179

O Método de Projeções Ortogonais Sucessivas num Problema de Controle

Antonio Carlos Moretti

O Método de Projeções Ortogonais Sucessivas num Problema de Controle

Este exemplar corresponde a redação da tese defendida pelo Sr. **Antonio Carlos Moretti** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de Agosto de 1985

Prof. Dr. José Mário Martinez

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada, área Otimização e Pesquisa Operacional .

Observação:
Este exemplar foi devidamente corrigido

Agradecimentos

Aos meus pais, pela vida e constante incentivo .

Aos meus irmãos , pela amizade e apoio .

À Flávia , pelo amor, carinho e energia .

Ao pessoal do CCUEC , em especial ao Buzato e Reynaldo , pela amizade e favores prestados.

Ao pessoal do CCJR da Física, em especial ao Mário, pelos " galhos quebrados " .

Ao Martínez , pela orientação tanto em termos matemáticos quanto em termos de vida .

A todos, colegas e amigos , do Departamento de Matemática Aplicada e da UNICAMP , que de uma forma ou de outra incentivaram - me para que este trabalho se concretizasse .

Índice

Capítulo 1 : Introdução

A motivação inicial geradora do tema desta tese foi dada pela necessidade de se resolver **sistemas de inequações lineares esparsos de porte enorme com características de controle**. O termo " **porte enorme** " se refere àqueles problemas que, apesar da característica esparsa que porventura possam ter, não podem ser armazenados de uma maneira global na memória física do computador, mesmo que seja utilizado para sua resolução um programa que contenha uma boa estrutura de dados. Nós tinhamos um problema deste tipo. Trata - se do Modelo Matemático em Educação, um modelo desenvolvido por Martinez [4] , que tem como objetivo gerar uma política ótima de decisões de tal maneira que num dado horizonte de anos possa se ter uma proporção mais razoável e coerente entre o número de alunos e professores nas escolas. A saída do modelo diz aos planificadores do ensino em quais fases da formação educacional devem ser promovidos incentivos para que possa ser atingido o objetivo acima citado. Este modelo será melhor definido e discutido no Capítulo 3, onde é feita a sua formulação matemática e são definidos os dados principais do modelo.

A partir deste momento, quando nos referirmos ao algoritmo de projeção para sistemas de inequações lineares de porte enorme, estaremos nos referindo especificamente ao algoritmo de projeção aplicado ao Modelo Matemático em Educação (MME) .

À medida que acrescemos o horizonte de anos no MME o sistema de inequações lineares gerado pelas restrições torna - se maior. Suponhamos então que nós queremos resolve - lo para um horizonte de anos suficiente para que este seja considerado de porte enorme. A idéia do algoritmo de projeção é dividir o sistema desenvolvido para um horizonte total de anos em sistemas menores que representam períodos menores de anos, de tal maneira que cada período possa ser resolvido utilizando - se a memória principal disponível. Uma vez feita esta partição, fazemos projeções do período 1 sobre o período 2, do período 2 sobre o período 3,e assim por diante, até que seja feita a projeção do período (n-1) sobre o período n. Desta maneira fica definida uma iteração do nosso algoritmo. Cada projeção de um período sobre o período consecutivo é um problema de programação quadrática. No capítulo 3 fazemos a apresentação formal, matemática do algoritmo utilizado.

Para se resolver estes problemas de programação quadrática foi utilizado o sistema **MINOS** [7]. O **MINOS**, é um pacote computacional que resolve problemas de otimização que contenham função objetivo linear ou não - linear e restrições lineares. Ele foi escolhido por se tratar de um pacote computacional robusto, eficiente e que contém uma ótima estrutura de dados. Por sinal, no Capítulo 4 é desenvolvida a estrutura de dados utilizada pelo MINOS . A inclusão deste capítulo neste trabalho tem como objetivo orientar os futuros usuários que tenham a necessidade de se utilizar do MINOS de maneira iterativa. É bom ressaltar que o estudo da estrutura de dados do MINOS foi motivado pela necessidade de entrar com os dados do problema diretamente na memória, sem utilizar arquivos no disco, que é a maneira tradicional que o MINOS usa para receber os dados do problema. Observamos que o algoritmo de projeção é por si só lento e se utilizássemos o disco ele se tornaria mais lento ainda, tendo em vista que o procedimento de entrada e saída é o que se tem de mais lento na execução de um processo.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados das experiências computacionais que foram realizadas em um computador **VAX - 11 / 780** . São discutidos em detalhes as saídas gráficas geradas pela resolução do modelo.

Capitulo 2 : O Algoritmo utilizado

O algoritmo implementado para a resolução de sistemas de inequações lineares que tenham características de problemas de controle é uma derivação do método de projeções ortogonais sucessivas proposto por **Gubin et al** [3] . O algoritmo é um procedimento iterativo onde a solução do sistema global é encontrada resolvendo - se uma sequência de problemas quadráticos com q restrições cada um. Vamos entender melhor isto. Suponha que nós temos um sistema com M inequações lineares, sistema este considerado de porte enorme e com características de controle, portanto, não pode ser representado inteiramente na memória física do computador em uso. Uma versão informal do algoritmo pode ser escrita como :

Passos :

(1) Dividir o sistema de M restrições em R blocos, ou subsistemas, cada contendo q restrições, onde q = M/R

(2) Dê um ponto inicial qualquer

(3) It = 1 (it = índice da iteração)

(4) Ip = 1 (ip = índice do período ou bloco)

(5) Resolva o seguinte problema :

$$\text{Min} \sum (x^{it} - x^{it-1})^2$$

s/a

(Restrições que pertencem ao bloco ip)

(6) Se ip $\leqslant$ R então : Ip = Ip + 1

Vá para o pass 5

(7) Se $\| X^{it} - X^{it-1} \| \leqslant$ Eps então pare;

(8) It = It + 1

(9) Vá para 4

Observação : Devido a sua característica de controle, quando divimos o sistema em blocos, nós teremos variáveis que são comuns a dois blocos sucessivos. A essas variáveis nós daremos o nome de variáveis de acoplamento. Observe que ao terminarmos a resolução para um bloco qualquer, digamos o bloco b, as variáveis de acoplamento entre o bloco b e o bloco (b+1) entrarão na resolução deste último com seus valores alterados pela última projeção. Isto será melhor visto e explicado no Capítulo 4, onde exemplicamos o método utilizando o Modelo Matemático em Educação.

Em outras palavras, o método consiste em efetuar projeções ortogonais entre os vários conjuntos convexos . Achar uma projeção ortogonal entre dois conjuntos convexos é resolver um problema de programação quadrática no caso em que as restrições são lineares.

Este método tem convergência quando o interior do politopo definido pelas inequações lineares é não vazio. Neste trabalho nós não vamos nos ater em demonstrações de convergência do método, pois isso já foi exaustivamente colocado em outros artigos e teses (vide [1,2,3,5,6,8])

Capitulo 3 : O Modelo Matematico em Educacao

3.1 - Introducao

Melhorar o nivel da educacao e estender seus beneficios a todas as camadas da populacao e (ou pelo menos deveria ser) uma das metas prioritarias de qualquer pais em desenvolvimento.

Essa melhora no nivel educacional deve ocorrer em todas as fases do processo educacional : 1. grau , 2. grau , graduacao universitaria e pos - graduacao. O investimento financeiro, material e ate politico que nao fosse efetuado em conjunto com as quatro fases citadas acima, criaria uma desagregacao prejudicial ao processo educacional como um todo, pois os alunos do 1. grau precisam de professores formados, no minimo, pelo 2. grau que, por sua vez, necessitam de mestres com, pelo menos, o nivel universitario e assim por diante.

Portanto, a pergunta a ser respondida e : O pais e capaz de produzir os quadros educacionais e profissionais necessarios para satisfazer certas necessidades quantificaveis ao longo de um periodo de tempo ? O **Modelo Matematico em Educacao** tenta responder a esta pergunta.

3.2 - Formulacao Matematica do Modelo

Neste trabalho de tese nos vamos utilizar uma versao simplificada do modelo original pois a nossa intencao inicial e verificar como funciona o algoritmo de projecao proposto no capitulo anterior para sistemas de inequacoes lineares com caracteristicas de controle. A versao simplificada do Modelo Matematico em Educacao conserva a caracteristica de problema de controle e e mais facil de se implementar computacionalmente. E tambem, a resolucao do modelo simplificado nos permite entender melhor as caracteristicas qualitativas do modelo original.

3.2.1 - Definicao das Variaveis

(A) Variaveis Exogenas

Es(t) = Numero de estudantes secundarios no ano t

Pop(t) = Populacao total no ano t

(B) Variaveis Endogenas

Sc(t) = Numero de estudantes com secundario completo que nao estudam no ano t.

$Eu(1,t)$ = Estudantes universitarios que nao trabalham

$Eu(2,t)$ = Estudantes universitarios que trabalham

$Gu(t)$ = Estudantes que tem a graduacao universitaria completa

$V(1,t)$ = Vagas correspondentes a $Eu(1,t)$

$V(2,t)$ = Vagas correspondentes a $Eu(2,t)$

3.2.2 - Definicao das restricoes do modelo

(A) Equacoes Dinamicas

$$Sc(t+1) = a_1 Sc(t) + a_2 Es(t) - V(1,t+1) - V(2,t+1)$$

$$Eu(1,t+1) = (a_3 - a_4) Eu(1,t) + V(1,t+1)$$

$$Eu(2,t+1) = (a_3 - a_5) Eu(2,t) + V(2,t+1)$$

$$Gu(t+1) = a_6 Gu(t) + a_4 Eu(1,t) +$$

$+ \ a_5 Eu(2,t)$

(B) Restricoes de Continuidade

$C_2 X(t) \leqslant X(t+1) \leqslant C_1 X(t)$; para todas variaveis do modelo exceto para $V(1,t)$ e $V(2,t)$

$V(1,t+1) \geqslant V(1,t)$

$V(1,t+1) + V(2,t+1) \geqslant V(1,t) + V(2,t)$

(C) Restricoes de suprimento

$Sc(t) + 0.5Eu(2,t) \geqslant b_1 Pop(t) + b_2 Ep(t)$

$Gu(t) \geqslant b_3 Pop(t) + b_4 Es(t) + b_5 (Eu(1,t) + Eu(2,t))$

(D) Restricoes de Nao - Negatividade

Todas as variaveis devem ser maiores ou iguais a zero

3.2.3 - Significado das taxas a

$a_1 Sc(t)$ = Estudantes com secundario completo que nao estudam no ano t e ainda vivem no ano (t+1)

$a_2 Es(t)$ = Estudantes secundarios no ano t que completam os estudos e nao continuam estudando

$a_3 Eu(1,t)$ = Estudantes universitarios, que nao trabalham, no ano ano t e que ainda vivem no ano (t+1)

$a_4 Eu(1,t)$ = Estudantes universitarios, que nao trabalham, no ano t que se graduaram no ano (t+1)

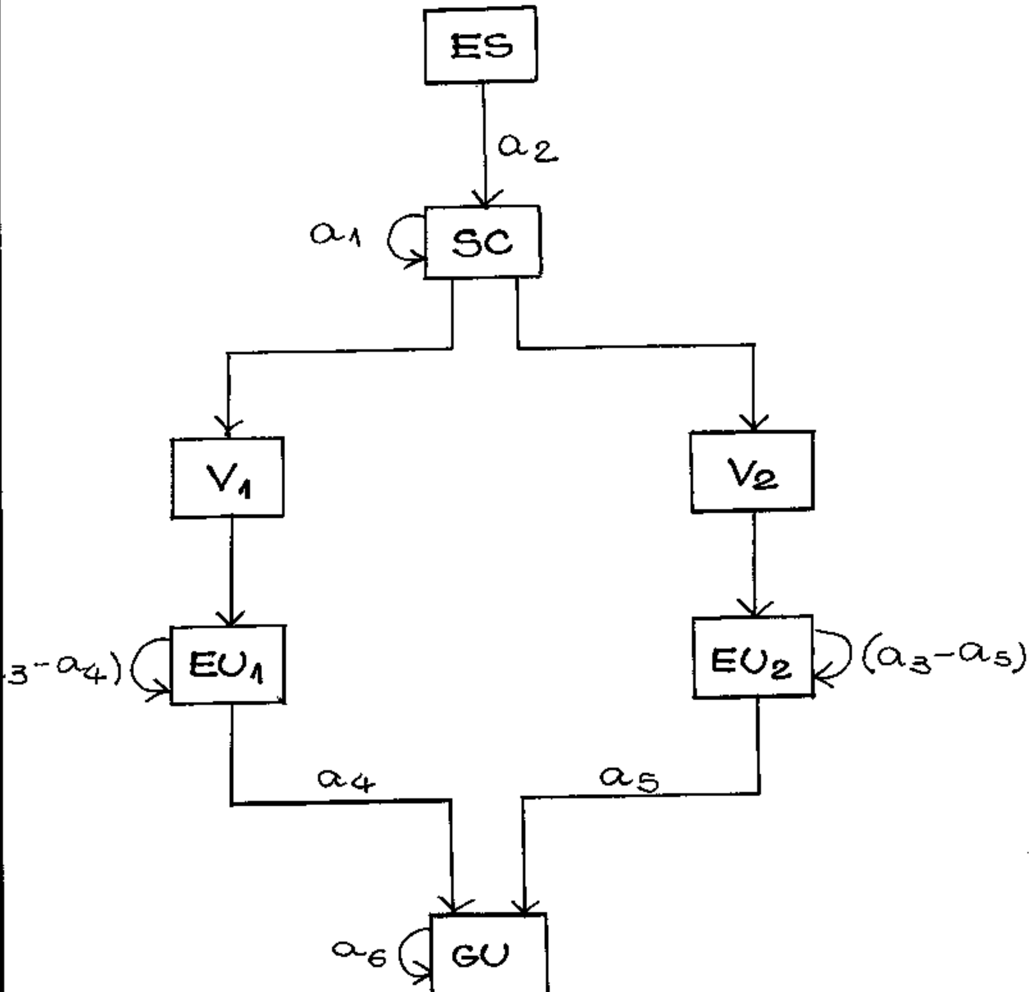
$a_3 Eu(2,t)$ = Idem a $a_3 Eu(1,t)$, so que trabalham

$a_5 Eu(2,t)$ = Idem a $a_4 Eu(1,t)$, so que trabalham

$a_6 Gu(t)$ = Estudantes com graduacao completa no ano t e que ainda vivem no ano (t+1)

3.2.4 - Diagrama de Fluxo

O diagrama de fluxo descrito abaixo, com certeza, dara uma visao melhor de como funcionam as restricoes do modelo.



3.3 - Estrutura da Matriz Tecnologica

Chamando de :

* EdSc = Equacoes dinamicas das variaveis Sc
* EdEu1 = Equacoes dinamicas das variaveis Eu1
* EdEu2 = Equacoes dinamicas das variaveis Eu2
* EdGu = Equacoes dinamicas das variaveis Gu
* RcSc = Restricoes de continuidade das variaveis Sc
* RcEu1 = Restricoes de continuidade das variaveis Eu1
* RcEu2 = Restricoes de continuidade das variaveis Eu2
* RcGu = Restricoes de continuidade das variaveis Gu
* RcV1 = Restricoes de continuidade das variaveis V1
* RcVq = Restricoes de continuidade das variaveis V1 e V2
* RsSc = Restricoes de suprimento das variaveis Sc
* RsGu = Restricoes de suprimento das variaveis Gu

A estrutura da matriz tecnologica pode ser representada pela figura 1.

	$EdSC$	$EdEU_1$	$EdEU_2$	$EdGU$	$RCSC$	$RCEU_1$	$RCEU_2$	$RCGU$	RCV_1	$RCVG$	$RSSC$	$RSGU$
SC	X				X						X	
EU_1		X		X		X						X
EU_2			X	X			X				X	X
GU				X				X				X
V_1	X	X							X	X		
V_2	X		X							X		

Por uma simples inspecao no quadro da figura 1, verificamos que a estrutura da matriz e uma estrutura escada com blocos internos esparsos, que e uma estrutura caracteristica dos problemas de controle.

3.4 - Numero de Restricoes e Numero de Variaveis

O numero de restricoes e de variaveis do problema global cresce a medida que se aumenta o horizonte de anos. A saber :

Numero de Variaveis : 6 * (Horizonte de anos)

Numero de Restricoes :

Equacoes dinamicas	= 4 * (Horizonte de anos)
Restricoes de Continuidade	= 10 * (Horizonte de anos) - 9
Restricoes de Suprimento	= 2 * (Horizonte de anos)
Total	= 16 * (Horizonte de anos) - 9

Capítulo 4 : Resolução Computacional do Modelo Matemático em Educação

4.1 - Introdução

Como já foi dito anteriormente o algoritmo de projeção descrito no Capítulo 2 é um processo iterativo, onde cada iteração é a resolução de um problema de programação quadrática com restrições lineares.

Para resolver esses problemas de programação quadrática foi utilizado o **MINOS** [7]. No caso específico deste trabalho, o **MINOS** foi alterado para comportar a entrada dos dados do problema sem a utilização de acesso a disco. Isto foi necessário para agilizar a aquisição dos dados do problema pelo **MINOS**, tendo em vista que, cada iteração se resume na resolução de vários problemas de programação quadrática e portanto, várias definições de diferentes problemas de programação quadrática.

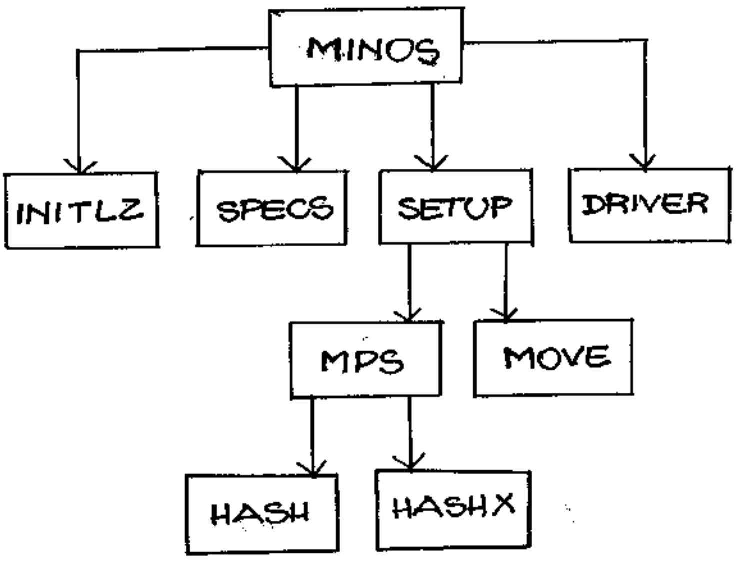
Na secção seguinte será apresentado a estrutura de dados do **MINOS** que servirá de auxílio para que outros usuários possam se utilizar do **MINOS** iterativamente.

Na secção 4.3 são apresentadas

as experiências numéricas que foram feitas para se resolver o **Modelo Matemático em Educação** utilizando o algoritmo de projeção.

4.2 - Estrutura de Dados do MINOS

O fluxograma abaixo ilustra o roteiro das rotinas utilizadas pelo **MINOS** para efetuar a entrada dos dados de um problema qualquer.



onde :

(1) Subroutine Initlz :

Fixa os parâmetros de dependência da máquina, as constantes de precisão da máquina, bem como as tolerâncias do problema.

(2) Subroutine Specs :

Realiza a leitura do arquivo Ispecs, arquivo este que contém os parâmetros que definem o problema a ser resolvido, tais como, tipo da otimização (Minimização ou Maximização), estimativa superior dos números de restrições e de variáveis do problema, número de variáveis não lineares (se o problema tiver), número máximo de iterações, etc .

Na modificação realizada no **MINOS** esta rotina foi desconsiderada e seus parâmetros foram assinalados diretamente no programa.

(3) Subroutine Mps :

Efetua a leitura do arquivo Mps que contém os dados do problema a ser resolvido. Este arquivo Mps é dividido em várias secções. A saber :

(1ª Secção) : **NAME** - define - se o nome do problema a ser resolvido.

(2ª Secção) : **ROWS** - define - se o tipo das restrições e seus respectivos nomes.

(3º Secção) : **COLUMNS** - define - se as variáveis do problema, a restrição onde esta variável se encontra e seu respectivo coeficiente.

(4º Secção) : **RHS** - define - se o lado direito das restrições do problema.

(5º Secção) : **BOUNDS** - define - se as variáveis canalizadas do problema.

(6º Secção) : **RANGES** - define - se as restrições canalizadas do problema.

Neste trabalho o arquivo Mps

desaparece, pois os dados do problema foram armazenados pelo MINOS sem a necessidade de acesso a disco. A maneira de como isto foi realizado será mostrada mais adiante.

(4) Subroutine Setup :

Esta é a rotina - mestre da entrada de dados do **MINOS**. É ela que comanda as chamadas da rotina Mps, passando os apontadores dos vetores que guardarão as informações obtidas por Mps.

Uma vez feita a apresentação das rotinas que efetuam a entrada de dados, vamos mostrar como o **MINOS** guarda e manipula estas informações adquiridas.

4.2.1 - O Vetor de Trabalho Z

O **MINOS** não trabalha com matrizes, ele " lineariza tudo ", isto é, trabalha com um vetor trabalho, **Z** , de dupla precisão (portanto, ocupa 2 palavras de memória = 8 Bytes) . Este vetor Z é posteriormente " quebrado ", de acordo com as necessidades, em vetores inteiros e reais de precisão simples. Esta " quebra " no vetor Z é implementada através de truques computacionais, seja através da utilização de passagem de parâmetros, bem como, através de multiplicação de números inteiros por uma potência conveniente de dois.

Os principais vetores que estão " embutidos " dentro do vetor de trabalho Z e suas respectivas funções no processo de entrada de dados, são apresentados a seguir :

*** HRTYPE**

Este vetor de dimensão igual ao número de restrições + 1, guarda a informação do tipo da restrição, isto é,

$$\text{HRTYPE}(\ i\ ) = \begin{cases} -1\ ; & \text{se a i-ésima restrição é do tipo " > "} \\ 0\ ; & \text{se a i-ésima restrição é do tipo " = "} \\ 1\ ; & \text{se a i-ésima restrição é do tipo " < "} \\ 2\ ; & \text{se a i-ésima restrição é do tipo livre} \end{cases}$$

HRTYPE é um vetor inteiro de M posições, onde M = número de restrições + 1

*** A**

A é um vetor real de precisão

simples que contém informações pertinentes aos coeficientes da matriz tecnológica.

*** HE**

O conteúdo da posição HE(j) contém o (endereço - 1) da j-ésima variável no vetor LA (que vai ser definido logo a seguir). HE é um vetor inteiro de dimensão NP1, onde NP1 = número de restrições + número de variáveis + 2.

*** LA**

É um vetor inteiro que contém informações sobre as variáveis do problema. Cada posição de LA guarda duas informações, pois ele é quebrado em duas metades, através da simples multipilicação de uma das informações por uma potencia adequada de 2. A metade esquerda contém o índice da restrição na qual se encontra a j-ésima variável. A metade direita contém o endereço em A do coeficiente que a j-ésima variável tem na restrição definida na metade esquerda.

Este procedimento de quebra de um vetor inteiro de 4 bytes em 2 vetores inteiros de 2 bytes não é difícil de se entender. Suponha que nós trabalhando com um computador de 32 bits, como o inteiro tem representação estendida no computador nós podemos quebrá - lo em 2 inteiros da seguinte maneira :

$$I.A = 2^{15} * (\text{ informação } 1) + (\text{ informação } 2)$$

a representação desta operação é :

I.A =	Informação 1	Informação 2

com a ressalva de que tanto o valor da informação 1 quanto o valor da informação 2 não devem exceder 2^{15} = 32768 . Os dois bits restantes não são considerados por uma questão de segurança .

Para recuperarmos estas informações fazemos :

Informação 1 = Int(LA / 2)

Informação 2 = Mod(LA / 2)

onde Int = função de biblioteca que nos dá a parte inteira do argumento

Mod = função de biblioteca que nos dá o resto da divisão do argumento

Estes vetores apresentados acima são os principais vetores utilizados para se guardar as informações dos dados do problema. Um exemplo prático servirá para solidificar a compreensão desta estrutura.

Suponha que nós queremos resolver o seguinte problema :

$$\textbf{Min } z = x^2 + (y - 1)^4 - 4x + z$$

s/a

$$
\begin{array}{lcr}
x + y & & \leqslant 2 \\
x + y & - z & = 0 \\
x & & \geqslant 0 \\
& 1 < z & \leqslant 5 \\
& y \text{ livre} &
\end{array}
$$

Em primeiro lugar o **MINOS** calcula os apontadores do vetor Z que dará a posição inicial dos vetores " embutidos " dentro do vetor Z. Estes apontadores são calculados abaixo .

*** KHR = 1**

O apontador acima marca o início de HRTYPE no vetor Z. Como HRTYPE representa o tipo das restrições e da função objetivo, sua dimensão é igual ao número total de restrições + 1, vamos chamar este valor de M. Devemos ter em mente também, que HRTY-

PE é um vetor inteiro e portanto gasta exatamente M/2 posições no vetor Z, logo o apontador do próximo vetor HE no vetor Z é :

*** KHE = KHR + M/2 + 1**

HE representa o número de variáveis do problema, incluindo as variáveis de folga, logo sua dimensão é igual ao (número de variáveis originais + número de restrição + 1 + 1), aqui vale uma observação : O primeiro + 1 refere - se à função objetivo e o segundo refere - se ao vetor b que é encarado como mais uma variável do problema. Vamos chamar de NP1 o valor calculado acima. Sabendo - se que HE é precisão simples temos que o apontador do vetor LA em Z será :

*** KLA = KHE + NP1/2 + 1**

LA contém informações implícitas a respeito dos coeficientes da matriz tecnológica, portanto, sua dimensão é exatamente o número de elementos não nulos da matriz. Sendo LA um vetor de precisão simples, ele ocupa MELMS/2 posições no vetor Z, onde MELMS = número de elementos não nulos na matriz tecnológica. Logo, o apontador do próximo vetor em Z será :

*** KAX = KLA + MELMS/2 + 1**

A contém os coeficientes das

variáveis na matriz tecnológica. Este vetor guarda apenas os coeficientes não nulos e diferentes entre si, portanto, sua dimensão é MDIST, onde MDIST = número de elementos não nulos distintos entre si. Como A é real de precisão simples , o próximo apontador será :

*** KBL = KAX + MDIST/2 + 1**

BL é o vetor que contém os limites inferiores das variáveis do problema, incluindo as de folga e o vetor b. Sua dimensão é N = número de restrições + 1 + número de variáveis + 1. BL também é um vetor real de precisão simples, portanto, o próximo apontador é calculado :

*** KBU = KBL + N/2 + 1**

BU é um vetor real que contém os limites superiores das variaveis do problema, portanto, tem as mesmas características de BL. Então, o próximo apontador será :

*** KHB = KBU + N/2 + 1**

HB é um vetor inteiro que contém os índices das variáveis básicas e superbásicas. Sua dimensão é MN = número de restrições + número de variáveis originais . Portanto, o próximo apontador em

Z começará em :

*** KXN = KHB + MN/2 + 1**

XN é um vetor real de dupla precisão que contém os valores das variáveis que aparecem de maneira não linear na função objetivo . Sua dimensão é NN = número de variáveis não lineares. E , consequentemente, o próximo apontador do vetor será :

*** KHS = KXN + NN**

HS é um vetor inteiro que contém informações a respeito do estado da j-ésima variável na matriz [A b I]. Este vetor é utilizado no caso de querermos entrar com uma base inicial.

Os vetores definidos acima, bem como seus apontadores, são os principais vetores utilizados para a manipulação dos dados de entrada do MINOS. Para maiores esclarecimentos veja referência [7].

