

# Um Texto de Geometria Hiperbólica

Inedio Arcari

Orientador: Prof. Dr. **EDSON AGUSTINI**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

C A M P I N A S  
Estado de São Paulo - Brasil  
Abril de 2008

## UM TEXTO DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Inedio Arcari e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de Abril de 2008

*EDSON AGUSTINI*

---

Prof. Dr.: Edson Agustini  
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Agustini (Orientador) (UFU)

Prof. Dr. Mercio Botelho Faria (UFV)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sandra Augusta Santos (IMECC/UNICAMP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP  
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

	Arcari, Inedio
Ar21t	Um texto de geometria hiperbólica / Inedio Arcari -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.
	Orientador : Edson Agustini
	Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Geometria hiperbólica. 2. Trigonometria hiperbólica. 3. Horocírculo. 4. Curva equidistante. I. Agustini, Edson. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A text of hyperbolic geometry.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Hyperbolic geometry. 2. Hyperbolic trigonometry. 3. Horocycle. 4. Equidistant curve.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Edson Agustini (UFU)  
Prof. Dr. Mercio Botelho Faria (UFV)  
Profª. Dra. Sandra Augusta Santos (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 14/04/08

Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 14 de abril de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

*EDSON Agusti*

---

**Prof. (a). Dr (a). EDSON AGUSTINI**

*Sandra Augusta Santos*

---

**Prof. (a). Dr (a). SANDRA AUGUSTA SANTOS**

*Mercio Botelho Faria*

---

**Prof. (a). Dr (a). MÉRCIO BOTELHO FARIA**

## Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Carlene, meu filho Igor, meus pais Juarez e Verginia e meu irmão Alessandro.

## Agradecimentos

Agradeço:

À Deus.

À minha esposa Carlene e meu filho Igor, que durante esta caminhada foram privados de minha presença e mesmo assim não mediram esforços para esta realização.

Aos meus pais Juarez e Verginia, pelo incentivo, apoio e dedicação.

Ao meu irmão Alessandro, pela parceria e apoio.

Ao Prof. Dr Edson Agustini, que além de professor e orientador, é um amigo.

A todos os professores e coordenadores do Programa que aceitaram o nosso desafio.

Aos colegas, que em muitos momentos nos deram ânimo.

À Unemat, através dos colegas, que nos ofereceu esta oportunidade.

Ao Campus de Barra do Bugres que ofereceu suas instalações e material através do Laboratório de Ensino-LIPE.

À Escola Estadual Alfredo José da Silva que oportunizou esta qualificação.

# Um Texto de Geometria Hiperbólica

Autor: INEDIO ARCARI

Orientador: Prof. Dr. EDSON AGUSTINI

## Resumo

A presente dissertação é um texto introdutório de Geometria Hiperbólica com alguns resultados e comentários de Geometria Elíptica. Nossa intenção foi compilar um material que possa ser utilizado em cursos introdutórios de Geometria Hiperbólica tanto em nível de licenciatura quanto de bacharelado. Para tornar o texto mais acessível, notas históricas sobre a bela página do desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas foram introduzidas logo no primeiro capítulo. Procuramos ilustrar fartamente o texto com figuras dentre as quais várias que foram baseadas no Modelo Euclidiano do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica. Atualmente, o estudo de Geometria Hiperbólica tem sido bastante facilitado pelo uso de softwares de geometria dinâmica, como o Cabri-Géomètre, GeoGebra e NonEuclid, sendo esses dois últimos softwares livres.

*Palavras-chave:* Geometria Hiperbólica; Trigonometria Hiperbólica; Horocírculo; Curva Eqüidistante.

# A Text of Hyperbolic Geometry

Author: INEDIO ARCARI  
Adviser: Prof. Dr. EDSON AGUSTINI

## Abstract

The present work is an introductory text of Hyperbolic Geometry with some results and comments of Elliptic Geometry. Our aim in this work were to compile a material that can be used as introduction to Hyperbolic Geometry in undergraduated courses. In the first chapter we introduced historical notes about the beautiful development of the Non Euclid Geometries in order to turn the text more interesting and accesible. We illustrated the text with many figures which were done on the Euclidean Model of the Poincaré's Disk for the Hyperbolic Geometry. In this way, the study of Hyperbolic Geometry has been softened by the use of softwares of dynamic geometry, like Cabri-Gèomètre and the freeware softwares GeoGebra and NonEuclid.

*Key-words:* Hyperbolic Geometry; Hyperbolic Trigonometry; Horocycle; Equidistant Curve.

# Sumário

Dedicatória	vii
Agradecimentos	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Figuras	xvii
Introdução	1
<b>1 Notas Históricas</b>	<b>3</b>
<b>2 Axiomas da Geometria Euclidiana Plana</b>	<b>15</b>
2.1 Axiomática de Euclides . . . . .	15
2.2 Axiomática de Hilbert . . . . .	16
<b>3 O Quinto Postulado de Euclides</b>	<b>19</b>
3.1 Quatro Proposições Importantes . . . . .	19
3.2 Equivalentes do 5º Postulado de Euclides . . . . .	22
3.3 Outras Proposições Equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides . . . . .	31
<b>4 Precursores das Geometrias Não Euclidianas</b>	<b>33</b>
<b>5 Alguns Modelos para as Geometrias Elíptica e Hiperbólica</b>	<b>41</b>
5.1 Modelos . . . . .	41
5.2 Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica . . . . .	42
5.3 Modelo do Semiplano de Poincaré para a Geometria Hiperbólica . . . . .	43
5.4 Modelo de Klein para a Geometria Hiperbólica . . . . .	44
5.5 Modelo da Pseudo-esfera de Beltrami para a Geometria Hiperbólica . . . . .	44
5.6 Modelo de Klein para a Geometria Elíptica . . . . .	45
5.7 Modelo Duplo da Esfera para a Geometria Elíptica . . . . .	46
<b>6 Geometria Hiperbólica</b>	<b>49</b>
6.1 Paralelismo na Geometria Hiperbólica . . . . .	49
6.2 Propriedades Elementares das Paralelas . . . . .	54
6.3 Pontos Ideais . . . . .	57
6.4 Triângulos Generalizados . . . . .	58
6.5 Propriedades de Triângulos Generalizados . . . . .	59
6.6 Congruência em triângulos generalizados . . . . .	63
6.7 O Ângulo de Paralelismo . . . . .	65

6.8	Extensão da Função Ângulo de Paralelismo . . . . .	68
6.9	Quadriláteros Especiais . . . . .	68
6.10	A Soma dos Ângulos Internos de Triângulos e Polígonos . . . . .	72
6.11	O Caso de Congruência AAA . . . . .	75
6.12	Varição da Distância entre Duas Retas . . . . .	77
6.13	Construção Geométrica de Uma Reta Paralela a Uma Reta Dada . . . . .	81
6.14	Horocírculos e Curvas Equidistantes . . . . .	83
6.15	Áreas . . . . .	91
<b>7</b>	<b>A Trigonometria Hiperbólica</b>	<b>97</b>
7.1	Arcos Concêntricos de Horocírculos . . . . .	97
7.2	Unidade de Comprimento para a Geometria Hiperbólica . . . . .	101
7.3	Sistema de Coordenadas na Geometria Hiperbólica . . . . .	103
7.4	Trigonometria Hiperbólica em Triângulos Retângulos . . . . .	108
7.5	Teorema de Pitágoras Hiperbólico . . . . .	110
7.6	Trigonometria Hiperbólica em Triângulos Quaisquer . . . . .	110
7.7	Trigonometria Hiperbólica e Função Ângulo de Paralelismo . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Comparação Entre as Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana</b>	<b>121</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>125</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>127</b>

# Lista de Figuras

1.1	<i>Euclides de Alexandria.</i>	3
1.2	<i>Claudius Ptolomeu.</i>	4
1.3	<i>Proclus Diadochus.</i>	4
1.4	<i>Nasiredin.</i>	5
1.5	<i>John Wallis.</i>	5
1.6	<i>Página da obra de Saccheri.</i>	6
1.7	<i>Johann Heinrich Lambert.</i>	7
1.8	<i>Adrien Marie Legendre.</i>	7
1.9	<i>Johann Carl Friedrich Gauss.</i>	8
1.10	<i>János Bolyai.</i>	8
1.11	<i>Nikolai Ivanovich Lobachewsky.</i>	9
1.12	<i>Georg Friedrich Bernhard Riemann.</i>	10
1.13	<i>Eugenio Beltrami.</i>	11
1.14	<i>Felix Christian Klein.</i>	11
1.15	<i>Jules Henri Poincaré.</i>	12
1.16	<i>David Hilbert.</i>	12
2.1	<i>O 5º Postulado de Euclides: duas retas cortadas por uma terceira.</i>	16
3.1	<i>Apoio para a demonstração do Teorema do Ângulo Externo.</i>	19
3.2	<i>O Teorema do Ângulo Externo não é válido para triângulos esféricos.</i>	20
3.3	<i>Proposição 27 de Euclides: ângulos correspondentes congruentes implica em paralelismo.</i>	20
3.4	<i>Apoio para a demonstração da Proposição 27 de Euclides.</i>	20
3.5	<i>Prop. 28 de Euclides: soma de colaterais internos igual a dois retos implica em paralelismo.</i>	21
3.6	<i>Proposição 29 de Euclides: paralelismo implica em ângulos correspondentes congruentes.</i>	21
3.7	<i>A Proposição 28 de Euclides é a recíproca de seu 5º Postulado.</i>	21
3.8	<i>Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.</i>	22
3.9	<i>Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.</i>	22
3.10	<i>Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.</i>	22
3.11	<i>Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.</i>	23
3.12	<i>Apoio para a demonstração da equivalência entre a soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5º Postulado.</i>	23
3.13	<i>Apoio para a demonstração da Equivalência entre a soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5º Postulado.</i>	23
3.14	<i>Um ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.</i>	24
3.15	<i>Dados uma reta e um ponto fora dela, pode-se construir uma reta passando pelo ponto tal que o ângulo formado pelas retas seja tão pequeno quanto se queira.</i>	24
3.16	<i>Triângulo retângulo isósceles.</i>	24
3.17	<i>Processo construtivo de triângulos isósceles.</i>	25
3.18	<i>Seqüência de triângulos isósceles obtidos por processo construtivo.</i>	25

3.19	<i>Apoio para a demonstração da equivalência entre a soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5º Postulado.</i>	25
3.20	<i>Axioma de Pasch: toda reta que entra em um triângulo por um lado deve cortar um outro lado desse triângulo.</i>	26
3.21	<i>Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5º Postulado.</i>	27
3.22	<i>Apoio para a demonstração da “Primeira Proposição de Legendre”.</i>	27
3.23	<i>Apoio para a demonstração da “Segunda Proposição de Legendre”.</i>	28
3.24	<i>Apoio para a demonstração da “Segunda Proposição de Legendre”.</i>	28
3.25	<i>Apoio para a demonstração da “Segunda Proposição de Legendre”.</i>	29
3.26	<i>Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5º Postulado.</i>	29
3.27	<i>Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5º Postulado.</i>	29
3.28	<i>Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5º Postulado.</i>	30
3.29	<i>Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5º Postulado.</i>	30
3.30	<i>Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5º Postulado.</i>	30
3.31	<i>Mais equivalentes ao 5º Postulado: mesma soma de colaterais internos implica na unicidade da reta paralela.</i>	31
3.32	<i>Mais um equivalente ao 5º Postulado: a existência de retângulos.</i>	31
3.33	<i>Mais equivalentes ao 5º Postulado: retas paralelas implicam em mesma soma de ângulos colaterais internos.</i>	32
3.34	<i>Mais equivalentes ao 5º Postulado: desigualdades envolvendo a distância de pontos de uma reta a outra reta.</i>	32
4.1	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Ptolomeu.</i>	33
4.2	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Proclus.</i>	34
4.3	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Proclus.</i>	34
4.4	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Proclus.</i>	34
4.5	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Nasiredin.</i>	35
4.6	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Nasiredin.</i>	35
4.7	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Wallis.</i>	36
4.8	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Wallis.</i>	36
4.9	<i>Quadrilátero de Saccheri.</i>	36
4.10	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Saccheri.</i>	37
4.11	<i>A hipótese do ângulo obtuso de Saccheri.</i>	37
4.12	<i>A hipótese do ângulo agudo de Saccheri.</i>	37
4.13	<i>Quadrilátero de Lambert.</i>	38
4.14	<i>Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Legendre.</i>	38
5.1	<i>Dados dois pontos no interior de um disco, existe apenas uma circunferência ortogonal ao bordo do disco passando pelo pelos pontos dados.</i>	42
5.2	<i>Dados dois pontos no interior de um disco alinhados com seu centro, existe apenas uma reta ortogonal ao bordo do disco passando pelo</i>	42
5.3	<i>Retas hiperbólicas no modelo do disco de Poincaré.</i>	42
5.4	<i>Ângulo hiperbólico no modelo do disco de Poincaré.</i>	43
5.5	<i>Medindo distâncias no modelo do disco de Poincaré.</i>	43
5.6	<i>O 5º Postulado de Euclides não é válido no modelo do disco de Poincaré.</i>	44

5.7	<i>Retas hiperbólicas no modelo do semiplano de Poincaré.</i>	44
5.8	<i>Retas hiperbólicas no modelo do disco de Klein para a Geometria Hiperbólica.</i>	44
5.9	<i>Construindo o modelo da pseudo-esfera de Beltrami a partir da tratriz.</i>	45
5.10	<i>Aplicação perspectiva para os Axiomas de Separação da Geometria Elíptica.</i>	46
5.11	<i>Retas no modelo do disco de Klein para a Geometria Elíptica.</i>	46
5.12	<i>Triângulo elíptico no modelo do disco de Klein.</i>	46
5.13	<i>Modelo duplo da esfera para a Geometria Elíptica.</i>	47
6.1	<i>O Axioma de Lobachewsky para a Geometria Hiperbólica.</i>	49
6.2	<i>Apoio para a demonstração da infinidade de paralelas a uma reta, passando por um ponto dado: regiões angulares.</i>	50
6.3	<i>Apoio para a demonstração da infinidade de paralelas a uma reta passando, por um ponto dado.</i>	50
6.4	<i>Usando o Axioma de Pasch na demonstração da infinidade de paralelas a uma reta, passando por um ponto dado.</i>	50
6.5	<i>Regiões angulares no modelo do disco de Poincaré.</i>	51
6.6	<i>Apoio para a demonstração da existência de duas retas paralelas a uma reta, passando por um ponto dado.</i>	51
6.7	<i>Existe uma infinidade de retas hiperparalelas a uma reta, passando por um ponto dado.</i>	52
6.8	<i>Apoio para a demonstração da congruência dos ângulos de paralelismo.</i>	52
6.9	<i>Apoio para a demonstração da congruência dos ângulos de paralelismo.</i>	53
6.10	<i>Apoio para a demonstração de que os ângulos de paralelismo são agudos.</i>	53
6.11	<i>Definindo paralelismo em um determinado sentido na Geometria Hiperbólica.</i>	54
6.12	<i>Paralelismo em um determinado sentido.</i>	54
6.13	<i>Apoio para demonstração: paralelismo em um determinado sentido.</i>	55
6.14	<i>Propriedade simétrica de paralelismo na Geometria Hiperbólica.</i>	55
6.15	<i>Apoio para a demonstração da propriedade simétrica do paralelismo na Geometria Hiperbólica.</i>	56
6.16	<i>Propriedade transitiva de paralelismo na Geometria Hiperbólica.</i>	56
6.17	<i>Apoio para a demonstração da propriedade transitiva do paralelismo na Geometria Hiperbólica.</i>	57
6.18	<i>Apoio para a demonstração da propriedade transitiva do paralelismo na Geometria Hiperbólica.</i>	57
6.19	<i>Pontos ideais na Geometria Hiperbólica.</i>	58
6.20	<i>Triângulo generalizado com um ponto ideal.</i>	58
6.21	<i>Triângulo generalizado com dois pontos ideais.</i>	59
6.22	<i>Triângulo generalizado com três pontos ideais.</i>	59
6.23	<i>Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice.</i>	60
6.24	<i>Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice.</i>	60
6.25	<i>Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice.</i>	60
6.26	<i>Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.</i>	61
6.27	<i>Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.</i>	61
6.28	<i>Ângulo externo em triângulos generalizados com um vértice ideal.</i>	62
6.29	<i>Ângulo externo em triângulos generalizados com dois vértices ideais.</i>	62
6.30	<i>Apoio para a demonstração do “Teorema do Ângulo Externo” para triângulos generalizados.</i>	62
6.31	<i>Apoio para a demonstração do “Teorema do Ângulo Externo” para triângulos generalizados.</i>	63
6.32	<i>Apoio para a demonstração do caso de congruência “lado-ângulo” para triângulos generalizados.</i>	64

6.33	<i>Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo” para triângulos generalizados.</i>	64
6.34	<i>Apoio para a demonstração do caso de congruência “triângulos isósceles” para triângulos generalizados.</i>	65
6.35	<i>Ângulo de paralelismo na Geometria Hiperbólica.</i>	65
6.36	<i>Ângulo de paralelismo no triângulo retângulo generalizado.</i>	65
6.37	<i>Apoio para a demonstração de que a Função Ângulo de Paralelismo é injetiva.</i>	66
6.38	<i>Apoio para a demonstração de que a Função Ângulo de Paralelismo é sobrejetiva.</i>	66
6.39	<i>Apoio para a demonstração de que a Função Ângulo de Paralelismo é sobrejetiva.</i>	67
6.40	<i>Extensão da Função Ângulo de Paralelismo.</i>	68
6.41	<i>Quadrilátero de Saccheri.</i>	69
6.42	<i>Apoio para a demonstração de que o segmento que une os pontos médios do topo e da base de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular a esses lados.</i>	69
6.43	<i>Apoio para a demonstração de que o topo e da base de um quadrilátero de Saccheri estão em retas hiperparalelas.</i>	69
6.44	<i>Apoio para a demonstração de que os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.</i>	70
6.45	<i>Quadrilátero de Lambert.</i>	71
6.46	<i>Apoio para a demonstração de que o ângulo desconhecido de um quadrilátero de Lambert é agudo.</i>	71
6.47	<i>Apoio para demonstração: relacionando ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico com dois ângulos retos.</i>	71
6.48	<i>Apoio para demonstração: relacionando ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico com dois ângulos retos.</i>	72
6.49	<i>Apoio para demonstração: relacionando ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico com dois ângulos retos.</i>	72
6.50	<i>Apoio para a demonstração de Lobachewsky de que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que dois retos.</i>	73
6.51	<i>Apoio para a demonstração de Lobachewsky de que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que dois retos.</i>	73
6.52	<i>Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo ordinário de <math>n</math> lados é menor do que <math>(n - 2)\pi</math>.</i>	74
6.53	<i>Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado com dois vértices ideais é menor do que dois retos.</i>	74
6.54	<i>Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado com um vértice ideal é menor do que dois retos.</i>	75
6.55	<i>Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado com três vértices ideais é menor do que dois retos.</i>	75
6.56	<i>Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo generalizado de <math>n</math> lados é menor do que <math>(n - 2)\pi</math>.</i>	76
6.57	<i>Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.</i>	76
6.58	<i>Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.</i>	76
6.59	<i>Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.</i>	77
6.60	<i>Existe exatamente uma reta perpendicular a duas retas hiperparalelas.</i>	77
6.61	<i>Apoio para a demonstração de que existe exatamente uma reta perpendicular a duas retas hiperparalelas.</i>	78
6.62	<i>Não existe reta perpendicular a duas retas paralelas ou concorrentes.</i>	78
6.63	<i>Distância de ponto a reta.</i>	78

6.64	<i>Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas concorrentes.</i>	79
6.65	<i>Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas concorrentes.</i>	79
6.66	<i>Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas paralelas. . .</i>	80
6.67	<i>Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas paralelas. . .</i>	80
6.68	<i>Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas hiperparalelas.</i>	81
6.69	<i>Construção de paralelas no disco de Poincaré descrita em [2]. . . . .</i>	82
6.70	<i>Construção exata das duas retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto, utilizando software de geometria dinâmica. . . . .</i>	82
6.71	<i>Pontos correspondentes em retas concorrentes, paralelas e hiperparalelas. . . . .</i>	83
6.72	<i>Apoio para a demonstração da existência de um ponto equidistante a duas retas paralelas.</i>	83
6.73	<i>Apoio para a demonstração da existência de uma reta equidistante a duas retas paralelas.</i>	84
6.74	<i>Apoio para a demonstração da unicidade de pontos correspondentes em retas paralelas. . .</i>	84
6.75	<i>Apoio para a demonstração da unicidade de pontos correspondentes em retas paralelas. . .</i>	84
6.76	<i>Apoio para a demonstração da não colinearidade de pontos correspondentes em três retas paralelas. . . . .</i>	85
6.77	<i>Apoio para a demonstração da transitividade de pontos correspondentes em três retas paralelas. . . . .</i>	85
6.78	<i>Pode haver colinearidade entre pontos correspondentes em três retas hiperparalelas. . . . .</i>	86
6.79	<i>Definindo horocírculo (ou horociclo). . . . .</i>	86
6.80	<i>Um horocírculo fica completamente determinado por um ponto ideal e um ponto ordinário.</i>	86
6.81	<i>Um horocírculo pode ser pensado como limite de círculos hiperbólicos. . . . .</i>	87
6.82	<i>Definindo horocírculos congruentes. . . . .</i>	87
6.83	<i>Apoio para a demonstração de que quaisquer dois horocírculos são congruentes. . . . .</i>	87
6.84	<i>Reta tangente a horocírculo. . . . .</i>	88
6.85	<i>Apoio para a demonstração de que retas tangentes a horocírculos são perpendiculares aos raios. . . . .</i>	88
6.86	<i>Definindo curva equidistante. . . . .</i>	88
6.87	<i>Curva equidistante no modelo do disco de Poincaré. . . . .</i>	89
6.88	<i>Definindo curvas equidistantes congruentes. . . . .</i>	89
6.89	<i>Apoio para a demonstração de condições de congruência para curvas equidistantes. . . . .</i>	90
6.90	<i>Definindo arcos e cordas de círculos, horocírculos e curvas equidistantes. . . . .</i>	90
6.91	<i>Definindo congruência de arcos em círculos, horocírculos e curvas equidistantes. . . . .</i>	90
6.92	<i>Apoio para a demonstração de condições para congruência de arcos em curvas equidistantes.</i>	91
6.93	<i>Apoio para a demonstração de condições para congruência de arcos em curvas equidistantes.</i>	91
6.94	<i>Apoio para a demonstração de condições para a equivalência de áreas entre triângulo e quadrilátero de Saccheri. . . . .</i>	91
6.95	<i>Apoio para a demonstração de que dois triângulos que possuem mesmo defeito possuem a mesma área. . . . .</i>	92
6.96	<i>Apoio para a demonstração de que dois triângulos que possuem mesmo defeito possuem a mesma área. . . . .</i>	93
6.97	<i>Relacionando defeitos em triângulo particionado. . . . .</i>	93
6.98	<i>Apoio para a demonstração de Gauss para a fórmula da área de triângulos hiperbólicos. .</i>	94
6.99	<i>Apoio para a demonstração de Gauss para a fórmula da área de triângulos hiperbólicos. .</i>	95
6.100	<i>Apoio para a demonstração de Gauss para a fórmula da área de triângulos hiperbólicos. .</i>	96
7.1	<i>Congruência entre segmentos de raios de horocírculos concêntricos. . . . .</i>	97
7.2	<i>Apoio para a demonstração da congruência entre segmentos de raios de horocírculos concêntricos. . . . .</i>	98
7.3	<i>Apoio de demonstração: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.</i>	98
7.4	<i>Relacionando arcos congruentes em horocírculos concêntricos. . . . .</i>	99
7.5	<i>Propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos. . . . .</i>	99

7.6	<i>Propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.</i>	100
7.7	<i>Relacionando comprimento e distância entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.</i>	101
7.8	<i>Apoio para demonstração: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.</i>	101
7.9	<i>Apoio para demonstração: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.</i>	102
7.10	<i>Introduzindo um sistema de coordenadas no plano hiperbólico.</i>	103
7.11	<i>Não é possível introduzir um sistema de coordenadas análogo ao do plano euclidiano no plano hiperbólico.</i>	103
7.12	<i>Quadrilátero de Lambert no sistema de coordenadas do plano hiperbólico.</i>	104
7.13	<i>Encontrando a equação de um horocírculo.</i>	104
7.14	<i>Apoio para a demonstração da equação de um horocírculo.</i>	104
7.15	<i>Relacionando comprimento de arco de horocírculo e distância.</i>	105
7.16	<i>Apoio para a demonstração de propriedade de comprimento de arco de horocírculo e distância.</i>	105
7.17	<i>Relacionando reta hiperbólica paralela aos eixos coordenados e arco de horocírculo.</i>	105
7.18	<i>Apoio para a demonstração de propriedade de reta hiperbólica paralela aos eixos coordenados e arco de horocírculo.</i>	106
7.19	<i>Apoio para a demonstração da equação da reta hiperbólica paralela aos eixos coordenados.</i>	106
7.20	<i>Apoio para a demonstração de equação envolvendo números complementares.</i>	107
7.21	<i>Triângulo retângulo hiperbólico ordinário.</i>	108
7.22	<i>Apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos retângulos ordinários.</i>	109
7.23	<i>Apoio para a demonstração do Teorema de Pitágoras Hiperbólico.</i>	110
7.24	<i>Em um triângulo retângulo hiperbólico com catetos medindo 3 e 4, a hipotenusa é maior do que 5.</i>	111
7.25	<i>Triângulo hiperbólico ordinário.</i>	111
7.26	<i>Apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos ordinários.</i>	111
7.27	<i>Figura de apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos ordinários.</i>	112
7.28	<i>Trabalhando com a Função Ângulo de Paralelismo em um triângulo retângulo generalizado.</i>	113
7.29	<i>A Lei dos Cossenos 1 da Geometria Hiperbólica.</i>	113
7.30	<i>A Lei dos Senos da Geometria Hiperbólica.</i>	114
7.31	<i>Encontrando as medidas dos ângulos de um triângulo retângulo ordinário.</i>	115
7.32	<i>Encontrando a medidas de ângulos e lados de um triângulo ordinário.</i>	115
7.33	<i>A Lei dos Cossenos 2 da Geometria Hiperbólica.</i>	116
7.34	<i>Encontrando a medidas dos lados a partir das medidas dos ângulos de um triângulo ordinário.</i>	117
7.35	<i>Encontrando o raio de um círculo hiperbólico inscrito em um triângulo ordinário.</i>	118
7.36	<i>Encontrando alturas de um triângulo ordinário.</i>	118
8.1	<i>Estabelecendo a unidade de medida hiperbólica.</i>	121
8.2	<i>Estabelecendo sub-unidades de medida hiperbólica.</i>	121
8.3	<i>Medidas dos lados de triângulos hiperbólicos ordinários em termos da sub-unidades de medida.</i>	122

# Introdução

A presente dissertação é um texto introdutório de Geometria Hiperbólica com alguns resultados e comentários de Geometria Elíptica. Nossa intenção foi compilar um material que possa ser utilizado em cursos introdutórios de Geometria Hiperbólica tanto em nível de licenciatura quanto de bacharelado. Para tornar o texto mais acessível, notas históricas sobre a bela página do desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas foram introduzidas logo no primeiro capítulo. Procuramos ilustrar fartamente o texto com figuras dentre as quais várias que foram baseadas no Modelo Euclidiano do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica. Atualmente, o estudo de Geometria Hiperbólica tem sido bastante facilitado pelo uso de softwares de geometria dinâmica, como o Cabri-Géomètre, GeoGebra e NonEuclid, sendo esses dois últimos softwares livres.

O trabalho está dividido do seguinte modo:

Capítulo 1: Notas históricas sobre o desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas.

Capítulo 2: Postulados de Euclides e Axiomas de Hilbert para a Geometria Euclidiana Plana.

Capítulo 3: O Quinto Postulado de Euclides e seus equivalentes - O “Problema das Paralelas”.

Capítulo 4: Os precursores das Geometrias Não Euclidianas e seus trabalhos.

Capítulo 5: Alguns modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Capítulo 6: A Geometria Hiperbólica - principais teoremas.

Capítulo 7: A Trigonometria Hiperbólica - principais teoremas e identidades trigonométricas.

Capítulo 8: A comparação entre as Trigonometrias Hiperbólica, Euclidiana e Elíptica.

Referências Bibliográficas.

Inedio Arcari  
Barra do Bugres-MT, Março de 2008

# Capítulo 1

## Notas Históricas

O estudo sistemático de Geometrias Não Euclidianas em espaços homogêneos, ou seja, como são chamadas os que apresentam a mesma curvatura em todos os seus pontos, teve origem a partir do final do século XVIII e começo do século XIX quando Gauss estudava o “Problema das Paralelas”, que consistia em tentar provar que o Quinto Postulado<sup>1</sup> de Euclides era independente dos demais. Ironicamente, podemos dizer que o próprio Euclides, ao adotar seu Quinto Postulado em sua obra “Os Elementos” lançou a semente das Geometrias Não Euclidianas, uma vez que o questionamento de tal postulado levou ao desenvolvimento da teoria que serviu de base para a fundamentação da primeira Geometria Não Euclidiana, ou seja, a Geometria Hiperbólica.

Nesta seção introduzimos uma breve biografia dos principais matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento da teoria que envolve as chamadas Geometrias Não Euclidianas. As biografias abaixo podem ser encontradas com mais detalhes no site [16].

### **Euclides de Alexandria.**

Euclides foi o matemático grego responsável pela compilação de praticamente toda a matemática desenvolvida até sua época em uma monumental obra de 13 volumes chamada de “Os Elementos”. Seu



Figura 1.1: *Euclides de Alexandria.*

mérito não se restringe apenas à compilação, como também à introdução do método lógico-dedutivo no desenvolvimento de uma teoria, isto é, do método axiomático, tão conhecido na atual matemática. Na obra de Euclides temos dez axiomas, sendo cinco “noções comuns”, que Euclides acreditava serem verdades aceitas sem contestações em qualquer ciência, e cinco “postulados” que pretendiam ser proposições específicas da geometria e que também deveriam ser aceitas sem contestações. A partir desses axiomas, Euclides deduziu 465 proposições, dentre as quais figuram também resultados de geometria espacial e

---

<sup>1</sup>Ver o enunciado do Quinto Postulado no Capítulo 2.

teoria dos números (do ponto de vista geométrico). Os livros didáticos de geometria, confeccionados ao longo do tempo, possuem, até hoje, “Os Elementos” de Euclides como base. Trata-se da segunda obra mais editada no mundo, perdendo apenas para a Bíblia.

Sabe-se que Euclides nasceu por volta do ano 325 a.C. e morreu por volta de 265 a.C. Sabe-se também que ele viveu boa parte de sua vida na cidade de Alexandria, no Egito, onde trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria, fundada por Alexandre, o Grande.

### **Claudius Ptolomeu.**

Claudius Ptolomeu foi um dos matemáticos que contestaram o Quinto Postulado de Euclides, propondo uma demonstração<sup>2</sup> de tal postulado a partir dos quatro primeiros. A demonstração proposta por Ptolomeu fazia uso, implicitamente, da vigésima nona proposição do primeiro livro de Euclides, que depende do Quinto Postulado, isto é, ele usou uma proposição equivalente ao próprio Quinto Postulado, fazendo portanto, um ciclo vicioso.

Claudius Ptolomeu nasceu em 85 d.C. no Egito e morreu em 165 d.C. em Alexandria, também no Egito. Foi um eminente matemático e astrônomo que escreveu uma importante obra, intitulada “Almagesto”, que introduziu a trigonometria como ferramenta no estudo de astronomia.



Figura 1.2: *Claudius Ptolomeu.*

### **Proclus Diadochus.**

Proclus foi um estudioso das obras clássicas gregas e muito do que se sabe da história e da filosofia da Grécia Antiga sobreviveu em seus escritos. Ele escreveu um trabalho sobre a obra de Euclides chamado de “Comentários sobre Euclides” onde, assim como Ptolomeu, também critica o Quinto Postulado de Euclides, propondo uma demonstração do mesmo, a partir dos quatro outros postulados. Essa demonstração<sup>3</sup> é baseada na aceitação do fato de que retas paralelas são equidistantes, fato este que é equivalente ao próprio Quinto Postulado de Euclides. Proclus nasceu em 8 de fevereiro de 411 d.C. (calendário juliano)

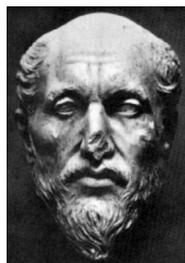


Figura 1.3: *Proclus Diadochus.*

---

<sup>2</sup>Ver o Capítulo 4.

<sup>3</sup>Ver o Capítulo 4.

em Constantinopla (atualmente Istambul, na Turquia) e morreu em 17 de abril de 485 d.C. em Atenas, na Grécia.

### **Nasir al-Din al-Tusi (Nasiredin).**

Assim como Ptolomeu, Nasiredin também estudou astronomia e tentou provar o Quinto Postulado de Euclides. Para tanto, ele utilizou uma proposição-axioma, que foi tomada sem demonstração devido ao seu caráter de auto-evidência<sup>4</sup>. No entanto, essa proposição assumida é um equivalente do Quinto Postulado de Euclides. Assim como Ptolomeu, Nasiredin acabou realizando um raciocínio cíclico em suas deduções.

Nasiredin era árabe e nasceu em 18 de fevereiro de 1201 (calendário juliano) em Tus na Pérsia (atualmente Irã) e morreu em 26 de junho de 1274 em Kadhimain, Persia (próximo a Bagdá, atualmente Iraque).



Figura 1.4: *Nasiredin*.

### **John Wallis.**

John Wallis foi um eminente matemático inglês que escreveu algumas obras sobre secções cônicas, álgebra e aritmética. Uma delas, a saber, “*Arithmetica Infinitorum*” (Aritmética Infinita) foi utilizada por Isaac Newton em seus estudos. Em suas pesquisas, Wallis também tentou demonstrar<sup>5</sup> o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Para tanto, ele fez uso da existência de triângulos semelhantes e não congruentes, fato este que é equivalente ao próprio Quinto Postulado.

Wallis nasceu em 23 de novembro de 1616 em Ashford na Inglaterra e morreu em 28 de outubro de 1703 em Oxford na Inglaterra.



Figura 1.5: *John Wallis*.

---

<sup>4</sup>Ver o Capítulo 4.

<sup>5</sup>Ver o Capítulo 4.

### Giovanni Girolamo Saccheri.

Saccheri foi um padre jesuíta e estudioso de teologia, filosofia, retórica e matemática que viveu nas cidades de Milão, Turim e Pávia. Sua obra mais famosa é “Euclides Ab Omni Naevo Vindicatus” (Euclides Livre de Todas as Máculas) que é considerada uma das primeiras obras de geometria não euclidiana (embora Saccheri não tenha concebido esta obra com este intuito). Em sua obra ele tenta, assim como seus antecessores, provar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro anteriores. A novidade é que, pela primeira vez, o método de redução ao absurdo em demonstrações foi utilizado no “Problema das Paralelas”. Com isto, Saccheri supôs a negação do Quinto Postulado e tentou chegar a uma contradição fazendo uso de um quadrilátero com dois ângulos retos na base e dois lados verticais congruentes. Como ele sabia que a existência de retângulos e o Quinto Postulado são equivalentes, a negação assumida conduziu a dois casos, a saber: o caso em que os ângulos congruentes do topo são obtusos e o caso em que são agudos. Esse quadrilátero mais tarde passou a se chamar “quadrilátero de Saccheri”<sup>6</sup>. O caso em que os ângulos do topo de seu quadrilátero são obtusos conduz a uma contradição com o Segundo Postulado de Euclides. O caso em que os ângulos são agudos não conduz a uma contradição. No entanto, após ter desenvolvido vários resultados, que hoje são conhecidos teoremas de Geometria Hiperbólica, Saccheri forçou uma contradição admitindo ser impossível a existência de duas retas paralelas assintóticas, ou seja, retas que são paralelas, mas que vão se aproximando à medida que são prolongadas. Essas retas podem ser utilizadas para a construção dos chamados triângulos generalizados da Geometria Hiperbólica<sup>7</sup>.

Saccheri nasceu em 5 de setembro de 1667 em São Remo na Itália e morreu em 25 de outubro de 1733 em Milão, também na Itália.

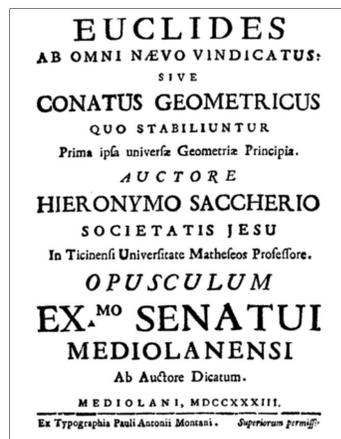


Figura 1.6: *Página da obra de Saccheri.*

### Johann Heinrich Lambert.

Assim como Saccheri, Lambert também tentou provar o Quinto Postulado de Euclides por redução ao absurdo, em seu trabalho “Theorie der Parallellinien” de 1766, via a introdução de um quadrilátero que possui três ângulos retos<sup>8</sup>, conhecido hoje como “quadrilátero de Lambert”. Como consequência, ele deduziu uma série de resultados que hoje são conhecidos como teoremas de Geometria Hiperbólica. Talvez seu mais importante resultado nesse trabalho tenha sido a dedução de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é inversamente proporcional à sua área, em uma geometria onde não vale o Quinto Postulado. Apesar de suas contribuições no campo da Geometria, Lambert é mais conhecido no mundo matemático pela prova rigorosa que fez da irracionalidade do número  $\pi$ .

Lambert nasceu em 26 de agosto de 1728 em Mülhausen na França e morreu em 25 de setembro de 1777 em Berlim na Alemanha.

<sup>6</sup>Ver o Capítulo 4.

<sup>7</sup>Ver a Seção 6.4.

<sup>8</sup>Ver o Capítulo 4.



Figura 1.7: *Johann Heinrich Lambert.*

### **Adrien Marie Legendre.**

Legendre escreveu um tratado de Geometria intitulado “Eléments de Géométrie” em 1794, que serviu de texto básico no ensino de Geometria durante muitas décadas na Europa. Foi nesse trabalho que Legendre voltou-se para a questão do “Problema das Paralelas” e, assim como seus antecessores, tentou demonstrar o Quinto Postulado a partir dos quatro primeiros. Em uma de suas demonstrações ele admitiu que a partir de um ponto no interior de um ângulo não degenerado, cuja medida não é superior a  $60^\circ$ , é possível traçar uma reta que intersecta os dois lados desse ângulo. Embora pareça evidente, essa proposição é equivalente ao próprio Quinto Postulado de Euclides e, desta forma, do ponto de vista lógico-dedutivo, assumi-la significa assumir o Quinto Postulado. Embora Legendre não tenha feito progressos no “Problema das Paralelas”, seu trabalho no campo da Geometria foi magistral do ponto de vista didático e da clareza de raciocínio com que demonstrou diversos teoremas da Geometria Euclidiana, sendo dois deles usados diversas vezes nesse texto<sup>9</sup>.

Legendre nasceu em 18 de setembro de 1752 em Paris na França e morreu em 10 de janeiro de 1833 no mesmo local.



Figura 1.8: *Adrien Marie Legendre.*

### **Johann Carl Friedrich Gauss.**

Gauss tomou conhecimento logo cedo, por volta dos quinze anos de idade, do “Problema das Paralelas” e, assim como seus antecessores, de início tentou demonstrar o Quinto Postulado a partir dos quatro primeiros. No entanto, logo convenceu-se de que tal demonstração não era possível. Embora não haja registros, é possível que Gauss tenha lido os trabalhos de Saccheri, Lambert e Legendre sobre o “Problema das Paralelas” e tomado conhecimento dos vários teoremas de Geometrias Não Euclidianas constantes nesses trabalhos. Embora não tenha publicado nada sobre esse assunto sabe-se, por meio de numerosas correspondências que Gauss mantinha com diversos matemáticos da época, que ele desenvolveu uma série

---

<sup>9</sup>Ver a Seção 3.2.

de resultados de Geometria Hiperbólica e, certamente, foi o primeiro matemático a reconhecer a existência de uma Geometria consistente diferente da Euclidiana. Talvez a não publicação de tais resultados tenha sido motivada pelo receio da não aceitação de uma Geometria diferente da clássica e da contestação da filosofia de Kant, adotada pela igreja, que coloca o universo como euclidiano.

O termo “não euclidiana” é de Gauss. Em 1824, em carta F. A. Taurinus, declara que “se supusermos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$  (o que equivale a considerar uma das negações do Quinto Postulado), é possível desenvolver uma longa série de resultados não contraditórios que constituem uma Geometria Não Euclidiana”.

Gauss foi um dos maiores matemáticos que já existiram e possui contribuições em diversas áreas dessa ciência. Nasceu em 30 de abril de 1777 em Brunswick na Alemanha e morreu em 23 de fevereiro de 1855 in Göttingen, também na Alemanha.



Figura 1.9: *Johann Carl Friedrich Gauss.*

### János Bolyai.

O húngaro János Bolyai é filho de um amigo de Gauss, chamado Farkas Bolyai (1775 – 1856) que tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros. Talvez, por isso, János tenha tentado logo cedo resolver o “Problema das Paralelas”. Assim como Gauss, o jovem János logo convenceu-se da impossibilidade de tal demonstração e passou a admitir e a desenvolver diversos resultados de Geometria Hiperbólica. János publicou, em latim, o fruto de seu trabalho sob o título “Ciência do Espaço Absoluto”<sup>10</sup>, em 1832, como um apêndice de um livro didático escrito por seu pai, intitulado “Tentamen”.



Figura 1.10: *János Bolyai.*

<sup>10</sup>Uma tradução para o inglês do trabalho “Ciência do Espaço Absoluto” de János Bolyai pode ser encontrada no final da referência [3].

Um fato curioso na história de János se deu quando seu pai Farkas enviou uma cópia do “Tentamen” para que seu amigo Gauss avaliasse o brilhante trabalho de seu filho. No entanto, ao contrário do esperado elogio do eminente matemático, Farkas recebeu uma carta de Gauss onde o mesmo diz que elogiar o trabalho de János seria o mesmo que elogiar a si próprio, uma vez que a maioria dos resultados descobertos por János já haviam sido descoberto por ele mesmo anos antes. Entretanto, Gauss escreveu que estava feliz e surpreso, pelo fato de esses resultados de Geometria Hiperbólica terem sido descobertos de modo independente pelo prodigioso filho de um ilustre amigo. Naturalmente, a carta de Gauss provocou profundo descontentamento em János, que passou a cultivar profunda aversão ao “Príncipe dos Matemáticos”.

János nasceu em 15 de dezembro de 1802 em Kolozsvár na Hungria (hoje é uma cidade da Romênia) e morreu em 27 de janeiro de 1860 in Marosvásárhely na Hungria (hoje, também Romênia).

### Nikolai Ivanovich Lobachewsky.

Assim como seus antecessores, Lobachewsky tentou demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos quatro primeiros e logo se convenceu da impossibilidade desse feito. A partir de então, passou a reconhecer a existência e a desenvolver, de forma independente, resultados de uma nova Geometria, a Hiperbólica, diferente da Euclidiana, denominada por ele de **pangeometria** ou **geometria imaginária**. Em 1826 chegou a proferir palestra sobre a existência de geometrias não euclidianas na Universidade de Kazan onde foi professor e reitor. Em 1829, Lobachewsky publicou um trabalho, em russo, sobre suas descobertas mas quase que completamente ignorado pela comunidade científica russa e completamente ignorado no restante do mundo. Entretanto, cronologicamente, trata-se da primeira publicação de uma geometria cujo autor admite ser não euclidiana. Posteriormente, em busca do reconhecimento de seu trabalho, Lobachewsky publicou uma versão em alemão em 1840, intitulada “Pesquisas Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas”<sup>11</sup>, chegando às mãos de Gauss, que ficou mais uma vez surpreso com o fato de Lobachewsky ter descoberto os mesmos resultados de forma independente. Além disso, Gauss também se superpreendeu com a forma como os teoremas da Geometria Hiperbólica foram demonstrados por Lobachewsky, de modo totalmente diferente dos seus, chegando a afirmar em correspondência para um amigo astrônomo de nome Schumacher que o livro de Lobachewsky continha uma exposição admirável de toda a teoria de Geometria Hiperbólica. Em 1866, dez anos após sua morte, uma versão em francês de seu trabalho foi publicada.

