mid \leq \dfrac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} \mid P(\rho,\theta) \mid d\theta$. Como $P(\rho,\theta) > 0$ é claro que

$$
\begin{aligned}
\mid a_m \mid &\leq \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} [\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\ cos\ n\theta - \beta_n\ sen\ n\theta)\rho^n d\theta \\
&= \frac{2\pi\alpha_0}{\pi\rho^m} = \frac{2}{\rho^m}
\end{aligned}
$$

pois $\alpha_0 = 1$. Logo $\mid a_m \mid \leq \dfrac{2}{\rho^m}$ para todo $0 < \rho < r$. Quando ρ tende a 1 têm-se $\mid a_m \mid \leq 2$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

5. Sob as mesmas condições de (4) prove que

$$\frac{1 - \mid z \mid}{1 + \mid z \mid} \leq \mid f(z) \mid \leq \frac{1 + \mid z \mid}{1 - \mid z \mid}.$$

SOLUÇÃO. Temos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Como $a_0 = 1$ e $\mid a_n \mid \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, segue

$$| f(z) |\leq 1+2\sum_{n=1}^{\infty} | z |^n= 1+\frac{2 | z |}{1- | z |}=\frac{1+ | z |}{1- | z |}. \qquad (i)$$

Tomemos $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ analítica em $B_1(0)$. Além disso $g(0)=1$ e $Re(g(z))>0$. Por (i) temos $| g(z) |\leq \dfrac{1+ | z |}{1- | z |}$ e daí

$$\frac{1- | z |}{1+ | z |}\leq \frac{1}{| g(z) |}=| f(z) |. \qquad (ii)$$

De (i) e (ii) temos o resultado do exercício.

6. Seja $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ em $B_r(0)$ e $| a_1 |> \sum\limits_{n=2}^{\infty} n | a_n | r^{n-1}$.

   Mostre que f é injetora em $B_r(0)$.

   SOLUÇÃO. Se $f(z)=a_0+a_1 z$, com $a_1\neq 0$, ela é injetora e satisfaz às condições do problema. Para o caso geral de $f(z)$ vamos supor $f(z_1)=f(z_2)$ e $z_1\neq z_2$. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_1^n-z_2^n)=a_1(z_1-z_2)+a_2(z_1^2-z_2^2)+a_3(z_1^3-z_2^3)+\cdots\cdots=0$$

$$(z_1-z_2)[a_1+a_2(z_1+z_2)+a_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+\cdots\cdots]=0.$$

   Como $z_1\neq z_2$ temos $a_1=-[a_2(z_1+z_2)+a_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+\cdots\cdots]$. Então $| a_1 |\leq 2 | a_2 | r+3 | a_3 | r^2+\cdots=\sum\limits_{n=2}^{\infty} n r^{n-1} | a_n |$ e isso contradiz a hipótese. Logo $z_1=z_2$.

7. Dado $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analítica em $B_R(0)$ sejam

$$M_1(r;f)=\sum_{n=0}^{\infty} | a_n | r^n \qquad \text{e} \qquad M(r;f)=\sup_{|z|=r} | f(z) | .$$

   (a) Mostre que, para $0\leq r<r+\delta<R, M(r;f)\leq M_1(r;f)\leq \dfrac{r+\delta}{\delta}M(r+\delta;f)$.

   (b) Sendo $[M_2(r;f)]^2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 d\theta$, mostre que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 r^{2n}=[M_2(r;f)]^2$, para $0\leq r<R$.

(c) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que

$$\frac{\delta(2r+\delta)}{r+\delta}M_1(r;f) \leq M_2(r+\delta;f) \leq M(r,\delta;f).$$

(d) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}[M_1(r;f^n)]^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}[M_2(r;f^n)]^{1/n} = M(r;f)$.
Para isto use (a), (c), $M(r;f^n) = [M(r;f)]^n$ e a continuidade de $M(r;f)$ como função de r.

SOLUÇÃO.

(a) É claro que $M(r;f) \leq M_1(r;f)$. Basta mostrar a desigualdade oposta. Como

$$f(r+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+\delta)^n \text{ e } \mid a_n \mid \leq \sup_{|z|=r+\delta} \frac{\mid f(z) \mid}{(r+\delta)^n} = \frac{M(r+\delta,f)}{(r+\delta)^n}$$

(justifique), temos $\quad r^n \mid a_n \mid \leq \dfrac{r^n}{(r+\delta)^n}M(r+\delta;f)$. Logo

$$M_1(r;f) = \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid r^n \leq M(r+\delta;f)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n = \left(\frac{r+\delta}{\delta}\right)M(r+\delta;f).$$

(b) Se $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, para $z = re^{i\theta}, 0 \leq r < R$ temos $f_n(re^{i\theta}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\theta}$.

Como $\qquad \overline{f_n(re^{i\theta})} = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a}_k r^k e^{-ik\theta}$ obtemos a seguinte relação:

$$\int_0^{2\pi} \mid f_n(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{n} \mid a_n \mid^2 r^{2n} \qquad (i)$$

para $0 < r < R$. A seqüência $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ é formada por funções contínuas e é uniformemente convergente na circunferência $\mid z \mid = \rho < R$. Portanto é possível passar ao limite dentro da integral. De (i) temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \mid f_n(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \mid f_n(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 r^{2n}.
\end{aligned}$$

(c) $M_1(r;f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid r^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid (r+\delta)^n r^n (r+\delta)^{-n}$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$
\begin{aligned}
M_1(r;f) &\leq \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(\mid a_n \mid (r+\delta)^n)^2\Big]^{1/2} \cdot \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(r^n(r+\delta)^{-n})^2\Big]^{1/2} \\
&\leq M_2(r+\delta;f)\Big[\frac{1}{1-(\frac{r}{r+\delta})^2}\Big]^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\sqrt{\delta(2r+\delta)}}{r+\delta}M_1(r;f) \leq M_2(r+\delta;f). \qquad (i)
$$

Como $[M_2(r+\delta;f)]^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mid f(r+\delta)e^{i\theta} \mid^2 d\theta$, é evidente que

$$
M_2(r+\delta;f) \leq M(r+\delta;f). \qquad (ii)
$$

De (i) e (ii) temos o resultado pedido.

(d) É claro que $M(r;f^n) = M(r;f)^n$.

De (c) temos:

$$
\lim_{n\to\infty}[M_2(r;f^n)]^{1/n} \leq M(r;f). \qquad (i)
$$

De (a) temos:

$$
M(r;f) \leq \lim_{n\to\infty}[M_1(r;f^n)]^{1/n} \leq M(r+\delta;f). \qquad (ii)
$$

Além disso $M(r;f)$ é contínua como função de r. Quando $\delta \to 0$ em (ii) temos:

$$
\lim_{n\to\infty}[M_1(r;f^n)]^{1/n} = M(r;f).
$$

Para $r = r^* - \delta, \delta > 0$ temos: $0 < r^* - \delta < r^* < R$, e vale a relação

$$
\frac{\sqrt{\delta(2r^*-\delta)+\delta)}}{r^*-\delta+\delta}M_1(r^*-\delta;f^n) \leq M_2(r^*;f^n),
$$

$$
\Big[\frac{\delta(2r^*-\delta)}{r^{*2}}\Big]^{1/2n}(M_1(r^*-\delta;f^n))^{1/2} \leq (M_2(r^*;f^n))^{1/2}.
$$

Quando $n \to \infty$ temos:

$$M(r^* - \delta; f^n) \leq \lim_{n\to\infty} (M_2(r^*; f^n))^{1/n}. \qquad (iii)$$

Pela continuidade de $M(r; f)$ como função de r, fazendo $\delta \to 0$ em (iii) temos

$$M(r^*; f^n) \leq \lim_{n\to\infty} (M_2(r^*; f^n))^{1/n}. \qquad (iv)$$

De (iv) e (i) obtemos o resultado.

8. Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ em $B_s(c)$ e existe $m \in I\!N_0$ e $r \in I\!R$ com $0 < r < s$ e $| a_m | r^m = M(r)$, então necessariamente $f(z) = a_m(z-c)^m$.

SOLUÇÃO. Sabemos pelo exercício (7), parte (b), a relação

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(c + re^{i\theta}) |^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 r^{2n}.$$

Daí $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 r^{2n} \leq [M(r)]^2 = | a_m |^2 r^{2m}$. Portanto teremos $\sum_{\substack{n=0 \\ n\neq m}}^{\infty} | a_n |^2 r^{2n} \leq 0$ que implica $a_n = 0 \;\; \forall\, n \neq m$. Logo $f(z) = a_m(z-c)^m$.

9. Mostre que se f é analítica no ponto z, não se pode ter $| f^{(n)}(z) | > n!n^n$ para todo $n \in I\!N$.

SOLUÇÃO. Como f é analítica em z temos $a_n = \dfrac{f^n(z)}{n!}$ e $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z)^n$ para w numa vizinhança de z. Além disso $\overline{\lim_{n\to\infty}} \, | a_n |^{1/n} < +\infty$. Vamos supor que a relação indicada fosse verdadeira. Então teríamos $| n!a_n | > n!n^n$ e $| a_n | > n^n$ para todo $n \in I\!N$. Logo $\overline{\lim_{n\to\infty}} \, | a_n |^{1/n} = +\infty$, o que contradiria a analiticidade de f no ponto z.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja G um aberto conexo e defina $G^* = \{z : \overline{z} \in G\}$. Se $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica prove que $f^* : G^* \to G$, definida por $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, é analítica.

2. Seja f analítica em $B_R(0)$ e $S_n(z) = f(0) + zf'(0) + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} f^{(n)}(0)$.
Mostre que $S_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{S_r(0)} f(\varepsilon) \frac{(\varepsilon^{n+1} - z^{n+1})}{(\varepsilon - z)\varepsilon^{n+1}} d\varepsilon$, para $| z | < r < R$.

3. Se f é analítica em $B_r(0)$ e R_n é o resto da série de Taylor de f na origem, i. e: $R_n(z) = f(z) - f(0) - zf'(0) - \cdots - \dfrac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)$, mostre que $R_n(z) = \dfrac{z^{n+1}}{2\pi i}\displaystyle\int_{S_r(0)} \dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}(\varepsilon - z)}d\varepsilon$ para $|z| < r < R$.

4. A função $f(z) = u(z,y) + iv(z,y)$ é analítica no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ e $f(z_0) = c_0$. Mostre que $f(z) = 2u\left(\dfrac{z+\overline{z}_0}{2}, \dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right) - \overline{c}_0$.

5. Sob as condições do problema (4), mostre que $f(z) = 2iv\left(\dfrac{z+z_0}{2}, \dfrac{z-\overline{z}_0}{2i}\right) + \overline{c}_0$.

§ 4. CONJUNTOS DETERMINANTES DE ANALITICIDADE

O seguinte resultado, justifica a introdução dos chamados conjuntos determinantes de analiticidade. (Vide Definição 4.2).

4.1 TEOREMA: Se f e g são analíticas num aberto conexo A de $\mathbb{K}$ e $B \subset A$ tem pelo menos um ponto de acumulação pertencente a A, então $f = g$ em B implica $f = g$ em A.

DEMONSTRAÇÃO: Seja C o interior do conjunto

$$D = \{z \in A; h(z) = f(z) - g(z) = 0\}.$$

Estamos supondo $f = g$ em B, logo $D \supset B \neq \phi$. Seja a um ponto de acumulação de B. Pela continuidade de h em a, temos que $0 = h(a) = \lim\limits_{n\to\infty} h(b_n), b_n \in B$ e assim $a \in D$. Sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$ e

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k \qquad (\forall\, z \in B_r(a))$$

pois h é analítica em a. Note que $\alpha_0 = h(a) = 0$. Para todo $\rho > 0, B_\rho(a) \cap (B \setminus \{a\}) \neq \phi$. Logo para cada $\rho > 0$ existe $b_\rho \in B_\rho(a) \cap B, b_\rho \neq a$ com $h(b_\rho) = 0$. Por 1.16 devemos ter $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Logo $h(z) = 0$ para todo $z \in B_r(a), a \in C$. Assim $C \neq \phi$.

Vamos mostrar que a aderência do C em A é C. Isto implicará que $C = A$ pois será aberto e fechado em A conexo. Daí o resultado do teorema estará provado. Seja b na aderência de $C, b \in A$. Com o mesmo raciocínio que foi feito acima, com B substituído por C e a por b, mostra-se que existe $r > 0$ tal que $B_r(b) \subset A$ e $h(z) = 0$ para todo $z \in B_r(b)$, ou seja, $b \in C$. $\square$

4.2 DEFINIÇÃO: Um subconjunto B de um aberto conexo A de $\mathbb{K}$ é dito ser *determinante de analiticidade* em A se funções analíticas em A, iguais em B, são iguais em A.

De 4.1 segue $B \subset A$, B com ponto de acumulação pertencente a A, é determinante de analiticidade em A.

Vamos reformular 4.1 do seguinte modo.

4.3 TEOREMA: Se h é uma função analítica num aberto conexo $A \subset I\!\!K$, $h \neq 0$ em A. Então $h^{-1}(\{0\}) = \{z \in A; h(z) = 0\}$ não tem ponto de acumulação pertencente a A.

Notemos que:

(i) 4.1 $\Rightarrow$ 4.3: Se $h^{-1}(\{0\})$ tivesse ponto de acumulação em A teríamos $h = 0$ em A. Mas $h \neq 0$ em A.

(ii) 4.3 $\Rightarrow$ 4.1: Seja $h = f - g, f \neq g$, com f e g analíticas em A. Logo $h \neq 0$ em A e $B \subset h^{-1}(\{0\}) = \{z \in A; h(z) = 0\}$ e este não tem ponto de acumulação em A. Assim B não tem ponto de acumulação em A.

O Teorema 4.3 é também conhecido pelo nome de *Princípio dos Zeros Isolados para Funções Analíticas.* Note que se a é tal que $h(a) = 0$ e $h \neq 0$, então a não pode ser ponto de acumulação de $h^{-1}(\{0\})$ e portanto existe $r > 0$ tal que $(B_r(a) \setminus \{0\}) \cap h^{-1}(\{0\}) = \phi$. Isto é: $h(z) \neq 0$ se $|z - a| < r$ e $z \neq a$.

4.4 NOVOS EXEMPLOS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS

(1) Sabemos que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (\forall x \in I\!\!R).$$

Logo e^x é analítica em $I\!\!R$. Consideremos a série de potências em $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

que tem raio de convergência $+\infty$ pois $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$. Então essa série define uma função analítica em $\mathbb{C}$ que coincide com a função exponencial em $I\!\!R$. Vamos denotar a soma dessa série por e^z.

(a) Vale a propriedade $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Fixamos $w \in \mathbb{C}$. Vamos tomar as funções $g(z) = e^{z+w}$ e $h(z) = e^z \cdot e^w$ para $z \in \mathbb{C}$ que são analíticas em $\mathbb{C}$. Se $w \in I\!\!R$ temos $g(x) = e^{x+w} = e^x \cdot e^w = h(x)$ para $x \in I\!\!R$. Por 4.1 segue que $g(z) = h(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ se $z \in \mathbb{C}$ e $w \in I\!\!R$ e, em particular, $e^{a+ib} = e^{ib+a} = e^{ib} \cdot e^a$ para todo $a, b \in I\!\!R$. Fixado $w = ib$ com $b \in I\!\!R$, temos $g(x) = e^{x+ib} = e^x \cdot e^{ib} = h(x)$ para todo $x \in I\!\!R$. Logo $g(z) = h(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, $e^{z+ib} = e^z \cdot e^{ib}$ para todos $z \in \mathbb{C}$ e $b \in I\!\!R$. Se $w = \mu + iv$ e $z = x + iy$ temos $e^{z+w} = e^{\mu+x+i(v+y)} = e^x \cdot e^{iy} \cdot e^u \cdot e^{iv} = e^z \cdot e^w$.

(b) $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ para todo $x \in I\!R$.

$$\begin{aligned}\overline{e^{ix}} &= \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\overline{ix})^k}{k!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-ix)^k}{k!} = e^{-ix}\end{aligned}$$

(c) $\mid e^{ix} \mid = 1$ para todo $x \in I\!R$.
Isto segue de $\mid e^{ix} \mid^2 = e^{ix}\cdot\overline{e^{ix}} = e^{ix}\cdot e^{-ix} = e^0 = 1$

(d) $e^{ix} = cos\ x + i\ sen\ x$ para $x \in I\!R$.

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = cos\ x + i\ sen\ x\end{aligned}$$

(e) $z = a + ib \Rightarrow \mid e^z \mid = e^a$.
De fato: $e^z = e^{a+ib} = e^a\cdot e^{ib} = e^a(cos\ b + i\ sen\ b)$ e $\mid e^z \mid = [(e^a\ cos\ b)^2 + (e^a\ sen\ b)^2]^{1/2} = e^a$.

(f) A derivada de e^z é e^z pois

$$\frac{d}{dz}e^z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{z^\ell}{\ell!} = e^z$$

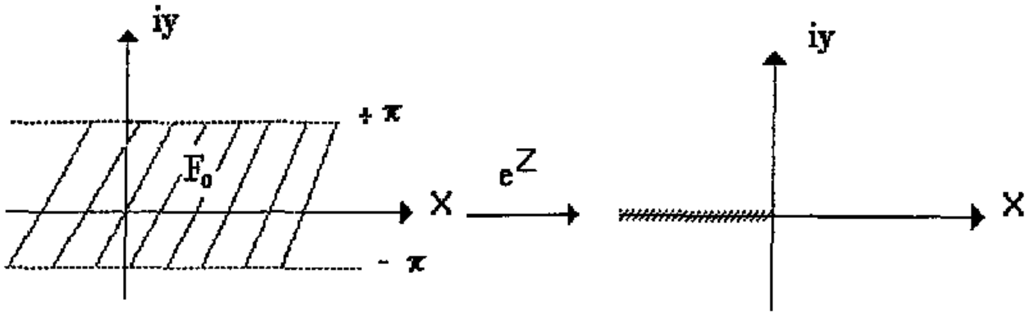
(g) e^z não é injetora em $\mathbb{C}$.
Notemos que

$$\begin{aligned}e^{a+ib} &= e^a(cos\ b + i\ sen\ b)\\ &= e^a(cos(b+2k\pi) + i\ sen(b+2k\pi))\\ &= e^{a+i(b+2k\pi)} \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

(2) Definição da função $\ell n\ z$.

Se $k \in \mathbb{Z}$, seja $F_k = \{\alpha + i\beta; \alpha \in I\!R, \beta \in](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[\}$. Notemos que e^z é injetora sobre cada F_k. Se $z \in F_0$ temos

$$e^z = e^a(cos\ b + i\ sen b) \text{ onde } a \in I\!R \text{ e } b \in]-\pi, \pi[.$$



Note que $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0, z = \mid z \mid e^{i\theta}; \theta \in]-\pi, \pi[\}$ é a imagem de F_0 por e^z. A função *Argumento Principal de z* está definida por

$$\begin{aligned} arg : \mathbb{C}^* &\to]-\pi, \pi[\\ z &\mapsto arg(z) = \theta \end{aligned}$$

onde θ é o único elemento de $]-\pi, \pi[$ tal que $z = \mid z \mid (cos\ \theta + i\ sen\theta)$. Definimos $\ell n\ z$ como a função inversa de e^z restrita a F_0. Assim ℓn está definida em C^* e toma valores em F_0. Podemos escrever $\ell n\ z$ em função de z para $z \in \mathbb{C}^*$ na forma $\ell n\ z = \ell n \mid z \mid + i\ arg\ z$. Uma consequência dessa representação é que: $\ell n(wz) - \ell n\ w - \ell n\ z$ pode ser zero, $-2\pi i$ ou $2\pi i$. O leitor pode provar que se

$$z_0 \in \mathbb{C}^*, z \in \mathbb{C}^* \text{ e } \left|\frac{z}{z_0} - 1\right| < \frac{\rho}{\mid z_0 \mid}, \text{ com } 0 < \rho < \mid z_0 \mid,$$

então $B_\rho(z_0) \subset \mathbb{C}^*$ e $\ell n\ z = \ell n\left(z_0 \cdot \dfrac{z}{z_0}\right) = \ell n\ z_0 + \ell n \dfrac{z}{z_0}$.

(3) ℓn é uma função analítica em $\mathbb{C}^*$.

Primeiro vamos mostrar que $\ell n\ x$ pensada como aplicação de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$ é analítica em $]0, 2[$. Consideremos

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k.$$

Então temos g é analítica em $B_1(1) =]0, 2[$ pois o raio de convergência dessa série é igual a 1. Logo, para $x \in]0, 2[$, temos

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell(x-1)^\ell = \frac{1}{x}.$$

Pelo cálculo diferencial sabemos então que $g(x) = \ell n\ x$ para $x \in], 0, 2[$. Agora, considerando a série de potências:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(z-1)^k$$

cujo círculo de convergência é $B_1(1) \subset \mathbb{C}$, vemos que $f(x) = g(x)$ para $x \in]0, 2[$. Como $e^{f(z)}$ e z coincidem para $z \in]0, 2[$ e são analíticas em $B_1(1) \subset \mathbb{C}$, segue que são iguais em $B_1(1)$ por 4.1. Pela unicidade de função inversa de e^z obtemos: $f(z) = \ell n\ z = \ell n \mid z \mid + i\ arg(z)$ se $z \in B_1(1)$. Logo $\ell n\ z$ é analítica em $B_1(1)$. Dado $z_0 \in \mathbb{C}^*$ seja $\rho > 0$ tal que $\rho < \mid z_0 \mid$ e $B_\rho(z_0) \subset \mathbb{C}^*$. Então, como vimos em (2),

$$\ell n\ z = \ell n\left(z_0 \frac{z}{z_0}\right) = \ell n\ z_0 + \ell n \frac{z}{z_0}$$

para $\left|\frac{z}{z_0} - 1\right| < \frac{\rho}{\mid z_0 \mid}$ (que é equivalente a $\mid z - z_0 \mid < \rho$). Assim basta mostrar que $\ell n \frac{z}{z_0}$ é função analítica para $z \in B_\rho(z_0)$. Como vimos acima

$$\begin{aligned} \ell n\left(\frac{z}{z_0}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{z}{z_0} - 1\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k z_0^k}(z - z_0)^k \end{aligned}$$

para $\mid z - z_0 \mid < \rho$, uma vez que $0 < \rho < \mid z_0 \mid$. □

(4) *Os Diversos Ramos do Logaritmo*

A restrição de e^z a cada F_k é injetora sobre F_k e tem imagem $\mathbb{C}^*$. A função inversa correspondente será denotada por $\ell n_{(k)}$ e chamada *ramo k do logaritmo (natural)*. Podemos ainda considerar a função chamada *k-argumento* dada por:

$$arg_{(k)} : \mathbb{C}^* \to](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$$

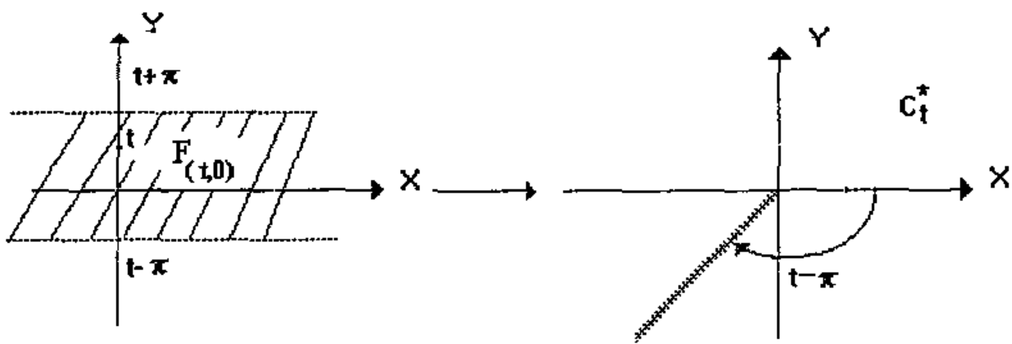
que a cada z associa o único $\theta \in](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ tal que $z = \mid z \mid e^{i\theta} = \mid z \mid (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$. Como no caso $k = 0$, que fizemos em (2) e (3), temos $\ell n_{(k)}(z) = \ell n \mid z \mid + i\ arg_{(k)}(z)$ definindo uma função analítica em $\mathbb{C}^*$.

Fixado $t \in]0, 2\pi[$, podemos considerar os conjuntos:

$$F_{(t,k)} = \{\alpha + i\beta; \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \in]t + (2k-1)\pi, t + (2k+1)\pi[\}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. A função e^z restrita a $F_{(t,k)}$ é injetora e tem imagem igual a

$$\mathbb{C}_t^* = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0, z = | z | e^{i\theta}, \theta \in]t-\pi, t+\pi[\}$$



O *ramo* (t,k) *do logaritmo* $\ell n_{(t,k)}(z)$ é definido como a função inversa de e^z restrito a $F(t,k)$. Podemos também considerar a função $(t,k) -$ *argumento*

$$arg_{(t,k)} : \mathbb{C}_t^* \mapsto]t+(2k-1)\pi, t+(2k+1)\pi[$$

que a cada z associa o único $\theta \in]t+(2k-1)\pi, t+(2k+1)\pi[$ tal que $z = | z | e^{i\theta} = | z | (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$. Neste caso, como nos anteriores, podemos escrever $\ell n_{(t,k)}(z) = \ell n \mid z \mid + arg_{(t,k)}(z)$ e obter uma função analítica em $\mathbb{C}_t^*$.

(5) *Funções Trigonométricas em* $\mathbb{C}$

Podemos considerar as funções analíticas em $\mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k z^{2k} \\ h(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k z^{2k+1} \end{aligned}$$

que coincidem respectivamente com as funções $cos\ x$ e $sen\ x$ para $z = x \in \mathbb{R}$. Por isso é natural escrever para $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = cos\ z$ e $sen\ z = h(z)$. As seguintes propriedades dessas funções seguem facilmente das definições acima

$$\begin{aligned} &(a)\ cos'\ z = -sen\ z \text{ e } sen'\ z = cos\ z && (\forall z \in \mathbb{C}) \\ &(b)\ cos\ z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \text{ e } sen\ z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} && (\forall z \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Obviamente as outras funções trigonométricas podem ser definidas a partir destas na maneira usual. O leitor é convidado a determinar os subconjuntos de $\mathbb{C}$ onde tais funções são analíticas.

4.5 OBSERVAÇÃO:

(1) Quando for fazer operações com logarítmos, o leitor deve levar em conta os seus domínios de definição. Convidamos o leitor a descobrir o erro da afirmação: $\ell n(-z) = \ell n z$ para todo $z \neq 0$. Para isso considere a seguinte cadeia de igualdades:

$$\text{(i) } \ell n(-z)^2 = \ell n z^2 \qquad \text{(ii) } \ell n(-z) + \ell n(-z) = \ell n z + \ell n z$$
$$\text{(iii) } 2\ell n(-z) = 2\ell n z \qquad \text{(iv) } \ell n(-z) = \ell n z.$$

(2) A partir de $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ e $cos\ z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $sen\ z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, são deduzidas as propriedades fundamentais das funções trigonométricas sem recorrer à noção geométrica de ângulo.

Existem outras colocações não geométricas para estas funções. Os seguintes artigos estão relacionados com estes temas: o de W.F. Eberlein (Amer. Math. Monthly, vol. 74, 1967, páginas 1223–1225) e de G.B. Robinson (Math. Mag., vol. 41, 1968, páginas 66–70).

§ 5. TEOREMA DO MÓDULO MÁXIMO

A partir deste paragráfo vamos trabalhar com funções *complexas* definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}$.

5.1 TEOREMA: Seja $f(z)$ a função soma de uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$ em seu círculo de convergência $B_r(a), r > 0$. Se para algum $\rho \in]0, r[$ tem-se $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in B_\rho(a)$, então $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e f é constante em $B_r(a)$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $f(a) = 0$, f se anula em $B_\rho(a)$. O princípio dos zeros isolados implica que f se anula em $B_r(a)$.

Seja $f(a) = \alpha_0 \neq 0$. Se para algum $n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq 0$, podemos determinar o menor $n \geq 1$ com essa propriedade e indicamos esse número natural por m. Temos

$$f(z) = \alpha_0 \left[1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_0}(z-a)^m + (z-a)^m \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_0}(z-a)^{k-m} \right]$$

para todo $z \in B_r(a)$. Notemos que

$$g(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_0}(z-a)^{k-m}$$

define g analítica em $B_r(a)$ com $g(a) = 0$. Pela continuidade de g em a existe $\delta \in]0, \rho[$ tal que: $|g(z)| \leq \frac{|\beta_m|}{2}$ para todo $z \in \overline{B}_\delta(a)$ onde $\beta_m = \frac{\alpha_m}{\alpha_0} \neq 0$. Logo $\beta_m = |\beta_m| e^{i\theta_m}$ para algum $\theta_m \in \mathbb{R}$. Seja $z_0 \in \overline{B}_\delta(a)$ tal que $z_0 - a = \delta e^{-i\frac{\theta_m}{m}}$. Então podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \alpha_0[1 + \beta_m \delta^m e^{-i\theta_m} + \delta^m e^{-i\theta_m} g(z_0)] \\ &= \alpha_0[1 + \delta^m |\beta_m| + \delta^m e^{-i\theta_m} g(z_0)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\geq |\alpha_0| [(1 + \delta^m |\beta_m|) - \delta^m |g(z_0)|] \\ &\geq |\alpha_0| \left[1 + \delta^m |\beta_m| - \delta^m \frac{|\beta_m|}{2} \right] \\ &\geq |\alpha_0| \left[1 + \frac{\delta^m}{2} |\beta_m| \right] > |\alpha_0| \end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese. Portanto $\alpha_n = 0$ para todo $n \geq 1$. □

5.2 EXEMPLO: O resultado 5.1 não vale para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \\ &\text{e} \\ h(x) &\leq 1 = h(0) \qquad\qquad (\forall x \in]-1,1[). \end{aligned}$$

5.3 TEOREMA DO MÓDULO MÁXIMO: Seja $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica em A e não constante em qualquer componente conexa de A. Dado $K \subset A, K$ compacto, o conjunto dos pontos $z \in K$ tais que $\sup\limits_{t \in K} | f(t) |=| f(z) |$ é um subconjunto da fronteira de K.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor que exista $z_0 \in K$ tal que $B_\delta(z_0) \subset K$ para algum $\delta > 0$ e além disso $| f(z_0) |= \sup\limits_{t\in K} | f(t) |$. Tomando δ diminuido se necessário, podemos achar uma série de potências $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-z_0)^k$ tal que $f(z)$ é a soma dessa série em $B_\delta(z_0)$. Como $| f(z) |\leq| f(z_0) |$ para todo $z \in B_\delta(z_0)$, segue de 5.1 que $\alpha_k = 0$ para $k \geq 1$. Logo f é constante em $B_\delta(z_0)$ e, pelo Teorema 4.1, temos que f é constante na componente conexa de A que contém $B_\delta(z_0)$, o que contradiz a hipótese. □

5.4 LEMA DE SCHWARZ I: Seja f uma função analítica em $B_R(0) \subset \mathbb{C}$ com $f(0) = 0, | f(z) |\leq M$ para todo $z \in B_R(0)$. Então $| f(z) |\leq \dfrac{M}{R} | z |$ para cada $z \in B_R(0)$. A igualdade ocorre em algum ponto da bola diferente de zero somente quando $f(z)$ for da forma $f(z) = cz$ com $c \in \mathbb{C}$ e $| c |= \dfrac{M}{R}$.

DEMONSTRAÇÃO: Definamos:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{se} \quad z \neq 0, z \in B_R(0) \\ f'(0) & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

e notemos que g é analítica em $B_R(0) \setminus \{0\}$. Como f é analítica em $B_R(0)$ temos: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$, para todo $z \in B_R(0)$, algum $r \in]0, R[$. Desde que $\alpha_0 = f(0) = 0$, temos:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^{k-1} \quad \text{para} \quad z \neq 0, z \in B_R(0).$$

Uma vez que $\alpha_1 = f'(0)$, obtemos g analítica também em zero. Por 5.3 segue que:

$$\sup_{|z|\le\delta} | g(z) | \le \frac{M}{\delta}$$

para cada $\delta \in]0, R[$. Note que se $0 < \delta < \delta_1 < R$ então:

$$\sup_{|z|\le\delta} | g(z) | \le \sup_{|z|\le\delta_1} | g(z) | \le \frac{M}{\delta_1}.$$

Fazendo δ_1 tender a R obtemos

$$\sup_{|z|\le\delta} | g(z) | \le \frac{M}{R}$$

e daí

$$| g(z) | = \frac{| f(z) |}{| z |} \le \frac{M}{R}$$

para cada $z \neq 0, z \in B_R(0)$. Isto implica que

$$| f(z) | \le \frac{M}{R} | z | \qquad (\forall\ z \in B_R(0)).$$

Se

$$\frac{| f(z) |}{| z |} = | g(z) | = \frac{M}{R} \text{ para algum } z \in B_R(0), z \neq 0,$$

por 5.3 segue que g é constante em $B_R(0)$ e daí $f(z) = cz$ para $z \in B_R(0)$, com $| c | = \dfrac{M}{R}$.
□

5.5 LEMA DE SCHWARZ II: Seja f uma função analítica em $B_R(0)$ com $R > 0, z_0 \in B_R(0), f(z_0) = w_0 \in B_M(0)$ e $| f(z) | \le M$ para todo $z \in B_R(0)$. Então

$$\left|\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \overline{w}_0 \cdot f(z)}\right| \le \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z}\right|,$$

para todo $z \in B_R(0)$.

Para demonstrar 5.5 usaremos o seguinte fato: se $R > 0$ e $z_0 \in B_R(0), T(z) = \dfrac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 \cdot z}$ é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{R^2}{\overline{z}_0}\right\}$, se $z_0 \neq 0$ (em $\mathbb{C}$, se $z_0 = 0$) tal que

$T(z_0) = 0$. Além disso T é injetora e $| T(z) | \leq 1$ se e só se $| z | < R$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$T(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 \cdot z}.$$

Usamos o fato acima para achar

$$S(w) = \frac{M(w - w_0)}{M^2 - \overline{w}_0 \cdot w}$$

tal que $S(w_0) = 0$ e $| S(w) | \leq 1 \Leftrightarrow | w | \leq M$. Então $S \circ f \circ T^{-1}$ satisfaz as condições do Lema de *Schwarz I* e obtemos:

$$| S \circ f \circ T^{-1}(\xi) | \leq | \xi | \quad (\forall \, | \xi | \leq 1)$$

Mas isto equivale a:

$$| (S \circ f)(z) | \leq | T(z) | \quad (\forall \, | z | \leq R)$$

que é a nossa tese. □

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Se f é analítica e não constante num domínio D, mostre que $| f |$ não pode ter um mínimo local em $z_0 \in D$ (exceto se $f(z_0) = 0$).

   SOLUÇÃO. Se $f(z_0) \neq 0$, existe $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B_r(z_0)$. Seja $g(z) = \frac{1}{f(z)}, z \in B_r(z_0)$, que é analítica em $B_r(z_0)$ e $| g(z_0) | = \frac{1}{| f(z_0) |} \geq \frac{1}{| f(z) |}$ para todo $z \in B_r(z_0)$. Logo como z_0 é um ponto de máximo para a função $g(z)$ e $z_0 \in B_r(z_0)$, então $g(z) =$ constante em $B_r(z_0)$. Pelo princípio de unicidade $f(z) =$ constante em D.

2. Seja $f \neq$ constante, contínua em $\overline{D}$ limitado e analítica no aberto conexo D. Se $| f |$ é constante na fronteira de D, então f tem ao menos um zero no interior de D.

   SOLUÇÃO. Se não valer a afirmação, o módulo $| f |$ não pode ter máximo nem mínimo nos pontos interiores de $\overline{D}$. Sendo f uma função contínua no domínio $\overline{D}$, o módulo $| f |$ atinge seu valor máximo e mínimo nos pontos da fronteira de $\overline{D}$. Mas nestes pontos f é constante. Portanto $| f | =$ constante no domínio $\overline{D}$, o que é impossível pois $f \neq$ constante.

3. Seja f analítica e não constante num domínio limitado D, com $\mid f \mid$ tendo uma extensão contínua em $\overline{D}$. Se $f(z) \neq 0$ em D e $m = \inf\limits_{z \in f_r D} \mid f(z) \mid, M = \sup\limits_{z \in f_r D} \mid f(z) \mid$, mostre que $m <\mid f(z) \mid< M$ em D.

SOLUÇÃO. Sendo $\mid f \mid$ contínua em $\overline{D}$, ele tem que atingir seu máximo e seu mínimo na fronteira de D. Portanto $m <\mid f(z) \mid< M$ para todo $z \in D$. (Vide 2).

4. Se $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é analítica em $B_1(0)$ e $\mid f(z) \mid< M$ em $B_1(0)$, prove que $M \mid a_1 \mid\leq M^2 - \mid a_0 \mid^2$.