O esquema abaixo mostra como são representados os vetores definidos acima no vetor de trabalho Z :

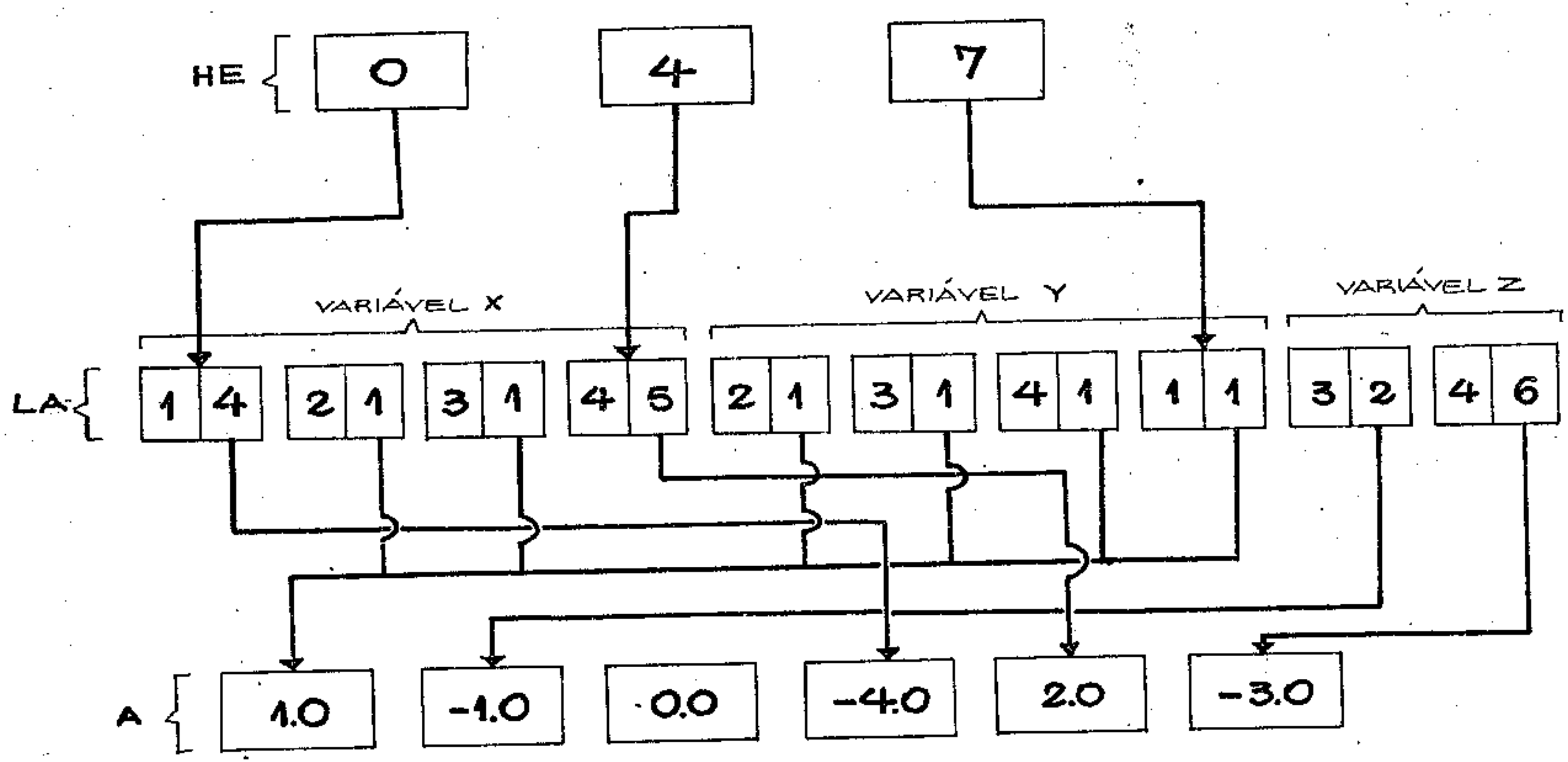
Z(1) =	Hrtype(1)	Hrtype(2)
Z(2) =	Hrtype(3)	Hrtype(4)
....	....	....
....	....	....

Z(M/2)	=	Hrtype(M-1)	Hrtype(M)
Z(1+M/2+1)	=	He(1)	He(2)
Z(1+M/2+2)	=	He(3)	He(4)
....		....	....
....		....	....
Z(M/2+2+NP1)	=	He(NP1-1)	He(NP1)
Z(M/2+NP1+3)	=	La(1)	La(2)
Z(M/2+NP1+4)	=	La(3)	La(4)
....		....	....
....		....	....
Z(M/2+NP1+Melms)	=	La(Melms-1)	La(Melms)

e assim por diante.

A representação da estrutura de dados do MINOS para o exemplo dado é :

ESTRUTURA DE DADOS NO MINOS



4.3 - Experiências Computacionais

4.3.1 - Introdução

A nossa intenção neste trabalho era verificar como funcionava o algoritmo de projeção, descrito no Capítulo 2, para problemas com características de controle. Com este propósito, nós desenvolvemos o Modelo Matemático em Educação para um horizonte de 15 anos.

4.3.2 - O Modelo Matemático em Educação com Horizonte de 15 Anos

Baseado na estrutura do Modelo Matemático em Educação, desenvolvido para um horizonte de 15 anos, podemos calcular alguns parâmetros do problema que serão úteis na resolução computacional. A saber :

(A) Número de variáveis (N)

Período 1,2,3,... = 6 * ih

onde ih = (Horizonte de anos)/(Número de períodos)

(B) Número de restrições (M)

Período 1 = 16 * ih - 8

Período 2,3,... = 16 * ih + 1

(C) Número de elementos não nulos

Período 1 = 44 * ih + M - 22

Período 2,3,... = 44 * ih + M

(D) Número de elementos distintos entre si

Período 1 = 3 * ih + 17

Período 2,3,... = 3 * ih + 13

(E) Memória gasta pelo MINOS para resolver o MME para um horizonte de t anos

Memória $= 36t^2 + 505t + 117$

Portanto, ao resolvermos o MME com um horizonte de 15 anos utilizando 3 períodos temos um problema com as seguintes características :

*** Número de variáveis por período**

Período 1,2 e 3 = 30 variáveis

* **Número de restrições por período**

Período 1 = 72 restrições

Período 2 e 3 = 81 restrições

* **Número de elementos não nulos por período**

Período 1 = 270 elementos não nulos

Período 2 e 3 = 301 elementos não nulos

* **Número de elementos distintos entre si por período**

Período 1 = 32 elementos distintos

Período 2 e 3 = 28 elementos distintos

* **Memória gasta por período**

Período 1,2 e 3 = 3542 posições de memória

≈ 7 Kwords

Se nós considerássemos o **MME** com horizonte de quinze anos, sem dividí - lo em períodos, nós teríamos :

* **Número de variáveis** ≈ 90

* **Número de restrições** ≈ 232

* **Número de elementos não nulos** ≈ 892

* **Memória utilizada** ≈ 15.792 posições ≈ 31 Kwords

Como vimos a relação entre memória x anos não é linear, portanto, para um número suficientemente grande, a idéia de se quebrar o problema original em vários blocos pode ser a única maneira viável de resolve - lo .Observe, também, que no cálculo da memória nós não consideramos a memória gasta pelo **pacote Minos** que é cerca de 104 Kbytes, o que sem dúvida é uma quantia considerável.

O gráfico da figura 3 representa a quantidade de memória necessária para rodar o programa sem particioná - lo em períodos

4.3.3 - Executando o programa com horizonte de quinze anos e número de períodos igual a tres

A primeira experiência numérica que nós fizemos foi a resolução do **MME** com horizonte de 15 anos e número de períodos igual a 3. A nossa expectativa inicial em relação a este tipo de algoritmo era otimista, tendo em vista que a literatura do assunto indicava experiências bem sucedidas na aplicação do algoritmo [3,5].

O esquema abaixo representa o algoritmo para o problema com horizonte de 15 anos e 3 períodos.

Passos :

(**1**) Dê o ponto inicial X

(**2**) Especifique o número máximo de iterações

(**3**) Dê o Epsilon do critério de parada

(**4**) Faça It = 1 (índice da Iteração)

(**5**) Faça Ip = 1 (índice do Período)

(**6**) Gere os dados do problema referentes ao período (bloco) Ip

(**7**) Resolva o problema de programação quadrática correspondente ao bloco

Ip

(8) Se Ip $\leqslant$ 3 então : Ip = Ip + 1
Vá para o passo 6

(9) Se $\| X^{it} - X^{it-1} \| \leqslant$ Eps
então: Vá para o passo 13

(10) Se It = Número máximo de iterações
então : Vá para para o passo 13

(11) It = It + 1

(12) Vá para o passo 5

(13) Fim do procedimento

O Eps utilizado para a primeira execução do programa foi de 10^{-3} e o número máximo de iterações foi igual a 100.

Após as 100 iterações permitidas não foi alcançada a precisão desejada. Com os resultados obtidos das impressões entre cada iteração nós calculamos quantas iterações seriam necessárias para que se alcançasse a precisão de 10^{-3}. A taxa de convergência do algoritmo pôde ser facilmente calculada. Com esta taxa de convergência em mãos, o número de iterações necessárias para que obtivéssemos a precisão de 10^{-3} saiu da relação :

$$291152.36 * (0.9430)^{n} < 10^{-3}$$

dif. max. taxa eps

da 1º it. de

conv.

$$n > 333 \text{ iterações}$$

Isto queria dizer que precisávamos de 333 iterações para alcançarmos a precisão de 10^{-3}. Como cada iteração consumia em média 25 segundos de CPU, este problema seria resolvido utilizando - se cerca de 8325 segundos de CPU , ou 2.3 horas de CPU, o que , sem dúvida é uma enormidade !

O fato de se ter uma taxa de convergência próxima de 1, e pior ainda, de o algoritmo " realizar " assimptóticamente esta taxa é explicado por alguns autores para outras generalizações do Método de Projeção (ver [1,2,3]) .O termo " taxa de convergencia " deve ser entendido como $\| X^{it+1} - X^{it} \|$ dividido por $\| X^{it} - X^{it-1} \|$, e ele será usado em outras partes deste texto com este sentido. É uma limitação natural, e séria, deste tipo de métodos. Na prática resulta na impossibilidade de resolver problemas com precisão alta. Problemas práticos onde a precisão requerida é baixa existem. Os problemas de reconstrução de imagens pertencem muitas vezes a esta classe.

O problema de controle que estudamos neste trabalho também é deste tipo!

As razões são as seguintes :

(1) O " resultado " esperado é uma saída gráfica (saídas numéricas são poucos manejáveis) onde a precisão está limitada pela resolução do sistema e a capacidade visual do observador.

(2) O modelo , e seus parâmetros , são em si mesmo poucos precisos devido ao assunto que representam : é o caso de todos os modelos econômicos - sociais . Logo, tem pouco significado exigir uma alta precisão na solução quando esta não existe nos dados, nem na própria estrutura do modelo.

Com estes argumentos em mente, realizamos novamente as experiências numéricas utilizando como precisão requerida a " precisão visual " do observador. Para isto foi plotado o resultado do processo iterativo de 5 em 5 iterações. O processo termina quando as variáveis de acoplamento, isto é, as variáveis que são comuns a dois blocos sucessivos, se aproximam uma da outra até que não sejam mais notadas diferenças entre dois gráficos consecutivos.

4.3.4 - Os gráficos obtidos

Os gráficos correspondentes aos resultados obtidos executando o programa para um horizonte de 15 anos e número de períodos igual a 3 são apresentados no Apêndice I .Inicialmente é apresentado o ponto inicial e os demais gráficos são apresentados de 5 em 5 iterações para cada variável do modelo. Note que à medida que o processo vai avançando a distância entre cada variável de acoplamento vai diminuindo e as 3 curvas que representam os resultados de cada bloco vão se transformando em apenas uma curva. Em conjunto com as curvas de cada bloco é apresentada também a curva que corresponde a resolução do modelo sem particioná - lo em blocos (vide a curva representada pelo símbolo " + ") .É interessante notar que ao longo das iterações as curvas correspondentes aos blocos vão tomando a forma da curva gerada pela resolução do modelo sem partição mas não passa exatamente em cima de todos os pontos, isto ocorre porque o nosso problema é achar um ponto factível do nosso sistema de inequações e não necessariamente precisamos ter a mesma resolução do modelo resolvido globalmente .

Os gráficos são apresentados até a iteração 80, onde a precisão visual foi alcançada.

Os gráficos correspondentes às variáveis V1 e V2 indicam ao planificador de que forma (linear ou não) ele deve manipular as vagas, representada pelas variáveis V1 e V2, de maneira a acarretar o desenvolvimento das variáveis **Sc , Eu1 , Eu2 e Gu** conforme descrito pelos gráficos correspondentes. É importante ressaltar que o planificador , ao tomar qualquer atitude, deve ter em mente que na resolução de um problema de controle os últimos estágios (anos no nosso caso) não devem serem considerados pois são resultados não confiáveis . No nosso problema com horizonte de quinze anos , é prudente considerar as respostas até os cincos primeiros .

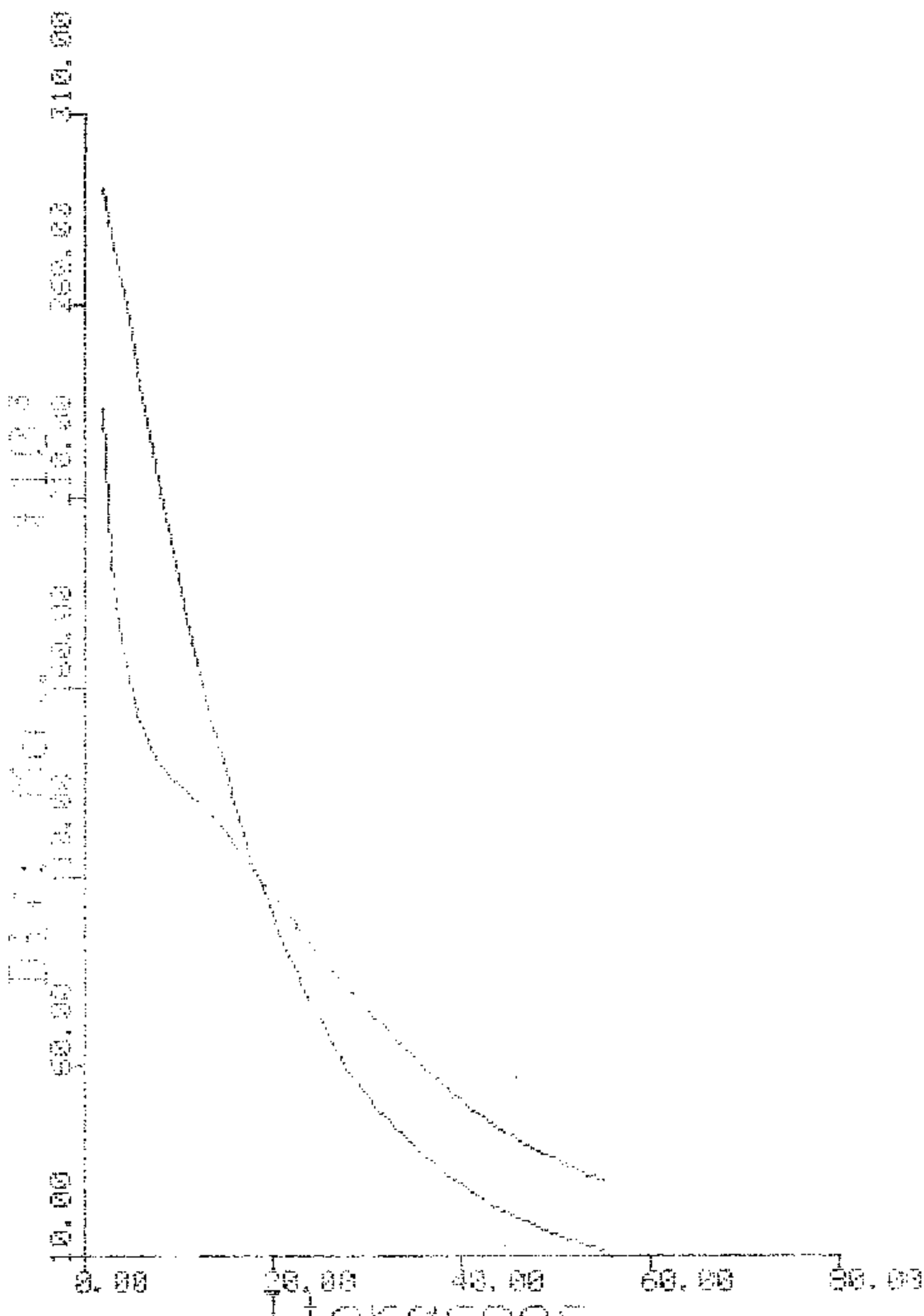
4.3.5 - Executando o problema com horizonte de quinze anos e número de períodos igual a cinco

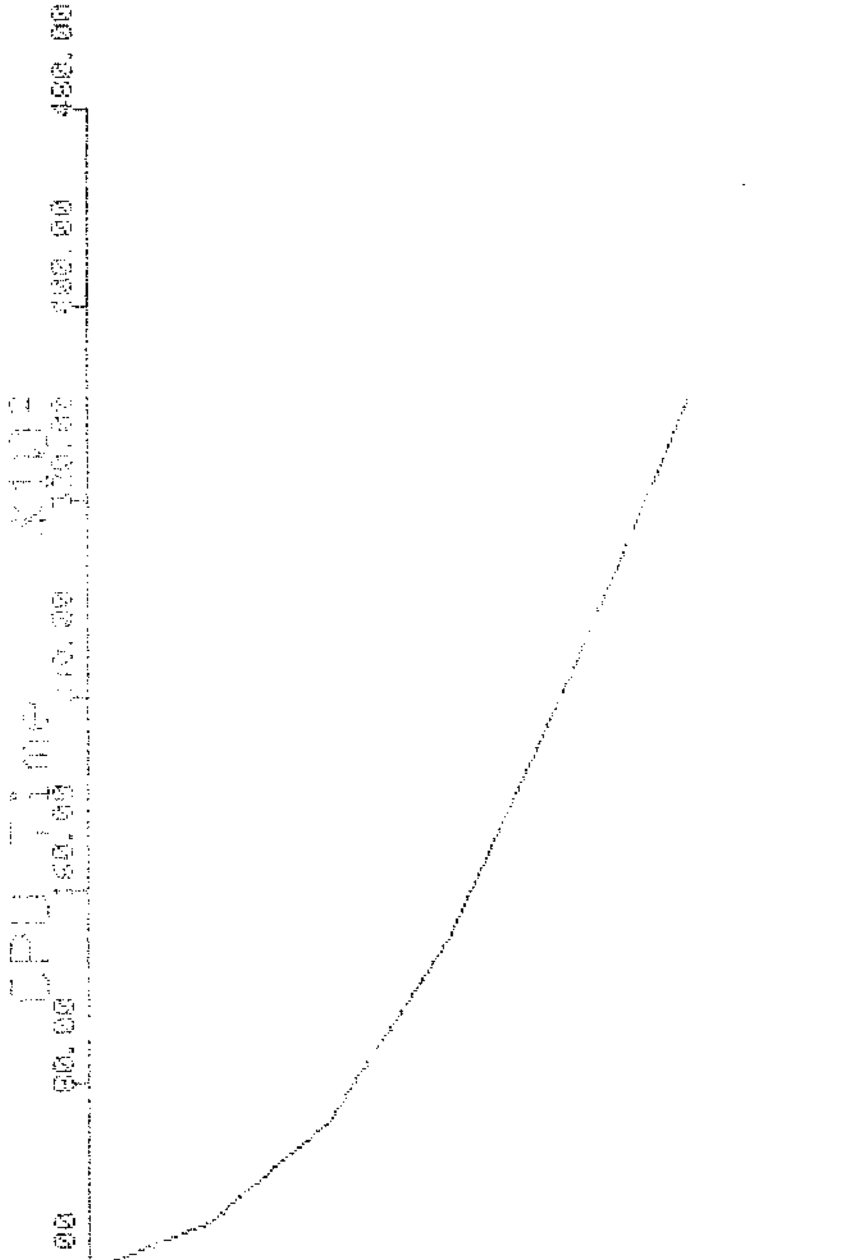
A taxa de convergência para este caso é mais próxima de 1 do que considerando o problema com número de períodos igual a 3. Ela é da ordem de 0.9629, o que nos dá um número de iterações maior ou igual a 510 para que a precisão de 10^{-3} fosse alcançada. Isto quer dizer que o problema particionado em 3 blocos converge mais rapidamente. Isto pode ser notado examinando os gráficos do Apêndice II com os do Apêndice I .

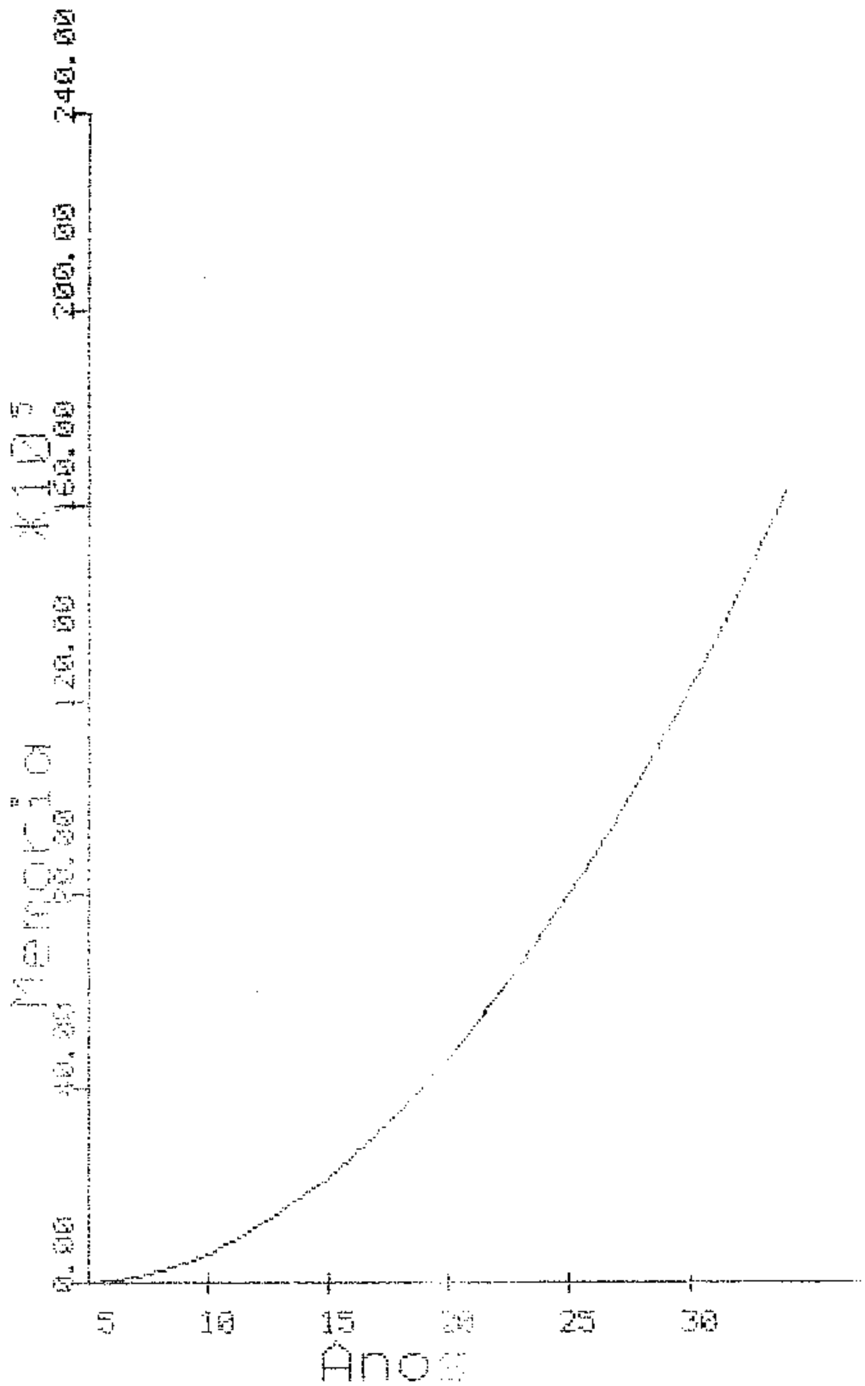
4.3.6 - Outros gráficos

O gráfico das figura 4 mostra a progressão da diferença máxima versus número de iterações considerando - se os dois casos estudados. Olhando o gráfico é fácil verificar qual curva pertence ao problema particionado em 3 blocos e qual pertence ao problema particionado em 5 blocos. Este gráfico nos dá duas informações importantes : (1) Devemos dividir o sistema global no menor número de blocos possível pois , assim a convergência é mais rápida. (2) O método converge rapidamente nas primeiras iterações, ou seja, alcança uma precisão razoável em poucas iterações mas a partir daí o processo torna - se lento . Isto significa que para problemas que requeiram pouca precisão o método torna - se operacional .

O gráfico da figura 5 refere - se ao tempo de CPU gasto para se resolver globalmente o Modelo Matemático em Educação.


310.00
10.00
0.00
20.00
40.00
60.00
80.00
Iteracoes


CPU Time
0.00
80.00
5
10
15
20
25
30
Anos


Memória *10^5
0.00
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
20
25
30
Anos

Capítulo_5 : Conclusão

Com o desenrolar da tese pudemos verificar que os métodos de projeção funcionam bem para aqueles problemas que não exigem uma precisão muito forte, ou seja, para alguns problemas do tipo de reconstrução de imagens, bem como problemas econômicos - sociais. Para problemas que necessitam de uma precisão mais apurada nós não indicamos o uso dos métodos de projeção devido a sua característica de ter uma taxa de convergência muito próxima de 1, a não ser que o artifício de se quebrar o problema em blocos seja a única maneira de resolvê -lo . Mesmo assim é bom ter em mente se a sua resolução compensa econômicamente falando, pois com certeza uma grande quantidade de tempo de CPU será gasta.

Um outro ponto que pode ser explorado é em relação ao número ideal de blocos. O bom senso nos diz que se o problema em mãos é de porte enorme, então nós devemos particioná - lo na menor quantidade de blocos possível, de tal maneira que cada bloco possa ser manipulado pela memória física do computador. Veja os gráficos expostos na secção 4.3.6 .