Lobachewsky nasceu em 1 de dezembro de 1792 em Nizhny na Rússia e morreu em 24 de fevereiro de 1856 em Kazan, também na Russia.



Figura 1.11: *Nikolai Ivanovich Lobachewsky.*

<sup>11</sup>Uma tradução para o inglês do trabalho “Pesquisas Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas”, de Lobachewsky, pode ser encontrada no final da referência [3].

### Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Riemann generalizou as Geometrias Não Euclidianas por meio do conceito de curvatura e fundamentou a Geometria Elíptica, que pode ser obtida, do ponto de vista axiomático, da negação do Quinto Postulado de Euclides que conduz à não existência de retas paralelas e à substituição do Segundo Postulado de Euclides por postulados que permitem que uma reta seja finita (Axiomas de Separação<sup>12</sup>). Com isso, a geometria sobre uma esfera, que sob certas restrições serve de modelo para a Geometria Elíptica<sup>13</sup> desvinculou-se como parte da geometria euclidiana espacial e passou a ter vida própria.

O trabalho de Riemann sobre Geometria está muito além da simples generalização das três geometrias de espaço homogêneo (curvatura gaussiana constante<sup>14</sup>). Ele introduziu as hoje chamadas Geometrias Riemannianas que podem, inclusive, não ser homogêneas e que foram, posteriormente, utilizadas na Teoria da Relatividade de Albert Einstein em 1906.

Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826 em Breselenz na Alemanha e morreu em 20 de julho de 1866 em Selasca na Itália, vítima de tuberculose.



Figura 1.12: *Georg Friedrich Bernhard Riemann.*

### Eugenio Beltrami.

Embora a grande maioria dos teoremas de Geometria Hiperbólica já estivesse estabelecida na segunda metade do século XIX, o problema da consistência de tal geometria ainda não havia sido resolvido. Havia a preocupação sobre a garantia da impossibilidade de se encontrar, no futuro, durante o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, uma contradição lógica na teoria, ou seja, um resultado verdadeiro cuja negação também pudesse ser provada verdadeira. O problema foi resolvido mediante a introdução de modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica<sup>15</sup>, isto é, superfícies nas quais as retas são definidas de modo que os axiomas da Geometria Hiperbólica passam a ser interpretados e aceitos como verdadeiros. Desta forma, uma contradição na Geometria Hiperbólica seria automaticamente transferida para a Geometria Euclidiana, que é considerada consistente.

Beltrami foi o primeiro a introduzir um tal modelo parcial para a Geometria Hiperbólica em 1868 em um artigo intitulado “Essay on an Interpretation of Non-euclidean Geometry”. Tal modelo faz uso da pseudoesfera<sup>16</sup>, superfície de revolução da curva denominada tratriz em torno de sua assíntota.

Beltrami nasceu em 16 de novembro de 1835 em Cremona no Império Austríaco (atualmente, Itália) e morreu em 18 de fevereiro de 1900 em Roma, na Itália.

<sup>12</sup>Ver a Seção 5.6.

<sup>13</sup>Ver a Seção 5.7.

<sup>14</sup>A definição rigorosa de curvatura gaussiana de uma superfície requer a introdução de definições e resultados de geometria diferencial e pode ser encontrada na referência [15] nas páginas de 164 a 167. Geometricamente, a curvatura gaussiana em um ponto de uma superfície suave indica, de um certo modo, o quanto essa superfície afasta-se de seu plano tangente em uma vizinhança desse ponto. Uma superfície que possui curvatura gaussiana constante em qualquer um de seus pontos possui a propriedade de ser homogênea, ou seja, intrinsecamente não há pontos “especiais”, qualquer um de seus pontos possuem as mesmas propriedades e são indistinguíveis. Exemplos de superfícies com curvatura gaussiana constante e positiva são as esferas euclidianas e, com curvatura gaussiana nula, é o plano euclidiano.

<sup>15</sup>Ver o Capítulo 5.

<sup>16</sup>Ver a Seção 5.5.



Figura 1.13: *Eugenio Beltrami*.

### Felix Christian Klein.

O modelo de Beltrami da pseudoesfera para a Geometria Hiperbólica não era totalmente adequado devido ao fato de ser parcial, ou seja, representava apenas parte do plano hiperbólico, impedindo que as retas hiperbólicas fossem convenientemente estendidas ao infinito, como reza o Segundo Postulado de Euclides. Deste modo, a busca por modelos completos para a Geometria Hiperbólica passou a ser um preocupação dentre os geômetras no final do século XIX.

Felix Klein foi um eminente geômetra que publicou em 1871 dois artigos sobre a chamada **Geometria Não Euclidiana**, onde introduziu um modelo completo<sup>17</sup> para a Geometria Hiperbólica (Modelo do Disco de Klein<sup>18</sup>) e dois modelos para a Geometria Elíptica (Modelo do Disco Fechado e Modelo Duplo da Esfera<sup>19</sup>). Talvez o trabalho mais conhecido de Klein seja o estudo das propriedades do espaço que são invariantes por um dado grupo de transformações, trabalho este conhecido como “Erlanger Programm”, de 1872, e que influenciou profundamente o desenvolvimento da geometria no século XX. Por fim, cabe ressaltar que os termos “hiperbólica” e “elíptica” para as duas Geometrias Não Euclidianas homogêneas foram introduzidos por Klein.



Figura 1.14: *Felix Christian Klein*.

Klein nasceu em 25 de abril de 1849 em Düsseldorf na Prússia (hoje, Alemanha) e morreu em 22 de junho de 1925 em Göttingen na Alemanha.

<sup>17</sup>Os modelos completos para a Geometria Hiperbólica imersos no Espaço Euclidiano não possuem métrica induzida da Geometria Euclidiana (geometricamente, uma superfície possui métrica induzida da métrica do espaço no qual ela está inserida quando o comprimento de qualquer curva dessa superfície é computado como sendo o comprimento dessa curva quando vista como curva do espaço. Assim, se uma esfera de raio  $r$  possui métrica induzida da métrica usual do espaço euclidiano, então um arco de circunferência ligando pontos antípodas da esfera terá comprimento  $\pi r$ ). Neste caso, a noção de medida é diferente da euclidiana e faz com que as retas hiperbólicas, ao contrário do modelo da pseudoesfera, não sejam geodésicas euclidianas (curva de menor comprimento euclidiano que une dois pontos, descrita sobre uma superfície) sobre a superfície do modelo.

<sup>18</sup>Ver a Seção 5.4.

<sup>19</sup>Ver as Seções 5.6 e 5.7.

### Jules Henri Poincaré.

Poincaré é um dos maiores matemáticos de todos os tempos e é considerado o último universalista em matemática, ou seja, uma pessoa que detinha conhecimento profundo de todas as áreas da matemática. Possui contribuições significativas em diversas áreas da matemática e, dentre elas, a Geometria. No final do século XIX, após estudo de trabalhos de Lazarus Fuchs, Poincaré introduziu dois modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica enquanto pesquisava grupos de transformações automorfias do plano no plano que são razões de transformações afins de uma variável complexa. Tais grupos são conhecidos atualmente como **grupos fuchsianos**. Os modelos completos introduzidos por Poincaré são amplamente utilizados no estudo e no ensino de Geometria Hiperbólica e são conhecidos como Modelo do Semiplano Superior e Modelo do Disco de Poincaré<sup>20</sup>.

Poincaré nasceu em 29 de abril de 1854 em Nancy na França e morreu em 17 de julho de 1912 em Paris, também na França.



Figura 1.15: *Jules Henri Poincaré.*

### David Hilbert.

No final do século XIX “Os Elementos” de Euclides não estavam resistindo ao rigor que a lógica exigia para os fundamentos da geometria. Muitas proposições de geometria euclidiana plana faziam uso de resultados que não haviam sido demonstrados anteriormente e que não constavam do rol de axiomas, ou seja, era necessária uma reformulação dos axiomas de Euclides. A proposta que foi melhor aceita pela comunidade matemática foi a do matemático e lógico alemão David Hilbert, publicada em seu célebre trabalho “Grundlagen der Geometrie” (Fundamentos de Geometria) de 1899 onde Hilbert coloca a Geometria Euclidiana sobre bases sólidas por meio da substituição dos cinco Postulados de Euclides por cinco grupos de axiomas, que chamou de Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência, Axiomas de Continuidade e Axioma das Paralelas<sup>21</sup>.



Figura 1.16: *David Hilbert.*

---

<sup>20</sup>Ver as Seções 5.2 e 5.3.

<sup>21</sup>Ver o Capítulo 2.

Com o trabalho de Hilbert, encerra-se talvez o mais longo problema em aberto na Matemática, o “Problema das Paralelas” que, ironicamente, foi introduzido pelo próprio Euclides e resistiu por cerca de 2200 anos!

Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862 em Königsberg na Prússia (atualmente, Rússia) e morreu em 14 de fevereiro de 1943 em Göttingen na Alemanha.

## Capítulo 2

# Axiomas da Geometria Euclidiana Plana

Neste capítulo introduzimos os **Postulados de Euclides** e os **Axiomas de Hilbert** para a Geometria Euclidiana Plana, que são proposições aceitas sem demonstrações e formam a base para a dedução de todos as demais proposições dessa geometria.

Sob o rigor da lógica na axiomática de Hilbert, ponto, reta, plano e espaço são conceitos (ou noções) primitivos (as), ou seja, não se definem, pois qualquer tentativa de definição desses entes geométricos recai na utilização de outros conceitos que não foram definidos previamente. Não obstante, Euclides definiu esses conceitos primitivos em sua obra “Os Elementos”.

### 2.1 Axiomática de Euclides

Euclides estabeleceu 10 axiomas divididos em 5 Noções Comuns e 5 Postulados.

#### Noções Comuns de Euclides

Euclides acreditava que as noção comuns eram aceitas em “todas as ciências”. São elas:

**N1** - Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.

**N2** - Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.

**N3** - Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

**N4** - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.

**N5** - O todo é maior do que qualquer de suas partes.

#### Postulados de Euclides

Os postulados são axiomas específicos da geometria plana. São eles:

**P1** - Pode-se traçar uma (**única**) reta (**segmento**) por quaisquer dois pontos.

**P2** - Pode-se continuar (**de modo único**) uma reta infinitamente.

**P3** - Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio.

**P4** - Todos os ângulos retos são iguais.

**P5** - Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

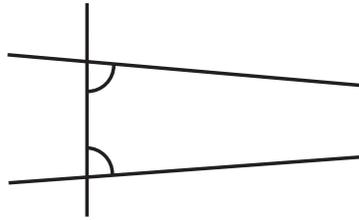


Figura 2.1: O 5<sup>o</sup> Postulado de Euclides: duas retas cortadas por uma terceira.

## 2.2 Axiomática de Hilbert

Hilbert criou, a partir dos 5 Postulados de Euclides, 5 grupos de axiomas. São eles:

- Axiomas de Incidência;
- Axiomas de Ordem;
- Axiomas de Congruência;
- Axiomas de Continuidade;
- Axioma das Paralelas.

### 1 - Axiomas de Incidência (noção de “estar em”)

- 1i** - Dados dois pontos distintos, existe uma única reta contendo-os.
- 1ii** - Qualquer reta contém pelo menos dois pontos distintos.
- 1iii** - Existem pelo menos três pontos distintos com a propriedade de que nenhuma reta os contém.

Observação: alguns autores sintetizam os 3 axiomas acima em 2 axiomas.

### 2 - Axiomas de Ordem (noção de ordenação)

- 2i** - Se um ponto B está entre os pontos A e C, então A, B e C são pontos distintos e B está entre C e A.
- 2ii** - Dados dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E tais que: B está entre A e C;  
C está entre B e D;  
D está entre C e E.
- 2iii** - Dados três pontos distintos de uma reta, apenas um deles localiza-se entre os outros dois.
- 2iv** - Sejam  $r$  uma reta e A, B, C três pontos distintos não pertencentes a  $r$ .
  - (a) Se A e B estão do mesmo lado de  $r$  e B e C estão do mesmo lado de  $r$ , então A e C estão do mesmo lado de  $r$ .
  - (b) Se A e B estão em lados opostos de  $r$ , e B e C estão em lados opostos de  $r$ , então A e C estão do mesmo lado de  $r$ .

### 3 - Axiomas de Congruência (noção de “igualdade” entre segmentos e ângulos)

- 3i** - Se A e B são dois pontos distintos e  $A'$  é a origem da semi-reta  $s$ , então existe um único ponto  $B'$  distinto de  $A'$  em  $s$  tal que o segmento  $AB$  é congruente ao segmento  $A'B'$ .
- 3ii** - Se o segmento  $AB$  é congruente ao segmento  $CD$  e ao segmento  $EF$ , então o segmento  $CD$  é congruente ao segmento  $EF$ . Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.
- 3iii** - Sejam  $AB$  e  $BC$  segmentos em uma reta  $r$  com apenas B em comum. Além disso, seja,  $A'B'$  e  $B'C'$  segmentos em uma reta  $r'$  com apenas  $B'$  em comum. Se o segmento  $AB$  for congruente ao segmento  $A'B'$  e o segmento  $BC$  for congruente ao segmento  $B'C'$ , então o segmento  $AC$  é congruente ao segmento  $A'C'$ .
- 3iv** - Sejam um semiplano  $\sigma$  e um ângulo  $\hat{A}$ . Tomemos uma semi-reta  $s$  com origem em B contida na reta que determina o semiplano  $\sigma$ . Então, existe apenas um ângulo  $\hat{B}$  com lado em  $s$  contido no semiplano  $\sigma$  e congruente ao ângulo  $\hat{A}$ .

**3v** - Se o ângulo  $\widehat{A}$  é congruente ao ângulo  $\widehat{B}$  e ao ângulo  $\widehat{C}$ , então o ângulo  $\widehat{B}$  é congruente ao ângulo  $\widehat{C}$ . Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

**3vi** - Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB é congruente a EF, AC é congruente a EG e  $\widehat{A}$  é congruente a  $\widehat{E}$ , então ABC é congruente a EFG. (**caso “lado, ângulo, lado” de congruência**)

Observação: alguns autores sintetizam os 6 axiomas acima em 5 axiomas.

#### 4 - Axiomas de Continuidade (para medição de segmentos e ângulos)

**4i** - (**Axioma de Arquimedes**) Sejam AB e CD dois segmentos. Então existe um número finito de pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  na reta que passa por A e B tal que os segmentos  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  são congruentes a CD e o ponto B está entre A e  $A_n$ .

**4ii** - (**Axioma de Dedekind**) Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta r está na união dos conjuntos não vazios  $C_1$  e  $C_2$ . Suponha ainda que nenhum ponto de  $C_1$  está entre dois pontos de  $C_2$  e vice-versa. Então “existe um único ponto  $O \in r$  tal que O está entre  $P_1$  e  $P_2$  se, e somente se,  $P_1 \in C_1, P_2 \in C_2$  e  $O \neq P_1, P_2$ ”.

#### 5 - Axioma das Paralelas

Por um ponto fora de uma reta r pode-se traçar uma **única** reta paralela a r.

(**formulação equivalente ao 5º. Postulado de Euclides de John Playfair (1748 – 1819), físico e matemático escocês**)

## Capítulo 3

# O Quinto Postulado de Euclides

### 3.1 Quatro Proposições Importantes

Neste trabalho denotaremos o ângulo formado por duas semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  de mesma origem  $O$  por  $\widehat{AOB}$ , ou então por  $\widehat{O}$ , quando não há dúvidas sobre a qual ângulo estamos nos referindo. Também será comum neste trabalho denotar ângulos por letras gregas. Além disso, quando compararmos ângulos por desigualdades, como exemplo,  $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$ , ou  $\widehat{O} < \widehat{O'}$ , ou ainda  $\alpha < \alpha'$ , estamos tratando de comparar as medidas de tais ângulos.

Com relação aos segmentos, quando denotarmos  $AB < A'B'$ , estamos tratando de comparar as medidas de tais segmentos.

Congruências entre ângulos serão denotadas pelo símbolo  $\equiv$ , enquanto que igualdades entre as medidas de ângulos congruentes serão denotadas pelo símbolo  $=$ .

Da mesma forma denotaremos congruências entre segmentos pelo símbolo  $\equiv$ , enquanto que igualdades entre as medidas de segmentos congruentes serão denotadas pelo símbolo  $=$ .

**Proposição 3.1.1** (*Proposição I.16 - Livro 1 de “Os Elementos”*) (*Teorema do Ângulo Externo*) “*Em qualquer triângulo, se um dos lados for continuado, o ângulo externo formado é sempre maior do que qualquer dos ângulos internos que não lhe sejam adjacentes*”.

*Demonstração:*

Seja  $ABC$  um triângulo. Prolongue o segmento  $BC$  até um ponto  $D$  de tal modo que  $C$  esteja entre  $B$  e  $D$ .

Seja  $E$  o ponto médio de  $AC$  e tomemos  $F \neq B$  no prolongamento de  $BE$  de tal modo que  $BE \equiv EF$ , conforme a Figura 3.1.

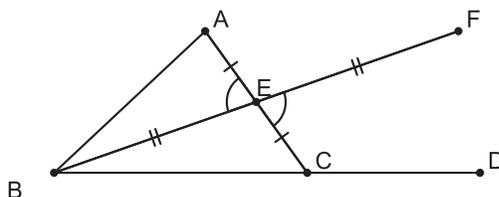


Figura 3.1: Apoio para a demonstração do Teorema do Ângulo Externo.

Os triângulos  $BAE$  e  $FCE$  são congruentes (caso LAL). Logo,  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{FCE} < \widehat{DCE}$ .  
Raciocínio análogo para demonstrar que  $\widehat{ABC} < \widehat{ACD}$ . □

**Observação:** Esta proposição não é válida para triângulos esféricos. Veja que  $\alpha$  pode ser tal que  $\alpha > \beta$ , conforme a Figura 3.2.

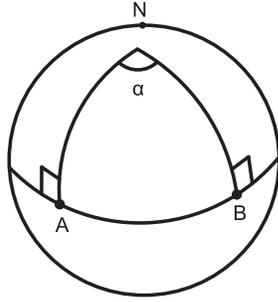


Figura 3.2: O Teorema do Ângulo Externo não é válido para triângulos esféricos.

**Proposição 3.1.2** (Proposição I.27 - Livro 1 de “Os Elementos”) Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes congruentes então as duas retas são paralelas. (Figura 3.3).

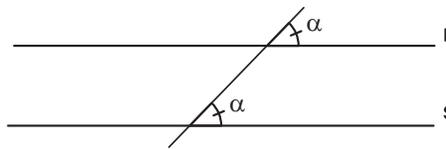


Figura 3.3: Proposição 27 de Euclides: ângulos correspondentes congruentes implica em paralelismo.

*Demonstração:*

Suponhamos que as retas  $r$  e  $s$  não são paralelas, veja na Figura 3.4. Logo, elas se encontram em um ponto  $P$  e temos um triângulo  $ABP$ .

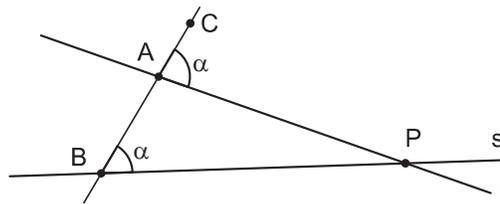


Figura 3.4: Apoio para a demonstração da Proposição 27 de Euclides.

Assim:

$\widehat{P\hat{A}C}$  é ângulo externo de  $ABP$  e mede  $\alpha$ .

$\widehat{CBP}$  é ângulo interno de  $ABP$  e mede  $\alpha$ .

Contradição com o Teorema do Ângulo Externo.

Logo  $r$  e  $s$  são paralelas. □

**Proposição 3.1.3** (Proposição I.28 - Livro 1 de “Os Elementos”) Se uma reta corta duas outras formando ângulos colaterais internos de medidas  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha + \beta$  é igual à medida de dois ângulos retos, então as duas retas são paralelas.

*Demonstração:*

Seja a Figura 3.5.

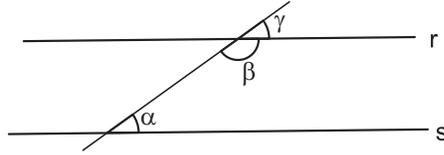


Figura 3.5: *Prop. 28 de Euclides: soma de colaterais internos igual a dois retos implica em paralelismo.*

Por hipótese:  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Como  $\beta + \gamma = 180^\circ$  (ângulo raso), temos  $\alpha = \gamma$ , ou seja, os ângulos correspondentes possuem mesma medida, ou seja, são congruentes. Pela Proposição 3.1.2 temos que  $r$  e  $s$  são paralelas.  $\square$

**Proposição 3.1.4** (*Proposição I.29 - Livro 1 de “Os Elementos” - é a primeira proposição de Euclides que faz uso do 5º Postulado*) Quando uma reta corta outras duas retas paralelas, então os ângulos correspondentes são congruentes.

*Demonstração:*

Seja a Figura 3.6.

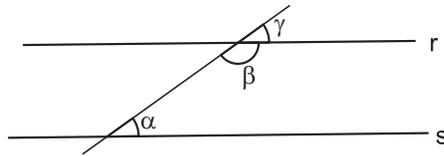


Figura 3.6: *Proposição 29 de Euclides: paralelismo implica em ângulos correspondentes congruentes.*

Por hipótese  $r \parallel s$ . Devemos mostrar que  $\alpha = \gamma$ .

Como  $\gamma + \beta = 180^\circ$  (ângulo raso), temos  $\alpha = \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$ .

Logo, devemos mostrar que  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

Suponhamos que  $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\alpha + \beta < 180^\circ$ . Logo, pelo 5º Postulado de Euclides,  $r$  e  $s$  se encontram. Contradição com a hipótese assumida.

Logo,  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , ou seja,  $\alpha = \gamma$ .  $\square$

**Observação:** A Proposição 3.1.3 é a recíproca do 5º Postulado de Euclides.

Vejam a Figura 3.7.

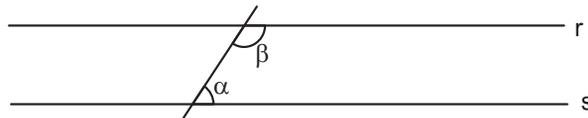


Figura 3.7: *A Proposição 28 de Euclides é a recíproca de seu 5º Postulado.*

5º Postulado:  $\alpha + \beta \neq 180^\circ \Rightarrow r \not\parallel s$  (3.1.4 é contrapositiva de P5)

Recíproca do 5º Postulado:  $r \not\parallel s \Rightarrow \alpha + \beta \neq 180^\circ$ .

Equivalente da recíproca do 5º Postulado:  $\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow r \parallel s$ . (pois  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim P \Rightarrow \sim Q)$  - contrapositiva)

Esta equivalência é exatamente a Proposição 3.1.3.

### 3.2 Equivalentes do 5º Postulado de Euclides

O 5º Postulado proposto por Euclides pode ser assim enunciado:

**Postulado P5** - “Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor que a de dois ângulos retos.”

Demonstraremos a seguir a equivalência entre as Proposições **P5.1** e **P5.2** com o 5º Postulado de Euclides.

**Proposição P5.1** - (Axioma de Playfair) “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”.

*Demonstração:*

(**P5**  $\Rightarrow$  **P5.1**) Seja  $P$  um ponto e  $r$  uma reta tal que  $P \notin r$ .

Tracemos uma perpendicular  $s$  a  $r$  passando por  $P$ .

Tracemos uma perpendicular  $m$  a  $s$  passando por  $P$ . Veja a Figura 3.8.



Figura 3.8: Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.

Pela Proposição 3.1.2 ou 3.1.3 temos  $m \parallel r$  e isso prova a existência da paralela  $m$  sem usar o **P5**.

Quanto à unicidade, suponhamos que existe  $n$  paralela a  $r$  passando por  $P$  e  $n \neq m$ . Veja a Figura 3.9.

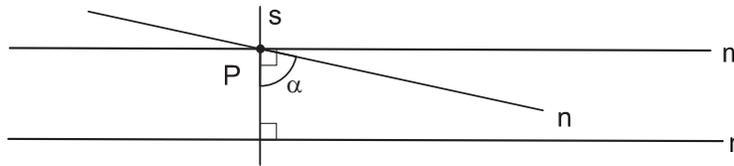


Figura 3.9: Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.

Logo,  $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\alpha + \beta < 180^\circ$ . Pelo 5º Postulado de Euclides,  $n$  e  $r$  se encontram. Uma contradição com a hipótese de que  $n$  e  $r$  são paralelas.

Daí concluímos que  $n$  e  $m$  não podem ser distintas, ou seja,  $m$  é única.

(**P5.1**  $\Rightarrow$  **P5**) Sejam as retas  $r$  e  $s$  cortadas por uma reta  $t$  de tal modo que os ângulos colaterais internos possuam soma menor que dois retos. Seja  $\{P\} = t \cap s$ . Veja a Figura 3.10.

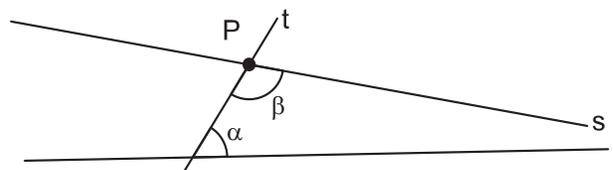


Figura 3.10: Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.

Devemos mostrar que  $r$  e  $s$  se encontram.

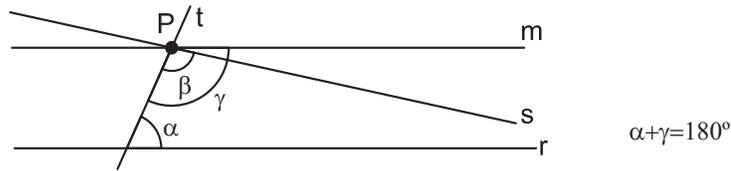


Figura 3.11: Apoio para a demonstração da equivalência entre o Axioma de Playfair e o 5º Postulado.

Consideremos uma reta  $m$  passando por  $P$  de tal modo que os ângulos colaterais internos somem dois retos. Figura 3.11.

Pela Proposição 3.1.3 temos  $m \parallel r$ .

Suponhamos que  $s \not\parallel r$  (negação da tese).

Por **P5.1** temos a unicidade das paralelas, ou seja:

$$m = s \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \alpha + \beta$$

que é uma contradição com a hipótese de  $\alpha + \beta < 180^\circ$ .

Concluimos então que  $s$  não é paralela a  $r$ , como queríamos.

Assim, **P5**  $\Leftrightarrow$  **P5.1**. □

**Proposição P5.2** - “A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos”.

Mostraremos que **P5.2**  $\Leftrightarrow$  **P5.1**. Como **P5.1**  $\Leftrightarrow$  **P5** teremos **P5.2**  $\Leftrightarrow$  **P5**.

*Demonstração:*

**P5.1**  $\Rightarrow$  **P5.2**) Consideremos o triângulo  $ABC$  e a reta  $r$  contendo  $AC$ . Tracemos a reta  $s$  por  $B$ , paralela a  $r$  (a existência de  $s$  independe de **P5**). Figura 3.12.

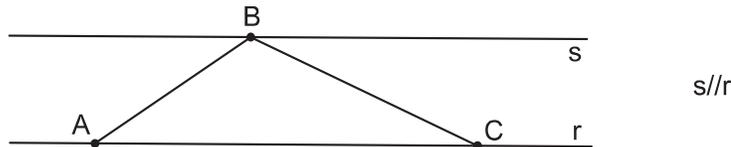


Figura 3.12: Apoio para a demonstração da equivalência entre a soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5º Postulado.

Tomemos as retas  $m$  e  $n$  contendo  $AB$  e  $BC$  (Figura 3.13).

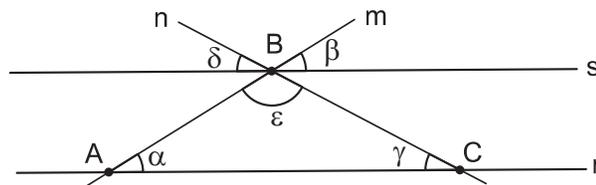


Figura 3.13: Apoio para a demonstração da Equivalência entre a soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5º Postulado.

Pela Proposição 3.1.4 (que depende de **P5** e, portanto, depende de **P5.1**) temos  $\alpha = \beta$  e  $\delta = \gamma$ . Como  $\delta + \beta + \epsilon = 180^\circ$  (ângulo raso) temos  $\gamma + \alpha + \epsilon = 180^\circ$ , como queríamos.

Para demonstrar **P5.2**  $\Rightarrow$  **P5.1** precisamos de dois lemas:

*Lema 1:* Assumindo **P5.2** verdadeiro, um ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes. Veja a Figura 3.14.

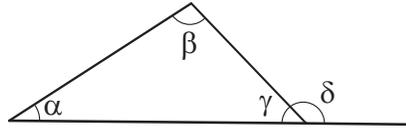


Figura 3.14: Um ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

*Demonstração:*

Temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \gamma + \delta = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \delta.$$

□

*Lema 2:* Assumindo **P5.2** verdadeiro. Sejam  $r$  uma reta,  $P$  um ponto fora de  $r$  e  $\varepsilon > 0$ . Então, pode-se traçar uma reta  $s$  por  $P$  que forma ângulo com  $r$  cuja medida é menor que  $\varepsilon$ . Figura 3.15.

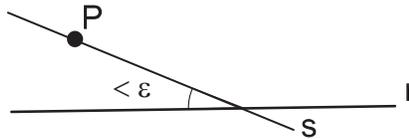


Figura 3.15: Dados uma reta e um ponto fora dela, pode-se construir uma reta passando pelo ponto tal que o ângulo formado pelas retas seja tão pequeno quanto se queira.

*Demonstração:*

Sejam  $P$ ,  $r$  e  $\varepsilon > 0$  conforme a hipótese. Seja  $A_1$  o pé da perpendicular baixada por  $P$  em  $r$ . Seja  $A_2 \in r$  tal que  $PA_1A_2$  seja um triângulo retângulo isósceles. Veja a Figura 3.16.

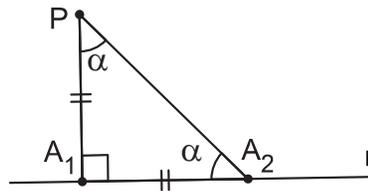


Figura 3.16: Triângulo retângulo isósceles.

Como estamos assumindo **P5.2** temos o *Lema 1* verdadeiro. Logo:

$$\alpha_1 + \alpha_1 = 90^\circ \implies \alpha_1 = \frac{90^\circ}{2}.$$

Seja  $A_3 \in r$  tal que  $PA_2A_3$  seja isósceles (Figura 3.17).

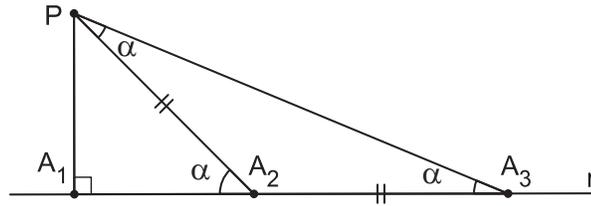


Figura 3.17: Processo construtivo de triângulos isósceles.

Pelo Lema 1:

$$\alpha_2 + \alpha_2 = \alpha_1 \implies \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} \implies \alpha_2 = \frac{90^\circ}{2^2}.$$

Procedendo de modo análogo com  $A_4, A_5, \dots, A_n, A_{n+1} \in r$ , chegamos ao triângulo isósceles  $PA_nA_{n+1}$  (Figura 3.18) tal que:

$$\alpha_n = \frac{90^\circ}{2^n}.$$

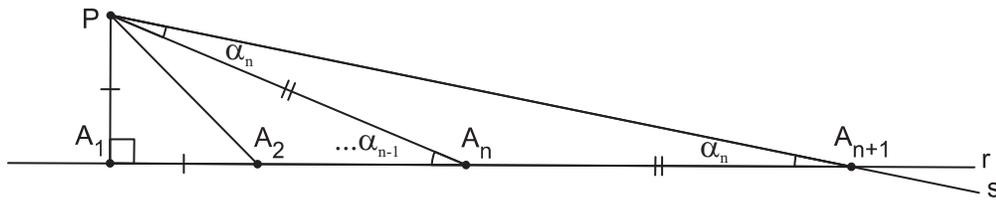


Figura 3.18: Seqüência de triângulos isósceles obtidos por processo construtivo.

Tomando  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{90^\circ}{2^n} < \varepsilon$  temos que a reta  $s$  que passa por  $P$  e  $A_{n+1}$  forma ângulo com  $r$  cuja medida é menor que  $\varepsilon > 0$ , como queríamos.  $\square$

Voltemos à demonstração de que **P5.2**  $\implies$  **P5.1**.

Seja  $r$  uma reta e  $P$  um ponto fora de  $r$ . Devemos mostrar que existe uma única reta  $s$  paralela a  $r$  passando por  $P$ .

Sejam  $A$  o pé da perpendicular baixada por  $P$  em  $r$  e  $s$  a reta perpendicular a  $PA$  passando por  $P$ .

**Observação:** as construções das perpendiculares acima não dependem de **P5**  $\iff$  **P5.1**.

Temos que  $r \parallel s$  (Proposição 3.1.3).

Seja  $m$  a reta passando por  $P$  e formando ângulo  $\varepsilon > 0$  com  $s$ .

Nosso objetivo é mostrar que  $m \cap r \neq \emptyset$  e, portanto,  $s$  é a única paralela a  $r$ .

Pelo Lema 2, podemos traçar a reta  $n$  por  $P$  de tal modo que  $n$  intersecta  $r$  em um ponto  $Q$  tal que  $\gamma < \varepsilon$ .

Seja  $\beta$  a medida do ângulo  $\widehat{QPA}$ . Veja a Figura 3.19.

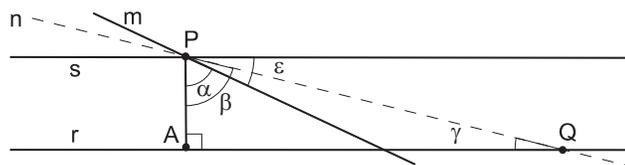


Figura 3.19: Apoio para a demonstração da equivalência entre a soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5º Postulado.

Seja  $\alpha$  complementar de  $\varepsilon$ . Logo,  $\alpha + \varepsilon = 90^\circ$ . Como  $\gamma < \varepsilon$  e, pelo Lema 1,  $\beta + \gamma = 90^\circ$ , concluímos que  $\alpha < \beta$ .

Deste modo, a reta  $m$  “entra” no triângulo  $P\hat{A}Q$  pelo vértice  $P$ .

Pelo **Axioma de Pasch**: Se uma reta “entra” em um triângulo intersectando um lado, então esta reta intersecta um outro lado desse triângulo (Figuras 3.20).



Figura 3.20: *Axioma de Pasch: toda reta que entra em um triângulo por um lado deve cortar um outro lado desse triângulo.*

Temos que  $m$  intersecta  $AQ$ , ou seja,  $m$  não é paralela a  $r$ .

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, temos que  $s$  é a única paralela a  $r$ , como queríamos. □

**Proposição P5.3** - “Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.”

Mostraremos que **P5**  $\Rightarrow$  **P5.3** e que **P5.3**  $\Rightarrow$  **P5.2**. Como **P5.2**  $\Leftrightarrow$  **P5**, teremos **P5.3**  $\Rightarrow$  **P5** e, portanto, **P5**  $\Leftrightarrow$  **P5.3**.

Obs.:  $ABC \approx A'B'C'$  quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices, digamos  $\left\{ \begin{array}{l} A \longleftrightarrow A' \\ B \longleftrightarrow B' \\ C \longleftrightarrow C' \end{array} \right.$

tal que  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ ;  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ ;  $\hat{C} \equiv \hat{C}'$  e  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}$ .

*Demonstração:*

**(P5  $\Rightarrow$  P5.3)** Como estamos assumindo que **P5** é verdadeira, podemos considerar o seguinte Teorema como verdadeiro:

*Teorema:* “Sejam  $ABC$  e  $EFG$ . Se  $\hat{A} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{B} \equiv \hat{F}$ , então os triângulos  $ABC$  e  $EFG$  são semelhantes.”<sup>1</sup>

Precisamos construir um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Sejam  $m // r // s$  distintas e  $n, t$  transversais tais que  $n \cap t \cap m = \{A\}$ .

Veja a Figura 3.21.

Pela Proposição 3.1.4 (que depende de **P5**) temos que  $\beta = \delta$  e  $\gamma = \varepsilon$ . Conseqüentemente, pelo teorema acima,  $ABC \approx ADE$ .

**(P5.3  $\Rightarrow$  P5.2)** Para essa parte da demonstração precisaremos de duas proposições, enunciadas abaixo, cujas demonstrações, devidas a Legendre, não dependem de **P5**.

Para demonstrar a primeira proposição, Legendre provou o seguinte lema.

*Lema 3:* Dado um triângulo  $ABC$ , existe um triângulo  $A'B'C'$  satisfazendo:

(1) A soma dos ângulos de  $A'B'C'$  é igual à soma dos ângulos de  $ABC$ ;

<sup>1</sup>A demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro [1] nas páginas 93 e 94.

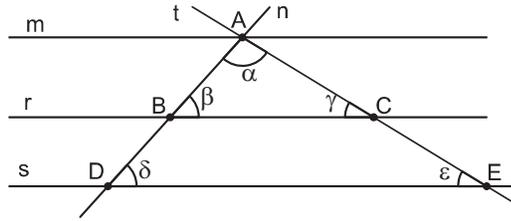


Figura 3.21: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5º Postulado.

(2) O triângulo  $A'B'C'$  possui um ângulo menor do que ou igual à metade do menor ângulo do triângulo  $ABC$ .

*Demonstração do Lema 3:*

Dado o triângulo  $ABC$ , suporemos que o ângulo  $\hat{A}$  é o menor dos três ângulos. Veja a Figura 3.22.

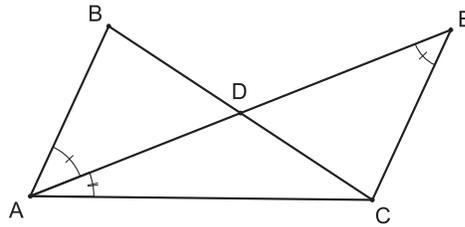


Figura 3.22: Apoio para a demonstração da “Primeira Proposição de Legendre”.

Seja  $D$  o ponto médio do segmento  $BC$ . Sobre a semi-reta de origem  $A$  passando por  $D$ , marque o ponto  $E$  tal que  $AD \equiv DE$ . Os triângulos  $ABD$  e  $ECD$  são, conseqüentemente congruentes. Logo a soma dos ângulos do triângulo  $AEC$  é igual à soma dos ângulos do triângulo  $ABC$ , provando assim o Item 1 do lema.

Agora vemos que a soma dos ângulos  $\hat{DAC}$  e  $\hat{DEC}$  é igual ao ângulo  $\hat{A}$  do triângulo  $ABC$ . Temos que o novo triângulo  $AEC$  possui um ângulo  $\theta$  satisfazendo  $\theta \leq \frac{\hat{A}}{2}$ , verificando-se assim o item 2 do lema.  $\square$

**Proposição 3.2.1** (*1ª. Proposição de Legendre*) *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que ou igual a dois retos.*

*Demonstração:*

Assuma o lema anterior e a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos seja  $180^\circ + \alpha$ . Seja, então  $\theta_0$  o menor ângulo deste triângulo. Aplicando o lema obtemos um novo triângulo, com mesma soma dos ângulos e cujo menor ângulo,  $\theta_1$ , satisfaz  $\theta_1 \leq \frac{\theta_0}{2}$ .

Aplicando o lema a este triângulo, conclui-se pela existência de novo triângulo, com mesma soma dos ângulos e menor ângulo,  $\theta_2$ , satisfazendo a  $\theta_2 \leq \frac{\theta_0}{4}$ .

Aplicando este lema  $n$  vezes, chegamos a um triângulo cuja soma dos ângulos ainda é  $180^\circ + \alpha$  e cujo menor ângulo,  $\theta_n$ , satisfaz  $\theta_n \leq \frac{\theta_0}{2^n}$ .

Escolhendo-se  $n$  suficientemente grande, teremos  $\theta_n \leq \alpha$ . Mas, neste caso, a soma dos outros dois ângulos será maior do que  $180^\circ$ , o que é absurdo.  $\square$

Para demonstrar a segunda proposição, Legendre provou mais dois lemas.

*Lema 4: Se a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, o mesmo é verdade para todos os triângulos obtidos deste, traçando-se um segmento ligando um de seus vértices ao lado oposto.*

*Demonstração:*

Dado um triângulo ABC, considere um ponto qualquer D do lado AC e trace BD. Veja a Figura 3.23.

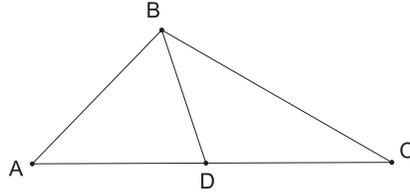


Figura 3.23: Apoio para a demonstração da “Segunda Proposição de Legendre”.

Se a soma dos ângulos do triângulo ABC é  $180^\circ$ , então, a soma dos ângulos dos triângulos ABD e DBC será  $\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{C} + 180^\circ = 360^\circ$ . Pela proposição anterior, nenhum destes dois triângulos tem soma dos ângulos superior a  $180^\circ$ . Logo, cada um deles tem soma dos ângulos exatamente igual a  $180^\circ$ .  $\square$

*Lema 5: Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, então, pode-se construir triângulos retângulos isósceles com a soma dos ângulos igual a dois ângulos retos e catetos maiores do que qualquer segmento dado.*

*Demonstração:*

Seja ABC o triângulo cuja soma dos ângulos é  $180^\circ$ . Se este já for um triângulo retângulo isósceles, baixe uma altura do vértice com maior ângulo ao lado oposto. Traçando a altura BD no triângulo da Figura 3.24 obtemos dois triângulos retângulos, cada um com soma dos ângulos igual a  $180^\circ$ .

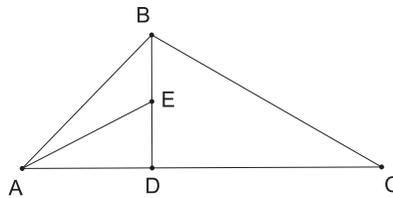


Figura 3.24: Apoio para a demonstração da “Segunda Proposição de Legendre”.

Se nenhum destes triângulos for isósceles, escolha um deles, por exemplo, o triângulo ADB com ângulo reto em D. Verifica-se qual dos catetos AD ou BD tem maior comprimento. Supondo BD, tracemos um segmento ligando o vértice A a um ponto E do segmento BD, tal que  $DA \equiv DE$ .

Do Lema 4, obtemos que o triângulo retângulo isósceles ADE tem soma dos ângulos igual a  $180^\circ$ . Com base neste triângulo retângulo isósceles com soma dos ângulos igual a  $180^\circ$  observamos que a junção de dois deles, ao longo da hipotenusa, produz um quadrado. Quadrados podem ser empilhados, uns sobre os outros, de modo a produzir quadrados de lados arbitrariamente grandes. A diagonal de um deles o divide em dois triângulos retângulos isósceles cuja soma dos ângulos é  $180^\circ$ , concluindo assim a demonstração do Lema 5.  $\square$

**Proposição 3.2.2** (*2ª. Proposição de Legendre*) *Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a dois retos, então, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois retos.*

*Demonstração:*

Suponha que existe um triângulo cuja soma dos ângulos é  $180^\circ$ , e seja  $ABC$  um triângulo retângulo qualquer com ângulo reto no vértice  $C$ . Pelo Lema 5, existe um triângulo retângulo isósceles  $DEF$ , com ângulo reto em  $E$ , cujos catetos são maiores do que qualquer dos catetos de  $ABC$  e cuja soma dos ângulos é  $180^\circ$ .