SOLUÇÃO. É claro que $\dfrac{\mid f(z) \mid}{M} < 1$. Definamos a função g por $g(z) = M\left[\dfrac{f(z) - f(0)}{M^2 - f(z)\overline{f(0)}}\right]$. Temos que g é analítica em $B_1(0)$ e satisfaz $\mid g(z) \mid\leq 1 \quad \forall z \in B_1(0)$ e $g(0) = 0$. Então, pelo lema de Schwarz, $\mid g(z) \mid\leq\mid z \mid \quad \forall z \in B_1(0)$. Daí obtemos $M\left|\dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}\right| \leq\mid M^2 - f(z)\overline{f(0)} \mid$. Quando $z \to 0$ tem-se $M \mid f'(0) \mid\leq M^2 - \mid a_0 \mid^2$ i.e. $M \mid a_1 \mid\leq M^2 - \mid a_0 \mid^2$.

5. Seja w analítica em $B_1(0)$, satisfazendo $\mid w(z) \mid< 1 \quad \forall z \in B_1(0)$ e $w(0) = \alpha > 0$. Prove que o conjunto de todos os valores tomados por w em $\overline{B}_r(0)$ esta contído em $\overline{B}_\rho(z_0)$ onde $z_0 = \dfrac{\alpha(1 - r^2)}{(1 - \alpha^2 r^2)}$ e $\rho = \dfrac{r(1 - \alpha^2)}{1 - \alpha^2 r^2}$.

SOLUÇÃO. Seja $\Phi(z) = \dfrac{w(z) - \alpha}{1 - w(z) \cdot \alpha}$. Portanto temos que Φ é anlítica em $B_1(0)$, satisfazendo $\mid \Phi(z) \mid\leq 1 \quad \forall z \in B_1(0)$ e $\Phi(0) = 0$. Então, pelo lema de Schwarz, $\mid \Phi(z) \mid\leq\mid z \mid \quad \forall z \in B_1(0)$, i.e. $\left|\dfrac{w(z) - \alpha}{1 - w(z) \cdot \alpha}\right| \leq\mid z \mid$, para $z \in B_1(0)$. Logo $\mid w(z) - \alpha \mid\leq r \mid 1 - w(z) \cdot \alpha \mid, \quad \forall z \in \overline{B}_r(0)$. Resolvendo a equação $\mid w(z) - \alpha \mid= r \mid 1 - w(z) \cdot \alpha \mid$ obtemos $z_0 = \dfrac{\alpha(1 - r^2)}{1 - r^2\alpha^2}, \rho = \dfrac{r(1 - \alpha^2)}{1 - \alpha^2 r^2}$. Portanto $w(z) \in B_\rho(z_0)$ para todo $z \in \overline{B}_r(0)$.

6. Se f é analítica em $B_1(0)$ e $\mid f(z) \mid< 1$ para todo $z \in B_1(0)$, prove que $\left|\dfrac{f(z) - f(0)}{z}\right| \leq\mid 1 - \overline{f(0)}f(z) \mid$.

SOLUÇÃO. Definamos a função $g(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}$. É claro que g é analítica em $B_1(0)$ satisfazendo : $\mid g(z) \mid\leq 1 \quad \forall z \in B_1(0)$ e $g(0) = 0$. Então, pelo lema de

Schwarz, $|g(z)| \leq |z|$ i.e. $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{z}\right| \leq |1-\overline{f(0)}f(z)|$.

7. Se $f(z)$ é analítica em $B_1(0), f(\alpha) = 0$ com $|\alpha| < 1$ e $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B_1(0)$, prove que $|f(z)| \leq \left|\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|$ para $|z| < 1$.

   SOLUÇÃO. Quando $\alpha = 0$, já é conhecido. Seja $g(z) = f\left(\dfrac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}\right)$. Como $\left|\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| < 1$ para $|z| < 1$ e $|\alpha| < 1$, então é claro que g é analítica em $B_1(0)$ satisfazendo: $|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in B_1(0)$ e $g(0) = f(\alpha) = 0$. Pelo lema de Schwarz temos $|g(z)| \leq |z|$ $\forall z \in B_1(0)$ e daí temos $\left|f\left(\dfrac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}\right)\right| \leq |z|$, i.e. $|f(z)| \leq \left|\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|$ para $|z| < 1$.

8. Se existir, achar uma função analítica $f : B_1(0) \to B_1(0)$ com $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$, e $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

   SOLUÇÃO. Pelo exercício (7) podemos tomar $f(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$. Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$ temos $\overline{\alpha} = \dfrac{2}{3}(1+4\alpha)$. Além disso $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$ o que fornece $(2-\overline{\alpha})^2 = 6(1-\alpha\overline{\alpha})$. Obtemos $\overline{\alpha} = \alpha = \dfrac{11-\sqrt{177}}{7}$ e $|\overline{\alpha}| = |\alpha| < 1$. Portanto tal f existe.

9. Seja $|f(z)| < 1$ para $|z| < 1$ analítica. Considere $g : B_1(0) \to B_1(0)$ definida por $g(z) = \dfrac{f(z)-a}{1-\overline{a}f(z)}$ onde $a = f(0)$. Prove que $\dfrac{|f(0)|-|z|}{1+|f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|f(0)|+|z|}{1-|f(0)||z|}$.

   SOLUÇÃO. É fácil ver que $g(z)$ é analítica em $B_1(0)$ satisfazendo $g(0) = 0$ e $|g(z)| < 1$ $\forall z \in B_1(0)$. Então, pelo lema de Schwarz, temos $|g(z)| \leq |z|$ i.e. $\left|\dfrac{f(z)-a}{1-\overline{a}f(z)}\right| \leq |z|$. Fazendo operações obtemos o resultado.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja f analítica em $B_r(0)$ e para $0 \leq r < R$ definamos: $A(r) = Max\{Re(f(z)) : |z| = r\}$. Se $f(z)$ não é constante, mostre que $A(r)$ é uma função de r estritamente crescente.

2. Sejam $0 < r < R$ e $A = \{z : r \leq | z | \leq R\}$. Mostre que existe um número positivo $\varepsilon > 0$ tal que para cada polinômio $p, sup\{| p(z) - z^{-1} | : z \in A\} \geq \varepsilon$. Isto diz que z^{-1} não é limite uniforme de polinômios em A.

3. Seja P um polinômio de grau n e $| P(z) | \leq M$ em $B_1(0)$. Mostre que $| P(z) | \leq M | z |^n$ para todo $| z | \geq 1$.

4. Seja f uma função inteira e não constante. Para qualquer número real positivo c, mostre que a aderência de $\{z : | f(z) | < c\}$ é o conjunto $\{z : | f(z) | \leq c\}$.

5. Se f é analítica em $| z | > 1$, contínua em $| z | \geq 1$ e tem um limite finito em $z = \infty$, mostre que $| f |$ atinge seu máximo num ponto de $S_1(0)$.

6. Suponha que $f : D \to \mathbb{C}$ satisfaz $Re(f(z)) \geq 0$ para todo $z \in D$ e que f é analítica.
(i) Mostre que $Re(f(z)) > 0$ para todo $z \in D$.

(ii) Se $f(0) = 1$ então $| f(z) | \leq \dfrac{1+ | z |}{1- | z |}$.

7. Seja f analítica em $D = \{z : | z | < 1\}$ e suponha que $| f(z) | \leq M$ para todo $z \in D$. Se $f(z_k) = 0$ para $1 \leq k \leq n$, mostre que $| f(z) | \leq M \prod_{k=1}^{n} \left| \dfrac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z} \right|$ para $| z | < 1$.

8. Se Q é um polinômio de grau n com coeficientes complexos e $| xQ(x) | \leq M$ para todo $x \in [-1, 1]$, mostre que $| Q(z) | \leq M(1 + \sqrt{2})^{n+1}, z \in B_1(0)$.

9. Se Q é um polinômio de grau n e $| (z - \lambda)Q(z) | \leq M, z \in S_1(0)$ (λ constante, $| \lambda | = 1$). Mostre que $| Q(z) | \leq \dfrac{1}{4}(n + 2)^2 M, z \in B_1(0)$.

10. Existe uma função analítica f em $B_1(0)$ tal que $| f(z) | \leq 1$ para $| z | < 1, f(0) = \dfrac{1}{2}$ e $f'(0) = \dfrac{3}{4}$?. Se assim for ache tal f. É única ?.

§ 6. INTEGRAIS SOBRE CAMINHOS

6.1 DEFINIÇÕES: Um *caminho* γ em $\mathbb{C}$ é uma função contínua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ com $a \neq b$. Neste caso $\gamma(a)$ é *origem* e $\gamma(b)$ é a *extremidade* de γ. Se $\gamma([a,b]) \subset A \subset \mathbb{C}$ diz-se que γ é um *caminho em A*. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ é um *caminho fechado*. Se $\gamma([a,b]) = \{c\}$ diz-se que γ é um *caminho fechado reduzido a um ponto*. Dado um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ o caminho $\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{C}$ onde $\gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$ é chamado *caminho oposto* a γ. Sejam: $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ caminhos tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. O caminho dado por: $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$, onde $\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \gamma_1(t)$, se $t \in [a,b]$ e $\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \gamma_2(t)$, se $t \in [b,c]$ é chamado *justaposição* de γ_1 e γ_2 ou diz-se que γ_2 *foi justaposto a* γ_1. Um caminho é chamado *regular* se existe $D \subset [a,b]$ no máximo enumerável tal que $\gamma'(t)$ existe e é contínua em cada ponto $t \in [a,b] \setminus D$ e $|\gamma'(t)| \leq M < +\infty$ para todo $t \in [a,b] \setminus D$. Se γ é regular é claro que γ_- é regular.

6.2 DEFINIÇÃO: Dados os caminhos regulares: $\gamma_1 : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$, diz-se que γ_1 e γ_2 são *equivalentes* e se escreve $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se existir uma aplicação: $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ tal que:

i) φ é bijetora, $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$.

ii) Existe $D_1 \subset [a,b]$ no máximo enumerável tal que $\varphi'(t)$ existe, é contínua e limitada em $[a,b] \setminus D_1$.

iii) Existe $D_2 \subset [c,d]$ no máximo enumerável tal que $(\varphi^{-1})'(t)$ existe, é contínua e é limitada em $[c,d] \setminus D_2$.

iv) $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ ou $\gamma_1 \circ \varphi^{-1} = \gamma_2$.

6.3 OBSERVAÇÕES:

(1) $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos regulares em $\mathbb{C}$.

(2) Se γ definido em $[a,b] \to \mathbb{C}$ é um caminho regular e $[c,d]$ é dado com $c \neq d$ então existe um caminho regular $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_1 \sim \gamma$.
Para isto tome: $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijetora da forma $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, crescente e defina $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.

6.4 DEFINIÇÃO: Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ caminho regular e $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ contínua. Neste caso a integral de Riemann

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

existe como um número complexo, é chamada a *integral de f sobre γ* e será indicada por:

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

6.5 PROPOSIÇÃO:

(1) Se γ_1 e γ_2 são caminhos regulares equivalentes e f é contínua sobre a imagem de γ_1 (igual a imagem de γ_2) então

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

(2) Se γ é um caminho regular e f é contínua na imagem de γ, então

$$\int_{\gamma_-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

(3) Se γ_1 e γ_2 são caminhos regulares e $\gamma_1 \vee \gamma_2$ é sua justaposição então, para f contínua na imagem de $\gamma_1 \vee \gamma_2$, tem-se que:

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

DEMONSTRAÇÃO: É imediata e sai das definições envolvidas. □

6.6 PROPOSIÇÃO: Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho regular fechado e f uma função contínua na imagem de γ. Para $c \in [a,b]$ seja: $\gamma_c : I_c = [c, c+b-a] \to \mathbb{C}$, onde γ_c é definido por:

$$\gamma_c(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se} \quad t \in [c,b] \\ \gamma(t-b+a) & \text{se} \quad t \in [b, c+b-a]. \end{cases}$$

Então

$$\gamma_c([c, c+b-a]) = \gamma([a,b]) \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_c} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta fazer contas. $\square$

6.7 DEFINIÇÃO: Sejam γ_1 e γ_2 caminhos definidos em $I = [a, b]$ com valores em $A \subset \mathbb{C}$, A aberto. Uma ***homotopia*** de γ_1 em γ_2 no interior de A (em A) é uma aplicação contínua: $h : [a, b] \times [0, 1] \to A$ tal que $h(t, 0) = \gamma_1(t)$ para cada $t \in [a, b]$ e $h(t, 1) = \gamma_2(t)$ para $t \in [a, b]$. No caso em que γ_1 e γ_2 são fechados pede-se que h ainda satisfaça a condição: $h(a, \theta) = h(b, \theta)$ para todo $\theta \in [0, 1]$.

Note que a homotopia define uma relação de equivalência tanto no conjunto dos caminhos em A como no conjunto dos caminhos fechados em A. Os elementos de uma mesma classe de equivalência serão ditos homotópicos.

§ 7. TEOREMA DE CAUCHY

7.1 TEOREMA (de Cauchy): Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto e f uma função complexa analítica em A. Se γ_1 e γ_2 são caminhos regulares fechados em A, homotópicos como caminhos fechados em A, então:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

DEMONSTRAÇÃO: Como vimos antes podemos, sem perda de generalidade, considerar γ_1 e γ_2 definidos no mesmo intervalo $[a,b]$ e $h : [a,b] \times [0,1] \to A$ denotando a homotopia correspondente de γ_1 em γ_2.

AFIRMAÇÃO: Seja $L = h([a,b] \times [0,1])$. Existem pontos $a_1, \cdots, a_n$ em L e bolas abertas $B_{r_1}(a_1), \cdots, B_{r_n}(a_n)$ contidas em A tais que

(i) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_{r_k}(a_k) \supset L$

(ii) Em cada $B_{r_k}(a_k)$, f é a soma de uma série de potências ao redor de a_k, $k = 1, \cdots, n$

Isto é imediato da compacidade de L e da analiticidade de f em A.

AFIRMAÇÃO: Existe $\rho > 0$ tal que, para cada $z \in L$, $B_\rho(z)$ está contida em pelo menos uma das bolas $B_{r_k}(a_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

DEMONSTRAÇÃO DESTA AFIRMAÇÃO: Se tal $\rho > 0$ não existisse, seria possível achar uma seqüência $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ de pontos de L tal que $B_{\frac{1}{m}}(z_m)$ não estaria contida em qualquer das bolas $B_{r_k}(a_k)$, $k = 1, \cdots, n$. Por passagem a uma subseqüência se necessária, podemos supor que $\lim_{m\to\infty} z_m = z_0 \in L$. Mas então $z_0 \in B_{r_k}(a_k)$ para algum $k \in \{1, \cdots, n\}$ e existiria $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset B_{r_k}(a_k)$. Assim para $| z_m - z_0 | + \dfrac{1}{m} < r$ teríamos $B_{\frac{1}{m}}(z_m) \subset B_{r_k}(a_k)$, o que forneceria uma contradição.

Logo, por 3.8, $f(z)$ é a soma de uma série de potências ao redor de x em $B_\rho(x)$ para cada $x \in L$. A continuidade uniforme de h no compacto $[a,b] \times [0,1]$ mostra que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{lcl} | t - t' | & \le & \varepsilon \\ | \theta - \theta' | & \le & \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow | h(t,\theta) - h(t',\theta') | \le \frac{\rho}{4}.$$

Sabemos que é possível achar partições $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{p-1} < a_p = b$ e $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{q-1} < \alpha_q = 1$ tais que $| a_{\ell+1} - a_\ell | \leq \varepsilon$ e $| \alpha_{j+1} - \alpha_j | \leq \varepsilon$ para $\ell = 0, \cdots, p-1$ e $j = 0, \cdots, q-1$. Vamos agora definir

(a) $\sigma_j(t) = h(a_\ell, \alpha_j) + \dfrac{t - a_\ell}{a_{\ell+1} - a_\ell}(h(a_{\ell+1}, \alpha_j) - h(a_\ell, \alpha_j))$
para $t \in [a_\ell, a_{\ell+1}], \ell = 0, \cdots, p-1$ e $j = 1, \cdots, q-1$

(b) $\sigma_0 = \gamma_1, \sigma_q = \gamma_2$.

σ_j é um caminho regular fechado para $j = 0, \cdots, q$. Basta agora mostrar que

$$\int_{\sigma_j} f(z)dz = \int_{\sigma_{j+1}} f(z)dz \quad (\forall j = 0, \cdots, q-1).$$

Pela nossa escolha dos a_ℓ e α_j temos $\sigma_j(t), \sigma_{j+1}(t) \in B_\rho(h(a_\ell, \alpha_j))$ para $t \in [a_\ell, a_{\ell+1}]$. Por 3.9 existe uma função analítica $g_{\ell,j}$ em $B_\rho(h(a_\ell, \alpha_j))$ tal que $g'_{\ell,j}(z) = f(z)$ para $z \in B_\rho(h(a_\ell, \alpha_j))$. Como $B_\rho(h(a_{\ell-1}), \alpha_j)) \cap B_\rho(h(a_\ell, \alpha_j)) \neq \phi$ e é conexo, a função $g_{\ell-1,j} - g_{\ell,j}$ é constante aí pois tem derivada nula. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_j} f(z)dz &= \sum_{\ell=0}^{p-1} \int_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} f(\sigma_j(t))\sigma_j'(t)dt \\ &= \sum_{\ell=0}^{p-1} \int_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} g'_{\ell,j}(\sigma_j(t))\sigma_j'(t)dt \\ &= \sum_{\ell=0}^{p-1} (g_{\ell,j}(\sigma_j(a_{\ell+1})) - g_{\ell,j}(\sigma_j(a_\ell))).\end{aligned}$$

Assim só precisamos mostrar que

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} [g_{\ell,j}(\sigma_j(a_{\ell+1})) - g_{\ell,j}(\sigma_j(a_\ell))] = \sum_{\ell=0}^{p-1} [g_{\ell,j+1}(\sigma_{j+1}(a_{\ell+1})) - g_{\ell,j+1}(\sigma_{j+1}(a_\ell))]$$

ou, o que lhe é equivalente,

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} [g_{\ell,j}(\sigma_j(a_{\ell+1})) - g_{\ell,j+1}(\sigma_{j+1}(a_{\ell+1})) - g_{\ell,j}(\sigma_j(a_\ell)) + g_{\ell,j+1}(\sigma_{j+1}(a_\ell))] = 0 \qquad (1).$$

Sabemos que $\sigma_j(a_\ell), \sigma_{j+1}(a_\ell) \in B_\rho(h(a_{\ell-1}, \alpha_j)) \cap B_\rho(h(a_\ell, \alpha_j))$ para $\ell = 1, \cdots, p$. Portanto

$$g_{\ell,j}(\sigma_j(a_\ell)) - g_{\ell,j+1}(\sigma_{j+1}(a_\ell)) = g_{\ell-1,j}(\sigma_j(a_\ell)) - g_{\ell-1,j+1}(\sigma_{j+1}(a_\ell)).$$

Assim o lado esquerdo de (1) pode ser escrito

$$g_{p-1,j}(\sigma_j(a_p)) - g_{p-1,j+1}(\sigma_{j+1}(a_p)) - g_{0,j}(\sigma_j(a_0)) + g_{0,j+1}(\sigma_{j+1}(a_0)).$$

Como σ_j e σ_{j+1} são caminhos regulares fechados, $a_0 = a$ e $a_p = b$ temos $\sigma_j(a) = \sigma_j(a_p)$ e $\sigma_{j+1}(a_0) = \sigma_{j+1}(a_p)$. Além disso esses pontos estão em $B_\rho(h(a_0, \alpha_j)) \cap B_\rho(h(a_{p-1}, \alpha_j))$ conexo. Então $g_{p-1,j} - g_{0,j}$ é constante pois sua derivada é zero. Isto implica que o resultado final é zero, como desejávamos provar. □

7.2 TEOREMA: Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $u, v \in A, \gamma_1, \gamma_2$ caminhos regulares em A tendo a mesma origem u e a mesma extremidade v. Se for possível achar uma homotopia h de γ_1 em γ_2 tal que $h(a,t) = u, h(b,t) = v$, para cada $t \in [0,1], h$ definida em $[a,b] \times [0,1]$, então, para cada f analítica em A, tem-se

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\gamma_3(t) = \gamma_{1-}(t - b + a)$ para $t \in [b, 2b - a]$. Então $\gamma_3 \sim \gamma_{1-}$. Por definição $\gamma_1 \vee \gamma_3$ e $\gamma_2 \vee \gamma_3$ são caminhos regulares fechados. Eles são homotópicos em A se definirmos

$$g(t,\theta) = \begin{cases} h(t,\theta) & \text{para} \quad t \in [a,b] \\ \gamma_3(t) & \text{para} \quad t \in [b, 2b-a] \end{cases}$$

Logo por 7.1 temos

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

□

§ 8. EXISTÊNCIA DE PRIMITIVAS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS COMPLEXAS

8.1 DEFINIÇÃO: $A \subset \mathbb{C}$ aberto conexo é chamado *simplesmente conexo* se cada caminho fechado em A é homotópico em A a um caminho que se reduz a um ponto.

8.2 NOTA: Se A é simplesmente conexo e B é homeomorfo a A então B é simplesmente conexo.

8.3 EXEMPLO: *Um domínio estrelado A em $\mathbb{C}$ relativamente ao ponto $a \in A$* é um aberto, tal que para cada $z \in A$, o segmento $[a, z] = \{a + t(z - a), t \in [0,1]\} \subset A$. Dado um caminho γ fechado em A, $\gamma : [\alpha, \beta] \to A$ definamos $h : [\alpha, \beta] \times [0,1] \to A$ por $h(t, \theta) = a + (1 - \theta)(\gamma(t) - a)$. Logo, $h(t, 0) = \gamma(t)$ e h é homotopia entre γ e $h(t, 1) = a$. Daí segue que um domínio estrelado é simplesmente conexo.

8.4 PROPOSIÇÃO: Se $A \subset \mathbb{C}$ for aberto conexo e $u, v \in A$, então é possível achar um caminho regular em A com origem u e extremidade v.

DEMONSTRAÇÃO: Note que um aberto conexo é conexo por poligonais. □

8.5 TEOREMA: Se $A \subset \mathbb{C}$ é aberto, simplesmente conexo e f é analítica em A, então existe g analítica em A tal que $g'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$.

DEMONSTRAÇÃO: Fixemos $a \in A$. Para cada $z_0 \in A$ e para dois caminhos regulares γ_1 e γ_2 em A unindo a a z_0 podemos achar γ_3, com $\gamma_3 \sim \gamma_2$, de modo que: $\gamma_1 : [b, c] \mapsto A$, $\gamma_3 : [c, d] \mapsto A$ e $\gamma_1 \vee \gamma_{3-}$ é um caminho regular fechado em A. Assim $\gamma_1 \vee \gamma_{3-}$ é homotópico a um caminho reduzido a um ponto de A, pois A é simplesmente conexo. Pelo Teorema de Cauchy temos

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_{3-}} f(z)dz = 0,$$

isto é

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Para cada $z \in A$ dado e para cada caminho regular γ_z unindo a a z o número

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f(x)dx$$

independe de γ_z. Vamos mostrar que para cada $z_0 \in A, g$ é analítica numa vizinhança de z_0 e que $g'(z) = f(z)$ nessa vizinhança. Como A é aberto, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(z_0) \subset A$ e f é representável em $B_\rho(z_0)$ por uma série de potênciais ao redor de z_0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k \qquad (\forall z \in B_\rho(z_0)).$$

Como vimos antes

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1} \qquad (\forall z \in B_\rho(z_0))$$

é analítica em $B_\rho(z_0)$ e $h'(z) = f(z)$ para $z \in B_\rho(z_0), h(z_0) = 0$. Se for preciso, some uma constante a $h(z)$ para obter que $h(z_0) = g(z_0)$. Para $z \in B_\rho(z_0)$ temos:

$$h(z) - h(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt = \int_\sigma f(x)dx$$

onde σ é um caminho regular unindo z a z_0 dado por: $\sigma(t) = z_0 + t(z - z_0)$ para $t \in [0, 1]$. Mas então, como $h(z_0) = g(z_0)$, temos

$$h(z) = \int_{\gamma_{z_0}} f(x)dx + \int_\sigma f(x)dx = \int_{\gamma_{z_0} \vee \sigma} f(x)dx = g(z) \qquad \forall z \in B_\rho(z_0).$$

□

8.6 NOTA: Na demonstração de 8.5 viu-se que uma primitiva de uma dada função f analítica num aberto simplesmente conexo $A \subset \mathbb{C}$ é dada por

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f(x)dx$$

para $z \in A$, onde γ_z é um caminho regular em A com origem z_0 (fixado em A) e extremidade z. Se A não for simplesmente conexo, então isso não ocorre mais como veremos no exemplo seguinte.

8.7 EXEMPLO: Seja $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vamos indicar por B o aberto simplesmente conexo $\mathbb{C} \setminus \{x + iy; x \leq 0, y = 0\}$. Sabemos que $f(z) = \dfrac{1}{z}$ é analítica em A. Vamos considerar os caminhos $\gamma_1(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ e $\gamma_2(t) = e^{it}, t \in [0, 4\pi]$. Fixado o ponto $z_0 = 1$ (origem e extremidade de γ_1 e γ_2), para cada $z \in B$, sabemos que:

$$g(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{x} dx,$$

onde γ_z é um caminho regular em B com origem z_0 e extremidade z, define uma primitiva de $\frac{1}{z}$ em B, que é $\ell n\ z$. Notemos que

$$g_1(z) = \int_{\gamma_1 \vee \gamma_z} \frac{1}{x} dx$$

e

$$g_2(z) = \int_{\gamma_2 \vee \gamma_z} \frac{1}{x} dx$$

são tais que

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{x} dx + \ell n\ z \\ g_2(z) &= \int_{\gamma_2} \frac{1}{x} dx + \ell n\ z \end{aligned}$$

para cada $z \in B$. Todavia, por um cálculo simples,

$$\int_{\gamma_1} \frac{dx}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_2} \frac{dx}{x} = 2.$$

Logo $g_1(z) = 1 + \ell n\ z$ e $g_2(z) = 2 + \ell n\ z$ para cada $z \in B$. Todavia $\gamma_1 \vee \gamma_z$ e $\gamma_2 \vee \gamma_z$ são caminhos regulares em A ambos com origem z_0 e extremidade z. Note que embora se tenha definido g_1 e g_2 somente no aberto simplesmente conexo B, usou-se caminhos em A e isto não forneceu a mesma primitiva de $\frac{1}{z}$ em B. Além disso fica claro que é impossível escrever

$$h(z) = \int_{\sigma_z} \frac{1}{x} dx$$

para $z \in A$, com σ_z sendo caminho regular qualquer em A com origem z_0 e extremidade z, e obter uma primitiva de $\frac{1}{z}$ em A. O que foi feito acima mostra que $h(z)$ toma valores diferentes já quando $z \in B$ (se $\sigma_z = \gamma_1 \vee \gamma_z$ temos $h(z) = 1 + \ell n\ z$ e se $\sigma_z = \gamma_2 \vee \gamma_z$ obtemos $h(z) = 2 + \ell n\ z$).

§ 9. ÍNDICE DE CAMINHOS FECHADOS

9.1 TEOREMA: Para cada $a \in \mathbb{C}$ e para cada caminho fechado regular γ em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i n$$

DEMONSTRAÇÃO: Supondo γ definida em $[b,c]$, tomemos

$$h(t) = \int_b^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a} ds \qquad (\forall t \in [b,c]).$$

Daí

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} \qquad (\forall t \in [b,c] \setminus D),$$

onde D é um subconjunto no máximo enumerável. Agora consideremos $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t)-a)$, o que fornece $g'(t) = 0$ para todo $t \in [b,c] \setminus D$. Logo g é constante para $t \in [b,c] \setminus D$ e podemos escrever

$$e^{h(t)} = \frac{\gamma(t)-a}{\gamma(b)-a}$$

pois $g(b) = e^{-h(b)}(\gamma(b)-a), h(b) = 0$. Como $\gamma(b) = \gamma(c)$, obtemos $e^{h(c)} = 1$ e portanto $h(c) = 2\pi i n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. □

9.2 DEFINIÇÃO: Sob as condições de 9.1 diz-se que n é o *índice de* γ *em relação a* a e escreve-se

$$n = I(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

9.3 OBSERVAÇÃO: Se γ_1 e γ_2 são caminhos regulares, fechados e homotópicos em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, então $I(\gamma_1, a) = I(\gamma_2, a)$ pelo Teorema de Cauchy, pois $\dfrac{1}{z-a}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

9.4 PROPOSIÇÃO: Se $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ for caminho regular fechado, então $I(\gamma, \cdot)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$.

DEMONSTRAÇÃO: Dado $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha,\beta])$ notemos que $I(\gamma,\cdot)$ é uma função contínua no ponto a. Seja $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha,\beta])$. Se $| h | < r$, podemos escrever

$$I(\gamma; a+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a-h} = I(\gamma_1; a)$$

onde $\gamma_1(t) = \gamma(t) - h$ para $t \in [\alpha,\beta]$. Vamos definir uma homotopia em $\mathbb{C}$ entre γ e γ_1:

$$\begin{array}{rcl} G : [\alpha,\beta]\times[0,1] & \to & \mathbb{C} \\ G(t,\theta) & = & \gamma(t) - \theta h. \end{array}$$

Pelo Teorema de Cauchy temos $I(\gamma; a+h) = I(\gamma; a)$ para $h \in B_r(0)$. Como $I(\gamma; a)$ é contínua e seus valores são inteiros, temos $I(\gamma;\cdot)$ constante em cada componente conexa.
□

9.5 EXEMPLO: Se $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ seja:

$$\begin{array}{rcl} C_n : [0,2\pi] & \mapsto & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & C_n(t) = e^{int}. \end{array}$$

C_n tem $S_1(0)$ como imagem e C_n é chamado o caminho da circunferência unitária percorrido n vezes no sentido anti-horário se $n > 0$ e $-n$ vezes no sentido horário se $n < 0$. As componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \{S_1(0)\}$ são $B_1(0)$ e $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_1(0)$. Da definição segue facilmente que $I(C_n; 0) = n = I(C_n; a)$ para $a \in B_1(0)$. Pelo Teorema de Cauchy $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ não é simplesmente conexo.

9.6 PROPOSIÇÃO: Se γ é um caminho regular fechado em $\overline{B}_r(a)$ então $I(\gamma; z) = 0$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(a)$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\gamma : [\alpha,\beta] \to \overline{B}_r(a)$, seja $M > 0$ tal que $| \gamma'(t) | \leq M$ para os pontos $t \in [\alpha,\beta]$ onde γ' existe. Daí temos:

$$2\pi i \cdot I(\gamma; z) = \int_\gamma \frac{dx}{x-z} = \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$$

Se $| z-a | > r$ temos:

$$| 2\pi i \cdot I(\gamma; z) | \leq \sup_{t\in[\alpha,\beta]\setminus D} \frac{| \gamma'(t) |}{| \gamma(t) - z |}(\beta-\alpha) \leq \frac{M(\beta-\alpha)}{| z-a | - r}.$$

Tomando $z - a$ em módulo suficientemente grande temos que:

$$0 \leq \frac{M(\beta-\alpha)}{| z-a | - r} < 2\pi.$$

Portanto $I(\gamma; z) = 0$. (Note que $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(a)$ é conexo contido numa das componentes conexas de γ). $\square$

9.7 COROLÁRIO: Se γ é caminho regular fechado em $\mathbb{C}$ definido em $[\alpha, \beta]$, o conjunto: $\{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta]); I(\gamma; z) \neq 0\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{C}$.

9.8 PROPOSIÇÃO: Seja A simplesmente conexo e γ um caminho regular fechado em A, então $I(\gamma; z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus A$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja h a homotopia em A entre γ e um caminho reduzido a um ponto de A. Se $x \in \mathbb{C} \setminus A$, x não pode estar na imagem de h (compacta, conexa contida em A). A imagem de γ está nesse compacto e x está na componente conexa não limitada de $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$, logo $I(\gamma; x) = 0$ pelo resultado anterior. $\square$

§ 10. FÓRMULAS INTEGRAIS DE CAUCHY

10.1 TEOREMA: Sejam A um aberto simplesmente conexo, $f : A \to \mathbb{C}$ analítica em A e $\gamma : [a,b] \mapsto A$ um caminho regular fechado. Se $x \in A$ e $x \notin Im(\gamma)$ temos:

$$I(\gamma; x)f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}dz$$

DEMONSTRAÇÃO: Definamos:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} & \text{se} \quad z \neq x \quad \text{com} \quad z \in A \\ f'(x) & \text{se} \quad z = x \end{cases}$$

para obter g é analítica em A. Pelo Teorema de Cauchy temos:

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}dz - \int_\gamma \frac{f(x)}{z-x}dz = 0$$

e daí

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}dz = \int_\gamma \frac{f(x)}{z-x}dz = f(x) \cdot I(\gamma; x) \cdot 2\pi i.$$

□

10.2 TEOREMA: Seja $\gamma : [b,c] \to \mathbb{C}$ um caminho regular e g uma função complexa contínua em $\gamma([b,c])$. Então $f(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(x)}{x-z}dx$ está definida para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([b,c])$ e é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma([b,c])$. Se $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([b,c])$ e $c_k = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(x)}{(x-a)^{k+1}}dx$ para $k \in \mathbb{N}_0$ temos que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ converge pontualmente em $B_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([b,c])$ e é igual a $f(z)$ nesses pontos.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\rho = dist(a, \gamma([b,c])$ e considere $0 < r < \rho$. Para $x \in \gamma([b,c])$

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-a)(1-\frac{z-a}{x-a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} \qquad \text{se } z \in B_r(a)$$

e além disso

$$\frac{|z-a|^n}{|x-a|^{n+1}} \leq \frac{r^n}{\rho^{n+1}} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0)(\forall\, z \in B_r(a))$$

Sejam $M = \sup_{x \in \gamma([b,c])} | g(x) |$ e $m = \sup_{t \in [b,c]} | \gamma'(t) |$. Temos

$$\left| \frac{\gamma'(t) g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} \right| \leq M \cdot m \cdot \frac{r^n}{\rho^{n+1}} \qquad (\forall t \in [b,c])$$

e a convergência absoluta pontual de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma'(t) g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$$

sobre $[b,c]$. Logo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} | c_n || z-a |^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_b^c \frac{g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} dt \right| \cdot | z-a |^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} | b-c | \, M \, m \frac{r^n}{\rho^{n+1}} < +\infty \end{aligned}$$

converge uniformemente sobre $B_r(a)$. Assim

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} dx (z-a)^n \\ &= \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} (z-a)^n dx \\ &= \int_\gamma \frac{g(x)}{x-z} dx = f(z) \qquad \forall z \in B_r(a). \end{aligned}$$

□

10.3 TEOREMA: (*Fórmulas Integrais de Cauchy*). Sob as condições de 10.1

$$I(\gamma; x) f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

para $x \in A \setminus \gamma([b,c])$ e $k \in \mathbb{N}_0$.

DEMONSTRAÇÃO: Por 10.1 temos:

$$I(\gamma; x) f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-x} dz$$

e por 10.2:

$$I(\gamma;x)f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz\right](x-a)^k$$

para $x \in B_r(a) \subset \mathbb{C}\setminus\gamma([b,c])$. Pela unicidade de representação de f em série de potências ao redor de a segue:

$$I(\gamma;a)f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz.$$

□

10.4 PROPOSIÇÃO (Desigualdade de Cauchy): Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto. Se f é analítica em $A, a \in A, 0 < r < d(a, C_A)$, B fechado e $B \subset B_r(a)$ então:

$$\left|\frac{1}{k!}f^{(k)}(b)\right| \leq \frac{r}{\rho_B^{k+1}} \sup_{z\in S_r(a)} | f(z) |$$

para cada $k \in \mathbb{N}_0$ e cada $b \in B$, onde $\rho_B = dist(B; S_r(a))$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta usar 10.3 com $\gamma(t) = a + \gamma e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ e notar que $| z - b | \geq \rho_B$ para todo $z \in S_r(a)$. □

No caso em que $B = \{a\}$ na proposição 10.4 temos:

$$\left|\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{1}{r^k} \sup_{z\in S_r(a)} | f(z) | .$$

10.5 COROLÁRIO: Se f é analítica em $A \subset \mathbb{C}, a \in A, 0 < r < d(a; C_A)$ então: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(z-a)^k$ converge uniforme e absolutamente sobre $\overline{B}_r(a)$.