Sem dúvida as pesquisas dos métodos de projeção continuarão, pois mesmo considerando seus aspectos negativos, os métodos de projeção podem se constituir na única ferramenta possível para a resolução de alguns problemas de porte enorme.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carlos , L.A. - " Métodos de projeção para problemas de porte enorme " Tese de Mestrado - IMECC Unicamp - Dez / 84

[2] Gastinel , N - " Analyse Numérique Linéaire " Herman , Paris , 1966

[3] Gubin , L.G. , Polyak , R.T. & Raik , E.V. - - " Methods of projections for finding the common point of convex sets " U.S.S.R. Computacional Mathe - matics and Mathematical Phy - sics Nº 7 - 1967 - pag 1 --> 24

[4] Martinez , J.M. - " Modelo de Educação : Um problema para o G.T.O. " Relatório Interno nº 240

[5] Martinez , J.M. - " Solving systems of nonlinear equations by means of accele-

rated sucessive orthogonal "
projections methods
(a ser publicado)

[6] Martinez , J.M. & Sampaio , R.J.B - " Parallel and sequential Kaczmarz methods for solving under - termined nonlinear equations " Journal of Computational and Applied Mathematics (por aparecer)

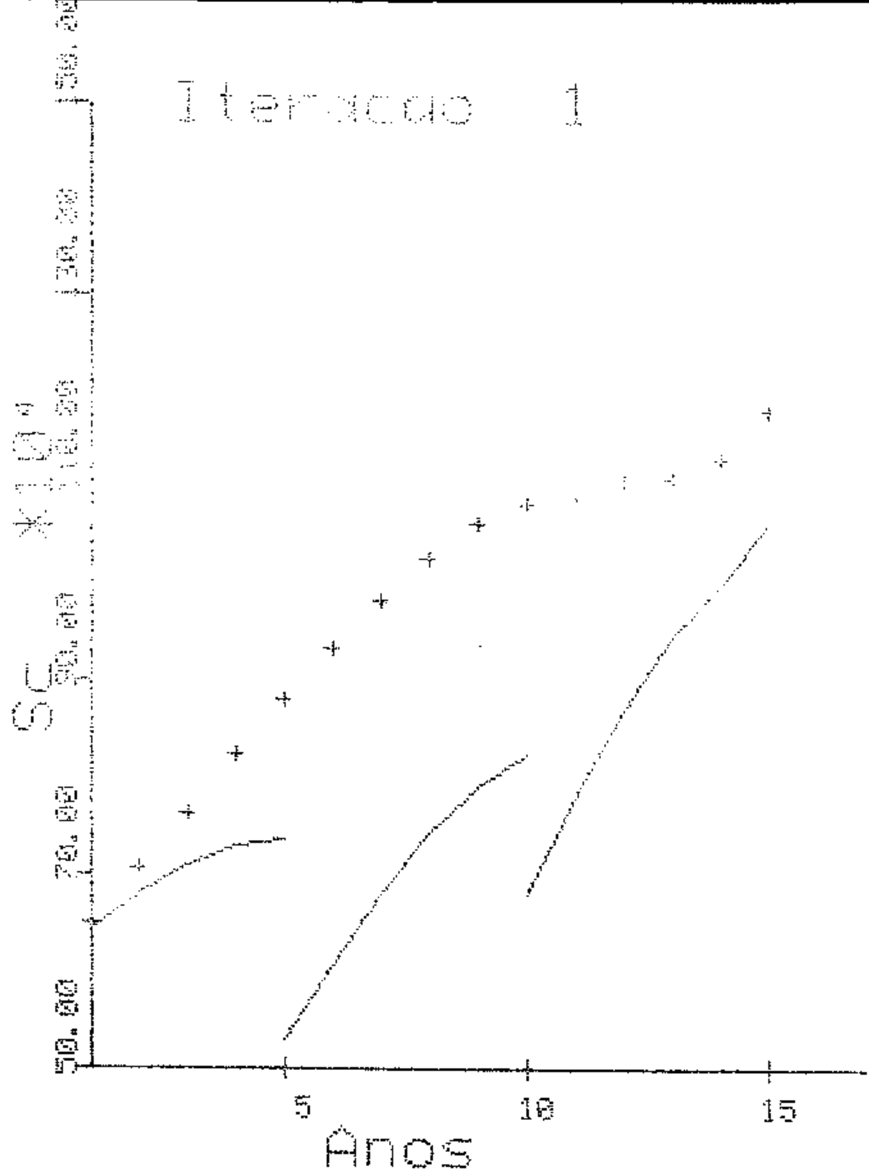
[7] Murtagh , B & Saunders - " A Modular In - Core Nonlinear Optimization System " Pacote computacional dispo - nível no LABMA

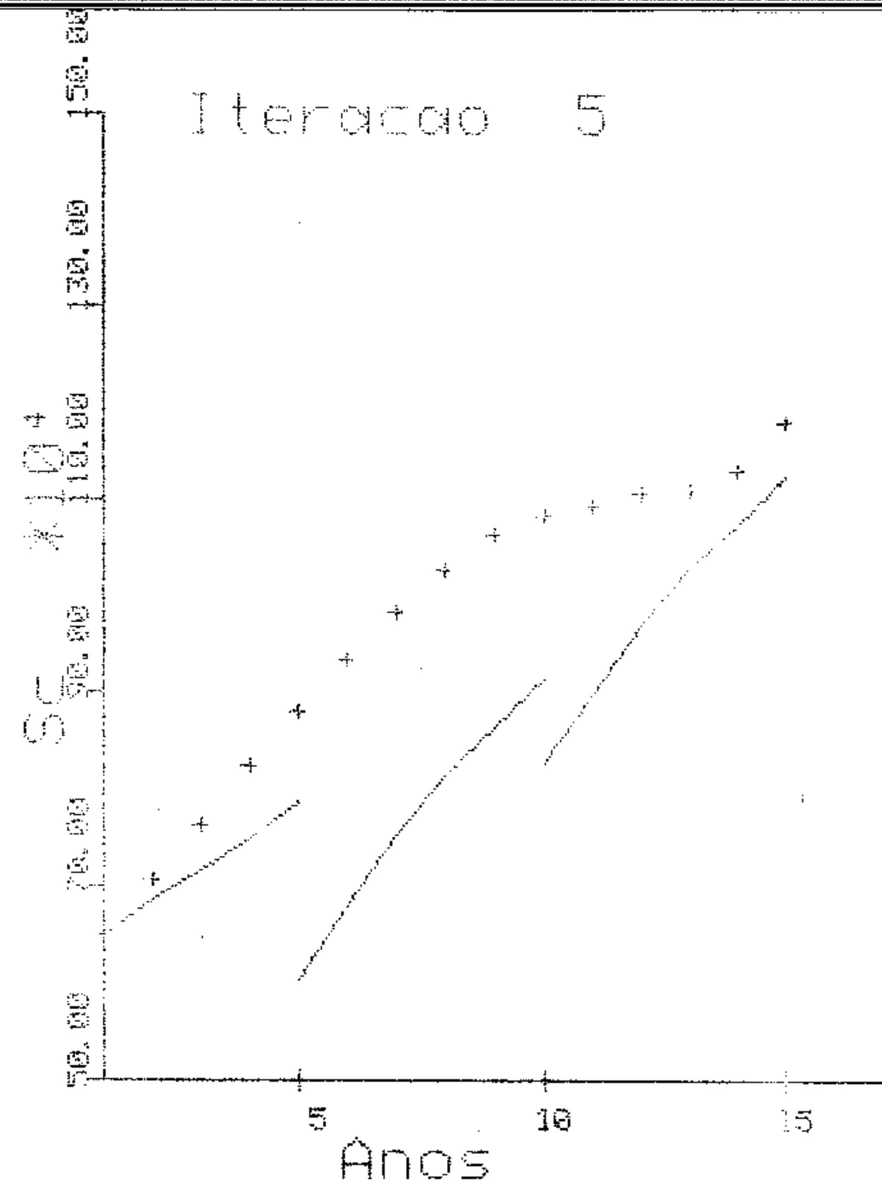
[8] Santos , L.T. - " Métodos de projeção do sub - gradiente para o problema de factibilidade convexa " Tese de Mestrado - IMECC Unicamp

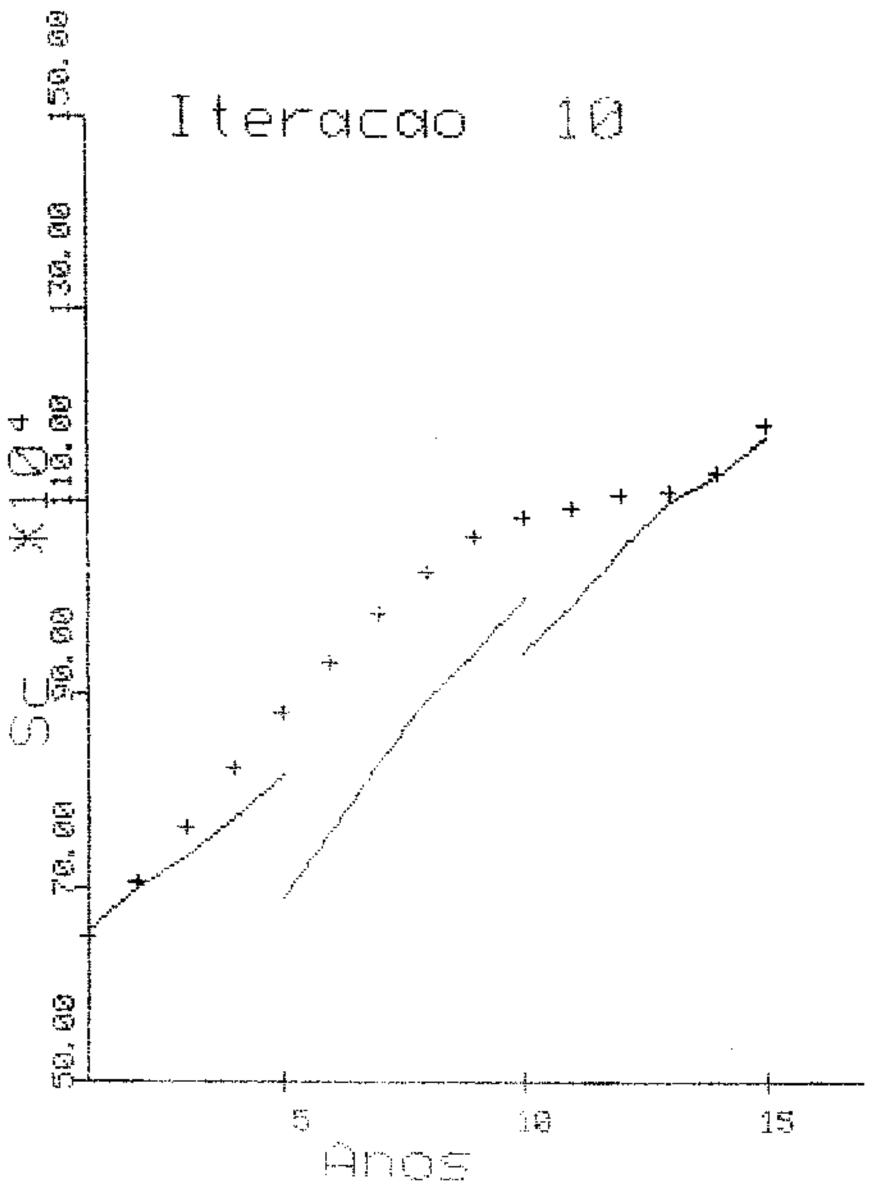
Apêndice I

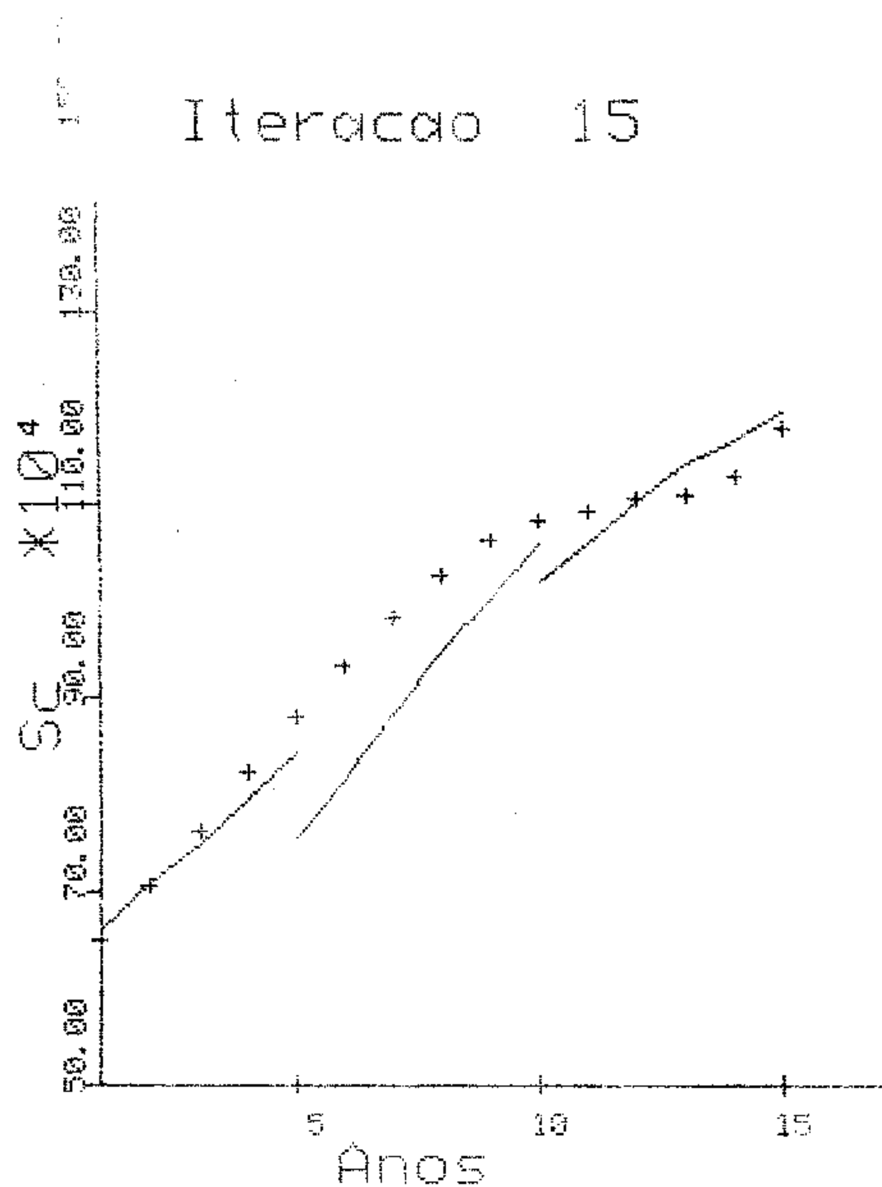
Horizonte de Quinze Anos

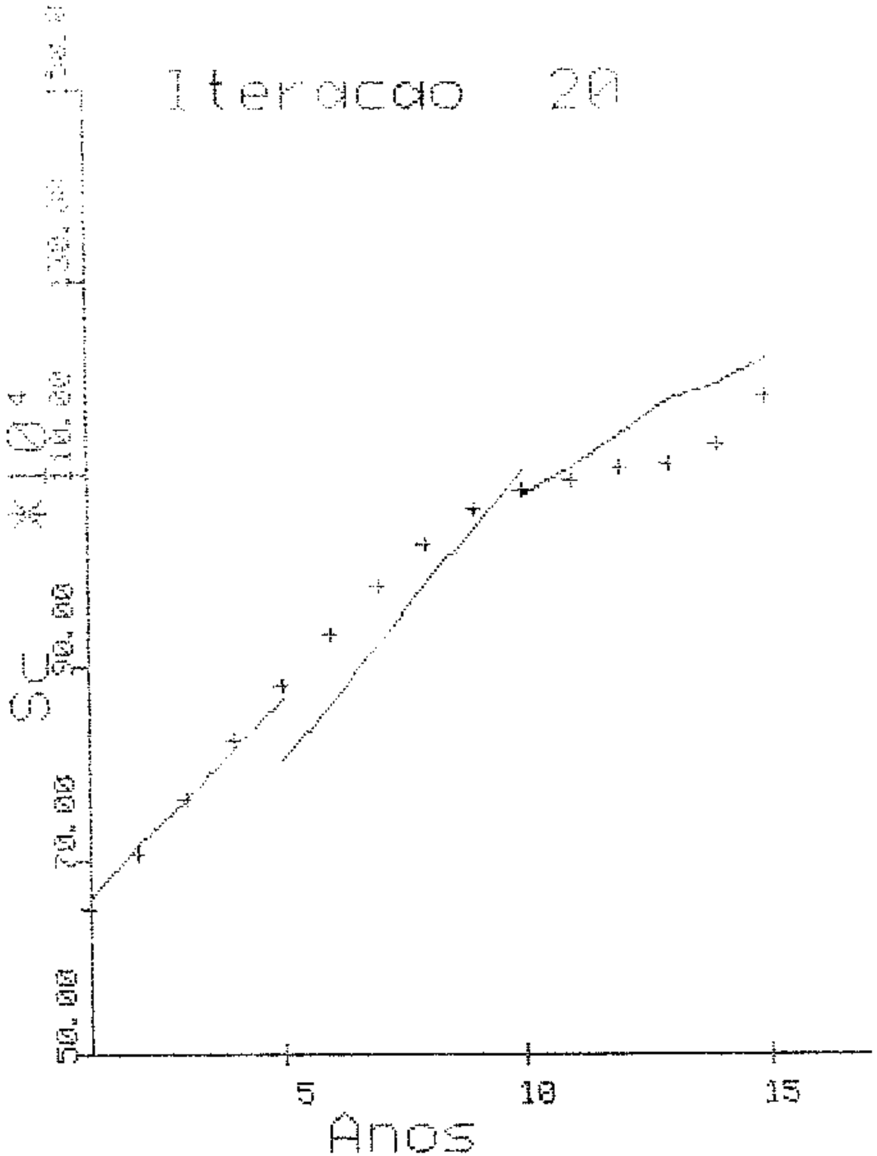
Número de Períodos Igual a Três

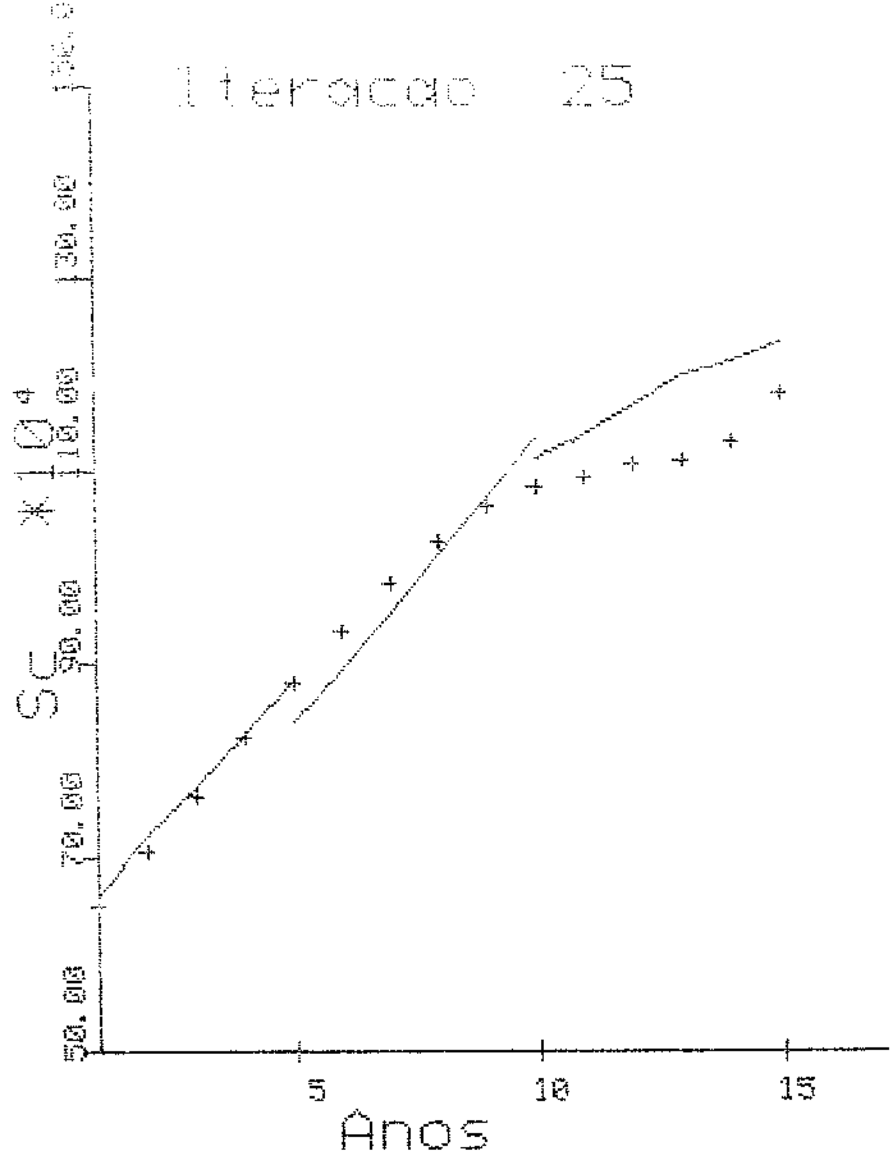

Iteracao 1
SC *10⁴
150.00
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
5
10
15
Anos

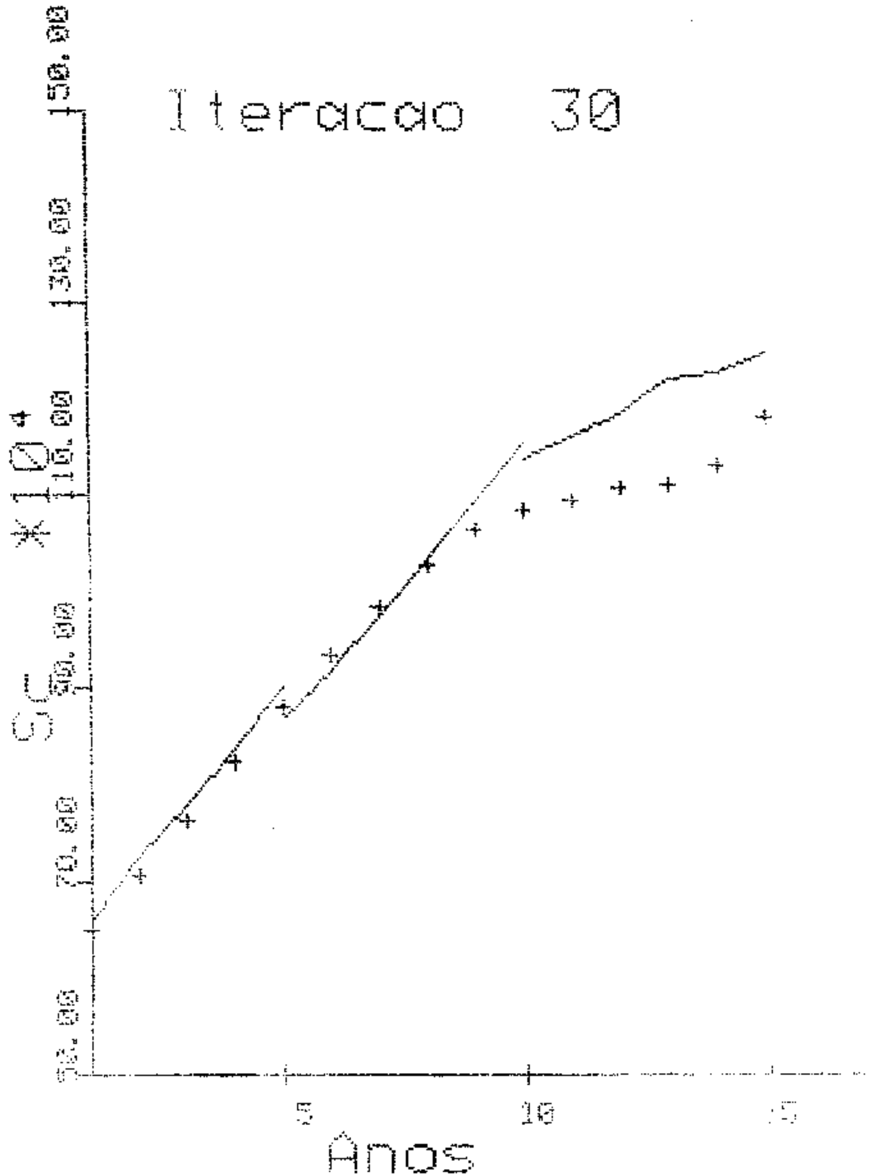

Iteracao 5
SC *10⁴
150.00
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
5
10
15
Anos

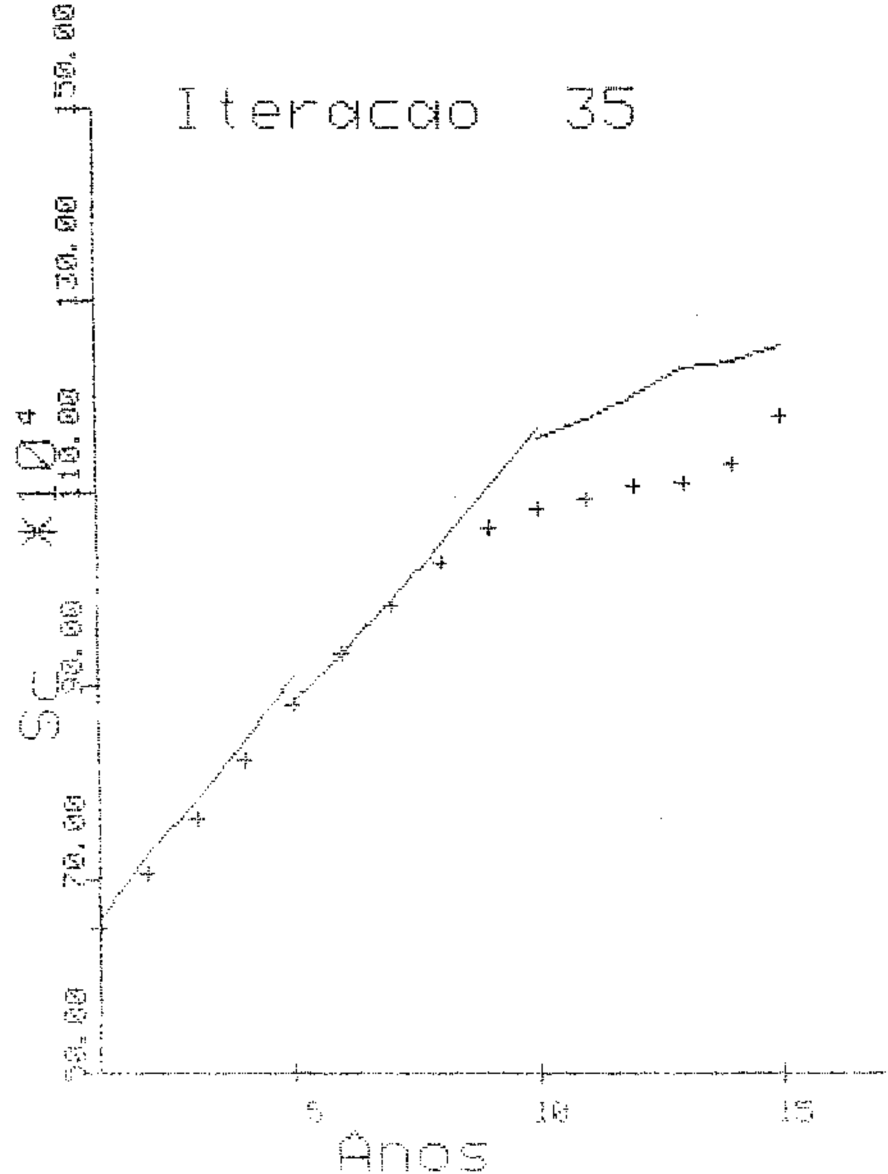

Iteracao 10
SC *10⁴
150.00
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
5
10
15
Anos