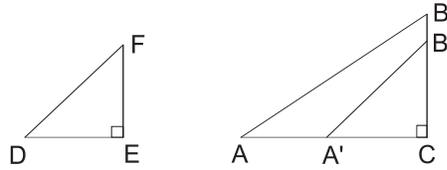


Figura 3.25: Apoio para a demonstração da “Segunda Proposição de Legendre”.

Podemos, então, marcar pontos  $A'$  na semi-reta  $\overrightarrow{CA}$ , de modo que  $B'C \equiv FE$  (Figura 3.25). Tem-se, então,  $A'CB' \equiv DEF$ , logo  $A'CB'$  tem soma dos ângulos igual a  $180^\circ$ . Trace o segmento  $A'B$  para concluir que  $ABC$  tem soma dos ângulos igual a  $180^\circ$   $\square$

Voltemos à demonstração **P5.3**  $\Rightarrow$  **P5.2**.

Sejam  $ABC$  e  $DEF$  triângulos semelhantes e não congruentes (Figura 3.26), com  $\hat{A} \equiv \hat{D}$ ;  $\hat{B} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{C} \equiv \hat{F}$ . Suponhamos que  $AB > DE$ .

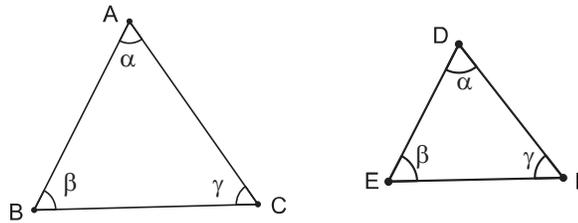


Figura 3.26: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5º Postulado.

Sejam  $G \in AB$  e  $H \in AC$  tais que  $AG \equiv DE$  e  $AC \equiv DF$  (Figura 3.27).

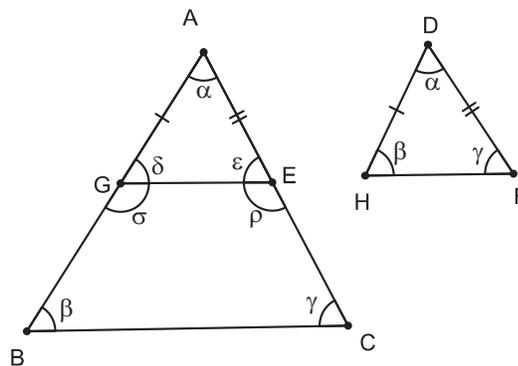


Figura 3.27: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5º Postulado.

Pelo caso de congruência LAL, temos  $AGH \equiv DEF \Rightarrow \delta = \beta$  e  $\varepsilon = \gamma$ . Logo,  $\beta + \sigma + \rho + \gamma = 360^\circ$  (pois  $\sigma + \delta + \varepsilon + \rho = 360^\circ$ ). Dividindo  $BGHC$  em dois triângulos, pela Proposição 3.2.1 e  $\beta + \sigma + \rho + \gamma = 360^\circ$ ,

temos que cada triângulo possui soma dos ângulos internos igual a  $180^\circ$ . Pela Proposição 3.2.2 temos que todo triângulo possui soma dos ângulos internos igual a  $180^\circ$ , ou seja, vale **P5.2**.  $\square$

**Proposição P5.4** - “Existe um par de retas equidistantes.”

Iremos mostrar que **P5**  $\Rightarrow$  **P5.4** e que **P5.4**  $\Rightarrow$  **P5.2**. Como **P5.2**  $\Leftrightarrow$  **P5**, teremos **P5.4**  $\Rightarrow$  **P5**.

*Demonstração:*

(**P5**  $\Rightarrow$  **P5.4**) Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas.

Sejam  $A, B \in r$  e tomemos as perpendiculares  $m, n$  a  $s$  passando por  $A$  e  $B$ , respectivamente, conforme a Figura 3.28.

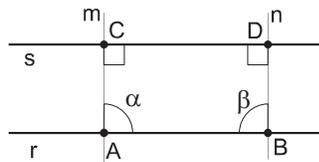


Figura 3.28: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5º Postulado.

Assumindo **P5**, temos que a Proposição 3.1.4 é verdadeira e, portanto,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ .

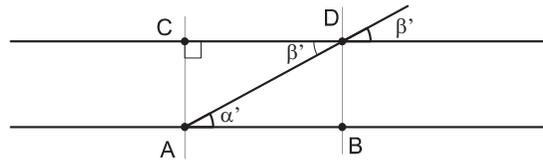


Figura 3.29: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5º Postulado.

Também pela Proposição 3.1.4, temos que  $\alpha' = \beta'$  e, pelo caso de congruência  $LAA_0$  (Figura 3.29), temos que  $ABD \cong DCA \Rightarrow AC \cong BD$ .

Como  $A$  e  $B$  são arbitrários, temos que  $r$  e  $s$  são equidistantes.

(**P5.4**  $\Rightarrow$  **P5.2**) Sejam  $r$  e  $s$  equidistantes.

Tomemos  $A, B$  em  $r$  e baixemos perpendiculares com pés  $C$  e  $D$  em  $s$ . Tomemos  $E \in CD$  e baixemos uma perpendicular com pé  $F$  em  $r$ , conforme a Figura 3.30.

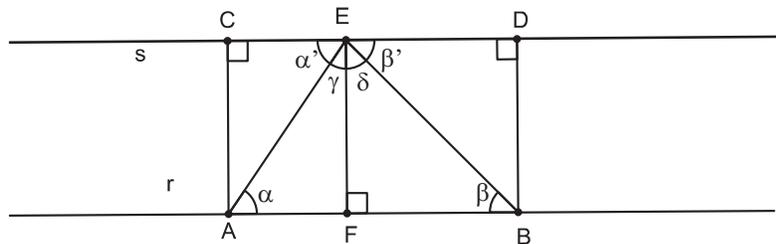


Figura 3.30: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5º Postulado.

Como  $CA \equiv EF$  temos  $CAE \equiv FEA$  (caso “cateto-hipotenusa” de triângulos retângulos, que não depende de **P5**). Logo,  $\alpha = \alpha'$ .

Analogamente,  $EDB \equiv BFE \Rightarrow \beta = \beta'$ .

Assim,  $\alpha' + \gamma + \delta + \beta' = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma + \delta + \beta = 180^\circ$ , ou seja, o triângulo AEB possui soma dos ângulos internos igual a  $180^\circ$ .

Pela Proposição 3.2.2, temos que todos os triângulos possuem soma dos ângulos internos igual a  $180^\circ$ , ou seja, vale **P5.2**.  $\square$

### 3.3 Outras Proposições Equivalentes ao Quinto Postulado de Euclides

**P5.5.** Se  $r \parallel s$  e  $s \parallel t$ , então  $r \parallel t$ .

**P5.6.** Considere a Figura 3.31.

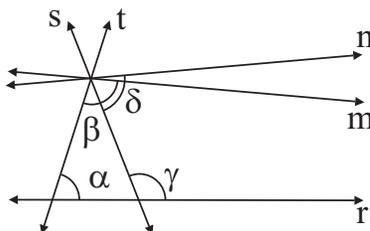


Figura 3.31: *Mais equivalentes ao 5º Postulado: mesma soma de colaterais internos implica na unicidade da reta paralela.*

Se  $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$ , então  $m = n$ .

**P5.7.** A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma.

**P5.8.** Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.

**P5.9.** Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo também é reto.

**P5.10.** Uma reta que corta uma de duas paralelas, corta também a outra.

**P5.11.** Uma reta perpendicular a uma de duas paralelas é, também, perpendicular a outra.

**P5.12.** Retas paralelas são equidistantes.

**P5.13.** Existem retângulos. (**retângulo: quadrilátero com quatro ângulos retos**)

**P5.14.** Considere a Figura 3.32.

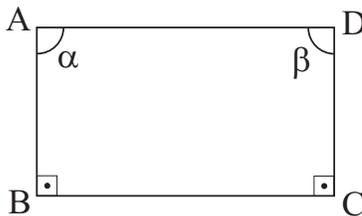


Figura 3.32: *Mais um equivalente ao 5º Postulado: a existência de retângulos.*

Se  $AB \equiv CD$ , então  $\alpha = \beta = 90^\circ$ .

**P5.15.** Um ângulo inscrito em um semicírculo é sempre reto.

**P5.16.** Lados opostos de um paralelogramo são congruentes. (**paralelogramo: quadrilátero com lados opostos paralelos**)

**P5.17.** Considere a Figura 3.33.

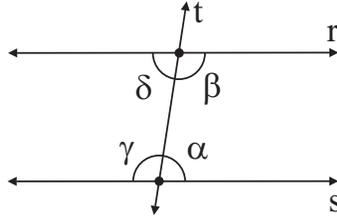


Figura 3.33: *Mais equivalentes ao 5º Postulado: retas paralelas implicam em mesma soma de ângulos colaterais internos.*

Se  $r$  é paralela a  $s$ , então  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .

**P5.18.** Sejam  $m$  e  $n$  duas retas,  $A \in m$  e  $B \in n$  tais que  $AB \perp n$  e forma um ângulo agudo com  $m$ . Então, as perpendiculares baixadas de  $m$  à reta  $n$ , do lado do ângulo agudo são menores do que  $AB$  e as que ficam do outro lado são maiores do que  $AB$ . Veja a Figura 3.34.

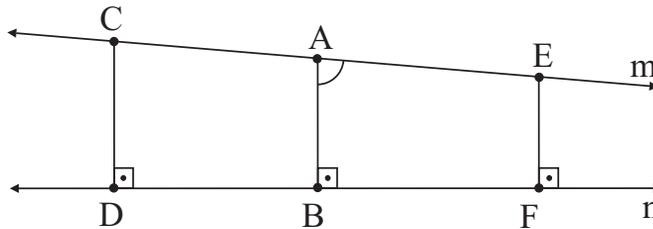


Figura 3.34: *Mais equivalentes ao 5º Postulado: desigualdades envolvendo a distância de pontos de uma reta a outra reta.*

**P5.19.** Dado um triângulo, é possível construir outro semelhante com lados arbitrariamente grandes.

**P5.20.** Por um ponto dentro de um ângulo menor que dois retos pode-se traçar uma reta que intesecta os dois lados desse ângulo.

## Capítulo 4

# Precursosores das Geometrias Não Euclidianas

Vários matemáticos tentaram demonstrar o 5º Postulado de Euclides a partir dos 4 primeiros postulados. Vamos apresentar o raciocínio desenvolvido por alguns deles.

### (1) Claudius Ptolomeu (85-165)

O raciocínio de Ptolomeu segundo [2] foi o seguinte:  
Sejam  $r//s$  e  $t$  transversal e  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  conforme Figura 4.1.

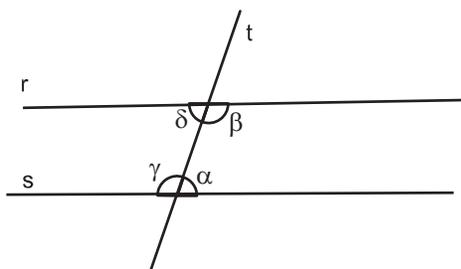


Figura 4.1: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Ptolomeu.

Como  $r//s$ , temos que  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$  <sup>(1)</sup>.

Logo, se  $\alpha + \beta > 180^\circ$ , então  $\gamma + \delta > 180^\circ$ . Contradição, pois  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ .

Se  $\alpha + \beta < 180^\circ$ , então  $\gamma + \delta < 180^\circ$ . Contradição, pois  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ .

Assim,  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

Mas

$$\underbrace{(r//s \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ)}_{\text{Proposição 3.1.4}} \iff \underbrace{(\alpha + \beta \neq 180^\circ \Rightarrow r \text{ não é paralela a } s)}_{\mathbf{P5}},$$

o que prova **P5**.

### (2) Proclus (410-485).

O raciocínio de Proclus segundo [2] foi o seguinte:

Primeiramente, demonstra-se a seguinte proposição “sem usar o **P5**”:

“Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta a outra”. <sup>(2)</sup>

<sup>1</sup>Na verdade, Ptolomeu usou a Proposição 3.1.4 para provar a própria Proposição 3.1.4.

<sup>2</sup>Essa proposição é equivalente de **P5**.

De fato: sejam  $r \parallel s$  e  $t$  concorrente com  $r$  em  $P$ .  
 Seja  $Q \in t$  na região entre  $r$  e  $s$  (Figura 4.2).

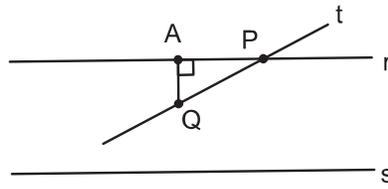


Figura 4.2: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Proclus.

Temos que à medida que  $Q \in t$  “se afasta” de  $P$ , a distância de  $Q$  a  $A$  aumenta, tornando-se maior que qualquer valor pré-fixado <sup>(3)</sup>, inclusive, tornando-se maior que a distância entre  $r$  e  $s$  <sup>(4)</sup>, ou seja,  $t \cap s \neq \emptyset$  e portanto,  $t$  corta  $s$ . Isso prova a proposição acima.

Agora, sejam  $r$  e  $s$  cortadas por  $t$  de tal modo que os ângulos colaterais internos de um lado sejam menores que dois retos (Figura 4.3).

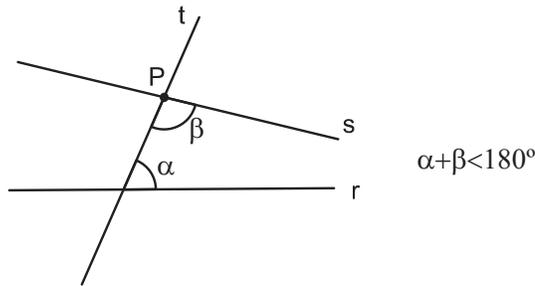


Figura 4.3: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Proclus.

Seja  $m$  passando por  $P$  formando ângulo  $\gamma$  com  $s$  de tal modo que  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  (Figura 4.4).

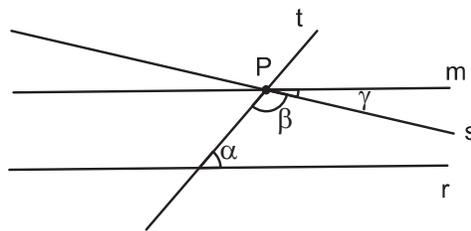


Figura 4.4: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Proclus.

Pela Proposição 3.1.3 temos que  $m \parallel r$ .

Como  $s$  corta  $m$  em  $P$ , pela proposição acima provada, temos que  $s \cap r \neq \emptyset$ , ou seja, vale **P5**.

### (3) Nasir Al-Din Al-Tusi (Nasiredin) (1201-1274).

O raciocínio de Nasiredin segundo [2] foi o seguinte:

Considere o seguinte axioma:

<sup>3</sup>Essa proposição não depende de **P5** e foi simplesmente admitida por Proclus.

<sup>4</sup>Retas paralelas serem equidistantes é um equivalente de **P5**.

“Sejam  $r$  e  $s$  duas retas;  $A \in r$  e  $B$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  em  $s$ . Suponha ainda que  $AB$  não é perpendicular a  $r$ . Então, os segmentos perpendiculares a  $s$  baixados de  $r$  no lado do ângulo agudo entre  $AB$  e  $r$  são menores que  $AB$  e os do lado oposto são maiores que  $AB$ .”

**Observação:** o axioma é assumido no caso de  $ABCD$  formar quadrilátero convexo conforme a Figura 4.5.

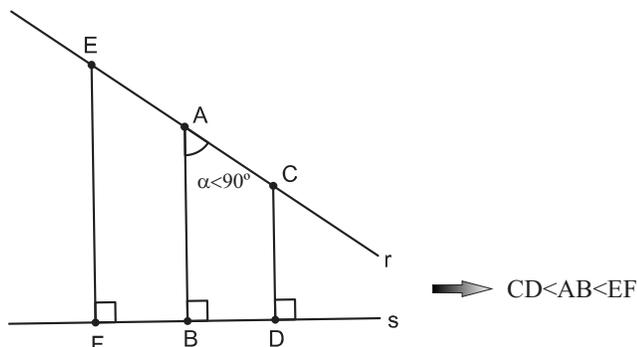


Figura 4.5: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Nasiredin.

Considere o quadrilátero da Figura 4.6.

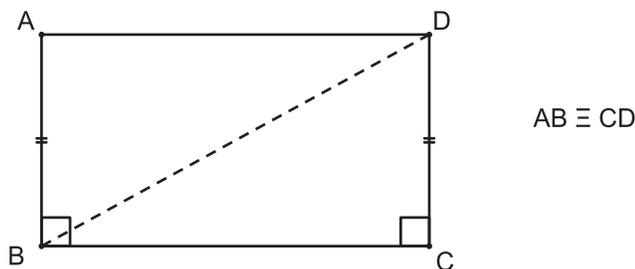


Figura 4.6: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Nasiredin.

Assumindo o axioma acima, se  $\hat{A} < 90^\circ$ , então  $AB > CD$ , uma contradição. Se  $\hat{A} > 90^\circ$ , então  $AB < CD$ , uma contradição. Logo,  $\hat{A} = 90^\circ$ . De modo análogo,  $\hat{D} = 90^\circ$ .

Assim,  $ABCD$  é um retângulo (possui 4 ângulos retos) e, portanto,  $ABD \equiv CDB$  (caso “cateto-hipotenusa” de congruência). Assim, existem triângulos cuja soma dos ângulos internos é  $180^\circ$ ,<sup>(5)</sup> de onde concluímos **P5**.

**Observação:** O axioma assumido é equivalente de **P5**.

#### (4) John Wallis (1616-1703)

O raciocínio de Wallis segundo [2] foi o seguinte:

Considere o axioma:

“Dado um triângulo, é possível contruir outro semelhante a esse com lados arbitrariamente grandes.”

Considere a construção da Figura 4.7, onde  $\alpha + \beta < 180^\circ$ .

Mostremos que  $r$  encontra  $s$ .

Observemos que  $\gamma > \beta$ , visto que  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Logo, se deslocarmos a reta  $r$  ao longo de  $m$  mantendo o ângulo  $\beta$  rígido, podemos colocá-la passando por  $P$  inteiramente acima do ângulo  $\alpha$ .

<sup>5</sup>Nasiredin precisava demonstrar que a existência de um triângulo, cuja soma dos ângulos internos seja igual a  $180^\circ$ , acarretasse que todos os triângulos possuem mesma propriedade.

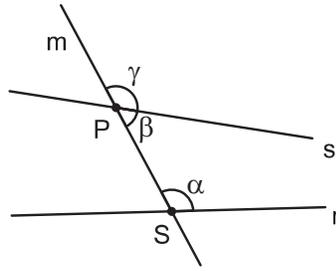


Figura 4.7: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Wallis.

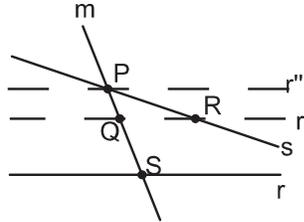


Figura 4.8: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Wallis.

Nesse movimento, passamos por um ponto entre  $P$  e  $S$  formando um triângulo  $PQR$ , como na Figura 4.8. Pelo axioma acima, podemos construir um triângulo  $PST$  semelhante a  $PQR$  com lados correspondentes  $PQ$  e  $PS$ . Logo,  $T \in r \cap s$ , o que prova **P5**.

**Observação:** Na demonstração de Wallis, o axioma assumido é equivalente a **P5**.

#### (5) Girolano Saccheri (1667-1733)

Foi o primeiro a tentar provar o 5º Postulado substituindo-o por uma afirmação contraditória. (demonstração por redução ao absurdo)  
Para tanto, considerou um quadrilátero construído conforme a Figura 4.9.

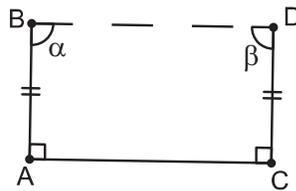


Figura 4.9: Quadrilátero de Saccheri.

Logo,  $\alpha = \beta$ . De fato,  $ABC \equiv CDA$  (caso LAL). Logo,  $ABD \equiv CDB$  (caso LAL), ou seja,  $\alpha = \beta$ , veja na Figura 4.10.

Sabendo que a existência de um retângulo ( $\alpha = \beta = 90^\circ$ ) é um equivalente de **P5**, Saccheri esperava que se considerasse  $\alpha = \beta > 90^\circ$  ou  $\alpha = \beta < 90^\circ$  (negação da existência de um retângulo e, portanto, negação de **P5**), poderia chegar a alguma contradição com algum dos 4 primeiros postulados provando assim que **P1, P2, P3, P4**  $\Rightarrow$  **P5**.

No 1º caso: se  $\alpha = \beta > 90^\circ$  (Figura 4.11), Saccheri concluiu que uma reta seria limitada (teria comprimento finito), contradizendo **P2**.

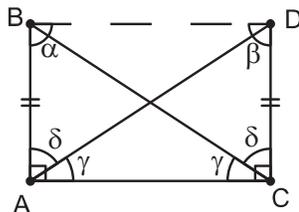


Figura 4.10: Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Saccheri.

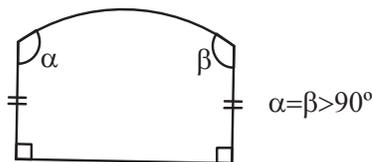


Figura 4.11: A hipótese do ângulo obtuso de Saccheri.

No 2º caso: se  $\alpha = \beta < 90^\circ$  (Figura 4.12), Saccheri não conseguiu chegar a uma contradição com com algum dos 4 primeiros postulados. No entanto, deduziu uma série de resultados que mais tarde se tornariam teoremas da primeira geometria não euclidiana.

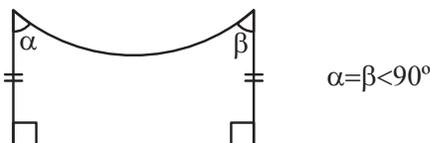


Figura 4.12: A hipótese do ângulo agudo de Saccheri.

#### (6) Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Fez trabalho semelhante ao de Saccheri, considerando o quadrilátero da Figura 4.13.

E procedeu de maneira análoga a Saccheri com relação ao ângulo  $\alpha$ .

Também não chegou a contradição quando supôs  $\alpha < 90^\circ$ . No entanto, chegou a um dos principais teoremas da Geometria Hiperbólica:

“A área de um triângulo hiperbólico é proporcional à diferença entre  $\pi$  e a soma dos ângulos internos”, ou seja:

$$\text{Área}(ABC) = k(\pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})); k > 0 \text{ constante fixa.}$$

#### (7) Adrien Marie Legendre (1752-1833)

A tentativa de provar **P5** de Legendre também foi por redução ao absurdo. Para tanto, ele considerou a Proposição 3.2.1 cuja demonstração não depende de **P5**:

“A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a dois ângulos retos”.

Como **P5**  $\iff$  **P5.2**, negar **P5** significa admitir a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos internos é menor que  $180^\circ$  (maior que  $180^\circ$  não ocorre devido à proposição acima).

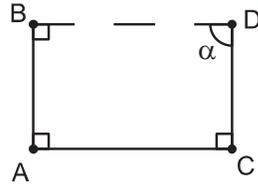


Figura 4.13: *Quadrilátero de Lambert.*

Seja  $ABC$  triângulo com soma dos ângulos internos igual a  $180^\circ - \alpha$ ;  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Suponha que  $\widehat{A}$  é um menor ângulo de  $ABC$ . <sup>(6)</sup>

Sobre o lado  $BC$  construa um triângulo  $BCD$  congruente a  $ABC$  de modo que  $\widehat{D} \equiv \widehat{A}$ ;  $\widehat{A\widehat{B}C} \equiv \widehat{D\widehat{C}B}$  e  $\widehat{A\widehat{C}B} \equiv \widehat{D\widehat{B}C}$ . Veja a Figura 4.14.

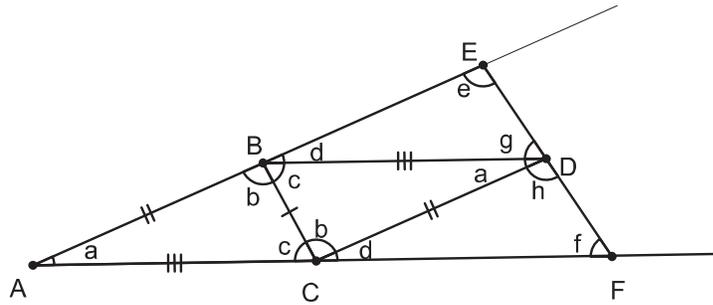


Figura 4.14: *Apoio para a tentativa de demonstração do 5º Postulado por Legendre.*

Por  $D$  trace uma reta que intersecte o ângulo  $\widehat{B\widehat{A}C}$  em  $E$  e  $F$ , como na Figura. <sup>(7)</sup>

Pela Proposição 3.2.1, temos que a soma dos ângulos de  $AEF$  é menor ou igual a  $180^\circ - 2\alpha$ .

De fato:

$$e + d + g \leq 180^\circ \quad (1)$$

$$h + d + f \leq 180^\circ \quad (2)$$

$$b + d + c = 180^\circ \quad (3)$$

$$a + b + c = 180^\circ - \alpha \quad (4)$$

$$g + a + h = 180^\circ \quad (5)$$

Assim, somando (3) e (5):

$$b + d + c + g + a + h = 360^\circ \quad (6)$$

Substituindo (4) em (6) temos:

$$d + g + h = 180^\circ + \alpha \quad (7)$$

Somando (1), (2) e (5) temos:

$$a + e + f + 2(g + h + d) \leq 540^\circ \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8) temos:

$$a + e + f + 2(180^\circ + \alpha) \leq 540^\circ \implies a + e + f \leq 180^\circ - 2\alpha$$

<sup>6</sup>Considerou o ângulo  $\widehat{A}$  como sendo **um** menor ângulo, então este ângulo deverá ser, necessariamente, menor que  $60^\circ$  ( $2/3$  de um ângulo reto).

<sup>7</sup>A existência de uma reta que intersecta os lados de  $\widehat{A}$  e passe por  $D$ , é equivalente ao **P5**:  
 “Dado um ângulo não raso e um ponto no seu interior, é possível passar uma reta pelo ponto que intersecta os dois lados do ângulo”.

Repetindo o raciocínio acima no triângulo AEF, damos início à construção de uma sequência de triângulos cuja soma dos ângulos internos forma a sequência real

$$(180^\circ - 2^n \alpha)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Para  $n > \log_2 \left( \frac{180^\circ}{\alpha} \right)$  temos:

$$2^n > 2^{\log_2 \left( \frac{180^\circ}{\alpha} \right)} \implies 2^n > \frac{180^\circ}{\alpha} \implies 180^\circ - 2^n \alpha < 0,$$

o que é impossível pois  $180^\circ - 2^n \alpha$  é soma de ângulos e, portanto, positivo.

Desta forma, Legendre concluiu que  $a + b + c = 180^\circ$  e, portanto, vale **P5.2**.

## Capítulo 5

# Alguns Modelos para as Geometrias Elíptica e Hiperbólica

### 5.1 Modelos

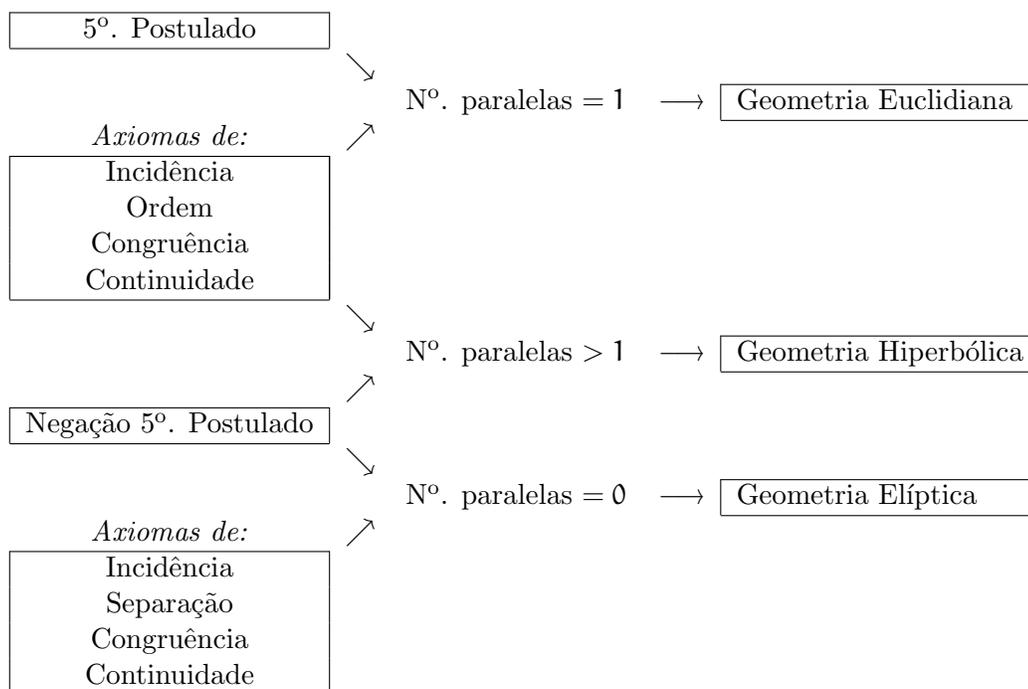
Este Capítulo foi baseado principalmente na referência [10].

Um **modelo** para um sistema axiomático é um ambiente no qual podemos representar (ou interpretar) os conceitos primitivos em relação aos quais os axiomas passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.

**Exemplo:** o **Plano Euclidiano** tal qual o conhecemos é um modelo para o sistema axiomático de Hilbert (ou de Euclides) pois nele é possível representar ponto e reta de tal modo que os Axiomas de Hilbert passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.

Vamos usar a existência de um sistema axiomático para a Geometria Euclidiana e apresentar modelos para a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Esquemáticamente podemos dispor os axiomas bem como a negação do Quinto Postulado de Euclides conforme quadro a seguir, apresentado em [6]:



## 5.2 Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica

Fixemos um disco euclidiano  $D$  de raio 1 e seja  $H$  seu interior. Usando os Axiomas de Hilbert e teoremas da Geometria Euclidiana podemos provar que:

(i) Dados os pontos não colineares  $A, B, O$  ( $O$  é o centro de  $D$ ) existe um único círculo euclidiano  $c$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  e intersecta o bordo de  $D$  ortogonalmente. Veja a Figura 5.1.

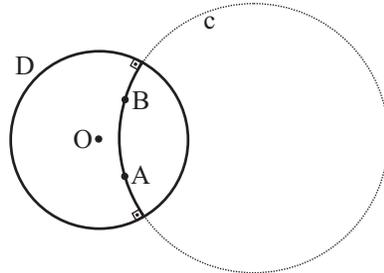


Figura 5.1: *Dados dois pontos no interior de um disco, existe apenas uma circunferência ortogonal ao bordo do disco passando pelo pelos pontos dados.*

(ii) Se os pontos  $A, B$  e  $O$  são colineares, então existe uma única reta euclidiana  $r$  passando por eles e ortogonal ao bordo de  $D$ . Veja na Figura 5.2.

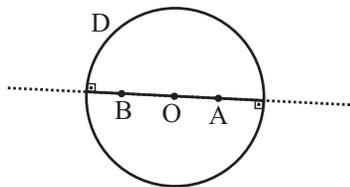


Figura 5.2: *Dados dois pontos no interior de um disco alinhados com seu centro, existe apenas uma reta ortogonal ao bordo do disco passando pelo*

Além disso, a intersecção em  $H$  de círculos e/ou retas distintos(as) como as acima ocorre em um único ponto de  $H$ .

Façamos as seguintes interpretações em  $H$ :

**Pontos:** os pontos hiperbólicos são os pontos de  $H$ .

**Retas:** as retas hiperbólicas são intersecções de  $H$  com um diâmetro de  $D$  ou intersecções de  $H$  com um círculo perpendicular ao bordo de  $D$ . Veja na Figura 5.3.

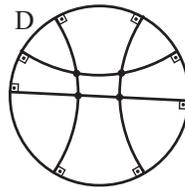


Figura 5.3: *Retas hiperbólicas no modelo do disco de Poincaré.*

**Plano:** o plano hiperbólico é a região  $H$ , interior de  $D$ .

A noção de “**estar em**” : a noção de um ponto estar em uma reta (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “estar em” no sentido euclidiano.

A noção de “**estar entre**”: a noção de um ponto estar entre outros dois pontos (no sentido hiperbólico) coincide com a noção de “estar entre” no sentido euclidiano.

Definimos o **ângulo hiperbólico** entre duas semi-retas hiperbólicas de mesma origem como sendo o ângulo (euclidiano) entre suas tangentes (euclidianas) no ponto de intersecção (Figura 5.4). Assim, a medida de ângulo é feita exatamente como no sentido euclidiano e, portanto, obedece os axiomas relativos a tais medições.

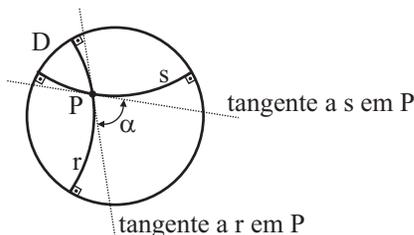


Figura 5.4: Ângulo hiperbólico no modelo do disco de Poincaré.

Dado um **segmento hiperbólico**  $TU$  (Figura 5.5), sejam  $R$  e  $S$  os pontos de  $D$  que são as “extremidades” da reta hiperbólica que contém  $TU$ . Definimos o **comprimento hiperbólico**  $d(T, U)$  do segmento  $TU$  por:

$$d(T, U) = \ln \left( \left| \frac{\overline{UR} \cdot \overline{TS}}{\overline{TR} \cdot \overline{US}} \right| \right),$$

sendo  $\overline{UR}$ ,  $\overline{TS}$ ,  $\overline{TR}$ ,  $\overline{US}$  comprimentos euclidianos, razão denominada por **cross-ratio** ou **razão cruzada**.

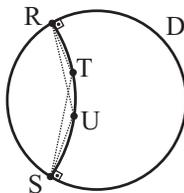


Figura 5.5: Medindo distâncias no modelo do disco de Poincaré.

Notemos que, com essa definição de distância em  $H$ , a reta hiperbólica é ilimitada (tem comprimento infinito). No contexto geral, o segmento hiperbólico ligando dois pontos  $T$  e  $U$  é a curva de menor comprimento (hiperbólico) ligando estes pontos.

O **Disco de Poincaré** acima definido é um modelo para o sistema axiomático da Geometria Hiperbólica Plana, onde o Axioma das Paralelas de Hilbert é trocado pelo Axioma de Lobachewsky:

“Por um ponto fora de uma reta existem pelo menos duas retas distintas passando pelo ponto e paralela à reta dada.” Veja a Figura 5.6.

### 5.3 Modelo do Semiplano de Poincaré para a Geometria Hiperbólica

Consideremos um semiplano euclidiano fechado (contém a fronteira). Neste modelo as retas hiperbólicas (Figura 5.7) são semicírculos contidos no semiplano euclidiano e com centro na fronteira do mesmo, ou semi-retas euclidianas contidas no semiplano e perpendiculares à fronteira do mesmo.

**Observações:**

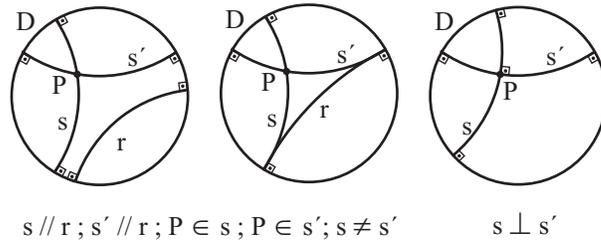


Figura 5.6: O 5º Postulado de Euclides não é válido no modelo do disco de Poincaré.

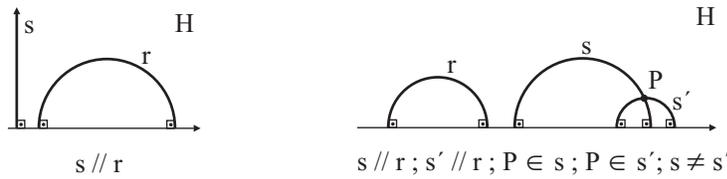
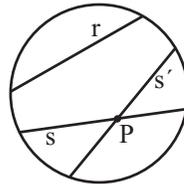


Figura 5.7: Retas hiperbólicas no modelo do semiplano de Poincaré.

- (i) A reta euclidiana que é fronteira do semiplano não faz parte do “plano hiperbólico”.
- (ii) A noção de distância é diferente daquela do Disco de Poincaré.
- (iii) A noção de ângulo coincide com a noção de ângulo euclidiana.

### 5.4 Modelo de Klein para a Geometria Hiperbólica

Neste modelo temos um disco de raio 1 e as retas hiperbólicas são cordas desse disco (Figura 5.8).



$s // r; s' // r; P \in s; P \in s'; s \neq s'$

Figura 5.8: Retas hiperbólicas no modelo do disco de Klein para a Geometria Hiperbólica.

**Observações:**

- (i) A fronteira não pertence ao “plano hiperbólico”.
- (ii) A noção de distância é diferente daquelas dos outros modelos de Poincaré.
- (iii) A noção de ângulo entre as retas hiperbólicas desse modelo é diferente da noção de ângulo euclidiana.

### 5.5 Modelo da Pseudo-esfera de Beltrami para a Geometria Hiperbólica

A pseudo-esfera é a superfície obtida pela rotação de uma curva denominada *tratrix* em torno de um eixo  $y$ . Esta curva pode ser concebida mecanicamente do seguinte modo: consideremos um segmento  $AB$  perpendicular a um eixo  $y$  conforme Figura 5.9. À medida que o extremo  $A$  é tracionado deslocando-se pelo eixo  $y$ , o extremo  $B$  livre descreve uma curva no plano. Essa curva é uma *tratrix*, cuja parametrização

pode ser dada por:

$$\alpha : ]k, \pi/2[ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \alpha(t) = (\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(\frac{t}{2}))) ,$$

sendo  $0 < k < \pi/2$ .

A pseudo-esfera não é um modelo plenamente adequado para a geometria hiperbólica, pois não é completa, isto é, apresenta “pontos singulares” que impedem o prolongamento das “retas hiperbólicas”.

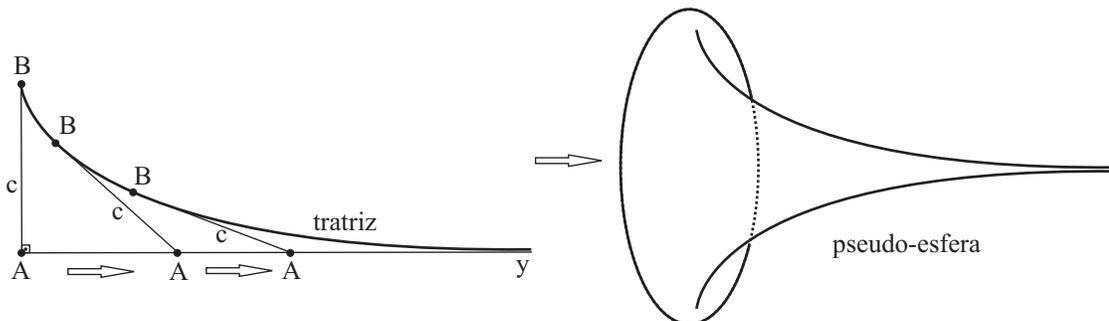


Figura 5.9: Construindo o modelo da pseudo-esfera de Beltrami a partir da tratrix.

### 5.6 Modelo de Klein para a Geometria Elíptica

Na Geometria Elíptica o 5º. Postulado de Euclides é substituído por:

“Dado um ponto fora de uma reta, não existe reta paralela à reta dada passando pelo ponto”.

Para que não haja contradição com o 2º. Postulado de Euclides, é necessário que este seja substituído por um conjunto de axiomas chamados de “Axiomas de Separação”:

Dizemos que dois pontos A e C separam os pontos B e D sobre um círculo, desde que não seja possível ir de B a D percorrendo o círculo sem atravessar os pontos A ou C.

Designaremos a relação definida “A e C separam B e D” pelo símbolo  $(A, C|B, D)$ .

Os axiomas de separação são os seguintes:

- S1** - Se  $(A, B|C, D)$ , então os pontos A, B, C, e D são colineares e distintos.
- S2** - Se  $(A, B|C, D)$ , então  $(C, D|A, B)$  e  $(B, A|C, D)$ .
- S3** - Se  $(A, B|C, D)$ , então não vale  $(A, C|B, D)$ .
- S4** - Se os pontos A, B, C e D são colineares e distintos, então ou  $(A, B|C, D)$  ou  $(A, C|B, D)$  ou  $(A, D|B, C)$ .
- S5** - Se os pontos A, B e C são colineares e distintos, então existe um ponto D tal que  $(A, B|C, D)$ .
- S6** - Por quaisquer cinco pontos colineares e distintos A, B, C, D, e E, se  $(A, B|D, E)$ , então  $(A, B|C, D)$  ou  $(A, B|C, E)$ .

Dadas duas retas distintas  $l$  e  $n$  e um ponto  $P \notin l, n$ , definimos a aplicação perspectiva com centro em P como sendo  $\varphi : l \rightarrow n \cup \{\infty\}$  tal que se  $M \in l$ , então M, P e  $\varphi(M) = M'$  são colineares. Veja Figura 5.10. Observação: quando  $\overline{PM} // n$  tomamos  $\varphi(P) = M' = \infty$ .

**S7** - Aplicações perspectivas  $\varphi : l \rightarrow m$ , sendo  $l$  e  $m$  retas, preservam separação, isto é, se  $(A, B|C, D)$ , com A, B, C e D sobre a reta l, e se  $A', B', C'$  e  $D'$  são imagens de A, B, C, D por  $\varphi$ , então  $(A', B'|C', D')$ .

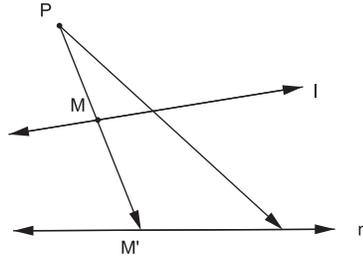


Figura 5.10: Aplicação perspectiva para os Axiomas de Separação da Geometria Elíptica.

No Modelo de Klein para a Geometria Elíptica, é considerado um disco de raio 1 e as retas elípticas são arcos de circunferências (ou diâmetros) unindo pontos diametralmente opostos no bordo do disco. Ao contrário do que ocorre nos modelos da Geometria Hiperbólica, os pontos do bordo **pertencem** ao “plano elíptico”, no entanto, **pontos diametralmente opostos** são vistos como sendo um **único ponto** (Figura 5.11).

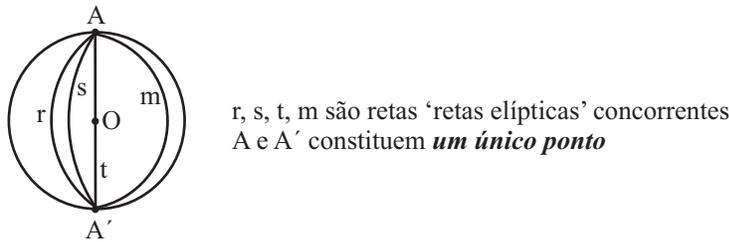


Figura 5.11: Retas no modelo do disco de Klein para a Geometria Elíptica.

Notemos que, dados dois pontos, existe uma única “reta elíptica” que os contém, veja exemplos na Figura 5.12.