DEMONSTRAÇÃO: Note que se $r < \rho < d(a; C_A)$ temos:

$$\left|\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{1}{\rho^k}M_\rho \;\text{ onde }\; M_\rho = \sup_{z\in S_\rho(a)} | f(z) | .$$

Para $z \in S_r(a)$:

$$\begin{aligned}\sup_{z\in \overline{B}_r(a)} \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(z-a)^k\right| &\leq M_\rho \sum_{k=0}^{\infty}\frac{| z-a |}{\rho^k} \\ &\leq M_\rho \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k < +\infty.\end{aligned}$$

□

10.6 TEOREMA DE LIOUVILLE: Seja f analítica em $\mathbb{C}$ tal que $| f(z) | \leq | a || z |^n$ para cada $z \in \mathbb{C}$, onde $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$ estão fixos. Então f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

DEMONSTRAÇÃO: Sabemos que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad (\forall z \in \mathbb{C})$$

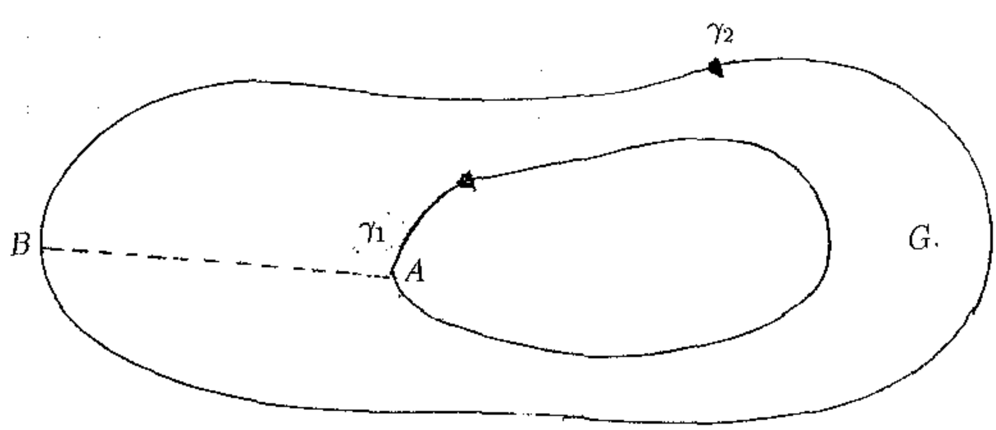
onde a série de potências tem raio de convergência $+\infty$ por 10.5. Usando 10.4 temos

$$| c_{n+k} | \leq \sup_{|z|=R} | f(z) | \cdot \frac{1}{R^{n+k}} \leq \frac{| a | R^n}{R^{n+k}} = \frac{| a |}{R^k}$$

para $k \in \mathbb{N}$ e $R > 0$. Logo $c_{n+k} = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ e o resultado segue. □

10.7 APLICAÇÕES E EXEMPLOS DAS INTEGRAIS DE CAUCHY

(1) Se f é analítica sobre um aberto G contendo as imagens de γ_1 e γ_2 e a região compreendida entre elas, como na figura abaixo



Então:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Para isso tome os pontos A na imagem de γ_1, B na imagem γ_2 e faça o corte AB como na figura. Seja o caminho $\gamma = \gamma_2 \vee [B \to A] \vee \gamma_1 - \vee [A \to B]$. Aqui $[B \to A]$

indica o caminho cuja imagem é o segmento AB e o sentido é de B para A. Temos que γ é um caminho homotópico a um ponto em G. Logo pelo Teorema de Cauchy temos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{[B\to A]} f(z)dz + \int_{\gamma_{1-}} f(z)dz + \int_{[A\to B]} f(z)dz = 0.$$

Observe que

$$\int_{[B\to A]} f(z)dz + \int_{[A\to B]} f(z)dz = 0$$

e

$$\int_{\gamma_{1-}} f(z)dz = -\int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Logo

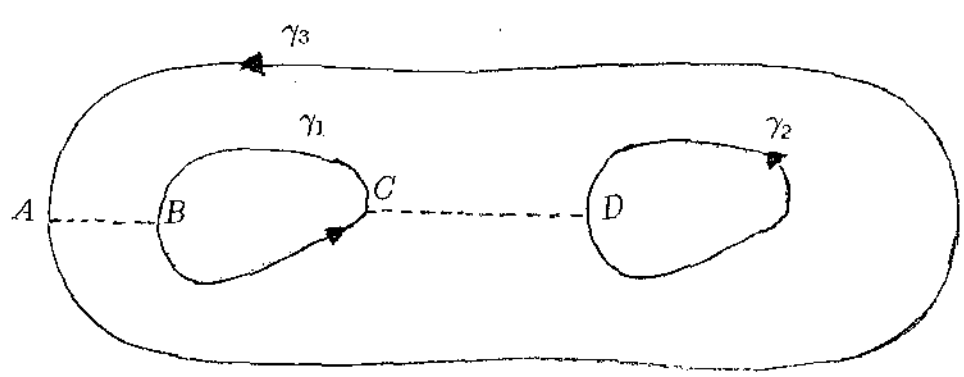
$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

como se afirmou.

(2) Se f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, qual é a relação entre:

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz, \int_{\gamma_1} f(z)dz, \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

onde γ_1, γ_2 e γ_3 são como mostra a figura



Tomamos os pontos A na imagem de γ_3, B na imagem de γ_1 e fazemos o corte AB (ver figura). Similarmente tomamos C na imagem de γ_1, D na imagem de γ_2 e fazemos o corte CD (ver figura). Consideramos o caminho

$$\gamma = [A \to B] \vee [B \to C] \vee [C \to D] \vee \gamma_2 \vee [D \to C] \vee [C \to B] \vee [B \to A] \vee \gamma_{3-}.$$

Então γ é um caminho fechado homotópico a um ponto em $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Pelo Teorema de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_{[A\to B]} f(z)dz + \int_{[B\to C]} f(z)dz + \int_{[C\to D]} f(z)dz + \\
&+ \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{[D\to C]} f(z)dz + \int_{[C\to B]} f(z)dz + \\
&+ \int_{[B\to A]} f(z)dz + \int_{\gamma_{3-}} f(z)dz = 0.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{[A\to B]} f(z)dz &+ \int_{[B\to A]} f(z)dz = 0 \\
\int_{[C\to D]} f(z)dz &+ \int_{[D\to C]} f(z)dz = 0 \\
\int_{[B\to C]} f(z)dz &+ \int_{[C\to B]} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz
\end{aligned}$$

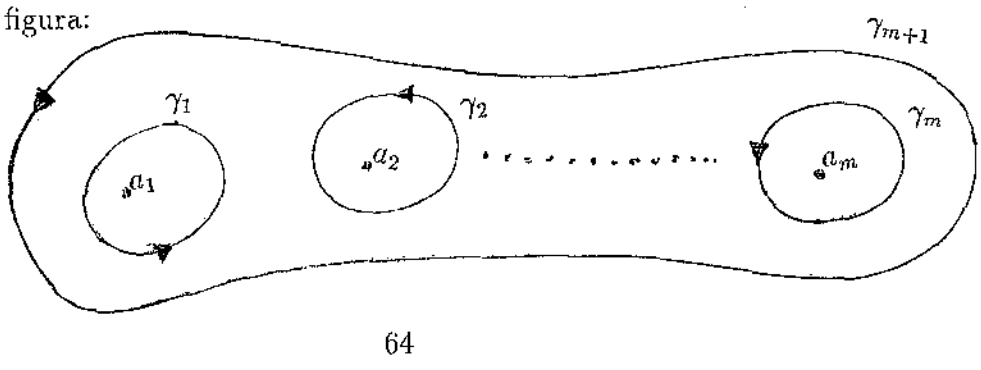
Logo temos:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3^-} f(z)dz = 0$$

Portanto

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

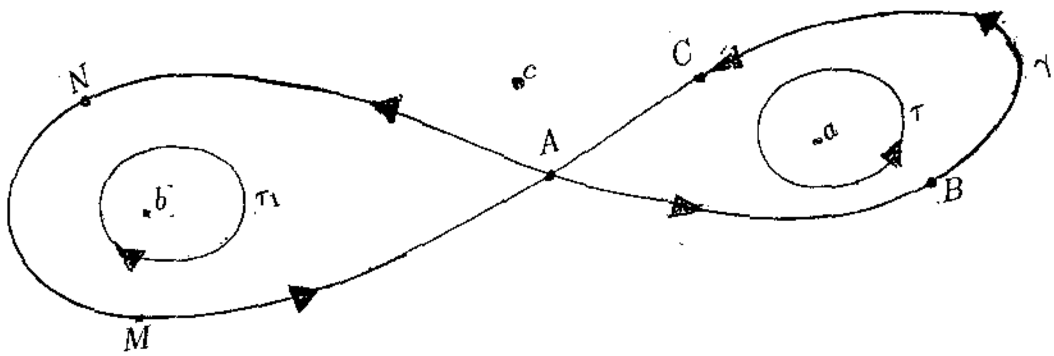
(3) **NOTA**: Sejam f analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, e $\gamma_1, \cdots, \gamma_{m+1}$ do modo como mostra a figura:



Fazemos a mesma análise e obtemos:

$$\int_{\gamma_{m+1}} f(z)dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

(4) Na figura seguinte acharemos os índices para os pontos a, b, c



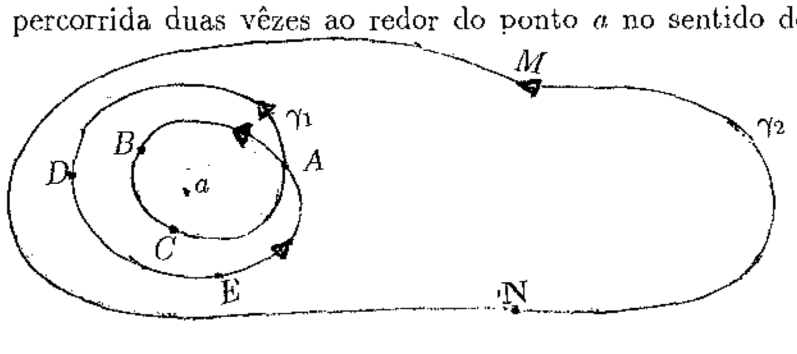
Fixemos alguns pontos no caminho γ (ver figura).

(i) É fácil ver que: $I(\tau; c) = 0, I(\tau_1; c) = 0, I(\gamma; c) = 0$.

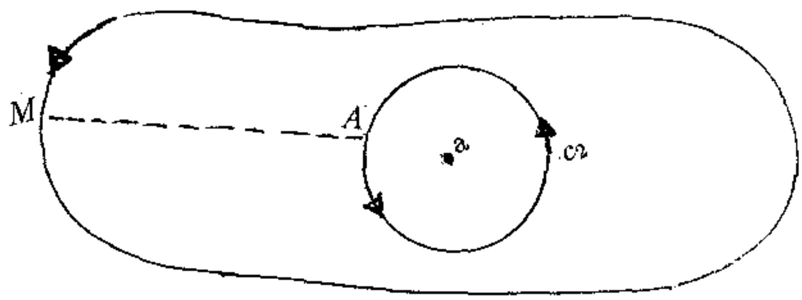
(ii) Para o caminho $\gamma_1 = ABCA$ temos $I(\gamma_1; a) = 1$ pois γ_1 é homotópico a τ em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ e o Teorema de Cauchy fornece: $I(\gamma_1; a) = I(\tau; a) = 1$. Temos ainda $I(\gamma_1; b) = 0$. Para o caminho $\gamma_2 = AMNA$ temos $I(\gamma_2; b) = -1$ pois γ_2 é homotópico a τ_1 em $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ e o Teorema de Cauchy fornece: $I(\gamma_2; b) = I(\tau_1; b)$. Temos ainda $I(\gamma_2; a) = 0$. Logo γ é homotópico a $\gamma_1 \vee \gamma_2$ em $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ e temos: $I(\gamma; a) = I(\gamma_1; a) + I(\gamma_2; a) = 1$, $I(\gamma; b) = I(\gamma_1; b) + I(\gamma_2; b) = -1$.

(5) Na figura seguinte f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

Fixemos alguns pontos nos caminhos γ_2 e γ_1 (ver figura (1)). O caminho $ADEABCA$ é um caminho homotópico a c_2 em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, onde c_2 tem como imagem uma circunferência de centro a e é percorrida duas vêzes ao redor do ponto a no sentido do anti-horário.



Como mostra a figura (2) que é equivalente a (1),



fixados os pontos M na imagem de γ_2 e A na imagem de c_2 podemos fazer o corte MA. Seja o caminho $\Gamma = \gamma_2 \vee [M \to A] \vee c_{2-} \vee c_{2-} \vee [A \to M]$. Γ é homotópico a um ponto em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Pelo Teorema de Cauchy temos:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{[M\to A]} f(z)dz + \int_{c_{2-}} f(z)dz + \\ &+ \int_{c_{2-}} f(z)dz + \int_{[A\to M]} f(z)dz = 0.\end{aligned}$$

Note que:

$$\int_{[M\to A]} f(z)dz + \int_{[A\to M]} f(z)dz = 0$$

Logo

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz + 2\int_{c_{2-}} f(z)dz = 0$$

Portanto:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\int_{c_2} f(z)dz.$$

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache o valor da integral $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^m(z-b)}$, quando $|a| < r < |b|$.

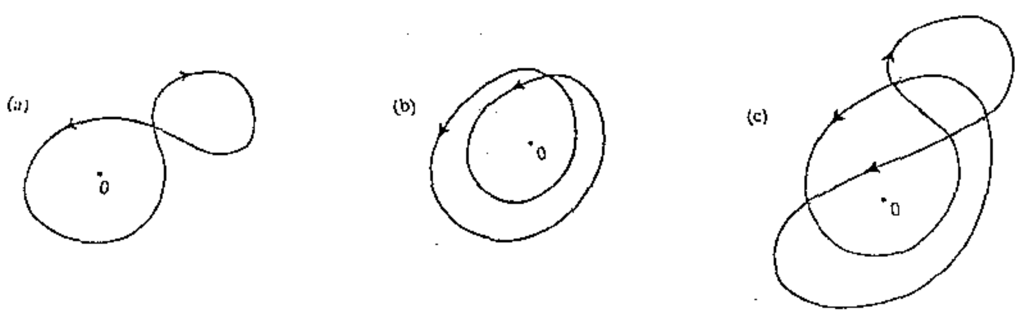
SOLUÇÃO. A função $f(z) = \dfrac{1}{z-b}$ é analítica em $B_r(0)$. Daí obtemos $f^{(m-1)}(a) = \dfrac{(m-1)!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-a)^m(z-b)}dz$. Com $f^{(m)}(a) = (-1)^m m!(a-b)^{-(m+1)}$ temos $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-b)(z-a)^m}dz = 2\pi i(b-a)^{-m}$.

2. Ache o valor da integral $\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$, caso em que $a, b \in B_R(0)$, para f analítica em algum aberto conexo que contém $\overline{B}_R(0)$.

SOLUÇÃO.

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz &= \frac{1}{(b-a)}\left[\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-b)}dz - \int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)}dz\right]\\ &= \frac{2\pi i}{(b-a)}[f(b) - f(a)].\end{aligned}$$

3. Ache o valor de $J = \displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}dz$ nos seguintes casos:



SOLUÇÃO. $\dfrac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \dfrac{2}{z^3} + \dfrac{2}{3!z} + g(z)$ onde $g(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$. Então $J = 2\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z^3} + \frac{2}{3!}\int_\gamma\frac{dz}{z} + \int_\gamma g(z)dz$. Para os três casos temos $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = 0$ e $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z^3} = 0$. Portanto

(a) $J = \dfrac{2}{3!}\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z} = \frac{2}{3!}I(\gamma; 0) = \frac{2}{3!}$.

(b) $J = \frac{2}{3!}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{2}{3!}I(\gamma;0) = \frac{4}{3!}$.

(c) $J = \frac{2}{3!}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{2}{3!}I(\gamma;0) = \frac{4}{3!}$.

4. Se $f(z) = z(1-z)^{-2}$ e $0 < r < 1$, mostre que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid d\theta = \frac{r}{1-r^2}$.

SOLUÇÃO. Para $z = re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, podemos escrever $z\overline{z} = r^2, \overline{z} = \frac{r^2}{z}$ e $dz = izd\theta$. Então

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{re^{i\theta}}{(1-re^{i\theta})^2}\right|d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\mid z\mid}{z\mid 1-z\mid^2}dz$$

$$\frac{r}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{(1-z)(1-\overline{z})z} = \frac{r}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{(1-z)(1-\frac{r^2}{z})z} = \frac{r}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{(1-z)(z-r^2)}.$$

Como $0 < r < 1$, temos que $r^2 \in B_r(0)$ e $g(z) = \frac{1}{1-z}$ analítica em $B_1(0) \supset \overline{B_r(0)}$. Logo $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{re^{i\theta}}{(1-re^{i\theta})^2}\right|d\theta = rg(r^2) = \frac{r}{1-r^2}$.

5. Ache o valor da integral $J = \int_{|z|=r}(z-a)^{-m}(z-b)^{-n}dz$, se $\mid a \mid < r < \mid b \mid$.

SOLUÇÃO. Seja $g(z) = \frac{1}{(z-b)^n}$ que é analítica em $B_r(0)$. Portanto $g^{(m-1)}(a) = \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-a)^m(z-b)^n}dz$ e $J = \frac{2\pi i}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a)$. Fazendo contas temos $J = \frac{2\pi i}{(m-1)!}(-1)^{m-1}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)(a-b)^{-n-m+1}$.

6. (i) Ache o valor da integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ quando, (a) $\gamma = S_{\frac{1}{2}}(0)$ e (b) $\gamma = S_{\frac{1}{2}}(1)$.

(ii) Ache o valor da integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)sen\ z}dz$ quando, $\gamma = S_{\sqrt{2}}(2+i)$.

SOLUÇÃO. (i) Caso (a), $\gamma = S_{\frac{1}{2}}(0)$. A função $f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$ é analítica num aberto contendo $\overline{B}_{\frac{1}{2}}(0)$. Logo $f(0) = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$.

Caso (b), $\gamma = S_{\frac{1}{2}}(1)$. A função $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ é analítica em um aberto contendo $B_{\frac{1}{2}}(1)$. Temos $\dfrac{f^{(2)}(1)}{2!} = -\dfrac{e}{2} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{e^z}{z(1-z)^3}dz$.

(ii) A função $f(z) = \dfrac{e^z\ cos\ z}{(1+z^2)sen\ z}$ é analítica em um aberto contendo $\overline{B}_{\sqrt{2}}(2+i)$. Logo $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{e^z\ cos\ z}{(1-z^2)sen\ z}dz = 0$.

7. Se f é analítica numa vinzinhança da aderência do disco $B_r(0)$, então $\overline{f(0)} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\varepsilon|=r} \dfrac{\overline{f(\varepsilon)}}{\varepsilon - z}d\varepsilon$ para todo $z \in B_r(0)$.

SOLUÇÃO. Para $z \in B_r(0)$ a função $h(w) = \dfrac{\overline{z}f(w)}{r^2 - \overline{z}w}$ é analítica numa vizinhança da aderência de $B_r(0)$. Portanto $\displaystyle\int_{|\varepsilon|=r} h(\varepsilon)d\varepsilon = 0$. Como $r^2 = \varepsilon\overline{\varepsilon}$ tem-se: $\dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} + h(\varepsilon) = \dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} + \dfrac{\overline{z}f(\varepsilon)}{\varepsilon\overline{\varepsilon} - \overline{z}\varepsilon} = \dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\dfrac{\overline{\varepsilon}}{\overline{\varepsilon} - \overline{z}}$. Desta relação temos: $2\pi i\ f(0) = \displaystyle\int_{|\varepsilon|=r} \dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon = \int_{|\varepsilon|=r}\Big(\dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} + h(\varepsilon)\Big)d\varepsilon = \int_{|\varepsilon|=r}\dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\dfrac{\overline{\varepsilon}}{\overline{\varepsilon}-\overline{z}}\cdot d\varepsilon$, i.e. $-2\pi i\ \overline{f(0)} = -\displaystyle\int_{|\varepsilon|=r}\dfrac{\overline{f(\varepsilon)}}{\varepsilon - z}d\varepsilon$, pois $\varepsilon d\overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon}d\varepsilon = 0$. Logo temos $\overline{f(0)} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\varepsilon|=r}\dfrac{\overline{f(\varepsilon)}}{\varepsilon - z}d\varepsilon$.

8. Se f é analítica numa vizinhança da aderência do disco $B_r(0)$ então: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\varepsilon|=r}\dfrac{Re f(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\dfrac{\varepsilon+z}{\varepsilon-z}d\varepsilon + iIm\ f(0)$ para todo $z \in B_r(0)$.

SOLUÇÃO. De $\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\varepsilon+z}{\varepsilon-z} = \dfrac{2}{\varepsilon-z} - \dfrac{1}{\varepsilon}, 2Re\ f = f + \overline{f}$ e da fórmula integral de Cauchy temos:

$$\int_{|\varepsilon|=r}\frac{Re\ f(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon+z}{\varepsilon-z}d\varepsilon = \int_{|\varepsilon|=r}\frac{f(\varepsilon)+\overline{f}(\varepsilon)}{\varepsilon-z}d\varepsilon - \frac{1}{2}\int_{|\varepsilon|=r}\frac{f(\varepsilon)+\overline{f}(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon$$

$$= 2\pi i\ f(z) + \int_{|\varepsilon|=r}\frac{\overline{f(\varepsilon)}}{\varepsilon-z}d\varepsilon - \pi i\ f(0) - \frac{1}{2}\int_{|\varepsilon|=r}\frac{\overline{f}(\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon.$$

Usando o exercício anterior temos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varepsilon|=r}\frac{Re\ f(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon+z}{\varepsilon-z}d\varepsilon = f(z) + \overline{f(0)} - \frac{f(0)}{2} - \frac{\overline{f(0)}}{2} = f(z) - iImf(0).$$

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$ e $g : \gamma([0, 2\pi]) \to \mathbb{C}$ contínua. Mostre que

$$\overline{\int_\gamma g(\varepsilon) d\varepsilon} = -\int_\gamma \overline{g(\varepsilon)} \varepsilon^2 d\varepsilon.$$

2. Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = a \cos t + ib \operatorname{sen} t$, ache $\int_\gamma |\varepsilon|^2 d\varepsilon$.

3. Para qualquer polinômio $p(z)$ e quaisquer $c \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}^+$, mostre que $\int_{S_r(c)} \overline{p(\varepsilon)} d\varepsilon = 2\pi i r^2 p'(c)$.

4. Sejam $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f : G \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$. Mostre que para qualquer caminho fechado γ em G tem-se $\int_\gamma f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$.

5. Sejam γ um caminho fechado em $\mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$ e $g(z) = z^n$. Mostre que $I(g \circ \gamma; 0) = nI(\gamma; 0)$.

6. Mostre que se F_1 e F_2 são primitivas de $f : G \to \mathbb{C}$ e G é aberto conexo, então existe uma constante λ tal que $F_1(z) = \lambda + F_2(z)$ para cada $z \in G$.

7. Ache $\int_\gamma \left(\dfrac{z}{z-1}\right)^n dz$ onde $\gamma(t) = 1 + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ e n é qualquer inteiro positivo.

8. Calcule $\int_\gamma \dfrac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz$, onde $\gamma(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, para todo os possíveis valores de $r, 0 < r < 2$ e $2 < r < +\infty$.

9. Calcule $\int_\gamma \dfrac{dz}{z^2+1}$ onde $\gamma(\theta) = 2 \mid \cos 2\theta \mid e^{i\theta}$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

10. Sejam $\gamma(\theta) = \theta e^{i\theta}$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\gamma(\theta) = 4\pi - \theta$ para $2\pi \leq \theta \leq 4\pi$. Calcule $\int_\gamma \dfrac{dz}{z^2 + \pi^2}$.

11. Seja $|w| < \dfrac{3}{4}$ e considere a integral $f(w) = \dfrac{1}{\pi i} \int_{S_{\frac{1}{2}(0)}} \dfrac{z(z+1)}{z^2 + 2z - w} dz$. Então $f(w)$ é uma função analítica (qual ?) no disco indicado. Ache $f(0), f'(0)$.

§ 11. DIFERENCIABILIDADE IMPLICA ANALITICIDADE NO CASO COMPLEXO

Já vimos que se f for analítica em A então ela é derivável (de fato, infinitamente derivável) em A. Neste parágrafo veremos a recíproca desse resultado e algumas consequências interessantes desse fato.

11.1 TEOREMA: Se $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é derivável em A então f é analítica em A.

Este resultado é falso no caso real, como mostra a função:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

que é infinitamente derivável em $\mathbb{R}$ e não é analítica no ponto 0. Se fosse analítica aí teria que ser nula pelo princípio dos zeros isolados.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $a \in A$ e $\rho > 0$ tais que $\overline{B}_\rho(a) \subset A$ e $\gamma(t) = a + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Definamos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x)}{x - z}dx$$

que é analítica em $B_\rho(a)$ por 10.2. Para $z \in B_\rho(a)$ fixo, existe $\delta > 1$ tal que: $0 \leq \lambda < \delta \Rightarrow z + \lambda(\rho e^{it} + a - z) \in A$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Definindo

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(\rho e^{it} + a - z)) - f(z)}{a + \rho e^{it} - z} \cdot i\rho e^{it}dt,$$

então é claro que

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it} + a) - f(z)}{a + \rho e^{it} - z} \cdot i\rho e^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it} + a)}{a + \rho e^{it} - z} \cdot i\rho e^{it}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z)\rho i e^{it}dt}{a + \rho e^{it} - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x)}{x - z}dx - f(z) = g(z) - f(z) \end{aligned}$$

e $h(0) = 0$.

Para $\lambda_0 \in (0,1), \lambda \in (0,1)$ e $\lambda \neq \lambda_0$ temos:

$$\frac{h(\lambda)-h(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{[f(z-\lambda(\rho e^{it}+a-z))-f(z+\lambda_0(\rho e^{it}+a-z))]\rho e^{it}}{(a+\rho e^{it}-z)(\lambda-\lambda_0)}dt\right].$$

Como

$$|\ \lambda-\lambda_0\ ||\ a+\rho e^{it}-z\ |\leq|\ \lambda-\lambda_0\ |\cdot 2\rho,$$

a convergência de λ a λ_0 implica a convergência uniforme em t do integrando para $f'(z+\lambda_0(\rho e^{it}+a-z))\rho e^{it}$ sobre $[0,2\pi]$. Logo temos

$$\begin{aligned} h'(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{h(\lambda)-h(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} &= \frac{1}{2\pi\lambda_0 i}\int_0^{2\pi} f'(z+\lambda_0(\rho e^{it}+a-z))\lambda_0\rho e^{it} i\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi\lambda_0 i} f(z+\lambda_0(\rho e^{it}+a-z))\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Como λ_0 é arbitrário em $(0,1)$, então h é constante em $[0,1]$, (pela desigualdade do valor médio). Logo $h(1)=h(0)$ e, como $h(1)=g(z)-f(z)$, então $g(z)=f(z)$ para todo $z\in B_\rho(a)$. Assim f é analítica em $B_\rho(a)$. □

11.2 TEOREMA DE MORERA (*Recíproca do Teorema de Cauchy*). Sejam A aberto simplesmente conexo $f: A\to \mathbb{C}$ contínua em A tal que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad (1)$$

para todo caminho regular fechado γ em A. Então f é analítica em A.

DEMONSTRAÇÃO: Fixe $a\in A$ e para cada $z\in A$ defina $g(z)=\int_{\gamma_z} f(x)dx$, onde γ_z é um caminho regular unindo a a z em A. Então g está definida pela hipótese (1) e daí já vimos que $g'(z)=f(z)$ para todo $z\in A$ (vide demonstração de 8.5). Logo, por 11.1, g é analítica em A e sua derivada $g'(z)=f(z)$ é também analítica em A. □

11.3 TEOREMA: Para que uma função $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, definida num aberto conexo A, seja derivável no ponto $z_0=x_0+iy_0$ deste conjunto como função de variável complexa, é necessário e suficiente que as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sejam diferenciáveis neste mesmo ponto (como funções de duas variáveis reais) e que satisfaçam neste ponto às condições:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1)$$

Logo a derivada $f'(z_0)$ pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{2}$$

As condições (1) são de fundamental importância na teoria das funções analíticas e nas aplicações desta teoria a problemas da Mecânica e da Física. São as chamadas *condições de Cauchy - Riemann.*

DEMONSTRAÇÃO: De fato, se $f(z)$ é derivável no ponto z_0 pertencente a A, temos:

$$\Delta f(z) = f'(z)\Delta z + \varepsilon \Delta z \tag{3}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta z &= z_0 - z = (x_0 - x) + i(y_0 - y) = \Delta x + i\Delta y, \\ \Delta f(z) &= f(z_0) - f(z) = [u(x_0,y_0) - u(x,y)] + i[v(x_0,y_0) - v(x,y)] = \Delta u + i\Delta v, \\ f'(z) &= a + ib \ , \ \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \end{aligned}$$

e ε_1 e ε_2 tendem a zero quando Δx e Δy tendem a zero simultaneamente. As partes reais e imaginária de (3) são $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y$ e $\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2\Delta x - \varepsilon_1\Delta y$.

Como $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 = 0$, temos:

1. As funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ de duas variáveis reais x e y, são diferenciáveis no ponto (x_0,y_0),

2. Suas derivadas parciais neste ponto são:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = a, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -b, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = b, \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = a$$

e satisfazem as condições:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Para $f'(z_0)$ obtemos:

$$\begin{aligned} f'(z_0) = a + ib &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Agora mostraremos que as condições do Teorema são suficientes. Suponhamos que estas estão satisfeitas. Então

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y(x_0, y_0) + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tendem a zero quando Δx e Δy tendem a zero. Além disso:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = b$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= \Delta u + i\Delta v \\ &= a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y \\ &= (a + ib)\Delta z + \left[(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right]\Delta z = A\Delta z + \varepsilon\Delta z \qquad (4) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} |\,\varepsilon\,| &= \left|(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq |\,\alpha_1 + i\beta_1\,| \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| + |\,\alpha_2 + i\beta_2\,| \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \\ &\leq |\,\alpha_1 + i\beta_1\,| + |\,\alpha_2 + i\beta_2\,| \leq |\,\alpha_1\,| + |\,\beta_1\,| + |\,\alpha_2\,| + |\,\beta_2\,| \end{aligned}$$

temos que ε, junto com $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, tende a zero quando $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tende a zero. Daqui e da relação (4) deduzimos que a função $f(z)$ é derivável e sua derivada $f'(z)$ é igual a A. □

11.4 OBSERVAÇÃO: Da *Análise Matemática* sabemos que para que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sejam diferenciáveis é suficiente que existam e sejam contínuas suas derivadas parciais: $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Portanto para que a função $f(z) = u + iv$ seja derivável, é suficiente que existam as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, que estas sejam contínuas e satifaçam a equação (1).

Em muitos casos é importante que as condições para diferenciabilidade de uma função de variável complexa $f(z) = u + iv$ no ponto $z \neq 0$ estejam expressas em coordenadas polares: $| z |= r$ e $Arg\ z = \Phi$. Estas condições necessárias e suficientes são:

1') u e v são funções diferenciáveis de r e Φ

2') suas derivadas parciais satisfazem as relações

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \Phi}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Phi} \tag{5}$$

Para isso é suficiente demonstrar que u e v são diferenciáveis como funções de r e Φ ($r \neq 0$) se, e só se, são diferenciáveis como funções de x e y e que nestas condições as equações (5) são equivalentes a as equações (1). O leitor facilmente pode fazer isto como exercício e obter

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{dv}{\partial r}\right)(cos\ \Phi - i\ sen\ \Phi) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{dv}{\partial r}\right).$$

11.5 EXEMPLO: Tomando

$$u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e $v(x, y) = u(y, x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &= 1 = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0), \end{aligned}$$

e as condições de Cauchy - Riemann estão satisfeitas. Observe que u e v são contínuas no ponto $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=0$$

pois $\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$ é limitado numa vizinhança de $(0,0)$. Podemos mostrar que $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ não existe pois

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}+i\frac{h_2^3}{h_1^2+h_2^2}\right)\cdot\frac{1}{h_1+ih_2}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\left[\left(\frac{h_1^4}{h_1^2+h_2^2}+\frac{h_2^4}{h_1^2+h_2^2}\right)+i\left(\frac{h_1^3h_1}{h_1^2+h_2^2}-\frac{h_1^3h_2}{h_1^2+h_2^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Observe que se $h_2=kh_1$ tal limite vale

$$\begin{aligned}&\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{(k^2+1)h_1^2}\left[\left(\frac{h_1^4}{(k^2+1)h_1^2}+\frac{k^4h_1^4}{(k^2+1)h_1^2}\right)+i\left(\frac{k^3h_1^4}{(k^2+1)h_1^2}-\frac{kh_1^4}{h_1^2(k^2+1)}\right)\right]\\ &\qquad=\frac{k^4+1}{(k^2+1)^2}+i\frac{k^3-k}{(k^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Mas esse limite não existe pois k é arbitrário.

O seguinte teorema pode ser enunciado como conseqüência dos resultados já demonstrados.

11.5 TEOREMA: Para $f: A\subset \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ e $z_0\in A$ aberto as seguintes afirmações são equivalentes:

1. f é analítica em z_0.
2. $f'(z)$ existe para todo $z\in B_r(z_0)$ e algum $r>0$.
3. Valem as hipóteses do teorema de Morera em $B_r(z_0)$ para algum $r>0$.
4. Valem as condições de Cauchy – Riemann e u,v são diferenciáveis em $B_r(z_0)$ para algum $r>0$.

11.6 OBSERVAÇÃO: Damos em 11.7 um teorema devido a Paul Montel. Note que as condições para ser f analítica são mais fracas que as quatro afirmações equivalentes dados no teorema 11.5.

11.7 TEOREMA: Se $f=u+iv$, definido sob um domínio A tal que:

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ existe em todo A

(ii) u, v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todo A

(iii) f é localmente acotada em A.

Então f é analítica em A. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em: H. Looman, Über eine Erweiterung des Cauchy – Goursatchen Integralsatzer, Niecuw. Arch. Wiskunde (2) 14 (1925), 234–239.

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Se $f(z) = u(x, y) + iv(z, y)$ é analítica num aberto conexo G, mostre que as famílias de curvas $u(x, y) + c_1$ e $v(x, y) = c_2$ são ortogonais.

   SOLUÇÃO. Consideremos dois elementos determinados destas famílias $u(x, y) = c_0$ e $v(x, y) = v_0$, que se encontram no ponto (x_0, y_0). Como

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy = 0 \text{ implica } \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} \\ dv &= v_x dx + v_y dy = 0 \text{ implica } \frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y}, \end{aligned}$$

   onde $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}, v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, então tais derivadas calculadas no ponto (x_0, y_0) representam os coeficientes angulares das tangentes às curvas no ponto de intersecção. Pelas equações de Cauchy-Riemann temos $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Então no ponto (x_0, y_0), $\left(\dfrac{-u_x}{u_y}\right)\left(\dfrac{-v_x}{v_y}\right) = \dfrac{(-v_y)}{(-v_x)} \cdot \dfrac{(-v_x)}{(v_y)} = -1$, de modo que os dois elementos da família são ortogonais nesse ponto.

2. Mostre que não existem funções analíticas em $\mathbb{C}$ de parte imaginária $x^2 - 2y$.

   SOLUÇÃO. Vamos supor que existe uma função f analítica de parte imaginária $x^2 - 2y$. Seja $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x, y) + (x^2 - 2y)i$. Pelas condições de Cauchy-Riemann devemos ter $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x$. Da primeira relação obtemos $u(x, y) = -2x + c_1(y)$ e da segunda relação tem-se $u(x, y) = -2xy + c_2(x)$. Logo teríamos $-2xy + c_2(x) = -2x + c_1(y)$, o que não é possível para $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Determine o aberto A em $\mathbb{C}$ onde as funções abaixo são analíticas.
(i) $\ell n(z^2-1)$ (ii) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$, (iii) $\ell n\left(\dfrac{z-ia}{z-ib}\right)$ onde $-\infty < a < b < +\infty$.

SOLUÇÃO. (i) De $z^2-1 \in \mathbb{R}$ e $z^2-1 \leq 0$ obtemos que o aberto onde $\ell n(z^2-1)$ é analítica é o conjunto:

$$A = \mathbb{C} \setminus \{z = iy; y \in \mathbb{R}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$$

(ii) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ell n(\frac{z-1}{z+1})}$. Então, de $\dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{z-1}{z+1} \leq 0$, obtemos que seu domínio de analiticidade é o conjunto $A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

(iii) De $\dfrac{z-ia}{z-ib} \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{z-ia}{z-ib} \leq 0$ obtemos que seu domínio de analiticidade é $A = \mathbb{C} \setminus \{z = 0, a \leq y \leq b\}$.

4. Se $f = u + iv$ é analítica e satifaz $u^2 = v$ em G, então f é constante:

SOLUÇÃO. Temos $2u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $2u\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, pela analiticidade da f $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Destas quatros relações temos $(1+4u^2)u_x = 0$ e $u_x = 0$. Isto implica $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ e assim f é uma constante.

5. Suponha que $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Se f é analítica e não se anula num domínio G então: $\Delta \mid f(z) \mid = \mid f(z) \mid^{-1} \mid f'(z) \mid^2, z \in G$.