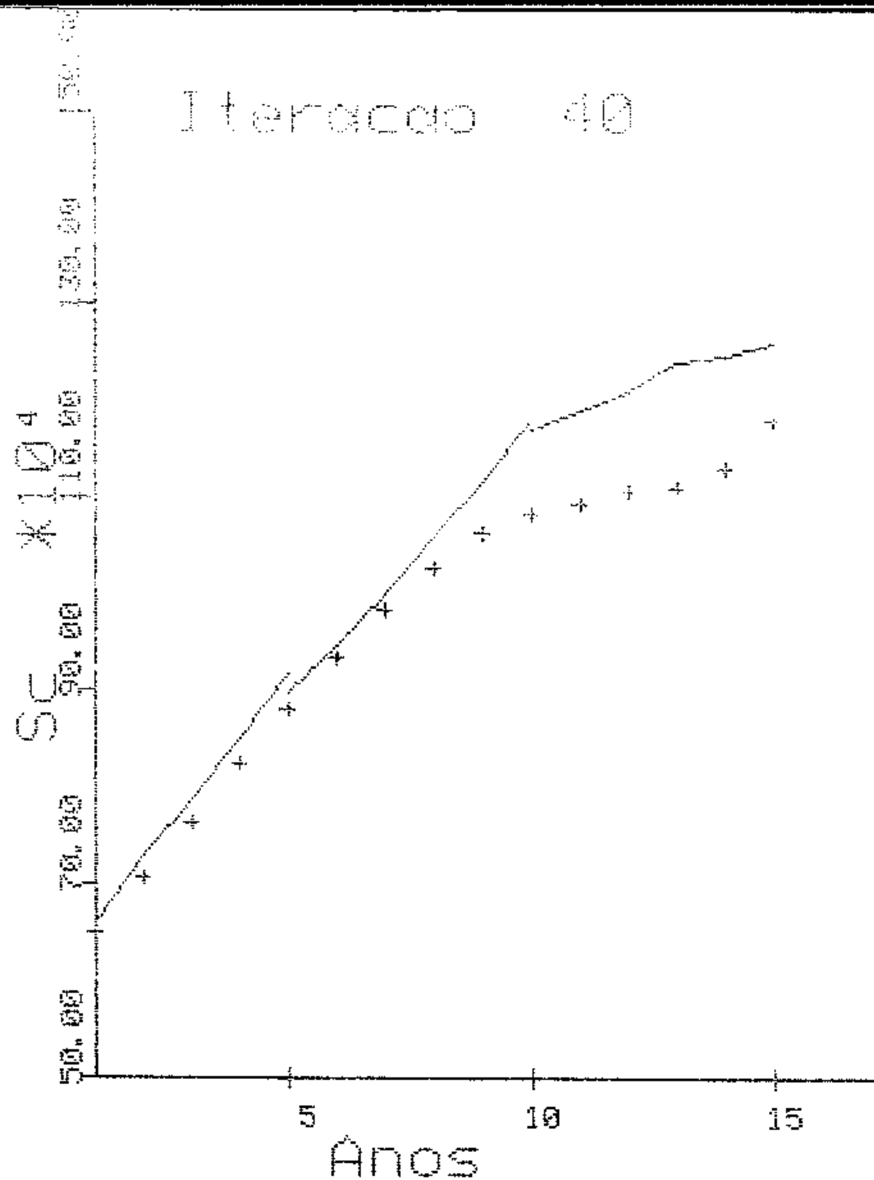

Iteracao 15
SC *10⁴
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
5
10
15
Anos

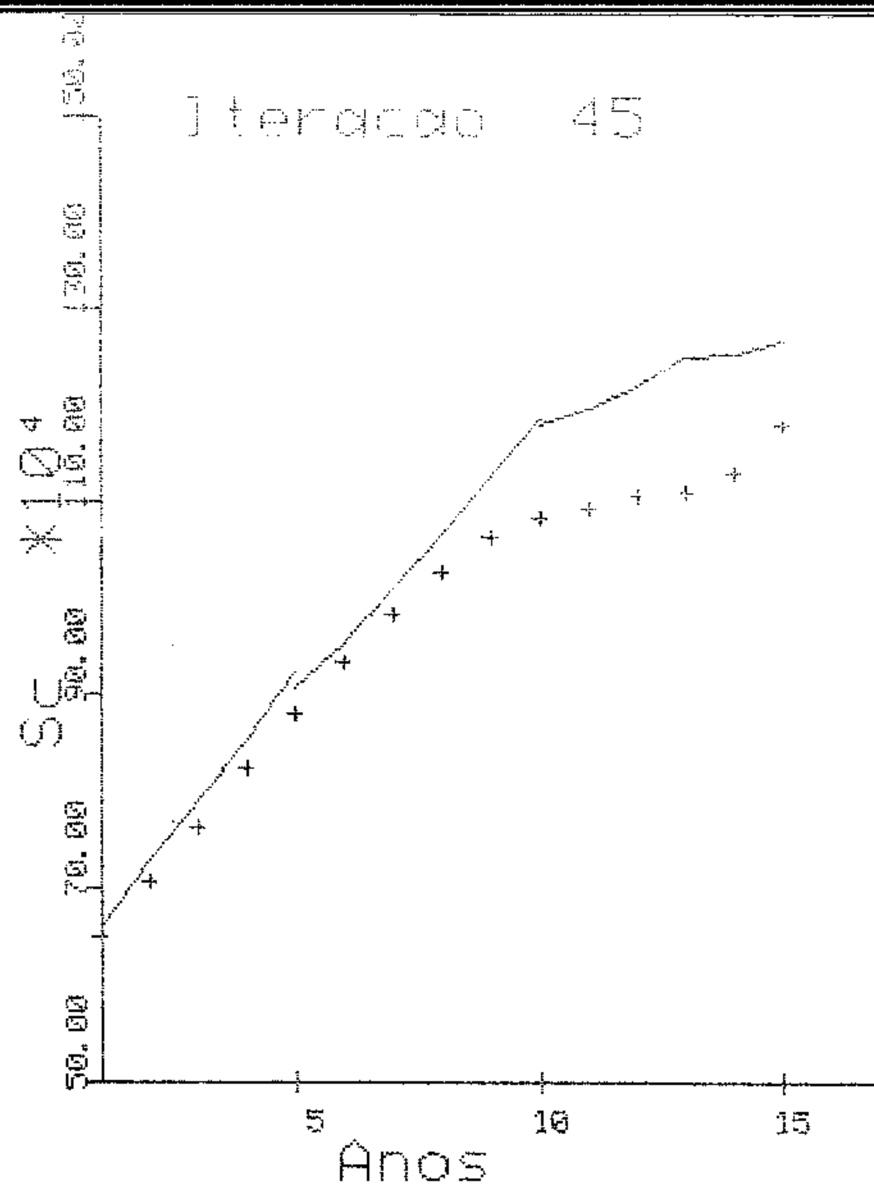

Iteracao 20
SC *10⁴
50.00
70.00
90.00
110.00
130.00
150.00
5
10
15
Anos

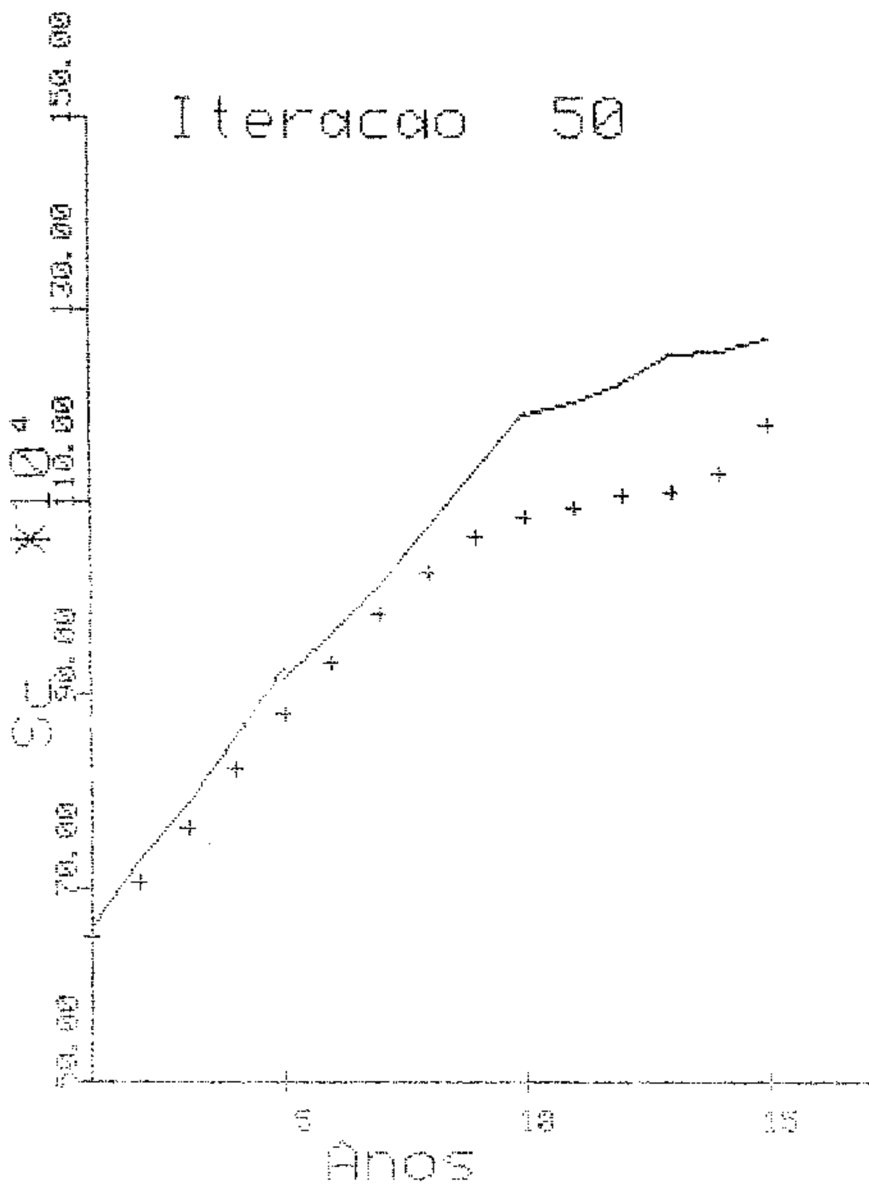

Iteracao 25
SC *10⁴
50.00
70.00
90.00
110.00
130.00
150.00
5
10
15
Anos

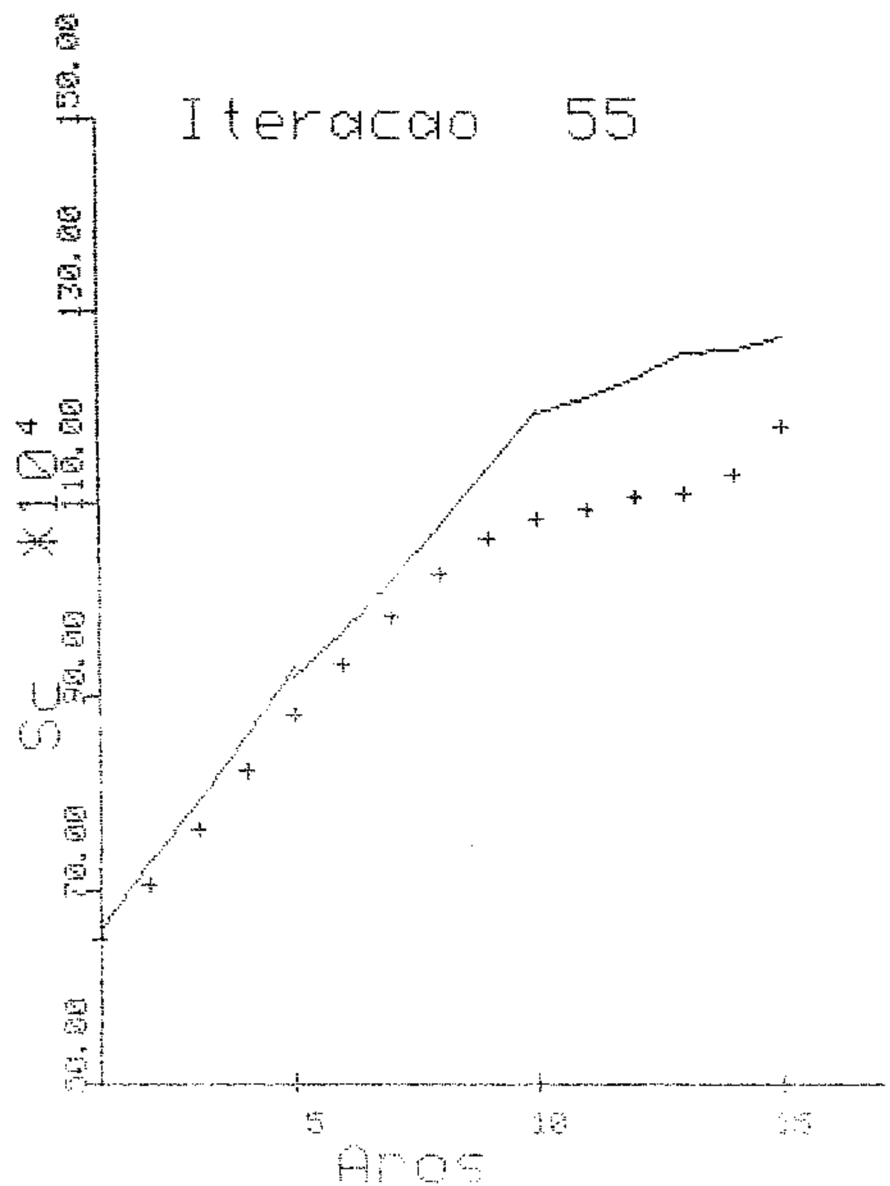

Iteracao 30
SC *10⁴
150.00
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
5
10
15
Anos

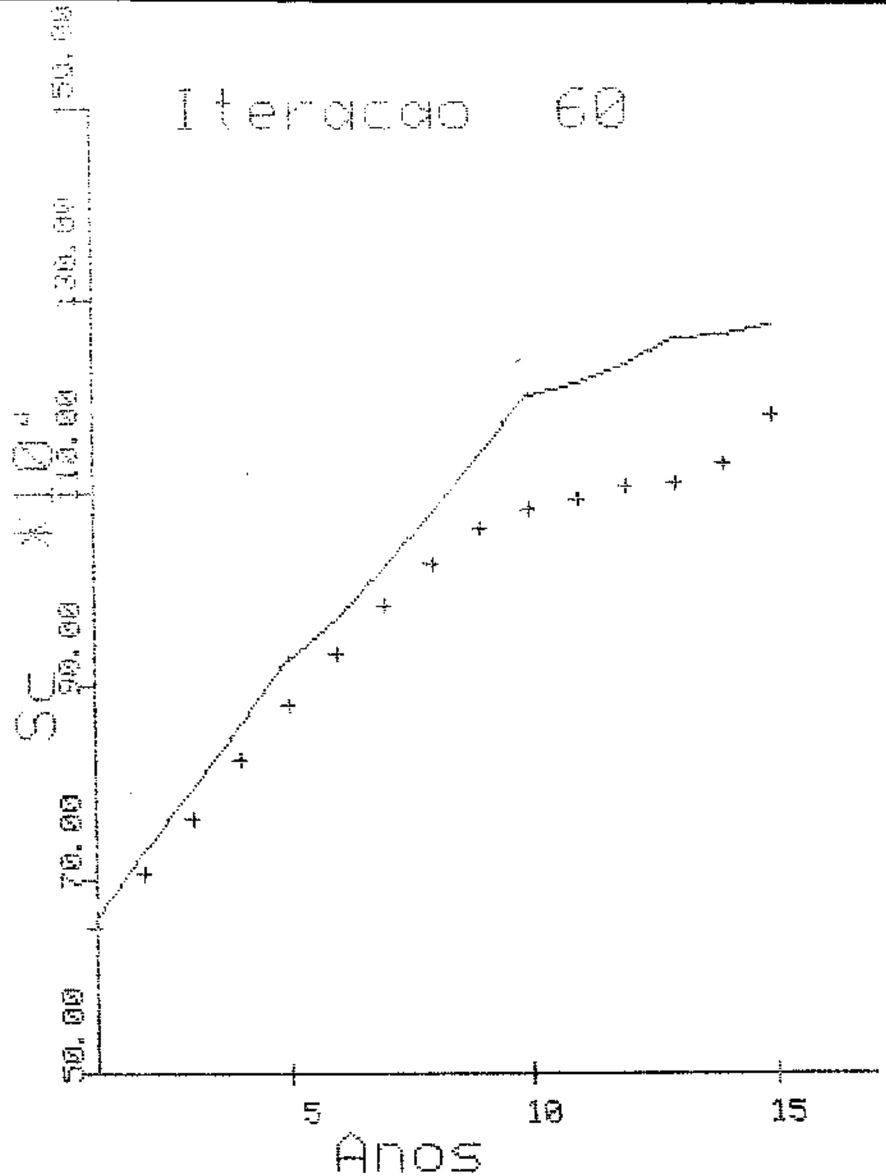

Iteracao 35
SC *10⁴
150.00
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
5
10
15
Anos


Iteracao 40
150.00
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
SC *10^4
5
10
15
Anos

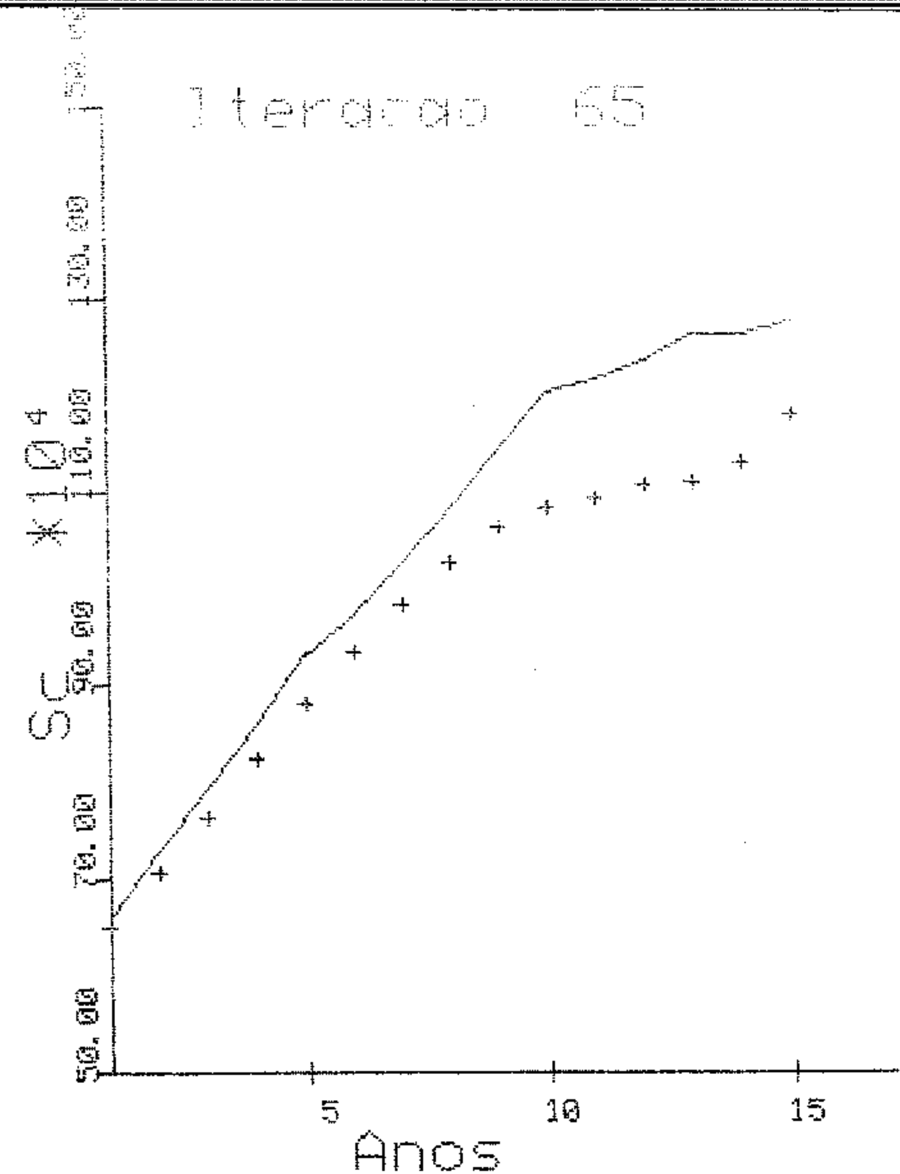

Iteracao 45
150.00
130.00
110.00
90.00
70.00
50.00
SC *10^4
5
10
15
Anos


Iteracao 50
SC *10^4
50.00
70.00
90.00
110.00
130.00
150.00
5
10
15
Anos

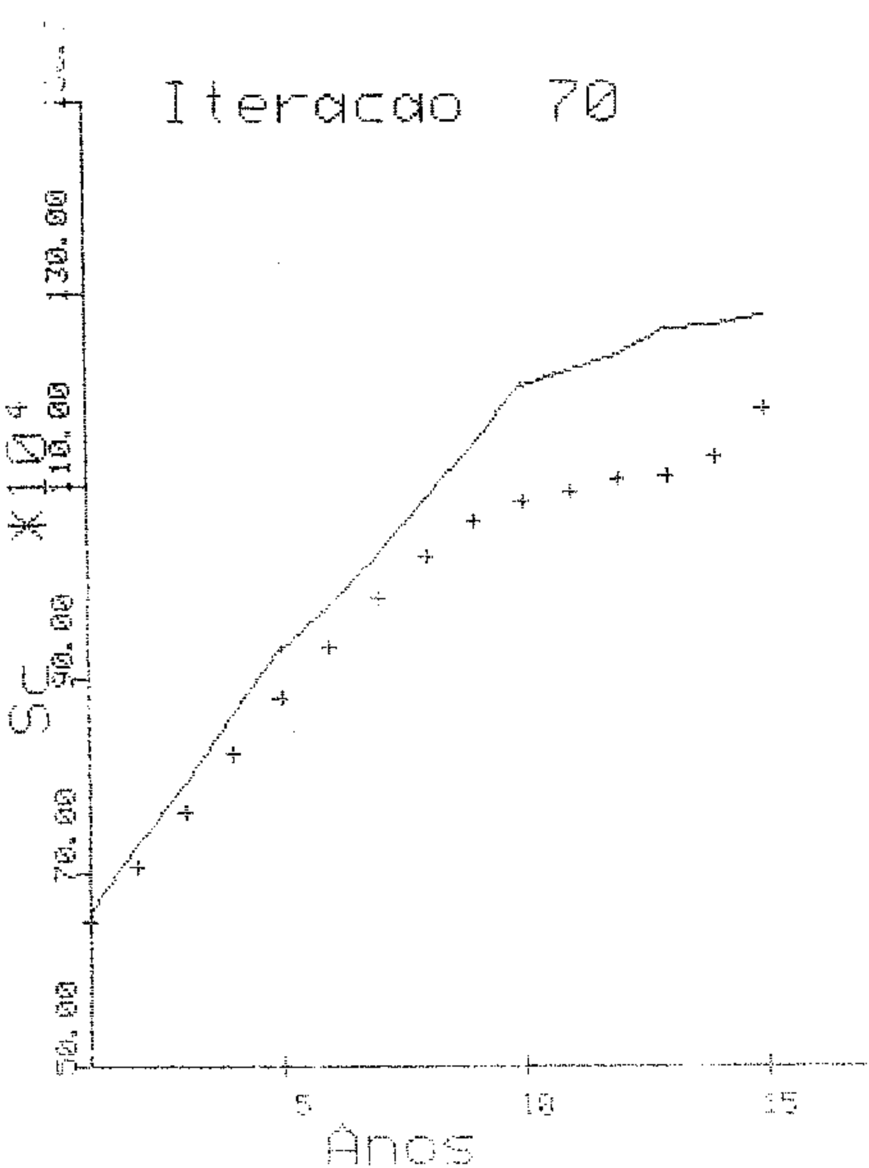

Iteracao 55
SC *10^4
50.00
70.00
90.00
110.00
130.00
150.00
5
10
15
Anos

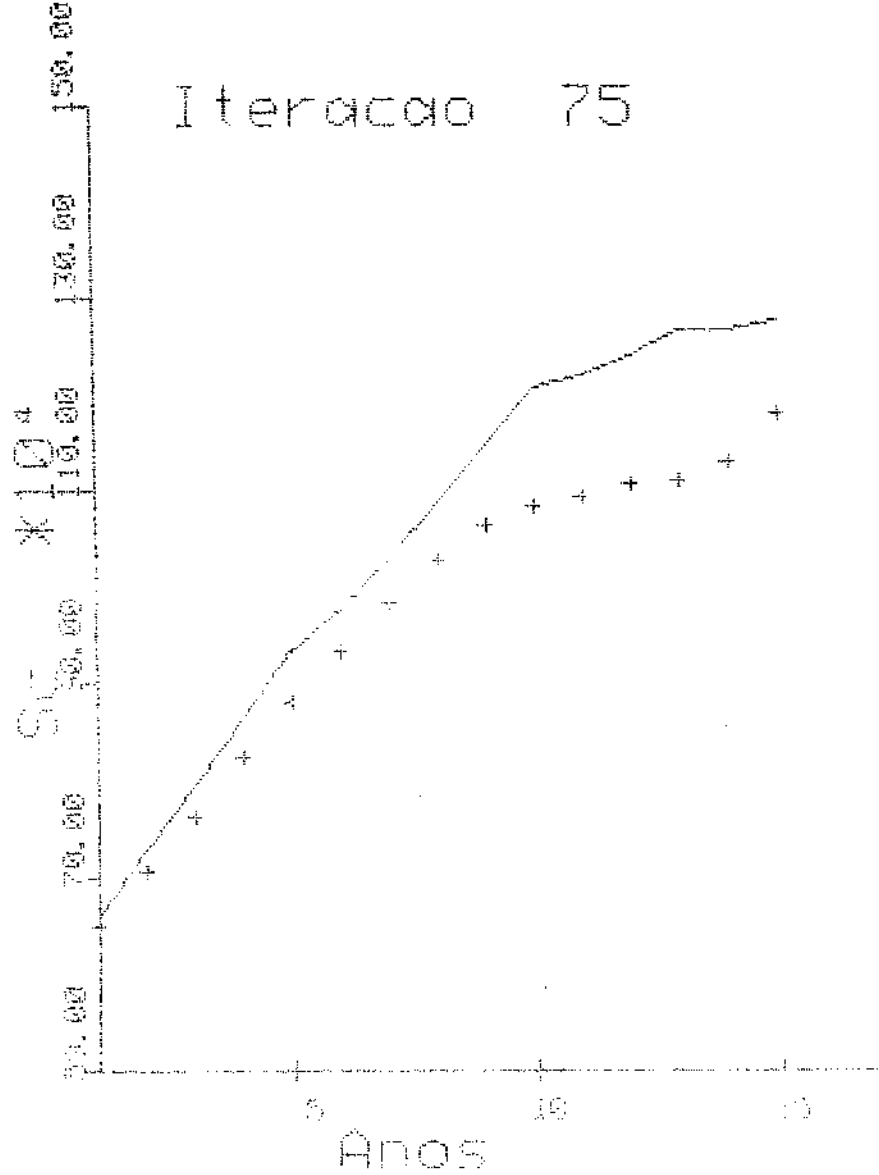


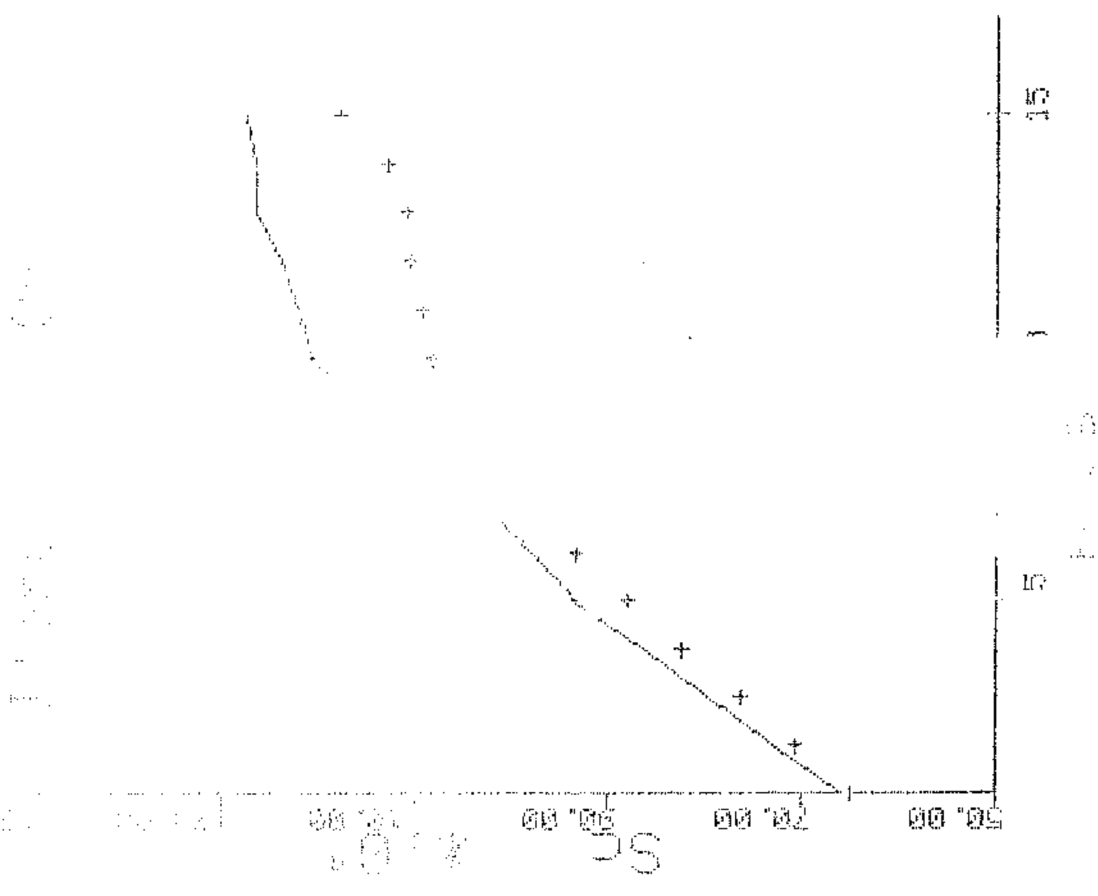
Iteracao 60
SC * 10⁴
50.00
70.00
90.00
110.00
130.00
150.00
5
10
15
Anos