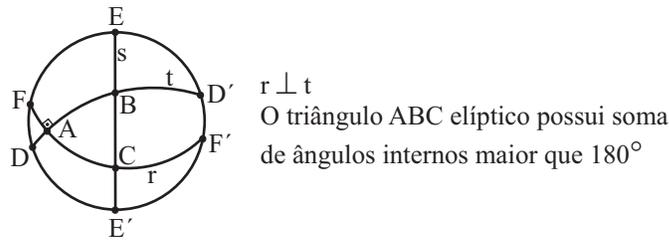


Figura 5.12: Triângulo elíptico no modelo do disco de Klein.

**Observações:**

- (i) Na Geometria Elíptica retas possuem comprimento limitado (não vale o 2º. Postulado de Euclides)
- (ii) A noção de ângulo no modelo acima coincide com a noção de ângulo euclidiana.

### 5.7 Modelo Duplo da Esfera para a Geometria Elíptica

O Modelo do Disco de Klein para a Geometria Elíptica inspira considerar uma esfera de raio 1 como “modelo” para essa geometria. No entanto, alguns cuidados devem ser tomados: as “retas elípticas” são círculos máximos com os **pontos diametralmente opostos identificados**. Desta forma, não temos contradição com o 1º. Postulado de Euclides.

Esse procedimento é equivalente a considerar uma semiesfera como modelo e tomarmos os pontos diametralmente opostos da fronteira identificados, veja na Figura 5.13.

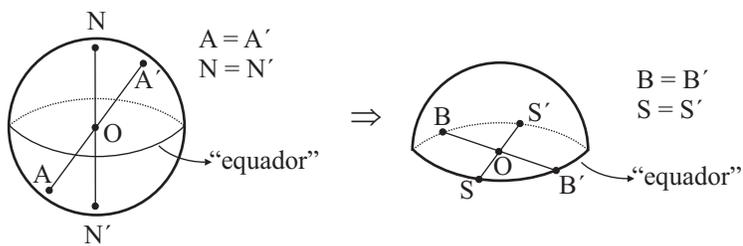


Figura 5.13: *Modelo duplo da esfera para a Geometria Elíptica.*

Desta forma, a esfera pode ser considerada como um “**modelo duplo**” para a Geometria Elíptica.

**Observação:** uma esfera com os pontos diametralmente opostos identificados recebe o nome de **Plano Projetivo**.

# Capítulo 6

## Geometria Hiperbólica

Tomando-se os quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert, a saber:

(i) Axiomas de Incidência;

(ii) Axiomas de Ordem;

(iii) Axiomas de Congruência;

(iv) Axiomas de Continuidade;

juntamente com a negação do 5º. Postulado de Euclides conhecida como **Postulado de Lobachewsky**:

*“Por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não encontram a reta dada,”*

temos o sistema axiomático que origina a chamada **Geometria Hiperbólica**.

À semelhança da Geometria Euclidiana, temos que ponto, reta e plano na Geometria Hiperbólica são conceitos primitivos, portanto, indefiníveis. Veja a Figura 6.1.

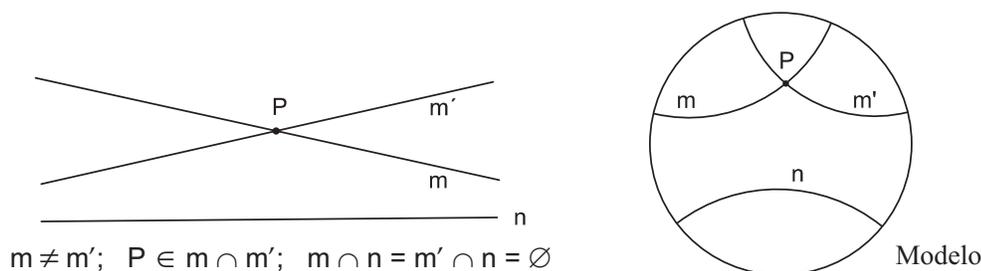


Figura 6.1: O Axioma de Lobachewsky para a Geometria Hiperbólica.

### 6.1 Paralelismo na Geometria Hiperbólica

**Proposição 6.1.1** *Sejam  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Então, existem infinitas retas que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ .*

*Demonstração:*

Pelo Postulado de Lobachewsky, existem  $m$  e  $m'$  passando por  $P$  tais que  $m \cap n = m' \cap n = \emptyset$ .

Deste modo,  $m$  e  $m'$  dividem o plano hiperbólico em quatro regiões angulares, conforme a Figura 6.2.

Seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  a  $n$ . Consideremos os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  de vértice comum  $P$  formados pelas retas  $m$  e  $\overrightarrow{PQ}$  e;  $m'$  e  $\overrightarrow{PQ}$ , respectivamente. Seja  $R$  ponto em uma das regiões angulares

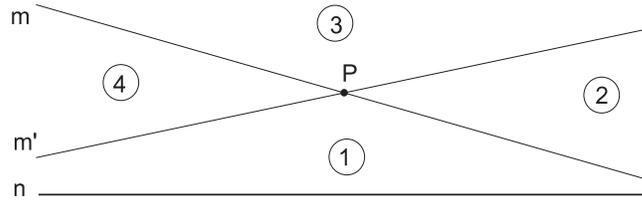


Figura 6.2: Apoio para a demonstração da infinidade de paralelas a uma reta, passando por um ponto dado: regiões angulares.

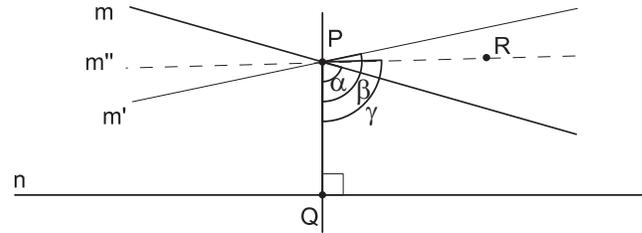


Figura 6.3: Apoio para a demonstração da infinidade de paralelas a uma reta passando, por um ponto dado.

tal que o ângulo  $\gamma = \widehat{RPQ}$  esteja contido na região angular formada pelo ângulo  $\beta$  mas não esteja contido na região angular  $\alpha$ , conforme a Figura 6.3.

Seja  $m''$  reta passando por P e R. Logo,  $m'' \neq m, m'$  e está contida nas regiões opostas pelo vértice P que não contém n (regiões 2 e 4 da Figura 6.2).

Temos que  $m'' \cap n = \emptyset$ . De fato, se  $m'' \cap n = \{A\}$ , temos um triângulo PQA e:

(1)  $m$  entra em PQA por P (Figura 6.4). Pelo Axioma de Pasch, temos que  $m \cap QA \neq \emptyset$ , que é uma contradição.

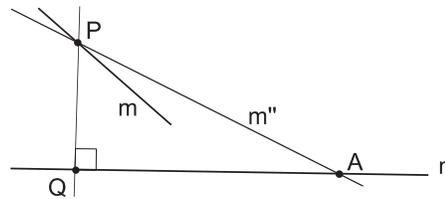


Figura 6.4: Usando o Axioma de Pasch na demonstração da infinidade de paralelas a uma reta, passando por um ponto dado.

(2)  $m'$  entra em PQA por P. Pelo Axioma de Pasch, temos que  $m' \cap QA \neq \emptyset$ , uma contradição.

Logo,  $m'' \cap n = \emptyset$ .

Como há infinitos pontos R que podem ser escolhidos, conforme acima, concluímos que existem infinitas retas  $m''$  que passam por P e não intersectam n. □

**Proposição 6.1.2** *Sejam n uma reta e P um ponto não pertencente a n. Consideremos:*

$C_1$ : conjunto das retas que passam por P e não intersectam n;

$C_2$ : conjunto das retas que passam por P e intesectam n.

Então, existem exatamente duas retas distintas m e m' de  $C_1$  que determinam no plano hiperbólico dois pares  $R_1$  e  $R_2$  de regiões angulares opostas pelo vértice P de modo que  $C_i = R_i, i = 1, 2$ . Veja a Figura 6.5.

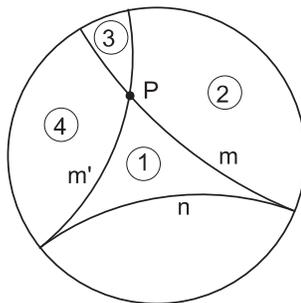


Figura 6.5: Regiões angulares no modelo do disco de Poincaré.

*Demonstração:*

Baixe a perpendicular do ponto  $P$  à reta  $n$  e designe por  $Q$  o pé desta perpendicular. Em seguida trace a reta passando por  $P$  e perpendicular ao segmento  $PQ$ , a qual sabemos que não intercepta a reta  $n$ . Escolha dois pontos  $E$  e  $F$  sobre esta reta, de modo que  $P$  pertença ao segmento  $EF$ . Considere o triângulo  $EFQ$ . Como o ponto  $P$  pertence ao lado  $EF$ , todas as retas que passam por  $P$ , com exceção da reta que passa por  $E$  e  $F$ , são retas que cortam o segmento  $EF$  em um ponto, e que, conseqüentemente, cortam também o segmento  $EQ$  ou o segmento  $QF$ . Vamos nos restringir, inicialmente, às que cortam o segmento  $EQ$ . Observe que, neste segmento, cada ponto representa uma das retas que passa por  $P$ . Veja na Figura 6.6.

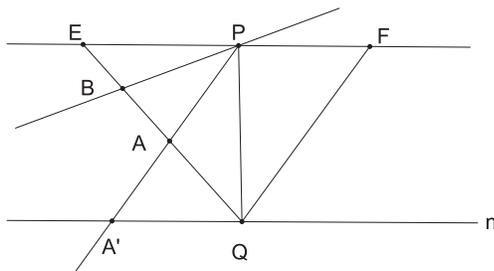


Figura 6.6: Apoio para a demonstração da existência de duas retas paralelas a uma reta, passando por um ponto dado.

Estes pontos podem ser separados em duas classes, a dos que representam retas que não intersectam  $n$ , e que chamaremos de  $N$ , e a dos que representam retas que intersectam  $n$ , e que chamaremos de  $M$ . É claro que  $N \cap M$  é vazio, que  $E \in N$  e que  $Q \in M$ . Além disto, se  $A \in M$ , então  $QA \subset M$ . Para ver que isto ocorre, seja  $A'$  o ponto de  $n$  onde a reta que penetra no triângulo  $PQA'$  pelo vértice  $P$  deve cortar o lado  $QA'$ . Da mesma forma, se  $B \in N$ , então,  $EB \subset N$ .

Segue-se, então, do Axioma de Dedekind para os números reais, que vale para os pontos de uma reta ou de um segmento, que existe exatamente um ponto  $S$  que separa os conjuntos  $M$  e  $N$ . A questão que se coloca imediatamente é se este ponto de separação pertence ao conjunto  $M$  ou ao conjunto  $N$ . Suponha que pertence ao conjunto  $M$ , ou seja, a reta que passa por  $P$  e  $S$  intersecta  $n$  em um ponto  $S'$ . Tome agora qualquer ponto da semi-reta de origem  $Q$  passando por  $S'$  e que esteja fora do segmento  $QS'$ . É claro que esta reta intersecta  $EQ$  em um ponto que fica fora do segmento  $QS$ , o que é absurdo. Logo,  $S \in N$ .

O mesmo raciocínio pode agora ser repetido com o segmento  $QF$ , obtendo-se outro ponto de separação daquele lado. Estes dois pontos correspondem a retas que separam todas as retas que passam pelo ponto  $P$  em duas categorias - as que intersectam  $n$  e as que não intersectam  $n$ . Além disto, estas duas retas não intersectam  $n$ .  $\square$

### Observações.

- (1) o par de setores angulares  $R_1$  opostos pelo vértice  $P$  é fechado, ou seja, sua fronteira, que é constituída pelos ângulos opostos pelo vértice  $P$  formado pelas retas  $m$  e  $m'$ , está contida em  $R_1$ ;
- (2) o par de setores angulares  $R_2$  opostos pelo vértice  $P$  não é fechado, ou seja, sua fronteira, que também é constituída pelos ângulos opostos pelo vértice  $P$  formado pelas retas  $m$  e  $m'$ , não está contida em  $R_2$ ;
- (3) a decomposição do plano hiperbólico em  $R_1$  e  $R_2$  não é disjunta pois  $R_1 \cap R_2 = \{P\}$ .

Devido à infinidade de retas que passam por  $P$  e são intersectam  $n$ , iremos alterar a definição de retas paralelas proveniente da Geometria Euclidiana.

Sejam  $n$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $n$ . Às retas  $m$  e  $m'$  de  $C_1$  enunciadas na Proposição 6.1.2 chamamos de **retas paralelas a  $n$  por  $P$** , enquanto que as demais retas, como por exemplo,  $r$  e  $r'$  de  $C_1$  chamamos de **retas hiperparalelas a  $n$  por  $P$** , conforme a Figura 6.7.

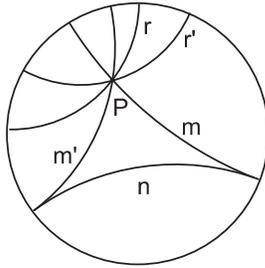


Figura 6.7: Existe uma infinidade de retas hiperparalelas a uma reta, passando por um ponto dado.

**Proposição 6.1.3** *Sejam  $n$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $n$ . Então, as retas paralelas a  $n$  pelo ponto  $P$  formam ângulos congruentes com a perpendicular baixada de  $P$  à reta  $n$ . Além disso, os ângulos congruentes mencionados são agudos.*

*Demonstração:*

Seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  a  $n$ . Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  as medidas dos ângulos entre as paralelas  $m$  e  $m'$  a  $n$  por  $P$  com  $PQ$  em comum, conforme Figura 6.8.

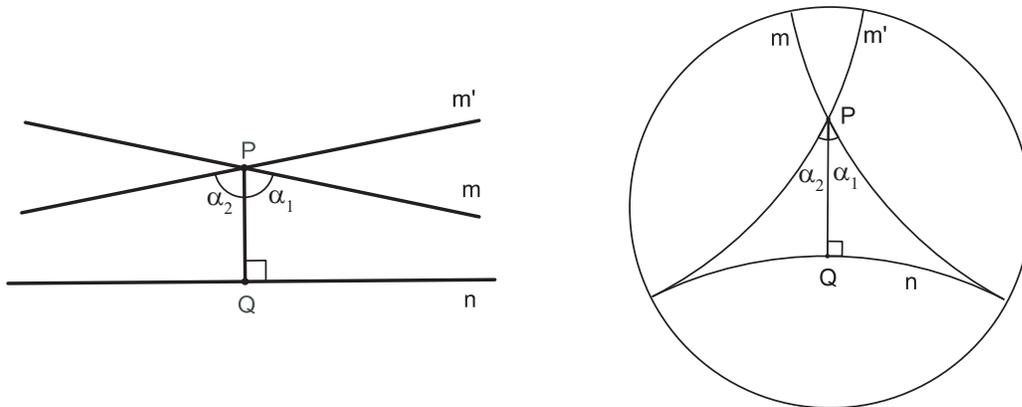


Figura 6.8: Apoio para a demonstração da congruência dos ângulos de paralelismo.

Suponhamos que  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

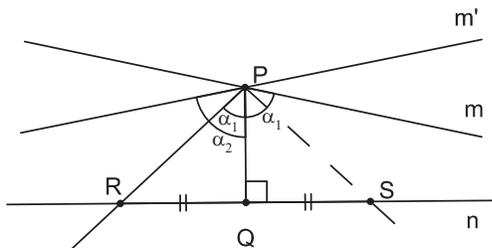


Figura 6.9: Apoio para a demonstração da congruência dos ângulos de paralelismo.

Tomemos um ângulo de medida  $\alpha_1$  contido na região angular determinada pelo ângulo de medida  $\alpha_2$  e com PQ em comum.

Devido à Proposição 6.1.2,  $\exists R \in n$  tal que a medida de  $\widehat{RPQ}$  seja  $\alpha_1$ , conforme a Figura 6.9.

Seja  $S \in n$  tal que  $Q \in RS$  e  $RQ \equiv QS$ . Logo,  $\widehat{QPS}$  tem medida menor do que  $\alpha_1$ .

Logo, pelo caso LAL,  $PQR \equiv PQS$ , o que implica em  $\widehat{QPS}$  ter medida  $\alpha_1$ . Contradição!

Assim,  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Como  $m \neq m'$ , seja  $\beta$  a medida do ângulo entre essas retas (Figura 6.10).

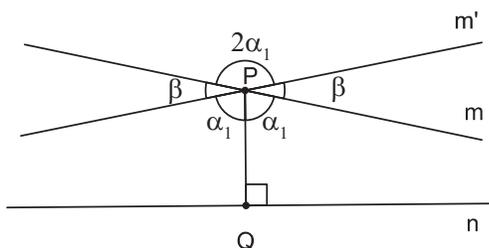


Figura 6.10: Apoio para a demonstração de que os ângulos de paralelismo são agudos.

Logo,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_1) + \beta + 2\alpha_1 + \beta &= 360^\circ \implies \\ 4\alpha_1 + 2\beta &= 360^\circ \implies \\ 2\alpha_1 + \beta &= 180^\circ \implies \\ \alpha_1 &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} \implies \\ \alpha_1 &< 90^\circ. \end{aligned}$$

□

Sejam as retas  $s$  e  $s'$  passando por  $P$  e paralelas a  $r$ . A uma das retas paralelas  $s$  ou  $s'$  (qualquer) chamamos de **reta paralela a  $r$  por  $P$  à direita** ou **no sentido positivo**. À outra chamamos de **reta paralela a  $r$  por  $P$  à esquerda** ou **no sentido negativo**.

Deste modo, uma reta paralela a uma reta dada por um ponto e em um determinado sentido é única.

Sejam  $r$  uma reta;  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ ;  $s$  a reta paralela a  $r$  por  $P$  em um determinado sentido e  $O$  o pé da perpendicular baixada por  $P$  até  $r$ . O ângulo agudo enunciado na Proposição 6.1.3 formado por  $s$  e  $PO$  é chamado de **ângulo de paralelismo entre  $s$  e  $r$  em  $P$** .

Dizemos que  $s$  e  $t$  são **retas paralelas a  $r$  por  $P$  e  $Q$ , respectivamente, em um mesmo sentido** (Figura 6.11) quando:

(1) Todas as semi-retas com origem em P e contidas no interior do ângulo de paralelismo entre s e r em P intersectam r em pontos no interior do ângulo de paralelismo entre t e r no ponto Q.

ou

(2) Todas as semi-retas com origem em Q e contidas no interior do ângulo de paralelismo entre t e r em Q intersectam r em pontos no interior do ângulo de paralelismo entre s e r no ponto P.

(toda reta r que entra em  $\alpha$  por P é  $r \cap n \neq \emptyset$ )  $\implies$  (toda reta s que entra em  $\beta$  por Q é  $s \cap n \neq \emptyset$ )

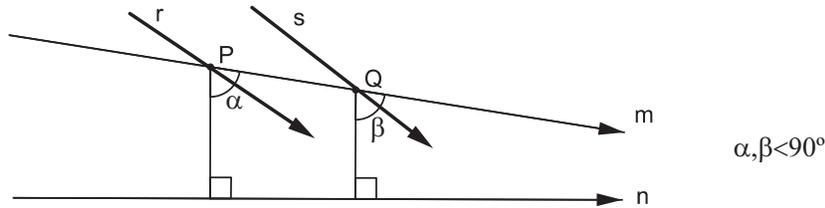


Figura 6.11: Definindo paralelismo em um determinado sentido na Geometria Hiperbólica.

## 6.2 Propriedades Elementares das Paralelas

Dizemos que uma **reta s é paralela a r em um determinado sentido** quando s é paralela a r por um de seus pontos nesse mesmo sentido.

Dizemos que uma **reta s é paralela a r** quando s for paralela a r em um determinado sentido. Indicaremos por  $s//r$ .

**Proposição 6.2.1** *Sejam m reta paralela a n passando por um ponto P e em um determinado sentido. Então, a reta m é paralela a n nesse mesmo sentido por qualquer de seus pontos Q. Veja a Figura 6.12.*

$$\left\{ \begin{array}{l} m//n \text{ à direita por } P \\ Q \in m \end{array} \right. \implies m//n \text{ à direita por } Q.$$

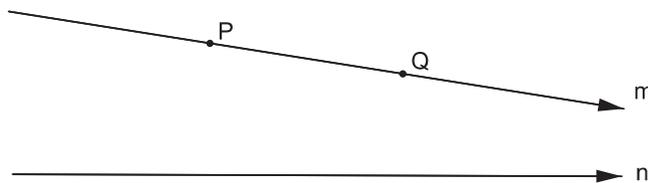


Figura 6.12: Paralelismo em um determinado sentido.

*Demonstração:*

Seja A o pé da perpendicular baixada de P a n.

Seja  $m//n$  à direita por P.

1º caso: Suponhamos que  $Q \in m$  está à direita de P. Seja  $B \in n$  tal que  $QB \perp n$ . Seja  $\alpha$  o ângulo suplementar de  $\widehat{BQP}$ .

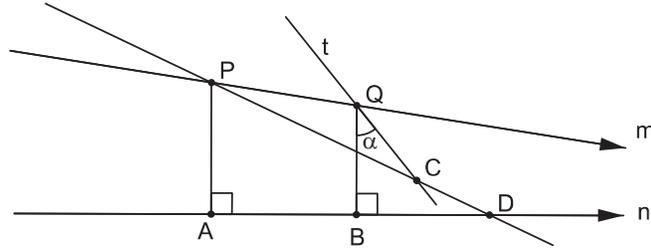


Figura 6.13: Apoio para demonstração: paralelismo em um determinado sentido.

Para mostrar que  $m // n$  à direita por  $Q$ , basta mostrar que qualquer  $t$  entrando em  $\alpha$  por  $Q$  corta  $n$ . Seja  $t$  conforme Figura 6.13 e  $C \in t$  no interior de  $\alpha$ .

Logo,  $\overrightarrow{PC}$  corta  $n$  em um ponto  $D$  (Proposição 6.1.2), pois  $m // n$  à direita por  $P$ .

Assim,  $t$  entra em  $PAD$  por  $PD$ . Pelo Axioma de Pasch,  $t$  corta  $AD$  ou  $PA$ .

A reta  $t$  não corta  $PA$  pois, caso contrário,  $t$  cortaria  $QB$  em outro ponto diferente de  $Q$ , o que implica  $t = QB$  que é impossível.

Logo,  $t \cap AD \neq \emptyset$ , o que implica em  $t \cap n \neq \emptyset$ , ou seja  $m // n$  à direita por  $Q$ .

2º Caso: Suponhamos que  $Q \in m$  está à esquerda de  $P$ . Seja  $B \in n$  tal que  $QB \perp n$ .

Seja  $\alpha$  o ângulo suplementar de  $B\hat{Q}P$ .

Para mostrar que  $m // n$  à esquerda por  $Q$ , basta mostrar que qualquer  $t$  entrando em  $\alpha$  por  $Q$  corta  $n$ .

Seja  $t$  e  $C \in t$  no interior de  $\alpha$ .

Logo,  $\overrightarrow{PC}$  corta  $n$  em um ponto  $D$  (Proposição 6.1.2), pois  $m // n$  à esquerda por  $P$ .

Assim,  $t$  entra em  $PAD$  por  $PD$ . Pelo Axioma de Pasch,  $t$  corta  $AD$  ou  $PA$ .

$t$  não corta  $PA$  pois, caso contrário,  $t$  cortaria  $QB$  em outro ponto diferente de  $Q$ , o que implica  $t = QB$  que é impossível.

Logo,  $t \cap AD \neq \emptyset$ , o que implica em  $t \cap n \neq \emptyset$ , ou seja  $m // n$  à esquerda por  $Q$ .  $\square$

Todas as definições envolvendo paralelismo enunciadas na seção anterior envolvem pontos. A Proposição 6.2.1 permite escrever as próximas definições que estabelecem paralelismo envolvendo apenas retas.

**Proposição 6.2.2** Se  $s$  é paralela a  $r$ , então  $r$  é paralela a  $s$ . Veja a Figura 6.14.

$$(\forall m \text{ que entra em } \alpha \text{ é tal que } m \cap s \neq \emptyset) \implies (\forall m \text{ que entra em } \beta \text{ é tal que } m \cap r \neq \emptyset)$$

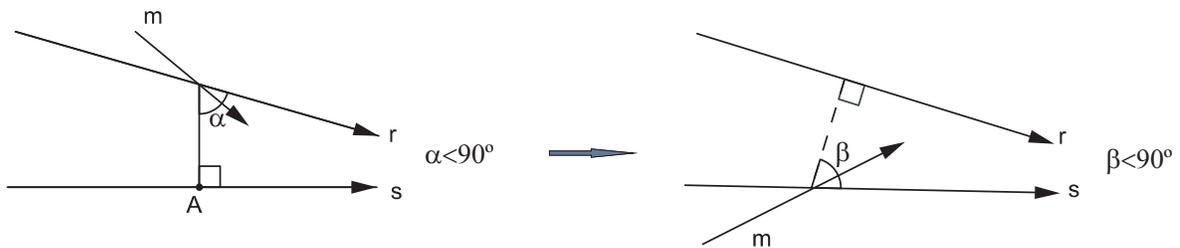


Figura 6.14: Propriedade simétrica de paralelismo na Geometria Hiperbólica.

*Demonstração:*

Considere as retas  $m$  e  $n$  que passam pelos pontos  $A$  e  $B$ , e  $C$  e  $D$ , respectivamente, como na Figura 6.15. Seja  $P$  um ponto do segmento  $AB$ . Suponha que  $m$  seja a paralela à reta  $n$  passando por  $P$  em uma direção, digamos a da direita. Trace  $PQ$  perpendicular a  $n$  e  $QR$  perpendicular a  $m$ .

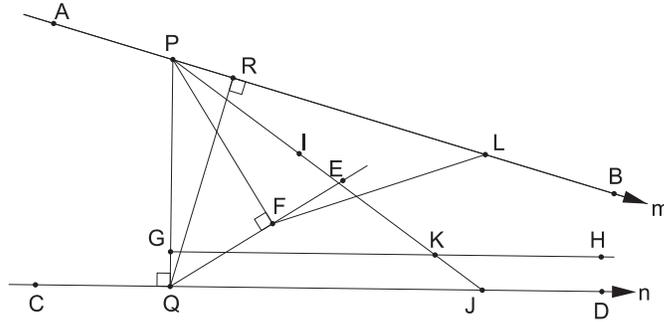


Figura 6.15: Apoio para a demonstração da propriedade simétrica do paralelismo na Geometria Hiperbólica.

Como pela Proposição 6.1.3 o ângulo  $\widehat{QPB}$  é agudo, o ponto R ficará à direita do ponto P (do lado do paralelismo), do contrário o triângulo PQR teria dois ângulos não agudos, o que é proibido pelo Teorema do Ângulo Externo. Devemos provar que a reta  $n$  é paralela à reta  $m$  passando pelo ponto Q.

Para isto, temos de provar que toda reta que passa pelo ponto Q e divide o ângulo  $\widehat{RQD}$ , intersecta a reta  $m$ . Considere uma de tais retas e seja E um de seus pontos dentro daquele ângulo. Trace  $\overline{PF}$  perpendicular a esta reta. O ponto F pertence à semi-reta de origem Q passando por E. Na semi-reta  $\overline{PQ}$ , marque um ponto G, de modo que  $PG \equiv PF$ . O ponto  $G \in PQ$ , já que  $PF < PQ$ , como cateto e hipotenusa de um triângulo retângulo. Trace a perpendicular  $\overline{GH}$  ao segmento PQ e construa um ângulo  $\widehat{GPI}$  igual ao ângulo  $\widehat{FPB}$ . Seja J o ponto onde a semi-reta  $\overline{PI}$  corta a reta  $n$ . Como a semi-reta  $\overline{GH}$  corta o lado PQ do triângulo PQJ, mas não corta o lado QJ, então, deve cortar PJ em algum ponto K. Em  $\overline{PB}$  marque um ponto L tal que  $PL \equiv PK$  e trace FL. Observe que os triângulos PGK e PFL são congruentes. Conseqüentemente,  $\widehat{PFL} = \widehat{PGK} = 90^\circ$ . Logo os pontos Q, F, E e L são colineares. Portanto a semi-reta  $\overline{QE}$  corta a reta  $m$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Proposição 6.2.3** Se  $s$  e  $r$  são paralelas a  $m$  em um determinado sentido, então  $s$  é paralela a  $r$ . Veja a Figura 6.16.

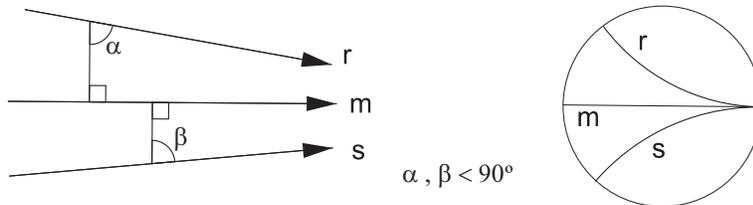


Figura 6.16: Propriedade transitiva de paralelismo na Geometria Hiperbólica.

*Demonstração:*

1º caso: Consideremos a terceira reta entre as outras duas. (Figura 6.17).

Tomemos a reta  $m$ , que passa por A e B, e a reta  $m'$ , que passa por C e D, paralelas à reta  $n$ , que passa por E e F, ambas na mesma direção. Suponha que o segmento AC seja perpendicular a CD. Considere uma reta que passe nos pontos A e H, com H no interior do ângulo  $\widehat{CAB}$ .

Como  $m$  é paralela a  $n$ , esta corta a reta que passa pelos pontos E e F em algum ponto I. Tracemos o segmento CI. Fazendo uso da Proposição 6.2.2, sabemos que a reta que passa por E e F é paralela à reta que passa por C e D. Logo a reta que entra no ângulo  $\widehat{CIF}$  deve interceptar a reta que passa por C e D. Isto prova o resultado neste caso.

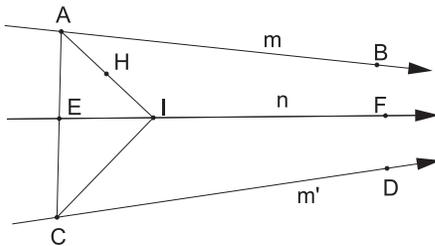


Figura 6.17: Apoio para a demonstração da propriedade transitiva do paralelismo na Geometria Hiperbólica.

2º caso: Consideremos agora as retas  $m$  e  $m'$  do mesmo lado da reta  $n$ .

Suponha que  $m'$  seja a reta que está entre as duas outras. Tome um ponto  $P \in m$ . Considere a reta  $m''$ , passando por  $P$  paralela a  $m'$ , na mesma direção do paralelismo (ver a Figura 6.18).

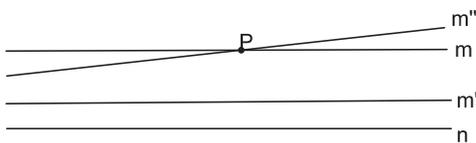


Figura 6.18: Apoio para a demonstração da propriedade transitiva do paralelismo na Geometria Hiperbólica.

De acordo com a primeira parte provada,  $m''$  é paralela a  $n$ . Como  $m$  também é paralela a  $n$  e o paralelismo de  $m$  e  $m''$  é na mesma direção, concluímos que  $m = m''$ , já que a paralela, em uma determinada direção é única. Conseqüentemente,  $m$  é paralela a  $m'$ .  $\square$

Dizemos que **duas semi-retas**  $s_1$  e  $s_2$  **são paralelas** se suas retas suportes assim o forem. Indicaremos por  $s_1 // s_2$ .

### 6.3 Pontos Ideais

Indiquemos o plano hiperbólico por  $H$  e consideremos o conjunto  $S$  de todas as semi-retas de  $H$ .

Embora o conceito de paralelismo entre retas introduzido na seção anterior não admita que duas retas paralelas possam ser iguais (pois aí teríamos apenas uma reta e não duas), vamos convencionar por ora que uma reta possa ser paralela a ela mesma para podermos introduzir uma relação de equivalência  $\sim$  em  $S$  envolvendo tal conceito.

Sejam  $s_1, s_2 \in S$ . Definimos:

$$s_1 \sim s_2 \iff s_1 // s_2.$$

Considerando a convenção acima, e as Proposições 6.2.2 e 6.2.3, é imediato provar que  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $S$ .

As classes de equivalência da relação  $\sim$  definida acima no conjunto  $S$  das semi-retas do plano hiperbólico  $H$  são chamadas de **pontos ideais** ou **pontos no infinito** ou **pontos ômega** de  $H$ . Veja a Figura 6.19. Geralmente uma classe de equivalência acima é indicada pela letra  $\Omega$ .

É bastante útil pensar em um ponto ideal  $\Omega$  como um ponto do bordo do Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica e considerá-lo como o “ponto de convergência” de todas as semi-retas da classe que o define.

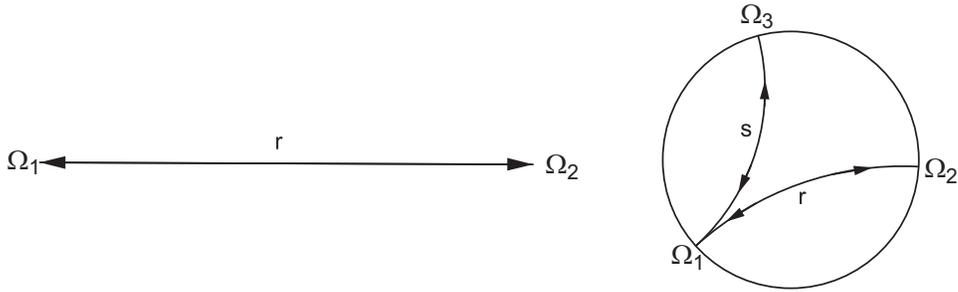


Figura 6.19: *Pontos ideais na Geometria Hiperbólica.*

Sejam  $r$  uma reta e  $A \in r$ . Logo,  $A$  define duas semi-retas em  $r$  que podem ser representantes de duas classes de equivalência acima definidas. Qualquer outro ponto  $B \in r$  definirá as mesmas classes que  $A$  define.

Assim, podemos dizer que uma reta  $r$  determina dois pontos ideais, um para cada sentido de paralelismo em  $r$ . Indicando tais pontos ideais por  $\Omega_-$  e  $\Omega_+$ , podemos imaginá-los com os mesmos papéis dos pontos  $-\infty$  e  $+\infty$  associados à reta dos números reais. Neste sentido, tendo a noção de reta orientada com sentido positivo e negativo em mente, é conveniente pensar em  $\Omega_-$  como sendo um ponto que vem “antes” de todos os pontos de  $r$  e  $\Omega_+$  como sendo um ponto que vem “depois” de todos de  $r$ .

Por fim, é conveniente observar que pontos ideais **não** são pontos do plano hiperbólico (assim como  $+\infty$  não é ponto da reta real). Para distingui-los é comum chamar os pontos do plano hiperbólico de **pontos ordinários**.

## 6.4 Triângulos Generalizados

Sejam:

(i)  $A, B$  pontos ordinários e  $\Omega$  ponto ideal do plano hiperbólico. A figura geométrica formada pelas semi-retas  $A\Omega$ ,  $B\Omega$  e o segmento  $AB$  é chamada de **triângulo generalizado** (ou **triângulo com um vértice ideal**, ou **triângulo ômega**)  $AB\Omega$  (Figura 6.20).

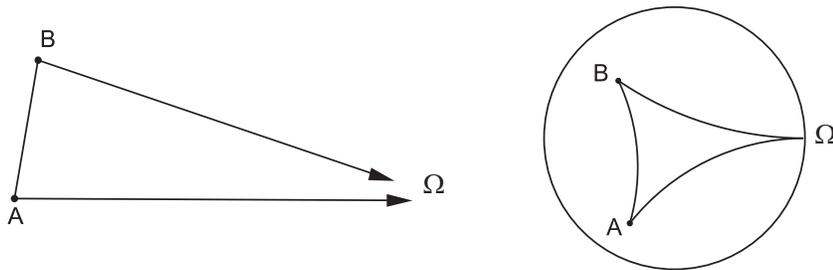


Figura 6.20: *Triângulo generalizado com um ponto ideal.*

(ii)  $A$  ponto ordinário e  $\Omega_1, \Omega_2$  pontos ideais do plano hiperbólico. A figura geométrica formada pelas semi-retas  $A\Omega_1$ ,  $A\Omega_2$  e a reta  $\Omega_1\Omega_2$  é chamada de **triângulo generalizado** (ou **triângulo com dois vértices ideais**, ou **triângulo ômega**)  $A\Omega_1\Omega_2$  (Figura 6.21).

(iii)  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  pontos ideais do plano hiperbólico. A figura geométrica formada pelas retas  $\Omega_1\Omega_2$ ,  $\Omega_1\Omega_3$  e  $\Omega_2\Omega_3$  é chamada de **triângulo generalizado** (ou **triângulo com vértices ideais**, ou **triângulo ômega**)  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$  (Figura 6.22).

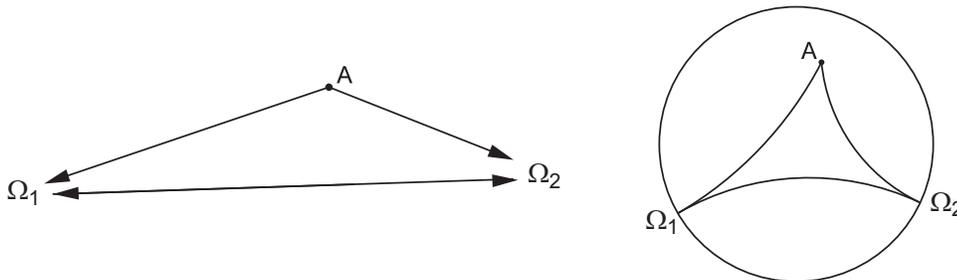


Figura 6.21: *Triângulo generalizado com dois pontos ideais.*

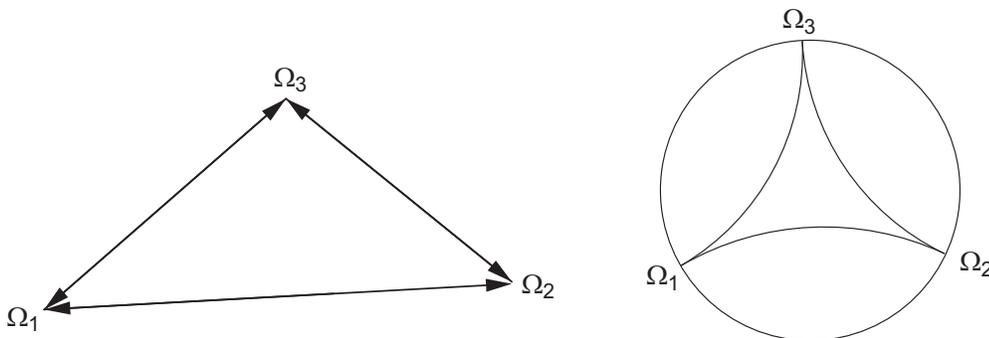


Figura 6.22: *Triângulo generalizado com três pontos ideais.*

Dadas as semi-retas  $P\Omega$  e  $Q\Omega$ , consideremos suas retas suportes  $\Omega'\Omega$  e  $\Omega''\Omega$ . A figura geométrica formada por  $\Omega'\Omega$  e  $\Omega''\Omega$  é chamada de **ângulo ideal**  $\Omega'\hat{\Omega}\Omega''$  e sua medida é definida como sendo **nula**. Tal ângulo pode ser também indicado por  $P\hat{\Omega}Q$ .

Desta forma, um triângulo generalizado possuirá pelo menos um ângulo interno ideal, cuja medida é nula. Seja  $S_1$  o semiplano originado por  $\Omega'\Omega$  e que contenha  $\Omega''\Omega$ . Seja  $S_2$  o semiplano originado por  $\Omega''\Omega$  e que contenha  $\Omega'\Omega$ . Ao conjunto  $(E_1 \cap E_2) - (\Omega'\Omega \cup \Omega''\Omega)$ , ou seja, intersecção dos semiplanos  $E_1$  e  $E_2$  excetuando-se as retas que os originam, é chamado de **interior do ângulo ideal**  $\Omega'\hat{\Omega}\Omega''$ .

À intersecção dos interiores dos ângulos internos de um triângulo generalizado chamamos de **interior do triângulo generalizado**.

**Observação.** Polígonos convexos generalizados podem ser definidos de modo análogo.

## 6.5 Propriedades de Triângulos Generalizados

Dizemos que uma reta **entra** em um triângulo generalizado quando a intersecção desta reta com o interior do triângulo generalizado for não vazia.

Seja  $AB\Omega$  um triângulo generalizado. Dizemos que uma reta  $r$  **passa** por um dos vértices de  $AB\Omega$  quando  $A \in r$  ou  $B \in r$  ou  $\Omega$  é um dos pontos ideais de  $r$ . Analogamente, este conceito estende-se para triângulos generalizados  $A\Omega_1\Omega_2$  ou  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ .

**Proposição 6.5.1** *Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  passando por um de seus vértices, então  $r$  intersecta o lado do triângulo generalizado oposto a esse vértice.*

*Demonstração:*

Seja  $r$  entrando em  $AB\Omega$  por  $A$ .

Seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  até a reta  $\overleftrightarrow{BQ}$  e  $\alpha$  a medida do ângulo  $\widehat{\Omega A Q}$ . Temos dois casos:

(1) Se a medida de  $\widehat{\Omega A B}$  é menor do que ou igual a  $\alpha$ . Veja a Figura 6.23.

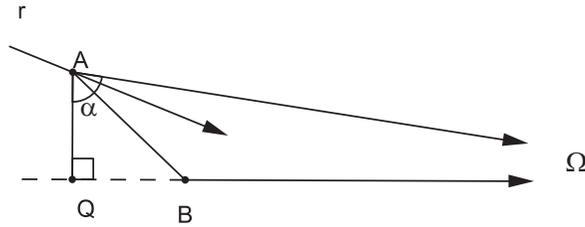


Figura 6.23: Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice.

Então, pela Proposição 6.1.2, temos que  $r \cap BQ \neq \emptyset$ .

(2) Se a medida de  $\widehat{\Omega A B}$  for maior do que  $\alpha$ . Veja a Figura 6.24.

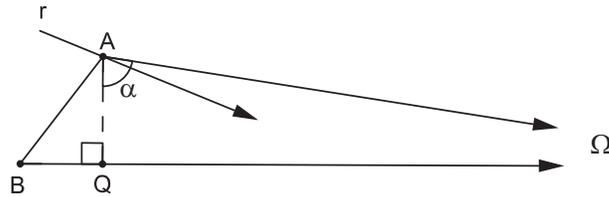


Figura 6.24: Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice.

(2.1) Se  $r$  entra em  $AQ\Omega$ , então pela Proposição 6.1.2 temos que  $r \cap BQ \neq \emptyset$ .

(2.2) Se  $r$  entra em  $ABQ$ , então pelo Axioma de Pasch,  $r \cap BQ \neq \emptyset$ .

(2.3) Se  $r$  contém  $Q$ , então  $r \cap BQ = \{Q\} \neq \emptyset$ .

Seja  $r$  entrando em  $ABQ$  por  $\Omega$ .

Consideremos um ponto  $P \in r$  no interior de  $ABQ$ , conforme a Figura 6.25.

Logo,  $\overleftrightarrow{AP}$  intersecta  $BQ$  em um ponto  $C$ .

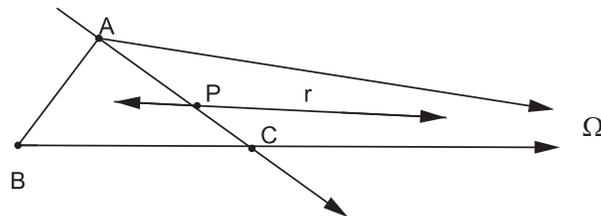


Figura 6.25: Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice.