SOLUÇÃO. Se $f(z) = u+iv$, então $\mid f(z) \mid = \sqrt{u^2+v^2}$ e $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iv_y$. Portanto $\Delta \mid f \mid$ é igual a

$$\begin{array}{l} \mid f \mid^{-1} (u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2) - \mid f \mid^{-3} [u^2(u_x^2+u_y^2) + v^2(v_x^2+v_y^2) - 2uv(u_xv_x + u_yv_y)] \\ \mid f \mid^{-1} \cdot 2 \cdot \mid f' \mid^2 - \mid f \mid^3 (u^2+v^2) \mid f' \mid^2 = \mid f' \mid^2 \mid f \mid^{-1}, \end{array}$$

pois $u_xv_x + u_yv_y = 0$.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $f = u + iv$ analítica num aberto conexo $G \subset \mathbb{C}$, tal que $u = h \circ v$ para alguma função diferenciável $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que f é constante.

2. Determine todos os pontos em $\mathbb{C}$ onde as seguintes funções são analíticas:
(i) $f(z) = |z|^2 (|z|^2 - 2)$

(ii) $f(z) = sen(|z|^2)$

(iii) $f(z) = z(z + \overline{z}^2)$.

3. Mostre que as seguintes funções não são diferenciáveis:
(i) $f(z) = |z|$

(ii) $f(z) = Re\ z$

(iii) $f(z) = arg\ z$

(iv) $f(z) = Im\ z$.

4. $f(z) = u + iv = \rho e^{i\theta}$ é uma função analítica em $\mathbb{C}$, mostre que se uma das funções u, v, ρ ou θ é igual a uma constante, então a função $f(z)$ é constante.

5. Sejam $G = \mathbb{C} \setminus \{z : z \leq 0\}$ e n inteiro positivo. Ache todos as funções analíticas tais que $z = [f(z)]^n$ para todo $z \in G$.

6. Suponha que $f : G \to \mathbb{C}$ é analítica e que G é conexo. Mostre que se $f(z)$ é real para todo z em G, então f é constante.

§ 12. SEQÜÊNCIAS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS COMPLEXAS

12.1 TEOREMA: Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de funções analíticas num aberto conexo $A \subset \mathbb{C}$ que converge a g uniformemente sobre cada compacto $K \subset A$. Então g é analítica em A e para $k \in \mathbb{N}$ a seqüência $(f_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ converge a $g^{(k)}$ uniformemente sobre cada compacto $K \subset A$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $a \in A, 0 < r < d(a, A^c)$ e $\delta_r(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Então:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_r} \frac{f_n(x)}{x-z}dx \qquad (\forall z \in B_r(a)). \tag{1}$$

Como $\dfrac{f_n(x)}{x-z}$ converge a $\dfrac{g(x)}{x-z}$ uniformemente para $x \in S_r(a)$, passando ao limite para $n \to \infty$ temos em (1):

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_r} \frac{g(x)}{x-z}dx \qquad (\forall z \in B_r(a)).$$

Como g é contínua sobre $S_r(a)$, temos por um resultado anterior que g é analítica no interior de $B_r(a)$. Logo g é analítica em A, por ser analítica em cada $a \in A$. Pelas desigualdades de Cauchy, para $k \in \mathbb{N}$ fixo, temos que

$$| f_n^{(k)}(z) - g^{(k)}(z) | \leq \sup_{|x-a|=r} | f_n(x) - g(x) | \frac{k!}{(\frac{r}{2})^k} \qquad (\forall z \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(a)).$$

Como o segundo membro vai para zero quando n tende ao infinito, $(f_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ converge a $g^{(k)}$ uniformemente sobre $B_{\frac{r}{2}}(a)$ para cada $a \in A$ e para cada $0 < r < d(a; A^c)$. Se $K \subset A$ é compacto, podemos cobrí-lo por um número finito dessas bolas e daí teremos convergência uniforme sobre K. □

12.2 OBSERVAÇÃO: Tal resultado não vale no caso real pois, por Weirstrass, qualquer função contínua em $[a, b]$ é limite uniforme de uma sequência de polinômios sobre $[a, b]$.

(1) Exemplo: Considere a função $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x), x \in \mathbb{R}$ e $0 < b < 1$. Cada termo desta série é uma função analítica em todos os pontos do eixo real. Além disso a série é uniformemente convergente no eixo real pois: $| b^n \ cos \ a^n \pi x | \leq b^n$

para todo $x \in I\!R$, e a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ é convergente. Mas a soma da série não é analítica nos pontos do eixo real. Esta função não é derivável para nenhum $x \in I\!R$.

(2) Exemplo: Considere a série:

$$sen\ x + \left(\frac{sen\ 2x}{2} - sen\ x\right) + \left(\frac{sen\ 3x}{3} - \frac{sen\ 2x}{2}\right) + \cdots\cdots$$

cujos termos são funções analíticas no eixo real. Além disso a série converge uniformemente no eixo real. Sua soma, sendo igual a zero, representa uma função analítica. De fato, a soma parcial é

$$sen\ x + \left(\frac{sen\ 2x}{2} - sen\ x\right) + \cdots, \cdots + \left(\frac{sen\ nx}{n} - \frac{sen(n-1)x}{n-1}\right) = \frac{sen\ nx}{n},$$

de onde se deduz que a série converge a zero uniformemente. Mas, derivando termo a termo, a série obtida é

$$cos\ x + (cos\ 2x - cos x) + \cdots, \cdots + (cos\ nx - cos(n-1)x)$$

cujas somas parciais são: $cos\ x, cos\ 2x, \cdots cos\ nx, \cdots$. Evidentemente a seqüência destas somas é divergente para todo $x \neq 2k\pi$ e para $x = 2k\pi$ tem um limite igual a 1, que resulta um valor diferente da derivada da soma dessa série.

12.3 OBSERVAÇÃO: Se $A \subset \mathbb{C}$ é aberto, podemos escrever $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, onde $B_n = \overline{B}_n(0) \cap \left\{z \in A : d(z, C_A) \geq \frac{1}{n}\right\}$. Temos $B_n \subset A, B_n$ compacto. Seja $\mathcal{C}(A)$ o espaço vetorial das funções contínuas de A em $\mathbb{C}$ e $\mathcal{H}(A)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{C}(A)$ formado pelas funções analíticas em A. A *topologia compacta aberta em* $\mathcal{C}(A)$ é dada pela métrica

$$d_0(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_{B_k}}{1 + \|f-g\|_{B_k}}$$

onde

$$\|f-g\|_{B_k} = \sup_{t \in B_k} | f(t) - g(t) |$$

Note que se $K \subset A$ for compacto, existe $m \in I\!N$ tal que $K \subset B_m$. Também podemos observar que a convergência de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a f em $\mathcal{C}(A)$ para tal topologia. Uma consequência do resultado 12.1 é que $\mathcal{H}(A)$ com a métrica d_0 é completo.

Podemos definir em $\mathcal{H}(A)$

$$d_n(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sup_{j \leq n} \frac{\|f^{(j)} - g^{(j)}\|_{B_k}}{1 + \|f^{(j)} - g^{(j)}\|_{B_k}},$$

Essa métrica corresponde à topologia da convergência uniforme sobre compactos de A de seqüências de funções e de suas derivadas até a ordem n. Note que $(\mathcal{H}(A), d_n)$ é completo por 12.1 e é claro que $d_0 \leq d_n$. Logo 12.1 diz que d_n é equivalente a d_0 em $\mathcal{H}(A)$ pois a topologia é a mesma: $id : (\mathcal{H}(A), d_0) \to (\mathcal{H}(A); d_n)$ é um homeomorfismo.

Se definirmos em $\mathcal{H}(A)$

$$d_\infty(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(f,g)$$

d_∞ corresponde à topologia da convergência uniforme de seqüências de funções e de todas as suas derivadas sobre os compactos de A. Logo $(\mathcal{H}(A), d_\infty)$ é completo por 12.1 e d_∞ e d_0 são métricas equivalentes.

(R) 12.4 TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI: Seja $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A)$ e tome em $\mathcal{C}(A)$ a topologia compacto-aberta. Então são equivalentes as afirmações:

1. $\mathcal{B}$ é relativamente compacto para d_0.

2. Dada uma seqüência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{B}$ existem $g \in \mathcal{C}(A)$ e uma subseqüência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tais que $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a g uniformemente sobre os compactos de A.

3. (a) $\mathcal{B}(a) = \{f(a); f \in \mathcal{B}\}$ é limitado em $\mathbb{C}$ para cada $a \in A$. Isto é, existe $M_a > 0$ tal que $\sup_{f \in \mathcal{B}} | f(a) | \leq M_a$ ($\mathcal{B}$ é pontualmente limitado em A).
   e

   (b) $\mathcal{B}$ é equicontínuo em cada ponto de A. Isto é, dados $a \in A$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: $| x - a | < \delta, x \in A \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{B}$.

12.5 TEOREMA DE MONTEL: Seja $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(A)$ e a métrica d_0 em $\mathcal{H}(A)$. São equivalentes as afirmações:

(i) $\mathcal{B}$ é relativamente compacto para d_0.

(ii) Para todo $K \subset A, K$ compacto, existe $M_K \geq 0$ tal que

$$\sup_{\substack{t\in K\\ f\in \mathcal{B}}} | f(t) | \leq M_K$$

(isto é, $\mathcal{B}$ é uniformemente limitado sobre cada compacto de A).

DEMONSTRAÇÃO (i) $\Rightarrow$ (ii): Se (i) vale, então, por 12.4 podemos dizer, que:
(a) Existe $M_a > 0$ tal que $\sup_{f\in\mathcal{B}} | f(a) | \leq M_a$.
(b) Para todo $a \in A$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_a > 0$ tal que: $| x - a |_{x\in A} < \delta_a$ implica $\sup_{f\in\mathcal{B}} | f(x) - f(a) | \leq \varepsilon$.
Dado $K \subset A$ compacto, existe um número finito de bolas $B_{\delta_{a_j}}(a_j), j = 1, \cdots m$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\delta_{a_j}}(a_j)$. Logo se $x \in K$ então existe $j \in \{1, \cdots, m\}$ tal que $x \in B_{\delta_{a_j}}(a_j)$ implica $\sup_{f\in\mathcal{B}} | f(x) - f(a_j) | \leq \varepsilon$. Assim

$$\sup_{f\in\mathcal{B}} | f(x) | \leq \varepsilon + \sup_{f\in\mathcal{B}} | f(a_j) | \leq \varepsilon + M_{a_j}.$$

Portanto $\sup_{\substack{x\in K\\ f\in\mathcal{B}}} | f(x) | \leq \varepsilon + \sup_{j=1,2,\cdots,m} M_{a_j} = M_K$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): assumindo (ii) obtemos $\mathcal{B}$ pontualmente limitado em A. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, mais teorema 12.1, basta provar que $\mathcal{B}$ é equicontínuo em cada ponto de A. Seja $a \in A$ fixo, sabemos que se $\rho < d(a, A^c)$ então

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (\forall\, x \in B_\rho(a); \forall\, f \in \mathcal{B}).$$

Temos que

$$| f(x) - f(a) | \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} | f^{(k)}(a) || (x-a) |^k .$$

Para $0 < r < \rho$ e $\delta_r(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, pelas desigualdades de Cauchy temos:

$$\frac{1}{k!} | f^{(k)}(a) | \leq \frac{1}{r^k} \sup_{|z-a|=r} | f(z) | \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, f \in \mathcal{B}).$$

Seja $M > 0$ tal que $\sup_{\substack{z\in S_r(a)\\ f\in\mathcal{B}}} | f(z) | \leq M$ (que existe por (ii)). Logo

$$
\begin{aligned}
| f(x) - f(a) | &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{| x - a |}{r} \right)^k \\
&= M \frac{| x - a |}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{| x - a |}{r} \right)^\ell,
\end{aligned}
$$

para todo $f \in \mathcal{B}$ e todo $x \in B_\rho(a)$.

Sendo $| x - a | \leq \frac{r}{2}$ podemos escrever que

$$
| f(x) - f(a) | \leq M \frac{| x - a |}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{r}{2}}{r} \right)^\ell = 2 \frac{M}{r} \, | x - a | \qquad (\forall \, f \in \mathcal{B})
$$

Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $\delta = min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{\varepsilon r}{2M} \right\} > 0$ para obter:

$$
\left. \begin{array}{c} | x - a | < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{B}} | f(x) - f(a) | \leq 2 \frac{M\delta}{r} < \varepsilon,
$$

o que fornece a equicontinuidade de $\mathcal{B}$ em a. $\square$

12.6 TEOREMA: Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto conexo, $B \subset A$ um conjunto determinante de analiticidade em A e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de funções analíticas em A, que converge pontualmente em B e que é uniformemente limitada sobre cada compacto $K \subset A$. Então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset A$ a uma função analítica f em A.

DEMONSTRAÇÃO: O conjunto $\mathcal{B} = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$ é relativamente compacto para a topologia compacta aberto em $\mathcal{H}(A)$ pelo Teorema de Montel. Então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(f_{n_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ convergente a $f \in \mathcal{H}(A)$ uniformemente sobre cada compacto $K \subset A$. A nossa hipótese diz que $\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)$ para todo $z \in B$. Vamos supor que exista $z_0 \in A$ não em B tal que $(f_n(z_0))_{n=1}^{\infty}$ não convege a $f(z_0)$. Logo deveria existir $\varepsilon > 0$ e uma seqüência $m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$ de números naturais tais que $| f_{m_k}(z_0) - f(z_0) | > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $(f_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência em $\mathcal{B}$, e $\mathcal{B}$ é relativamente compacto, existe uma subseqüência $(f_{m_{k_p}})_{p=1}^{\infty}$ convergindo a uma função $g \in \mathcal{H}(A)$ uniformemente sobre cada compacto $K \subset A$. Note que $g(z_0) \neq f(z_0)$ e que $g(z) = f(z)$ se $z \in B$. Como B é determinante de analiticidade em A temos uma contradição. Logo $\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)$ para todo $z \in A$. Como $\mathcal{B}$ é relativamente compacto para a topologia compacta aberta e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge pontualmente a f em A, vamos ter $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergindo a f uniformemente sobre cada compacto $K \subset A$ (repita o argumento acima com z_0 substituído por algum compacto K_0). $\square$

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Desenvolver $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$, em série de potências ao redor do ponto $z = 0$, para $|z| < 1$.

SOLUÇÃO. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ é uniformemente convergente em fechados contidos no interior do círculo unitário. De fato: se E é um subconjunto fechado de $B_1(0)$ e $\delta = dist(E; S_1(0)) > 0$, então, para qualquer $z \in E$, tem-se $|z| \leq 1 - \delta = \rho < 1$. Portanto $\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \leq \frac{\rho^n}{1-\rho}$ e, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{1-\rho}$ converge, teremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ uniformemente convergente em E. Sejam $f_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n}, n \in I\!N$ e $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Logo $\frac{F^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}}{k!}$ e daí temos $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\right] z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}\right] z^k$. De $\frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + z^{3n} + \cdots$, temos que o coeficiente de z^k é zero se k não é divisível por n e é igual a 1 se k é divisível por n. Portanto o coeficiente de z^k no desenvolvimento de $F(z)$ é igual a uma soma de unidades cuja quantidade é igual ao número de todos os divisores naturais do número k, que vamos denotar por $\tau(k)$. Assim $\tau(1) = 1, \tau(2) = 2, \tau(3) = 2, \tau(4) = 3$, etc. Obtemos $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) z^k$ onde $\tau(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}$.

2. Fazer o desenvolvimento em série de Taylor ao redor de zero de $\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$ se $|z| < \pi$.

SOLUÇÃO. $\Phi(z)$ é uniformemente convergente nos fechados contidos no interior de $\{z : |z| > \pi\}$. Fazendo os detalhes como no exercício anterior, obtemos $\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}\right] z^k$. Notemos que

$$\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \frac{-2z}{n^2\pi^2} - \frac{2z^3}{n^4\pi^4} - \frac{2z^5}{n^6\pi^6} \cdots - \frac{-2z^{2q-1}}{n^{2q}\pi^{2q}} \cdots,$$

onde o coeficiente de z^k é zero se k é par e é igual a $\frac{-2}{n^{2q}\pi^{2q}}$ se $k = 2q - 1$ (ímpar).

Portanto o coeficiente de z^k da função $\Phi(z)$ é zero se k é par e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^{2q}\pi^{2q}}$ se k é ímpar $= 2q-1$, daí obtemos que

$$\Phi(z) = \sum_{q=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^{2q}\pi^{2q}}\right] z^{2q-1}.$$

3. Desenvolver em série de potências ao redor de $z=0$ a função $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}} = e \cdot e^{\frac{z}{1-z}}$.

SOLUÇÃO. É muito complicado achar $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Para resolver o exercício empregaremos o seguinte. Seja $w = \Phi(z) = \dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots$ para $\mid z \mid < 1$ e $F(w) = e \cdot e^w = e\left(1 + w + \dfrac{w^2}{2} + \cdots\right)$ para $\mid w \mid < +\infty$. É claro que $f(z) = (F \circ \Phi)(z) = F\left(\dfrac{z}{1-z}\right) = e \cdot e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{1}{1-z}}$. Logo $f(z) = F(\Phi(z)) = F(w)$, onde $w = \dfrac{z}{1-z}$. Portanto, para $\mid z \mid < 1$, temos

$$\begin{aligned}
f(z) &= e\left(1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{z}{1-z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^n + \cdots\right) \\
&= e\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} + \frac{z^2}{2!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)^2 + \frac{z^3}{3!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= e\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} + \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k-1} z^{n+k} + \cdots\right]
\end{aligned}$$

reagrupando os termos da mesma potência obtemos:

$$\begin{aligned}
f(z) &= e\left\{1 + z + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)z^2 + \left(\frac{1}{1!} + 2\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)z^3 + \cdots + \right. \\
&+ \left.\left[\frac{1}{1!} + \binom{n-1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \binom{n-1}{2}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots \binom{n-1}{n-2}\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right] z^n + \cdots\right\}.
\end{aligned}$$

4. Se os termos da série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ são funções contínuas num domínio limitado $\overline{G}$ e são analíticas no aberto conexo G, então da convergência uniforme da série na fronteira ∂G de G se deduz sua convergência uniforme no domínio $\overline{G}$.

SOLUÇÃO. Segundo as hipóteses, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $N(\varepsilon)$ tal que para $n > N(\varepsilon)$ e qualquer número natural p tem-se $\sup_{z\in\partial G}\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon$. Mas a função $\sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)$ é contínua em $\overline{G}$ e analítica em G. Portanto o máximo do módulo $\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)\right|$ no domínio $\overline{G}$ é atingido na fronteira. Assim o valor deste máximo é menor que ε para $n > N(\varepsilon)$ e qualquer número natural p. Isto implica que a série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ é uniformemente convergente neste domínio $\overline{G}$.

5. Seja f analítica e limitada sobre $B_1(0), f(0) = 0, | f(z) |\leq M$ para todo $z \in B_1(0)$ e $M < 1$. Mostre que $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}[f(z)]^k$ define uma função analítica em $B_1(0)$.

SOLUÇÃO. É claro que $\left|\sum_{k=0}^{\infty}[f_k(z)]^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} | f_k(z) |^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} M^k$, e como $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ converge pois $M < 1$, temos convergência uniforme em $B_1(0)$ da série $\sum_{k=0}^{\infty}[f(z)]^k$. Como $[f(z)]^k$ é analítica em $B_1(0)$ tem-se que $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}[f(z)]^k$ é analítica em $B_1(0)$.

6. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções analíticas num domínio D e relativamente compacta para a topologia compacta aberta. Mostre que a família $\mathcal{F}_1 = \{g : g = f', f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacta para a topologia compacta aberta.

SOLUÇÃO. Seja $F = \overline{B}_{2r}(z_0) \subset D$, então existe um número positivo $M(F)$ tal que $| f(z) |\leq M(F)$ para todo $z \in F$ e $f \in \mathcal{F}$. Então para $z \in \overline{B}_r(z_0)$ e pela fórmula de Cauchy tem-se $| f'(z) |=| g(z) |= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{2r}(z_0)} \frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon - z)^2}d\varepsilon\right| \leq \frac{M(F)}{2\pi}\int_{S_{2r}(z_0)}\frac{| d\varepsilon |}{| \varepsilon - z |^2}$. Agora, como $| \varepsilon - z |\geq r$ para todo $\varepsilon \in S_{2r}(z_0)$ e para todo $z \in \overline{B}_r(z_0)$, temos $| g(z) |\leq \frac{2M(F)}{r}$ para todo $z \in \overline{B}_r(z_0)$ e $g \in \mathcal{F}_1$. Logo podemos concluir que $\mathcal{F}_1$ é uma família relativamente compacta.

7. Sejam F uma função inteira e $\mathcal{F}$ é uma família de funções analíticas num domínio D relativamente compacta para a topologia compacta aberta. Mostre que as funções $F \circ f, f \in \mathcal{F}$, formam uma família relativamente compacta.

SOLUÇÃO. Se E é um subconjunto compacto de D, então existe $R(E) > 0$ tal que

$| f(z) | \leq R(E)$ para todo $z \in E$ e $f \in \mathcal{F}$. Portanto $| (F \circ f)(z) | \leq \sup\limits_{|w| \leq R(E)} | F(w) |$ para todo $z \in E$ e $f \in \mathcal{F}$. Daí segue que $\{F \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacta.

8. Prove que a família de todas as funções f analíticas no disco unitário tal que $f(0) = 0, f'(0) = 1$, não é uma família relativamente compacta para a topologia compacta aberta.

SOLUÇÃO. Se $f_n(z) = \dfrac{1}{n}(e^{nz} - 1)$, é claro que f_n é analítica para todo $n \in I\!N$ e satisfaz $f_n'(0) = 1, f_n(0) = 0$. Como $\lim\limits_{n \to \infty} f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = +\infty$, segue que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ não tem subseqüência convergente. Assim a família de tais funções não é relativamente compacta.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostre que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n z^n}{1 - z^n}$ converge para $| z | \neq 1$.

2. Desenvolver em série de potências de z a soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n z^n}{1 - z^n}$ e ache seu raio de convergência.

3. Mostre que se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | f_n(z) |$ converge uniformemente em todo conjunto fechado contido num aberto conexo $G \subset \mathbb{C}$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | f_n'(z) |$ possui a mesma propriedade.

4. Mostre que a soma da série $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^2(z^2 + 1^2) \cdots (z^2 + n^2)}{[(n+1)!]^2}$ é analítica em $\mathbb{C}$.

5. Se f é analítica em $B_1(0)$ e $f(0) = 0$, mostre que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ é convergente em $B_1(0)$ e sua soma é analítica.

6. Mostre que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{z + n}$ é uniformemente convergente em $\overline{B}_r(z_0)$ se $-n \notin \overline{B}_r(z_0)$ e mostre, além disso, que sua soma é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \cdots\}$.

7. Verifique que $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; f(z) = a + bz\}$ não é relativamente compacta para a topologia compacta aberta.

8. Suponha que $\mathcal{F}$ é a família de todas as funções $f(z) = az$, onde $a \in \mathbb{C}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é normal em $\mathbb{C} \setminus \overline{PB}_1(0)$. (Diz-se que uma coleção $\mathcal{F}$ de funções analíticas num aberto conexo D é *normal* se para cada seqüência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}$ ou existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, que converge uniformemente sobre os compactos de D a uma função f ou uma subseqüência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a $+\infty$ sobre os compactos de D).

9. Seja $\mathcal{F}$ uma família normal de funções analíticas no aberto G. Se Ω é aberto tal que $f(G) \subset \Omega$ para cada $f \in \mathcal{F}$ e g é analítica em Ω, então $\{g \circ f; f \in \mathcal{F}\}$ é normal.

§ 13. SÉRIES DE LAURENT

Vamos usar as seguintes notações:

Se $a \in \mathbb{C}$ e $o \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ o *anel aberto de centro a e raios* r_1 e r_2 é o conjunto

$$\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < \mid z - a \mid < r_2\}$$

e o *anel fechado de centro a e raios* r_1 e r_2 é o conjunto

$$\overline{\mathcal{A}_{r_1,r_2}}(a) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 \leq \mid z - a \mid \leq r_2\}.$$

13.1 TEOREMA: Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto, $a \in \mathbb{C}, 0 < r_1 < r_2$ tais que $\overline{\mathcal{A}_{r_1,r_2}} \subset U$. Se $f : U \to \mathbb{C}$ é analítica em U, então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(x)}{x - z}dx - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(x)}{x - z}dx$$

para cada $z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$, onde $\gamma_j(t) = a + r_j e^{it}, t \in [0, 2\pi], j = 1, 2$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(z)}{x - z} & \text{se} \quad x \neq z, x \in U \\ f'(z) & \text{se} \quad x = z \end{cases}$$

que é analítica em U. Vamos definir: $h(t, \theta) = \theta(a + r_1 e^{it}) + (1 - \theta)(a + r_2 e^{it}), t \in [0, 2\pi], \theta \in [0, 1]$, que fornece uma homotopia h em U entre γ_1 e γ_2. Pelo Teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma_1} g(x)dx = \int_{\gamma_2} g(x)dx.$$

Assim para $z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(x) - f(z)}{x - z}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(x) - f(z)}{x - z}dx.$$

ou seja

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(x)}{x - z}dx - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{x - z}dx}_{=f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(x)}{x - z}dx - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{x - z}dx}_{=0}.$$

Então temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(x)}{x-z}dx - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(x)}{x-z}dx$$

□

13.2 OBSERVAÇÃO: Vamos considerar $\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$ para $0 < r_1 < r_2$. Dado $z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$ podemos escrever:

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-a)(1-\frac{z-a}{x-a})} = \frac{1}{(x-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(x-a)^{k+1}},$$

a convergência sendo absoluta e uniforme para $x \in S_{r_2}(a)$. Temos ainda

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-z} &= \frac{-1}{(z-a)(\frac{x-a}{z-a}-1)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-(\frac{x-a}{z-a})}\\ \frac{1}{z-a}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^k}{(z-a)^k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^k}{(z-a)^{k+1}}\end{aligned}$$

para $\mid x-a \mid = r_1$. Portanto temos convergência absoluta e uniforme para $z \in S_{r_1}(a)$. Seja f analítica em U aberto tal que $\overline{\mathcal{A}}_{r_1,r_2}(a) \subset U$ e tomemos $\gamma_j(t) = a + r_j e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ e $j = 1, 2$. Por 13.1 temos

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(x)}{x-z}dx - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(x)}{x-z}dx\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(x)}{(x-a)^{k+1}}dx\right](z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(x)}{(x-a)^{-k}}dx\right]\cdot\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(x)}{(x-a)^{k+1}}dx\right](z-a)^k + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(x)}{(x-a)^{-\ell+1}}\right]\cdot\frac{1}{(z-a)^{\ell}}.\end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(x)}{(x-a)^{k+1}}dx \qquad (\forall k \in I\!N_0)\\ \beta_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(x)}{(x-a)^{-k+1}}dx \qquad (\forall k \in I\!N)\end{aligned}$$

obtemos $g_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k$ pontualmente e absolutamente em $B_{r_2}(a)$ e $g_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k \cdot \frac{1}{(z-a)^k}$ pontualmente e absolutamente em $(\overline{B}_{r_1}(a))^c = \mathbb{C} \setminus \overline{B}_{r_1}(a)$. Logo para

$z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$ temos $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ e $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-a)^k$ onde $c_k = \alpha_k$ se $k \in \mathbb{N}_0$ e β_k se $-k \in \mathbb{N}$. A convergência da série é pontual e absoluta em $\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$. Diz-se nesse caso que f está *representada em $\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$ por uma série de Laurent ao redor de a.* Como $g_1(z)$ é a soma de uma série de potências de $(z-a)$ em $B_{r_2}(a)$ os coeficientes α_k são únicos. Como $g_2(z)$ é a soma de uma série de potências de $\left(\frac{1}{z-a}\right) = u$ com $u \in B_{\frac{1}{r_1}}(0)$ os coficientes β_k são únicos. A representação de f em série de Laurent é única, como veremos mais tarde pela fórmula dos coeficientes. Note ainda que a convergência da série de Laurent é uniforme e absoluta em $\overline{\mathcal{A}}_{\rho_1,\rho_2}(a)$ com $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.

Seja σ um caminho regular fechado em $\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$. A imagem de σ é compacta contida em $\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$, logo existem $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ tais que a imagem de σ está contida em $\overline{\mathcal{A}_{\rho_1,\rho_2}(a)}$. Então temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(x)}{(z-a)^{k+1}}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^{n-k-1}\Big)dz \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i} c_n \int_\sigma (z-a)^{n-k-1}dz \qquad (1)\end{aligned}$$

a) Se $n-k-1 \geq 0$ então $(z-a)^{n-k-1}$ é analítica em $\mathbb{C}$ e, pelo Teorema de Cauchy, $\int_\sigma (z-a)^{n-k-1}dz = 0$.

b) Se $n = k$ então $(z-a)^{n-k-1} = \dfrac{1}{(z-a)}$ e

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma (z-a)^{n-k-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{1}{(z-a)}dz = I(\sigma;a)$$

c) Se $n \leq k-1$ então

$$(z-a)^{n-k-1} = \frac{1}{(z-a)^{k+1-n}} \text{ com } k+1-n \geq 2.$$

Pelas fórmulas integrais de Cauchy temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma (z-a)^{n-k-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dz}{(z-a)^{k+1-n}} = \frac{d^{k-n}}{dz^{k-n}}1\cdot(a)\cdot n! = 0$$

Logo de a), b) e c) temos de (i)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = c_k I(\sigma;a) \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Como U é aberto e se pode tomar $\delta > 0$ tal que $\mathcal{A}_{r_1-\delta_1, r_2+\delta}(a) \subset U$, uma pequena mudança nos raciocínios anteriores permite escrever (2) mesmo quando σ é um caminho regular fechado em $\overline{\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)}$. Em particular, para cada $\rho \in [r_1, r_2]$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz \qquad (\forall\ k \in \mathbb{Z}) \tag{3}$$

onde $\sigma_\rho(t) = a + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Note que devemos cuidar para não fazer isso com $z \in$ Imagem de σ_ρ.

Se $U \supset \overline{B_{r_2}}(a)$ temos

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad (\forall k \in \mathbb{N}_0)$$

e, como $f(z)\cdot(z-a)^{-k-1}$ é analítica em U para $k \leq -1$, temos $c_k = 0$ se $k \leq -1$. Portanto a representação de Laurent será a representação de Taylor ao redor de a nesse caso.

Demonstramos assim o seguinte resultado.

13.3 TEOREMA: Se f é analítica em U e o anel $\overline{\mathcal{A}_{r_1,r_2}}(a) \subset U$ para $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ então f é representada em $\mathcal{A}_{r_1,r_2}(a)$ por $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k(z-a)^k$ de modo único com a convergência sendo uniforme e absoluta sobre $\overline{\mathcal{A}}_{\rho_1,\rho_2}(a)$ sempre que $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$, e onde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = c_k I(\sigma; a) \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$

para cada caminho regular fechado σ em $\overline{\mathcal{A}}_{r_1,r_2}(a)$. Em particular $c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r} \frac{f(x)}{(x-a)^{k+1}}dx$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ onde $\sigma_r(t) = a + re^{it}. t \in [0, 2\pi], r \in [r_1, r_2]$. Se $\overline{B}_{r_2}(a) \subset U$ tem-se $c_k = 0$ se $k \leq -1$. □

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Faça o desenvolvimento em série de Laurent da função $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ para $z \neq 0$.

SOLUÇÃO. Sabemos que $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ onde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}}d\varepsilon, n \in \mathbb{Z}$ e Γ_R é uma circunferência com centro na origem e raio $R > 0$. Fazendo uso da relação $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ temos:

$$\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{1!} + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{1!\varepsilon} + \frac{1}{2!\varepsilon^2} + \cdots + \frac{1}{n!\varepsilon^n} + \cdots\right).$$

Note que integrando termo a termo só restarão os termos do produto da forma $\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \cdot \frac{\varepsilon^i}{i!} \cdot \frac{1}{j!\varepsilon^j}$ com $i - j - n - 1 = -1$ onde n inteiro fixo e $i \geq 0 \geq j \geq 0$. Daí temos $i - j = n$ e portanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}} d\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{1}{(n+i)!} = a_n.$$

2. Desenvolver a função $f(z) = \ell n \frac{z-a}{z-b}$, com a e b não nulos, em uma vizinhança do ponto $z = \infty$.

SOLUÇÃO. Para isso fazemos $w = \frac{1}{z}$. Temos $f\left(\frac{1}{w}\right) = \ell n\left(\frac{1-wa}{1-wb}\right)$ e esta função de w deve ser desenvolvida em uma vizinhança do ponto $w = 0$. Sabemos que $\frac{1}{w-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k w^k$ se $\mid wa \mid < 1$. Desta relação obtemos

$$\begin{aligned} \ell n(1 - xa) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{k+1} x^{k+1} \quad \text{se} \quad \mid xa \mid < 1 && (i) \\ \ell n(1 - xb) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{k+1}}{k+1} x^{k+1} \quad \text{se} \quad \mid xb \mid < 1 && (ii) \end{aligned}$$

De (i) e (ii) tem-se

$$\ell n\left(\frac{1-xa}{1+xb}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}\right)x^{k+1} \quad \text{se} \quad \mid x \mid < min\left\{\frac{1}{\mid a \mid}, \frac{1}{\mid b \mid}\right\}.$$

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Ache a região de convergência de cada uma das seguintes séries de Laurent:

(i) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{\mid n \mid !}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n^2+1}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c^n(z-d)^n; c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, d \in \mathbb{C}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n}$.

2. Seja $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ onde a série tem raio de convergência positivo. Ache a região de convergência da série de Laurent $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{|n|} z^n$ e identifique a função que a representa aí.

3. Sejam $0 < r < s < +\infty, A = A_{r,s}(0)$ e $f(z)$ analítica em A. Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$ para qualquer seqüência $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ em A com $\lim\limits_{n\to\infty} | z_n |= r$ ou para qualquer seqüência $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ em A com $\lim\limits_{n\to\infty} | z_n |= s$. Mostre que então $f(z) = 0$ para todo $z \in A$. No caso $r = 0$ ou $s = \infty$ é certa esta afirmação?.

4. Prove que $e^{\frac{a}{2}(z-\frac{1}{z})} = J_0(a) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[z^n + (-z)^{-n}]J_n(a)$, onde $J_n(a)$ é a função de Bessel $J_n(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{n+2n}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}$.

5. Ache o desenvolvimento em série de Laurent da função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, em potências de z, válido para: (i) $0 <| z |< 1$, (ii) $1 <| z |< 2$, (iii) $2 <| z |$.

6. Ache o desenvolvimento em série de Laurent da função $f(z) = cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ ao redor do ponto $z = 2$.

§ 14. SINGULARIDADES ISOLADAS E ZEROS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS

14.1 DEFINIÇÃO: Sejam A aberto e $f: A \to \mathbb{C}$ analítica. Se $z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$ for um ponto isolado de $\mathbb{C} \setminus A$, (isto é: existe $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \cap A^c = \{z_0\}$), então diz-se que z_0 *É uma singularidade isolada de* f. Se f puder ser definida em z_0 de modo que a nova função $\overline{f}$ seja analítica no aberto $A \cup \{z_0\}$, diz-se que z_0 é *uma singularidade removível de* f.

14.2 OBSERVAÇÃO: A função f tem singularidade isolada no ponto $z = z_0$ se existe um número $R > 0$ tal que f é analítica em $\{z : 0 <| z - z_0 |< R\}$. Ela tem singularidade removível no ponto $z = z_0$ se existe uma função analítica $\overline{f} : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ tal que $\overline{f}(z) = f(z)$ para $0 <| z - z_0 |< R$.

14.3 EXEMPLO: A função $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z-1}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\} = A$ e $z = 1$ é uma singularidade isolada removível de f pois $f(z) = z + 1$ para $z \in A$ e $\overline{f}(z) = z + 1$ é uma função inteira.

Um exemplo de singularidade isolada não removível para $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ é o ponto $z = z_0$. Como $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ não existe, não há como achar $\overline{f}$ inteira que coincida com $f(z)$ em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

14.4 OBSERVAÇÃO: Se f é analítica em A e z_0 é singularidade isolada de f, pelo resultado de representação de Laurent, temos $r > 0$ tal que $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ pontualmente em $\mathcal{A}_{0,r}(z_0) \subset A$. Se z_0 for não removível então pelo menos algum $c_k, k < 0$, é não nulo. ($c_k = 0$ para todo $k < 0$ implica f analítica em $B_r(z_0)$). Se existe um número *finito* de $c_k's$ não nulos para $k < 0$, diz-se que z_0 é *um polo de* f. Se c_k for não nulo para k em um subconjunto infinito de $\{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ então z_0 é chamada *uma singularidade essencial*. Em qualquer desses dois casos: $\sum\limits_{k<0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k = h(z)$ é a chamada *parte singular de* f. Notemos que: $h\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right) = h(u) = \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} c_\ell u^\ell$ pontualmente para cada $0 <| z - z_0 |< r$, ou seja $\dfrac{1}{r} <| u |< +\infty$, onde $u = \dfrac{1}{z - z_0}$. Portanto a série de potências $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} c_\ell u^\ell$ tem raio de convergência $+\infty$ e define uma função inteira de u. Se $h(u)$ for um polinômio de grau $m \geq 1$, diz-se que o *polo* z_0 *tem ordem* m e usa-se a notação $O(f; z_0) = m$. No caso de singularidade removível vamos algumas vezes dizer que ela é um *polo (removível)* de ordem zero.