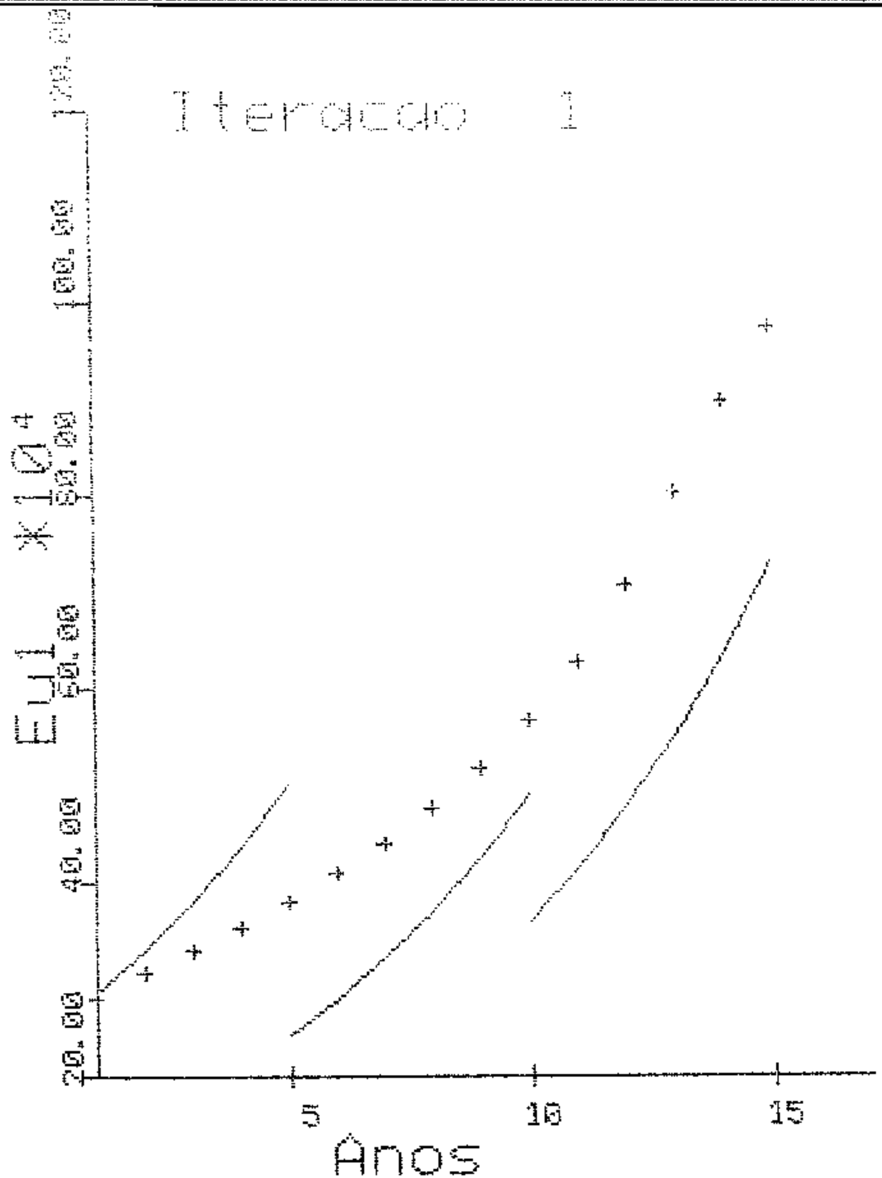


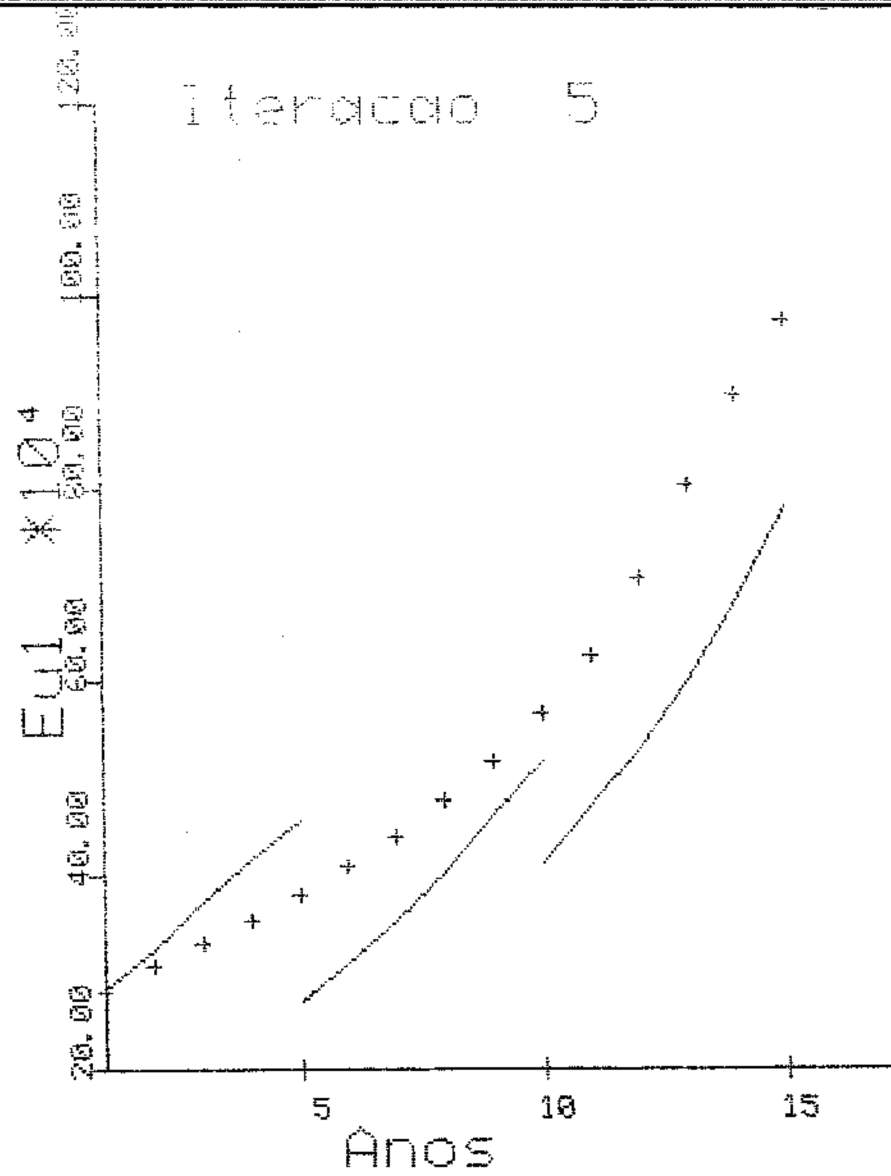
Iteracao 65
SC * 10⁴
50.00
70.00
90.00
110.00
130.00
150.00
5
10
15
Anos