Logo,  $r$  entra no triângulo  $ABC$ . Pelo Axioma de Pasch  $r$  corta  $AB$  ou  $BC$ . A reta  $r$  não corta  $BC$  pois, caso contrário,  $r$  e  $\overleftrightarrow{BQ}$  seriam paralelas em um mesmo sentido com um ponto em comum, ou seja  $r = \overleftrightarrow{BQ}$ . Contradição!

Logo,  $r \cap AB \neq \emptyset$ . □

**Proposição 6.5.2** *Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  intersectando um de seus lados mas não passando por nenhum de seus vértices, então  $r$  intersecta um dos outros dois lados do triângulo generalizado.*

*Demonstração:*

Se  $r$  entra em  $AB\Omega$  por  $A\Omega$ , então consideremos  $\{Q\} = r \cap A\Omega$ , conforme a Figura 6.26.

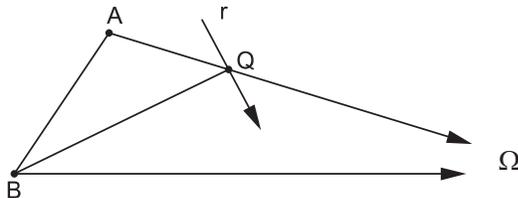


Figura 6.26: Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.

Temos dois casos:

- (1) Se  $r$  entra em  $BQ\Omega$ , pela Proposição 6.5.1,  $r \cap B\Omega \neq \emptyset$ .
- (2) Se  $r$  entra em  $ABQ$ , pelo Axioma de Pasch,  $r \cap AB \neq \emptyset$ .

Observação:  $r$  não contém  $BQ$  pois, caso contrário,  $B \in r$  que é contra a hipótese.

Se  $r$  entra em  $AB\Omega$  por  $AB$ , então consideremos  $\{C\} = r \cap AB$ , conforme a Figura 6.27.

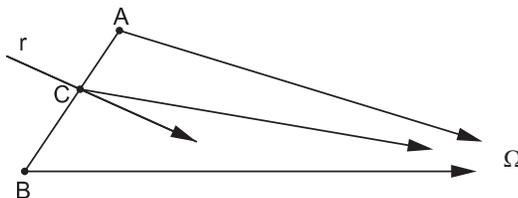


Figura 6.27: Apoio para a demonstração do “Axioma de Pasch” para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.

Temos, novamente, dois casos:

- (1) Se  $r$  entra em  $AC\Omega$ , pela Proposição 6.5.1,  $r \cap A\Omega \neq \emptyset$ .
- (2) Se  $r$  entra em  $BC\Omega$ , pela Proposição 6.5.1,  $r \cap B\Omega \neq \emptyset$ .

Observação:  $r$  não contém  $C\Omega$  pois, caso contrário,  $r$  passaria por  $\Omega$ : contra a hipótese. □

### Observações.

- (i) As Proposições 6.5.1 e 6.5.2 podem ser facilmente estendidas para os outros dois tipos de triângulos generalizados.
- (ii) As Proposições 6.5.1 e 6.5.2 são os “Axiomas de Pasch” para triângulos generalizados  $AB\Omega$ .

Seja  $AB\Omega$  triângulo generalizado conforme a Figura 6.28. Os **ângulos externos** de  $AB\Omega$  são os ângulos suplementares de  $\widehat{B\hat{A}\Omega}$  e  $\widehat{A\hat{B}\Omega}$  construídos sobre as retas suportes de  $AB$ ,  $A\Omega$  e  $B\Omega$ .

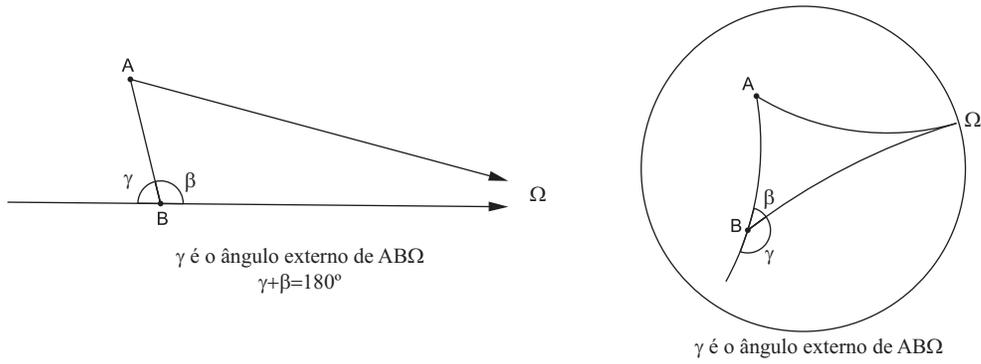


Figura 6.28: *Ângulo externo em triângulos generalizados com um vértice ideal.*

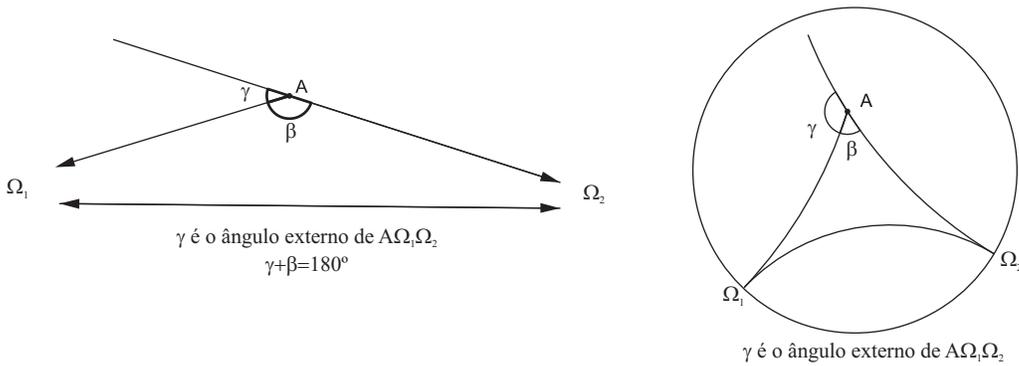


Figura 6.29: *Ângulo externo em triângulos generalizados com dois vértices ideais.*

Seja  $A\Omega_1\Omega_2$  triângulo generalizado conforme a Figura 6.29. Os *ângulos externos* de  $A\Omega_1\Omega_2$  são os ângulos suplementares de  $\Omega_1\hat{A}\Omega_2$  construídos sobre as retas suportes de  $A\Omega_1$  e  $A\Omega_2$ . Triângulos generalizados  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$  não possuem ângulos externos.

**Proposição 6.5.3** (*Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados*) *Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe seja adjacente.*

*Demonstração:*

Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre não nulo. Logo, é maior que o ângulo nulo dos vértices ideais. Resta mostrar que um ângulo externo em B é maior do que A em  $AB\Omega$ .

Consideremos  $\overleftrightarrow{BD}$  conforme a Figura 6.30.

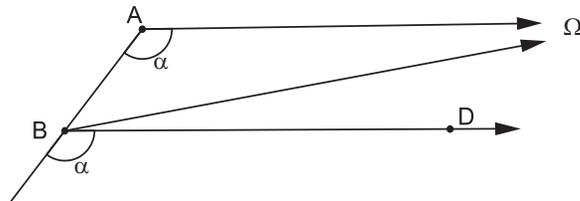


Figura 6.30: *Apoio para a demonstração do “Teorema do Ângulo Externo” para triângulos generalizados.*

Temos  $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{A\Omega} = \emptyset$ . De fato, se  $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{A\Omega} = \{C\}$ , teríamos um triângulo  $ABC$  com ângulo externo  $\alpha$  e ângulo interno não adjacente  $\alpha$ . Contradição com o teorema do ângulo externo.

Restam duas possibilidades:

(1) A medida de  $\widehat{DB\Omega}$  não é nula. Daí a medida de  $\widehat{DB\Omega}$  é maior do que a medida de  $\alpha$ , como queríamos.

(2) A medida de  $\widehat{DB\Omega}$  é nula. Logo,  $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{B\Omega}$ .

Considere a Figura 6.31.

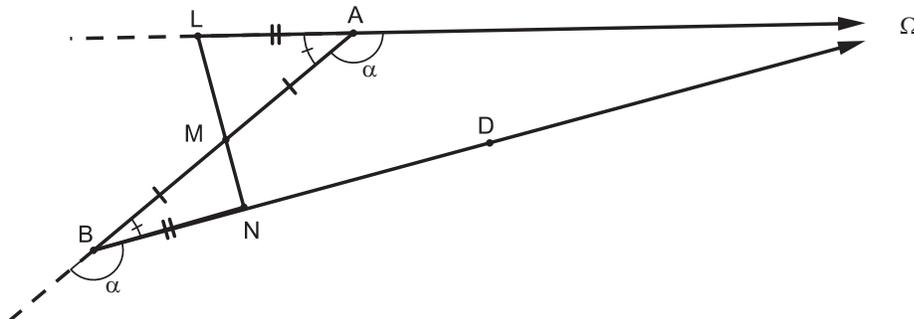


Figura 6.31: Apoio para a demonstração do “Teorema do Ângulo Externo” para triângulos generalizados.

Seja M: ponto médio de AB.

Seja N : pé da perpendicular baixada de M a  $\overleftrightarrow{B\Omega}$ .

Seja L  $\in \overleftrightarrow{A\Omega}$  tal que  $LA \equiv BN$ , conforme figura.

Pelo caso LAL de congruência temos  $BNM \equiv ALM$ .

Logo, L, M e N são colineares e  $ML \perp \overleftrightarrow{A\Omega}$ . Contradição com a Proposição 6.1.3.  $\square$

## 6.6 Congruência em triângulos generalizados

Dizemos que dois triângulos generalizados  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são **congruentes** quando  $AB \equiv A'B'$ ,  $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$  e  $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ . Indicaremos por  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ .

Dizemos que dois triângulos generalizados  $A\Omega_1\Omega_2$  e  $A'\Omega'_1\Omega'_2$  são **congruentes** quando  $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ . Indicaremos por  $A\Omega_1\Omega_2 \equiv A'\Omega'_1\Omega'_2$ .

Definimos que todos os triângulos generalizados  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$  são congruentes entre si.

**Proposição 6.6.1** (Caso “lado-ângulo” - LA - de congruência para triângulos generalizados) Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $AB \equiv A'B'$  e  $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ .

*Demonstração:*

Suponhamos que  $\widehat{B} > \widehat{B'}$ .

Seja C no interior de  $AB\Omega$  tal que  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'\Omega'}$ , conforme a Figura 6.32.

Pela Proposição 6.5.1,  $\overleftrightarrow{BC}$  corta  $A\Omega$  em um ponto D.

Seja  $D' \in A'\Omega'$  tal que  $AD \equiv A'D'$ .

Logo  $ABD \equiv A'B'D'$  pelo caso LAL. Assim,

$$\widehat{ABD} = \widehat{A'B'D'} < \widehat{A'B'\Omega'} \implies \widehat{ABC} = \widehat{A'B'D'} < \widehat{A'B'\Omega'} \implies \widehat{A'B'\Omega'} = \widehat{A'B'D'} < \widehat{A'B'\Omega'},$$

contradição!

Logo,  $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ .

**Proposição 6.6.2** (Caso “ângulo-ângulo” - AA - de congruência para triângulos generalizados) Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$  e  $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$

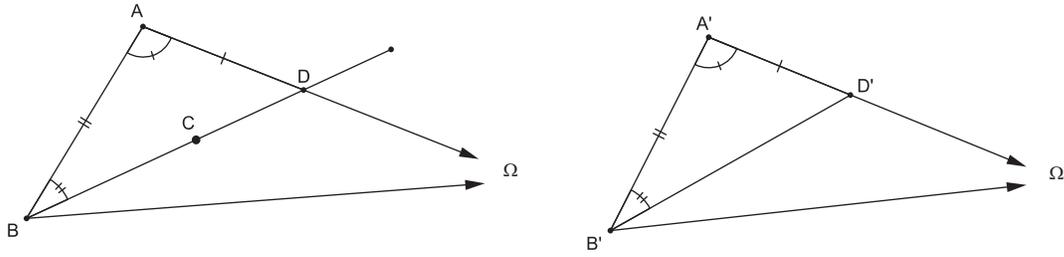


Figura 6.32: Apoio para a demonstração do caso de congruência “lado-ângulo” para triângulos generalizados.

*Demonstração:*

Devemos mostrar que  $AB \equiv A'B'$ .

Suponhamos que  $AB > A'B'$ .

Seja  $C \in AB$  tal que  $AC \equiv A'B'$ , conforme a Figura 6.33.

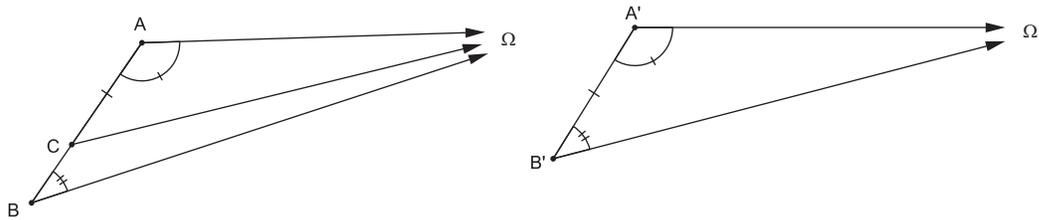


Figura 6.33: Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo” para triângulos generalizados.

Logo, pela Proposição 6.6.1 temos  $AC\Omega \equiv A'B'\Omega'$ . Logo,  $\widehat{C} \equiv \widehat{B}' \equiv \widehat{B}$ , ou seja,

$$A\widehat{C}\Omega \equiv C\widehat{B}\Omega. \tag{*}$$

Mas  $A\widehat{C}\Omega$  é ângulo externo do triângulo generalizado  $CB\Omega$ .

Pelo Teorema do Ângulo Externo para triângulos generalizados (Proposição 6.5.3), temos  $A\widehat{C}\Omega > C\widehat{B}\Omega$ .

Contradição com (\*).

Assim,  $AB \equiv A'B'$ , como queríamos. □

Dizemos que o triângulo generalizado  $AB\Omega$  é **isósceles** de base  $AB$  quando  $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ .

**Proposição 6.6.3** (Caso “triângulos isósceles” de congruência para triângulos generalizados) *Todos os triângulos generalizados isósceles com bases de mesma medida são congruentes entre si, ou seja, se  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são tais que  $AB \equiv A'B'$ ,  $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$  e  $\widehat{A}' \equiv \widehat{B}'$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ .*

*Demonstração:*

É suficiente mostrar que  $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$  e usar a Proposição 6.6.1.

Suponhamos que  $\widehat{B} > \widehat{B}'$ .

Sejam  $C$  e  $D$  no interior de  $AB\Omega$  de tal modo que  $C\widehat{A}B \equiv \widehat{A}'$  e  $D\widehat{B}A \equiv \widehat{B}'$ , conforme a Figura 6.34.

Pela Proposição 6.5.1,  $\overleftrightarrow{BD}$  corta  $\overleftrightarrow{A\Omega}$  em um ponto que chamaremos de  $E$ .

Pelo Axioma de Pasch,  $\overleftrightarrow{AC}$  corta  $BE$  em um ponto que chamaremos de  $F$ .

Seja  $E' \in B'\Omega'$  tal que  $B'E' \equiv BE$ . Pelo caso de congruência LAL temos que  $ABE \equiv A'B'E'$ .

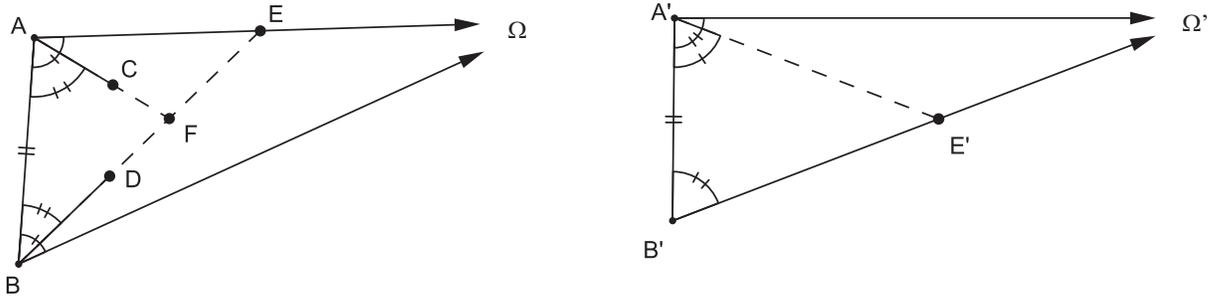


Figura 6.34: Apoio para a demonstração do caso de congruência “triângulos isósceles” para triângulos generalizados.

Logo,

$$B'\widehat{A'E'} < B'\widehat{A'\Omega} \implies B\widehat{A}E < B'\widehat{A'\Omega'} \implies B\widehat{A}\Omega < B'\widehat{A'\Omega'} \implies \widehat{A} < \widehat{A'}.$$

Assim,

$$\widehat{B} > \widehat{B'} \text{ e } \widehat{A} < \widehat{A'} \implies \widehat{A} + \widehat{B'} < \widehat{B} + \widehat{A'},$$

contradição, pois  $\widehat{B'} \equiv \widehat{A'}$  e  $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ .

Assim,  $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ , como queríamos. □

## 6.7 O Ângulo de Paralelismo

Consideremos o ângulo de paralelismo entre as retas  $s$  e  $r$  no ponto  $P$  definido na Seção 6.1, por meio das Proposições 6.1.2 e 6.1.3.

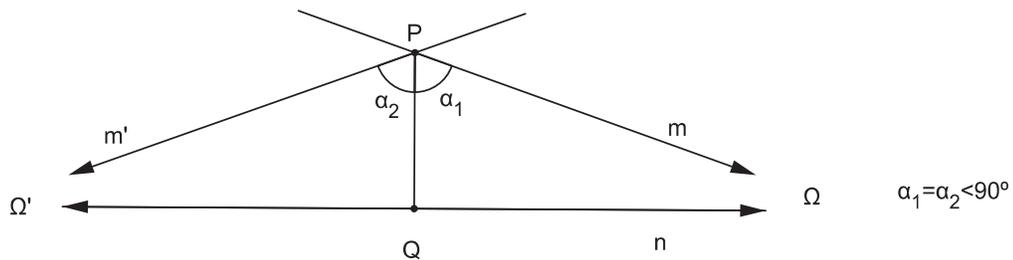


Figura 6.35: Ângulo de paralelismo na Geometria Hiperbólica.

Notemos que a noção de ângulo de paralelismo está associada a um triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$  e que seu ângulo interno  $\widehat{P}$  é exatamente o ângulo de paralelismo entre  $s$  e  $r$  em  $P$ , conforme a Figura 6.35. Sendo assim, iremos chamar o ângulo  $\widehat{P}$  também de **ângulo de paralelismo do triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$  relativo à altura  $PQ$** , de acordo com a Figura 6.36.

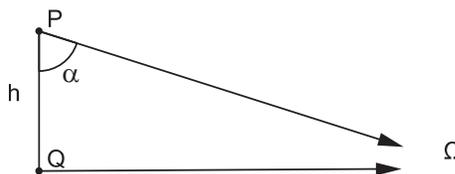


Figura 6.36: Ângulo de paralelismo no triângulo retângulo generalizado.

Notemos que o ângulo de paralelismo  $\hat{P}$  depende apenas da altura PQ do triângulo retângulo generalizado PQΩ. Logo, podemos definir uma função, chamada de **função ângulo de paralelismo**, do seguinte modo:

$$\Theta : \mathbb{R}_+ - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longmapsto \Theta(h) = \alpha$$

tal que h é a medida da altura PQ do triângulo retângulo generalizado PQΩ e α é a medida (em radianos) de seu ângulo interno  $\hat{P}$ .

**Proposição 6.7.1** *A função ângulo de paralelismo é estritamente decrescente e, portanto, injetiva.*

*Demonstração:*

Sejam  $h_1 > h_2$ . Devemos mostrar que  $\Theta(h_1) < \Theta(h_2)$ .

De fato (Figura 6.37).

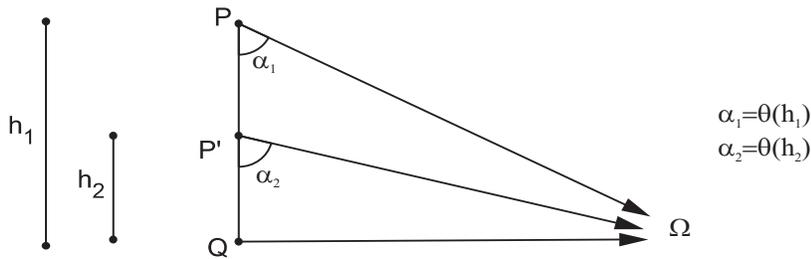


Figura 6.37: Apoio para a demonstração de que a Função Ângulo de Paralelismo é injetiva.

Pelo Teorema do Ângulo Externo para o triângulo generalizado PP'Ω, temos  $\alpha_2 > \alpha_1$  pois  $\alpha_2$  é ângulo externo de PP'Ω e  $\alpha_1$  é ângulo interno não adjacente. Logo,  $\Theta(h_1) < \Theta(h_2)$ . □

**Proposição 6.7.2** *A função ângulo de paralelismo é sobrejetiva se restringirmos seu contra-domínio ao intervalo aberto  $]0, \pi/2[ \subset \mathbb{R}$ .*

*Demonstração:*

Construa um ângulo  $\widehat{BAC}$  agudo de medida α. Vamos supor que não exista reta perpendicular a  $\overrightarrow{AC}$  e que não intersekte  $\overrightarrow{AB}$ . Marque  $C_1$  em  $\overrightarrow{AC}$ .

Tome  $B_1$  intersecção da perpendicular de  $\overrightarrow{AC}$  com  $\overrightarrow{AB}$ . A soma dos ângulos do triângulo  $AB_1C_1$  é  $180^\circ - \epsilon$ . Tomemos um ponto  $C_2$  em  $\overrightarrow{AC}$ , fora de  $AC_1$ , tal que  $AC_2 = 2 \cdot AC_1$ , e considere o ponto  $B_2$  onde a perpendicular a  $\overrightarrow{AC}$  corta  $\overrightarrow{AB}$ , conforme a Figura 6.38.

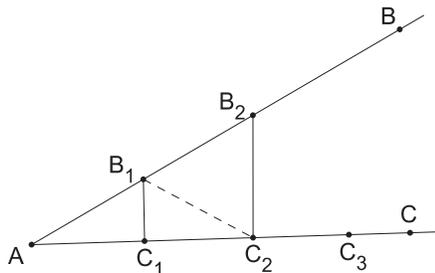


Figura 6.38: Apoio para a demonstração de que a Função Ângulo de Paralelismo é sobrejetiva.

Os triângulos  $AB_1C_1$  e  $C_2B_1C_1$  são congruentes pelo caso LAL. Continuando temos que a soma dos ângulos do triângulo  $AB_2C_2$  é menor que  $180^\circ - 2\epsilon$ . Repetindo-se indutivamente este argumento, chegamos

a triângulos com soma dos ângulos igual a  $180^\circ - n\alpha$ . Tomando  $n$  suficientemente grande, obtem-se um triângulo cuja soma de ângulos é negativa, o que é um absurdo. Logo existe uma reta perpendicular a  $\overrightarrow{AC}$  que não intersecta  $\overrightarrow{AB}$ .

Existem retas perpendiculares a  $\overrightarrow{AC}$  que intersectam  $\overrightarrow{AB}$  e as que não intersectam  $\overrightarrow{AB}$  e existe exatamente uma reta  $m$  separando estas duas classes.

Mostraremos que  $m$  é paralela a  $\overrightarrow{AB}$ , conforme a Figura 6.39.

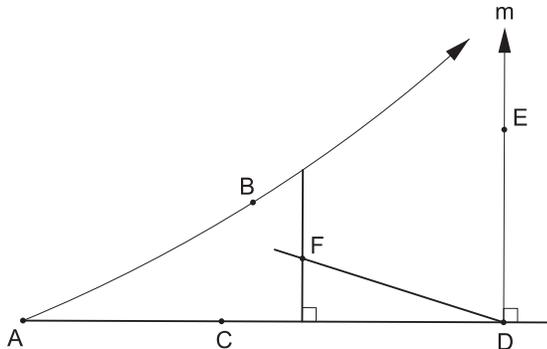


Figura 6.39: Apoio para a demonstração de que a Função Ângulo de Paralelismo é sobrejetiva.

Seja  $D$  o ponto onde  $m$  corta  $\overrightarrow{AC}$  e  $E$  um ponto de  $m$ . Considere uma semi-reta qualquer  $\overrightarrow{DF}$  que divida o ângulo  $\widehat{ADE}$ . Afirmamos que  $\overrightarrow{DF}$  corta  $\overrightarrow{AB}$ . Se  $\overrightarrow{DF}$  não intersectasse  $\overrightarrow{AB}$ ,  $F$  pertenceria a uma das retas perpendiculares a  $\overrightarrow{AC}$  que intersectam  $\overrightarrow{AB}$ . Logo, pelo Axioma de Pash deve intersectar  $\overrightarrow{AB}$ .

Mas, se qualquer semi-reta que divide o ângulo  $\widehat{ADE}$  intersecta  $\overrightarrow{AB}$ , então  $\overrightarrow{DE}$  é paralela a  $\overrightarrow{AB}$ . Portanto, o comprimento  $h$  do segmento  $AD$  tem  $\alpha$  como ângulo de paralelismo.  $\square$

**Proposição 6.7.3** *A função ângulo de paralelismo é contínua.*

*Demonstração:*

Seja  $h_0 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ . Mostremos que  $\Theta$  é contínua em  $h_0$ . Façamos  $\Theta(h_0) = \alpha_0$ . Assim, devemos mostrar que:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } |h - h_0| < \delta \Rightarrow |\Theta(h) - \Theta(h_0)| = |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon, \quad (1)$$

sendo  $\Theta(h) = \alpha$ .

Tomemos  $\varepsilon > 0$ . Seja  $\alpha' > \alpha_0$ ;  $\alpha' \in ]0, \pi/2[$ ; tal que  $\alpha' - \alpha_0 < \varepsilon$ . Como  $\Theta$  é sobrejetiva, temos a existência de  $h'$  tal que  $\Theta(h') = \alpha'$ . Além disso, como  $\Theta$  é decrescente, temos também  $h' < h_0$ . Façamos  $h_0 - h' = \delta' > 0$ . Assim:

$$h' < h < h_0 \Rightarrow \alpha' > \alpha > \alpha_0,$$

sendo  $\Theta(h) = \alpha$ , ou seja,

$$|h - h_0| < |h' - h_0| = \delta' \Rightarrow |\alpha - \alpha_0| < |\alpha' - \alpha_0| < \varepsilon.$$

De modo análogo, seja  $\alpha'' < \alpha_0$ ;  $\alpha'' \in ]0, \pi/2[$ ; tal que  $\alpha_0 - \alpha'' < \varepsilon$ . Como  $\Theta$  é sobrejetiva, temos a existência de  $h''$  tal que  $\Theta(h'') = \alpha''$ . Além disso, como  $\Theta$  é decrescente, temos também  $h'' > h_0$ . Façamos  $h'' - h_0 = \delta'' > 0$ . Assim:

$$h_0 < h < h'' \Rightarrow \alpha_0 > \alpha > \alpha'',$$

sendo  $\Theta(h) = \alpha$ , ou seja,

$$|h - h_0| < |h'' - h_0| = \delta'' \Rightarrow |\alpha - \alpha_0| < |\alpha'' - \alpha_0| < \varepsilon.$$

Tomando  $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$  temos (1) satisfeita.

Como  $h_0$  é arbitrário, temos que  $\Theta$  é contínua.  $\square$

## 6.8 Extensão da Função Ângulo de Paralelismo

Podemos estender o domínio da função ângulo de paralelismo  $\Theta$  ao conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  do modo seguinte.

Definamos a função  $\theta$  tal que, para  $h > 0$ :  $\theta(h) = \Theta(h)$ ,  $\theta(0) = \pi/2$  e  $\theta(-h) = \pi - \Theta(h)$ . Assim, a chamada **função ângulo de paralelismo estendida**  $\theta$  é dada por:

$$\theta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \theta(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x > 0 \\ \pi/2, & \text{se } x = 0 \\ \pi - \alpha, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sendo  $\alpha$  a medida do ângulo de paralelismo  $\hat{P}$  do triângulo retângulo generalizado  $PQ\Omega$  relativo à altura  $PQ$  de medida  $h$ , conforme a Figura 6.40.

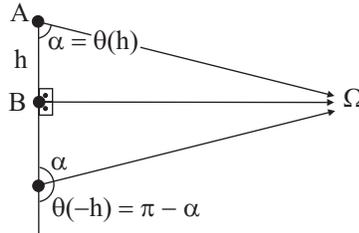


Figura 6.40: *Extensão da Função Ângulo de Paralelismo.*

Observemos que o fato de  $\Theta$  ser contínua implica em  $\theta$  ser contínua em  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

Também somos induzidos, pela representação geométrica de  $\theta$  dada acima, a considerar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2}$ . Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\pi - \theta(x)) \\ &= \pi - \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

somos levados a crer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{\pi}{2} = \theta(0)$ , ou seja, que  $\theta$  seja contínua em 0 e, portanto, contínua em  $\mathbb{R}$ .

No próximo capítulo iremos deduzir uma expressão analítica para  $\theta$  onde poderemos constatar que  $\theta$  é contínua, decrescente e bijetora quando restringimos o contra-domínio ao intervalo aberto  $]0, \pi[ \subset \mathbb{R}$ .

## 6.9 Quadriláteros Especiais

Um quadrilátero convexo  $ABCD$  é dito **quadrilátero de Saccheri** de **base**  $AB$ , **topo**  $DC$  e **laterais**  $AD$  e  $BC$  quando os lados laterais são congruentes e perpendiculares ao lado base, ou seja,  $AD \equiv BC$ ,  $AD \perp AB$  e  $BC \perp AB$ . Veja a Figura 6.41.

**Proposição 6.9.1** *O segmento ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri  $ABCD$  é perpendicular a esses lados. Além disso, os ângulos do topo  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são congruentes.*

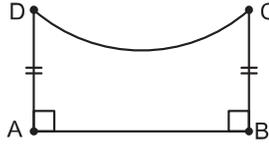


Figura 6.41: Quadrilátero de Saccheri.

*Demonstração:*

Sejam M e N pontos médios do topo e da base, conforme a Figura 6.42.

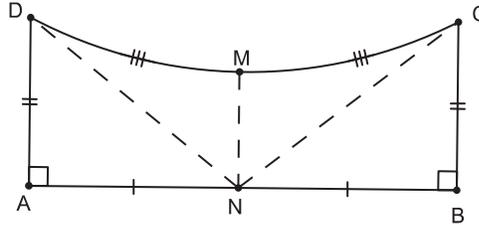


Figura 6.42: Apoio para a demonstração de que o segmento que une os pontos médios do topo e da base de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular a esses lados.

Pelo caso LAL:

$$ADN \equiv BCN \implies DN \equiv NC.$$

Pelo caso LLL:

$$DNM \equiv CNM \implies NM \equiv DC.$$

Como

$$A\hat{N}D \equiv B\hat{N}C \text{ e } D\hat{N}M \equiv C\hat{N}M \implies MM \perp AB.$$

Finalmente,

$$A\hat{D}N \equiv B\hat{C}N \text{ e } N\hat{D}M \equiv N\hat{C}M \implies \hat{D} \equiv \hat{C}.$$

□

**Proposição 6.9.2** A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas hiperparalelas.

*Demonstração:*

Consideremos M e N conforme Proposição 6.9.1, observe a Figura 6.43. Se  $\overleftrightarrow{DC}$  fosse paralela ou concorrente com  $\overleftrightarrow{AB}$ , pela Proposição 6.1.3, deveríamos ter  $N\hat{M}C$  agudo, o que contradiz a Proposição 6.9.1.

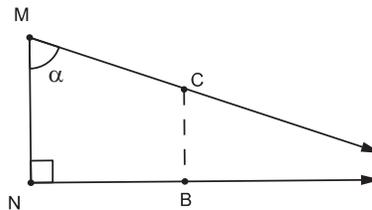


Figura 6.43: Apoio para a demonstração de que o topo e da base de um quadrilátero de Saccheri estão em retas hiperparalelas.

□

**Proposição 6.9.3** *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.*

*Demonstração:*

Pela Proposição 6.9.2,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{B\Omega}$  são hiperparalelas (Figura 6.44).

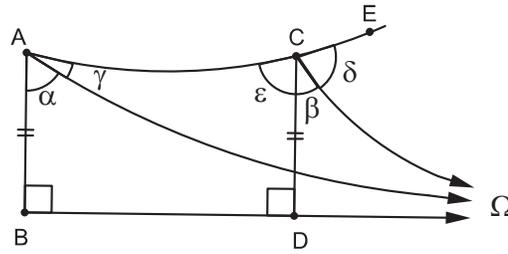


Figura 6.44: Apoio para a demonstração de que os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.

Logo,  $\overleftrightarrow{A\Omega}$  divide o ângulo  $\widehat{BAC}$ .

Analogamente,  $\overleftrightarrow{C\Omega}$  divide o ângulo  $\widehat{DCE}$ .

Temos

$$\alpha = \theta(AB) = \theta(CD) = \beta.$$

Temos

$$\delta > \gamma \implies \delta + \beta > \gamma + \beta = \gamma + \alpha = \varepsilon,$$

ou seja,

$$\delta + \beta > \varepsilon. \quad (1)$$

Mas

$$\delta + \beta + \varepsilon = 180^\circ \stackrel{(1)}{\implies} \varepsilon + \varepsilon, 180^\circ \implies \varepsilon < 90^\circ,$$

como queríamos.

Outra demonstração:

Pela primeira Proposição 3.2.1 de Legendre temos que a soma dos ângulos internos dos triângulos ABD e ADC é menor ou igual a  $360^\circ$ .

Se um desses triângulos possuísse soma dos ângulos internos igual a  $180^\circ$ , pela Proposição 3.2.2 de Legendre teríamos que todos os triângulos possuiriam soma dos ângulos internos igual a  $180^\circ$ , o que implicaria no 5º Postulado, que é contrário ao postulado de Lobachewsky. Logo, ABD e ADC possuem cada um soma de ângulos internos menor que  $180^\circ$ . Assim,  $\widehat{D} + \widehat{C} < 180^\circ \implies \widehat{D} < 90^\circ$ .  $\square$

Dizemos que dois Quadriláteros de Saccheri ABCD e A'B'C'D' com bases AB e A'B' e lados AD, BC  $\perp$  AB e A'D', B'C'  $\perp$  A'B', respectivamente, são **congruentes** quando  $AB \equiv A'B'$  e  $AD \equiv A'D'$ .

Um quadrilátero convexo é dito **quadrilátero de Lambert** quando possuir três ângulos internos retos, conforme a Figura 6.45.

**Proposição 6.9.4** *O ângulo interno não conhecido de um quadrilátero de Lambert é agudo.*

*Demonstração:*

Seja ABCD um quadrilátero de Lambert com  $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} = 90^\circ$ .

Tomemos  $E \in \overleftrightarrow{AB}$  e  $F \in \overleftrightarrow{CD}$  de tal modo que  $EA \equiv AB$  e  $FC \equiv CD$ , conforme a Figura 6.46.

Por congruência de triângulos podemos mostrar facilmente que  $\widehat{E} = 90^\circ$  e  $FE \equiv DB$ , ou seja, EBFD é um quadrilátero de Saccheri. Pela Proposição 6.9.3, temos que  $\widehat{D} < 90^\circ$ , como queríamos.  $\square$

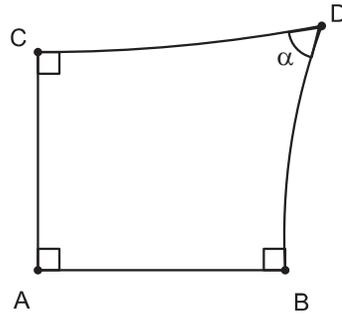


Figura 6.45: *Quadrilátero de Lambert.*

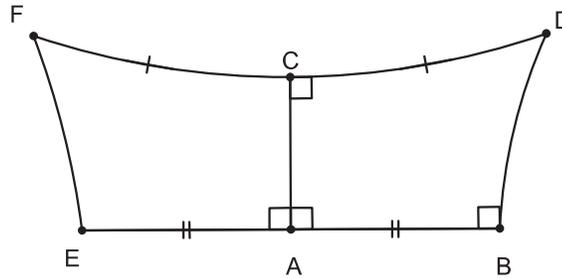


Figura 6.46: *Apoio para a demonstração de que o ângulo desconhecido de um quadrilátero de Lambert é agudo.*

**Proposição 6.9.5** *Seja ABCD um quadrilátero convexo com base AB e laterais AD e BC perpendiculares à base, ou seja,  $\widehat{A} \equiv \widehat{B} = \pi/2$ . Então,*

$$\widehat{C} < \widehat{D} \iff AD < BC.$$

*Demonstração:*

(1)  $\widehat{C} < \widehat{D} \implies AD < CD$ . Veja na Figura 6.47.

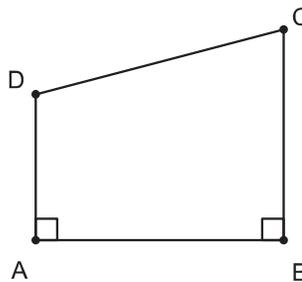


Figura 6.47: *Apoio para demonstração: relacionando ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico com dois ângulos retos.*

1º) Se  $AD \equiv CB$ , ABCD seria de Saccheri. Pela Proposição 6.9.1 teríamos  $\widehat{C} \equiv \widehat{D}$ .

2º) Se  $AD > CB$ . Ver a Figura 6.48.

Seja  $C' \in AD$  tal que  $AC' \equiv BC$ .

Temos  $\alpha = \delta$  pela Proposição 6.9.1.

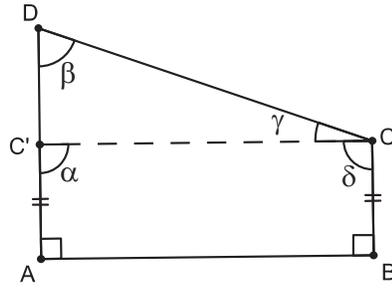


Figura 6.48: Apoio para demonstração: relacionando ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico com dois ângulos retos.

Temos  $\alpha > \beta$  pelo Teorema do Ângulo Externo.

Logo,

$$\delta > \beta \implies \delta + \gamma > \beta \implies \widehat{C} > \widehat{C'}.$$

Contradição!

(2)  $AD < CB \implies \widehat{C} < \widehat{D}$ .

Seja  $D' \in CB$  tal que  $AD \equiv BD'$ , conforme a Figura 6.49.

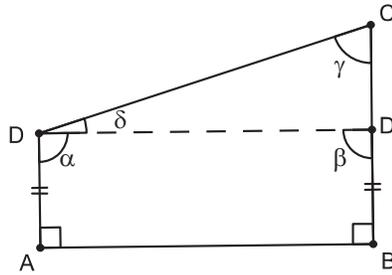


Figura 6.49: Apoio para demonstração: relacionando ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico com dois ângulos retos.

Pela Proposição 6.9.1 temos  $\alpha = \beta$ .

Pelo Teorema do Ângulo Externo temos

$$\beta > \gamma \implies \alpha > \gamma \implies \alpha + \delta > \gamma \implies \widehat{D} > \widehat{C},$$

como queríamos. □

## 6.10 A Soma dos Ângulos Internos de Triângulos e Polígonos

**Proposição 6.10.1** A soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário é menor do que dois retos.

*Demonstração:*

Considerando-se os Axiomas de Hilbert excetuando-se o Axioma das Paralelas de Euclides (Axioma de Playfair), vimos que é possível provar as Proposições 3.2.1 e 3.2.2 de Legendre.

Suponhamos que exista um triângulo ordinário cuja soma de ângulos internos seja igual a dois retos.

Pela Proposição 3.2.2 concluímos que todos os triângulos ordinários possuirão soma de ângulos internos igual a dois retos, que é precisamente o equivalente **P5.2** ao Axioma das Paralelas de Euclides provado

na Seção 3.2. Assim, chegamos a uma contradição com o fato de que tal axioma não vale na Geometria Hiperbólica.

Conclusão: todo triângulo ordinário possui soma de ângulos internos menor do que dois retos.  $\square$

### Outra demonstração (de Lobachewsky).

1) Mostremos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo retângulo ordinário é menor do que dois ângulos retos.

Consideremos o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em C, conforme a Figura 6.50.

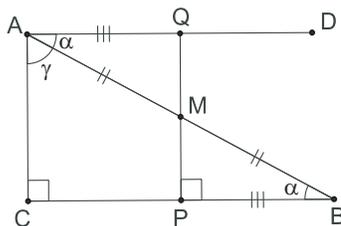


Figura 6.50: Apoio para a demonstração de Lobachewsky de que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que dois retos.

Tomemos P como sendo o pé da perpendicular baixada de M a CB, sendo M o ponto médio de AB.

Seja D tal que  $\widehat{DAB} = \alpha = \widehat{ABC}$ . Seja  $Q \in \overleftrightarrow{AD}$  tal que  $AQ \equiv PB$ . Logo,  $AQM \equiv BPM$  (caso LAL). Assim,  $MQ \perp \overleftrightarrow{AD}$  e P, M e Q são colineares. Deste modo, AQCP é quadrilátero de Lambert, ou seja,  $\alpha + \gamma < 90^\circ$ . Logo,  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$ .

2) Mostraremos agora que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ordinário é menor do que dois ângulos retos.

Consideremos um triângulo ordinário ABC qualquer e tracemos a altura relativa ao vértice de maior ângulo (que vamos supor ser o vértice A). Assim dividimos o triângulo ABC em dois triângulos retângulos ordinários ABD e ACD, conforme a Figura 6.51.

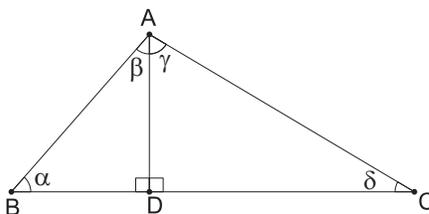


Figura 6.51: Apoio para a demonstração de Lobachewsky de que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que dois retos.

Logo,  $\alpha + \beta < 90^\circ$  e  $\gamma + \delta < 90^\circ$  (pelo item 1). Assim,  $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 180^\circ$ , como queríamos.  $\square$

**Corolário 6.10.1** A soma dos ângulos internos de um polígono convexo ordinário de  $n$  lados possui medida menor do que  $(n - 2)\pi$ .

*Demonstração:*

A partir de um dos vértices de um polígono convexo de  $n$  lados podemos traçar as diagonais<sup>1</sup>, dividindo assim o polígono em  $n - 2$  triângulos  $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots, S_{T_{(n-2)}}$  (resultado da Geometria Euclidiana), conforme a Figura 6.52.

<sup>1</sup>Diagonais em polígonos convexos ordinários são segmentos que ligam dois vértices não adjacentes, e em polígonos convexos generalizados podem ser retas ou semi-retas que atingem os vértices ideais.

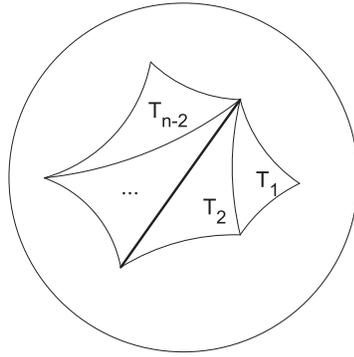


Figura 6.52: Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo ordinário de  $n$  lados é menor do que  $(n - 2)\pi$ .