É fácil ver que a função $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ tem em $z = z_0$ um polo de ordem 1.

Por outro lado a função $f(z) = e^{\frac{1}{z-z_0}}$ tem uma singularidade essencial em $z = z_0$, pois $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}(z - z_0)^{-k}$ para todo $z \neq z_0$.

14.5 TEOREMA: Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função analítica $f : A \to \mathbb{C}$. Então z_0 é um polo de ordem menor ou igual a m se e só se $(z - z_0)^m \cdot f(z)$ é limitada em $\mathcal{A}_{0,r}(z_0) \subset A$ para algum $r > 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

(i) Seja z_0 um polo de ordem menor ou igual a m. Então a parte singular de f em z_0 é da forma $\sum_{k=1}^{m} c_k(z - z_0)^{-k}$ e daí temos:

$$(z - z_0)^m \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^{k+m} + \sum_{k=1}^{m} c_k(z - z_0)^{-k+m}.$$

O lado direito é uma série de potências ao redor de z_0 com raio de convergência $r > 0$. Logo $g(z) = (z - z_0)^m \cdot f(z)$ é analítica para $z \neq z_0$ no domínio de f e tem singularidade removível em z_0. Sua extensão $\overline{g}$ é analítica em z_0, portanto limitada numa vizinhança de z_0. Assim $(z - z_0)^m \cdot f(z)$ é limitada em $\mathcal{A}_{0,r}(z_0)$ para algum $r > 0$.

(ii) Suponhamos agora $(z - z_0)^m \cdot f(z)$ limitada em $\mathcal{A}_{0,r}(z_0) \subset A$ para algum $r > 0$ e sejam $0 < \rho < r$ e $\sigma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Logo temos $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(z - z_0)^k$ para todo $z \in \mathcal{A}_{0,r}(z_0)$ e $c_k = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma_\rho} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como $\sup_{|z-z_0|=\rho} \mid (z - z_0)^m \mid\mid f(z) \mid \leq M < +\infty$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mid c_k \mid &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it}) \cdot \rho e^{it} i}{(\rho e^{it})^{k+1}}\right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^k}\int_0^{2\pi} \mid f(z_0 + \rho e^{it}) \mid dt \\
&\leq \frac{1}{\rho^k} \sup_{t \in [0,2\pi]} \mid f(z_0 + \rho e^{it}) \mid \leq \frac{1}{\rho^k} \cdot \frac{M}{\rho^m} = \frac{M}{\rho^{m+k}}.
\end{aligned}$$

Notemos que $k < -m$ equivale a $k + m < 0$. Como a desigualdade $\mid c_k \mid \leq \dfrac{M}{\rho^{m+k}}$ pode ser feita para cada $\rho \in]0, r[$, fazendo tal ρ tender a zero vamos obter $c_k = 0$ para $k < -m$. Logo z_0 é polo de ordem $\leq m$. □

14.6 OBSERVAÇÃO: A mesma demonstração fornece: z_0 é singularidade removível de f se e somente se $f(z)$ é limitada em $\mathcal{A}_{0,r}(z_0)$ para algum $r > 0$.

14.7 PROPOSIÇÃO: Para uma singularidade isolada não removível z_0 de f analítica em A, são equivalentes as afirmações:

1. z_0 é polo de ordem m.
2. $c_k = 0$ se $k < -m$ e $c_{-m} \neq 0$.
3. $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe e é diferente de zero.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que (1) e (2) são equivalentes.

(2) $\Rightarrow$ (3): por (2) temos $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum\limits_{k=1}^{m} c_k (z - z_0)^{-k}$ com $c_{-m} \neq 0$. Logo:

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+m} + \sum_{k=1}^{m} c_k (z - z_0)^{-k+m} = g(z)$$

é analítica em $z = z_0$. Assim: $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} = g(z_0) \neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Se $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \alpha \neq 0$, então, existe $r > 0$ tal que $| (z - z_0)^m f(z) - \alpha | < 1$ se $z \in \mathcal{A}_{0,r}(z_0)$ ou seja $| (z - z_0)^m f(z) | < 1 + | \alpha | < +\infty$. Pelo resultado anterior z_0 é polo de ordem $\leq m$. Note agora que $c_{-m} = \alpha \neq 0$. $\square$

Pelo uso de 14.7 e 14.5 podemos mostrar: z_0 é singularidade removível de f se e só se $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

14.8 OBSERVAÇÃO: Já vimos que se f é analítica não constante num aberto conexo A e $f(a) = 0$, então a é um *zero isolado de* f, isto é: existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$ e $f(z) \neq 0$ se $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Neste caso

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k \qquad (\forall z \in B_r(a)).$$

Se existe um primeiro k_0 tal que $\dfrac{f^{(k_0)}(a)}{k_0!} \neq 0$, diz-se então que a é *um zero de ordem* k_0.

14.9 PROPOSIÇÃO: Seja f uma função analítica não constante num aberto conexo A e seja a um zero de f. Então são equivalentes as afirmações:

1. a é um zero de ordem $\geq m$

2. $h(z) = \dfrac{1}{(z-a)^m} f(z)$ é limitada em $(B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A$ para algum $r > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Se (1) é assumido temos

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \qquad (\forall z \in B_\rho(a) \subset A).$$

Logo

$$\frac{f(z)}{(z-a)^m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-m} \qquad (\forall z \in B_\rho(a)), z \neq a.$$

Como o lado direito define uma função analítica em $B_\rho(a)$, temos (2) satisfeita para algum $r > 0$.

Vamos assumir que

$$\sup_{0<|z-a|<r} \frac{|\ f(z)\ |}{|\ z-a\ |^m} = M < +\infty.$$

Logo, para $0 < \rho < r$ e $\sigma_\rho(t) = a + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_\rho} \frac{f(x)}{(x-a)^{k+1}}dx\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_\rho} \frac{h(x)}{(x-a)^{k+1-m}}dx\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\rho^{k+1-m}} \cdot 2\pi\rho \sup_{x\in S_\rho(a)} |\ h(x)\ |= M\rho^{m-k}. \end{aligned}$$

Assim, se $k < m$, temos, passando ao limite para ρ tendendo a 0 que $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} = 0$. Daí segue (1). □

14.10 CONSEQÜÊNCIAS:

1. Se f é analítica não constante em A aberto e conexo e a é um zero de ordem $\geq m$, então $\dfrac{1}{f} = g$ é analítica em $B_r(a) \setminus \{a\}$ para algum $r > 0$. $B_r(a) \subset A$ e a é um polo de g de ordem $\leq m$.

2. Se z_0 é um polo de f analítica complexa em A aberto e conexo, então existe $r > 0$ tal que $g = \dfrac{1}{f}$ é analítica em $B_r(z_0) \cap A$ e z_0 é uma singularidade isolada removível de g. Sendo $\overline{g}$ a extensão analítica de g ao ponto z_0, teremos $\overline{g}(z_0) = 0$ e z_0 é um zero de ordem $\geq m$ se z_0 for um polo de ordem $\leq m$.

3. Funções racionais tem somente polos como singularidades isoladas.

14.11 DEFINIÇÃO: Uma função analítica f em A cujas singularidades isoladas são polos é chamado uma função *meromorfa no aberto* $B = A \cup \{z; z \text{ é polo de } f\}$.

Funções racionais são meromorfas em $\mathbb{C}$.

Observe que se f é meromorfa em B e não é constante em $A = B \setminus \{z; z \text{ é polo de } f\}$ conexo, então $\dfrac{1}{f}$ é meromorfa em B, seus polos sendo os zeros de f. Mais geralmente, o quociente de duas funções analíticas f/g em A conexo é meromorfa em A se g não for identicamente nula em A. Note que os zeros comuns a f e g poder vir a ser singularidades removíveis. A soma, o produto e o quociente de funções meromorfas são meromorfas (no quociente a função do denominador não deve ser identicamente nula).

14.12 TEOREMA: Se z_0 é uma singularidade essencial de f analítica em A, então para quaisquer $\varepsilon > 0, r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ existe $z \in B_r(z_0) \cap A$ tal que $| f(z) - \alpha | \leq \varepsilon$.

DEMONSTRAÇÃO: Se a conclusão não valesse, seria possível achar $\varepsilon > 0, r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ tais que $| f(z) - \alpha | > \varepsilon \quad (\forall z \in B_r(z_0) \cap A)$. Logo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{| f(z) - \alpha |}{| z - z_0 |} \geq \lim_{z \to z_0} \frac{\varepsilon}{| z - z_0 |} = +\infty.$$

Assim teríamos $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - \alpha}$ analítica em $B_r(z_0) \cap A$ e $\lim\limits_{z \to z_0} | z - z_0 | \, g(z) = 0$. Portanto z_0 seria uma singularidade removível de g e poderíamos estender g a uma função $\overline{g}$ analítica em z_0. Também teríamos então $f(z) - \alpha = \dfrac{1}{g(z)}$ com z_0 singularidade removível se $\overline{g}(z_0) \neq 0$, ou um polo de ordem m se $\overline{g}(z_0) = 0$, com z_0 zero de ordem m. Em qualquer caso a hipótese de z_0 ser singularidade essencial de f seria negada. □

14.13 OBSERVAÇÃO: Note que com demonstração análoga se poderia mostrar que sob as hipóteses de 14.12 para quaisquer $\varepsilon > 0, \alpha \in \mathbb{C}, r > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ existe $z \in B_r(z_0) \cap A$ tal que $| f(z) - \alpha | \leq \varepsilon \, | z - z_0 |^k$.

14.14 DEFINIÇÃO: Se f for uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0), r > 0$, diz-se que ∞ é uma *singularidade isolada de* f. Considere $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ para $| z | < \dfrac{1}{r}, z \neq 0$. Logo zero é singularidade isolada de g e diz-se que ∞ é uma *singularidade removível* (resp., *um polo de ordem* m, *uma singularidade essencial*) de f se zero assim o for para g.

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Uma função meromorfa é racional se e só se, quando o ponto no infinito é para ela ou um ponto de analiticidade ou um polo.

SOLUÇÃO.

(i) Supomos a condição válida para a função e desejamos mostrar que ela é racional. Sejam $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ os polos da função meromorfa $f(z)$ (note que só temos quantidade finita deles). Para cada $j = 1, 2, \cdots, n$, seja $g_j(z)$ a parte singular do desenvolvimento de Laurent da função $f(z)$ ao redor do ponto ε_j i.é:

$$g_j(z) = \frac{a_{-n_j}}{(z-\varepsilon_j)^{n_j}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\varepsilon_j}, a_{-n_j} \neq 0, (j = 1, 2, \cdots, m).$$

onde n_j é a ordem do polo ε_j. Denotamos por $g_0(z)$ o polinômio que representa a parte singular do desenvolvimento de Laurent da função $f(z)$ ao redor do ponto $\infty(g_0(z) = 0$ quando ∞ é um ponto de analiticidade da função $f(z))$. Seja $\varphi(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{m} g_j(z)$, ao redor do ponto $\varepsilon_j(j = 1, 2, \cdots, n)$. Podemos representar $\varphi(z)$ na forma seguinte:

$$\varphi(z) = f(z) - g_j(z) - \Big[\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{m} g_i(z)\Big].$$

O desenvolvimento de Laurent da diferença $f(z) - g_j(z)$ segundo as potências de $(z - \varepsilon_j)$ não contém termos com potências negativas de $(z - \varepsilon_j)$. As funções entre colchetes são analíticas em $(z = \varepsilon_j)$. Temos então que $\varphi(z)$ é analítica no ponto $(z = \varepsilon_j)$. Logo se deduz que $\varphi(z)$ é uma função inteira. Na vizinhança do ponto $z = \infty$ podemos representar $\varphi(z)$ na forma:

$$\varphi(z) = f(z) - g_0(z) - \Big[\sum_{j=1}^{m} g_j(z)\Big].$$

O desenvolvimento de Laurent da diferença $f(z) - g_0(z)$ segundo as potências de z não contém potências positivas de z e a função entre colchetes é analítica no ponto $z = \infty$. Logo a função $\varphi(z)$ é analítica no ponto $z = \infty$. Mas uma função inteira que é analítica no infinito é constante. Assim $\varphi(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{m} g_j(z) = c$, c =constante, e daí temos que $f(z) = c + \sum_{j=0}^{m} g_j(z)$. Portanto $f(z)$ é uma função racional.

(ii) A recíproca também é verdade, pois uma função racional ou é analítica no ponto infinito ou tem no mesmo ponto infinito um polo.

2. Existe f analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que para cada $r > 0$, a integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(0)} f(z)dz = 0$ e vale (i) ou (ii) ou (iii)?

(i) $z = 0$ é um polo de ordem maior ou igual a dois,

(ii) $z = 0$ é uma singularidade essencial,

(iii) $z = 0$ é polo de ordem 1.

SOLUÇÃO.
(i) Tomamos $f(z) = \frac{1}{z^k}, k \geq 2$. Então $z = 0$ é um polo de ordem maior ou igual a dois e temos, para cada $r > 0$, a integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(0)} f(z)dz = 0$,

(ii) tomamos $f(z) = e^{1/z} - \frac{1}{z}$. Então $z = 0$ é uma singularidade essencial e temos para cada $r > 0$, a integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(0)} f(z)dz = 0$,

(iii) Vamos supor que exista f analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que a integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(0)} f(z)dz = 0$ para cada $r > 0$, e $z = 0$ é um polo de ordem 1. Então f é da forma seguinte:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{com} \quad a_1 \neq 0.$$

Logo a integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(0)} f(z)dz = a_{-1} \neq 0$.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Para cada uma das seguintes funções classifique suas singularidades:

   (i) $\dfrac{sen\ z}{z^n}, n \in \mathbb{N}$.

   (ii) $\dfrac{z}{(z+1)sen\ z^n}, n \in \mathbb{N}$.

   (iii) $cos(z^{-1})sen(z^{-1})$.

   (iv) $(1 - z^{-n})^{-k}, n, k \in \mathbb{N}$.

2. Mostre que $f(z) = tg\ z$ é analítica em $\mathbb{C}$, exceto para os polos simples em $z = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

3. Prove que uma função inteira tem um polo no infinito de ordem m se e só se é um polinômio de grau m.

4. Caracterize todas as funções racionais que têm singularidades removíveis no infinito.

5. Ache a forma mais geral da função que no plano ampliado tem somente as seguintes singularidades:

   (i) um polo de ordem n,

   (ii) um polo de ordem n no ponto $z = 0$ e um polo de ordem m no infinito,

   (iii) n polos de primeira ordem.

6. Que tipo de singularidade tem a função $F(z) = f(\varphi(z))$ no ponto $z = z_0$ (0 caso $z = \infty$ é admitido) se a função $\varphi(z)$ é analítica ou tem um polo em $z = z_0$, enquanto que o ponto $\varepsilon_0 = \varphi(z_0)$ é para a função $f(\varepsilon)$ uma singularidade do seguinte tipo:

   (i) ponto singular removível,

   (ii) polo de ordem n,

   (iii) ponto singular essencial.

§ 15. RESÍDUOS

15.1 DEFINIÇÃO: Seja z_0 uma singularidade de f analítica em A e $\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k<0}} c_k(z-z_0)^k$ a parte singular de f em z_0. Diz-se que c_{-1} é o *resíduo de f no ponto z_0* e é denotado $Res(f;z_0)$.

Se $A \subset \mathbb{C}$ é aberto e S é um conjunto formado por pontos isolados de A ($s \in S$ é tal que existe $r_s > 0$ com $B_{r_s}(s) \cap A = \{s\}$), então S é um conjunto discreto. Como $S \subset A \subset \mathbb{C}$, segue que S é separável e S é no máximo enumerável. Em particular, se S for compacto então S é finito.

15.2 TEOREMA DOS RESÍDUOS: Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto simplesmente conexo, S um conjunto de pontos singulares isolados de f, f analítica em $A \setminus S$ e γ um caminho regular fechado em $A \setminus S$. Então:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\in S} I(\gamma;a)Res(f;a).$$

Neste caso somente um número finito de termos da soma do lado direito não se anulam.

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade podemos considerar que todo ponto de S não é singularidade removível. Sejam $\gamma : [\alpha,\beta] \mapsto A \setminus S$ e $P = \{z \in \overline{A}; I(\gamma;z) \neq 0\}$. Vimos que P é relativamente compacto em $\mathbb{C}$, e $\overline{P}$ é compacto. Sendo A simplesmente conexo, e se $y \in \partial A$ (fronteira de A) então $I(\gamma;y) = 0$ pois $y \notin A$. Como $y \notin \gamma([\alpha,\beta])$ e as componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha,\beta])$ são abertas, então existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y)$ está contido numa mesma componente e $I(\gamma;z) = 0$ para $z \in B_\delta(y)$. Logo $y \notin \overline{P}$. Assim $\overline{P} \subset A$. Seja agora φ uma homotopia em A entre γ e um caminho reduzido a um ponto $a_0 \in A$. Seja M a imagem de φ que é um compacto contido em A. Logo $M \cup \overline{P} \subset A$ é compacto e, pelo que vimos antes, $S \cap (M \cup \overline{P})$ é finito. Sendo $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ uma enumeração de S, seja $H \subset N$ tal que $\{a_n, n \in H\} = S \cap (M \cup \overline{P})$. Para cada $n \in H$, seja $u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ a parte singular de f em a_n, e $B = A \setminus \{a_n; n \in H\}$. Logo B é aberto e existe g analítica em B tal que:

$$g(z) = f(z) - \sum_{n\in H} u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) \qquad (\forall z \neq a_n, n \in H).$$

Como $M \subset B$, temos que γ é homotópica em B a um caminho reduzido a a_0 pela homotopia φ. Pelo Teorema de Cauchy: $\int_\gamma g(z)dz = 0$, ou seja

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n\in H}\int_\gamma u_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big)dz \qquad (i)$$

Para cada n seja r_n tal que $B_{r_n}(a_n) \supset \gamma([\alpha,\beta])$ e consideremos o anel

$$\mathcal{A}_n = \{z \in \mathbb{C}, z \neq a_n \ \text{ e } \ z \in B_{r_n}(a_n)\}.$$

Então:

$$\int_\gamma u_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big)dz = \int_\gamma \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,n}\frac{1}{(z-a_n)^j}dz.$$

Para $j > 1$ temos:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \alpha_{j,n}\cdot\frac{1}{(z-a_n)^j}dz &= \alpha_{j,n}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a_n)^j}dt \\ &= \alpha_{j,n}\cdot\frac{(1-j)^{-1}}{(\gamma(t)-a_n)^{j-1}}\Big|_\alpha^\beta = 0\end{aligned}$$

(pois $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ curva fechada).

Para $j = 1$ temos

$$\int_\gamma \alpha_{1,n}\cdot\frac{1}{(z-a_n)}dz = \alpha_{1,n}\cdot 2\pi i\ I(\gamma; a_n)$$

Mas $\alpha_{1,n} = Res(f; a_n)$ e podemos escrever

$$\int_\gamma u_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big)dz = 2\pi i I(\gamma; a_n)\cdot Res(f; a_n).$$

Logo (i) ficará:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{n\in H} I(\gamma; a_n)Res(f; a_n).$$

$\square$

15.3 TEOREMA (PRINCÍPIO DO ARGUMENTO): Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, f uma função meromorfa em $A, S = \{z \in A; z$ é um polo de

$f\}, T = \{z \in A; z$ é um zero de $f\}$. Se g for analítica em A, então para qualquer caminho regular fechado γ em $A \setminus (S \cup T)$ tem-se:

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\Big[\sum_{x\in T} I(\gamma;x)g(x)O(f;x) - \sum_{x\in S} I(\gamma;x)g(x)O(f;x)\Big]$$

Aquí $O(f;x)$ é a ordem de f em x, seja x um zero ou um polo de f. Além disso as somas que aparecem do lado direito são finitas.

DEMONSTRAÇÃO: Seja a um polo de $\frac{f'}{f}$ e vamos verificar que

$$Res\Big(g \cdot \frac{f'}{f}; a\Big) = g(a)Res\Big(\frac{f'}{f}; a\Big).$$

Note que a é polo simples. Logo para algum $r > 0$ e para $z \in \mathcal{A}_{(0,r)}(a)$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}
g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z)\cdot\sum_{k=-1}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k\Big)\Big(\sum_{k=-1}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k\Big) \\
&= \frac{g(a)\alpha_{-1}}{(z-a)} + g(a)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k + \alpha_{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \\
&+ \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k\Big).
\end{aligned}$$

O coeficiente de $(z-a)^{-1}$ é $g(a)\cdot\alpha_{-1} = g(a)\cdot Res\Big(\frac{f'}{f}; a\Big)$.

Vamos ver que os polos de $\frac{f'}{f}$ estão no conjunto $S \cup T$. Seja $a \in T$ com $O(f;a) = m$. Para algum $\rho > 0$ temos $f(z) = (z-a)^m h(z)$ para $z \in B_\rho(a)$ com h analítica e não nula. Assim, para $z \in B_\rho(a)$, temos $f'(z) = m(z-a)^{m-1}h(z) + (z-a)^m h'(z)$, donde:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-a)^{m-1}h(z)}{(z-a)^m h(z)} + \frac{h'(z)(z-a)^m}{h(z)(z-a)^m} = \frac{m}{(z-a)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Como $\frac{h'(z)}{h(z)}$ é analítica em $B_\rho(a)$ temos que $Res\Big(\frac{f'}{f}; a\Big) = m = O(f;a)$. Se $a \in S$ e tem ordem m temos: $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}h(z)$ para $z \in \mathcal{A}_{0,r}(a) \subset A$ e algum $r > 0$, com $h(z)$

analítica e não nula em $B_r(a)$. Fazendo contas temos: $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = -\dfrac{m}{(z-a)} + \dfrac{h'(z)}{h(z)}$ e daí: $Res\Big(\dfrac{f'}{f}; a\Big) = -m = -O(f; a)$. Agora basta usar o Teorema dos Resíduos para obter o resultado. □

15.4 DEFINIÇÃO: Um caminho regular fechado γ é *simples*, se o complementar da imagem de γ tem duas componentes conexas e $I(\gamma; x) = 1$ para os pontos x que estão na componente conexa limitada. Neste caso a componente limitada é chamada de *interior de* γ.

15.5 COROLÁRIO: Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto simplesmente conexo, γ um caminho regular fechado simples em A que não passa por qualquer zero de uma dada função analítica f em A. Então:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{\substack{x \in T \\ x \text{ no interior de } \gamma}} O(f; x)$$

onde T é o conjunto dos zeros de f.

15.6 OBSERVAÇÕES: Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto, f analítica em A e $z_0 \in A$ fixo. Vamos supor f não constante em cada componente conexa de A, $w_0 = f(z_0)$ e $g(z) = f(z) - w_0$. Logo z_0 é zero isolado de g com ordem m. Para algum $r > 0$ temos $g(z) = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m h(z)$ $(\forall z \in \overline{B}_r(z_0) \subset A)$ com $h(z)$ analítica e diferente de zero em $\overline{B}_r(z_0)$. Diminuindo r se necessário, podemos supor $f'(z) \neq 0$ para $0 <| z - z_0 |\leq r$. Vamos tomar $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Então por 15.5 temos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = m.$$

Sendo $\Gamma(t) = (f \circ \gamma)(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$ podemos escrever:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w - w_0} = m \quad \text{e} \quad I(\Gamma, w_0) = m.$$

Logo $I(\Gamma; a) = m$ para todo $a \in B_\delta(w_0)$ onde δ é positivo e menor que a distância de w_0 a imagem de Γ. Fixemos $a \neq w_0, a \in B_\delta(w_0)$ e seja $P(z) = f(z) - a$. Então

$$m = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w - a} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum_{x \in T} O(P; x),$$

onde T é O conjunto dos zeros de P que estão no interior de $\overline{B}_r(z_0)$. Como $f'(y) = P'(y) \neq 0$ para $y \in B_r(z_0)$, os zeros de P são simples. Logo $O(P; x) = 1$ se $x \in T$ e a equação $f(z) - a = 0$ tem m soluções distintas em $B_r(z_0)$ para cada $a \in B_\delta(w_0)$.

Resumindo: Dado um zero z_0 de ordem m da função $f(z) - w_0$, então é possível achar $B_r(z_0)$ e $B_\delta(w_0)$, tais que se $a \neq w_0, a \in B_\delta(w_0)$, a equação $f(z) = a$ tem m soluções distintas em $B_r(z_0)$.

15.7 TEOREMA: Se A é aberto e f analítica em A e não constante nas componentes conexas de A, então f leva abertos em abertos.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \subset A$ aberto e $D = f(B)$. Dado $w_0 = f(z_0) \in D, (z_0 \in B)$, como vimos em 15.6 existem $r > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $w \in B_\delta(w_0)$, pode ser achado $z_w \in B_r(z_0)$ tal que $f(z_w) = w$. Logo $B_\delta(w_0) \subset D$ se $r > 0$ for tal que $B_r(z_0) \subset B$. Portanto D é aberto. □

15.8 COROLÁRIO: Se f é analítica em z_0, $f'(z_0) \neq 0$, então existe $r > 0$ tal que f é injetora sobre $B_r(z_0), f'(z) \neq 0$ para $z \in B_r(z_0)$ e a imagem de $B_r(z_0)$ por f é aberta e conexa.

DEMONSTRAÇÃO: Note que $f'(z_0) \neq 0$ implica que z_0 é um zero simples da equação $f(z) = f(z_0)$ (Vide 15.6). □

15.9 TEOREMA DE ROUCHÉ: Sejam A aberto simplesmente conexo em $\mathbb{C}$ e f, g funções analíticas em A. Sejam T_1 o conjunto dos zeros de f em A, T_2 o conjunto dos zeros de $f + g$ em A e $\gamma : [a, b] \to A \setminus T_1$ um caminho regular fechado. Se $| g(z) |<| f(z) |$ para cada z na imagem de γ, então $f + g$ não tem zeros sobre a imagem de γ e:

$$\sum_{x \in T_1} I(\gamma; x) O(f; x) = \sum_{x \in T_2} I(\gamma; x) O(f + g; x).$$

Em particular se γ for simples:

$$\sum_{x \in T_1} O(f; x) = \sum_{x \in T_2} O(f + g; x)$$

isto é: o número de zeros tanto de f como de $f + g$, contados como soma de suas ordens no interior de γ, é o mesmo.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que se $f(x) + g(x) = 0$ então $| f(x) |=| g(x) |$. Logo os zeros de $f + g$ não podem estar em $\gamma([a, b])$ pois alí $| g(z) |<| f(z) |$. Vamos tomar $h = \dfrac{(f + g)}{f}$ que é analítica em $A \setminus T_1$ e meromorfa em A. Temos $\dfrac{(f + g)'}{f + g} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{h'}{h}$ em $A \setminus (T_1 \cup T_2)$. Pelo princípio do argumento e pela igualdade

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(f+g)'}{(f+g)}(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz$$

obtemos

$$\sum_{x\in T_1} I(\gamma;x)O(f;x) - \sum_{x\in T_2} I(\gamma;x)O(f+g;x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz.$$

Seja $\Gamma(t) = h(\gamma(t)), t \in [a,b]$, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = I(\Gamma;0).$$

Notemos que:

$$\mid \Gamma(t) - 1 \mid = \left|\frac{(f+g)(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} - 1\right| = \left|\frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\right| < 1 \quad (\forall t \in [a,b]).$$

Logo Γ é um caminho regular fechado em $B_1(1), 0 \notin B_1(1)$ e $B_1(1)$ é simplesmente conexo. Daí $I(\Gamma;0) = 0$ e o nosso resultado esta demonstrado. □

I EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

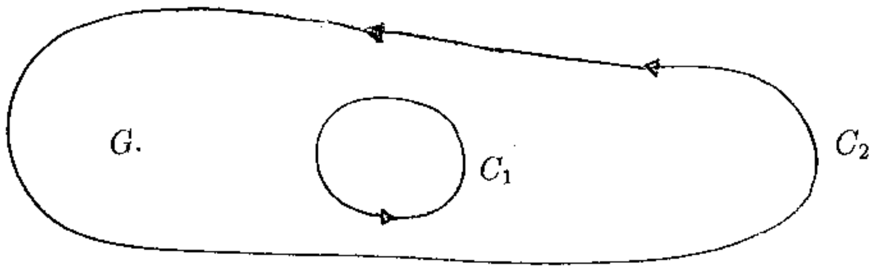
1. Use o Teorema de Resíduos para mostrar que se f for analítica bijetora do aberto A sobre o aberto B e se $z_0 \in A$, então existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(f(z)) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{S_\delta(z_0)} \frac{\varepsilon f'(\varepsilon)d\varepsilon}{f(\varepsilon) - f(z)}$ para $z \in B_\delta(z_0)$ onde $S_\delta(z_0) = z_0 + \delta e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Logo $f^{-1}(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{S_\delta(z_0)} \frac{\varepsilon f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon) - w}d\varepsilon$.

   SOLUÇÃO. Seja $F(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon) - f(\varepsilon)}$ é analítica em A, exceto no ponto $f(\varepsilon) = f(z)$ (ou seja $\varepsilon = z$, pois f é bijetora). Como A é aberto, para $z_0 \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\sigma(z_0) \subset A$. Se $z \in B_\delta(z_0)$ pelo teorema dos resíduos temos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\delta(z_0)} \frac{\varepsilon f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon) - f(z)}d\varepsilon = \sum Res(F;z) = z,$$

   pois $\lim\limits_{\varepsilon\to z}(\varepsilon - z)F(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to z}\dfrac{(\varepsilon - z)\varepsilon f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon) - f(z)} = z.$

2. Sejam C_1 e C_2 dois caminhos como mostra a figura (i), e seja G aberto conexo compreendido entre os dois caminhos. Se f é analítica em G prove que: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}dz \;\; \forall\, z \in G, z_0 \in G.$



SOLUÇÃO. Seja $F(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$, que é analítica em $G \setminus \{z_0\}$, como $z_0 \in G$. Tome $0 < \rho < r$ com $r = min\{dist(z_0, C_1), dist(z_0, C_2)\}$. Então $B_\rho(z_0) \subset G$. Logo, pelo teorema dos resíduos, temos:

$$\int_{S_\rho(z_0)} F(z)dz = 2\pi i \; Res(F; z_0) = 2\pi i f(z_0) \qquad (i)$$

Além disso:

$$\int_{S_\rho(z_0)} F(z)dz = \int_{C_2} F(z)dz - \int_{C_1} F(z)dz \qquad (ii)$$

De (i) e (ii) temos:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

3. Seja f analítica num aberto $A, \overline{B_R(0)} \subset A$. Se $z_1, \cdots, z_n$ são pontos distintos de $B_R(0)$, ache o valor de $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_1)\cdots(z - z_n)}dz$ onde $\gamma(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Discuta o caso em que os $z_1, \cdots, z_n$ não são distintos.

SOLUÇÃO.

(a) Supomos $z_i \neq z_j$ se $i \neq j$. Seja $F(z) = \dfrac{f(z)}{(z - z_1)\cdots(z - z_n)}$ que é analítica em $B_R(0) \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$. Logo temos:

$$\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(F; z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \frac{f(z_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (z - z_k)}.$$

(a) Supomos $z_i \neq z_j$ se $i \neq j$. Seja $F(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}$ que é analítica em $B_R(0) \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$. Logo temos:

$$\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(F; z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \frac{f(z_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m}(z-z_k)}.$$

(b) Seja $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ as multiplicidades de $z_1, \cdots, z_r$ com $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Então

$$\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{r} Res(F; z_j). \qquad (i)$$

onde

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)^{\lambda_1}\cdots(z-z_r)^{\lambda_r}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i = n,$$
$$Res(F; z_j) = \frac{1}{(j-1)!}\lim_{z\to z_j}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}[F(z)(z-z_j)^{\lambda_j}].$$

Portanto (i) ficará:

$$\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{(j-1)!}\lim_{z\to z_j}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}[F(z)(z-z_j)^{\lambda_j}].$$

4. Seja φ analítica numa vizinhança de $a, \varphi'(a) \neq 0$. Se f é analítica e tem polos simples no ponto $\varphi(a)$, com $Res(f; \varphi(a)) = A$, prove que $Res(f \circ \varphi; a) = \dfrac{A}{\varphi'(a)}$.

SOLUÇÃO. Como φ é analítica numa vizinhança de a temos $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Por causa de $\varphi'(a) \neq 0$ tem-se $a_1 \neq 0$. Para f temos a representação $f(z) = \dfrac{A}{z-\varphi(a)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-\varphi(a))^k$. Então para $z = \varphi(w)$ obtemos:

$$f(\varphi(w)) = \frac{A}{\varphi(w)-\varphi(a)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varphi(w)-\varphi(a))^k$$

ou

$$(w-a)f(\varphi(w)) = \frac{(w-a)A}{\varphi(w)-\varphi(a)} + (w-a)\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varphi(w)-\varphi(a))^k$$
$$\lim_{w\to a}(w-a)(f\circ\varphi)w) = \frac{A}{\varphi'(a)}$$

e obtemos $Res(f\circ\varphi; a) = \dfrac{A}{\varphi'(a)}$.

5. Seja $f(z)$ analítica num conjunto G aberto conexo limitado contendo uma curva simples fechada γ seu interior. Se a está no interior de γ, prove que:

(i) $[f(a)]^n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{[f(z)]^n}{z-a}dz; n = 1, 2, \cdots$

(ii) $| f(z) |^n \le \dfrac{M^n L}{2\pi D}$, onde $M = \max\limits_{z\in\gamma} | f(z) |, D = dist(a, \gamma)$ e L é o comprimento de γ.

SOLUÇÃO.

(i) Seja $F(z) = \dfrac{[f(z)]^n}{z-a}$, que é analítica em $G\cup\gamma\setminus\{a\}$. Portanto $\displaystyle\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i\ Res(F; a) = 2\pi i[f(a)]^n$. Daí obtemos $[f(a)]^n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{[f(z)]^n}{z-a}dz$.

(ii) De (i) temos $| f(a) |^n \le \dfrac{1}{2\pi}\cdot M^n \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{| z-a |} | dz |$, como $| z-a | > D$, para todo $z\in\gamma$ e $\displaystyle\int_\gamma | dz | = L$ é claro que $| f(a) |^n \le \dfrac{M^n L}{2\pi D}$.

6. Se m e n são inteiros positivos e $| a | < 1$, quantos zeros tem a função $F(z) = z^m\left(\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^n - a$ em $B_1(0)$.?

SOLUÇÃO. Sejam $g(z) = z^m\left(\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^n$ e $h(z) = -a$. Então $F(z) = g(z)+h(z)$. Observe que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1$ quando $| z | = 1$. Portanto $g(z) = | z |^m \left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^n = 1$ para $| z | = 1$ e $| h(z) | = | a | < 1$. Daí $| g(z) | > | h(z) |$ para todo $z\in S_1(0)$. Pelo teorema de Rouché o número de zeros da função $F(z)$ é igual ao número de zeros da função $g(z)$ em $B_1(0)$. Como o número de zeros da função $g(z)$ em $B_1(0)$ é $m+n$, o número de zeros de $F(z) = m+n$.

7. Seja f analítica sobre um aberto contendo um caminho regular fechado simples γ e seu interior (com exceção de z_0 onde f tem polo simples). Suponha que $|f(z)|=1$ sobre γ. Mostre que para cada $a \in \mathbb{C}, |a|>1, f(z)=a$ tem uma única raíz no interior de γ.

SOLUÇÃO. Seja $r = dist(z_0;\gamma)$ e tomemos $0<\rho<r$. Então f é da forma $f(z) = \dfrac{\alpha_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-z_0)^k, 0<|z-z_0|<\rho$. Fazendo $F(z)=(z-z_0)f(z)-a(z-z_0)$ vemos que F é analítica sobre γ e no seu interior. Sejam $h(z)=f(z)(z-z_0)$ e $g(z)=-a(z-z_0)$. Para $z\in\gamma$ obtemos $|h(z)|=|z-z_0||f(z)|=|z-z_0|$, $|g(z)|=|-a(z-z_0)|>|z-z_0|$. Portanto $|g(z)|>|h(z)|$, para todo $z\in\gamma$. Pelo teorema de Rouché o número de zeros de $F(z)$ é igual ao número de zeros de $g(z)$ no interior de γ, e $f(z)-a$ tem uma única raíz no interior de γ.