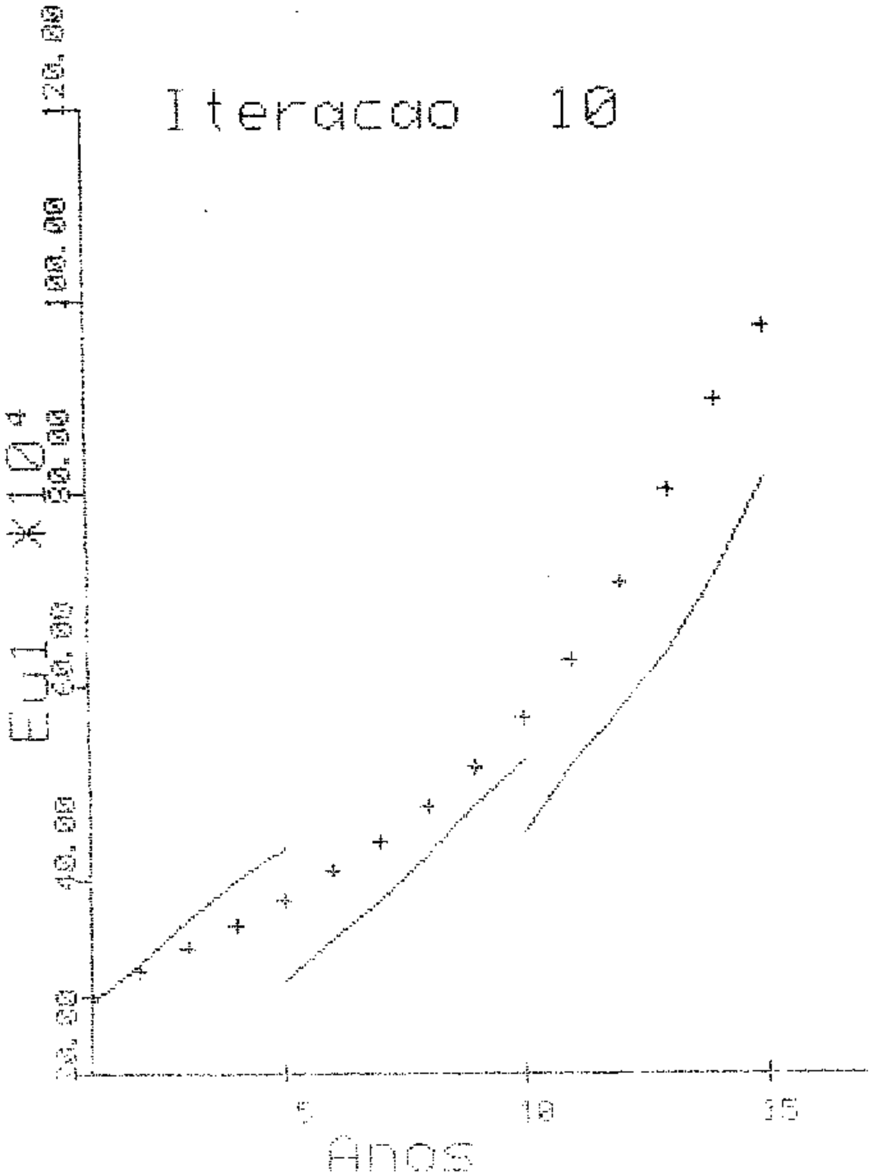

Iteracao 70
SC *10⁴
50.00
70.00
90.00
110.00
130.00
5
10
15
Anos

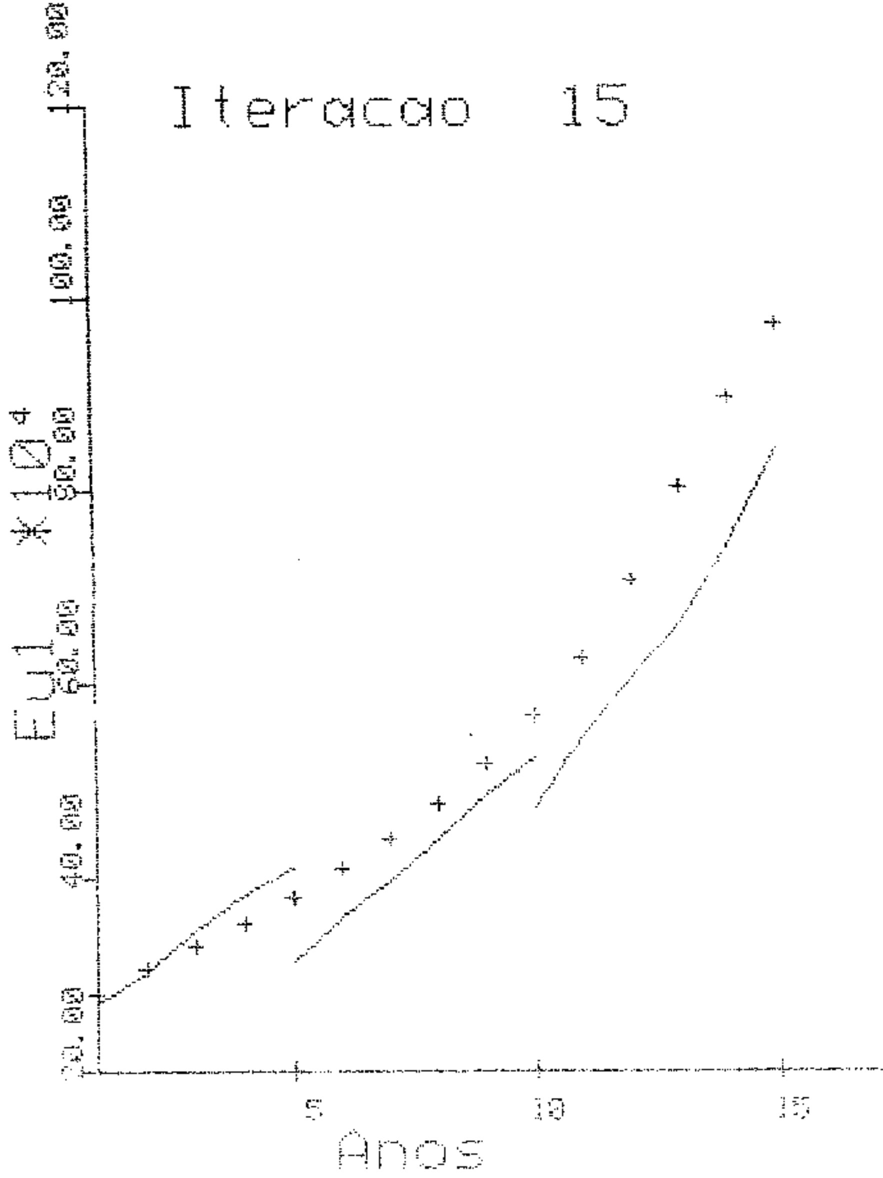

Iteracao 75
SC *10⁴
70.00
110.00
130.00
150.00
5
10
Anos

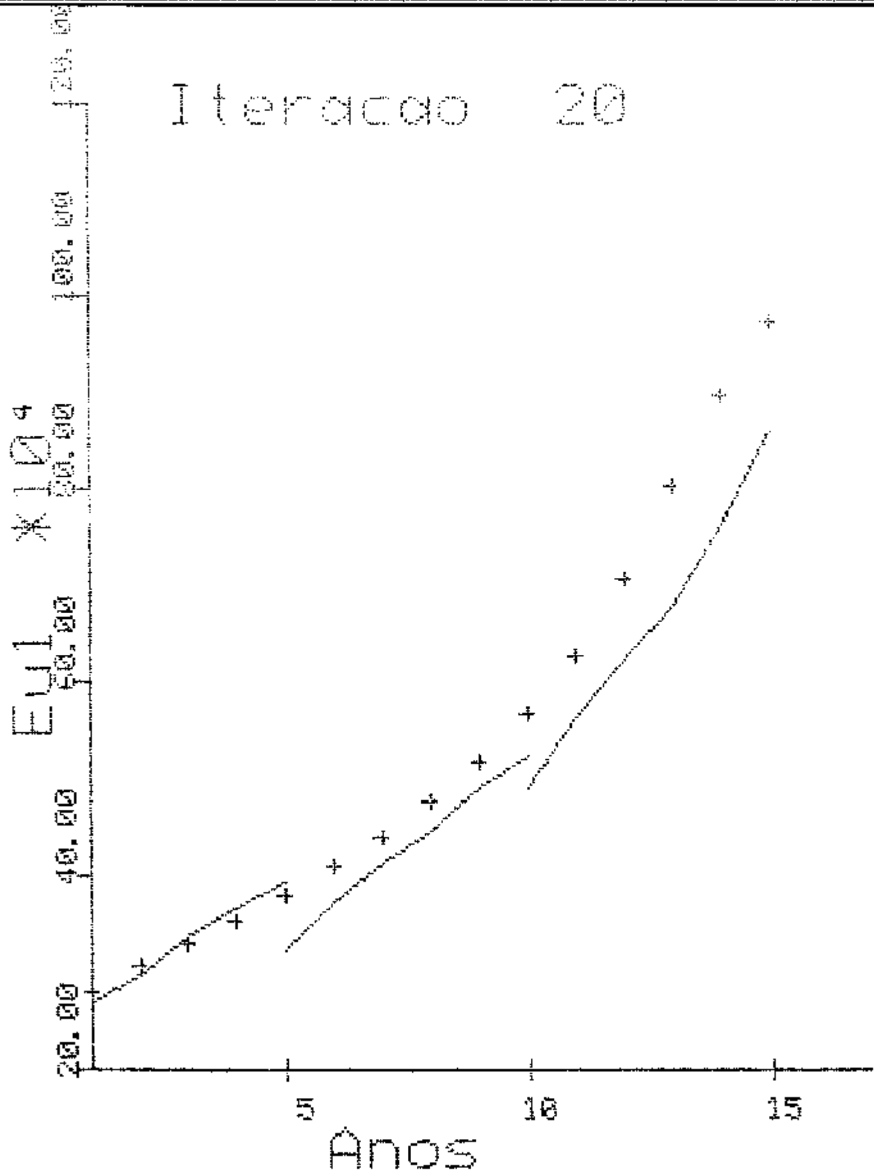


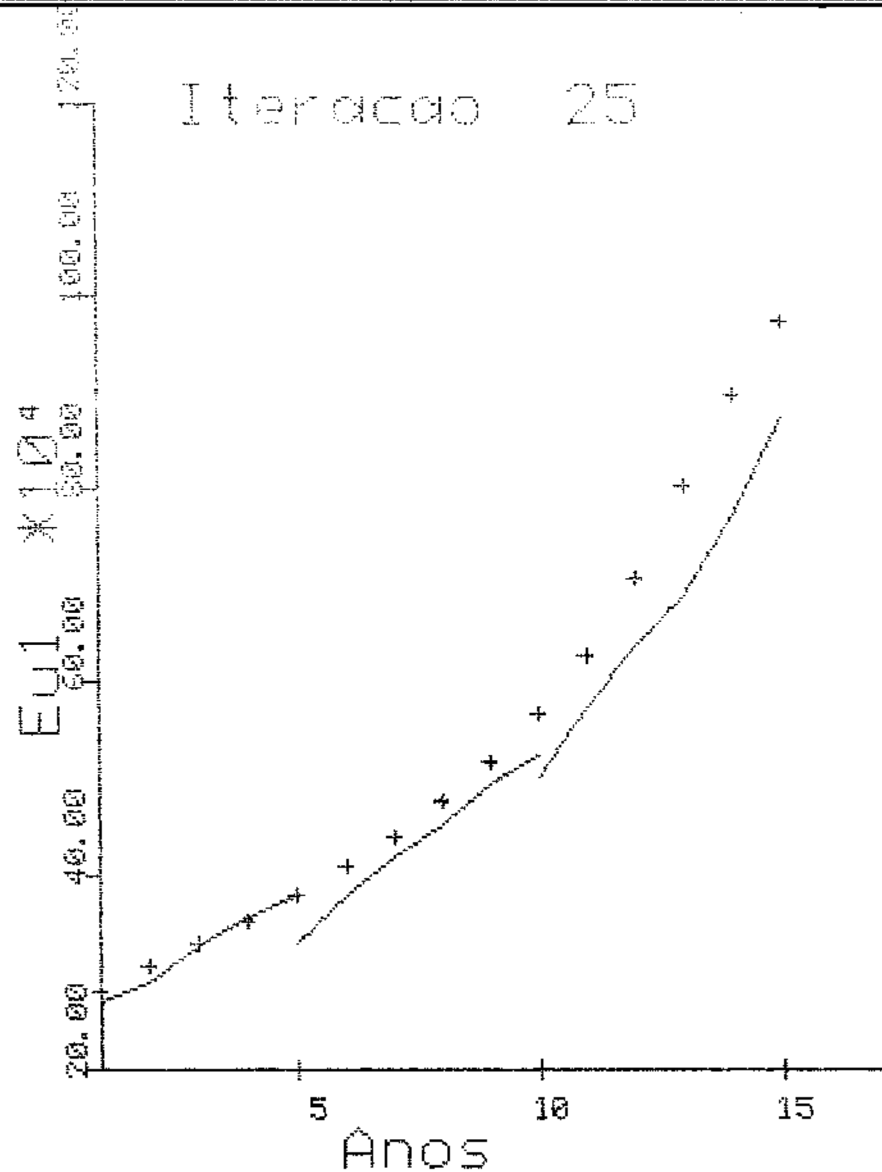

Iteracao 1
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

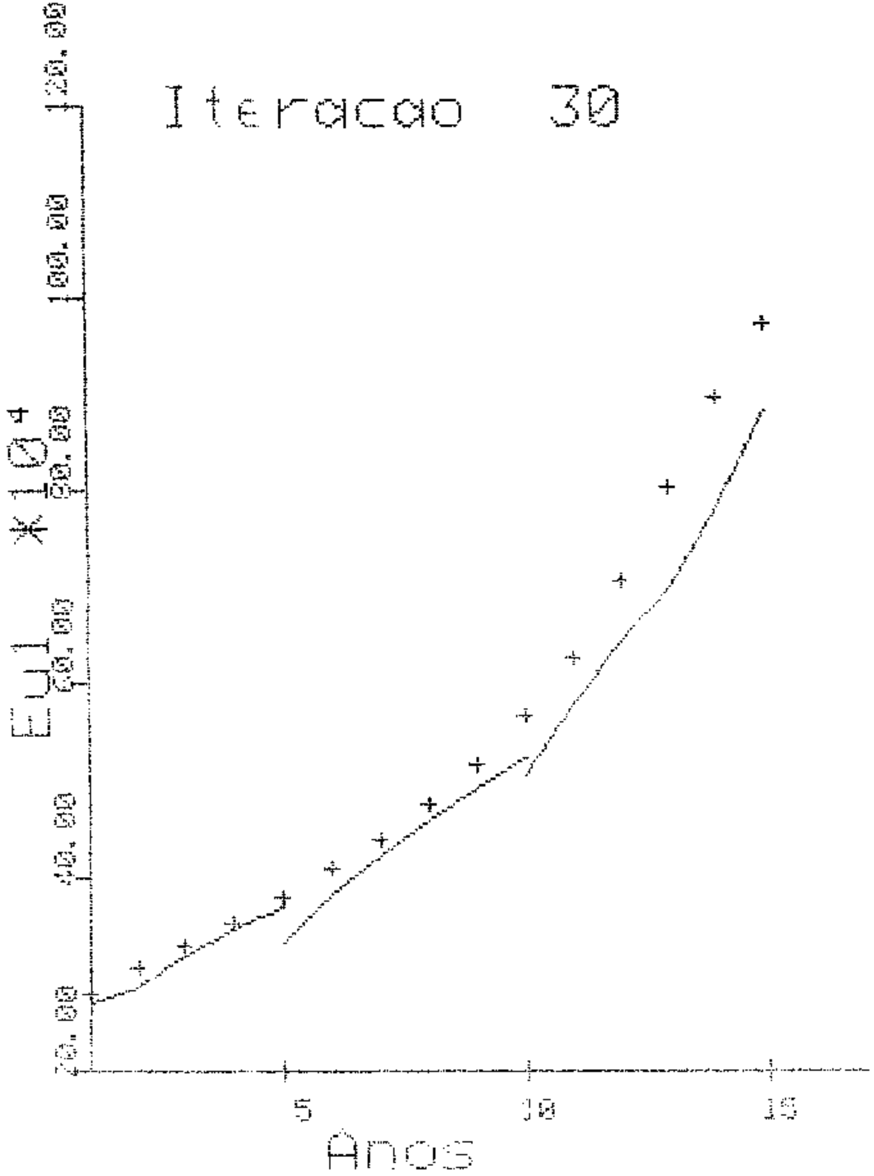

Iteracao 5
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

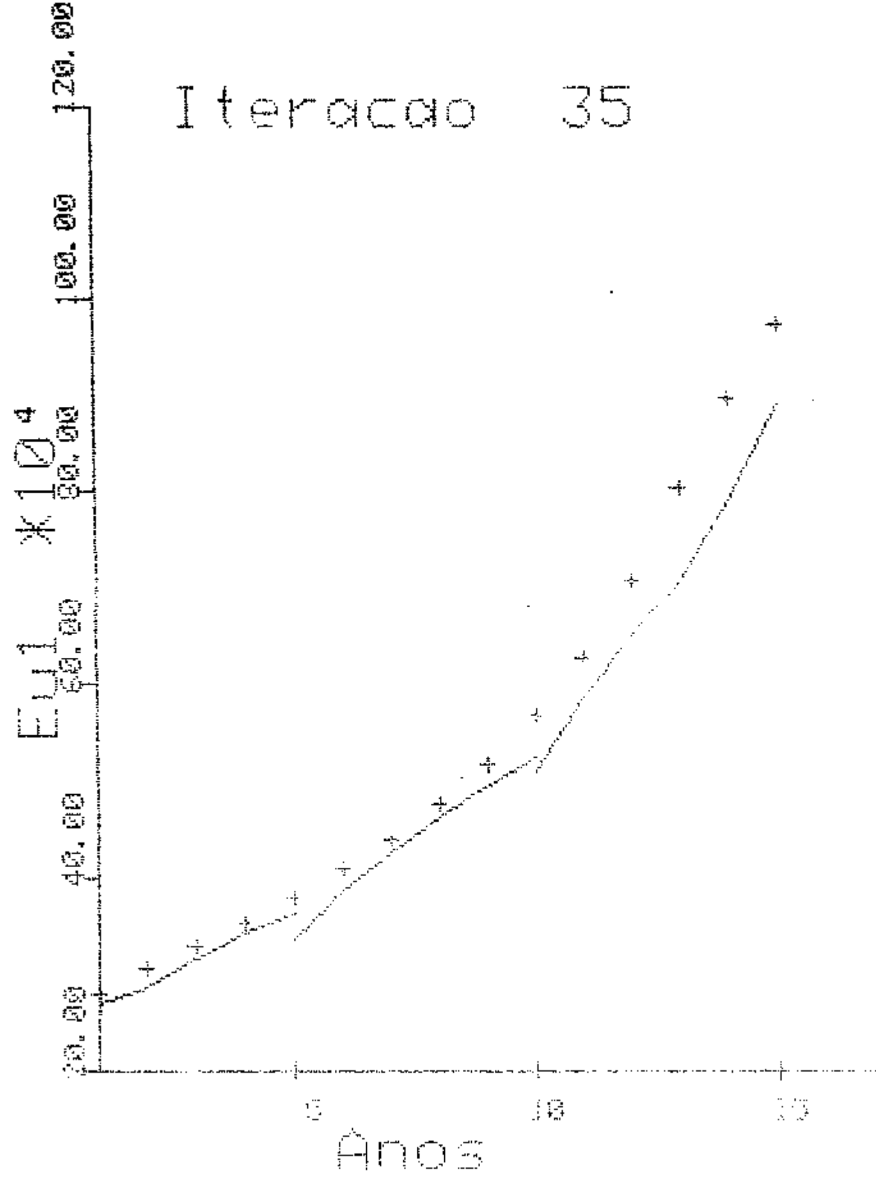

Iteracao 10
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

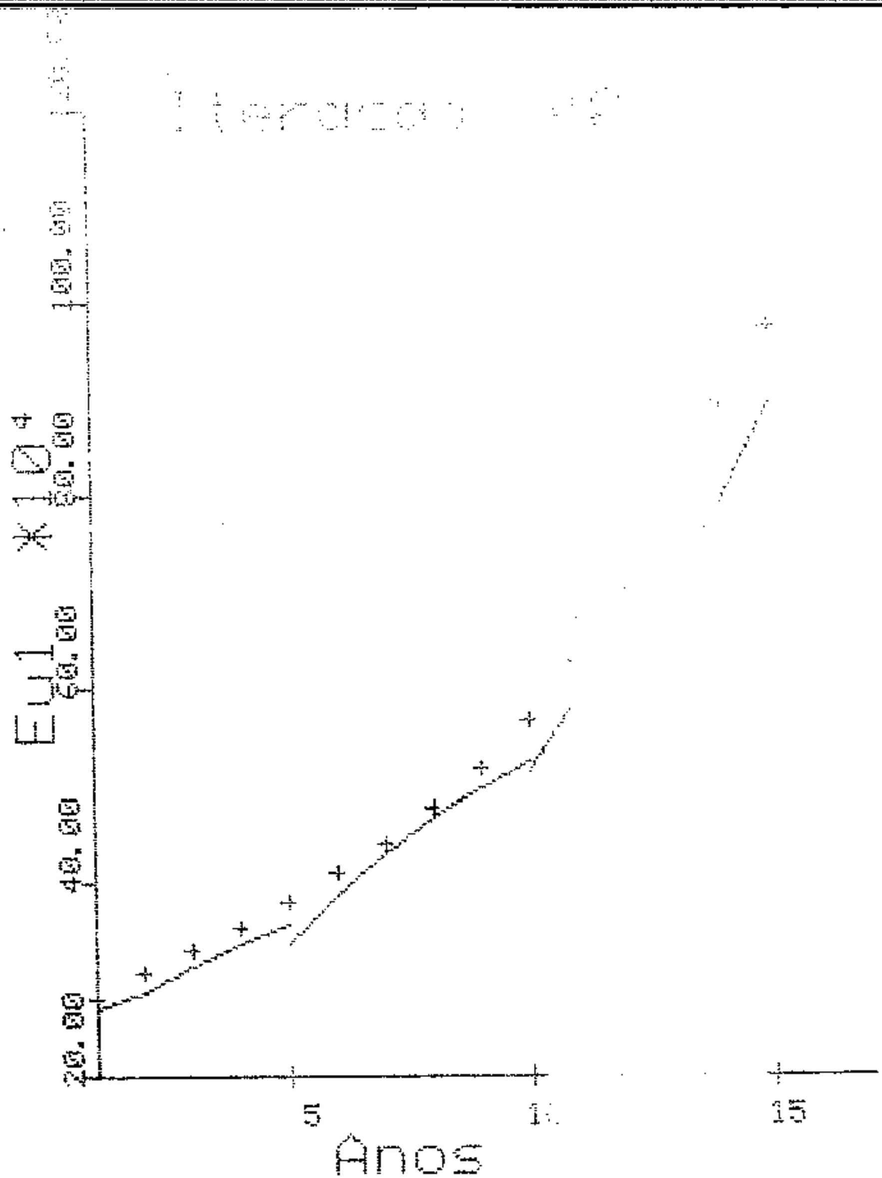

Iteracao 15
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

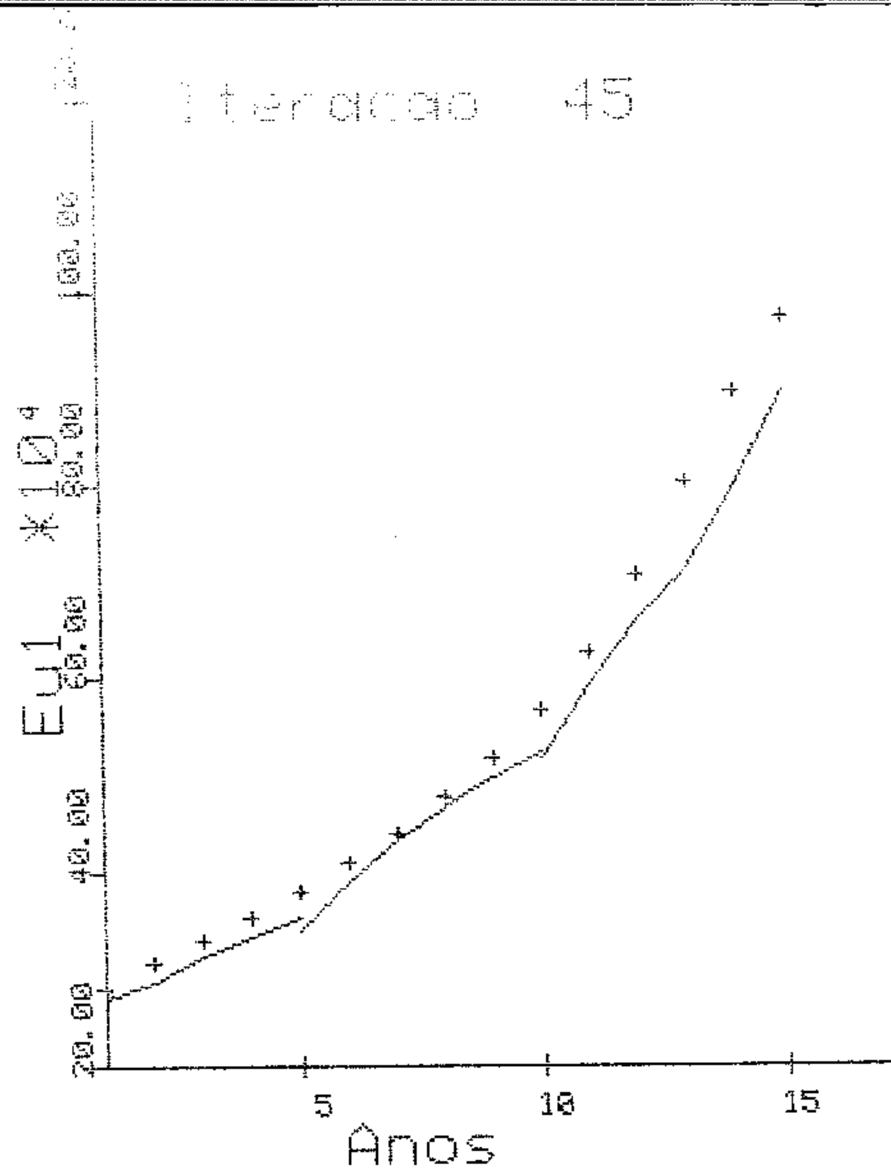

Iteracao 20
Eu1 *10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
5
10
15
Anos

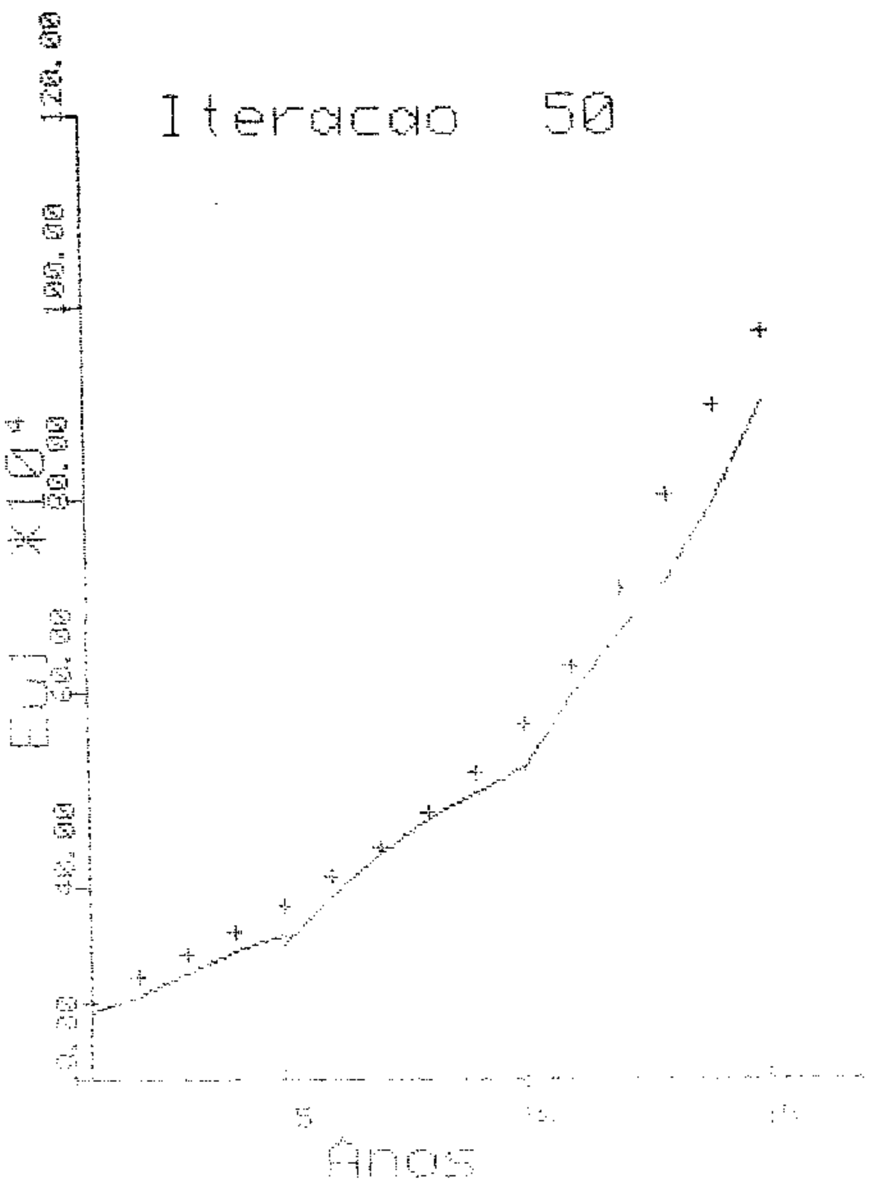

Iteracao 25
Eu1 *10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
5
10
15
Anos

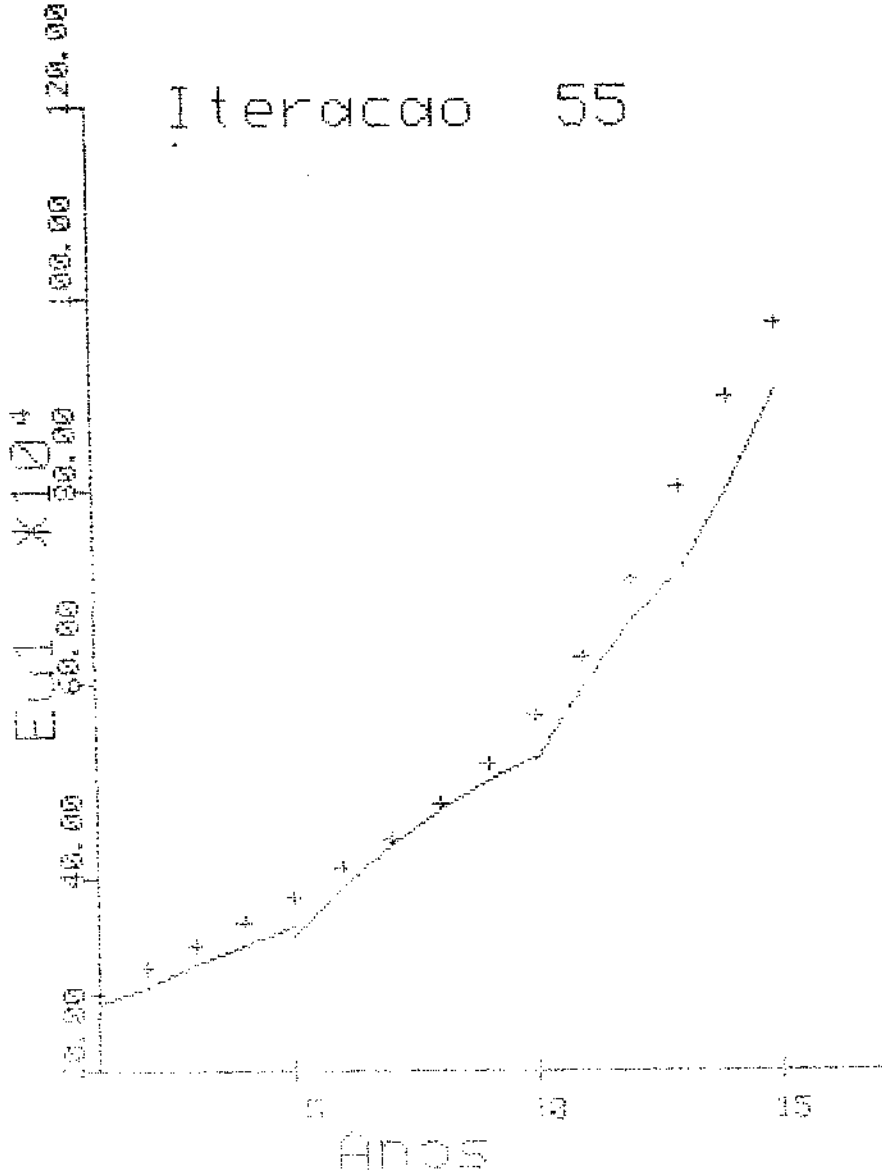

Iteracao 30
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
Eu1 * 10^4
5
10
15
Anos

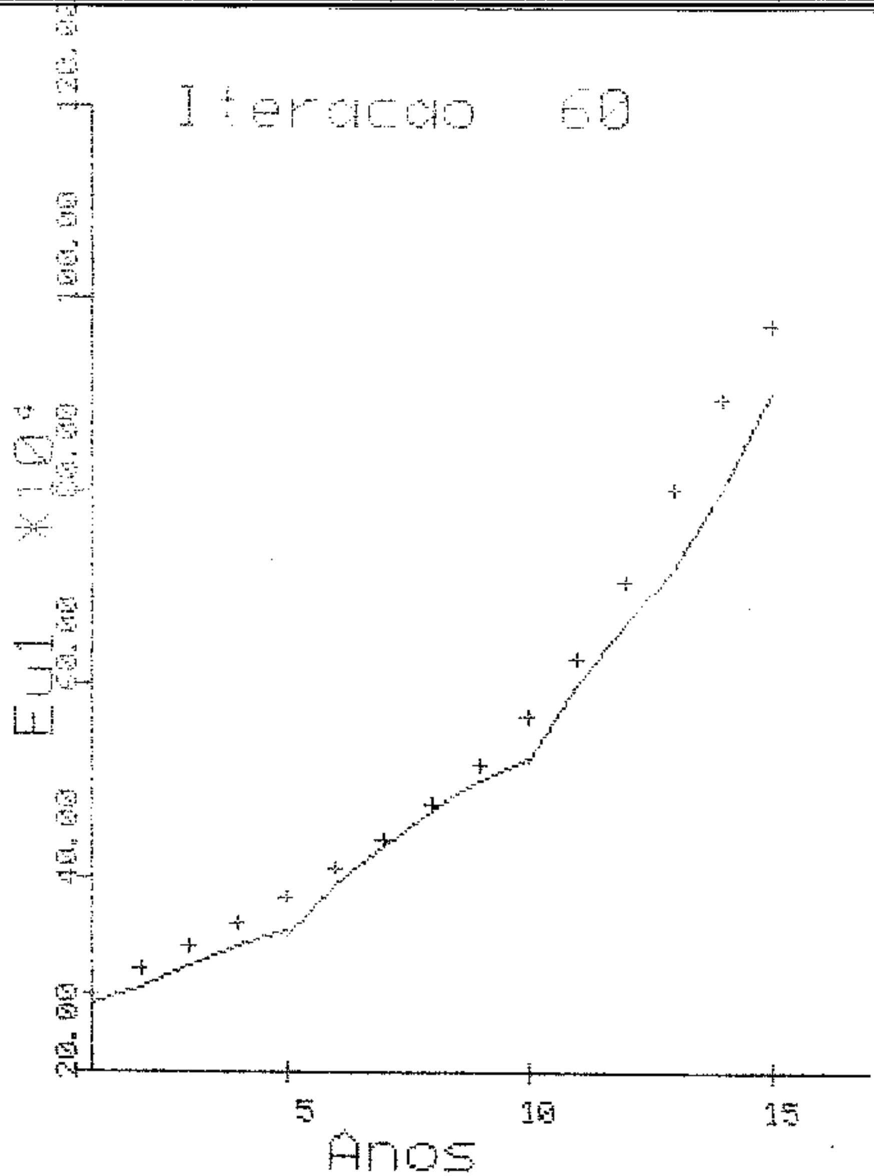

Iteracao 35
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
Eu1 * 10^4
5
10
15
Anos


Iteracao
Eu1 *10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
5
15
Anos

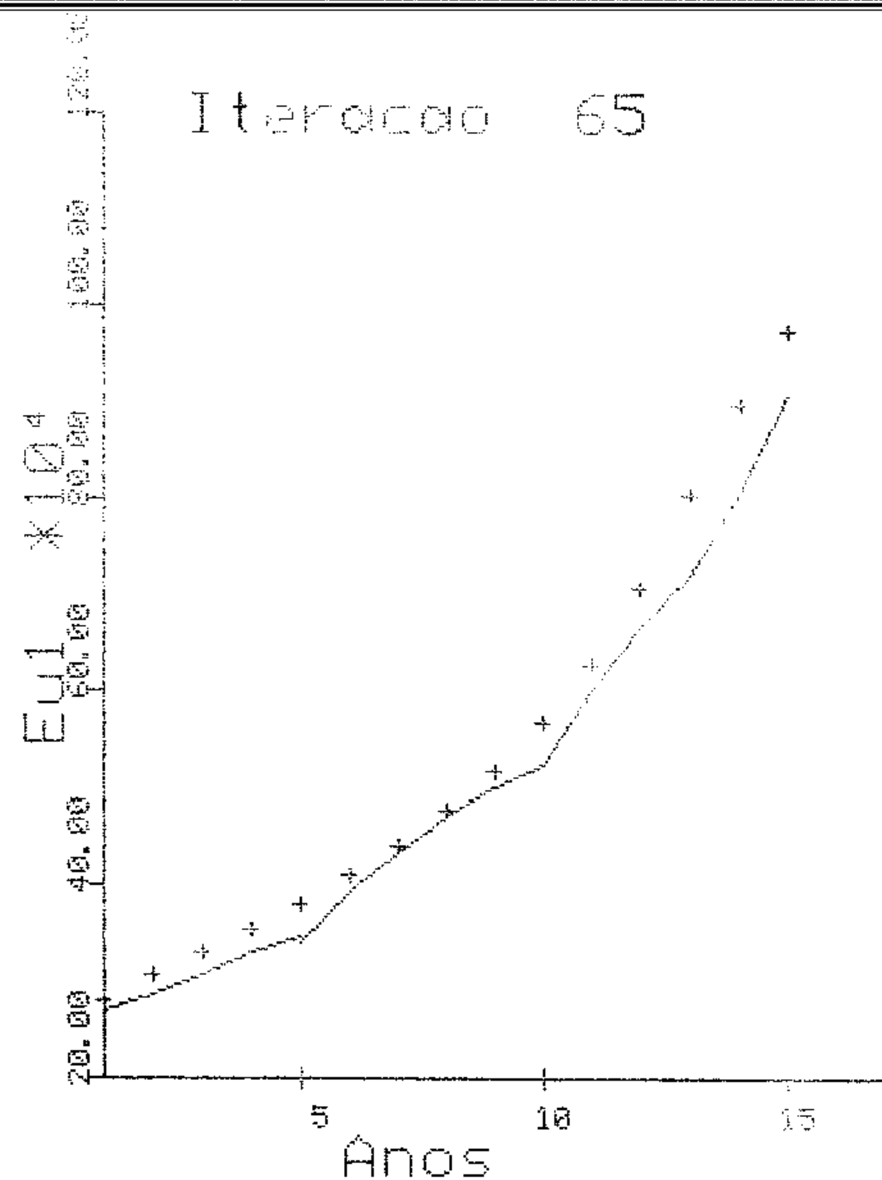

Iteracao 45
Eu1 *10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
5
10
15
Anos


Iteracao 50
E(t) * 10^4
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
0.00
5
Anos

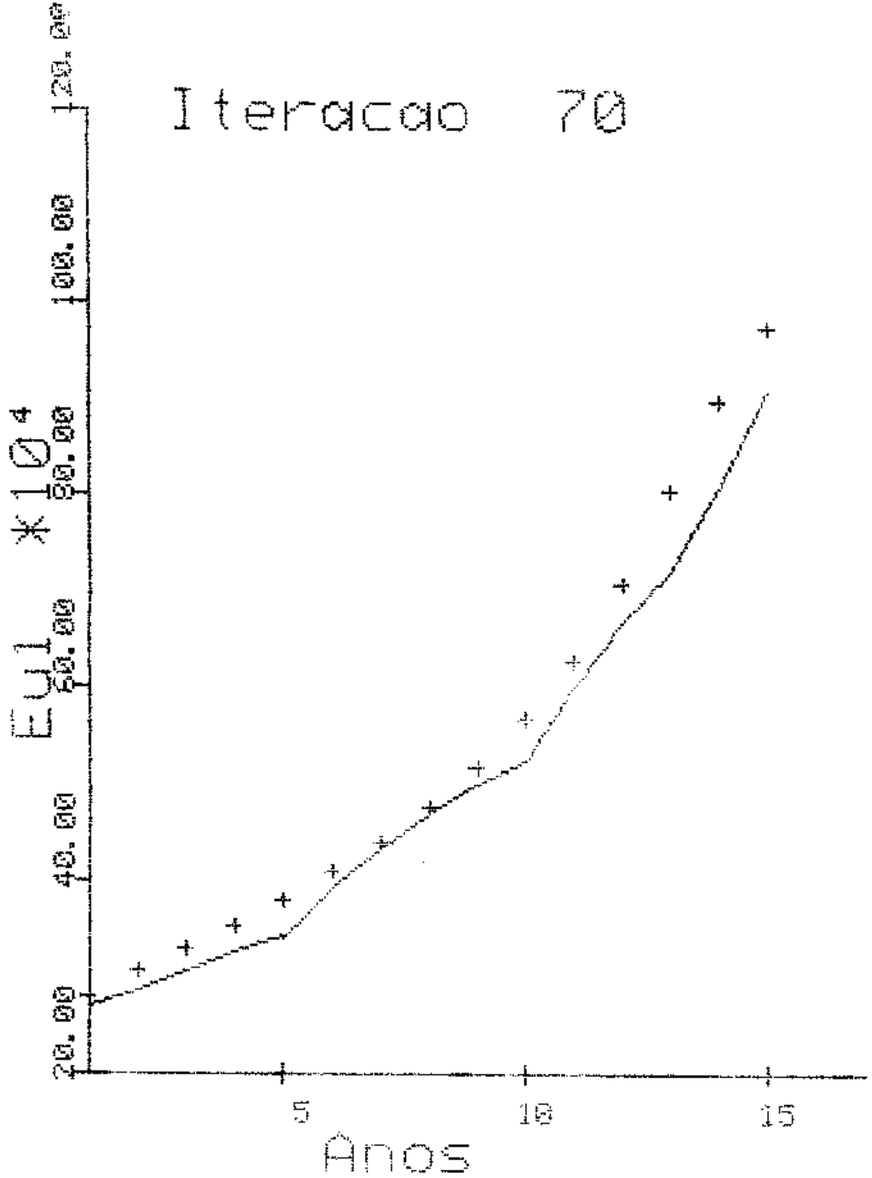

Iteracao 55
E(t) * 10^4
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
0.00
5
10
15
Anos

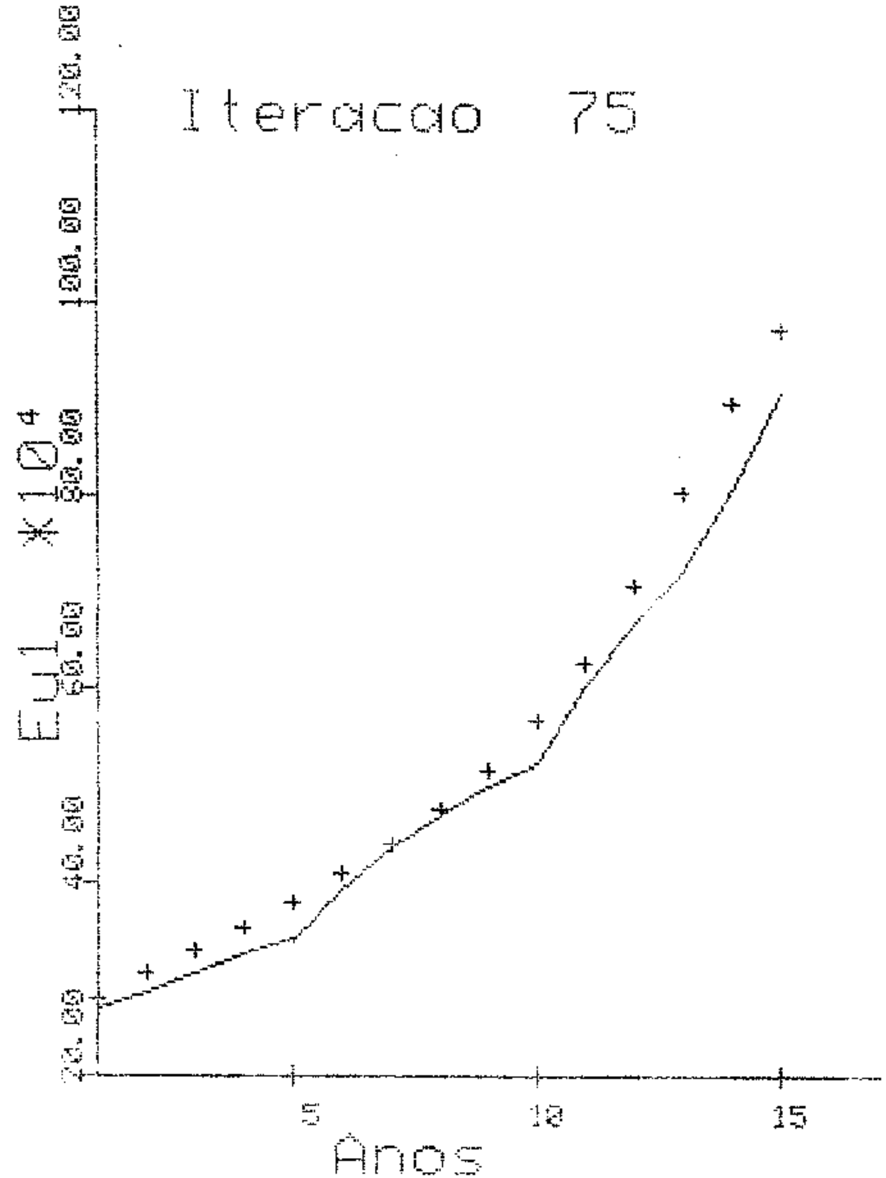


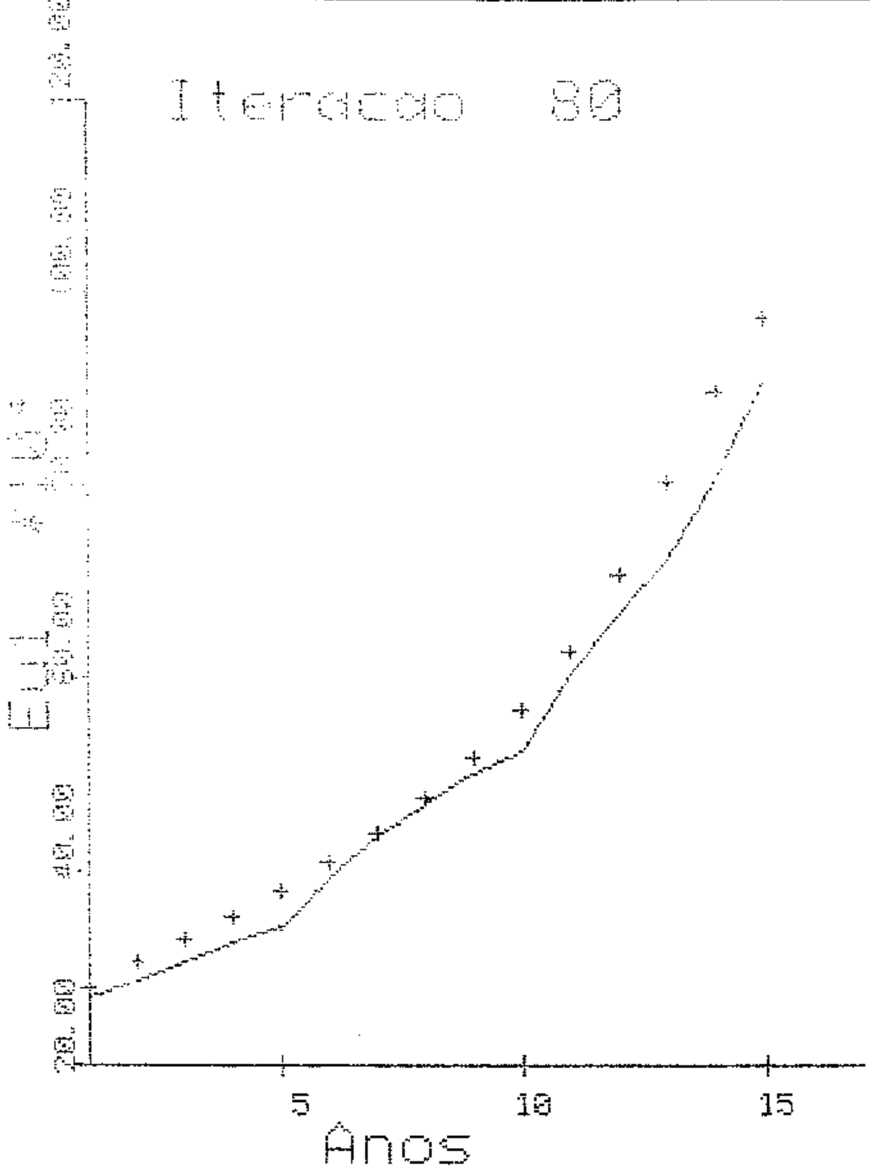
Iteracao 60
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