Da Proposição 6.10.1 temos que os triângulos ordinários têm soma dos ângulos internos menor que dois ângulos retos ( $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots, S_{T_{(n-2)}} < \pi$ ). Logo, a soma dos ângulos de todos os  $(n - 2)$  triângulos é dada pela soma  $S_{T_1} + S_{T_2} + \dots + S_{T_{(n-2)}} < \pi + \pi + \dots + \pi = (n - 2)\pi$ .  $\square$

**Proposição 6.10.2** A soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado é menor do que dois retos.

*Demonstração:*

Podemos dividir em três casos:

1º caso: triângulo generalizado  $AB\Omega$ .

Baixemos a altura relativa ao vértice  $A$ , e chamemos de  $C$  o pé da altura sobre o lado  $B\Omega$ , obtendo assim dois triângulos retângulos. Consideremos o triângulo retângulo ordinário  $ABC$  e o triângulo retângulo generalizado  $AC\Omega$ , conforme a Figura 6.53.

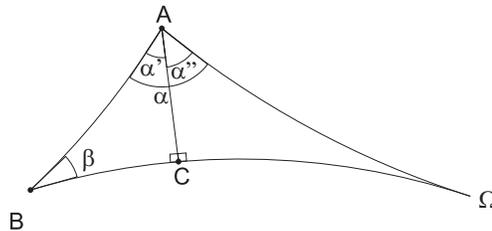


Figura 6.53: Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado com dois vértices ideais é menor do que dois retos.

Temos que  $\alpha' + \beta < 90^\circ$  (pelo item 1),  $\alpha'' < 90^\circ$  pela Proposição 6.1.3 (o ângulo de paralelismo é agudo) e  $\hat{\Omega}$  é nulo por definição. Logo, temos que  $\alpha' + \alpha'' + \beta < 180^\circ$  e como  $\alpha' + \alpha'' = \alpha$  concluímos que  $\alpha + \beta < 180^\circ$ .

2º caso: triângulo generalizado  $A\Omega_1\Omega_2$ .

Por definição os ângulos em  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são nulos. Como as semi-retas  $\overrightarrow{A\Omega_1}$  e  $\overrightarrow{A\Omega_2}$  são paralelas ao lado  $\overleftrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$  à esquerda e à direita respectivamente basta-nos baixar a perpendicular de  $\overleftrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$  pelo ponto  $A$  para podemos fazer uso da Proposição 6.1.3. Sabendo que os ângulos de paralelismo são agudos podemos concluir que  $\alpha < 180^\circ$ . Veja a Figura 6.54.

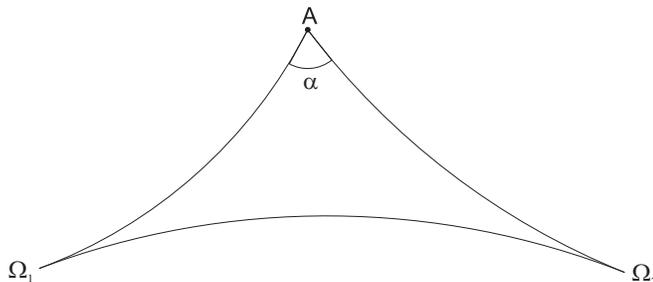


Figura 6.54: Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado com um vértice ideal é menor do que dois retos.

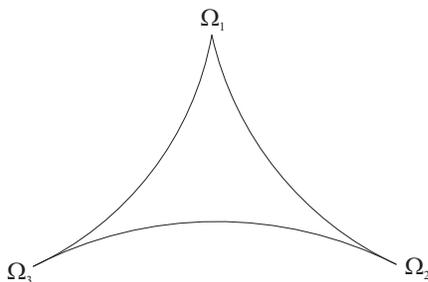


Figura 6.55: Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado com três vértices ideais é menor do que dois retos.

3º caso: triângulo generalizado  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ .

É imediato que a soma dos ângulos do triângulo é menor que  $180^\circ$  pois por definição os três ângulos são nulos, o que resulta em soma nula (Figura 6.55).  $\square$

**Corolário 6.10.2** *A soma dos ângulos internos de um polígono convexo generalizado de  $n$  lados possui medida menor do que  $(n - 2)\pi$ .*

*Demonstração:*

Um polígono convexo generalizado pode ser dividido em triângulos ordinários ou generalizados, conforme a Figura 6.56. A partir de um dos vértices seja ele ordinário ou ideal, de um polígono convexo de  $n$  lados podemos traçar as diagonais dividindo assim o polígono em  $n - 2$  triângulos  $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots, S_{T_{(n-2)}}$ . Das Proposições 6.10.1 e 6.10.2 temos que os triângulos tem soma dos ângulos internos menor que dois ângulos retos ( $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots, S_{T_{(n-2)}} < \pi$ ). Logo a soma dos ângulos de todos os  $(n - 2)$  triângulos é dada pela soma  $S_{T_1} + S_{T_2} + \dots + S_{T_{(n-2)}} < \pi + \pi + \dots + \pi = (n - 2)\pi$ . Se um polígono tem todos os seus vértices ideais terá soma dos ângulos internos nula.  $\square$

## 6.11 O Caso de Congruência AAA

**Proposição 6.11.1** *(Caso de Congruência AAA da Geometria Hiperbólica) Se  $ABC$  e  $A'B'C'$  são triângulos ordinários tais que  $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ ,  $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$  e  $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ , então  $ABC \equiv A'B'C'$ .*

*Demonstração:*

Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  tais triângulos.

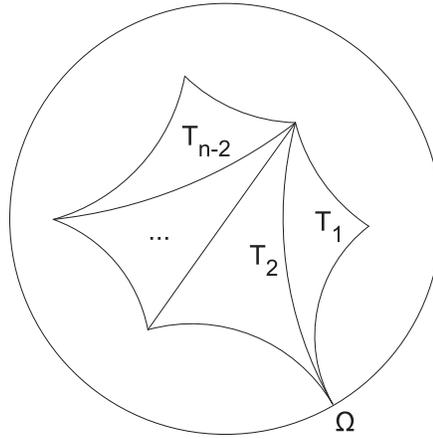


Figura 6.56: Apoio para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo generalizado de  $n$  lados é menor do que  $(n - 2)\pi$ .

Suponhamos que  $AB > A'B'$ . Sejam  $D \in AB$ ,  $E \in \overleftrightarrow{AC}$  tais que  $AD \equiv A'B'$  e  $AE \equiv A'C'$ .

1º caso)  $C = E$ . Veja a Figura 6.57.

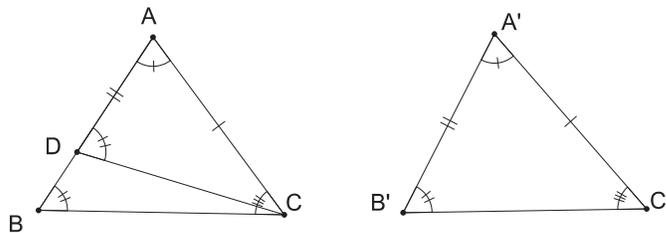


Figura 6.57: Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.

Pelo caso LAL temos  $ADE \equiv A'B'C'$ . Logo,  $\widehat{ADE} \equiv \widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ABC}$ . Contradição com o Teorema do Ângulo Externo.

2º caso)  $E < AC$ . Veja a Figura 6.58.

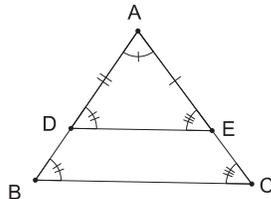


Figura 6.58: Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.

Pelo caso LAL temos  $ADE \equiv A'B'C' \implies \widehat{ADE} \equiv \widehat{A'B'C'}$  e  $\widehat{AED} \equiv \widehat{A'C'B'}$ .

Logo, o quadrilátero BDEC possui soma de ângulos internos igual a  $360^\circ$ . Contradição com o Corolário 6.10.1.

3º caso)  $AE > AC$ .

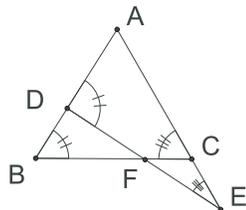


Figura 6.59: Apoio para a demonstração do caso de congruência “ângulo-ângulo-ângulo” para triângulos ordinários.

Pelo caso LAL temos  $ADE \equiv A'B'C'$ . Assim, os triângulos BDF e FCE na Figura 6.59 possuem um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente. Contradição com o Teorema do Ângulo Externo. Desta forma,  $AB \equiv A'B'$  e, pelo caso LAL temos  $ABC \equiv A'B'C'$ .  $\square$

## 6.12 Variação da Distância entre Duas Retas

**Proposição 6.12.1** *Duas retas hiperparalelas possuem uma, e somente uma, reta perpendicular em comum. (Figura 6.60)*

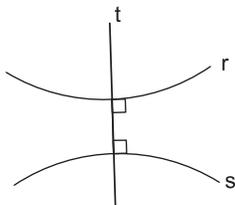


Figura 6.60: Existe exatamente uma reta perpendicular a duas retas hiperparalelas.

*Demonstração:*

### Existência:

Sejam  $m$  e  $n$  um par de retas que não se intersectam. Dados dois pontos  $A$  e  $B$  em  $n$  trace  $AC$  e  $BD$  perpendiculares a  $m$ . Se  $AC = BD$ ,  $ACDB$  é um quadrilátero de Saccheri. Logo, temos que  $m$  e  $n$  possuem uma perpendicular comum.

Se  $AC$  não for congruente a  $BD$ , podemos supor sem perda de generalidade, que  $AC < BD$ . Seja  $\Omega$  o ponto ideal da semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ . Marque  $E \in AC$  tal que  $EC \equiv BD$ , e marque um ponto qualquer  $H$  na semi-reta  $\overrightarrow{CD}$  fora do segmento  $CD$ . Construa o ângulo  $\widehat{C\hat{E}F} \equiv \widehat{D\hat{B}\Omega}$  com o ponto  $F$  no quadrilátero  $ACDB$ , conforme a Figura 6.61.

Vamos considerar que a semi-reta  $\overrightarrow{EF}$  intersecta  $n$ . Para isto, considere semi-retas  $\overrightarrow{C\hat{\Omega}}$  e  $\overrightarrow{D\hat{\Omega}}$  que ficam respectivamente dentro dos ângulos  $\widehat{A\hat{C}H}$  e  $\widehat{B\hat{D}H}$ . Desde que  $\widehat{H\hat{D}\Omega} > \widehat{H\hat{C}\Omega}$  (Teorema do Ângulo Externo), podemos traçar uma linha  $CJ$ , penetrando no ângulo  $\widehat{A\hat{C}\Omega}$ , tal que  $\widehat{H\hat{C}J} \equiv \widehat{H\hat{D}\Omega}$ . Tal reta intersectará a reta  $n$  em um ponto, o qual podemos, por simplicidade, supor que é o ponto  $J$ .

O triângulo generalizado  $BD\Omega$  possui os lados  $B\Omega$  e  $D\Omega$  paralelos e a figura formada pelas semi-retas  $EF$ ,  $CJ$  e o lado comum  $EC$ , é tal que  $EC \equiv BD$ ,  $\widehat{F\hat{E}C} \equiv \widehat{\Omega\hat{B}D}$  e  $\widehat{J\hat{C}E} \equiv \widehat{\Omega\hat{D}B}$ . Logo, tal figura é congruente ao triângulo generalizado  $BD\Omega$  e indicaremos por  $EC\Omega'$ . Por conseqüência, a semi-reta  $\overrightarrow{EF}$  é paralela à semi-reta  $CJ$ . Conseqüentemente,  $\overrightarrow{EF}$  intersecta a reta  $n$  em um ponto  $K$  situado no intervalo  $AJ$ .

Trace o segmento  $KL$  perpendicular à reta  $m$ . Na semi-reta  $\overrightarrow{B\hat{\Omega}}$ , marque um ponto  $M$  tal que  $MB \equiv EK$ . Na semi-reta  $\overrightarrow{D\hat{H}}$ , marque um ponto  $N$  tal que  $ND \equiv CL$ . Trace  $MN$ . Usando congruência de

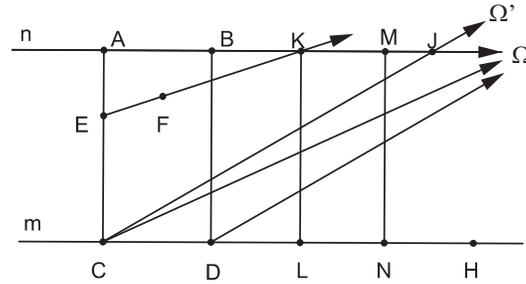


Figura 6.61: Apoio para a demonstração de que existe exatamente uma reta perpendicular a duas retas hiperparalelas.

triângulos, verificamos que os quadriláteros EKLC e BMND são congruentes. Conseqüentemente, MN é perpendicular a m e  $MN \equiv KL$ . Portanto, KLMN é um quadrilátero de Saccheri, e o resultado se segue.

### Unicidade:

Se existissem duas retas perpendiculares às duas retas, teríamos um quadrilátero com quatro ângulos retos, o que, como vimos, é impossível. Isto conclui a demonstração.  $\square$

### Observações.

(i) Duas retas concorrentes não possuem uma reta perpendicular em comum. Caso contrário, teríamos um triângulo ordinário com dois ângulos internos retos ou um ângulo raso com medida diferente de  $\pi$  radianos.

(ii) Duas retas paralelas não possuem uma reta perpendicular em comum. Caso contrário, teríamos um triângulo generalizado com dois ângulos internos retos. Veja a Figura 6.62.

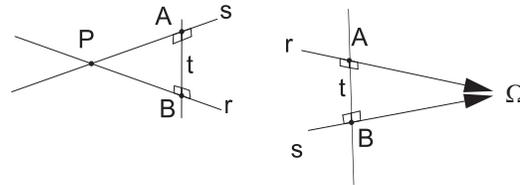


Figura 6.62: Não existe reta perpendicular a duas retas paralelas ou concorrentes.

A **distância** de um ponto P a uma reta r é o comprimento do segmento PQ sendo Q o pé da perpendicular baixada de P a r, conforme a Figura 6.63. Indicaremos a distância de P a r por  $d(P, r)$ .

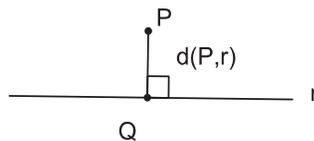


Figura 6.63: Distância de ponto a reta.

**Proposição 6.12.2** *Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O. Seja  $P \in m$ . A distância de P a n cresce quando P se afasta de O, tornando-se arbitrariamente grande, e decresce quando P se aproxima de O tornando-se arbitrariamente pequena.*

*Demonstração:*

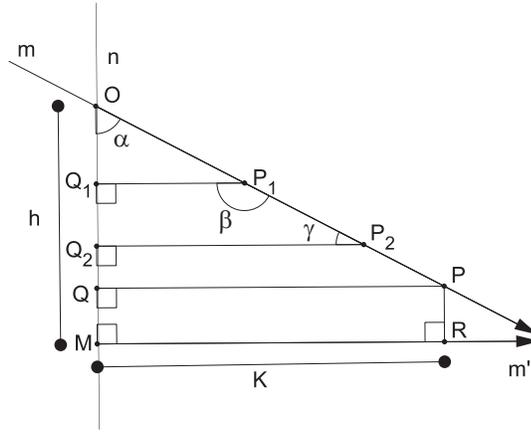


Figura 6.64: Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas concorrentes.

Sejam  $m$  e  $n$  duas retas concorrentes e  $\alpha$  o ângulo entre elas, conforme a Figura 6.64.

Se  $\alpha = 90^\circ$ , o resultado é óbvio.

Se  $\alpha < 90^\circ$ , considere  $P_1, P_2 \in m$  tais que  $P_1 \in OP_2$  e  $Q_1, Q_2 \in n$  tais que  $P_1Q_1 \perp n$ .

Temos que  $\beta > \gamma$  pois  $\gamma < 90^\circ$  (triângulo  $OQ_1P_1$ ) e  $\beta > 90^\circ$  (Teorema do Ângulo Externo).

Logo, pela Proposição 6.9.5 temos:

$$P_1Q_1 < P_2Q_2 \Rightarrow d(P_1, n) < d(P_2, n).$$

Isto mostra que:

$$d(P, n) \begin{cases} \text{cresce quando } P \text{ se afasta de } O \\ \text{decrece quando } P \text{ se aproxima de } O \end{cases}$$

Resta mostrar a segunda parte:

Seja  $K > 0$ . Pela função ângulo de paralelismo,  $\exists h > 0$  tal que  $\theta(h) = \alpha$ .

Seja  $M \in n$  tal que  $OM = h$ . Tomemos  $m'$  perpendicular a  $n$  por  $M$ .

Logo,  $m' \parallel m$  (pois  $\theta(h) = \alpha$ ).

Seja  $R \in m'$  tal que  $MR = K$ . Seja  $P \in m$  tal que  $PR \perp m'$ . Seja  $Q \in n$  tal que  $PQ \perp n$ . Temos que  $MRPQ$  é um quadrilátero de Lambert e, devido à Proposição 6.9.5 temos

$$MR < PQ \Rightarrow K < d(P, n),$$

ou seja,  $d(P, n)$  pode tornar-se arbitrariamente grande.

Agora, seja  $P \in m$  tal que  $OP = K$ , conforme a Figura 6.65.

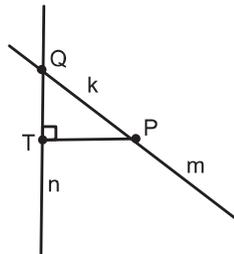


Figura 6.65: Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas concorrentes.

Temos  $OP > TP$  (maior lado oposto ao maior ângulo).

Logo,  $d(P, n) < K$ , ou seja,  $d(P, n)$  pode tornar-se arbitrariamente pequena.  $\square$

**Proposição 6.12.3** *Sejam  $m$  e  $n$  retas paralelas com ponto ideal  $\Omega$  em comum. Seja  $P \in m$ . A distância de  $P$  a  $n$  decresce quando  $P$  se move no sentido de  $\Omega$ , tornando-se arbitrariamente pequena. A distância de  $P$  a  $n$  cresce quando  $P$  se move no sentido oposto de  $\Omega$  tornando-se arbitrariamente grande.*

*Demonstração:*

Sejam  $m$  e  $n$  duas retas paralelas e  $P_1, P_2 \in m$  tais que  $P_2 \in P_1\Omega$ . Sejam  $Q_1, Q_2 \in n$  tais que  $P_1Q_1 \perp n$  e  $P_2Q_2 \perp n$ , conforme a Figura 6.66.

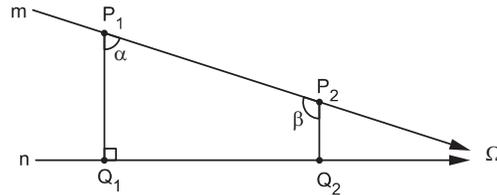


Figura 6.66: Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas paralelas.

Temos que  $\alpha < 90^\circ < \beta$ . Logo, pela Proposição 6.9.5, temos

$$P_1Q_1 > P_2Q_2 \Rightarrow d(P_1, n) > d(P_2, n),$$

ou seja:

$$d(P, n) \begin{cases} \text{decresce quando } P \text{ se move no sentido de } \Omega \\ \text{cresce quando } P \text{ se move no sentido oposto} \end{cases}$$

Quanto à segunda parte:

Seja  $K > 0$ . Seja  $P \in m$  e  $Q \in n$  tais que  $PQ \perp n$ .

Se  $d(P, n) = K$ , não há nada a fazer.

Se  $d(P, n) > K$ , mostremos que existe  $P' \in m$  tal que  $d(P', n) = K$ .

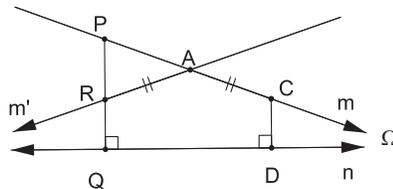


Figura 6.67: Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas paralelas.

Seja  $R \in PQ$  tal que  $d(R, n) = K$ , conforme a Figura 6.67.

Seja  $m'$  reta paralela a  $n$  passando por  $R$  no sentido oposto de  $\Omega$ .

Seja  $\{A\} = m' \cap m$  ( $m'$  entra em  $PQ\Omega$ ).

Seja  $c \in m$  tal que  $AR \equiv AC$  e  $D \in n$  tal que  $CD \perp n$ .

É fácil mostrar, por congruência de triângulos, que  $RQ \equiv CD$ , ou seja,  $d(C, n) = K$ , como queríamos.

Se  $d(P, n) < K$ , o raciocínio é análogo.  $\square$

**Proposição 6.12.4** *Sejam  $m$  e  $n$  retas hiperparalelas e  $MN$  o segmento perpendicular comum a  $m$  e  $n$  com  $M \in m$  e  $N \in n$ . Seja  $P \in m$ . A distância de  $P$  a  $n$  decresce quando  $P$  se aproxima de  $M$ , tornando-se igual a  $MN$  quando  $P = M$ . A distância de  $P$  a  $n$  cresce quando  $P$  se afasta de  $M$  tornando-se arbitrariamente grande.*

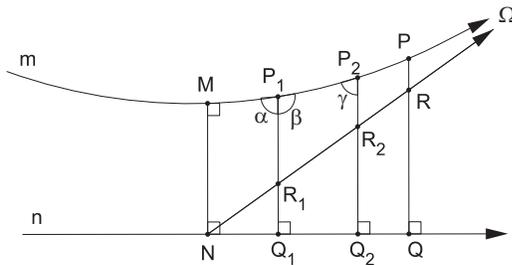


Figura 6.68: Apoio para a demonstração da propriedade de variação de distância em retas hiperparalelas.

*Demonstração:*

Consideremos a Figura 6.68.

Temos que  $MP_1Q_1N$  é quadrilátero de Lambert, assim como  $MP_2Q_2N$ . Logo,

$$\alpha, \gamma < 90^\circ \Rightarrow \beta > 90^\circ.$$

Pela Proposição 6.9.5, temos

$$P_1Q_1 < P_2Q_2 \Rightarrow d(P_1, n) < d(P_2, n).$$

Logo,

$$d(P, n) \begin{cases} \text{aumenta quando } P \text{ se afasta de } M \\ \text{diminui quando } P \text{ se aproxima de } M \end{cases}$$

Quanto à segunda parte:

Seja  $N\Omega$  paralela a  $M$ .

Pela Proposição 6.12.2,  $d(R, n)$  aumenta arbitrariamente quando  $R$  se afasta de  $N$ .

Como  $R \in PQ$  temos que  $d(P, n)$  aumenta arbitrariamente quando  $P$  se afasta de  $M$ .

Pela Proposição 6.12.2,  $d(R, n)$  tende a zero quando  $R$  se aproxima de  $N$ , sendo zero quando  $R = N$ .

Logo,  $d(P, n)$  tende a  $d(M, n)$  quando  $P$  se aproxima de  $M$ , sendo  $MN$  quando  $P = M$ .  $\square$

## 6.13 Construção Geométrica de Uma Reta Paralela a Uma Reta Dada

**Proposição 6.13.1** *Sejam  $r$  uma reta e  $B \notin r$ .*

*Trace o segmento perpendicular  $BE$  a  $r$  com  $E \in r$ .*

*Trace um segmento perpendicular  $BC$  a  $BE$ .*

*Trace o segmento perpendicular  $CD$  a  $BC$  de modo que  $D \in r$ .*

*Trace o círculo de centro  $B$  e raio  $\overline{ED}$ . Esse círculo determina um ponto  $A \in DC$ .*

*Então, a reta  $s = \overleftrightarrow{AB}$  é para a  $r$  passando por  $B$ .*

Não faremos a demonstração da Proposição 6.13.1, que pode ser encontrada no livro [2] da página 94 até a página 102.

Acompanhe os passos pela Figura 6.69.

Apresentamos aqui um roteiro para esta mesma construção de uma paralela no software NonEuclid, conforme a Figura 6.70.

Selecione a opção do modelo do disco;

Marque dois pontos  $A$  e  $B$  distintos;

Construa a reta  $r$  que passa por  $A$  e  $B$ ;

Marque um ponto  $C$  fora desta reta;

Construa a reta  $p$  perpendicular de  $r$  passando por  $C$ ;

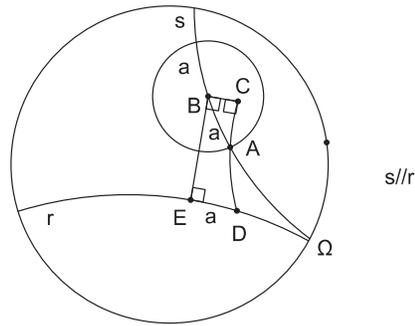


Figura 6.69: Construção de paralelas no disco de Poincaré descrita em [2].

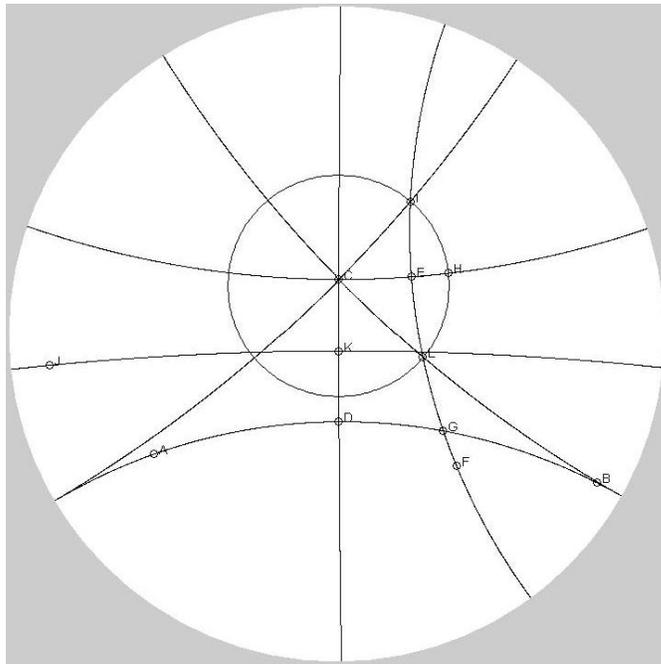


Figura 6.70: Construção exata das duas retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto, utilizando software de geometria dinâmica.

Construa a reta  $s$  perpendicular de  $p$  pelo ponto  $C$ ;  
 Marque um ponto  $E$  sobre a reta  $s$ ;  
 Conduza uma reta  $q$  perpendicular de  $s$  pelo ponto  $E$ ;  
 Determine o ponto  $G$  na intersecção das retas  $q$  e  $r$ , caso não se encontrem, mova o ponto  $E$  para obtê-lo;  
 Determine o ponto médio  $K$  entre o ponto  $C$  e a intersecção  $D$  de  $r$  e  $p$ ;  
 Trace a perpendicular  $t$  de  $p$  pelo ponto  $K$ ;  
 Reflita o ponto  $G$  pela reta  $t$  e obtenha o ponto  $H$  sobre a reta  $s$ , (este procedimento proporcionou conduzir a medida do segmento  $DG$  para  $CH$ );  
 Construa um círculo  $M$  com centro em  $C$  e raio  $CH$ ;  
 Marque as duas intersecções  $I$  e  $L$ , de  $M$  com a reta  $q$ ;  
 Determine, então, as retas ligando  $IC$  e  $CL$ ;  
 Agora divirta-se com as variações possíveis nesta construção, movendo o ponto  $C$ .

## 6.14 Horocírculos e Curvas Equidistantes

Sejam  $m$  e  $n$  retas distintas e  $P \in m$ ,  $Q \in n$ . Dizemos que  $P$  e  $Q$  são **pontos correspondentes** se o segmento  $PQ$  forma com  $m$  e  $n$  ângulos congruentes em um mesmo lado de  $PQ$ , veja na Figura 6.71. Também podemos dizer que  $P$  **corresponde** a  $Q$ .

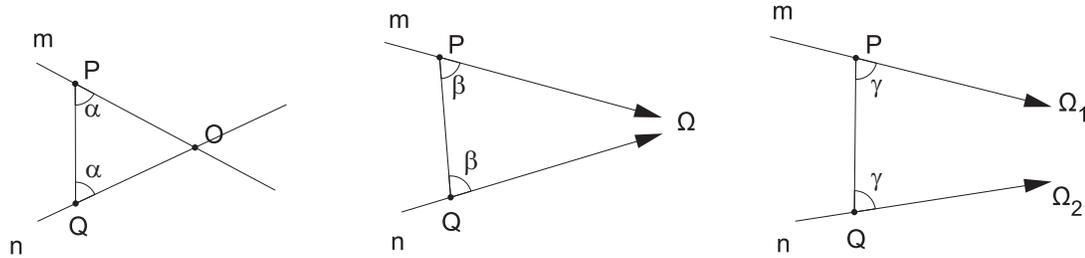


Figura 6.71: Pontos correspondentes em retas concorrentes, paralelas e hiperparalelas.

**Proposição 6.14.1** Dadas duas retas paralelas, existe um ponto ordinário equidistante dessas duas retas.

*Demonstração:*

Sejam  $r // s$ ;  $P \in r$ ,  $Q \in s$  e  $t$  reta que passa por  $P$  e  $Q$ .

Sejam  $m$  e  $n$  bissetrizes dos ângulos formados por  $r$  e  $t$  e, por  $s$  e  $t$ , conforme a Figura 6.72.

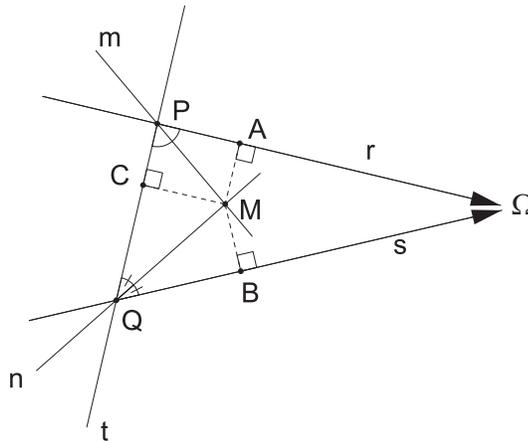


Figura 6.72: Apoio para a demonstração da existência de um ponto equidistante a duas retas paralelas.

Temos que  $MAP \equiv MCP$  e  $MCQ \equiv MBQ$ . Logo,  $MA \equiv MC \equiv MB$ , ou seja,  $M$  é equidistante de  $r$  e  $s$ .  $\square$

**Proposição 6.14.2** Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas com o ponto ideal  $\Omega$  em comum. Seja  $M$  um ponto ordinário equidistante de  $r$  e  $s$ . Então a reta  $\overleftrightarrow{M\Omega}$  é equidistante de  $r$  e  $s$ .

*Demonstração:*

Consideremos a Figura 6.73:

Por congruência de triângulos, é fácil perceber que:  $AM\Omega \equiv BM\Omega$ ,  $AMN \equiv BMN$  e  $AA'N \equiv BB'N$ , ou seja,  $A'N \equiv B'N$ .

Como  $N \in M\Omega$  é arbitrário, temos o resultado.  $\square$

A reta  $\overleftrightarrow{M\Omega}$  da Proposição 6.14.2 é chamada de **reta bissectora** das retas paralelas  $r$  e  $s$ .

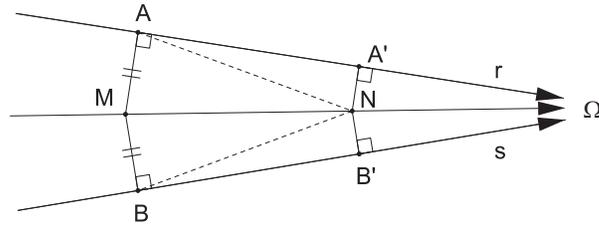


Figura 6.73: Apoio para a demonstração da existência de uma reta equidistante a duas retas paralelas.

**Proposição 6.14.3** *Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas e  $P \in r$ . Então, existe um único ponto  $Q \in s$  tal que  $P$  e  $Q$  são pontos correspondentes.*

*Demonstração:*

Seja  $b$  a reta bissectora de  $r$  e  $s$ , conforme a Figura 6.74.

Seja  $M \in b$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  a  $b$ .

Sejam  $A \in r$  e  $B \in s$  pés das perpendiculares baixadas de  $M$  a  $r$  e  $s$ .

Seja  $Q \in s$  tal que  $PA \equiv QB$ .

Assim,  $PAM \equiv QBM$  e  $PM\Omega \equiv QM\Omega$ , de onde concluímos que  $P, M$  e  $Q$  são colineares.

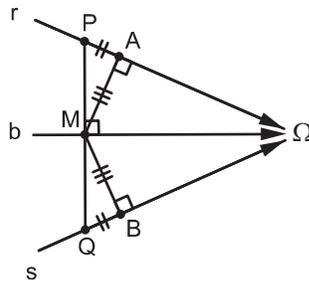


Figura 6.74: Apoio para a demonstração da unicidade de pontos correspondentes em retas paralelas.

Deste modo, é fácil ver que  $\widehat{QP\Omega} \equiv \widehat{PQ\Omega}$ , ou seja,  $P$  e  $Q$  são correspondentes.

Quanto à unicidade: Suponha que existam  $Q_1$  e  $Q_2 \in s$  correspondentes a  $P \in r$ , conforme a Figura 6.75.

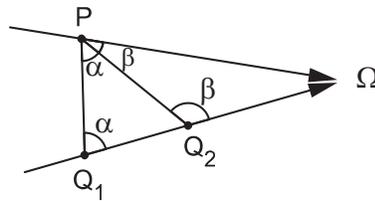


Figura 6.75: Apoio para a demonstração da unicidade de pontos correspondentes em retas paralelas.

Temos  $\gamma > \alpha$  pelo Teorema do Ângulo Externo e  $\beta < \alpha$  por construção. Contradição.

Logo,  $Q$  é único. □

**Proposição 6.14.4** *Sejam  $r, s, t$  retas paralelas distintas em um mesmo sentido e  $P \in r, Q \in s, R \in t$ . Se  $P$  corresponde a  $Q$  e  $Q$  corresponde a  $R$ , então  $P, Q$  e  $R$  são pontos não colineares.*

*Demonstração:*

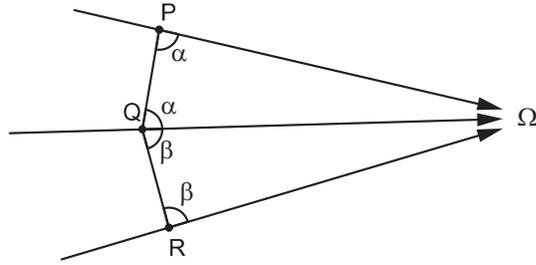


Figura 6.76: Apoio para a demonstração da não colinearidade de pontos correspondentes em três retas paralelas.

Seja a Figura 6.76.

Pelo Teorema do Ângulo Externo para triângulos generalizados, temos que  $\alpha < 90^\circ$  e  $\beta < 90^\circ$ .

Logo,  $\alpha + \beta < 180^\circ$  e P, Q, R não são colineares.  $\square$

**Proposição 6.14.5** *Sejam  $r, s, t$  retas paralelas distintas em um mesmo sentido e  $P \in r, Q \in s, R \in t$ . Se P corresponde a Q e Q corresponde a R, então P corresponde a R.*

*Demonstração:*

Considere a Figura 6.77.

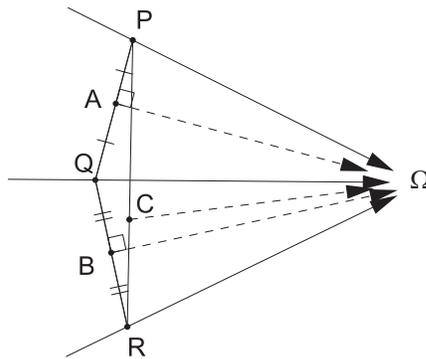


Figura 6.77: Apoio para a demonstração da transitividade de pontos correspondentes em três retas paralelas.

Pela Proposição 6.14.4, P, Q e R formam triângulo. Sejam A e B pontos médios de PQ e QR. Logo,  $A\Omega$  e  $B\Omega$  são mediatrizes de PQ e QR (congruência de triângulos). Assim, a mediatriz de PR deverá ser  $C\Omega$  (C é ponto médio de PR) pois, caso contrário, haveria um circuncentro ordinário para PQR. Contradição, pois  $A\Omega$  e  $B\Omega$  são paralelas.

Assim,  $PC\Omega$  e  $RC\Omega$  são triângulos retângulos generalizados congruentes. Logo,  $\widehat{RP}\Omega \equiv \widehat{PR}\Omega$ , ou seja, P e R são correspondentes.  $\square$

### Observações.

(i) As Proposições 6.14.1, 6.14.2, 6.14.3, 6.14.4 e 6.14.5 podem ser adaptadas para retas concorrentes. As Proposições 6.14.1, 6.14.2, 6.14.3 e 6.14.5 podem ser adaptadas (com o auxílio da Proposição 6.12.1) para retas hiperparalelas. Veja a Figura 6.78.

(ii) A Proposição 6.14.4 é falsa para retas hiperparalelas. De fato, se  $r$  e  $s$  são retas hiperparalelas e  $RS$  é o segmento perpendicular a ambas, então a reta  $t$  perpendicular a  $RS$  passando pelo ponto médio  $M$  de

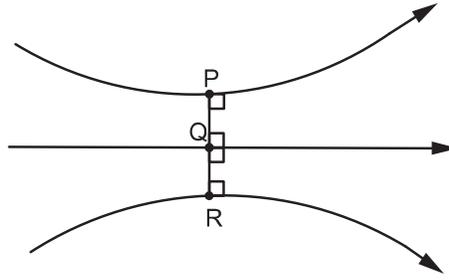


Figura 6.78: *Pode haver colinearidade entre pontos correspondentes em três retas hiperparalelas.*

RS é reta hiperparalela a r e a s. Assim, r, s, t são hiperparalelas, R e M são pontos correspondentes, M e S são pontos correspondentes e R, M, S são pontos colineares. Veja a Figura 6.78.

Sejam o feixe (conjunto) de todas as retas paralelas em um mesmo sentido com um ponto ideal  $\Omega$  em comum e P um ponto ordinário em uma reta desse feixe. Ao lugar geométrico de todos os pontos correspondentes a P nas demais retas do feixe chamamos de **horocírculo** (ou **horociclo**) de centro  $\Omega$  e raio  $P\Omega$ , conforme a Figura 6.79.

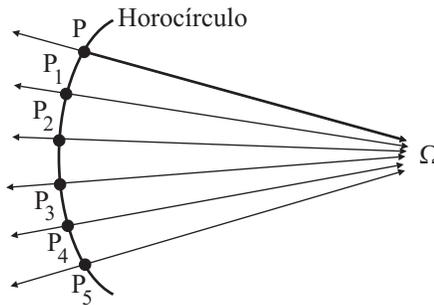


Figura 6.79: *Definindo horocírculo (ou horociclo).*

No modelo do disco de Poincaré temos as Figuras 6.80.

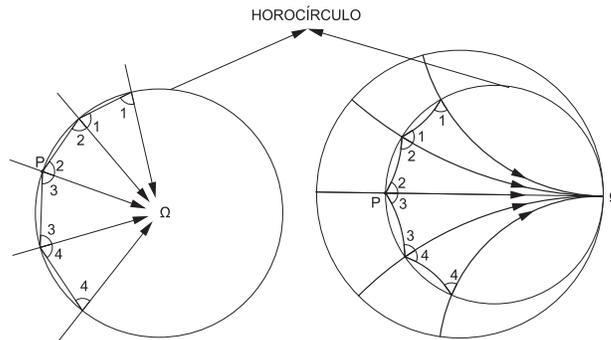


Figura 6.80: *Um horocírculo fica completamente determinado por um ponto ideal e um ponto ordinário.*

Observemos que um horocírculo fica determinado por um ponto ideal  $\Omega$  (centro) e um ponto ordinário P. Se tomarmos um círculo com centro em  $A \in P\Omega$  e raio  $AP$  e fizermos A “tender” a  $\Omega$ , então o círculo de centro A e raio  $AP$  “tende” ao horocírculo de centro  $\Omega$  e raio  $P\Omega$ .

No modelo do disco de Poincaré temos a Figura 6.81.

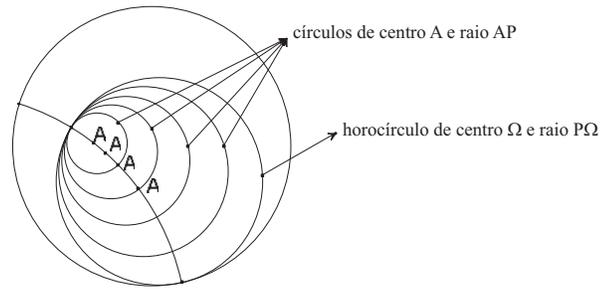


Figura 6.81: Um horocírculo pode ser pensado como limite de círculos hiperbólicos.

**Observação:** No modelo do disco de Poincaré, um horocírculo possui a forma de um círculo euclidiano tangente ao bordo do modelo.

Sejam  $H$  e  $H'$  dois horocírculos de centros  $\Omega$  e  $\Omega'$ , respectivamente. Dizemos que  $H$  e  $H'$  são **congruentes** quando para quaisquer  $A, B \in H$ , existem  $A', B' \in H'$  tais que  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ , conforme a Figura 6.82.

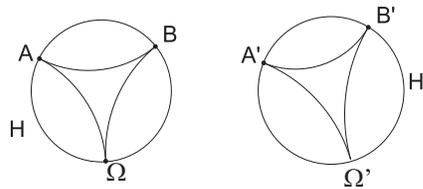


Figura 6.82: Definindo horocírculos congruentes.

**Proposição 6.14.6** *Quaisquer dois horocírculos são congruentes.*

*Demonstração:*

Sejam  $A, B \in H$  e  $A' \in H'$ , conforme a Figura 6.83.

Seja o círculo de centro  $A'$  e raio  $A'B$ . Logo, este círculo intersecta  $H'$  em dois pontos  $B', B'' \in H'$ .

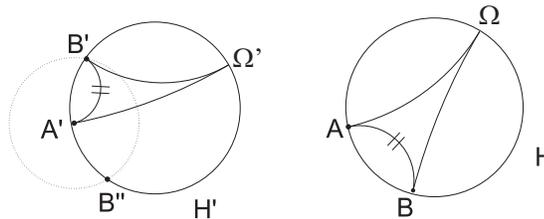


Figura 6.83: Apoio para a demonstração de que quaisquer dois horocírculos são congruentes.

Pela Proposição 6.6.3 (caso de congruência de triângulos generalizados isósceles), temos que  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega$  (ou  $A'B''\Omega$ ), como queríamos.  $\square$

Dados um horocírculo  $H$  e uma reta  $r$ , dizemos que  $r$  é *tangente* a  $H$  quando  $r \cap H$  for um conjunto constituído por apenas um ponto.

**Proposição 6.14.7** *Uma reta é tangente a um horocírculo se, e somente se, for perpendicular a um de seus raios em sua extremidade. Veja a Figura 6.84.*

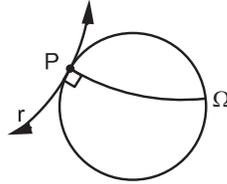


Figura 6.84: *Reta tangente a horocírculo.*

*Demonstração:*

⇒) Seja  $\{P\} = H \cap r$ . Suponhamos que o ângulo entre  $P\Omega$  e  $r$  seja agudo.

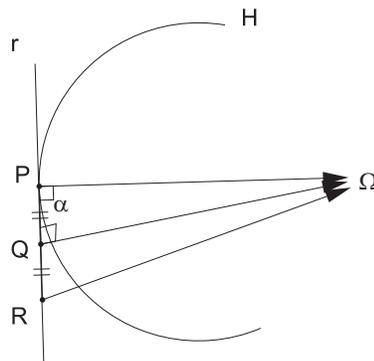


Figura 6.85: *Apoio para a demonstração de que retas tangentes a horocírculos são perpendiculares aos raios.*

Seja  $h > 0$  tal que  $\theta(h) = \alpha < 90^\circ$  ( $\theta$ : função ângulo de paralelismo).

Seja  $Q \in r$  tal que  $PQ = h$ . Seja  $R \in r$  tal que  $PQ \equiv QR$ , conforme a Figura 6.85.