8. Se n é um inteiro, $n\geq 2$, quantos zeros tem a equação $e^{z-1}-z^n=0$ no interior de $|z|<1$?

SOLUÇÃO. Note que se $F(z)=e^{z-1}-z^n$, então quando $z=1$ temos $F(z)=0$. Logo vai ser impossível escolher duas funções $g(z), h(z)$ tais que $F(z)=g(z)+h(z)$ e $|g(z)|>|h(z)|$ ou $|h(z)|>|g(z)|$ em $S_1(0)$. Ou seja, é impossível aplicar o teorema de Rouché e dizer quantos zeros tem a função $F(z)$ no interior de $|z|<1$. Para resolver o problema neste caso, fazemos o seguinte: seja $\delta>0$ e $|z|=1+\delta$. Tome $g(z)=e^{z-1}$ e $h(z)=-z^n$. Então $|g(z)|=|e^{z-1}|\leq e^{|z|-1}=e^{\delta}, |h(z)|=|z|^n=(1+\delta)^n$ em $|z|=1+\delta$. Se $\delta\in]0,1[$ e $n\geq 2$ temos $|h(z)|=(1+\delta)^n>e^{\delta}$. Portanto $|h(z)|>|g(z)|$ para todo $z\in S_{1+\delta}(0)$. Se $0<\delta'<\delta, |h(z)|>|g(z)|$ para todo $z\in S_{1+\delta'}(0)$. Então pelo teorema de Rouché a função $F(z)=g(z)+h(z)$ tem a mesma quantidade de zeros que a função $h(z)$ no interior de $B_{1+\delta}(0)$ para cada $0<\delta\leq 1$. Ou seja $F(z)$ tem n zeros no interior de $B_{1+\delta}(0)$. Como $\bigcap_{0<\delta<1} B_{1+\delta}(0)=\overline{B}_1(0)$, temos que $F(z)$ tem $(n-1)$ zeros no interior de $B_1(0)$, pois ele tem um zero em $S_1(0)$. Note que existe uma relação entre n e δ, ela esta dada por $\dfrac{\delta}{\ell n(1+\delta)}<n$. Quando trabalhamos com $|z|=1-\delta$ temos $|h(z)|=(1-\delta)^n$ e $|g(z)|=e^{z-1}=e^{\delta-2}$. Portanto se $|g(z)|>|h(z)|$, em $S_{1-\delta}(0)$ vamos ter $e^{\delta-2}>(1-\delta)^n$, logo $n>\dfrac{\delta-2}{\ell n(1-\delta)}$. Se δ for suficientemente pequeno deveremos ter n grande. Logo vai ser impossível afirmar que $|g(z)|>|h(z)|$ em $S_1(0)$.

9. Seja $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de funções analíticas num aberto conexo G, uniformemente convergente no interior de G para uma função $f(z)\neq 0$. Então, para

qualquer curva simples fechada regular γ, pertencente a G junto com sua parte interior, e que não passe pelos zeros da função $f(z)$, existe um número $\alpha = \alpha(\gamma)$ tal que: para $n > \alpha(\gamma)$, cada uma das funções $f_n(z)$ tem , no interior de γ, o mesmo número de zeros que o número de zeros da função f.

SOLUÇÃO. Seja $u = \min_{z\in\gamma} | f(z) | > 0$ pela condição do problema. Como $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente sobre γ, então existe um $\alpha(\gamma)$ tal que para $n > \alpha(\gamma)$ tem-se $| f_n(z) - f(z) | < u \leq | f(z) |$ para todo $z \in \gamma$. Então, pelo teorema de Rouché, $f_n(z) = [f_n(z) - f(z)] + [f(z)]$ e $f(z)$ tem um mesmo número de zeros no interior de γ.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostre que $Res(e^{z+z^{-1}};0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$.

2. Sejam f, g analíticas numa vizinhança de c, com $g(c) = g'(c) = 0$ e $g'(c) \neq 0$. Mostre que $Res(f/g;c) = [6f'(c)g''(c) - 2f(c)g'''(c)] \Big/ _{(3g''(c)^2)}$.

3. Ache $Res(f(z)\varphi(z);a)$, se $\varphi(z)$ é analítica no ponto $z = a$ e $f(z)$ nesse ponto é:

   (i) um polo simples de resíduo A,

   (ii) um polo de ordem k com a parte singular $\frac{c_{-1}}{z-a} + \cdots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$.

4. Ache $Res[\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)};a]$, se $\varphi(z)$ é analítica no ponto $z = a$ e:

   (i) a é zero de ordem n da função $f(z)$,

   (ii) a é um polo de ordem n da função $f(z)$.

5. A função $\varphi(z)$ tem no ponto $z = a$ um polo simples de resíduo A e $f(\varepsilon)$ tem no ponto $z = \infty$ um polo simples com parte singular $\beta\ \varepsilon$. Ache $Res[\varphi(z);a]$.

6. Quantas raízes existem no círculo $| z | < 1$ para a equação:

$$e^z - 4z^n + 1 = 0 \qquad (n \text{ um número natural}).$$

7. Quantas raízes existem no círculo $\mid z \mid < 1$ para a equação:

$$z^n - \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \qquad \text{sendo} \qquad \mid \alpha_0 \mid > \mid \alpha_1 \mid + \mid \alpha_2 \mid + 1 \qquad (n \text{ é um número natural}).$$

8. Mostre que a equação: $z = \lambda - e^{-z} (\lambda > 1)$ tem no semiplano da direita uma raíz única que é real.

9. Ache o número de raízes do polinômio: $z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$, no semiplano da direita.

10. Em que quadrantes se acham as raízes da equação: $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$.

11. Prove que a equação $z \, tg \; z = a, a > 0$ tem só raízes reais.

12. A equação $(z-1)^p e^z = a, p \in \mathbb{N}$ e $\mid a \mid < 1$, tem exatamente p raízes distintas no plano $\mathbb{C}$, com $Re(z) > 0$. Se $\mid a \mid \leq \dfrac{1}{2^p}$, todas as suas raízes estão em $B_{1/2}(1)$.

§ 16. APLICAÇÕES DA TEORIA DOS RESÍDUOS PARA CÁLCULO DE INTEGRAIS REAIS

CASO 1:

$$\int_0^{2\pi} R(cos\theta, sen\theta)d\theta = J$$

onde $R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ é um quociente de polinômios em duas variáveis. Usamos a substituição $z = e^{i\theta}$ para obter:

$$J = -i\int_{c_1} R\Big(\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\Big)\frac{dz}{z}$$

onde $c_1(\theta) = e^{i\theta}; \theta \in [0, 2\pi]$.

Agora basta usar o Teorema dos Resíduos.

EXEMPLO: Se $a > 1$, ache $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + cos\theta}$.
Como $cos\theta = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$, temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + cos\theta} = -2i\int_{c_1}\frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

A função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2az + 1}$ só não é analítica em pontos que anulam o denominador: $\sqrt{a^2-1} - a \in B_1(0)$ e $-a - \sqrt{a^2-1} \notin B_1(0)$. Daí $-a + \sqrt{a^2-1}$ é singularidade de $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2az + 1}$ em $B_1(0)$ e

$$\begin{aligned} Res(f, \sqrt{a^2-1} - a) &= \lim_{z \to \sqrt{a^2-1}-a} \frac{(z + a - \sqrt{a^2-1}}{(z + a - \sqrt{a^2-1})(z + a + \sqrt{a^2+1}} \\ Res(f, \sqrt{a^2-1} - a) &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \end{aligned}$$

Usamos

$$Res(f,a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}$$

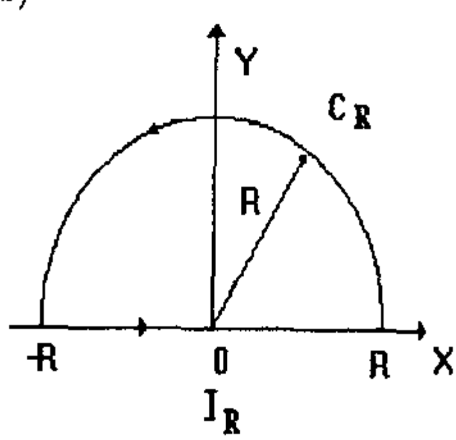
onde a é um polo de ordem k. Daí

$$\begin{aligned} -2i\int_{c_1}\frac{dz}{z^2+2az+1} &= -2i\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \\ \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+cos\theta} &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \end{aligned}$$

CASO 2: Seja

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios em uma variável com 2+ grau $(P) \leq$ grau (Q) e Q não tem zeros reais. Para achar $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, deve ser usado o teorema dos resíduos para $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ no caminho fechado γ_R cuja imagem é



$$\begin{aligned} C_R(t) &= Re^{it}\ ,\ t\in[0,\pi] \\ I_R(t) &= t\ ,\ t\in[-R,R] \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_R} R(z)dz = \int_{C_R} R(z)dz + \int_{I_R} R(z)dz$$

$$\Rightarrow 2\pi i \sum_{I_m b>0} Res(R;b) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} R(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} R(z)dz$$

$$| R(z) | = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{a_m z^m + \cdot + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_0}\right| = \left|\frac{a_m}{b_n z^{n-m}}\right|\left|\frac{1+\cdots+\frac{a_0}{a_m z^m}}{1+\cdots+\frac{b_0}{b_n z^n}}\right|.$$

Se $n - m \geq 2$, para $| z | = R$ suficientemente grande temos:

$$| R(z) | < \frac{2 | a_m |}{| b_n | R^2} = \frac{C}{R^2}$$

e

$$\left|\int_{C_R} R(z)dz\right| < \frac{C}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi C}{R} \to 0 \text{ quando } R \to \infty.$$

Portanto, pelo Teorema dos Resíduos, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{I_m(b)>0} Res(R;b)$$

EXEMPLO:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 9} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 9}$$

temos

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{z^2}{(z-\sqrt{3}i)^2(z+\sqrt{3}i)^2} \\ Res(R;\sqrt{3}i) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\sqrt{3}i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-\sqrt{3}i)^2}{(z-\sqrt{3}i)^2(z+\sqrt{3}i)^2}\right] \\ Res(R;\sqrt{3}i) &= \lim_{z\to\sqrt{3}i}\frac{2z\sqrt{3}i}{(z+\sqrt{3}i)^3} = \frac{1}{4\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 9} = \frac{2\pi i}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

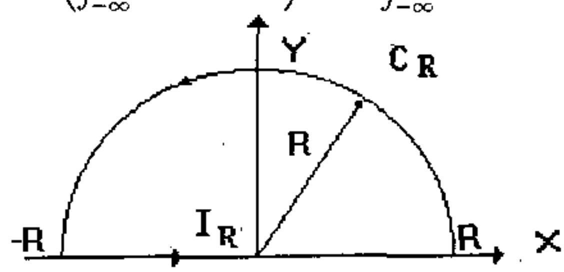
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 9} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

CASO 3:

Seja $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx$, onde $R(x)$ satisfaz as condições do Caso 2.

Temos:

$$Re\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)cosx\ dx$$
$$Im\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)senx\ dx$$



$$\int_{\gamma_R} R(z)e^{iz}dz = \int_{C_R} R(z)e^{iz}dz + \int_{I_R} R(x)e^{ix}dx.$$

Para R grande:

$$2\pi i \sum_{imb>0} Res(R(z)e^{iz}; b) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} R(x)e^{ix}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} R(z)e^{iz}dz$$
$$z \in C_R \Rightarrow z = R(cost + isent), t \in [0,\pi]$$
$$\sup_{z\in C_R} \mid R(z)e^{iz} \mid \leq \frac{M}{R^2}\cdot \sup_{z\in C_R} \mid e^{iz} \mid = \frac{M}{R^2}\sup_{t\in[0,\pi]} e^{-Rsent} \leq \frac{M}{R^2}$$
$$\left|\int_{C_R} R(z)e^{iz}dz\right| \leq \frac{M\pi}{R^2}\cdot R \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.$$

Portanto, pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{imb>0} Res(R(z)e^{iz}; b).$$

EXEMPLO: Achar

$$\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{x^2+a^2}dx \quad \text{onde} \quad a > 0$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}Re\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx = 2\pi i \sum_{imb>0} Res\Big(\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}; b\Big)$$
$$z^2 = -a^2 \Rightarrow z = \pm ai$$

Daí

$$Res\left(\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}; ai\right) = \lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}(z-ai)}{(z+ai)(z-ai)} = \frac{e^{-a}}{2ai}$$

implica

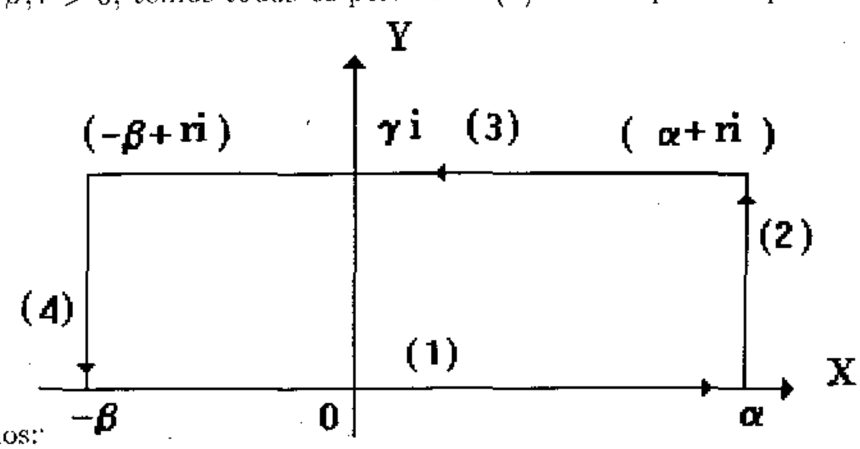
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{a}\int_0^{+\infty}\frac{cosx}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

CASO 4:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{ix}dx$$

onde $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ tem zero simples no ∞ e não possui zeros no eixo real.

Logo $\mid R(z) \mid \leq M/ \mid z \mid$ para $\mid z \mid$ grande. Escolhendo α, β, r suficientemente grandes $\alpha, \beta, r > 0$, temos todos os polos de $R(z)$ do semiplano superior dentro do retângulo:



Então temos:

$$\begin{aligned}\int_{(1)}R(z)e^{iz}dz \quad &+ \quad \int_{(2)}R(z)e^{iz}dz + \int_{(3)}R(z)e^{iz}dz + \\ &+ \quad \int_{(4)}R(z)e^{iz}dz = 2\pi i\sum_{Imb>0}Res(R(z)e^{iz}, b)\end{aligned}$$

Cálculo de $\int_{(2)}R(z)e^{iz}dz = J$. Como $z(t) = \alpha + irt, t \in [0,1]$ então J fica

$$\begin{aligned}\mid J \mid \quad &= \quad \left|\int_0^1 R(\alpha+irt)e^{i(\alpha+irt)}irdt\right| \\ &\text{e} \\ \mid J \mid \quad &\leq \quad \int_0^1 \mid R(\alpha+rit) \mid e^{-rt}ir \mid dt \leq rM\int_0^1\frac{e^{-rt}}{\sqrt{\alpha^2+r^2t^2}}dt \\ \mid J \mid \quad &\leq \quad \frac{M}{\alpha}\end{aligned}$$

Portanto temos:

$$\left|\int_{(2)} R(z)e^{iz}dz\right| \leq \frac{M}{\alpha} \text{ e } \left|\int_{(4)} R(z)e^{iz}dz\right| \leq \frac{M}{\beta}$$

Para $\int_{(3)} R(z)e^{iz}dz = I$, temos:

$$\begin{aligned}
z(t) &= (\alpha + ir) + t(-\alpha - \beta) \\
|\, I \,| &= \left|\int_{(3)} R[\alpha + ir + t(-\alpha - \beta)]e^{i[\alpha+ir+t(-\alpha-\beta)]}(-\alpha - \beta)dt\right| \\
|\, I \,| &\leq \frac{M}{r}e^{-r}(\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

Passando ao limite para $r \to +\infty$ temos $I = 0$.

Analogamente, quando $\alpha \to +\infty$ e $\beta \to +\infty$ temos

$$\left|\int_{(2)} R(z)e^{iz}dz\right| = 0 \quad \text{e} \quad \left|\int_{(4)} R(z)e^{iz}dz\right| = 0$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{Im(b)>0} Res(R(z)e^{iz}, b).$$

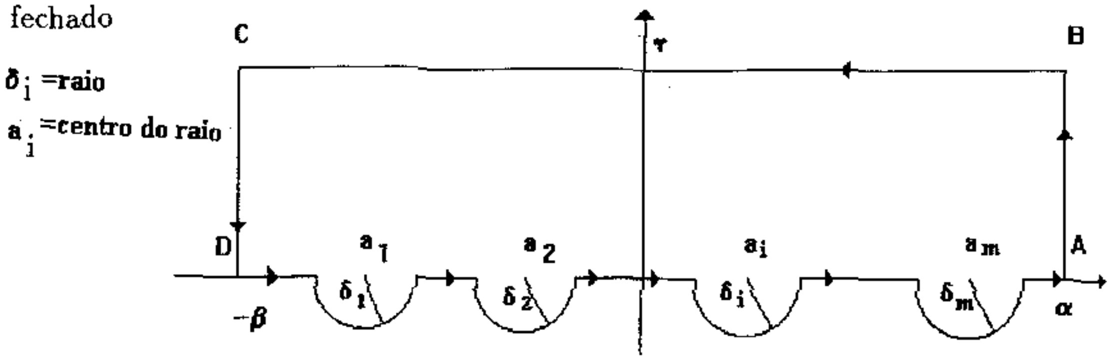
EXEMPLO: Se $a \in \mathbb{R}$, ache $\int_0^{+\infty} \frac{x sen\ x}{x^2 + a^2}dx = J$.

Temos $R(z) = \dfrac{z}{z^2 + a^2}$ e

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + a^2}e^{ix}dx &= 2\pi i Res\Big(\frac{z}{z^2 + a^2}; ai\Big) \\
i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x sen\ x}{x^2 + a^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x cos\ x}{x^2 + a^2}dx &= \pi i e^{-a}
\end{aligned}$$

Então $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x sen\ x}{x^2 + a^2}dx = \pi e^{-a}$ e $J = \dfrac{\pi e^{-a}}{2}$.

CASO 5: $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ com zero simples no ∞ e polos reais simples que coincidem com zeros das funções *sen* ou *cos*, $f(z) = R(z)e^{iz}$. Tomemos o seguinte caminho fechado



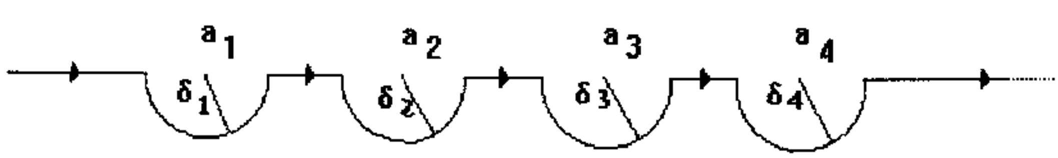
com α, β, r suficientemente grandes e $\delta_1, \cdots, \delta_m$ suficientemente pequenos. Todos os polos de $f(z)$ estão no interior desse caminho fechado

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0 \\ \vdots \\ \delta_m \to 0}} \left[\int_{-\infty}^{a_1-\delta_1} + \int_{a_1+\delta_1}^{a_2-\delta_2} + \cdots + \int_{a_n+\delta_n}^{+\infty} \right] R(x)e^{ix}dx \overset{\text{Not}}{=} V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx.$$

Chamando C ao caminho indicado, devemos ter

$$\int_C R(z)e^{iz}dz = 2\pi i \sum_{Im(b)>0} Res(R(z)e^{iz}, b).$$

Como vimos no caso anterior, ao passarmos aos limites para $\alpha, \beta, r \to +\infty$, a contribuição da integral sobre $ABCD$ vai para zero.



Chamando $\delta_j(t) = a_j + \delta_j e^{it}$ $t \in [\pi, 2\pi], j = 1, 2, \cdots, n$, cada a_j é polo simples de $R(z)$ e portanto $R(z)e^{iz} = \dfrac{\tau_j}{z - a_j} + h_j(z)$, onde $h_j(z)$ é analítica e $\tau_j = Res(R(z)e^{iz}; a_j)$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\delta_j} R(z)e^{iz}dz &= \int_{\delta_j} \frac{\tau_j}{z-a_j}dz + \int_{\delta_j} h_j(z)dz \\
&= i\pi\tau_j + H_j(z)\Big|_{a_j-\delta_j}^{a_j+\delta_j} \\
&= i\pi\tau_j + H_j(a_j+\delta_j) - H_j(a_j-\delta_j) \to i\pi\tau_j \quad \text{quando} \quad \delta_j \to 0
\end{aligned}
$$

A contribuição das integrais sobre os δ_j para $\delta_j \to 0$ é de

$$
\pi i\left(\sum_{j=1}^{m} Res(R(z)e^{iz};a_j)\right).
$$

Logo

$$
V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx + \pi i\sum_{j=1}^{m} Res(R(z)e^{iz};a_j) = 2\pi i\sum_{imb>0} Res(R(z)e^{iz},b)
$$

e

$$
V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx = \pi i\sum_{imb>0} Res(R(z)e^{iz};b) - \pi i\sum_{Imb=0} Res(R(z)e^{iz};a_j)
$$

EXEMPLO:

Achar $J = \int_0^{\infty} \frac{senx}{x}dx.$

$$
J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx}{x} = \frac{1}{2}Im\left(V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx\right) = \frac{1}{2}Im\left[\pi i Res\left(\frac{e^{iz}}{z};0\right)\right] = \frac{\pi}{2}.
$$

CASO 6 Ache $V.P.\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx}dx\right]$, com $R(x)$ como nos casos anteriores. Use a mudança de variável $u = mx$ para obter

$$
V.P.\left[\int_{-\infty}^{+\infty} R\left(\frac{u}{m}\right)e^{iu}\cdot\frac{1}{m}du\right]
$$

que cai nos casos anteriores, e fornece

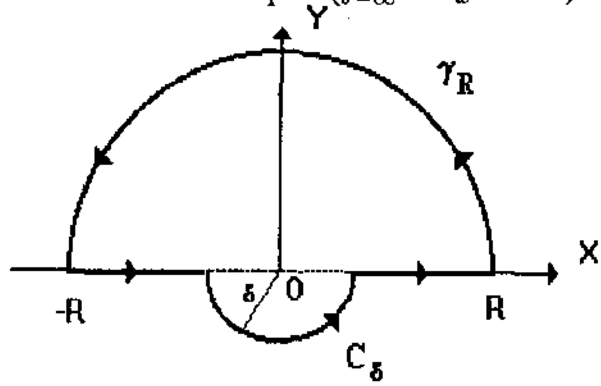
$$Re\Big(V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx}dx\Big) = V.P\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)cosmx\ dx.$$

Potências $cos^k(x)$ ou $sen^k(x)$ podem ser escritas como combinações de funções do tipo $senjx, cosjx$. Logo integrais do tipo $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)cos^k(x)dx$, podem ser calculadas via essas substituições.

EXEMPLO:

Achar $J = \int_0^{+\infty} \frac{sen^2kx}{x^2}dx, k > 0$.
Como $sen^2kx = \frac{1-cos2kx}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{sen^2kx}{x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1-cos2kx)}{x^2}dx = \frac{1}{2}Re\Big(\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{2kxi}}{x^2}dx\Big)\\ &= \frac{1}{4}Re\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{2kxi}}{x^2}dx\Big) = \frac{k}{2}Re\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{it}}{t^2}dt.\end{aligned}$$



zero é o único polo. Seja $C_\delta(t) = \delta e^{it}, t \in [\pi, 2\pi]$

$$J = \int_{C_\delta} \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz$$

$$\frac{1-e^{iz}}{z^2} = \frac{1}{z^2}\Big(1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}\Big) = -\frac{i}{z} + h(z).$$

Logo

$$J = \int_{C_\delta} -\frac{i}{z}dz + \int_{C_\delta} h(z)dz \to \pi \text{ quando } \delta \to 0.$$

Portanto a contribuição da integral sobre C_δ quando $\delta \to 0$ é π. A contribuição sobre γ_R é zero pois

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz\right| \leq \frac{2\pi}{R} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.$$

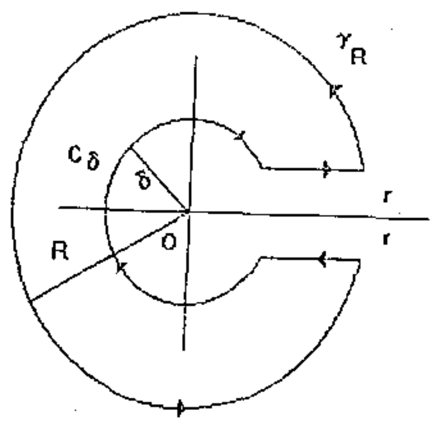
Pelo teorema dos resíduos e passando ao limite para $\delta \to 0$ e $R \to +\infty$, teremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx + \pi = 2\pi i Res\left(\frac{1-e^{iz}}{z^2}, 0\right) = 2\pi i(-i)$$

então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dt = \pi \text{ ou qual implica } \int_0^\infty \frac{sen^2 kx}{x^2} dx = \frac{k\pi}{2}.$$

CASO 7: $\int_0^\infty x^\lambda Q(x)dx, \lambda \in I\!R \setminus \mathbb{Z}$ onde $Q(x)$ é racional e contínua para $x > 0$ e $z^{1+\lambda}Q(z) \to 0$ quando $z \to 0$, $z^{1+\lambda}Q(z) \to 0$ quando $z \to \infty$.



$$z^\lambda = e^{\lambda(\ell n|z| + i\theta(z))} \text{ onde } \theta(z) \in (0, 2\pi).$$

Tomando δ suficientemente pequeno, R suficientemente grande e $r > 0$ suficientemente pequeno, $z^\lambda Q(z)$ terá todos os seus polos, (exceto possivelmente zero) dentro do caminho considerado. Pelo Teorema dos resíduos

$$\int_C z^\lambda Q(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{b \neq 0 \\ b polo}} Res(z^\lambda Q(z), b).$$

Como $z^{1+\lambda}Q(z) \to 0$ quando $|z| \to +\infty$, então existem $R_0 > 0, M > 0$ tais que

$$|z^\lambda Q(z)| \leq \frac{M}{|z|} \forall |z| > R_0$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_R(t) &= Re^{it}, t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \varepsilon = r \\
J = \left|\int_{\gamma_R} z^\lambda Q(z)dz\right| &\leq \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \mid Re^{it} \mid^\lambda \mid Q(Re^{it}) \mid Rdt \\
&\leq \sup_{|z|=R} \mid z \mid^{\lambda+1} \mid Q(z) \cdot \mid (2\pi - 2\varepsilon) \mid .
\end{aligned}
$$

$J \to 0$ quando $R \to \infty$, pois $\mid z^{\lambda+1}Q(z) \mid \to 0$ quando $\mid z \mid \to \infty$. A contribuição da integral sobre γ_R é zero. Temos para

$$
\begin{aligned}
C_\delta : [-2\pi + \varepsilon, -\varepsilon] &\to \mathbb{C} \text{ e } \varepsilon = r, \\
t &\mapsto \delta e^{it} \\
\left|\int_{C_\delta} z^\lambda Q(z)dz\right| &\leq \sup_{|z|=\delta} \mid z^{\lambda+1}Q(z) \mid (2\pi - 2\varepsilon) \to 0 \text{ quando } \delta \to 0.
\end{aligned}
$$

A contribuição da integral sobre C_δ quando $\delta \to 0$ é zero. Logo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{r\to 0_+ \\ \delta\to 0 \\ R\to+\infty}} \int_\delta^R (x+ri)^\lambda Q(x+ri)dx + \lim_{\substack{r\to 0_+ \\ \delta\to 0 \\ R\to+\infty}} (-1)\int_\delta^R (x-ri)^\lambda Q(x-ri)dx \\
&= 2\pi i \sum_{\substack{b\neq 0 \\ b \text{ polo}}} Res(z^\lambda Q(z), b).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0_+} \int_\delta^R (x+ri)^\lambda Q(x+ri)dx &= \int_\delta^R x^\lambda Q(x)dx \\
\lim_{r\to 0_+} \int_\delta^R (x-ri)^\lambda Q(x-ri)dx &= \int_\delta^R x^\lambda e^{2\pi\lambda i} Q(x)dx
\end{aligned}
$$

Fazendo $\delta \to 0$ e $R \to +\infty$ tem-se

$$
\int_0^\infty x^\lambda Q(x)dx - \int_0^\infty x^\lambda e^{2\pi\lambda i} Q(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{b\neq 0 \\ b polo}} Res(z^\lambda Q(z); b)
$$

Daí

$$
\int_0^\infty x^\lambda Q(x)dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \sum_{\substack{b\neq 0 \\ b polo}} Res(z^\lambda Q(z); b)
$$

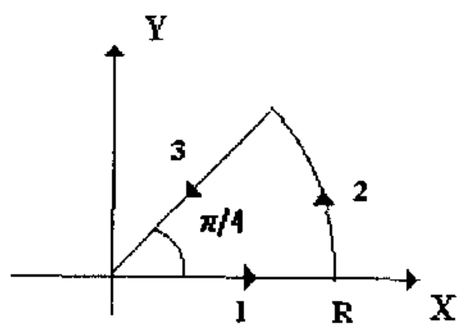
EXEMPLO: Achar $\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}}{x(x+1)}$ se $\beta \in]0,1[$.

Usando a relação indicada acima tem-se $\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}}{x(x+1)} = \frac{\pi}{sen\beta\pi}$, $\beta \in]0,1[$.

CASO 8: *Integrais de Fresnel*

$$\int_0^{\infty} senx^2dx = \int_0^{+\infty} cosx^2dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Assuma que conhecido $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Tomando o caminho fechado C cujo gráfico é:



então

$$\int_C e^{iz^2}dz = 0 = \int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} = 0.$$

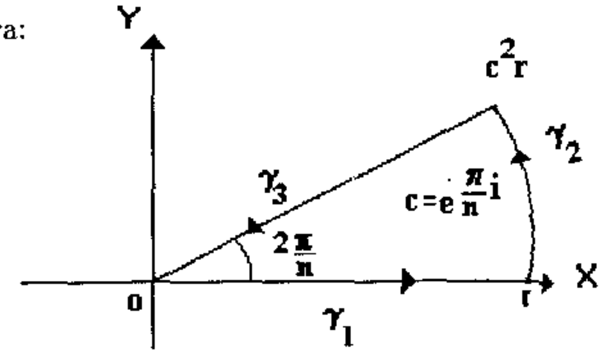
Como $\int_{(2)} = 0$ temos $\int_{(1)} = -\int_{(3)}$, ou seja $\int_0^R e^{+x^2 i}dx = \left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)\int_0^R e^{-\rho^2}d\rho$ quando $R \to \infty$.

Tem-se $\int_0^{\infty} e^{ix^2}dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}(1+i)$ e daí $\int_0^{\infty} senx^2dx = \int_0^{\infty} cosx^2dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

I EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache o valor de $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{x^n+1}dx$ para $m, n \in I\!N$ e $0 < m < n$.

SOLUÇÃO. Se $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{z^n+1}$, os polos de f são de ordem 1, com $Res(f;c) = -\dfrac{1}{n}c^m$, onde $c = e^{\frac{1}{n}\pi i}$. Notemos que f é analítica em $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ e no seu interior, exceto no ponto c, como mostra a figura:



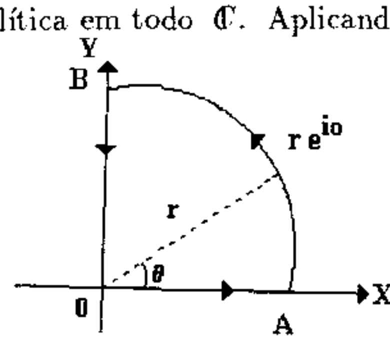
Logo temos

$$\int_0^r f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(\varepsilon)d\varepsilon + \int_{\gamma_3} f(\varepsilon)d\varepsilon = -\frac{2\pi i}{n}c^m. \qquad (i)$$

O caminho γ_{3-} é dado por $\varepsilon(t) = tc^2, t \in [0,r]$ e $c^{2n} = 1$. Logo $\int_{\gamma_3} f(\varepsilon)d\varepsilon = -\int_0^r \dfrac{t^{m-1}c^{2m-2}}{1+t^n c^{2n}} \cdot c^2 dt = -c^{2m}\int_0^r \dfrac{t^{m-1}}{1+t^n}dt = -c^{2m}\int_0^r f(x)dx$ e $\int_{\gamma_2} f(\varepsilon)d\varepsilon \to 0$ quando $r \to \infty$. Portanto por passagem ao limite para $r \to \infty$ na relação (i) temos $(c^{2m} - 1)\int_0^\infty f(x)dx = \dfrac{2\pi i}{n}c^n$ que equivale a $\int_0^\infty \dfrac{x^{m-1}}{1+x^n} = \dfrac{\pi}{n}\left(sen\dfrac{m}{n}\pi\right)^{-1}$.

2. Prove que: $J_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^{1/4}} sen\ x^{1/4}dx = 0, n \in \mathbb{N}$.

SOLUÇÃO. Fazendo $x = t^4$, obtemos $J_n = 4\int_0^\infty t^{4n+3}e^{-t} sen\ t\ dt$. A função $f(z) = z^{4n+3}e^{(i-1)z}$ é analítica em todo $\mathbb{C}$. Aplicando o teorema dos resíduos na seguinte figura temos:



$$\int_{0A} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{B0} f(z)dz = 0.$$

Isto equivale a

$$\int_0^r x^{4n+3}e^{(i-1)x}dx + \int_0^{\pi/2} r^{4n+3}e^{i(4n+3)\theta}e^{(i-1)re^{i\theta}}d\theta - \int_0^r i(ix)^{4n+3}e^{(i-1)ix}dx = 0.$$

É fácil mostrar que $\lim\limits_{r\to\infty}\int_0^{\pi/2} r^{4n+3}e^{i(4n+3)\theta}e^{(i-1)re^{i\theta}}d\theta = 0$.

Portanto

$$\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^r (x^{4n+3}e^{(i-1)x} - x^{(4n+3)}e^{(i-1)ix})dx\right] = 0$$

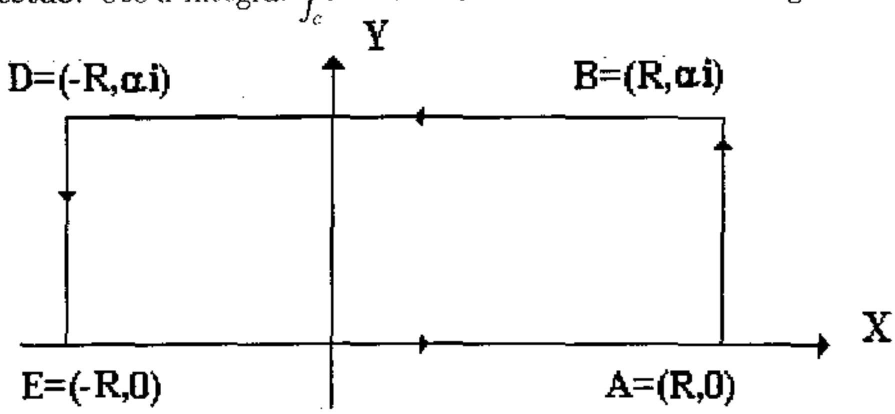
$$\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^r (x^{4n+3}e^{-x}(e^{ix} - e^{-ix})dx\right] = 0.$$

Logo

$$J_n = \int_0^\infty x^{4n+3}e^{-x}sen\ x dx = 0, \qquad \forall\, n \in I\!N.$$

3. Ache o valor da integral $J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}cos(2\lambda\alpha x)dx, (\lambda > 0, \alpha > 0)$.

Sugestão: Use a integral $\int_c e^{-\lambda z^2}dz$ onde c é como mostra a figura:



Solução: A função $f(z) = e^{-\lambda z^2}$ é analítica no interior de $ABDE$. Logo

$$\int_{EA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{BD} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz = 0. \qquad (i)$$

As integrais $\int_{AB} f(z)dz$ e $\int_{DE} f(z)dz$ tendem a zero quando $R \to \infty$, pois para $z = R + iy, 0 \leq y \leq \alpha$ temos:

$$\left|\int_{AB} f(z)dz\right| = \left|i\int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-y^2)}\cdot e^{-2Ri\lambda y}dy\right| \leq \alpha e^{-\lambda(R^2-\alpha^2)} \to 0 \ \text{ quando } \ R \to \infty.$$

Analogamente para $z = -R + iy, 0 \leq y \leq \alpha$ temos:

$$\left|\int_{DE} f(z)dz\right| = \left|-i\int_0^{\alpha} e^{-\lambda(R^2-y^2)}\cdot e^{2Ri\lambda y}dy\right| \leq \int_0^{\alpha} e^{-\lambda(R^2-y^2)}dy \to 0 \text{ quando } R\to\infty.$$

É conhecido que, quando $R\to\infty$, o valor de $\int_{EA} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2}dx$ tende a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2}$.