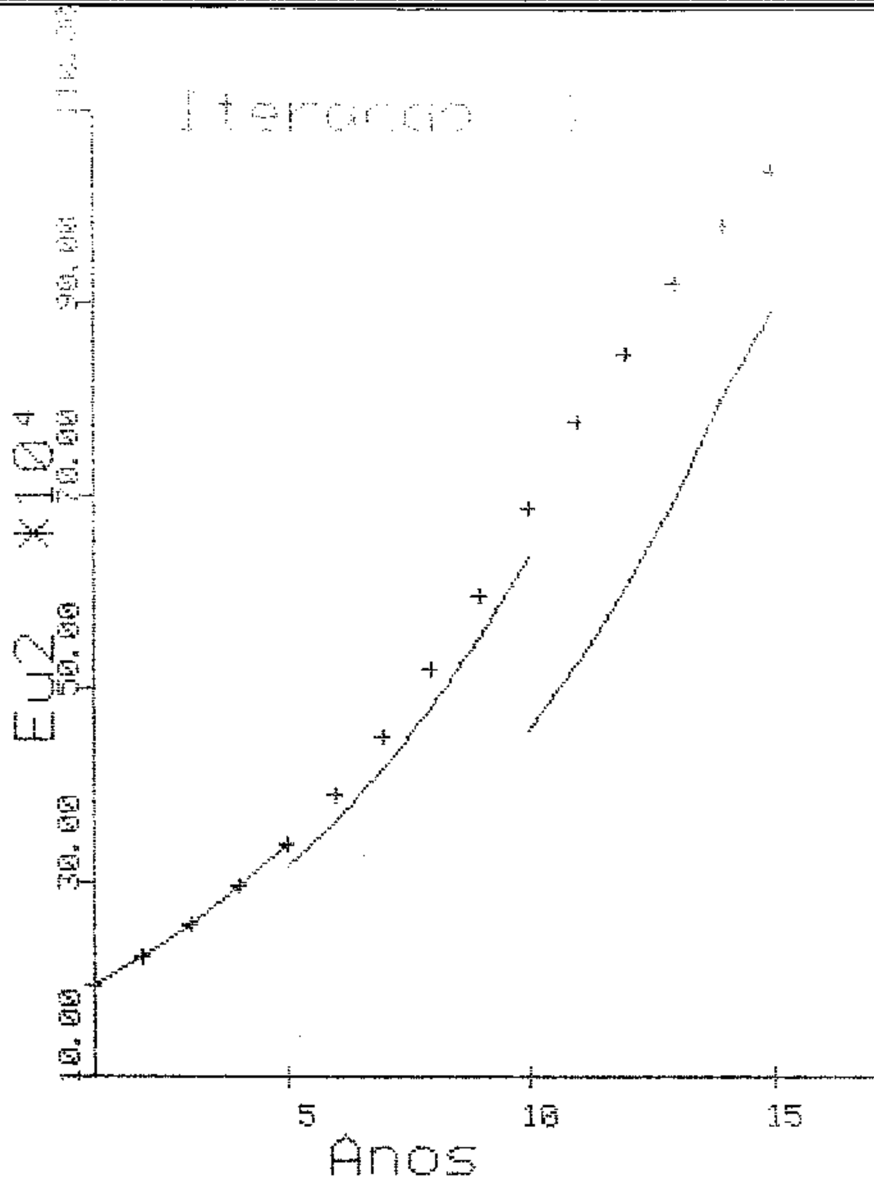


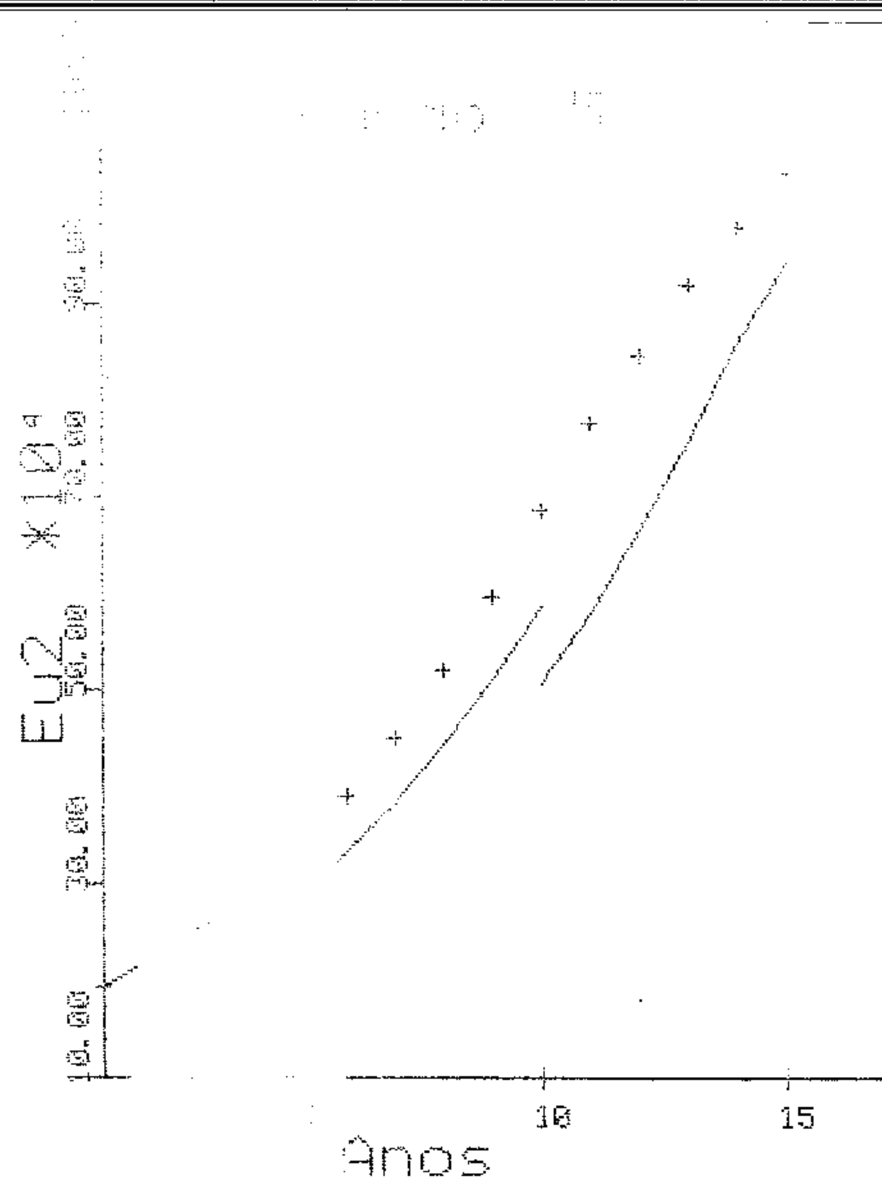
Iteracao 65
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

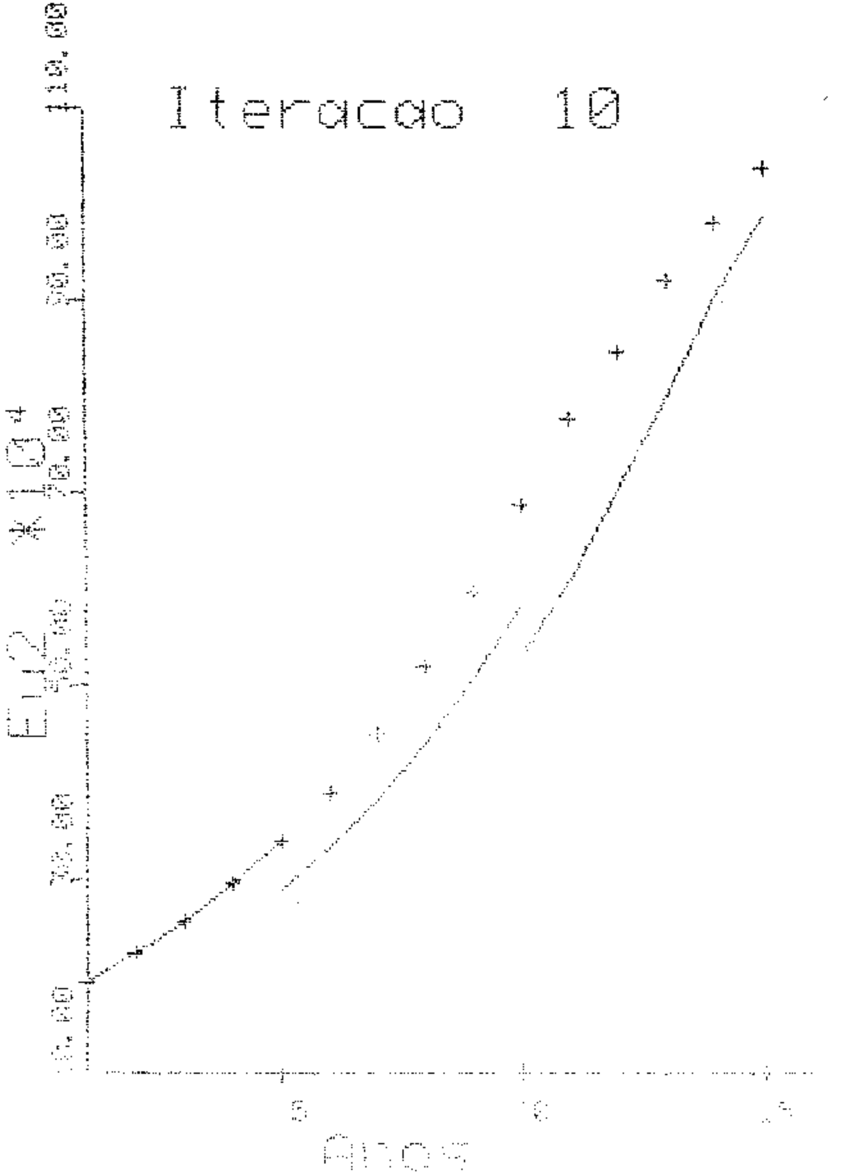

Iteracao 70
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos


Iteracao 75
Eu1 *10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

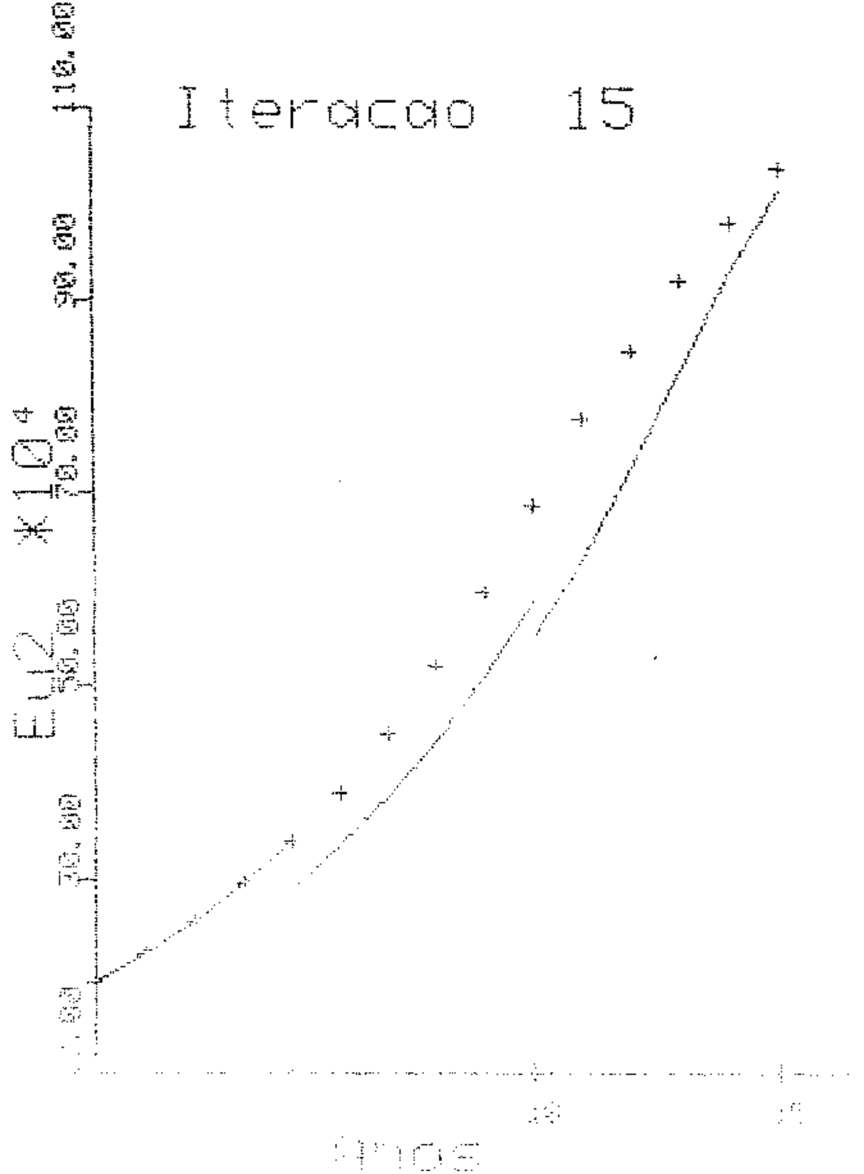

Iteracao 80
20.00
40.00
60.00
100.00
120.00
5
10
15
Anos


Eu2 *10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
5
10
15
Anos

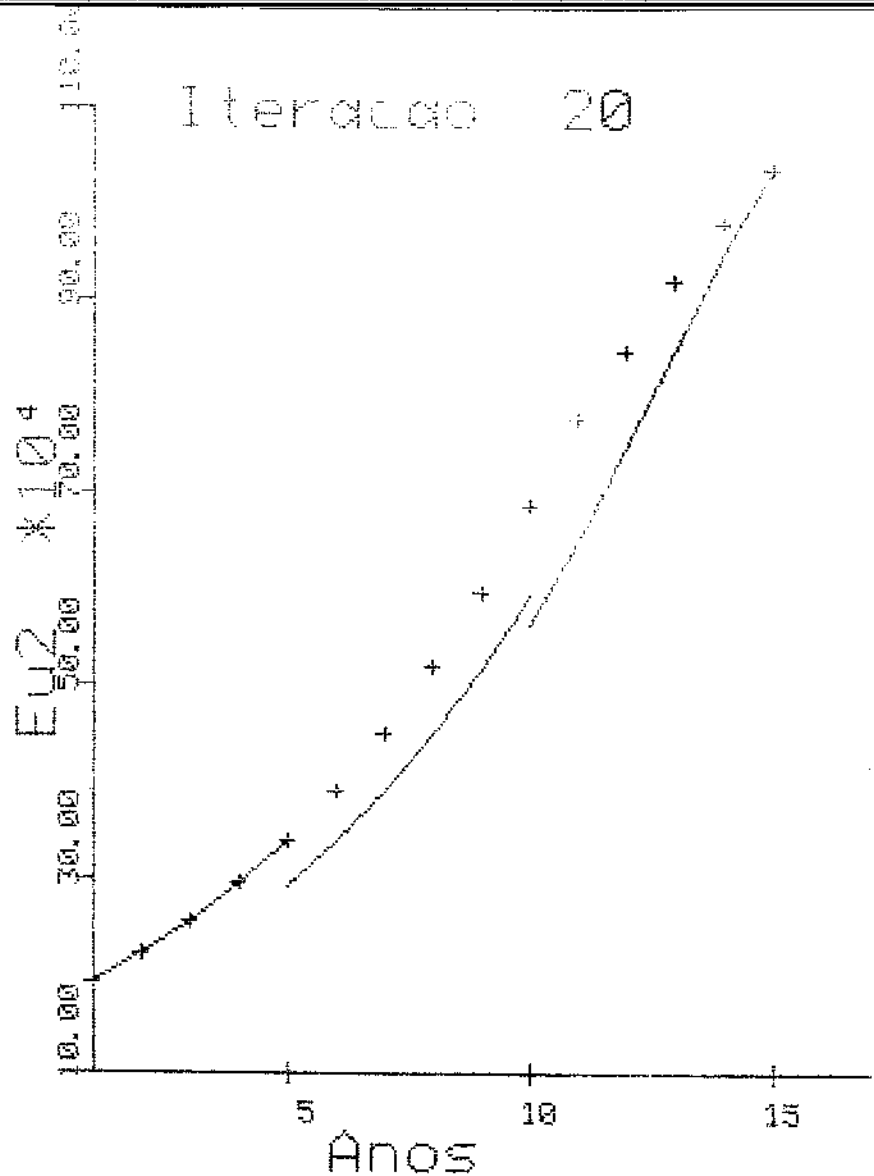

Eu2 *10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
10
15
Anos

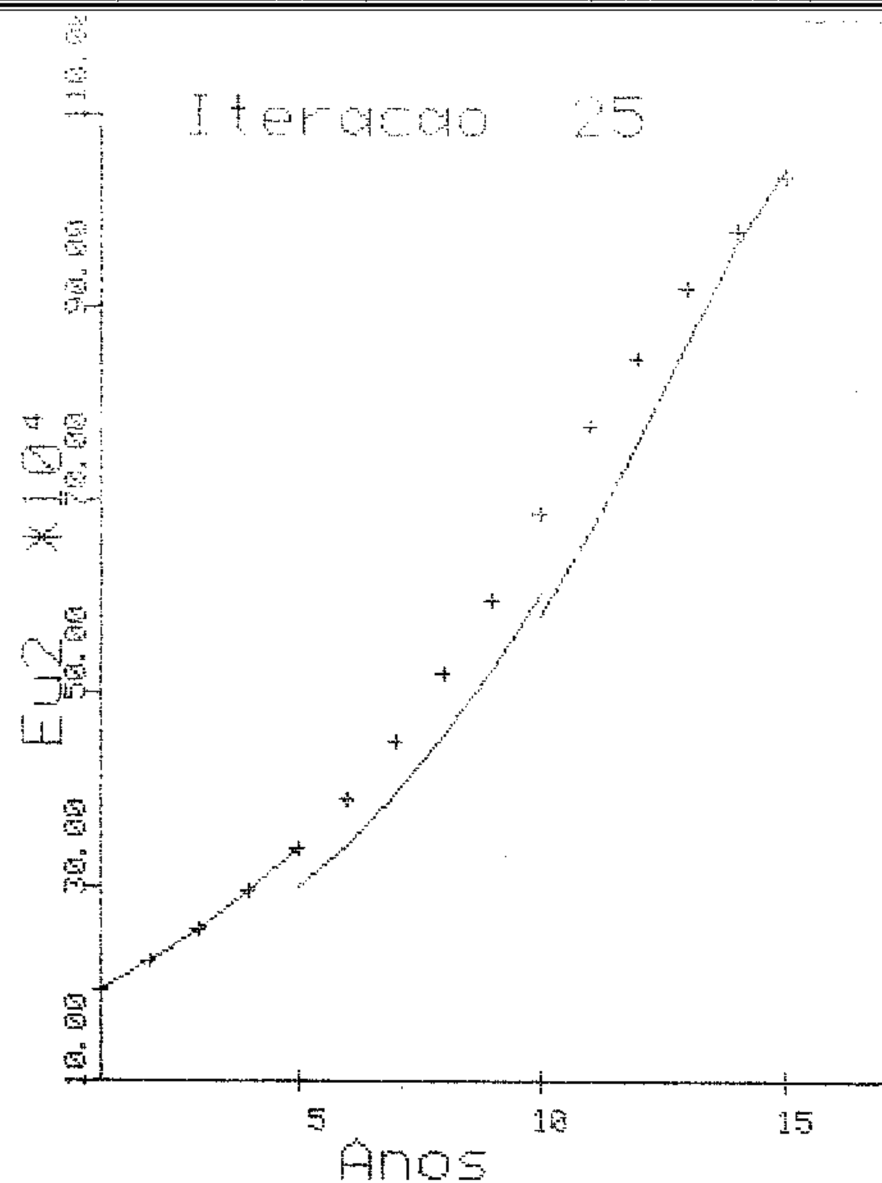


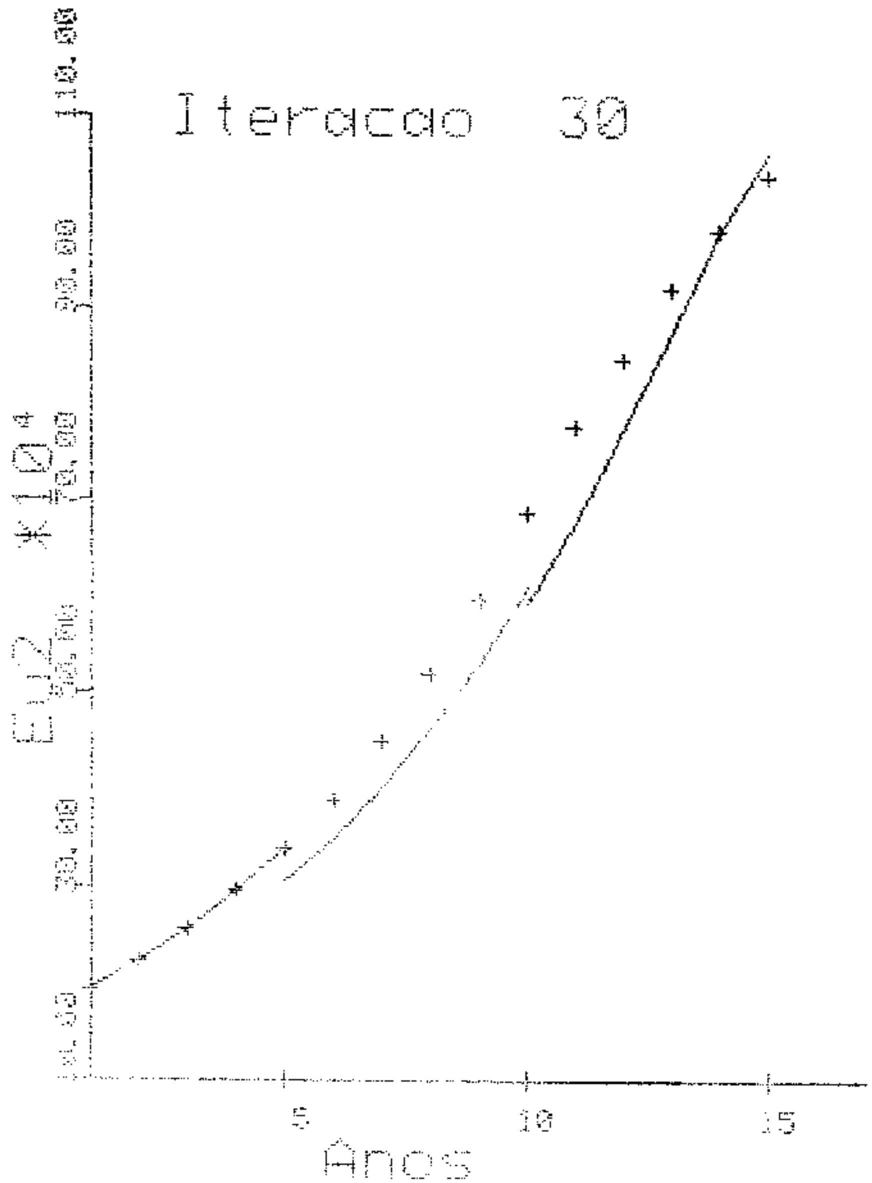
Iteracao 10
110.00
90.00
70.00
50.00
30.00
10.00
EU2 *10^4
5
10
Anos