Logo,  $PQ\Omega \equiv RQ\Omega$  (caso “lado, ângulo” de triângulos generalizados).

Assim,  $\widehat{PR}\Omega \equiv \widehat{RP}\Omega$ , ou seja,  $P$  e  $R$  são correspondentes. Logo,  $R \in H$ , contradizendo a hipótese.

Conclusão:  $\alpha = 90^\circ$ .

⇐) Se  $P\Omega \perp r$  e  $r$  cortar  $H$  em um outro ponto  $Q$ , teremos que  $P$  e  $Q$  serão correspondentes e  $PQ\Omega$  será um triângulo generalizado com dois ângulos retos. Contradição!

Logo,  $H \cap r = \{P\}$  e, portanto,  $r$  é tangente a  $H$ . □

Seja  $r$  uma reta. Consideremos o conjunto  $\mathcal{P}$  de todas as retas perpendiculares a  $r$ . Seja  $P$  um ponto pertencente a uma dessas retas e  $P \notin r$ . O lugar geométrico  $C$  de todos os pontos correspondentes de  $P$  nas demais retas de  $\mathcal{P}$  é chamado de **curva equidistante** de  $r$ . A distância de  $P$  a  $r$  é chamada de **distância** de  $C$  a  $r$ , conforme a Figura 6.86.

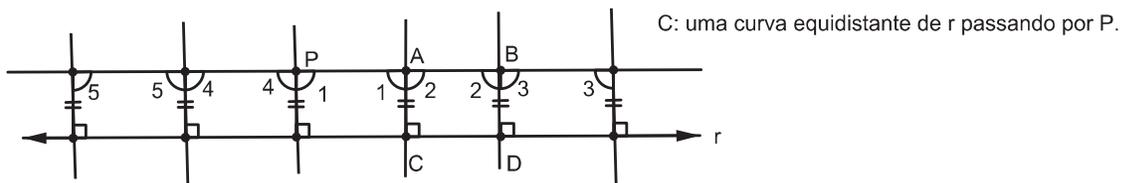


Figura 6.86: *Definindo curva equidistante.*

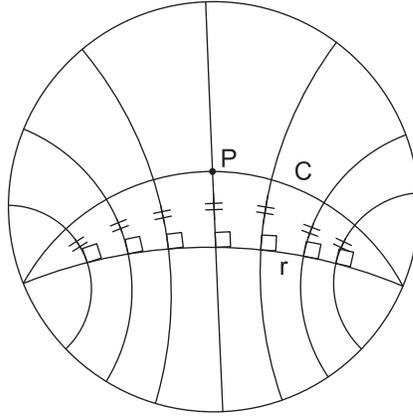


Figura 6.87: Curva equidistante no modelo do disco de Poincaré.

Veja na Figura 6.87 uma curva equidistante no modelo do disco de Poincaré:

**Observações:**

(i)  $C$  **não** é uma reta hiperbólica.

(ii) Se  $P, P' \in C$  e  $Q, Q'$  são os pés das perpendiculares baixadas de  $P, P'$  a  $r$ , então  $PQQ'P'$  é um quadrilátero de Saccheri.

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  curvas equidistantes das retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, conforme a Figura 6.88. Dizemos que  $C_1$  é **congruente** a  $C_2$  se, dados  $A, B \in C_1$ , existem  $A', B' \in C_2$  tais que  $ACDB \equiv A'C'D'B'$ , sendo  $C, D$  os pés das perpendiculares baixadas de  $A, B$  a  $r$  e  $C', D'$  os pés das perpendiculares baixadas de  $A', B'$  a  $s$ . (ou seja, os quadriláteros de Saccheri  $ACDB$  e  $A'C'D'B'$  são congruentes).

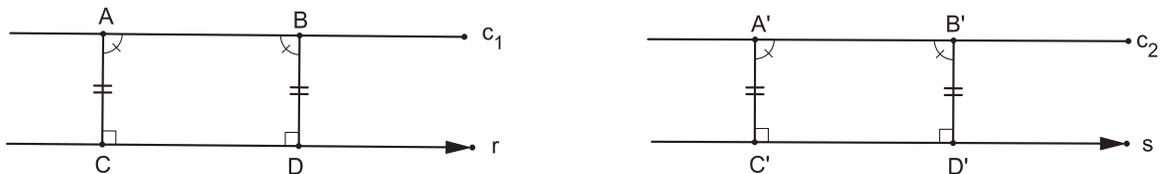


Figura 6.88: Definindo curvas equidistantes congruentes.

**Proposição 6.14.8** Duas curvas equidistantes  $C_1$  e  $C_2$  de  $r$  e  $s$ , respectivamente, tais que a distância de  $C_1$  a  $r$  é a mesma que a distância de  $C_2$  a  $s$  são congruentes.

*Demonstração:*

Sejam  $A, B \in C_1$  e  $C, D \in r$  tais que  $AC \perp r$ ,  $BD \perp r$ , conforme a Figura 6.89.

Sejam  $A' \in C_2$  e  $C' \in s$  tais que  $A'C' \perp s$ . Seja a circunferência de centro  $C'$  e raio  $CD$ . Esta circunferência intersecta  $s$  em dois pontos  $D'$  e  $D''$ .

Tomemos  $B' \in C_2$  correspondente de  $A'$  na reta perpendicular a  $s$  por  $D'$ .

Por congruência de triângulos, é fácil mostrar que  $\alpha = \beta$  e, portanto, que o quadrilátero de Saccheri  $ABCD \equiv A'B'C'D'$ , ou seja  $C_1$  e  $C_2$  são curvas equidistantes congruentes.  $\square$

Sejam  $A$  e  $B$  pontos ordinários em um círculo, horocírculo ou curva equidistante. Chamamos o segmento  $AB$  de corda do círculo, horocírculo ou curva equidistante e a parte de comprimento finito compreendida entre  $A$  e  $B$  de **arco de círculo**, **horocírculo** ou **curva equidistante**. Veja a Figura 6.90.

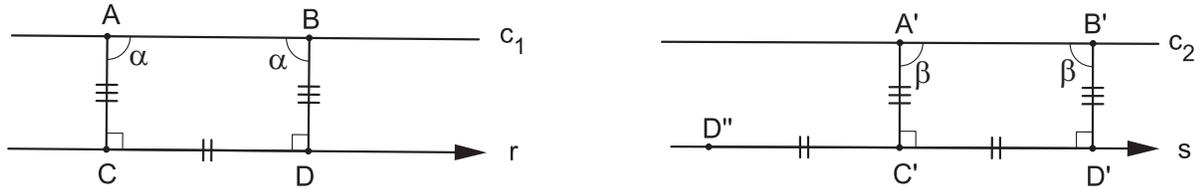


Figura 6.89: Apoio para a demonstração de condições de congruência para curvas equidistantes.

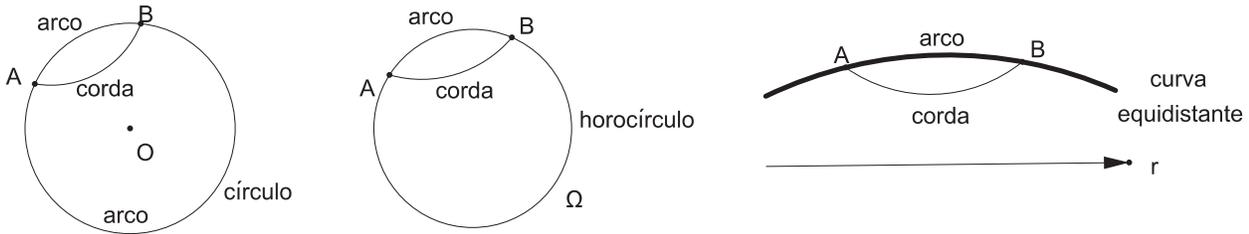


Figura 6.90: Definindo arcos e cordas de círculos, horocírculos e curvas equidistantes.

Sejam  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  arcos de círculos  $C_1$  e  $C_2$  de centros  $O$  e  $O'$ , respectivamente. Dizemos que  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  são congruentes quando  $ABO \equiv A'B'O'$ .

Sejam  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  arcos de horocírculos  $H$  e  $H'$  de centros  $\Omega$  e  $\Omega'$ , respectivamente. Dizemos que  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  são congruentes quando  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ .

Sejam  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  arcos de curvas equidistantes  $C_1$  e  $C_2$  a  $r$  e  $s$ , respectivamente. Dizemos que  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  são congruentes quando os Quadriláteros de Saccheri  $ABCD \equiv A'B'C'D'$ , sendo  $CD$  e  $C'D'$  suas bases em  $r$  e  $s$ , respectivamente. Veja na Figura 6.91.

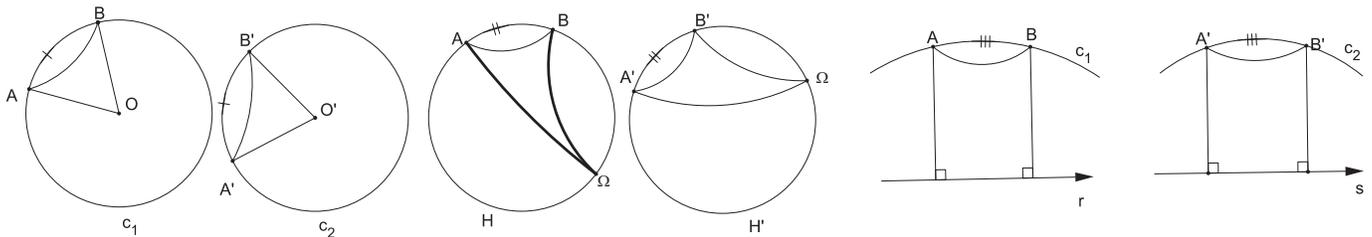


Figura 6.91: Definindo congruência de arcos em círculos, horocírculos e curvas equidistantes.

- Proposição 6.14.9** (i) *Cordas congruentes em círculos de mesmo raio subentendem arcos congruentes.*  
 (ii) *Cordas congruentes em horocírculos subentendem arcos congruentes.*  
 (iii) *Cordas congruentes em curvas equidistantes  $C_1$  e  $C_2$  à mesma distância de  $r$  e  $s$ , respectivamente, subentendem arcos congruentes.*

*Demonstração:*

No primeiro caso, o caso de congruência LLL resolve.

No segundo caso, o caso de congruência para triângulos isósceles generalizados resolve.

No terceiro caso, considere a Figura 6.92.

Devemos mostrar que  $ABCD \equiv A'B'C'D'$ . Para isso, devemos mostrar que  $\alpha = \beta$ .

Suponha que  $\alpha < \beta$  e consideremos a Figura 6.93.

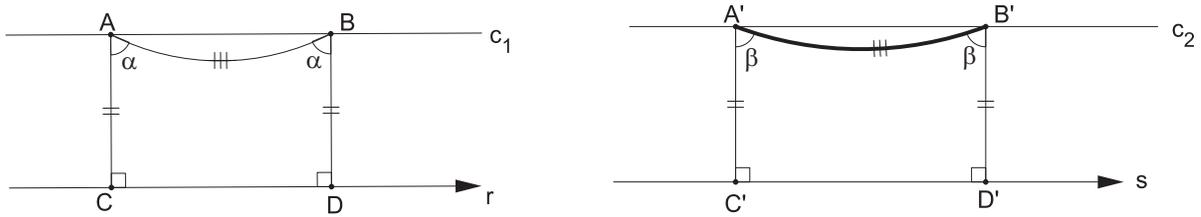


Figura 6.92: Apoio para a demonstração de condições para congruência de arcos em curvas equidistantes.

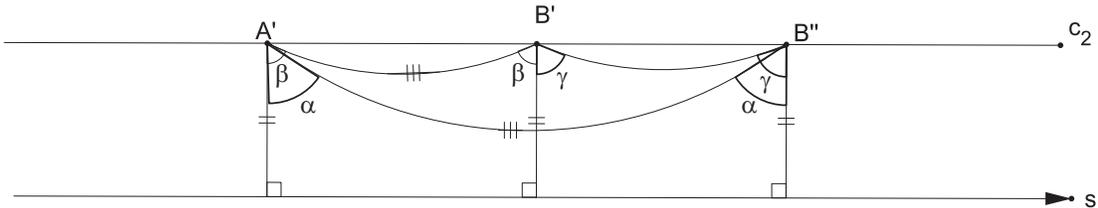


Figura 6.93: Apoio para a demonstração de condições para congruência de arcos em curvas equidistantes.

O triângulo  $A'B'B''$  é isósceles. Logo,

$$\gamma - \alpha = \gamma + \beta \implies \beta = -\alpha.$$

Contradição. Conclusão:  $\alpha = \beta$ , como queríamos. □

## 6.15 Áreas

**Proposição 6.15.1** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $BCDE$  um quadrilátero de Saccheri com base  $DE$  tal que  $M$ , ponto médio de  $AB$ , e  $N$ , ponto médio de  $AC$ , pertencem à reta  $\overleftrightarrow{DE}$ . Então,  $ABC$  e  $BCDE$  possuem a mesma área.*

*Demonstração:*

Considere a Figura 6.94.

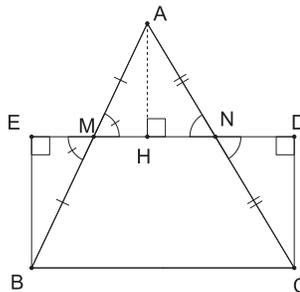


Figura 6.94: Apoio para a demonstração de condições para a equivalência de áreas entre triângulo e quadrilátero de Saccheri.

Temos  $AHN \equiv CDN$  e  $AHM \equiv BEM$ . (caso  $LAA_0$ )

Logo,  $\text{Área}(ABC) = \text{Área}(BCDE)$ . □

A diferença entre  $\pi$  e a soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário ou generalizado, medida em radianos, é chamada de **defeito** do triângulo.

**Proposição 6.15.2** *Dados dois triângulos (ordinários ou generalizados), se eles possuem o mesmo defeito, então eles possuem a mesma área.*

*Demonstração:*

Dividiremos a demonstração em dois casos.

1º) Se  $ABC$  e  $A'B'C'$  possuem um dos lados congruentes, digamos  $BC \equiv B'C'$ . Consideremos a Figura 6.95, sendo:

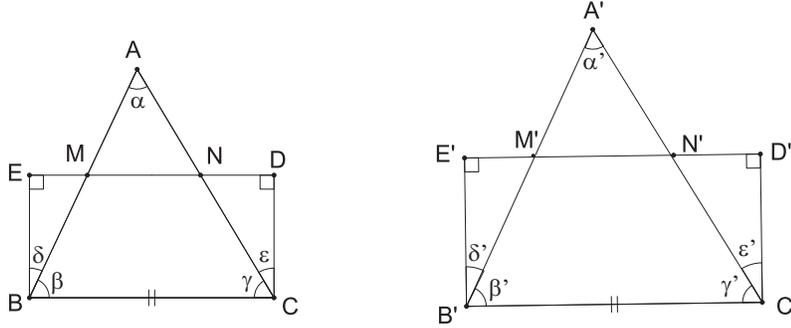


Figura 6.95: Apoio para a demonstração de que dois triângulos que possuem mesmo defeito possuem a mesma área.

M: ponto médio de  $AB$ ;  
 N: ponto médio de  $AC$ ;  
 $M'$ : ponto médio de  $A'B'$ ;  
 $N'$ : ponto médio de  $A'C'$ .

Temos  $\delta + \varepsilon = \alpha$  e  $\delta' + \varepsilon' = \alpha'$ .

Por hipótese,

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

Assim,

$$\delta + \varepsilon + \beta + \gamma = \delta' + \varepsilon' + \beta' + \gamma'.$$

Mas  $\beta + \delta = \gamma + \varepsilon$  e  $\beta' + \delta' = \gamma' + \varepsilon'$ . Logo,

$$2(\gamma + \varepsilon) = 2(\gamma' + \varepsilon') \Rightarrow \gamma + \varepsilon = \gamma' + \varepsilon'.$$

Deste modo:

$$\delta + \beta = \gamma + \varepsilon = \delta' + \beta' = \gamma' + \varepsilon'.$$

Como  $BC \equiv B'C'$ , concluímos facilmente que  $BCDE \equiv B'C'D'E'$ .

Pela Proposição 6.15.1 temos a igualdade das áreas dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ .

2º) Se  $ABC$  e  $A'B'C'$  não possuírem lados congruentes.

Suponha  $AC < A'C'$ . Consideremos a circunferência de centro em  $C$  e raio  $\frac{A'C'}{2}$ . Temos que esta circunferência intersecta  $\overleftrightarrow{MN}$  (Figura 6.96) nos pontos  $F$  e  $F''$ .

Consideremos:

M: ponto médio de  $AB$ .

N: ponto médio de  $AC$ .

Seja  $A''$  tal que  $F$  é ponto médio de  $A''C$ .

Facilmente vê-se que  $G$  é ponto médio de  $A''B$ .

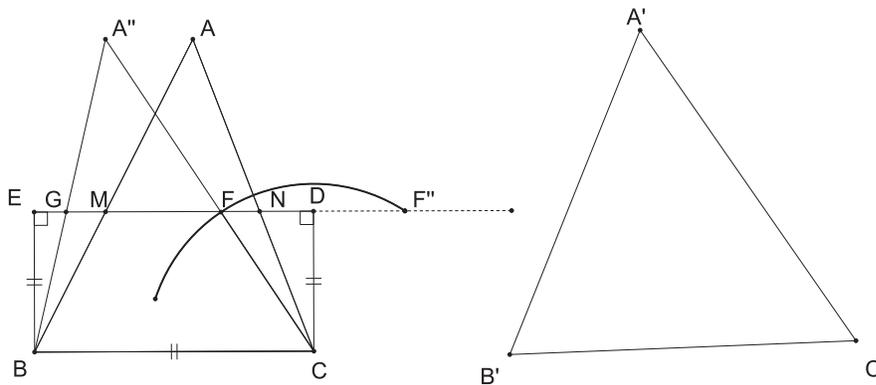


Figura 6.96: Apoio para a demonstração de que dois triângulos que possuem mesmo defeito possuem a mesma área.

Assim, pela Proposição 6.15.1 podemos concluir que  $A''BC$  e  $ABC$  possuem mesma área. No entanto,  $A''BC$  e  $A'B'C'$  são triângulos com mesmo defeito (pois  $ABC$  e  $A''BC$  possuem mesmo defeito) e com  $A''C \equiv A'C'$ . Pelo 1º caso acima temos que  $A''BC$  e  $A'B'C'$  possuem mesma área. Logo,  $ABC$  e  $A'B'C'$  possuem mesma área.  $\square$

Seja um triângulo  $ABC$  e  $D \in AB$ , como na Figura 6.97. O que podemos dizer da relação entre o defeito de  $ABC$  e os defeitos de  $ACD$  e  $BCD$ ?

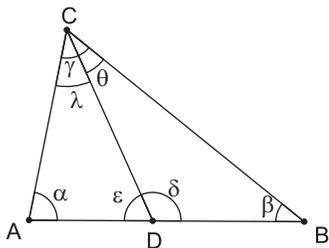


Figura 6.97: Relacionando defeitos em triângulo particionado.

Temos:

$$\begin{aligned}
 [\pi - (\alpha + \epsilon + \lambda)] + [\pi - (\beta + \delta + \theta)] &= 2\pi - (\alpha + \beta + \lambda + \theta + \epsilon + \delta) \\
 &= 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \pi) \\
 &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma)
 \end{aligned}$$

Deste modo, concluímos que o defeito de  $ABC$  é a **soma** dos defeitos de  $ACD$  e  $BCD$ .

Esse procedimento pode ser estendido para uma decomposição qualquer de um triângulo  $\Delta$  em uma quantidade finita de triângulos menores  $\Delta_i$ ;  $i = 1, \dots, n$ ; e, assim, o defeito do triângulo  $\Delta$  será a soma dos defeitos dos triângulos  $\Delta_i$ .

Na verdade, a recíproca da Proposição 6.15.2 é verdadeira. Isto é decorrência do Teorema de Gauss Bonnet [5], que tem por corolário, que a integral da curvatura gaussiana do plano hiperbólico sobre um triângulo  $\Delta$  é igual a diferença entre a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e  $\pi$ , isto é:

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \pi = \iint_{\Delta} k d\sigma,$$

sendo  $\alpha, \beta, \gamma$ , medidas dos ângulos internos do triângulo  $\Delta$ ,  $k$  curvatura do plano hiperbólico e  $d\sigma$  elemento de área hiperbólica, isto é,  $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dx dy$ , sendo  $E, F, G$  coeficientes da Primeira Forma Quadrática relativa a uma parametrização local do plano hiperbólico que contém  $\Delta$ . Deste modo,

$$A(\Delta) = k((\alpha + \beta + \gamma) - \pi).$$

Logo, juntando a Proposição 6.15.2 ao Teorema de Gauss-Bonnet, podemos enunciar a proposição abaixo.

**Proposição 6.15.3** *Dois triângulos (ordinários ou generalizados) possuem mesmo defeito se, e somente se, possuem mesma área.*

Como a curvatura do plano hiperbólico é constante e negativa, concluímos que a área de um triângulo  $T$  na geometria hiperbólica é proporcional ao seu defeito. Tomando a curvatura gaussiana  $k$  igual a  $-1$  (que corresponde a tomarmos o modelo do disco de Poincaré com raio euclidiano igual a 1), temos que a área de um triângulo hiperbólico  $T$  será exatamente o seu defeito. Sintetizamos esse resultado na Proposição 6.15.4 abaixo.

**Proposição 6.15.4** *Fazendo a curvatura gaussiana do plano hiperbólico igual a  $-1$ , temos*

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Seja um polígono convexo de  $n$  lados. Chamamos de **defeito** do polígono a diferença entre  $(n - 2)\pi$  e a soma dos ângulos internos do polígono. Deste modo, podemos generalizar o resultado acima para polígonos:

$$\text{Área (polígono)} = k \cdot \text{Defeito (polígono)}.$$

**Curiosidade.** Como Gauss chegou à fórmula da área de um triângulo hiperbólico.

Primeiramente, Gauss assumiu que todos os triângulos generalizados com três vértices ideais possuem a mesma área e esta é finita, digamos  $\delta$ .

Consideremos a Figura 6.98:

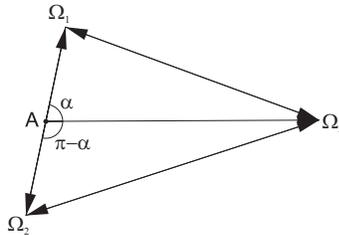


Figura 6.98: Apoio para a demonstração de Gauss para a fórmula da área de triângulos hiperbólicos.

Como a área de um triângulo está em função dos ângulos internos, podemos dizer que a área de  $A\Omega_2\Omega_3$  é  $f(\pi - \alpha)$  e a área de  $A\Omega_1\Omega_3$  é  $f(\alpha)$ . Logo,  $f(\alpha) + f(\pi - \alpha) = \delta$ . Notemos que  $f(\pi) = \delta$  e  $f(0) = 0$ . Consideremos um ponto  $O$  no interior de  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$  de tal modo que  $\widehat{\Omega_2 O \Omega_3} = \pi - \alpha$ , conforme a Figura 6.99.

(Notemos que  $O$  sempre existe: basta pegar um ponto em  $\Omega_2\Omega_3$  e “caminhar” em direção a  $\Omega_1$ .)

Assim,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= A(O\Omega_2\Omega_3) \\ f(\beta) &= A(O\Omega_1\Omega_2) \\ f(\pi - \alpha - \beta) &= A(O\Omega_1\Omega_3) \end{aligned}$$

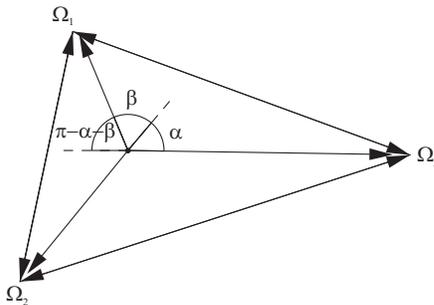


Figura 6.99: Apoio para a demonstração de Gauss para a fórmula da área de triângulos hiperbólicos.

Logo,  $f(\alpha) + f(\beta) + f(\pi - \alpha - \beta) = \delta$ , ou seja,

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) + f(\pi - \alpha - \beta) &= f(\alpha) + f(\pi - \alpha) \Rightarrow \\ f(\beta) + f(\pi - \alpha - \beta) &= f(\pi - \alpha). \end{aligned}$$

Chamando  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$  temos

$$f(\beta + \gamma) = f(\beta) + f(\gamma). \quad (1)$$

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [0, \pi]$ . Logo, por (1):

$$f(nx) = nf(x). \quad (2)$$

Também:

$$-nx + nx = 0 \Rightarrow f(-nx + nx) = f(0) \Rightarrow f(-nx) + f(nx) = 0 \Rightarrow f(-nx) = -f(nx). \quad (3)$$

Finalmente,

$$f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x). \quad (4)$$

e concluímos, por (2), (3) e (4) que:

$$f(mx) = mf(x); \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Seja  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  com  $q > 0$ . Logo:

$$qf\left(\frac{p}{q}x\right) = f\left(q\frac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x) \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x).$$

Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Como  $f$  é contínua (pela modelagem e natureza do problema), então:

$$af(x) = \left(\lim_{\substack{r \rightarrow a \\ r \in \mathbb{Q}}} r\right)f(x) = \lim_{\substack{r \rightarrow a \\ r \in \mathbb{Q}}} rf(x) = \lim_{\substack{r \rightarrow a \\ r \in \mathbb{Q}}} f(rx) = f(ax),$$

ou seja:

$$f(ax) = af(x), \forall a \in \mathbb{R}.$$

Conclusão:  $f$  é linear, ou seja:

$$\begin{aligned} f: [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = kx \end{aligned}$$

sendo  $k = f(1) > 0$  constante real.

Em particular,

$$f(\pi) = k\pi \Rightarrow \delta = k\pi \Rightarrow k = \frac{\delta}{\pi}.$$

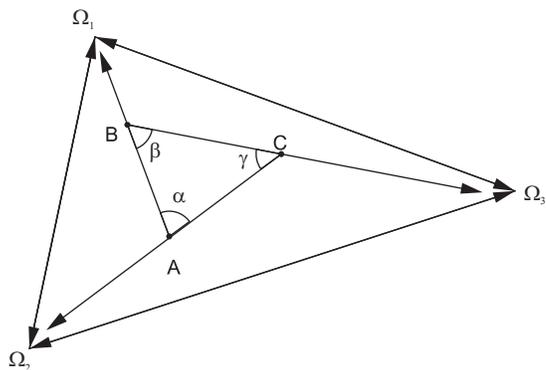


Figura 6.100: Apoio para a demonstração de Gauss para a fórmula da área de triângulos hiperbólicos.

Consideremos a Figura 6.100:

Temos

$$\text{Área}(ABC) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = \delta \Rightarrow$$

$$\text{Área}(ABC) + k\alpha + k\beta + k\gamma = k\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Área}(ABC) = k(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))}$$

como queríamos.

# Capítulo 7

## A Trigonometria Hiperbólica

As ilustrações das próximas subseções foram inspiradas nas construções geométricas realizadas no Modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica Plana. As mesmas podem ser reproduzidas com o auxílio de um software de geometria dinâmica hiperbólica, como o **NonEuclid**, que é livre e pode ser copiado do site [17].

### 7.1 Arcos Concêntricos de Horocírculos

**Proposição 7.1.1** *Segmentos de raios entre horocírculos concêntricos são congruentes (Figura 7.1).*

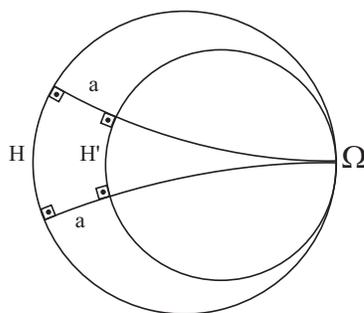


Figura 7.1: *Congruência entre segmentos de raios de horocírculos concêntricos.*

*Demonstração:*

Dados os horocírculos concêntricos  $H$  e  $H'$ , com centro em  $\Omega$  e os pontos  $A, B \in H$  e identificando os pontos  $A'$  e  $B'$ , respectivamente intersecção dos raios  $A\Omega$  e  $B\Omega$  de  $H$  com  $H'$ , conforme a Figura 7.2, temos:

Seja  $M$  ponto médio de  $AB$ . Pelo caso “lado, ângulo” para triângulos generalizados temos  $M\Omega \perp AB$ . ( $AM\Omega \equiv BM\Omega$ )

Temos  $AMM' \equiv BMM'$  (caso LAL) e, portanto,  $AA'M' \equiv BB'M'$  (caso LAA<sub>0</sub>).

Conclusão:  $AA' \equiv BB'$ , como queríamos. □

Os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  de  $H$  e  $H'$  com extremos nos mesmos raios (como na Figura 7.2) são chamados de **arcos correspondentes**.

**Proposição 7.1.2** *Se um raio divide ao meio um arco de horocírculo, então divide ao meio qualquer arco correspondente de horocírculo concêntrico.*

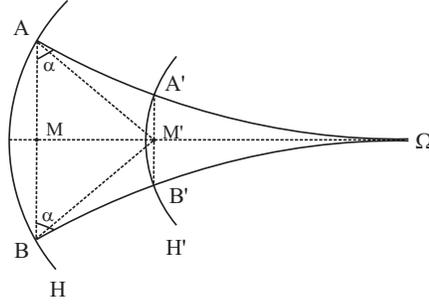


Figura 7.2: Apoio para a demonstração da congruência entre segmentos de raios de horocírculos concêntricos.

*Demonstração:*

Dados os horocírculos concêntricos  $H$  e  $H'$ , com centro em  $\Omega$ , os pontos  $A, B \in H$ , os pontos  $A'$  e  $B'$  respectivamente intersecção dos raios  $A\Omega$  e  $B\Omega$  de  $H$  com  $H'$ ,  $M$  dividindo ao meio o arco  $\widehat{AB}$ ,  $M' \in \widehat{A'B'}$ ,  $C$  ponto médio de  $AB$  e  $C'$  ponto médio de  $A'B'$ , conforme a Figura 7.3, temos:

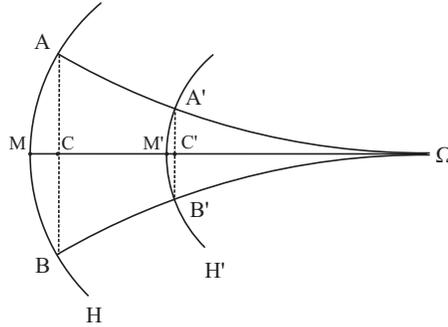


Figura 7.3: Apoio de demonstração: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.

Como  $\widehat{AM} \equiv \widehat{MB}$  temos  $AM\Omega \equiv BM\Omega$  (definição).

Como  $AMC \equiv BMC$  (caso LAL) temos  $AC \equiv BC$  e  $AB \perp M\Omega$ . Logo,  $ACC' \equiv BCC'$  (caso LAL).

Assim,  $AA'C' \equiv BB'C'$  (caso LAL), o que implica  $A'C'\Omega \equiv B'C'\Omega$ .

Conclusão:

$$A'M'C' \equiv B'M'C' \text{ (caso LAL)} \implies A'M'\Omega \equiv B'M'\Omega \implies \widehat{A'M'} \equiv \widehat{B'M'}$$

□

**Corolário 7.1.1** *O conjunto dos pontos médios de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos constituem um raio.*

**Corolário 7.1.2** *Se  $P_0, \dots, P_n$  dividem  $P_0\widehat{P}_n \subset H$  em  $n$  partes iguais e  $H'$  é horocírculo correspondente a  $H$ , como na Figura 7.4, então  $P'_0, \dots, P'_n \in H'$  tais que  $P_i\widehat{P}_j$  e  $P'_i\widehat{P}'_j$  são correspondentes e dividem  $P'_0\widehat{P}'_n \subset H'$  em  $n$  partes iguais.*

*Demonstração:*

Basta aplicar a Proposição 7.1.2 a  $P_0\widehat{P}_2; P_1\widehat{P}_3; P_2\widehat{P}_4; P_3\widehat{P}_5; \dots; P_{n-2}\widehat{P}_n$ .

□

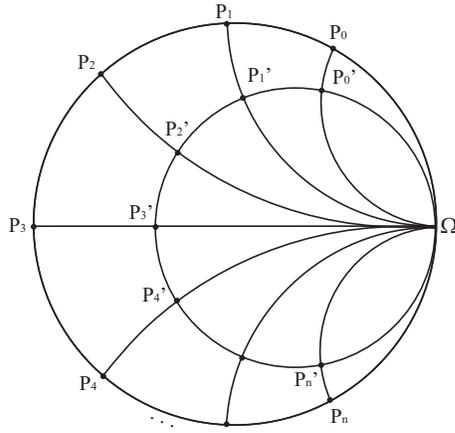


Figura 7.4: Relacionando arcos congruentes em horocírculos concêntricos.

**Proposição 7.1.3** *Sejam  $H$  e  $H'$  horocírculos concêntricos e  $A, B, C \in H$  (Figura 7.5). Então os pontos  $A', B', C' \in H'$  determinados pelos raios que passam por  $ABC$  são tais que*

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}}.$$

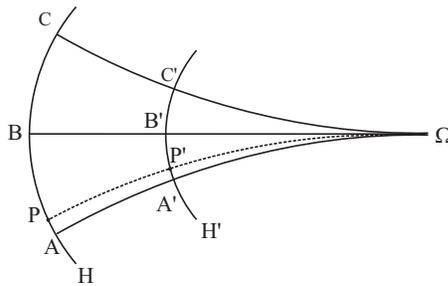


Figura 7.5: Propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.

*Demonstração:*

1º caso: Os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  são comensuráveis, ou seja:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} \in \mathbb{Q}.$$

Logo, existe uma unidade de medida comum aos dois arcos. Suponhamos que  $\widehat{AP}$ ,  $P \in H$ , possua o comprimento dessa unidade. Logo,  $\widehat{AB} = m\widehat{AP}$  e  $\widehat{AC} = n\widehat{AP}$  com  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Consideremos o raio  $P\Omega$ . Ele determina  $P' \in H'$ .

Pelo Corolário 7.1.2 temos  $\widehat{A'B'} = m\widehat{A'P'}$  e  $\widehat{A'C'} = n\widehat{A'P'}$ . Logo:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} = \frac{m}{n}.$$

2º caso: Os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  não são comensuráveis.

Neste caso, seja  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\widehat{AB} = m\widehat{AP}$ ;  $P \in H$ . Logo,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n\widehat{AP} \leq \widehat{AC} < (n+1)\widehat{AP}.$$

Pelo Corolário 7.1.2,  $A'B' = mA'P'$  e  $nA'P' \leq A'C' < (n+1)A'P'$ .

Logo:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} \leq \frac{m}{n}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{m}{n+1} < \frac{A'B'}{A'C'} \leq \frac{m}{n} &\Rightarrow \\ \frac{m}{n+1} - \frac{m}{n} \leq \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{A'B'}{A'C'} \leq \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} &\Rightarrow \\ 0 \leq \left| \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{A'B'}{A'C'} \right| \leq \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1}. \end{aligned}$$

Fazendo  $\widehat{AP} \rightarrow 0$  temos  $m, n \rightarrow +\infty$  com  $\frac{m}{n}$  limitado.

Logo,  $\frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} \rightarrow 0$ , ou seja:

$$\left| \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{A'B'}{A'C'} \right| = 0 \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

□

**Proposição 7.1.4** *A razão entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos depende somente da distância entre eles (Figura 7.6), medida ao longo de um raio, ou seja:*

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{A_3B_3}{A_4B_4} = \dots = f(d) > 1.$$

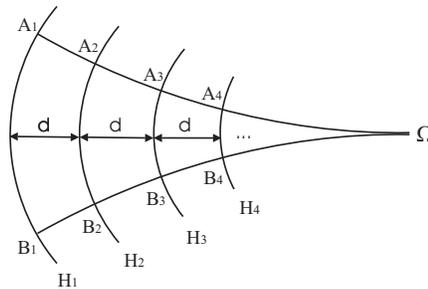


Figura 7.6: *Propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.*

## 7.2 Unidade de Comprimento para a Geometria Hiperbólica

Lembremos a fórmula da área de Gauss para um triângulo ABC:

$$\text{Área}(ABC) = k(\pi - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})); k > 0 \text{ constante.}$$

Fixando  $k = 1$ , é possível mostrar que quando

$$\frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{A_2B_2}} = e,$$

a distância de  $\widehat{A_1B_1}$  a  $\widehat{A_2B_2}$  é 1, sendo  $\widehat{A_1B_1}$  e  $\widehat{A_2B_2}$  arcos correspondentes de horocírculos concêntricos. Doravante adotaremos essa unidade de comprimento na geometria hiperbólica, ou seja,

$$d(\widehat{A_1B_1}, \widehat{A_2B_2}) = 1 \iff \frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{A_2B_2}} = e, \text{ onde } e \text{ é o número de Euler.}$$

**Proposição 7.2.1** *Se  $s_0$  e  $s_x$  são comprimentos de dois arcos correspondentes em horocírculos concêntricos com  $s_x < s_0$  e  $x$  é a distância entre eles ao longo de um raio comum (Figura 7.7), então  $s_x = s_0 e^{-x}$ .*

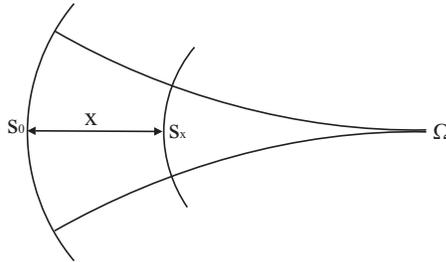


Figura 7.7: Relacionando comprimento e distância entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.

Consideremos a Figura 7.8.

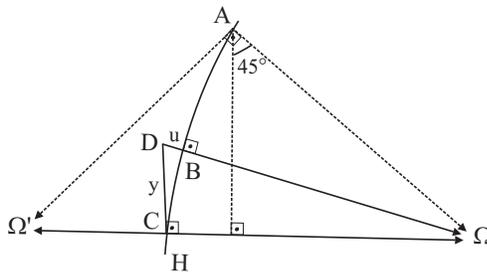


Figura 7.8: Apoio para demonstração: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.

Tomemos  $\widehat{BC} = s$ ,  $\widehat{AC} = S$ , sendo H horocírculo de centro  $\Omega$  e  $S > s$ . Nas condições da figura acima vale a seguinte proposição.

**Proposição 7.2.2** (1)  $S - s = Se^{-(y+u)}$ ; (2)  $S + s = Se^{y-u}$ .

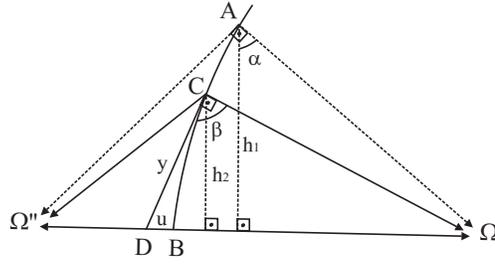


Figura 7.9: Apoio para demonstração: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.

**Observação:** Se  $S > s$ , então existe  $D$  ordinário na figura acima. De fato, consideremos a Figura 7.9. Temos:

$$h_2 < h_1 \implies \theta(h_2) > \theta(h_1) \implies \beta > \alpha = 45^\circ \implies 2\beta > 90^\circ \implies \exists D \text{ ponto ordinário.}$$

Recordemos as definições:

$$\begin{aligned} \sinh(y) &= \frac{e^y - e^{-y}}{2}; \\ \cosh(y) &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}; \\ \tanh(y) &= \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}; \\ \operatorname{sech}(y) &= \frac{1}{\cosh(y)}; \\ \operatorname{cosech}(y) &= \frac{1}{\sinh(y)}; \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

**Corolário 7.2.1** Nas condições da Proposição 7.2.2 temos: (1)  $e^u = \cosh(y)$ ; (2)  $s = S \tanh(y)$ .

*Demonstração:*

Somando (1) e (2) da Proposição 7.2.2:

$$2S = S(e^{-y}e^{-u} - e^ye^{-u}) \implies 2e^u = e^y + e^{-y} \implies e^u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \implies e^u = \cosh(y).$$

Subtraindo (1) e (2) da Proposição 7.2.2:

$$\begin{aligned} 2S &= S(e^ye^{-u} - e^{-y}e^{-u}) \implies \\ s &= \frac{S}{2} \left( \frac{e^y - e^{-y}}{e^u} \right) \implies \\ s &= \frac{S}{e^u} \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \implies \\ s &= \frac{S}{e^u} \sinh(y) \implies \\ s &= S \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} \implies \\ s &= S \tanh(y). \end{aligned}$$

□

### 7.3 Sistema de Coordenadas na Geometria Hiperbólica

Sejam dois eixos perpendiculares e orientados a partir de  $O$ :  $O_x$  e  $O_y$ .

Seja  $P$  um ponto do plano hiperbólico.

Associamos a  $P$  dois números reais:

(i)  $|a|$ : distância da projeção ortogonal  $P_x$  de  $P$  em  $O_x$  até  $O$ , sendo:

$a > 0$  se  $P_x$  situa-se na semi-reta de orientação positiva de  $O_x$ .

$a < 0$  se  $P_x$  situa-se na semi-reta de orientação negativa de  $O_x$ .

(ii)  $|b|$ : distância de  $P$  a  $P_x$ .

$b > 0$  se  $P$  estiver no semiplano determinado por  $O_x$  que contém a semi-reta de orientação positiva de  $O_y$ .

$b < 0$  se  $P$  estiver no semiplano determinado por  $O_x$  que contém a semi-reta de orientação negativa de  $O_y$ .

Chamaremos  $a$  e  $b$  de coordenadas de  $P$ , sendo  $a$  a abscissa e  $b$  a ordenada de  $P$ , conforme a Figura 7.10.

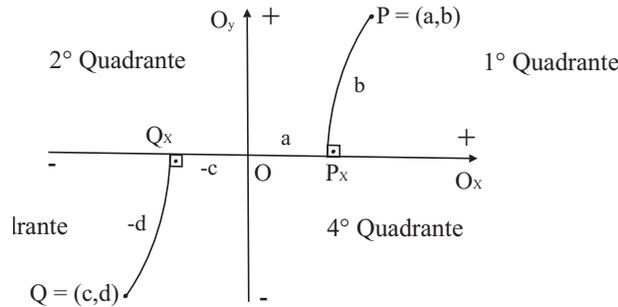


Figura 7.10: *Introduzindo um sistema de coordenadas no plano hiperbólico.*

Observemos que, deste modo, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais.

**Observações:**

(1) Não podemos definir  $b$  como sendo a distância da projeção ortogonal  $P_y$  de  $P$  em  $O_y$  até  $O$ . (Isto é, definir coordenadas como na Geometria Euclidiana). Caso contrário, não haveria uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais.

**Exemplo:** Seja  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\theta(a) = \frac{\pi}{4}$  ( $\theta$ : função ângulo de paralelismo) (Figura 7.11). Não existiria o ponto de coordenadas  $(a, a)$ .

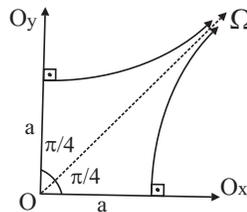


Figura 7.11: *Não é possível introduzir um sistema de coordenadas análogo ao do plano euclidiano no plano hiperbólico.*

Por outro lado, se partirmos do ponto  $P$ , sempre existiria  $P_x$  e  $P_y$  e, portanto, existiriam as coordenadas  $a$  e  $b$  como na geometria euclidiana.

(2) nas condições como definimos o sistema de coordenadas na Geometria Hiperbólica, um ponto  $P = (a, b)$  é tal que  $d(O, P_y) < b$ , como na Figura 7.12.