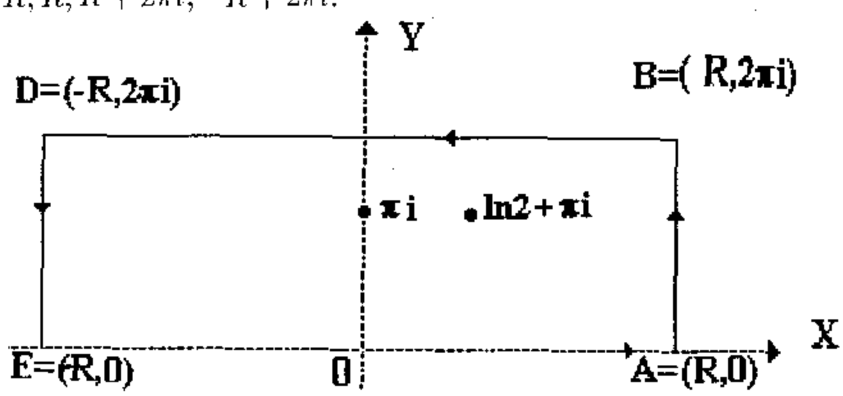
A integral $\int_{BD} f(z)dz$ é igual a $-e^{\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}[cos(2\lambda\alpha x) - i\ sen(2\lambda\alpha x)]dx$. Logo usando todas estas relações em (i) e por passagem ao limite para $R\to+\infty$, temos:

$$e^{\lambda\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}cos(2\lambda\alpha x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},\quad i.e.\quad J = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\lambda\alpha^2}.$$

4. Ache o valor de: $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)(e^x+2)}, 0 < a < 2.$

Sugestão: Considere a integral $\int_c \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)}dz$ onde c e o retângulo com vértices em $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$.

SOLUÇÃO.



A função $f(z) = \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)}$ tem dois polos no interior de $ABDE$: $z = \pi i$ e $z = \ell n2 + \pi i$.

Logo temos:

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{BD} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz + \int_{EA} f(z)dz = 2\pi i[Res(f;\pi i) + Res(f;\ell n2+\pi i)].$$

É fácil mostrar que $\int_{AB} f(z)dz$ e $\int_{DE} f(z)dz \to 0$ quando $R\to\infty$ pois:

(a) para $z = R + iy$ temos

$$\left|\int_{AB} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{(e^{R+iy}+1)(e^{R+iy}+2)} idy\right| \leq \frac{2\pi e^{aR}}{(e^R-1)(e^R-2)} \to 0$$

quando $R \to +\infty$, pois $0 < a < 2$.

(b) para $z = R + iy$ temos

$$\left|\int_{DE} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-R+iy)}}{(e^{-R+iy}+1)(e^{-R+iy}+2)} idy\right| \leq \frac{2\pi e^{-aR}}{(1-e^{-R})(2-e^{-R})} \to 0$$

quando $R \to +\infty$.

Além disso

$$\begin{aligned}
\int_{EA} f(z)dz + \int_{BD} f(z)dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)(e^x+2)} + \int_{R}^{-R} \frac{e^{(x+2\pi i)a}dx}{(e^{x+2\pi i}+1)(e^{x+2\pi i}+2)} \\
&= (1-e^{2\pi i a})\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)(e^x+2)}.
\end{aligned}$$

Passando ao limite para $R \to \infty$ obtemos

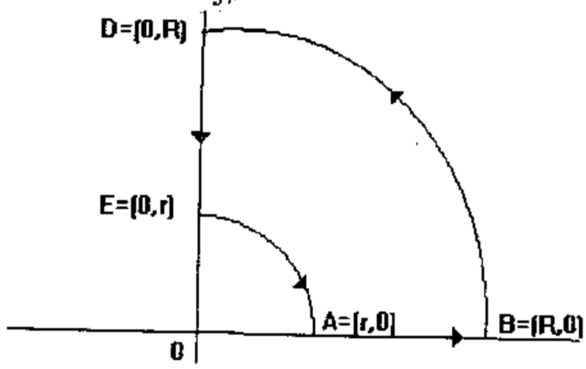
$$\begin{aligned}
(1-e^{2\pi i a})J &= 2\pi i[Res(f;\pi i) + Res(f;\ell n 2 + \pi i)] \\
&= 2\pi i(-e^{a\pi i} + 2^{a-1}e^{a\pi i}).
\end{aligned}$$

Logo

$$J = \frac{\pi}{sen\ \pi a}(1-2^{a-1}), 0 < a < 2.$$

5. Ache o valor da integral $J = \int_0^\infty x^{p-1} cos\ ax dx$, onde com $a > 0, 0 < p < 1$, em termos de $\Gamma(P) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.

Sugestão: Use a integral $\int_c z^{p-1}e^{-az}dz$, onde o contorno c e indicado na figura seguinte:



SOLUÇÃO. A função $f(z) = z^{p-1}e^{-az}$ não tem polos no interior de $ABDEA$. Temos:

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{BD} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz + \int_{EA} f(z)dz = 0. \qquad (i)$$

É fácil ver que $\int_{EA} f(z)dz \to 0$ quando $r \to 0$ pois, para $z = re^{i\theta}$,

$$\left|\int_{\pi/2}^{0} (re^{i\theta})^{p-1}e^{-are^{i\theta}} r \cdot ie^{i\theta}d\theta\right| \leq r^p \cdot \frac{\pi}{2} \to 0 \text{ quando } r \to 0.$$

Para a integral $\int_{BD} f(z)dz$, com $z = Re^{i\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ basta notar que $cos\ \theta$ é decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ daí obter $\lim_{R\to+\infty}\int_{BD} f(z)dz \to 0$.

Para $z = x, r \leq x \leq R$, temos $\int_{AB} f(z)dz \equiv \int_r^R x^{p-1}e^{-ax}dx$.

Para $z = ix; r \leq x \leq R$, temos $\int_{DE} f(z)dz = -\int_r^R i^{p-1}x^{p-1}e^{-aix}idx$.

Portanto, em (i), quando $r \to 0$ e $R \to \infty$, temos

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} - i^p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-aix}dx = 0. \qquad (ii)$$

Como $i^p = e^{p\ell n i} = e^{p\left[\ell n|i| + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i\right]} = e^{\frac{\pi}{2}pi}$ para $k = 0$, em (ii) tem-se:

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} - \left(cos\frac{\pi}{2}p\right)J - \left(sen\frac{\pi}{2}p\right)\int_0^\infty x^{p-1} sen\ ax dx = 0 \qquad (iii)$$

$$- \quad \left(sen\frac{\pi}{2}p\right)J + \left(cos\frac{\pi}{2}p\right)\int_0^{\infty} x^{p-1} sen\ ax dx = 0 \qquad (iv)$$

De (iii) e (iv) temos:

$$J = \frac{\Gamma(p)}{a^p} cos\frac{\pi p}{2}.$$

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Verifique que para $n \geq 1$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1 - 4sen^2\theta)cos2\theta}{1 - cos\ \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(91 - 52\sqrt{3})$.

2. Prove as identidades:

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{5}{6}\pi$.

   (ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad (n \in I\!N)$.

   (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + a^4)^2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a^7} \cdot \pi$ para $a > 0$.

3. Prove que:

   (i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}, a > 0$.

   (ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{32}$.

   (iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{sen^2\theta}{5 - 4cos\ \theta} d\theta = \frac{\pi}{8}$.

   (iv) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + sen^2\theta)^2} d\theta = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$.

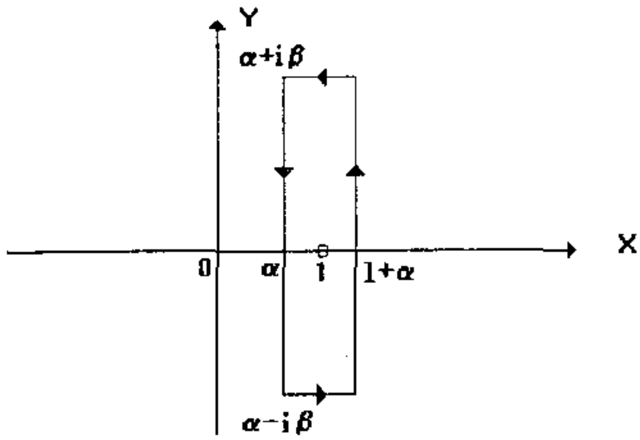
   (v) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{cos\ n\theta}{1 - 2a\ cos\ \theta + a^2} d\theta = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}, n = 0, 1, 2, 3, \cdots, 0 < a < 1$.

(vi) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{do}{(a+b\cos o)^3} = \frac{(2a^2+b^2)\pi}{(a^2-b^2)^{5/2}}, a > \mid b \mid.$

(vii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \ell n\left(\frac{b}{a}\right), a, b > 0.$

4. Ache $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{a^2 sen\ \pi 2}(a^z = e^{z\ell na})$ onde $a > 0$, e c é a reta $x = \alpha, 0 < \alpha < 1$ percorrida de baixo para cima.

Sugestão: Considere $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{a^z sen\ \pi z}$, onde γ é como mostra a figura:



e faça $\beta \to \infty$.

5. Ache as integrais ($a > 0$)

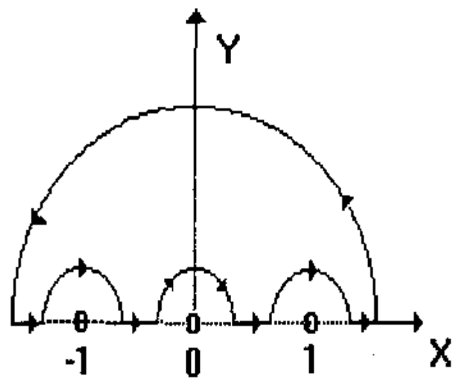
(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ell n^2 x}{x^2+a^2}dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ell nx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ell nx}{\sqrt{x}(x+1)^2}dx.$

(iv) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ell n(x^{-1}-x)}{1+x^2}dx.$

Sugestão: Ache a parte real da integral $\displaystyle\int_c \ell n(z^{-1}-z)\frac{dz}{1+z^2}$ onde c é como mostra a figura:



6. Ache as integrais abaixo onde $a > 0$ e n é um número natural.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(\ell n^2 x + \pi^2)}$.

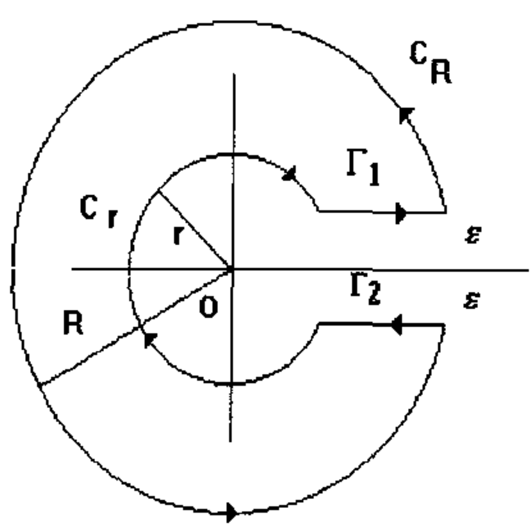
(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ell n^2 x + \pi^2)}$.

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ell n^2 x + (2n+1)^2 n^2)}$.

Sugestão: Considere a integral

$$\int_c \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\ell nz-(2n+1)\pi i}+\frac{1}{\ell nz-(2n-1)\pi i}+\cdots+\frac{1}{\ell nz+(2n-1)\pi i}\right]dz,$$

onde c é como mostra a figura:



7. Ache as integrais dadas (a e b são positivos).

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cdot \frac{sen\ ax}{x} dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen\ ax}{x(x^2 + b^2)} dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen\ ax}{x(x^2 + b^2)} dx.$

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen\ ax}{x(x^2 + b^2)} dx.$

(v) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{cos\ 2ax - cos\ 2bx}{x^2} dx.$

§ 17. REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES MEROMORFAS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Seja $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ uma função racional cujos polos são $a_1, \cdots, a_m$. Para cada a_j seja P_j um polinômio de grau δ_j, sem termo constante, e tal que $P_j\left(\dfrac{1}{z-a_j}\right)$ é a parte singular de f em $a_j, j = 1, \cdots, n$. Temos

$$\begin{aligned} P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) &= \frac{A^{(j)}_{-\delta_j}}{(z-a_j)^{\delta_j}} + \cdots + \frac{A^{(j)}_{-1}}{(z-a_j)} \\ f(z) &= \sum_{j=1}^{n} P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) + g(z) \end{aligned}$$

onde $g(z)$ é uma função inteira. Diz-se então que $f(z)$ *está representada por frações parciais.* As funções racionais, são meromorfas. Por outro lado os polos de uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ é um conjunto no máximo enumerável. Sendo S esse conjunto, podemos enumerar S de maneira a obter uma seqüência $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $lim \mid a_j \mid = +\infty$ (no caso que S não seja finito). Para cada bola $\overline{B_n(0)} = B_n$ só existe um número finito de elementos de S em $\overline{B_n(0)}$. Enumerando os polos de B_1, depois os de $B_2 \setminus B_1$ etc, obtemos a seqüência desejada. Para cada $a_j \in S$ existe um polinômio P_j de grau α_j = ordem de a_j, sem termo constante, tal que $P_j\left(\dfrac{1}{z-a_j}\right)$ é a parte singular de f em a_j. Não se pode garantir a priori que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$ converge. Todavia, *"corrigindo"* cada termo dessa série por um polinômio conveniente, vai ser possível obter uma série convergente de modo que f menos essa série seja uma função inteira. Esse resultado foi demonstrado por Mittag-Leffler, para funções meromorfas no plano complexo.

17.1 TEOREMA: Seja $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos tal que $\lim\limits_{j\to\infty} \mid a_j \mid = +\infty$. Seja $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios sem termo constante. Então existem funções meromorfas em $\mathbb{C}$, cujos polos são os pontos $\{a_j; j \in \mathbb{N}\}$ e cujas partes singulares nesses pontos são dadas por $P_j\left(\dfrac{1}{z-a_j}\right), j \in \mathbb{N}$. Qualquer função com essas propriedades pode ser escrita na forma:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) - Q_j(z)\right) + g(z)$$

onde g é analítica em $\mathbb{C}$ e Q_j é um polinômio, $j \in \mathbb{N}$. (É claro que está sendo suposta a convergência da série indicada).

DEMONSTRAÇÃO: Sem perder a generalidade podemos supor $a_j \neq 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$ (se um deles é zero, deixe-o separado. Pode denotá-lo por $a_0 = 0$ e trabalhar com a função $f(z) - P_0\left(\frac{1}{z}\right)$ em lugar de $f(z)$). Como $P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$ é analítica em $B_{|a_j|}(0)$, podemos representá-la por uma série de potências ao redor de zero. Vamos escolher para $Q_j(z)$ a soma parcial dessa série de ordem n_j. Assim se $| P_j(z) | \leq M_j$ para $| z | \leq \frac{| a_j |}{2}$ obtemos através das desigualdades de Cauchy:

$$\left|P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) - Q_j(z)\right| \leq M_j\left(\frac{4 \mid z \mid}{\mid a_j \mid}\right)^{n_j+1}$$

Para $| z | < \frac{| a_j |}{4}$, note que a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_j\left(\frac{4z}{a_j}\right)^{n_j+1}$$

converge em $\mathbb{C}$ se

$$\lim_{j\to\infty} M_j^{\frac{1}{n_j}} \cdot \frac{1}{| a_j |} = 0.$$

Escolhendo n_j convenientemente isto é possível: por exemplo $n_j > \ell n M_j$. Seja agora $R > 0$ dado. A série

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) - Q_j(z)\right]$$

só tem um número finito de termos com singularidades em certos pontos de $\overline{B}_R(0)$ (são os $j \in \mathbb{N}$ tais que $| a_j | \leq R$). Assim, omitindo esses termos , o que resta converge absoluta e uniformemente sobre $\overline{B}_R(0)$ (por escolher os n_j do modo acima). Para cada $z \notin \{a_j; j \in \mathbb{N}\}$ temos a série

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) - Q_j(z)\right]$$

convergente (z está em algum $\overline{B}_R(0), R > 0$). Portanto

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) - Q_j(z)\right]$$

é meromorfa em $\mathbb{C}$ e seus polos são os a_j com partes singulares $P_j\left(\dfrac{1}{z-a_j}\right), j \in \mathbb{N}$. Duas funções com tais polos e partes singulares tem a sua diferença analítica em $\mathbb{C}$ e o resultado esta demonstrado. □

17.2 APLICAÇÕES:

1. Seja

$$f(z) = \frac{\pi^2}{sen^2 \pi z}$$

que é analítica em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Como $sen^2\pi z = sen^2\pi(z-n)$, segue que

$$\lim_{z\to n}(z-n)^2 \frac{\pi^2}{sen^2\pi z} = \lim_{z\to n}\left(\frac{\pi(z-n)}{sen\pi(z-n)}\right)^2 = 1$$

e cada n é um polo de ordem 2 de $f(z)$. Basta achar a parte singular de f em zero para obter a parte singular de f em m

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{sen^2\pi z} &= \alpha_2 z^{-2} + \alpha_1 z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k \\ sen\pi z &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi z)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ sen^2\pi z &= \pi^2 z^2 + \cdots \ .\end{aligned}$$

Para achar α_1, α_2 temos

$$\frac{\pi^2}{\pi^2 z^2 + \cdots} = \frac{\pi^2}{sen^2\pi z} = \alpha_2 z^{-2} + \alpha_1 z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k,$$

daí $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_1 = 0$.

Conclusão: a parte singular é $\dfrac{1}{z^2}$ e $G_k(z) = \dfrac{1}{(z-k)^2}$ é a parte singular no ponto k.

Logo temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} G_k(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2}. \qquad (i)$$

Para mostrar que (i) converge, para $z \neq k, k \in \mathbb{Z}$, use a comparação com $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$:
Seja n o menor natural maior que $| z |$, então

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{| z-k |^2} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{| z-k |^2} + \sum_{\substack{k>n \\ k<-n}} \frac{1}{| z-k |^2} < +\infty.$$

Note que (i) converge uniformemente sobre cada compacto, após a eliminação dos termos não limitados sobre tal conjunto. Pelo Teorema de Mittag-Leffler, tem-se

$$\frac{\pi^2}{sen^2 \pi z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2} + g(z)$$

onde $g(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$. Vamos mostrar que $g(z) \equiv 0$. Seja

$$h(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2}.$$

Então $h(z)$ e $\frac{\pi^2}{sen \pi z}$ são periódicos com período 1. Logo $g(z) = \frac{\pi^2}{sen^2 \pi z} - h(z)$ é periódica com período 1,

$$\begin{aligned} | sen^2 \pi z | &= senh^2 \pi y + sen^2 \pi x \\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\pi^2}{sen^2 \pi z} \right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\pi^2}{senh^2 \pi y + sen^2 \pi x} \to 0 \text{ quando } y \to \infty. \end{aligned}$$

Para $| y | \geq 1$ fixo, h é periódico e tem-se

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}} | h(x+iy) | = \sup_{|x|\leq 1} \left| \sum_{h\in\mathbb{Z}} \frac{1}{((x-n)+iy)^2} \right| \\ &\leq \sup_{|x|\leq 1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1-n)^2 + y^2} \end{aligned} \qquad (ii)$$

Logo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1-n)^2 + y^2} \leq \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1-n)^2 + 1}}_{converge}.$$

Escolha k suficientemente grande e escreva

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1-n)^2+y^2}=\sum_{n=-k}\frac{1}{(1-n)^2+y^2}+\sum_{\substack{n>k\\ n<-k}}\frac{1}{(1-n)^2+y^2}.$$

Então $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\mid h(x+iy)\mid\to 0$ quando $\mid y\mid\to+\infty$ e daí $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\mid g(x+iy)\mid\to 0$ quando $\mid y\mid\to+\infty$. Como g é inteira e limitada ela é constante. Mas o limite é zero para $\mid k\mid\to+\infty$. Logo $g\equiv 0$ e

$$\frac{\pi^2}{sen^2\pi z}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

2. Mostre que

$$cotg\ z=\frac{cos z}{sen z}\quad \text{e}\quad g(z)=\frac{2i}{e^{2iz}-1}=\frac{1}{e^{iz}sen z}$$

tem as mesmas singularidades que são polos. Note que as partes singulares também são iguais (mostre). Pelo Teorema de Mittag-Leffler $cotg\ z-g(z)=h(z)$ é uma função inteira. (Qual?).

I EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos distintos, não decrescentes em valor absoluto, que converge ao infinito e seja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos. Ache uma função inteira $f(z)$ que tome valores A_k nos pontos ε_k.

   SOLUÇÃO. Pelo Teorema de Weiertrass, existe uma função inteira $h(z)$ que tem zeros simples em ε_k e só nesses pontos e tem a seguinte forma:

$$h(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\varepsilon_k}\right)e^{z/\varepsilon_k+\cdots+z^k/k\varepsilon_k^k}.$$

   É claro que $h'(\varepsilon_k)\neq 0$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Agora, pelo teorema de Mittag-Leffer, achamos uma função meromorfa $\varphi(z)$ que tem polos simples em $\{\varepsilon_k\}$ e só neles com as partes singulares $\dfrac{\left(\frac{a_k}{h'(\varepsilon_k)}\right)}{(z-\varepsilon_k)}$. Logo $\varphi(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{\left(\frac{a_k}{h'(\varepsilon_k)}\right)}{(z-\varepsilon_k)}+P_k(z)\right]$ onde $P_k(z)$ são polinômios escolhidos adequadamente. É claro que o produto $h(z)\varphi(z)$ representa uma função $f(z)$ inteira que satisfaz as condições do problema pois:

$$f(\varepsilon_k)=\lim_{z\to\varepsilon_k}[h(z)\varphi(z)]=\lim_{z\to\varepsilon_k}\left[\frac{h(z)-h(\varepsilon_k)}{(z-\varepsilon_k)}\cdot\varphi(z)(z-\varepsilon_k)\right]=h'(\varepsilon_k)\frac{A_k}{h'(\varepsilon_k)}=A_k.$$

2. Ache a função meromorfa F mais geral cujas únicas singularidades são polos $1, 2, 3, \cdots$ de primeira ordem com $Res(F; n) = n$.

SOLUÇÃO. Sabemos que a função $F(z)$ é da forma $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(G_k(z) + P_k(z))$, onde $g(z)$ é uma função inteira. Pelos dados do problema temos $G_k(z) = \dfrac{k}{z-k}$ e $P_k(z) = 1 + \dfrac{z}{k}$. Logo $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^2}{(z-k)k}$.

3. Ache a função meromorfa F mais geral cujas únicas singularidades são polos a^n de ordem $1(\mid a \mid > 1, n = 1, 2, 3, \cdots)$ com $Res(F; a^n) = a^n$.

SOLUÇÃO. A função procurada é da forma $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(G_k(z) + P_k(z))$, onde $g(z)$ é uma função inteira. Pelos dados do problema temos $G_k(z) = \dfrac{a^k}{z - a^k}$ e $P_k(z) = 1$, logo $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{z}{z - a^k}$.

4. Ache a função meromorfa F mais geral cujas únicas singularidades são polos $n = 1, 2, 3, \cdots$ de ordem dois com parte singular $n^2(z-n)^{-2} + (z-n)^{-1}$.

SOLUÇÃO. A função procurada é da forma $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(G_k(z) + P_k(z))$, onde $g(z)$ é uma função inteira. Pelos dados temos $G_k(z) = \dfrac{k^2}{(z-k)^2} + \dfrac{1}{z-k}$ e $P_k(z) = -1 - \dfrac{2z}{k} + \dfrac{1}{k}$, logo $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{k^2}{(z-k)^2} + \dfrac{1}{(z-k)} - 1 - \dfrac{2z}{k} + \dfrac{1}{k}\right]$.

5. Ache a função meromorfa F mais geral cujas únicas singularidades são polos simples $-1, -2, -3, \cdots$ com $Res(F; -n) = (-1)^n$.

SOLUÇÃO. A função procurada é da forma $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}[G_k(z) + P_k(z)]$ onde $g(z)$ é uma função inteira. Pelos dados temos $G_k(z) = \dfrac{(-1)^k}{z+k}$ e $P_k(z) = -\dfrac{(-1)^k}{k}$. Logo $F(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}z}{k(z+k)}$.

6. Ache a função meromorfa F mais geral cujas únicas singularidades são polos simples $w_{(m,n)} = m + ni, (m, n = 0, 1, 2, \cdots)$ com $Res(F; w_{m+n}) = 1$.

SOLUÇÃO. A função procurada é da forma $F(z) = g(z) + \sum_{m,n}^{\infty}(G_{m,n}(z) + P_{m,n}(z))$, onde $g(z)$ é uma função inteira. Pelos dados temos $G_{m,n}(z) = \dfrac{1}{(z-(m+ni))}$ e $P_{m,n}(z) = \dfrac{1}{m+ni} + \dfrac{z}{(m+ni)^2}$, quando $m = n = 0, P_{0,0}(z) = 0$. Logo tem-se $F(z) = g(z) + \sum_{m,n}^{\infty} \dfrac{1}{(z-(m+ni))} + \dfrac{1}{m+ni} + \dfrac{z}{(m+ni)^2}$.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostre que:

(i) $\dfrac{z}{e^z - 1} = 1 - \dfrac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}$.

(ii) $\dfrac{1}{sen^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{(z - n\pi)^2}$.

(iii) $tg\ z = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{[\frac{(2n-1)\pi}{2}]^2 - z^2}$.

(iv) $\dfrac{1}{sen\ z} = \dfrac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2\pi^2}$.

(v) $\dfrac{1}{cos\ z} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n-1)}{z^2 - [\frac{(2n-1)\pi}{2}]^2}$.

2. Ache a função meromorfa F mais geral cujas únicas singularidades são os polos simples $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots$, com $Res(F; \sqrt{n}) = 1$.

3. Ache a função meromorfa F mais geral cujas únicas singularidades são os polos $\pm n$ de ordem 2 com $Res(F; n) = | n |$.

4. Se $\alpha \neq 0, \beta/\alpha \neq \pm 1, \pm 2, \cdots$. Mostre que: $\dfrac{\pi}{\alpha} cotg \dfrac{\pi\beta}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n\alpha + \beta} - \dfrac{1}{n\alpha + (\alpha - \beta)} \right)$. Desta relação mostre que $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{7.8} + \cdots = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. Se os λ_m são raízes positivas da equação $tg z = z$. Mostre que $\dfrac{z\ sen\ z}{sen\ z - z\ cos\ z} = \dfrac{3}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \lambda_n^2}$.

6. Ache a função meromorfa com polos de ordem 2 em $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$ tal que o resíduo em cada polo é zero e $\lim\limits_{z \to \sqrt{n}} (z - \sqrt{n})^2 f(z) = 1$.

§ 18. PRODUTOS INFINITOS

18.1 DEFINIÇÃO: Seja $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos onde apenas um número finito dos α_j são nulos. Seja $I = \{j; \alpha_j = 0\}$. Para cada $m \in I\!N$ tome $P_m = \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^{m} \alpha_j$.

Diz-se que o produto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ existe se $\lim_{m \to \infty} P_m = \alpha \neq 0$.

18.2 OBSERVAÇÕES:

1. Se $\prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ existe então $\lim_{j \to \infty} \alpha_j = 1$. De fato: se $j - 1 \notin I$ teremos $\alpha_j = \dfrac{P_j}{P_{j-1}}$ e $\alpha_j \cdot P_{j-1} = P_j$. Assim $\lim_{j \to \infty} \alpha_j = \dfrac{\alpha}{\alpha} = 1$. Portanto é razoável escrever $\alpha_j = 1 + a_j$ para todo $j \in I\!N$, com $\lim_{j \to \infty} a_j = 0$ e $a_j \neq -1$ para $j \notin I$. Podemos escrever o produto na forma

$$\prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j) \qquad (i)$$

2. No caso em que $I = \Phi$ vamos considerar a série numérica

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell n(1 + a_j) \qquad (ii)$$

e escrever

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \ell n(1 + a_j) \qquad (\forall n \in I\!N).$$

Logo é claro que $P_n = e^{S_n}$ onde $P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 + a_j)$. Assim se (ii) converge a S temos (i) convergindo a $e^S \neq 0$. Por outro lado, se $\lim_{n \to \infty} P_n = P \neq 0$, podemos escolher o argumento principal de P e os argumentos θ_n de $P_n = \mid P_n \mid e^{i\theta_n}$ de modo que $\theta_n \in]arg(P) - \pi, arg(P) + \pi]$ para todo $n \in I\!N$. Vamos fazer $log P_n = \ell n \mid P_n \mid + i\theta_n$ para todo $n \in I\!N$. Então $S_n = log P_n + h_n \cdot 2\pi i$, onde h_n está bem determinado e é inteiro. Temos

$$(h_{n+1} - h_n)2\pi i = \ell n(1 + a_{n+1}) + logP_n - logP_{n+1}$$

Tomando n suficientemente grande podemos ter:

$$\begin{aligned} |\ \theta_n - arg(P)\ | &< \frac{2\pi}{3} \\ |\ \theta_{n+1} - arg(P)\ | &< \frac{2\pi}{3} \\ |\ arg(1 + a_{n+1})\ | &< \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Assim obtemos $| \ h_{n+1} - h_n \ | < 1$ e $h_{n+1} = h_n$ para n suficientemente grande. Logo podemos escrever $h_n = h$ para todo $n \geq n_0$ e obter:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} logP_n + 2\pi i h = \ell nP + 2\pi i h$$

Portanto

$$S = \ell nP + 2\pi i h = \sum_{j=1}^{\infty} \ell n(1 + a_j).$$

Sendo $I = \{j; 1 + a_j = 0\} \neq \phi$, nos raciocínios acima eliminamos os $j \in I$ e o resultado ainda vale.

Provamos o seguinte resultado:

18.3 TEOREMA: Uma condição necessária e suficiente para existir $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + a_j)$ é que $1 + a_j = 0$ somente para um número finito dos js e que $\sum_{\substack{j=1 \\ j\notin I}} \ell n(1 + a_j)$ seja convergente.

18.4 TEOREMA: Uma condição necessária e suficiente para a convergência $\prod_{j=1}^{\infty} |\ 1 + a_j\ |$ é a convergência de $\sum_{j=1}^{\infty} |\ a_j\ |$.

DEMONSTRAÇÃO: Temos $\lim_{z\to 0} \frac{\ell n(1 + z)}{z} = 1$ e $\ell n(1 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$.

Logo $\dfrac{\ell n(1+z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{z^k}{k+1} = g(z)$ analítica em $B_1(0)$ e assim $\lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $1-\varepsilon < \dfrac{|\ \ell n(1+z)\ |}{|\ z\ |} < 1+\varepsilon$. Assim para $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in I\!N$ tal que $n \geq n_\varepsilon$ implica

$$(1-\varepsilon) \mid a_n \mid < \mid \ell n(1+a_n) \mid < (1+\varepsilon) \mid a_n \mid$$

Daí:

$$(1-\varepsilon)\sum_{n\geq n_\varepsilon}^{\infty} \mid a_n \mid \leq \sum_{n\geq n_\varepsilon}^{\infty} \mid \ell n(1+a_n) \mid \leq (1+\varepsilon)\sum_{n\geq n_\varepsilon}^{\infty} \mid a_n \mid$$

e o resultado segue do teorema 18.3 e do critério de comparação. □

18.5 OBSERVAÇÕES:

1. Dado uma seqüência de funções $f_j(z)$ definidas em $A \subseteq \mathbb{C}$ podemos perguntar sobre a convergência de $\prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j(z))$ quando $z \in A$. Assim precisamos que, para cada $z \in A$, somente um número finito dos $1+f_j(z)$ sejam nulos. É razoável nesses casos trabalhar com funções tais que para algum $j_0 \in I\!N, 1+f_j(z) \neq 0$ para todo $z \in A$ e cada $j \geq j_0$. Nestas condições dizemos que $\prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j)$ *converge pontualmente em* A se $\prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j(z))$ converge para todo $z \in A$. Além disso dizemos que $\prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j)$ *converge uniformemente* a g sobre $B \subset A$ se $\lim_{k\to\infty}\sup_{z\in B}\left|\prod_{j=1}^{k}(1+f_j(z)) - g(z)\right|$ é zero. Note que precisamos $g(z) \neq 0$ para todo $z \in B$. Reafirmamos que para a convergência pontual basta supor que para cada $z \in A$ $[1+f_j(z)] = 0$ para um número finito de j, e que para a convergência uniforme precisamos a condição $[1+f_j(z)] \neq 0$ para cada $z \in A$ e $j \geq j_0$.

   Os dois teoremas de convergência anteriores valem para convergência uniforme sobre B.

2. Seja f analítica em $\mathbb{C}$, com um número finito de zeros $a_1, \cdots, a_n$ e respectivas ordens $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Podemos escrever

$$f(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(\alpha_1+k)}(a_1)}{(\alpha_1 + k)!}(z - a_1)^k,$$

o que nos dá $f(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} f_1(z)$ com $f_1(z)$ inteira e $f_1(a_1) \neq 0$. Podemos repetir o raciocínio para f_1 e a_2 e assim sucessivamente, para obter

$$f(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n} h(z)$$

onde $h(z)$ é inteira, $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Neste caso temos $\dfrac{h'(z)}{h(z)} = g(z)$ inteira. Seja $g_0(z)$ uma primitiva de $g(z)$. Temos $\dfrac{d}{dz} g_0(z) = \dfrac{h'(z)}{h(z)} \Rightarrow \dfrac{d}{dz}(h(z)e^{-g_0(z)}) = 0$. Logo $h(z)e^{-g_0(z)} = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$ com c constante. Daí $h(z) = c \cdot e^{g_0(z)} = e^{g_1(z)}$ onde $g_1(z)$ é inteira. Assim $h(z)$ é da forma $e^{g(z)}$ para alguma g inteira. Voltando a f temos: $f(z) = e^{g(z)} \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{\alpha_j}$. No caso de $a_1 = 0$ temos para alguma g inteira

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{\alpha_j}.$$

É natural perguntar se para uma função inteira com um número infinito de zeros existe uma representação semelhante usando produto infinito. A resposta é sim e é o seguinte teorema devido a Weierstrass.

18.6 TEOREMA: Dada uma seqüência $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ de números complexos tais que $\lim\limits_{j \to \infty} | a_j | = +\infty$, é possível achar uma função inteira com o conjunto de seus zeros sendo $\{a_j; j \in \mathbb{N}\}$. Neste caso cada função inteira desse tipo pode ser escrita na forma:

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{\substack{j=1 \\ a_j \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2 + \cdots + \frac{1}{m_j}(\frac{z}{a_j})^{m_j}}$$

com $g(z)$ inteira e $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ certa seqüência de naturais. A convergência do produto é uniforme e absoluta sobre cada compacto de $\mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO: Estamos procurando polinômios $P_n(z)$, tais que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)}$ converge a uma função inteira. Estamos supondo $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal produto converge se e só se a série do termo geral $R_n(z) = \ell n\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + P_n(z)$ converge. Para $R > 0$ dado, vamos considerar por enquanto somente os a_n tais que $| a_n |> R$. Na bola $\overline{B}_R(0)$ temos a convergência uniforme da série de Taylor:

$$\ell n\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{a_n}\right)^j.$$

Vamos escolher:

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{m_n}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{a_n}\right)^j$$

para obter

$$R_n(z) = -\sum_{j=m_n+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{a_n}\right)^j$$

ou

$$R_n(z) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{m_n + j}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+j}.$$

Logo

$$| R_n(z) |\leq \frac{1}{m_n + 1}\left(\frac{R}{| a_n |}\right)^{m_n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R}{|a_n|}} \qquad (i)$$

para $| z |\leq R$. Vamos escolher os m_n de modo que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_n + 1}\left(\frac{R}{| a_n |}\right)^{m_n+1} < +\infty. \qquad (ii)$$

De (i) segue que $\lim_{n\to\infty} | R_n(z) |= 0$ uniformemente sobre $\overline{B}_R(0)$. Agora seja n_0 tal que $n \geq n_0$ implique $| a_n |> R$. De

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(z) = \sum_{n=0}^{n_0} R_n(z) + \sum_{n>n_0}^{\infty} R_n(z)$$

temos

$$\sum_{n>n_0}^{\infty} | R_n(z) |\leq \sum_{n>n_0}\frac{1}{m_n + 1}\left(\frac{R}{| a_n |}\right)^{m_n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R}{|a_n|}} \qquad (\forall z \in \overline{B}_R(0)).$$

pois (ii) converge e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1 - \frac{R}{|a_n|}} = 1$. Existe $M > 0$ tal que $\frac{1}{1 - \frac{R}{|a_n|}} \leq M$ e $\sum_{n>n_0}^{\infty} | R_n(z) |$ converge uniformemente sobre $\overline{B}_R(0)$. Resta somente mostrar que podemos escolher m_n

de modo a (ii) convergir para todo $R > 0$. Se tomarmos $m_n = n$ o termo geral de (ii) é $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{R}{|a_n|}\right)^{n+1}$ e, usando o teste da raíz, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{R^{n+1}}{(n+1)\,|a_n|^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}(n+1)^{-\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{R}{|a_n|} = 1.0 = 0.$$

para todo $R > 0$. Temos então a convergência de

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_j}\right)e^{P_j(z)}.$$

Assim

$$h(z) = \prod_{\substack{j=1\\ a_j\neq 0}}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_j}\right)e^{P_j(z)}$$

é inteira e tem $\{a_j; j \in \mathbb{N}\}$ como conjunto de seus zeros. Se $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ admite zero como alguns de seus termos, então esses termos são em número finito m e a função $h(z) = z^m \prod\limits_{\substack{j=1\\ a_j\neq 0}}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_j}\right)e^{P_j(z)}$ é inteira com $\{a_j; j \in \mathbb{N}\}$ sendo o conjunto de seus zeros.

Seja $f(z)$ uma outra função inteira qualquer cujos zeros formem o conjunto $\{a_j; j \in \mathbb{N}\}$. Então $\dfrac{f(z)}{h(z)}$ tem como polos os zeros de $h(z)$ que são os zeros de $f(z)$ com as mesmas ordens. Logo os polos de $\dfrac{f(z)}{h(z)}$ são removíveis e $\dfrac{f(z)}{h(z)}$ é inteira e diferente de zero em todos os pontos. Assim existe $g(z)$ inteira tal que $\dfrac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$ isto é $f(z) = e^{g(z)}h(z)$. □

18.7 COROLÁRIO: Se f for uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ então existem funções inteiras h e g tais que $f = \dfrac{h}{g}$.

DEMONSTRAÇÃO: Os polos de f formam um conjunto no máximo enumerável em $\mathbb{C}$. Tome, pelo Teorema de Weirstrass (18.6), a função g inteira cujos zeros são os polos de f. Ao fazer isso o produto $g(z)f(z)$ passa a ter singularidades removíveis nos polos de f. Logo $g(z)f(z)$ pode ser definida analítica nesses pontos e passa a ser inteira.

18.8 OBSERVAÇÕES E DEFINIÇÕES: Na demonstração e no enunciado do Teorema de Weirstrass temos

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}.$$

O caso mais interessante ocorre quando $m_n = k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k} \tag{i}$$

converge e representa uma função inteira se:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}$$

converge para cada $R > 0$. Mas isto equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{k+1}} < +\infty. \tag{ii}$$

O menor inteiro k para o qual (ii) converge torna (i) convergente e (i) é chamado *produto canônico associado à seqüência* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e o k correspondente é chamado *genus do produto canônico.*

Se o genus do produto canônico for zero temos a representação $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ convergente.

Sempre que possível procura-se uma representação de f de modo que o produto infinito na representação seja canônico

$$f(z) = e^{g(z)}z^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}$$

Se nessa representação $g(z)$ for um polinômio diz-se que f *tem genus finito e o genus de* f é o máximo entre o grau de g e o genus do produto canônico da representação.

Uma função inteira de genus zero tem a forma

$$f(z) = e^c z^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{com} \qquad \sum\frac{1}{|a_n|} < +\infty.$$

Uma função de genus 1 tem uma das seguintes formas:

(a) $k = 0$ e genus $f = 1$

$$f(z) = cz^m e^{\alpha z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \text{ com } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|} < +\infty, \alpha \neq 0.$$

(b) $k = 1$ e genus $f = 0$

$$f(z) = cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \text{ com } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\, a_n \,|^2} < +\infty.$$

(c) $k = 1$ e genus $f = 1$

$$f(z) = cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \text{ com } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\, a_n \,|^2} < +\infty.$$

18.9 EXEMPLO: $f(z) = sen\pi z$ tem $\mathbb{Z}$ como conjunto de seus zeros. Como

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} = +\infty \text{ e } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

podemos, pelo resultado acima, obter uma representação da forma

$$sen\pi z = ze^{g(z)} \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

Vamos determinar $g(z)$. Temos

$$\frac{\frac{d}{dz}(sen\pi z)}{sen\pi z} = \frac{\pi cos\pi z}{sen\pi z} = \pi cotg\pi z.$$

Sendo

$$h(z) = ze^{g(z)} \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

temos

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\right)$$

Logo

$$\pi cotg\pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\right) \qquad (i)$$

Vimos que

$$\frac{\pi^2}{sen^2\pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} \qquad (ii)$$

Integração do lado esquerdo de (ii) fornece $-\pi cotg\ \pi z$. Cada termo do lado direito é a derivada de $-\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{-z}{n(z-n)}$. A série $\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}}\frac{z}{n(z-n)}$ converge uniformemente sobre cada compacto K se tirarmos os termos em que $z\in K\cap\mathbb{Z}$ (compare com a série $\frac{1}{n^2}$). Assim temos

$$\pi cotg\pi z=\frac{1}{z}+g'(z)+\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+k \tag{iii}$$

ou

$$\underbrace{\pi cotg\pi z}_{\text{função ímpar}}=\underbrace{\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{N}}}\frac{2z}{z^2-n}}_{\text{função ímpar}}+k$$

Logo $k=0$ e comparando (i) com (iii) temos que $g'(z)=0, g(z)$ constante. Como $\lim\limits_{z\to 0}\frac{sen\pi z}{z}=\pi$ devemos ter $e^c=\pi$. Logo

$$sen\pi z=\pi z\prod_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

ou

$$sen\pi z=\pi z\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

que é a representação de $sen\pi z$ como produto infinito. É claro que $sen\pi z$ tem genus 1.

I EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de números complexos tal que $|a_n|<1, a_n\neq 0, a_m\neq a_n$ se $m\neq n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|^2)<+\infty$. Prove que $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{z-\overline{a}_n^{-1}}$ é convergente no disco unitário e representa uma função analítica nesse disco. Tal função é igual a zero só se $z-a_n, n\in\mathbb{N}$, e limitada em valor absoluto por 1.

SOLUÇÃO. Seja $\frac{z-a_n}{z-\overline{a}_n^{-1}}=1-\frac{(a_n-\overline{a}_n^{-1})}{z-\overline{a}_n^{-1}}$, logo

$$u_n(z)=\frac{a_n-\overline{a}_n^{-1}}{z-\overline{a}_n^{-1}} \text{ e } |u_n(z)|=\frac{1-|a_n|^2}{|1-z\overline{a}_n|}. \tag{i}$$

Se $0 < r < 1$ e $z \in \overline{B}_r(0)$ temos $\dfrac{1}{|1 - \overline{a}_n z|} < \dfrac{1}{1 - |r|}$. Logo a relação (i) ficará $|u_n(z)| < \dfrac{1 - |a_n|^2}{1 - r}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| < \dfrac{1}{1-r} \sum\limits_{n=1}^{\infty} [1 - |a_n|^2] < \infty$. Portanto $\prod\limits_{n=1}^{\infty} [1 + u_n(z)]$ representa uma função $F(z)$ analítica em $B_1(0)$. Se $z \neq a_n$ então todos seus fatores são diferentes de zero e portanto $F(z) \neq 0$. Além disso $|F(z)| < 1$ em $B_1(0)$ resulta de $\left|\dfrac{z - a_n}{z - \overline{a}_n^{\,-1}}\right| = |a_n| \left|\dfrac{z - a_n}{1 - \overline{a}_n z}\right| \leq |a_n| < 1$.

2. Prove que $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right) e^{-z/n}$ é convergente em todo o plano e seu limite é uma função inteira.

SOLUÇÃO. Se $|z| < 1$ temos

$$|(1 - z)e^z - 1| = \left| z^2 \left(\frac{1}{2!} - 1\right) + \cdots + z^n \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right) + \cdots \right|.$$

Como $|z|^n \leq |z|^2 \ \ \forall\, n \in I\!N \setminus \{1\}$, obtemos

$$|(1 - z)e^z - 1| \leq |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \right| = |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} = |z|^2 .$$

Assim mostramos que:

$$|(1 - z)e^z - 1| \leq |z|^2 \quad \text{se} \quad |z| < 1. \tag{i}$$

Se $z \in B_R(0)$, então, para $n > R$, temos $\left|\dfrac{z}{n}\right| \leq \dfrac{R}{n} < 1$ e substituindo z por $-\dfrac{z}{n}$ em (i), temos $\left|\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)e^{-z/n} - 1\right| \leq \dfrac{|z|^2}{n^2} \leq \dfrac{R^2}{n^2}$ $(\forall\, z \in B_R(0))$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{R^2}{n^2} < +\infty$, tem-se que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)e^{-z/n} - 1\right]$ converge uniforme e absolutamente em cada $\overline{B}_\rho(0)$ com $\rho < R$. Sua soma $f(z)$ é uma função analítica em $B_R(0)$. Como R é arbitrário temos f analítica em $\mathbb{C}$. Logo $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right) e^{-z/n}$ é convergente em todo o plano e seu limite é uma função inteira.

3. Prove que:

$$z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{(2k-1)\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi k}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)=e^{-\frac{z}{\pi}log 2}sen\ z.$$

SOLUÇÃO. Seja

$$P_k(z)=z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{(2k-1)\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right).$$

Podemos escrever P_k na forma

$$P_k=e^{z/\pi(-1-\frac{1}{2}+1+\cdots-\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{k})}z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{z/\pi}\cdots\left(1-\frac{z}{2k\pi}\right)e^{z/2k\pi}\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)e^{-z/k\pi},$$

pois o produto cujos fatores são $\left(1-\dfrac{z}{k\pi}\right)e^{z/k\pi}$ é absolutamente convergente (ver exercício (i)). A ordem de seus fatores pode ser alterada. Além disso sabemos que $log\ 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots$. Assim $\lim\limits_{k\to\infty}P_k(z)=e^{\frac{-z}{\pi}log 2}sen\ z.$

4. Seja $h_n(z)=\dfrac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!exp(z\ log\ n)}$. Mostre essa seqüência $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente em todo o plano e que seu limite $h(z)$ representa uma função inteira igual a zero só se $z=0,-1,-2,-3,\cdots$.

SOLUÇÃO. Pelo exercício anterior (2) sabemos que $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{k}\right)e^{-z/k}$ é convergente em todo o plano exceto nos pontos $z=0,-1,-2,-3,\cdots$. Portanto $z\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{k}\right)e^{-z/k}$ também é convergente em todo o plano, exceto nos pontos $z=0,-1,-2,-3,\cdots$. Como $h_n(z)=z(1+z)\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)e^{-z\ log\ n}$, o produto $f_n(z)=z\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{k}\right)e^{-z/k}$ pode ser relacionado com $h_n(z)$ do seguinte modo: $h_n(z)=e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log\ n)}f_n(z)$. Logo temos $h(z)=\lim\limits_{n\to\infty}h_n(z)=e^{z\gamma}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{k}\right)e^{-z/k}$, onde $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-log\ n\right)$.

5. Se f e g são funções inteiras tais que $|f(z)|\leq|g(z)|$ para todo $z\in\mathbb{C}$, então existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $f=\lambda g$.

SOLUÇÃO. (i) Se $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então tem-se $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ inteira e $\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}\right| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pelo teorema de Lioville temos $\dfrac{f(z)}{g(z)} = \lambda =$ constante e $f(z) = \lambda g(z)$.

(ii) Se z_1 é um zero de $g(z)$ de multiplicidade α_1, então $| f(z_1) | \leq | g(z_1) | = 0$ e $f(z_1) = 0$. Assim z_1 é um zero de $f(z)$ de multiplicidade β_1. Portanto $f(z)$ e $g(z)$ podem ser escritos na forma $f(z) = (z - z_1)^{\beta_1}\varphi(z), \varphi(z_1) \neq 0$ e $g(z) = (z-z_1)^{\alpha_1}\psi(z), \psi(z_1) \neq 0$. É claro que $\beta_1 \geq \alpha_1$, pois se $\beta_1 < \alpha_1$ teríamos $\alpha_1 - \beta_1 > 0$ e $| \varphi(z) || z - z_1 |^{\beta_1} \leq | z - z_1 |^{\alpha_1} | \psi(z) |$ ou $| \varphi(z) | \leq | z - z_1 |^{\alpha_1 - \beta_1} | \psi(z) |$. Isto daria $\varphi(z_1) = 0$, o que contradiria $\varphi(z_1) \neq 0$. Neste caso temos também que $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ é uma função inteira e satisfaz à condição $\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}\right| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pelo teorema de Lioville temos $f(z) = \lambda g(z)$.

6. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ são duas funções inteiras tais que $[f(z)]^2 + [g(z)]^2 = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Existe uma função inteira $h(z)$ tal que: $f(z) = cos[h(z)]$ e $g(z) = sen[h(z)]$?

SOLUÇÃO. De $[f(z)]^2 + [g(z)]^2 = 1$ temos $(f(z) + ig(z))(f(z) - ig(z)) = 1$. Como $f(z) + ig(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, existe uma função inteira $h(z)$ tal que $f(z)+ig(z) = e^{ih(z)}$. Desta equação obtemos $f(z)-ig(z) = e^{-ih(z)}$. Resolvendo estas duas equações temos $f(z) = \dfrac{e^{ih(z)} + e^{-ih(z)}}{2} = cos\ h(z)$ e $g(z) = \dfrac{e^{ih(z)} - e^{-ih(z)}}{2i} = sen\ h(z)$.

7. Ache a fórmula $sen\ \pi z = \pi\ z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{n^2}\right)$.

SOLUÇÃO. Se $f(z) = sen\ \pi z$, então $f(z) = 0$ implica $z = k, k \in \mathbb{Z}$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < +\infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = +\infty$, temos que $f(z)$ é da forma seguinte:

$$f(z) = ze^{g(z)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right)e^{z/k}$$

ou equivalente

$$f(z) = ze^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right). \qquad (i)$$

Derivando (i) e fazendo $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ temos:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2z}{k^2 - z^2} = \pi\ cotg\ \pi z. \qquad (ii)$$

Também sabemos que $\pi cotg\ \pi z - \dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - k^2}$. Colocando esta relação em (ii) obtemos $g'(z) = 0$ e $g(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$. De (i) temos $\pi\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{sen\ \pi z}{\pi z} = \lim\limits_{z\to 0}e^c\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ e $\pi = e^c = e^{g(z)}$. Logo $f(z) = \pi z\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$.

8. Ache as fórmulas:

(i) $sen\ h\pi z = \pi z\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$.

(ii) $e^z - 1 = ze^{z/2}\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$.

(iii) $e^{az} - e^{bz} = z(a-b)exp\left[\frac{1}{2}(a+b)z\right]\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{(a-b)^2z^2}{4n^2\pi^2}\right]$.

SOLUÇÃO. (i) $sen\ h\pi z = \dfrac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2}$. Como $sen\ h\pi z = -i\ sen\ [\pi(iz)]$ pelo exercício anterior temos $sen[\pi(iz)] = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2i^2}{n^2}\right)$ e $sen\ h\pi z = \pi z\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$.

(ii) Pelo exercício anterior temos $senz = \dfrac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = z\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2n^2}\right)$ e $e^{2zi} - 1 = e^{zi}2iz\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{z^2}{\pi^2n^2}\right]$. Nesta última relação fazemos $z = \dfrac{z}{2i}$, e obtemos $e^z - 1 = ze^{z/2}\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)$.

(iii) Pela parte (i) fazemos $z = \dfrac{(a-b)}{2\pi}z$ e obtemos

$$e^{\frac{\pi(a-b)z}{2\pi}} - e^{\frac{-\pi(a-b)z}{2\pi}} = \frac{\pi(a-b)z}{\pi}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{(a-b)^2z^2}{4\pi^2n^2}\right].$$

Fazendo operações temos:

$$e^{az} - e^{bz} = (a-b)ze^{\frac{(a+b)z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4\pi^2 n^2}\right].$$

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostre que o produto infinito $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1}$ é absolutamente convergente para $Re(z) \geq 0, z \neq 0$.

2. Prove que $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + sen \frac{z^2}{k^2}\right)$ é uma função inteira.

3. Prove que $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2} cotg \frac{z}{k}\right)$ é analítica exceto nos polos de $cotg \frac{z}{k}$.

4. Prove que $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{k}\right)$ diverge mas $\prod_{k=1}^{\infty} \left|1 + \frac{i}{k}\right|$ converge.

5. Os produtos $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$ e $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ convergem. Analise a convergência

   (i) $\prod_{n=1}^{\infty} (P_n + q_n)$,

   (ii) $\prod_{n=1}^{\infty} (P_n - q_n)$,

   (iii) $\prod_{n=1}^{\infty} P_n q_n$,

   (iv) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{q_n}$.

6. Mostre que no interior de $B_1(0)$: $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$.

7. Mostre que o produto $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\right] (n^z = e^{z \ell n \ n})$, converge no semiplano $Re(z) > \frac{1}{2}$ e converge absolutamente no semiplano $Re(z) > 1$.

8. Ache uma função inteira F tal que $F(n) = (n-1)!$ para todo inteiro positivo.

9. Verifique se as seguintes seqüências têm genus finito e, sendo possível, determine-os.

   (i) $-1, 1, -2, 2, \cdots$.

   (ii) $\{log(n+1)\}$.

   (iii) $\{\left[\frac{n}{4}\right] i^n\}$, onde $[X]$ denota o maior inteiro $n \leq x$.

   (iv) $\{(-1)^n \sqrt{n}\}$.

   (v) $1; 2, 2; 3, 3; 4, 4, 4, , 4; 5 \cdots$.

10. Determine o produto de Weierstrass para as seqüências do exercícios (2).

11. Ache os produtos.

   (i) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{z^4}{n^4}\right)$

   (ii) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{z^4}{n^4}\right)$

   Mostre que $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{8\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})$.

12. Verifique a fórmula $\frac{sen\ \pi z}{\pi z(1-z)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z - z^2}{n + n^2}\right)$.

13. Prove que $cos\frac{\pi z}{4} - sen\frac{\pi z}{4} = (1-z)\left(1 + \frac{z}{3}\right)\left(1 - \frac{z}{5}\right)\cdots$.

14. Use a fórmula $[\Gamma(z)]^{-1} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$, para mostrar que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen\ \pi z}$.

§ 19. TEOREMA DA APLICAÇÃO DE RIEMANN

Seja f uma função analítica de um aberto $A \subset \mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Vimos anteriormente que se f for não constante ela leva abertos de A em abertos de $\mathbb{C}$ (isto é: é uma aplicação aberta). Vimos Também que se $f'(a) \neq 0$ para um certo $a \in A$ então é possível achar uma vizinhança aberta V de a de modo que f/V é injetora e $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in V$. Consequentemente sua inversa é analítica em $W = f(V)$ e tem derivada não nula em cada ponto w de W. Não é difícil encontrar exemplos de funções analíticas de um aberto $A \subset \mathbb{C}$ em um aberto $B \subset \mathbb{C}$ cuja derivada nunca se anula em A e que não é um homeomorfismo entre A e B. Por outro lado se $A \subset \mathbb{C}$ e $B \subset \mathbb{C}$ são abertos homeomorfos por uma aplicação analítica g em A então necessariamente g^{-1} é analítica em B com $g'(z) \neq 0$ para cada $z \in A$ e $(g^{-1})'(w) \neq 0$ para todo $w \in B$. Neste caso diz-se que A e B são *conformemente equivalentes*. Uma aplicação analítica em A e com derivada não nula é tradicionalmente chamada de *aplicação conforme* e tem a propriedade interessante de preservar os ângulos entre caminhos regulares em A (isto é: se γ_1 e γ_2 são caminhos regulares em A passando por $a \in A$, então as retas tangentes a γ_1 e γ_2 no ponto a e as retas tangentes a $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ no ponto $f(a)$ têm ângulos com a mesma orientação e magnitude). O famoso *Teorema da Aplicação de Riemann* garante que qualquer aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$, que não seja $\mathbb{C}$, é conformemente equivalente ao disco aberto unitário com centro O de $\mathbb{C}$. Consequentemente abertos simplesmente conexos em $\mathbb{C}$, diferentes de $\mathbb{C}$, são sempre conformente equivalentes. É fácil ver que o plano tem que ser excluído pois se fosse conformemente equivalente ao disco aberto unitário, existiria uma função inteira não constante limitada, o que contraria o Teorema de Liouville. Todavia não é difícil mostrar que $\mathbb{C}$ e o disco unitário aberto são homeomorfos.

19.1 TEOREMA: Se $A \neq \mathbb{C}$ for um aberto simplesmente conexo e $z_0 \in A$ então existe $f : A \to B_1(0)$ bijetora analítica tal que $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$. Além disso, f com essas propriedades é única.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam f e g duas aplicações satisfazendo à tese. Então:

$$h = g \circ f^{-1} : B_1(0) \to B_1(0)$$

é tal que $h(0) = 0$, h analítica, bijetora e $| h(z) | < 1$ para cada $z \in B_1(0)$. Pelo lema de Schwarz tem-se $| h(z) | \leq | z |$ para todo $z \in B_1(0)$. Seja h^{-1} a inversa de h que é analítica, bijetora, $h^{-1}(0) = 0$ e $| h^{-1}(t) | < 1$ para todo $t \in B_1(0)$. Novamente pelo lema de Schwarz tem-se $| h^{-1}(t) | \leq | t |$ para cada $t \in B_1(0)$. Daí $| z | = | h^{-1}(h(z)) | \leq | h(z) | \leq | z |$ e $| h(z) | = | z |$ para cada $z \in B_1(0)$. Logo $h(z) = cz$, onde $|c|=1, c=h'(0)=g'(f^{-1}(0))\cdot(f^{-1})'(0)=g'(z_0)\cdot\dfrac{1}{f'(z_0)}>0$. Portanto $c=1$ e $h(z)=z$ para todo $z\in B_1(0)$. Como $h(z)=(g\circ f^{-1})(z)=z$, tem-se $g(z)=f(z)$ para cada $z\in B_1(0)$.

Para demonstrar o resultado vamos chamar $\mathcal{F}=\{g; g$ é analítica de A em $\mathbb{C}$, $g(z_0)=0, g'(z_0)>0$ e $|g(z)|\leq 1$ $(\forall z\in A)\}$.

Mostraremos:

(1) $\mathcal{F}\neq\phi$

(2) $\sup\limits_{g\in\mathcal{F}} g'(z_0)=\rho<+\infty$ e $\rho=g_0'(z_0)$ para algum $g_0\in\mathcal{F}$.

(3) g_0 é a f mencionada no enunciado.

(1) Seja $a\notin A, a\in\mathbb{C}$. Como A é simplesmente conexo podemos achar $G(z)$ analítica em A tal que $e^{G(z)}=z-a$ para todo $z\in A$. Isto segue do seguinte resultado mais geral:

"Se $g(z)\neq 0$ para todo $z\in A$ e g é analítica, então existe $G(z)$ analítica em A tal que $e^{G(z)}=g(z)$ para cada $z\in A$".

De fato: $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ é analítica em A. Como A é simplesmente conexo existe uma primitiva analítica $F(z)$ em A. Logo $F'(z)=\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ para todo $z\in A$ e daí $e^{-F(z)}g(z)$ tem derivada nula em A. Assim $e^{-F(z)}g(z)=k$ para cada $z\in A$, k uma constante. Tomando $\alpha_0\in\mathbb{C}$ tal que $e^{\alpha_0}=g(z_0)$ segue que $e^{F(z)-F(z_0)+\alpha_0}=g(z)$ e $G(z)=F(z)-F(z_0)+\alpha_0$ é a função procurada.

Tomando então $G(z)$ tal que $e^{G(z)}=z-a$ temos a notação $\ell n(z-a)=G(z)$ justificada e podemos escrever $h(z)=e^{\frac{1}{2}G(z)}=e^{\frac{1}{2}\ell n(z-a)}=:(z-a)^{\frac{1}{2}}$ que é analítica em A. Como h é aberta, temos $h(A)\supset B_\rho(h(z_0))$ para algum $\rho>0$. Além disso $h'(z)=e^{\frac{1}{2}G(z)}\cdot\dfrac{1}{2}G'(z)$ e $h'(z_0)=(z_0-a)^{1/2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(z_0-a)}\neq 0$. Note que h é injetora e não pode assumir valores α e $-\alpha$ ao mesmo tempo. Daí, diminuindo ρ se necessário, podemos escrever $B_\rho(h(z_0))\cap B_\rho(-h(z_0))=\phi$ e $2|h(z_0)|\geq\rho$. Defina

$$g_0(z) = \frac{\rho}{4} \cdot \frac{| h'(z_0) |}{| h(z_0) |^2} \cdot \frac{h(z_0)}{h'(z_0)} \cdot \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}.$$

Então $g_0(z_0) = 0, g_0'(z_0) = \dfrac{\rho \mid h'(z_0) \mid}{8 \mid h(z_0) \mid^2} > 0$ e $| g_0(z) | \leq 1$ para todo $z \in A$. Note que $| h(z) + h(z_0) | = dist(h(z), -h(z_0)) \geq \rho$ e então

$$| g_0(z) | \leq \frac{\rho}{4} \cdot \left| \frac{1}{h(z_0)} - \frac{2}{h(z) + h(z_0)} \right| \leq \frac{\rho}{4} \cdot \left(\frac{2}{\rho} + \frac{2}{\rho} \right) = 1.$$

Logo $g_0 \in \mathcal{F}$ como se afirma em (1).

Para demonstrar (2) vamos usar:

19.2 LEMA (Teorema de Hurwitz): Seja A aberto conexo e seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de funções analíticas tais que $f_n(z) \neq 0$ para todo $z \in A$ e cada $n \in \mathbb{N}$. Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergir a f uniformemente sobre cada compacto de A, então ou f é identicamente nula em A, ou $f(z) \neq 0$ para qualquer $z \in A$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA: Seja f não identicamente nula em A. Como os zeros de f são isolados, fixado $z_0 \in A$, é possível achar $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S_r(z_0)$ e $\overline{B}_r(z_0) \subset A$. Sabemos que $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ também converge a f' sobre cada compacto de A. Logo $\left(\dfrac{f_n'}{f_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a f'/f uniformemente sobre $S_r(z_0)$. Seja $c(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Logo $\left(\displaystyle\int_c \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a $\displaystyle\int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Mas $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_c \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz$ é o número de zeros de f_n no interior de c que é igual a zero para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Logo $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ e f não possui zeros em $B_r(z_0)$. Como $z_0 \in A$ foi arbitrário, f nunca se anula em A.

(2) Seja $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} g_n'(z_0) = \beta = \sup\limits_{g \in \mathcal{F}} g'(z_0)$. Como $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada em módulo por 1 sobre A, podemos usar o teorema de Montel e achar $(g_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $(g_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a f (analítica em A) uniformemente sobre cada

compacto de A. Logo $(g'_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f' sobre cada compacto de A e em particular $\rho = \lim_{k\to\infty} g'_{n_k}(z_0) = f'(z_0) \in \mathbb{R}_+$. Vamos mostrar que $f \in \mathcal{F}$. Temos $f(z_0) = \lim_{k\to+\infty} g_{n_k}(z_0) = 0$, $f'(z_0) = \rho > 0, f(z) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(z)$ e $| g_{n_k}(z) | \leq 1$ para todo $z \in A$. Logo $| f(z) | \leq 1 \quad \forall z \in A$. Para mostrar que f é injetora fixemos $z_1 \in A$ e tomemos $h_k(z) = g_{n_k}(z) - g_{n_k}(z_1)$ para cada $z \in A \setminus \{z_1\}$. É claro que $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a h uniformemente sobre cada compacto de $A \setminus \{z_1\}$, onde $h(z) = f(z) - f(z_1)$ para todo $z \in A \setminus \{z_1\}$. Cada h_k nunca se anula em $A \setminus \{z_1\}, f(z) \neq f(z_1)$ para todo $z \in A, z \neq z_1$. Assim f é injetora e $f \in \mathcal{F}$ é a função g_0 de (2).

(3) Basta mostrar que $f(A) = B_1(0)$. Se existisse $w_0 \in B_1(0)$ tal que $f(z) \neq w_0$ para cada $z \in A$, então poderíamos definir

$$F(z) = \left(\frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w}_0 f(z)}\right)^{1/2} \qquad (\forall z \in A).$$

Fazendo contas teríamos $| F(z) | \leq 1$ para cada $z \in A$. Sendo $H(z) = \dfrac{| F'(z_0) |}{F'(z_0)} \cdot \dfrac{F(z) - F(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)} F(z)}$ tem-se $| H(z) | \leq 1, H(z_0) = 0$ e $H'(z_0) = \dfrac{| F'(z_0) |}{1 - | F(z_0) |^2} = \dfrac{1 + w_0}{2\sqrt{| w_0 |}} \rho > \rho$.

Logo $H \in \mathcal{F}$ é tal que $H'(z_0) > \rho$ o que iria contrariar $\rho = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(z_0)$. □

I. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verificar se cada afirmação é falsa ou verdadeira:

(i) Se G é simplesmente conexo e f é uma função inteira e analítica em G, então $f(G)$ é simplesmente conexo.

(ii) Para alguma função analítica transcendental inteira $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(iii)Para alguma função analítica injetora $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ e $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

SOLUÇÃO. (i) Falso. Tome $f(z) = e^z$ e $G = \mathbb{C}$. Temos $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ não é simplesmente conexo.

(ii) Tome $f(z) = cos\ z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ que é analítica transcendental inteira. Sendo $a \neq 0$ e $b = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \neq 0$ temos $b + \dfrac{1}{b} = 2a$ Portanto se $\theta \in [0, 2\pi)$ é tal que $b = \mid b \mid e^{i\theta}$, temos $e^{i(-i\ell n|b|+\theta)} = b$ e $cos(-i(\ell n \mid b \mid + \theta)) = a$. Se $a = 0$ basta ver que $cos\dfrac{\pi}{2} = a = 0$.

(iii) Falsa. Pelos dados sabemos que $f(\mathbb{C}) = G \neq \mathbb{C}$ é simplesmente conexo e aberto. Por 19.1 existe $g : G \to B_1(0)$ bijetora analítica. Tome $h = g \circ f : \mathbb{C} \to B_1(0)$ é claro que h é inteira e limitada. Pelo teorema de Liouville temos h constante, o qual é impossível.

2. Seja $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de funções analíticas injetoras num aberto conexo G e uniformemente convergente a $f(z)$ sobre G. Se $f(z) \neq$ constante mostre que f é injetora em G.

SOLUÇÃO. É claro que $f(z)$ é analítica em G, vamos supor que, $f(z_1) = f(z_2) = a, z_1 \neq z_2$. Então para a função $(f(z) - a) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n(z) - a)$ tem-se ao menos dois zeros, z_1 e z_2 em G. Então as funções $f_n(z) - a$ para $n > N$ tem que ter cada uma delas ao menos um zero em qualquer vizinhança do ponto z_1, e em qualquer vizinhança do ponto z_2. Logo podemos tomar vizinhanças disjuntas. Daí para $n > N$ as funções $f_n(z) - a$ tomam o valor zero em ao menos dois pontos distintos de G, o qual contradiz a injetividade da função $f_n(z)$.

3. Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto conexo tal que cada f analítica em A possue uma primitiva. Mostre que A é simplesmente conexo. (Sugestão: examine a demonstração do teorema da aplicação de Riemann).

SOLUÇÃO. Se $A = \mathbb{C}$ não temos nada que provar. Seja $A \subset \mathbb{C}$, então existe $a \in \mathbb{C} \setminus A$ e tomemos a função $f(z) = z - a$. Temos f analítica em A e $f(z) \neq 0$ para todo $z \in A$. Além disso $\dfrac{1}{f}$ é analítica em A e $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{1}{z-a} \neq 0$, para todo $z \in A$. Portanto existe $h(z)$ analítica em A tal que $h(z) = e^{\frac{1}{2}\ell n(z-a)}$. Desta relação temos $h(A) \supset B_\rho(h(z_0))$ para algum $\rho > 0$ e $z_0 \in A$. Definamos $g(z) = \dfrac{\rho}{4} \cdot \dfrac{\mid h'(z_0) \mid}{\mid h(z_0) \mid^2} \cdot \dfrac{h(z_0)}{h'(z_0)} \cdot \dfrac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}$ Temos $\mid g(z) \mid < 1$ para todo $z \in A$ e $g : A \to B_1(0)$ é um homeomorfismo. Como $B_1(0)$ é simplesmente conexo, A é simplesmente conexo.

4. Seja G simplesmente conexo cuja fronteira possue ao menos dois pontos. Se $a \in G$, mostre que existe uma aplicação $\varphi : G \to B_r(0)$ com $\varphi(G) = B_r(0), \varphi$ injetora tal que $\varphi(a) = 0$ e $\mid \varphi'(a) \mid = 1$.

   SOLUÇÃO. Seja uma função $\psi : G \to B_1(0)$ tal que $\psi(G) = B_1(0)$, com ψ injetora e $\psi(a) = 0$. Todas as funções que tem esta propriedade são da forma $e^{i\alpha}\psi(z)$. Definamos $\varphi(z) = \dfrac{e^{i\alpha}\psi(z)}{\psi'(a)}$ e $\dfrac{1}{\mid \psi'(a) \mid} = r$. Temos $\varphi(a) = 0$ e $\mid \varphi'(a) \mid = 1$. Além disso $\mid \varphi(z) \mid \leq \dfrac{1}{1\psi'(a) \mid} = r$.

5. (i) Achar uma função analítica injetora que aplica $\{z : \mid z \mid < 1, Re(z) > 0\}$ sobre $B_1(0)$.

   (ii) Achar uma função analítica injetora que aplica $\{z = x + iy : y > 0\}$ sobre $B_1(0)$. Sugestão: Use as funções $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$

   SOLUÇÃO.

   i) $f(z) = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$

   ii) $f(z) = \dfrac{z - i}{iz - 1}$.

II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja f analítica em $G = \{z : Re(z) > 0\}$, injetora com $Re(f(z)) > 0$ para todo z em G, e $f(a) = a$ para algum número a, Mostre que $\mid f'(a) \mid \leq 1$.

2. Seja G uma região simplesmente conexa que não é todo plano e suponha que $\overline{z} \in G$ quando $z \in G$. Seja $a \in G$ e suponha que $f : G \to D = \{z : \mid z \mid < 1\}$ é função injetora analítica com $f(a) = 0, f'(a) > 0$ e $f(G) = D$. Seja $G_+ = \{z \in G : Im(z) > 0\}$. Mostre que $f(G_+)$ deve estar contida inteiramente acima ou abaixo do eixo real.

3. Sejam G_1 e G_2 regiões simplesmente conexas, nenhuma delas igual a $\mathbb{C}$. Seja f uma aplicação analítica injetora de G_1 sobre G_2. Tome $a \in G_1$ e $\alpha = f(a)$. Prove que para qualquer aplicação analítica h de G_1 sobre G_2 com $h(a) = \alpha$ segue que $| h'(a) | \leq | f'(a) |$. Supondo h não injetora o que se pode dizer?.

4. Seja G uma região simplesmente conexa $G \neq \mathbb{C}$. Seja $\Delta = \{\varepsilon : | \varepsilon | < 1\}$ e suponha que f é uma aplicação analítica injetora de G sobre Δ, com $f(a) = 0$ e $f'(a) > 0$ para algum a em G. Seja g qualquer outra função analítica injetora de G sobre Δ. Expresse g em termos de f.

5. Mostre que não existe uma função analítica injetora que aplica $G = \{z : 0 < | z | < 1\}$ sobre o anel $\Omega = \{z : r < | z | < R\}$ onde $r > 0$.

§ BIBLIOGRAFIA

[1] Conway, J.B. - *Function of one complex variable.* Springer–Verlag, New Yok Inc, 1973.

[2] Dieudonne, J. - *Foundations of modern analysis.* Academic Press, New York and London, 1960.

[3] Duncan, J. - *The elements of complex analysis.* John Wiley & Sons, Ltd., 1968.

[4] Forsyth, A.R. - *Theory of function of a complex variable.* Volume I, Tercera Edition, Dover Publications, Inc., New Yok, 1965.

[5] Krzyz, J.G. - *Problems in complex variable theory.* American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1971.

[6] Markushevich, A. - *Teoria de las funciones analíticas.* Tomo I e II, Segunda Edición, Editorial Mir Moscow, 1978.

[7] Narasimhan, R. - *Complex analysis in one variable.* Birkhäuser Boston, Inc., 1985.

[8] Polya, G. and Latta, G. - *Complex Variables.* John Wiley & Sons, Inc.

[9] Remmert, R. - *Theory of complex functions.* Springer–Verlag, New York, Inc. 1991.

[10] Rudim, W. - *Real and complex analysis.* Second Edition, Tata Mc Graw–Hill, 1978.

[11] Sansone, G. - *Lezioni sulla teoria della funzioni di una variable complessa.* Volume Primo, Quarta Edizione, Padova, 1963.

[12] Sidorov, Y.V., Fedoyuk, M.V. and Shabunin, M.I. - *Lectures on the theory of functions of a complex variable.* Mir Publishers Moscow, 1978.

[13] Silverman, R.A. - *Complex analysis with applications.* Prentice–Hall, Inc., 1974.

[14] Sveshnikov, A.G., Tikhonov, A.N. - *The theory of functions of a complex variable.* Mir Plublishers, Moscow, 1971.

[15] Volkovyski, L.I., Lunts, G.L., Aramonovich, I.G. - *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja.* Segunda Educición, Editorial Mir Moscou, 1977.

[16] Whittaker, E.T. and Watson, G.N. – *A course of modern analysis, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions, with an account of the principal transcendental functions.* Fourth Edition, Cambridge at the University Press, 1969.