De fato,  $OP_xPP_y$  é um quadrilátero de Lambert e, portanto,  $d(O, P_y) < d(P, P_x) = b$ .

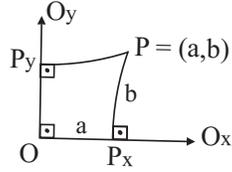


Figura 7.12: *Quadrilátero de Lambert no sistema de coordenadas do plano hiperbólico.*

**Proposição 7.3.1** *Seja  $\Omega_+$  ponto ideal do eixo coordenado  $O_x$  no lado de orientação positiva. A equação do horocírculo de centro  $\Omega_+$  passando pela origem  $O$  é  $e^x = \cosh(y)$ . Veja na Figura 7.13.*

*Demonstração:*

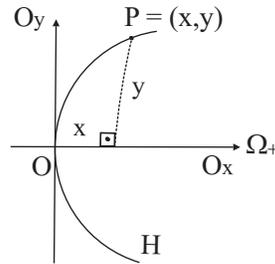


Figura 7.13: *Encontrando a equação de um horocírculo.*

Consideremos a Figura 7.14:

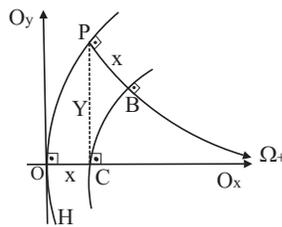


Figura 7.14: *Apoio para a demonstração da equação de um horocírculo.*

Pela Proposição 7.1.1:  $OC \equiv PB \equiv x$ .

Pelo Corolário 7.2.1:  $e^x = \cosh(y)$ . □

**Proposição 7.3.2** *Na Figura 7.15 temos  $\widehat{AC} = S$ ;  $\widehat{BC} = s$  e  $\widehat{BE} = \alpha$ , sendo  $H$  horocírculo de centro  $\Omega$  e raio  $C\Omega$ . Então  $s = S \sinh(\alpha)$ .*

*Demonstração:*

Tomemos por  $E$  um horocírculo  $H'$  de centro em  $\Omega$ . Seja  $\{F\} = B\Omega \cap H'$ , conforme a Figura 7.16.

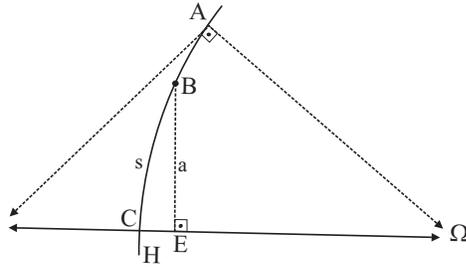


Figura 7.15: Relacionando comprimento de arco de horocírculo e distância.

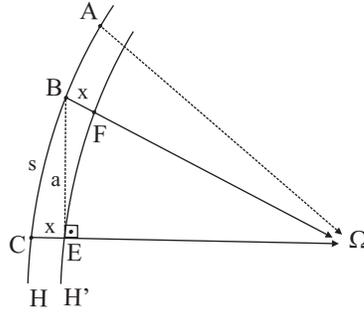


Figura 7.16: Apoio para a demonstração de propriedade de comprimento de arco de horocírculo e distância.

Seja  $\widehat{EF} = s'$ .

Temos que  $\widehat{CB}$  e  $\widehat{EF}$  são correspondentes. Pela Proposição 7.2.1:  $s' = e^{-x}s$ .

Pelo Corolário 7.2.1:  $s' = S \tanh(a)$ . Logo,

$$e^{-x}s = S \tanh(a) \implies s = Se^x \tanh(a).$$

Também pelo Corolário 7.2.1:  $e^x = \cosh(a)$ . Logo,

$$s = S \cosh(a) \tanh(a) \implies s = S \sinh(a).$$

□

**Lema 7.3.1** Considere a Figura 7.17, sendo H horocírculo de centro  $\Omega_+$  e raio  $O\Omega_+$ . Sejam  $\widehat{AO} = S$  e  $A\Omega_+ \perp \Omega_-$ . Então  $\overrightarrow{A\Omega_+}$  e  $O_y$  são retas paralelas.

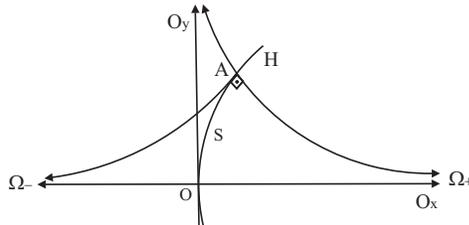


Figura 7.17: Relacionando reta hiperbólica paralela aos eixos coordenados e arco de horocírculo.

*Demonstração:*

Considere a Figura 7.18.

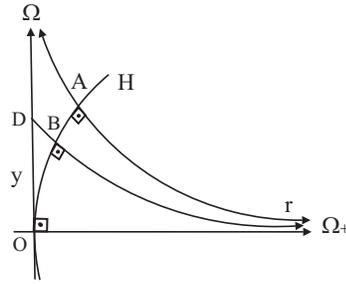


Figura 7.18: Apoio para a demonstração de propriedade de reta hiperbólica paralela aos eixos coordenados e arco de horocírculo.

Sejam  $DO = y$  e  $\widehat{BO} = s$ .

Pelo Corolário 7.2.1:  $s = S \tanh(y)$ . Fazendo  $D \rightarrow \Omega_+$  temos  $y \rightarrow +\infty$ , o que implica  $\tanh(y) \rightarrow 1$ . Logo  $s \rightarrow S$ , ou seja,  $\widehat{A\Omega_+}$  é paralela a  $O_y$ .

**Proposição 7.3.3** A reta paralela aos eixos coordenados situada no 1º quadrante é  $e^{-x} = \tanh(y)$ .

*Demonstração:*

Consideremos a Figura 7.19.

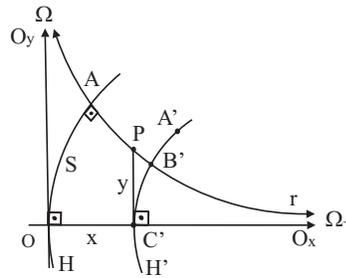


Figura 7.19: Apoio para a demonstração da equação da reta hiperbólica paralela aos eixos coordenados.

Seja H horocírculo de centro  $\Omega_+$  passando pela origem. Pelo Lema 7.3.1:  $\widehat{AO} = S$ .

Seja  $A' \in H'$  tal que  $\widehat{A'C'} = S$ . ( $H'$  é horocírculo com centro em  $\Omega_+$  passando por  $C'$ ).

Seja  $B'C' = s$ .

Pelo Corolário 7.2.1:  $s = S \tanh(y)$ .

$\widehat{AO}$  e  $\widehat{B'C'}$  são correspondentes. Pela Proposição 7.2.1:  $s = Se^{-x}$ .

Logo,  $S \tanh(y) = Se^{-x}$  o que implica  $e^{-x} = \tanh(y)$ . □

Dois números positivos  $z$  e  $z'$  são chamados **complementares** quando os ângulos de paralelismo a eles associados são complementares, ou seja:

$$\theta(z) + \theta(z') = \frac{\pi}{2}.$$

**Proposição 7.3.4** Se  $z$  e  $z'$  são complementares, então:

$$e^{-z} = \tanh\left(\frac{z'}{2}\right).$$

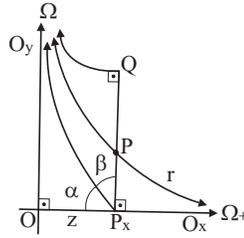


Figura 7.20: Apoio para a demonstração de equação envolvendo números complementares.

*Demonstração:*

Consideremos a Figura 7.20.

Seja  $d(O, P_x) = z$ ;  $PP_x \perp O_x$  e  $PP_x \equiv QP$ .

Temos  $PP_x \Omega_+ \equiv PQ\Omega$  (caso “lado, ângulo”). Logo,  $\widehat{Q} = 90^\circ$ .

Temos  $\theta(z) = \alpha$  e  $\theta(\overline{QP_x}) = \beta$ . Como  $\alpha + \beta = 90^\circ$  segue que  $z' = \overline{QP_x}$  é complementar de  $z$ .

Mas a equação de  $r$  é  $e^{-x} = \tanh(y)$  (Proposição 7.3.3).

No ponto  $P \in r$  temos  $x = z$  e  $y = \overline{PP_x} = \frac{z'}{2}$ . Logo,  $e^{-z} = \tanh\left(\frac{z'}{2}\right)$ . □

**Corolário 7.3.1** *Se  $z$  e  $z'$  são complementares, então:*

- (1)  $e^z = \cotanh\left(\frac{z'}{2}\right)$ ;
- (2)  $\sinh(z) \sinh(z') = 1$ ;
- (3)  $\cosh(z) = \cosh(z')$ ;
- (4)  $\tanh(z) = \operatorname{sech}(z')$ .

*Demonstração:*

(1) Temos:

$$e^{-z} = \tanh\left(\frac{z'}{2}\right) \Rightarrow e^z = \cotanh\left(\frac{z'}{2}\right).$$

(2) Temos:

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \frac{\cotanh\left(\frac{z'}{2}\right) - \tanh\left(\frac{z'}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)}}{2} \\ &= \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) + 1 - \cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh(z')} \\ &= \frac{1}{\sinh(z')}, \end{aligned}$$

ou seja:

$$\sinh(z) \sinh(z') = 1.$$

Observação:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1; \\ \sinh(x) &= 2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cosh\left(\frac{x}{2}\right); \\ \cosh(x) &= \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

(3) Temos:

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ &= \frac{\cotanh\left(\frac{z'}{2}\right) + \tanh\left(\frac{z'}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)}}{2} \\ &= \frac{\cosh(z')}{\sinh(z')} \\ &= \cotanh(z') \implies \\ \cosh(z) &= \cotanh(z').\end{aligned}$$

(4) Temos:

$$\begin{aligned}\tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \\ &= \frac{\operatorname{cosech}(z')}{\cotanh(z')} \\ &= \frac{1}{\cosh(z')} \\ &= \operatorname{sech}(z') \implies \\ \tanh(z) &= \operatorname{sech}(z').\end{aligned}$$

## 7.4 Trigonometria Hiperbólica em Triângulos Retângulos

Seja um triângulo ABC como na Figura 7.21.

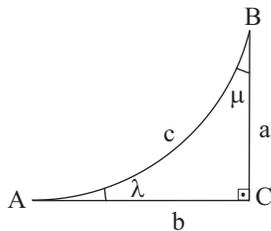


Figura 7.21: *Triângulo retângulo hiperbólico ordinário.*

Chamaremos tal triângulo de triângulo retângulo com partes  $a, b, c, \lambda, \mu$ .

**Proposição 7.4.1** Em um triângulo retângulo com partes  $a, b, c, \lambda, \mu$  tem-se:

(1)  $\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l)$ ;

(2)  $\sinh(c) = \sinh(b) \cosh(m)$ .

Sendo  $l$  e  $m$  tais que  $\theta(l) = \lambda$  e  $\theta(m) = \mu$ .

*Demonstração:*

Considere a Figura 7.22.

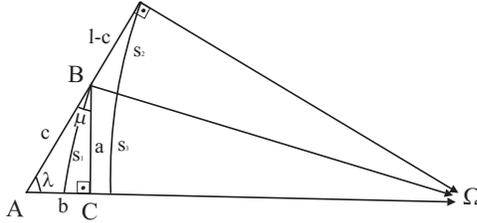


Figura 7.22: Apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos retângulos ordinários.

Temos  $s_1 = S \sinh(a)$  (Proposição 7.3.2) e  $s_3 = s_1 e^{-u}$  (Proposição 7.2.1).

Logo,

$$\sinh(a) = \frac{s_1}{S} = \frac{e^u s_3}{S} = e^u \left( \frac{s_2 + s_3}{S} - \frac{s_2}{S} \right).$$

Mas

$$\begin{aligned} e^u &= \cosh(l - c) (\tanh(l) - \tanh(l - c)) \\ &= \cosh(l - c) \tanh(l) - \sinh(l - c) \\ &= \frac{\cosh(l - c) \sinh(l) - \cosh(l) \sinh(l - c)}{\cosh(l)} \\ &= \frac{\sinh(l - (l - c))}{\cosh(l)} \\ &= \frac{\sinh(c)}{\cosh(l)} \implies \end{aligned}$$

$$\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l).$$

De modo totalmente análogo:

$$\sinh(c) = \sinh(b) \cosh(m).$$

□

**Corolário 7.4.1** Seja  $ABC$  triângulo retângulo com partes  $a, b, c, \lambda, \mu$ . Então:

(1)  $\cosh(l) = \sinh(c) \sinh(a')$ ;

(2)  $\cosh(m) = \sinh(c) \sinh(b')$ ;

(3)  $\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m)$ ;

(4)  $\cosh(a') = \sinh(l) \sinh(b')$ ;

(5)  $\cosh(b') = \sinh(m) \sinh(a')$ .

Sendo  $a, a'$  complementares;  $b, b'$  complementares;  $\theta(l) = \lambda$  e  $\theta(m) = \mu$ .

*Demonstração* (dos itens (1) e (2)):

(1) Da Proposição 7.4.1:  $\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l)$ .

Do Corolário 7.3.1:  $\sinh(a) \sinh(a') = 1$ .

Logo:

$$\begin{aligned} \sinh(c) &= \frac{1}{\sinh(a')} \cosh(l) \implies \\ \cosh(l) &= \sinh(c) \sinh(a'). \end{aligned}$$

(2) Análogo. □

## 7.5 Teorema de Pitágoras Hiperbólico

**Proposição 7.5.1** (*Teorema de Pitágoras Hiperbólico*) *Em um triângulo retângulo de hipotenusa medindo  $c$  e catetos medindo  $a$  e  $b$  vale*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

*Demonstração:*

Considere a Figura 7.23.

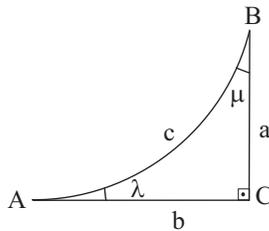


Figura 7.23: Apoio para a demonstração do Teorema de Pitágoras Hiperbólico.

sendo  $\theta(l) = \lambda$  e  $\theta(m) = \mu$ .

Pelo Corolário 7.4.1:  $\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m)$ ;  $\sinh(l) = \frac{\cosh(a')}{\sinh(b')}$  e  $\sinh(m) = \frac{\cosh(b')}{\sinh(a')}$ .

Logo:

$$\cosh(c) = \frac{\cosh(a') \cosh(b')}{\sinh(b') \sinh(a')} = \operatorname{cotanh}(a') \operatorname{cotanh}(b').$$

Pelo Corolário 7.3.1:  $\operatorname{cotanh}(a') = \cosh(a)$  e  $\operatorname{cotanh}(b') = \cosh(b)$ .

Logo:

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

□

**Exemplo:** Seja um triângulo retângulo hiperbólico com catetos medindo 3 e 4, (Figura 7.24). A hipotenusa mede aproximadamente 6,30966. De fato:

Temos  $\cosh(c) = \cosh(3) \cosh(4) \cong 274,93 \implies c = 6,30966$ .

Observação: A hipotenusa é “maior” que no caso euclidiano.

## 7.6 Trigonometria Hiperbólica em Triângulos Quaisquer

Consideremos o triângulo ABC da Figura 7.25.

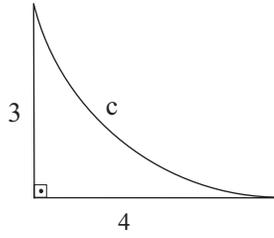


Figura 7.24: Em um triângulo retângulo hiperbólico com catetos medindo 3 e 4, a hipotenusa é maior do que 5.

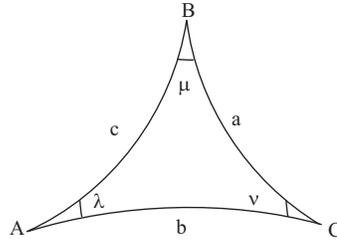


Figura 7.25: Triângulo hiperbólico ordinário.

**Proposição 7.6.1** Nas condições da figura acima, tem-se

$$\frac{\sinh(\mathbf{a})}{\operatorname{sech}(\mathbf{l})} = \frac{\sinh(\mathbf{b})}{\operatorname{sech}(\mathbf{m})} = \frac{\sinh(\mathbf{c})}{\operatorname{sech}(\mathbf{n})},$$

sendo  $\theta(\mathbf{l}) = \lambda$ ;  $\theta(\mathbf{m}) = \mu$  e  $\theta(\mathbf{n}) = \nu$ .

*Demonstração:*

Seja  $h$  a altura relativa ao vértice B, como na Figura 7.26.

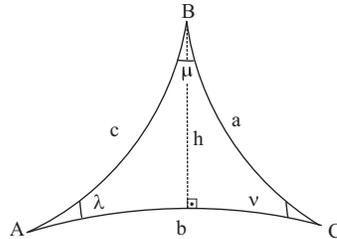


Figura 7.26: Apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos ordinários.

Pela Proposição 7.4.1:

$$\begin{cases} \sinh(\mathbf{c}) = \sinh(\mathbf{h}) \cosh(\mathbf{l}) \\ \sinh(\mathbf{a}) = \sinh(\mathbf{h}) \cosh(\mathbf{n}) \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\sinh(\mathbf{a})}{\sinh(\mathbf{c})} = \frac{\cosh(\mathbf{n})}{\cosh(\mathbf{l})} = \frac{\operatorname{sech}(\mathbf{l})}{\operatorname{sech}(\mathbf{n})} \implies \frac{\sinh(\mathbf{a})}{\operatorname{sech}(\mathbf{l})} = \frac{\sinh(\mathbf{c})}{\operatorname{sech}(\mathbf{n})}.$$

De modo análogo,

$$\frac{\sinh(\mathbf{b})}{\operatorname{sech}(\mathbf{m})} = \frac{\sinh(\mathbf{c})}{\operatorname{sech}(\mathbf{n})}.$$

□

**Proposição 7.6.2** Nas condições da Figura 7.26, tem-se:

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l)$$

sendo  $\theta(l) = \lambda$ .

*Demonstração:*

Consideremos a Figura 7.27, supondo que  $\mu$  seja o maior ângulo.

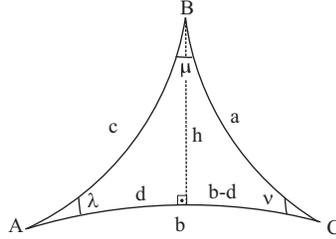


Figura 7.27: Figura de apoio para a demonstração de relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos ordinários.

Pelo Teorema de Pitágoras Hiperbólico:

$$\begin{cases} \cosh(a) = \cosh(h) \cosh(b-d) \\ \cosh(c) = \cosh(h) \cosh(d) \end{cases} .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} \cosh(b-d) \\ &= \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} (\cosh(b) \cosh(d) - \sinh(b) \sinh(d)) \implies \\ \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(c) \sinh(b) \tanh(d) . \end{aligned}$$

Mas,

$$\tanh(d) = \tanh(c) \tanh(l) .$$

De fato,

$$\begin{aligned} \tanh(l) &= \frac{\sinh(l)}{\cosh(l)} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{\cosh(h')}{\sinh(d')}}{\frac{\sinh(c)}{\sinh(h)}} \stackrel{(2)}{=} \frac{\frac{\cosh(h)}{\sinh(h)} \sinh(d)}{\frac{\sinh(c)}{\sinh(h)}} \stackrel{(3)}{=} \frac{\frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} \sinh(d)}{\sinh(c)} = \frac{\tanh(d)}{\tanh(c)} \implies \\ \tanh(d) &= \tanh(c) \tanh(l) . \end{aligned}$$

(1): Corolário 7.4.1 (numerador) e Proposição 7.4.1 (denominador)

(2): Corolário 7.3.1

(3): Teorema de Pitágoras Hiperbólico

Logo:

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(c) \sinh(b) \frac{\sinh(c)}{\cosh(c)} \tanh(l) \implies \\ \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l) . \end{aligned}$$

□

## 7.7 Trigonometria Hiperbólica e Função Ângulo de Paralelismo

**Proposição 7.7.1** *Seja*

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{h} &\longmapsto \theta(\mathbf{h}) = \alpha \end{aligned}$$

a função ângulo de paralelismo estendida a  $\mathbb{R}$  (Figura 7.28).

(Obs:  $\theta(-\mathbf{a}) = \pi - \theta(\mathbf{a})$ ;  $\mathbf{a} > 0$ )

Então,

$$\theta(\mathbf{h}) = \arccos(\tanh(\mathbf{h}));$$

(isto é,  $\cos(\alpha) = \tanh(\mathbf{h})$ )

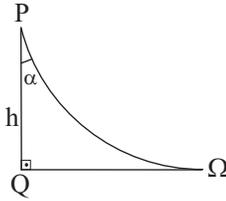


Figura 7.28: Trabalhando com a Função Ângulo de Paralelismo em um triângulo retângulo generalizado.

**Corolário 7.7.1** (*Lei dos Cossenos 1*) Nas condições da Proposição 7.6.2 temos pela Figura 7.29:

$$\cosh(\mathbf{a}) = \cosh(\mathbf{b}) \cosh(\mathbf{c}) - \sinh(\mathbf{b}) \sinh(\mathbf{c}) \cos(\lambda).$$

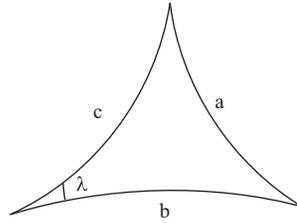


Figura 7.29: A Lei dos Cossenos 1 da Geometria Hiperbólica.

**Corolário 7.7.2** (*Lei dos Senos*) Nas condições da Proposição 7.6.1 temos:

$$\frac{\sinh(\mathbf{a})}{\sin(\lambda)} = \frac{\sinh(\mathbf{b})}{\sin(\mu)} = \frac{\sec(\mathbf{h})}{\sin(\nu)}.$$

*Demonstração:*

Consideremos a Figura 7.30.

Do Corolário 7.3.1 e da Proposição 7.7.1 temos:

$$\operatorname{sech}(\mathbf{l}) = \tanh(\mathbf{l}') = \cos(\lambda'),$$

sendo  $\theta(\mathbf{l}') = \lambda'$  e  $\theta(\mathbf{l}) = \lambda$ .

Mas:

$$\theta(\mathbf{l}) + \theta(\mathbf{l}') = \frac{\pi}{2} \implies \lambda + \lambda' = \frac{\pi}{2} \implies \lambda' = \frac{\pi}{2} - \lambda.$$

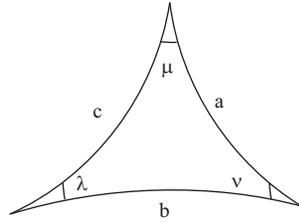


Figura 7.30: A Lei dos Senos da Geometria Hiperbólica.

Logo:

$$\operatorname{sech}(l) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\lambda) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\lambda) = \sin(\lambda) \implies \operatorname{sech}(l) = \sin(\lambda).$$

De modo análogo:  $\operatorname{sech}(m) = \sin(\mu)$  e  $\operatorname{sech}(n) = \sin(\nu)$ .

Daí substituindo na Proposição 7.6.1 temos o resultado. □

**Corolário 7.7.3** *Se  $\theta$  é a função ângulo de paralelismo estendida, então:*

$$\theta(h) = 2 \arctan\left(e^{-h}\right),$$

isto é,

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-h},$$

sendo  $\theta(h) = \alpha$ .

*Demonstração:*

Temos

$$e^h = \sinh(h) + \cosh(h).$$

Da Proposição 7.7.1 temos  $\tanh(h) = \cos(\alpha)$ .

Por outro lado, como  $\theta(h) = \alpha$ , temos do Corolário 7.3.1 e da Proposição 7.7.1:

$$\operatorname{sech}(h) = \tanh(h') = \cos(\alpha') = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \implies \cosh(h) = \operatorname{cosec}(\alpha).$$

Desse modo:

$$\tanh(h) = \cos(\alpha) \implies \sinh(h) = \cosh(h) \cos(\alpha) = \operatorname{cosec}(\alpha) \cos(\alpha) \implies \sinh(h) = \cotan(\alpha).$$

Logo:

$$e^h = \sinh(h) + \cosh(h) = \cotan(\alpha) + \operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

Mas:

$$\frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \cotan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Logo,

$$e^h = \cotan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \implies e^{-h} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

□

**Exemplos:**

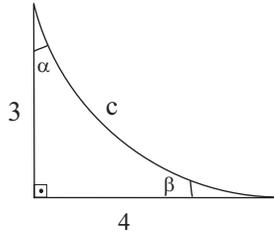


Figura 7.31: Encontrando as medidas dos ângulos de um triângulo retângulo ordinário.

(1) A área de um triângulo retângulo com catetos medindo 3 e 4 na Geometria Hiperbólica é 1,43488196 unidades de área.

De fato:

Precisamos encontrar os ângulos internos da Figura 7.31.

Pelo Teorema de Pitágoras Hiperbólico:

$$\cosh(c) = \cosh(3) \cosh(4) \implies c \cong 6,30966.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sinh(3)}{\sin(\beta)} \cong \frac{\sinh(6,30966)}{\sin(\frac{\pi}{2})} \implies \sin(\beta) \cong 0,036438166 \implies \beta \cong 0,036446234 \text{ rad (ou } \beta \cong 2,088^\circ).$$

Analogamente:

$$\frac{\sinh(4)}{\sin(\alpha)} \cong \frac{\sinh(6,30966)}{\sin(\frac{\pi}{2})} \implies \sin(\alpha) \cong 0,099262 \implies \alpha \cong 0,0994257 \text{ rad (ou } \alpha \cong 5,6966^\circ).$$

Assim:

$$\text{Área}(ABC) \cong \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 0,036446234 + 0,0994257\right) \cong 1,43488196 \text{ unidades de área.}$$

**Observação:** Se o triângulo fosse euclidiano:  $\beta \cong 36,87^\circ$ ;  $\alpha \cong 53,13^\circ$  e  $\text{Área}(ABC) \cong 6$ .

(2) Um triângulo possui lados medindo 1 e 2 e o ângulo entre eles é de  $30^\circ$ , conforme a Figura 7.32. A medida do terceiro lado é 1,380472 unidades de área e os demais ângulos medem  $18,3887^\circ$  e  $76,7979^\circ$ .

De fato:

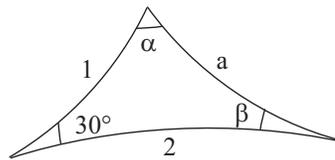


Figura 7.32: Encontrando a medidas de ângulos e lados de um triângulo ordinário.

Pela Lei dos Cossenos 1:

$$\cosh(a) = \cosh(1) \cosh(2) - \sinh(1) \sinh(2) \cos(30^\circ) \cong 2,1141193 \implies a \cong 1,380472.$$

Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(30^\circ)} = \frac{\sinh(1)}{\sin(\beta)} \implies \beta \cong 0,320944 \text{ rad } \cong 18,3887^\circ$$

e

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(30^\circ)} = \frac{\sinh(2)}{\sin(\alpha)} \implies \alpha \cong 1,340376 \text{ rad } \cong 76,7979^\circ.$$

**Proposição 7.7.2** (*Lei dos Cossenos 2*) *Seja um triângulo com lados medindo  $a, b, c$  e ângulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$  conforme a Figura 7.33.*

Então:

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}.$$

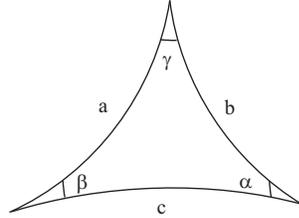


Figura 7.33: *A Lei dos Cossenos 2 da Geometria Hiperbólica.*

*Demonstração:*

Façamos  $A = \cosh(a)$ ;  $B = \cosh(b)$  e  $C = \cosh(c)$ .

Temos  $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1 \implies \sinh^2(a) = \cosh^2(a) - 1$ .

Para  $a > 0 \implies \sinh(a) > 0$ . Logo:

$$\sinh(a) = \sqrt{A^2 - 1}.$$

Analogamente:

$$\sinh(b) = \sqrt{B^2 - 1}$$

e

$$\sinh(c) = \sqrt{C^2 - 1}.$$

Pela Lei dos Cossenos 1:

$$C = AB - \sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1} \cos(\gamma) \implies \cos(\gamma) = \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1}}.$$

Analogamente:

$$\cos(\alpha) = \frac{BC - A}{\sqrt{B^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}}$$

e

$$\cos(\beta) = \frac{AC - B}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{C^2 - 1}}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\gamma) &= 1 - \cos^2(\gamma) \\ &= 1 - \left( \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1} \sqrt{B^2 - 1}} \right)^2 \\ &= \frac{(A^2 - 1)(B^2 - 1) - A^2 B^2 + 2ABC - C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} \\ &= \frac{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Façamos

$$D = 1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2.$$

Logo:

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}}.$$

Analogamente,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{B^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}}$$

e

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)} &= \frac{\frac{BC-A}{\sqrt{B^2-1}\sqrt{C^2-1}} \frac{AC-B}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{C^2-1}} + \frac{AB-C}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{B^2-1}}}{\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{B^2-1}\sqrt{C^2-1}} \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A^2-1}\sqrt{C^2-1}}} \\ &= \frac{(BC-A)(AC-B) + (AB-C)(C^2-1)}{D} \\ &= \frac{ABC^2 - B^2C - A^2C + AB + ABC^2 - C^3 - AB + C}{D} \\ &= C \frac{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}{D} = C \frac{D}{D} = C. \end{aligned}$$

Isto é:

$$\operatorname{cosh}(c) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}.$$

□

### Exemplos:

(1) Um triângulo possui ângulos internos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  (Figura 7.34). Os lados opostos a esses ângulos medem 1,3120735; 1,6230837 e 1,8130936, respectivamente.

De fato:

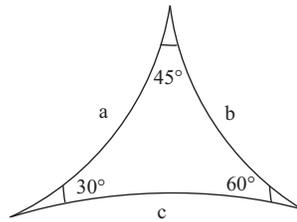


Figura 7.34: Encontrando a medidas dos lados a partir das medidas dos ângulos de um triângulo ordinário.

Logo:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh}(a) &= \frac{\cos(30^\circ)\cos(45^\circ) + \cos(60^\circ)}{\operatorname{sen}(30^\circ)\operatorname{sen}(45^\circ)} \cong 3,146264 \implies a \cong 1,8130936 \\ \operatorname{cosh}(b) &= \frac{\cos(60^\circ)\cos(45^\circ) + \cos(30^\circ)}{\operatorname{sen}(60^\circ)\operatorname{sen}(45^\circ)} \cong 1,991563 \implies b \cong 1,3120735 \\ \operatorname{cosh}(c) &= \frac{\cos(60^\circ)\cos(30^\circ) + \cos(45^\circ)}{\operatorname{sen}(60^\circ)\operatorname{sen}(30^\circ)} \cong 2,632993 \implies c \cong 1,6230837 \end{aligned}$$

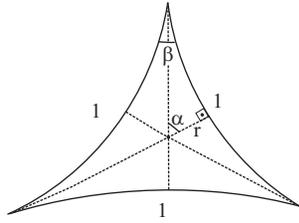


Figura 7.35: *Encontrando o raio de um círculo hiperbólico inscrito em um triângulo ordinário.*

(2) O raio da circunferência inscrita em um triângulo equilátero hiperbólico de lados medindo 1 (Figura 7.35) é 0,2637354 unidades de medida.

De fato:

Temos  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)} &= \frac{\sinh(1)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \implies \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\right)}{\sinh(1)} \cong 0,44340944 \implies \\ \frac{\beta}{2} &\cong 0,4593989 \text{ rad} \implies \\ \beta &\cong 0,9187978 \text{ rad} \cong 52,643^\circ \end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{\sinh(r)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} \implies r \cong 0,2637354.$$

(3) Dado um triângulo ABC, seja h a altura relativa ao vértice A (Figura 7.36). Então, colocando h em função dos lados a, b, c temos

$$h = \cosh^{-1} \left( \frac{\sqrt{2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)}}{\sinh(a)} \right)$$

De fato:

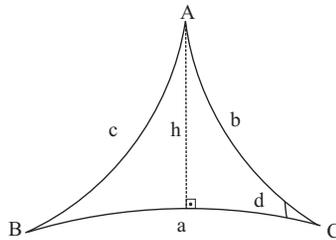


Figura 7.36: *Encontrando alturas de um triângulo ordinário.*

Temos:

$$\cosh(c) = \cosh(h) \cosh(d - a) = \cosh(h) (\cosh(d) \cosh(a) - \sinh(d) \sinh(a))$$

$$\cosh(b) = \cosh(h) \cosh(d)$$

$$\cosh^2(d) - \sinh^2(d) = 1$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \cosh (c) &= \cosh (h) \left( \frac{\cosh (b)}{\cosh (h)} \cosh (a) - \sqrt{-1 + \left( \frac{\cosh (b)}{\cosh (h)} \right)^2} \sinh (a) \right) \\
 &= \cosh (b) \cosh (a) - \sqrt{-\cosh ^2 (h) + \cosh ^2 (b)} \sinh (a) \implies \\
 \frac{\cosh (c) - \cosh (b) \cosh (a)}{\sinh (a)} &= -\sqrt{-\cosh ^2 (h) + \cosh ^2 (b)} \implies \\
 -\cosh ^2 (h) + \cosh ^2 (b) &= \left( \frac{\cosh (c) - \cosh (b) \cosh (a)}{\sinh (a)} \right)^2 \implies \\
 \cosh (h) &= \frac{\sqrt{2 \cosh (a) \cosh (b) \cosh (c) - \cosh ^2 (b) - \cosh ^2 (c)}}{\sinh (a)}.
 \end{aligned}$$

## Capítulo 8

# Comparação Entre as Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana

Estamos tomando como unidade de medida a distância entre dois arcos correspondentes de horocírculos concêntricos cujo quociente é  $e$ . Veja a Figura 8.1.

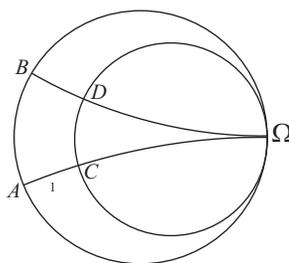


Figura 8.1: *Estabelecendo a unidade de medida hiperbólica.*

Temos pela Proposição 7.2.1 que se  $x$  é a distância entre  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$ , então  $\widehat{CD} = \widehat{AB}e^{-x}$ . Tomemos  $x = \frac{1}{k}$ ;  $k > 0$ .

Podemos considerar  $\frac{1}{k}$  (Figura 8.2) como sendo unidade de medida. Logo, para  $k$  grande, a unidade de medida é pequena e os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  possuem quase o mesmo comprimento.

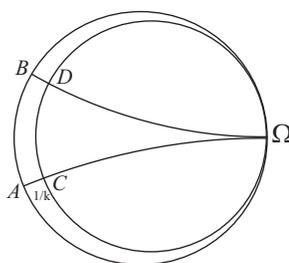


Figura 8.2: *Estabelecendo sub-unidades de medida hiperbólica.*

Com esta unidade de medida (Figura 8.3), as fórmulas trigonométricas ficam do seguinte modo.

(1) Teorema de Pitágoras Hiperbólico:

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{a}{k}\right);$$

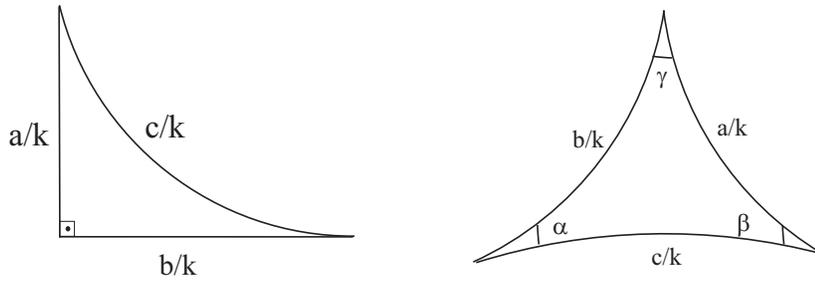


Figura 8.3: Medidas dos lados de triângulos hiperbólicos ordinários em termos da sub-unidades de medida.

(2) Lei dos Senos:

$$\frac{\sinh\left(\frac{a}{k}\right)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\sinh\left(\frac{b}{k}\right)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\sinh\left(\frac{c}{k}\right)}{\text{sen}(\gamma)},$$

(3) Lei dos Cossenos 1:

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos(\gamma);$$

(4) Lei dos Cossenos 2:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{\cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma)}.$$

Note que, fazendo  $k$  grande, nossos triângulos são “pequenos”.

Da Fórmula de Taylor para  $\sinh\left(\frac{x}{k}\right)$  em torno do zero temos:

$$\sinh\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(n)}(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = \frac{x}{k} + \frac{x^3}{3!k^3} + \frac{x^5}{5!k^5} + \dots$$

Analogamente:

$$\cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(n)}(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!k^2} + \frac{x^4}{4!k^4} + \dots$$

Deste modo; para valores altos de  $k$  podemos considerar:

$$\sinh\left(\frac{x}{k}\right) \simeq \frac{x}{k}$$

e

$$\cosh\left(\frac{x}{k}\right) \simeq 1 + \frac{x^2}{2k^2}$$

(1) Teorema de Pitágoras Hiperbólico:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{c}{k}\right) &= \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \implies \\ 1 + \frac{c^2}{2k^2} &\simeq \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) \implies \\ 1 + \frac{c^2}{2k^2} &\simeq 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2b^2}{4k^4} \implies \\ c^2 &\simeq a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{2k^2}. \end{aligned}$$

Para  $k$  grande temos

$$c^2 \simeq a^2 + b^2$$

que é, aproximadamente, o Teorema de Pitágoras Euclidiano.

(2) Lei dos Senos:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{\sinh\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\sinh\left(\frac{c}{k}\right)}{\operatorname{sen}(\gamma)} \implies \\ \frac{\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}(\alpha)} &\simeq \frac{\frac{b}{k}}{\operatorname{sen}(\beta)} \simeq \frac{\frac{c}{k}}{\operatorname{sen}(\gamma)} \implies \\ \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} &\simeq \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} \simeq \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)} \end{aligned}$$

que é, aproximadamente, a Lei dos Senos Euclidiana.

(3) Lei dos Cossenos 1:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{c}{k}\right) &= \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos(\gamma) \implies \\ 1 + \frac{c^2}{2k^2} &\simeq \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) - \frac{a}{k} \frac{b}{k} \cos(\gamma) = 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2 b^2}{4k^4} - \frac{ab}{k^2} \cos(\gamma) \implies \\ c^2 &\simeq a^2 + b^2 - 2 \cos(\gamma) + \frac{a^2 b^2}{2k^2} \implies \\ c^2 &\simeq a^2 + b^2 - 2 \cos(\gamma) \end{aligned}$$

para  $k$  grande, que é, aproximadamente, a Lei dos Cossenos euclidiana.

(4) Lei dos Cossenos 2:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{a}{k}\right) &= \frac{\cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma)} \implies \\ 1 + \frac{a^2}{2k^2} &\simeq \frac{\cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma)} \implies \\ 1 &\simeq \frac{\cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma)} \implies \\ \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma) &\simeq \cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \implies \\ -\cos(\alpha) &\simeq \cos(\beta + \gamma) \implies \\ \cos(\pi - \alpha) &\simeq \cos(\beta + \gamma) \implies \\ \pi - \alpha &\simeq \beta + \gamma \implies \\ \pi &\simeq \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

*Conclusão:* Para unidades de medida muito pequenas, os triângulos hiperbólicos são “quase” euclidianos, ou então, o plano hiperbólico é “localmente euclidiano”.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática). 1995.
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística da UFG. 2002.
- [3] BONOLA, R. *Non-Euclidean Geometry: a critical and historical study of its development*. New York. Dover Publications, Inc. 1955.
- [4] CABRI-GEOMETRE-II - Software de geometria dinâmica - "<http://www.cabrilog.com>".
- [5] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro. SBM-Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.
- [6] COSTA, S. I. R. & SANTOS, S. A. "Geometrias Não-Euclidianas". *Ciência Hoje*. Vol. 11, no. 65, agosto de 1990, pp. 14-23.
- [7] COUTINHO, L. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência. 2001.
- [8] COXETER, H. M. S. *Non-Euclidean Geometry*. 5<sup>th</sup>. ed. Toronto: University of Toronto Press. 1965.
- [9] EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula: Geometria*. São Paulo: Atual Editora. 1993.
- [10] GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. San Francisco: Freeman and Co. 1974.
- [11] HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol 1 (Books I and II). 2<sup>nd</sup>. ed. New York: Dover Publications, Inc. 1956.
- [12] HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol 2 (Books III-IX). 2<sup>nd</sup>. ed. New York: Dover Publications, Inc. 1956.
- [13] HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol 3 (Books X-XIII). 2<sup>nd</sup>. ed. New York: Dover Publications, Inc. 1956.
- [14] KELLY, P. & MATTHEWS, G. *The Non-Euclidean Hyperbolic Plane: its structure and consistency*. New York: Springer Verlag. 1981.
- [15] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Brasília: Editora da Universidade de Brasília. 1988.
- [16] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE - Site de História da Matemática da Universidade de Saint Andrews, Scotland - "<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history>".

- [17] NONEUCLID - Software livre de geometria dinâmica para os modelos do disco e do semiplano de Poincaré para a geometria hiperbólica - "<http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/>".
- [18] ROCHA, L. F. C. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*. Rio de Janeiro: 16°. Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA. 1987.

# Índice Remissivo

- Área do triângulo hiperbólico, 37
- Ângulo de Paralelismo, 65
- Ângulo de paralelismo, 53
- Ângulo hiperbólico, 43
- Ângulo ideal, 59
  
- Arco de círculo, 89
- Arcos correspondentes, 97
- Axioma das Paralelas, 17
- Axioma de Arquimedes, 17
- Axioma de Dedekind, 17
- Axioma de Pasch, 26
- Axioma de Playfair, 22
- Axiomas de Congruência, 16
- Axiomas de Continuidade, 17
- Axiomas de Incidência, 16
- Axiomas de Ordem, 16
- Axiomas de separação, 45
  
- Beltrami, 10
- Bolyai, 8
  
- Comprimento hiperbólico, 43
- Construção da paralela, 81
- Continuidade, 67
- Curva equidistante, 88
  
- Defeito do triângulo, 91
- Disco de Poincaré, 43
- Distância entre duas retas, 77
  
- Espaços homogêneos, 3
- Euclides de Alexandria, 3
  
- Função ângulo de paralelismo, 66
- Função ângulo de paralelismo estendida, 68
  
- Gauss, 7
- Geometria Elíptica, 45
  
- Hilbert, 12
- Horocírculo, 86
  
- John Wallis, 5
  
- Klein, 11
  
- Lambert, 6
- Legendre, 7
- Lei dos Cossenos, 123
- Lei dos Senos, 123
- Lobachewsky, 9
  
- Modelo, 41
- Modelo da Pseudo-esfera de Beltrami, 44
- Modelo de Klein, 44
- Modelo do Semiplano de Poincaré, 43
  
- Nasiredin, 5
- Noções Comuns, 15
  
- Paralelismo, 49
- Poincaré, 12
- Polígono convexo ordinário, 73
- Pontos correspondentes, 83
- Pontos Ideais, 57
- Pontos ordinários, 58
- Postulado de Lobachewsky, 49
- Postulados de Euclides, 15
- Proclus Diadochus, 4
  
- Quadrilátero de Lambert, 37
- Quadrilátero de Saccheri, 36, 68
  
- Reta bissectora, 83
- Retas hiperparalelas, 52
- Retas paralelas, 52
- Riemann, 10
  
- Saccheri, 6
- Segmento hiperbólico, 43
- Sentido de paralelismo, 54
- Sistema de Coordenadas, 103
  
- Teorema de Pitágoras Hiperbólico, 110
- Teorema do Ângulo Externo, 19
- Triângulo retângulo hiperbólico, 108
- Triângulos Generalizados, 58
- Trigonometria Hiperbólica, 97