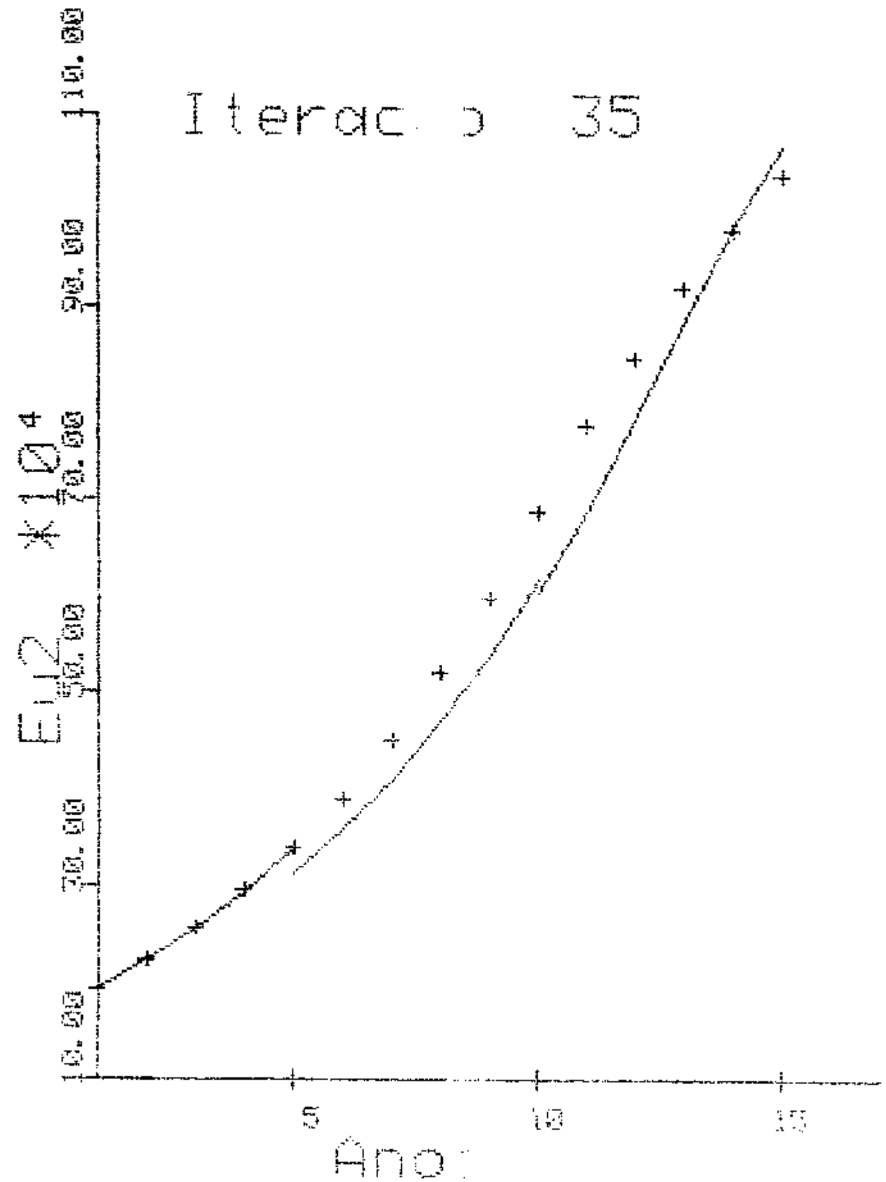


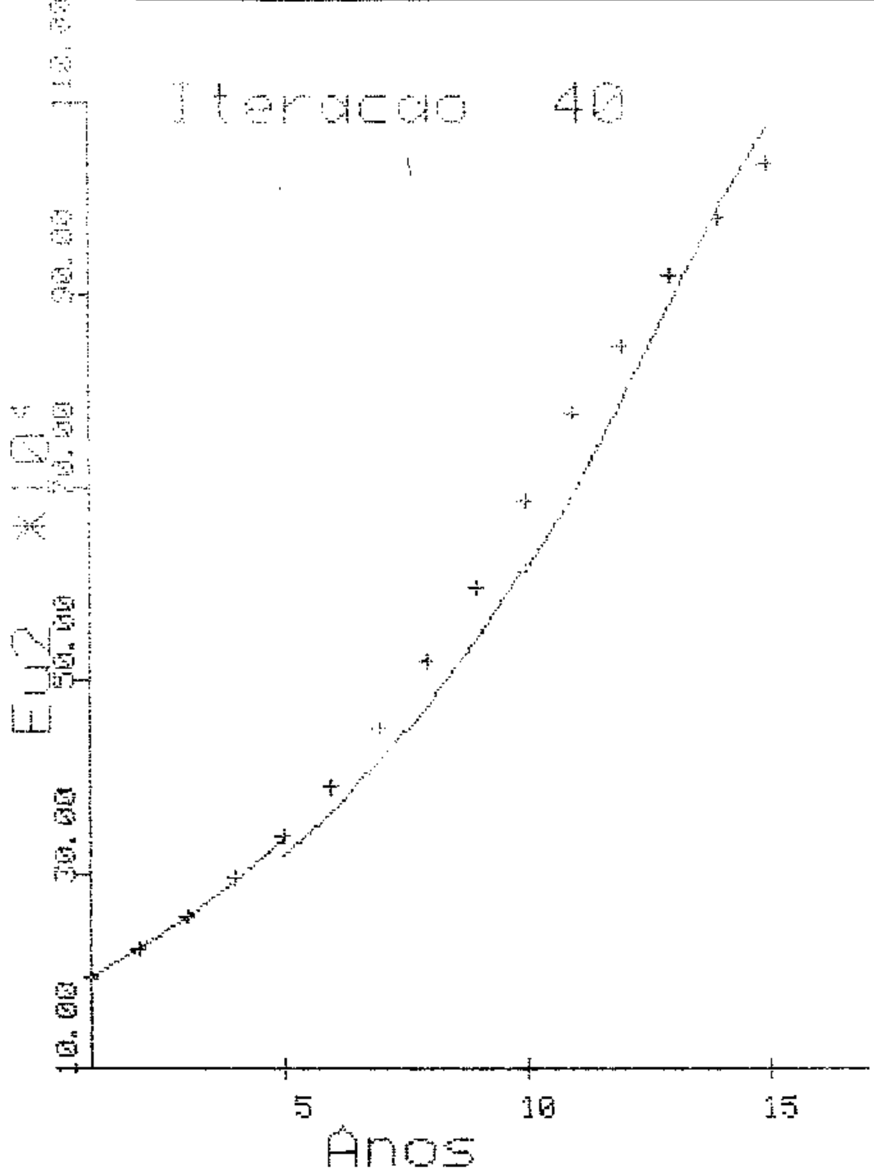
Iteracao 15
110.00
90.00
70.00
50.00
30.00
EU2 *10^4
Anos

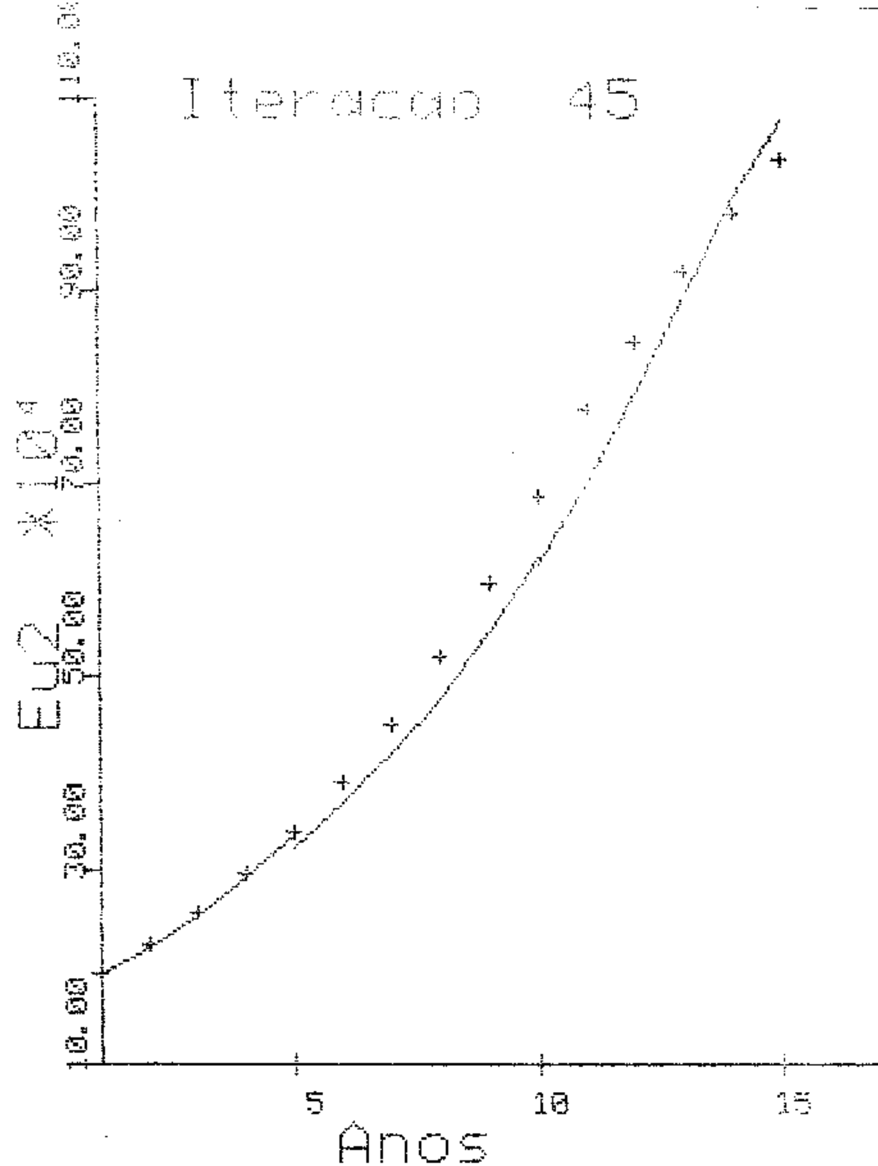

Iteracao 20
Eu2 * 10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

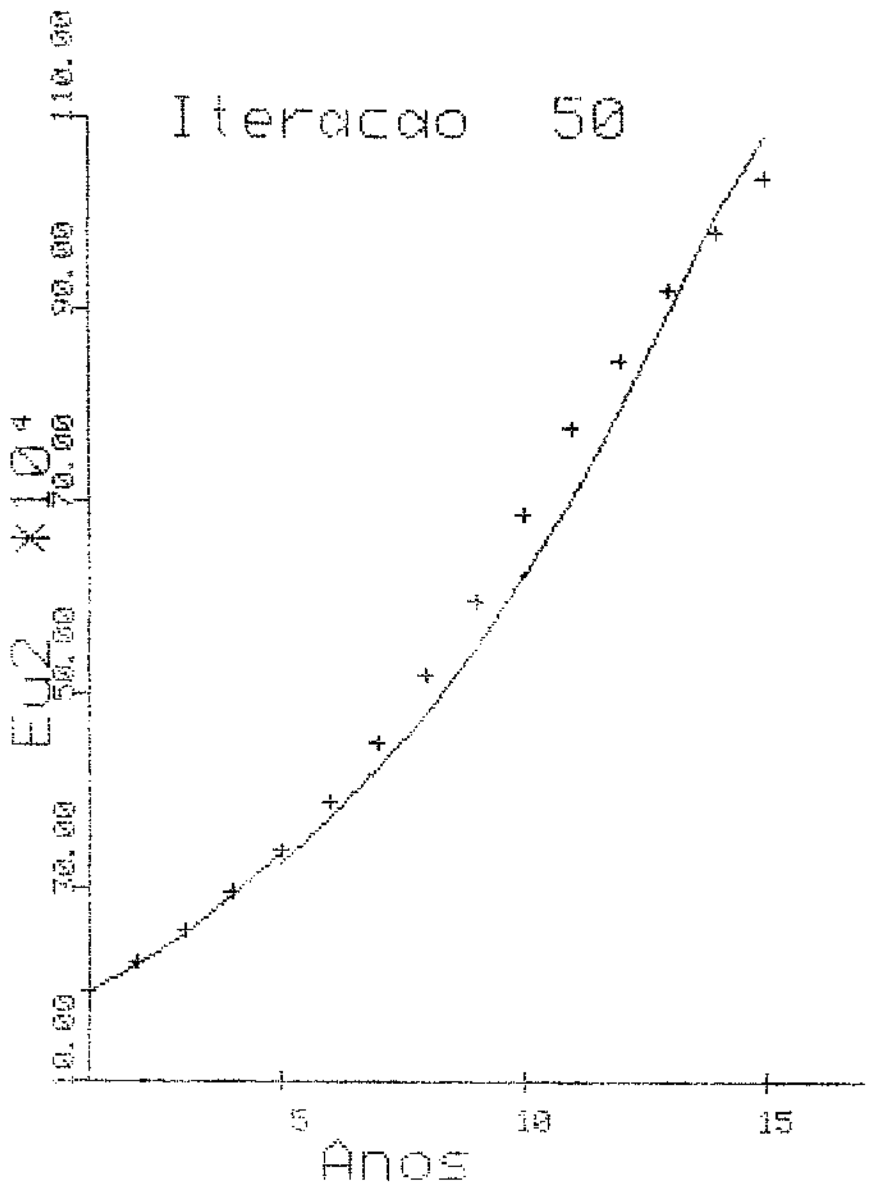

Iteracao 25
Eu2 * 10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

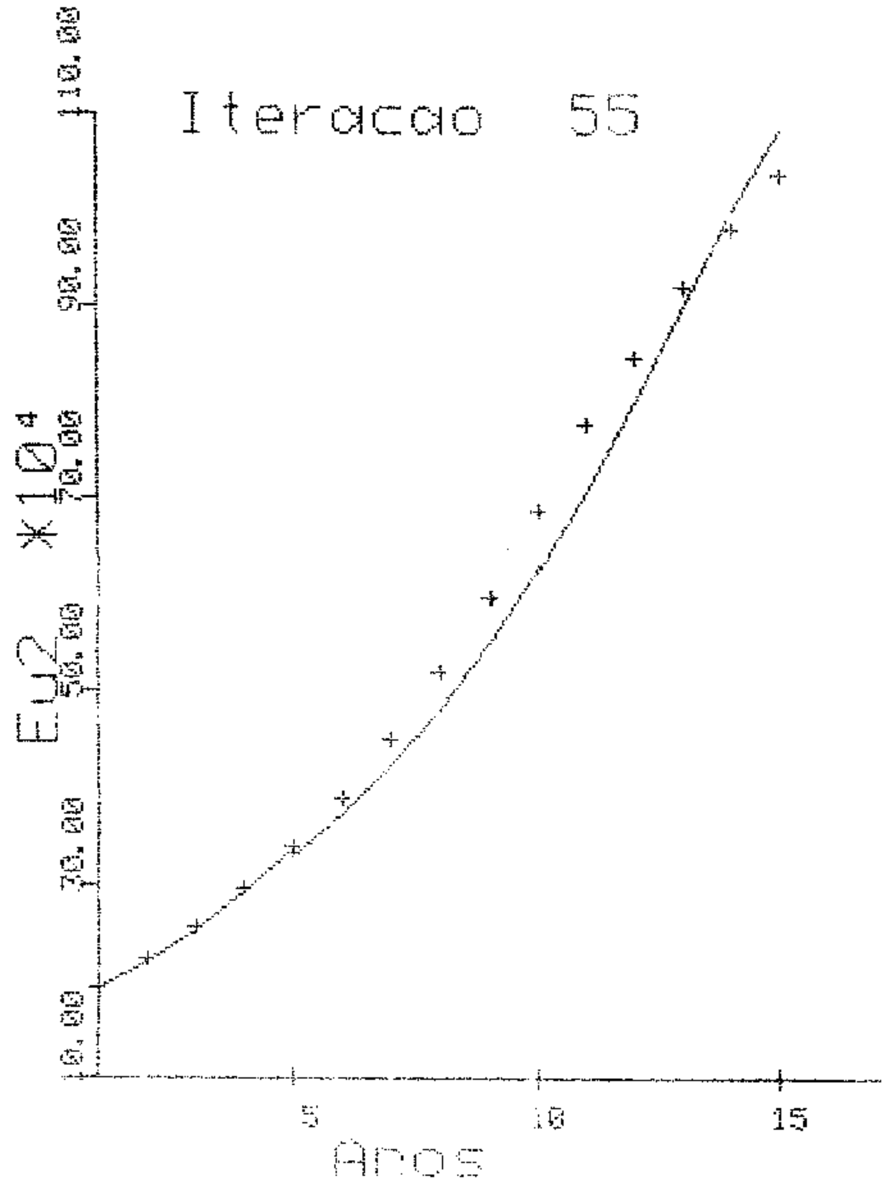

Iteracao 30
Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

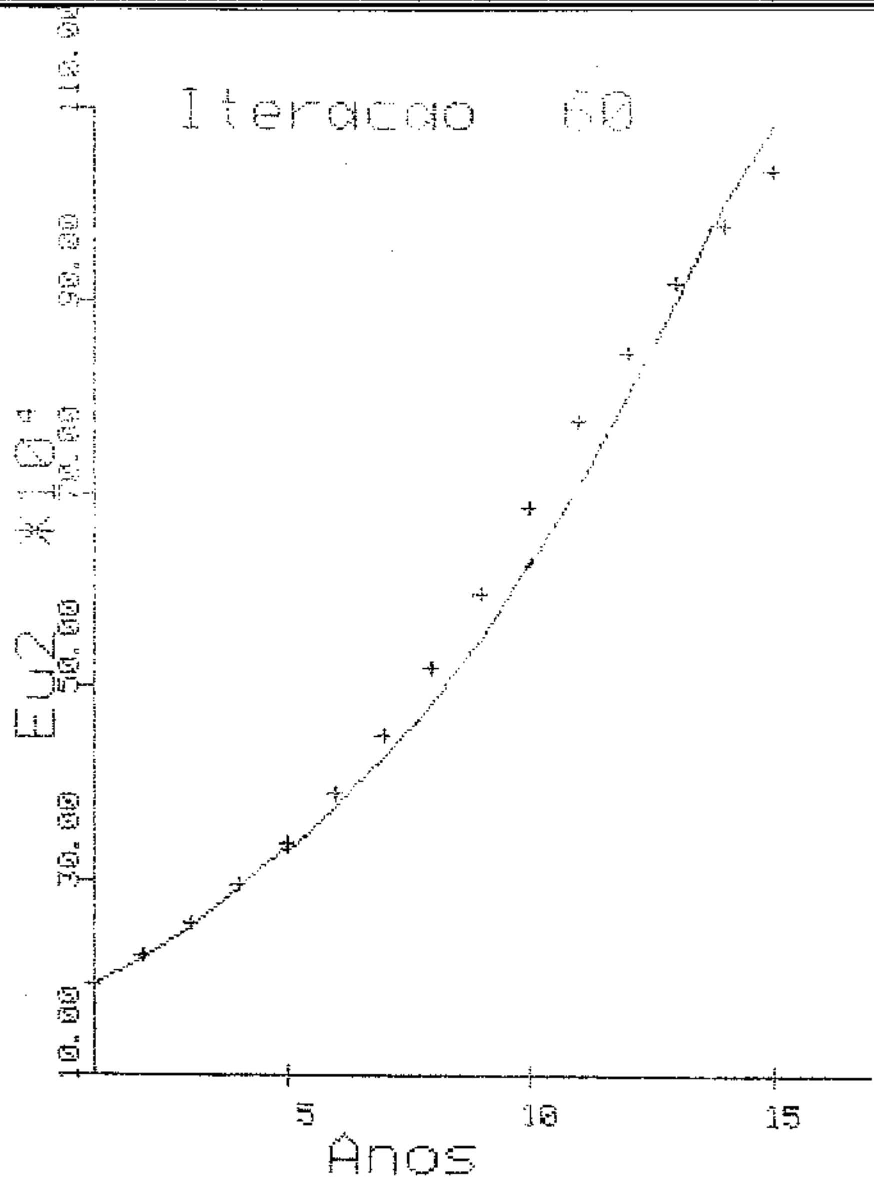

Iterac 35
Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Ano


Iteracao 40
EU2 * 10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

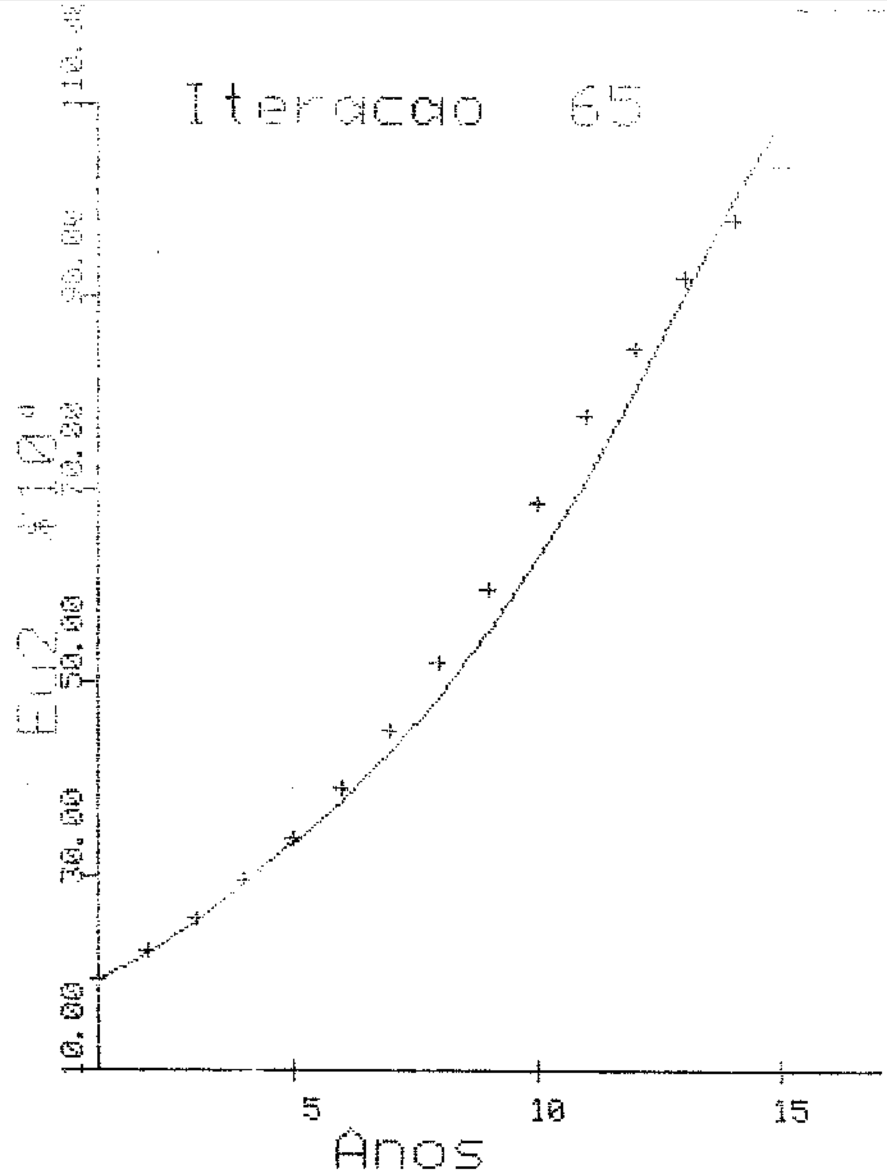

Iteracao 45
EU2 * 10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos


Iteracao 50
Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

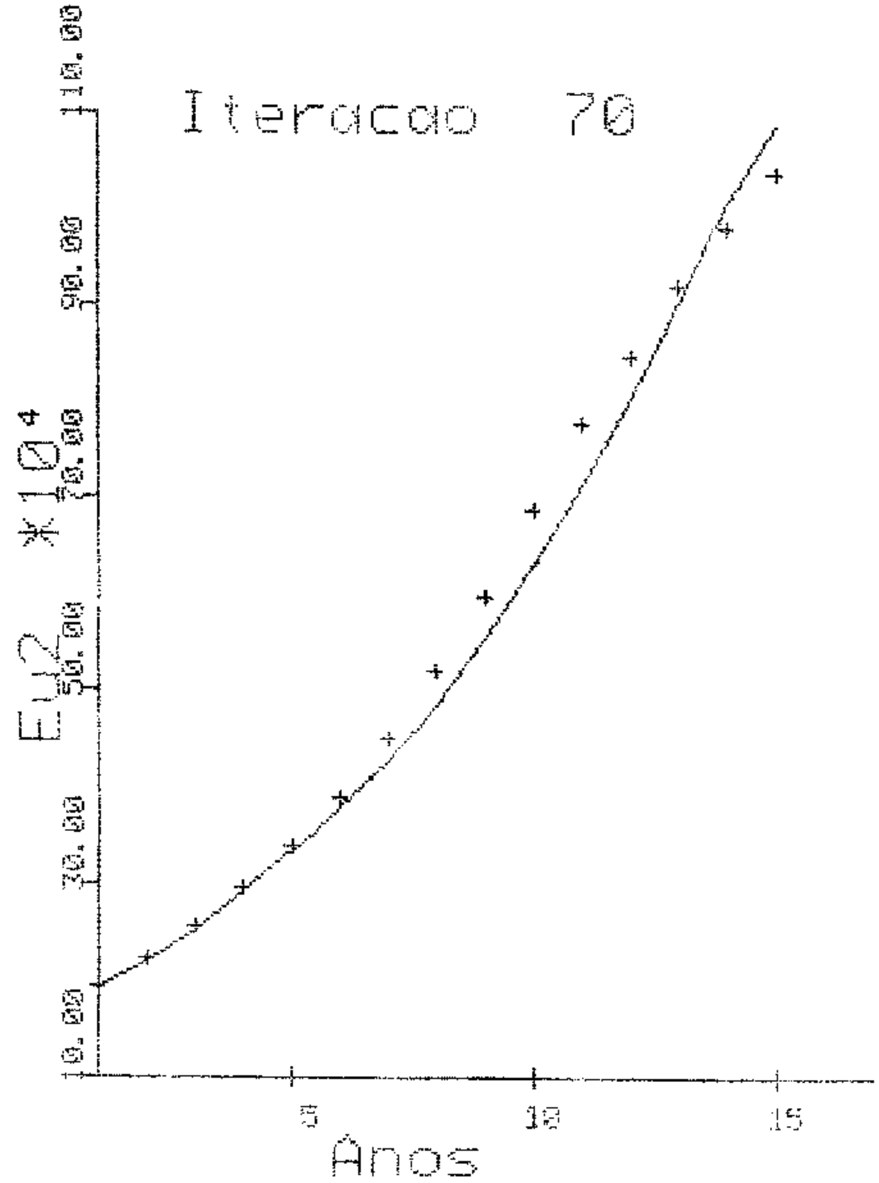

Iteracao 55
Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

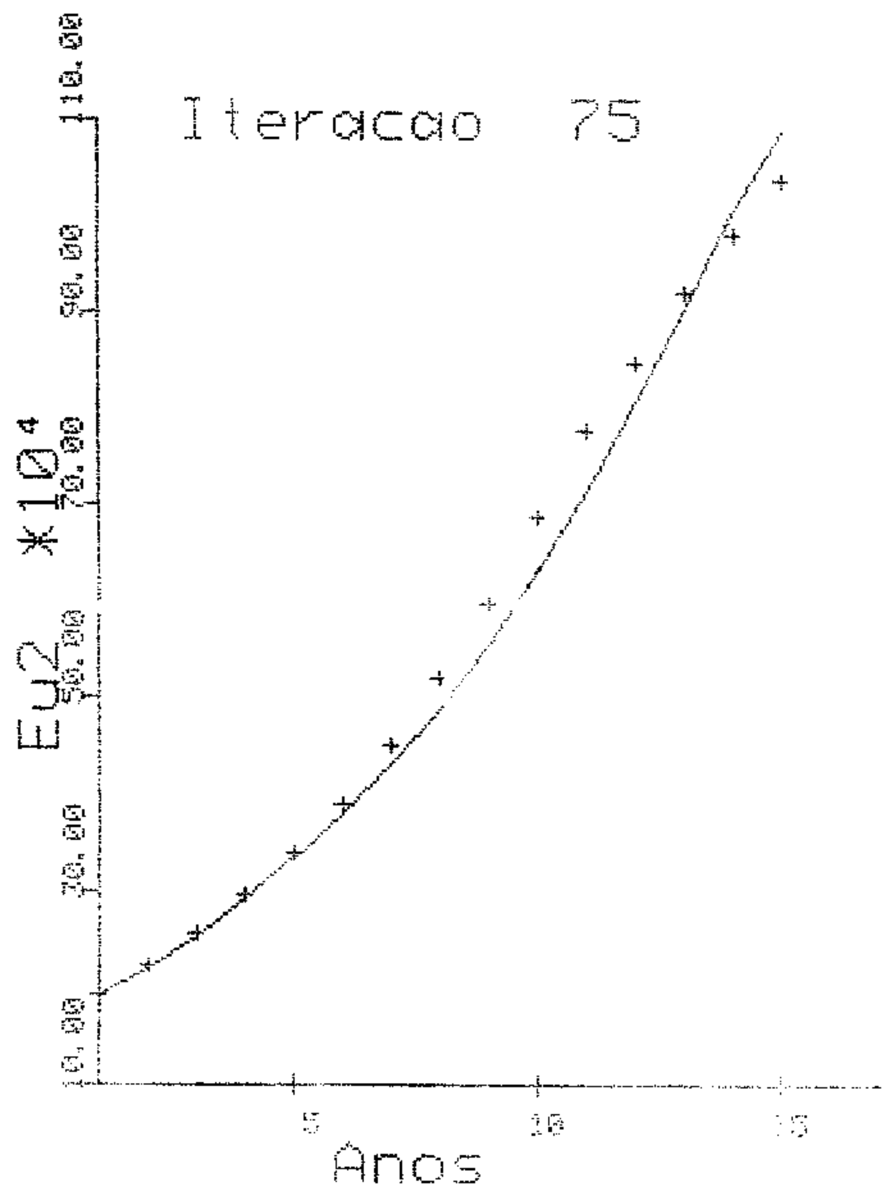


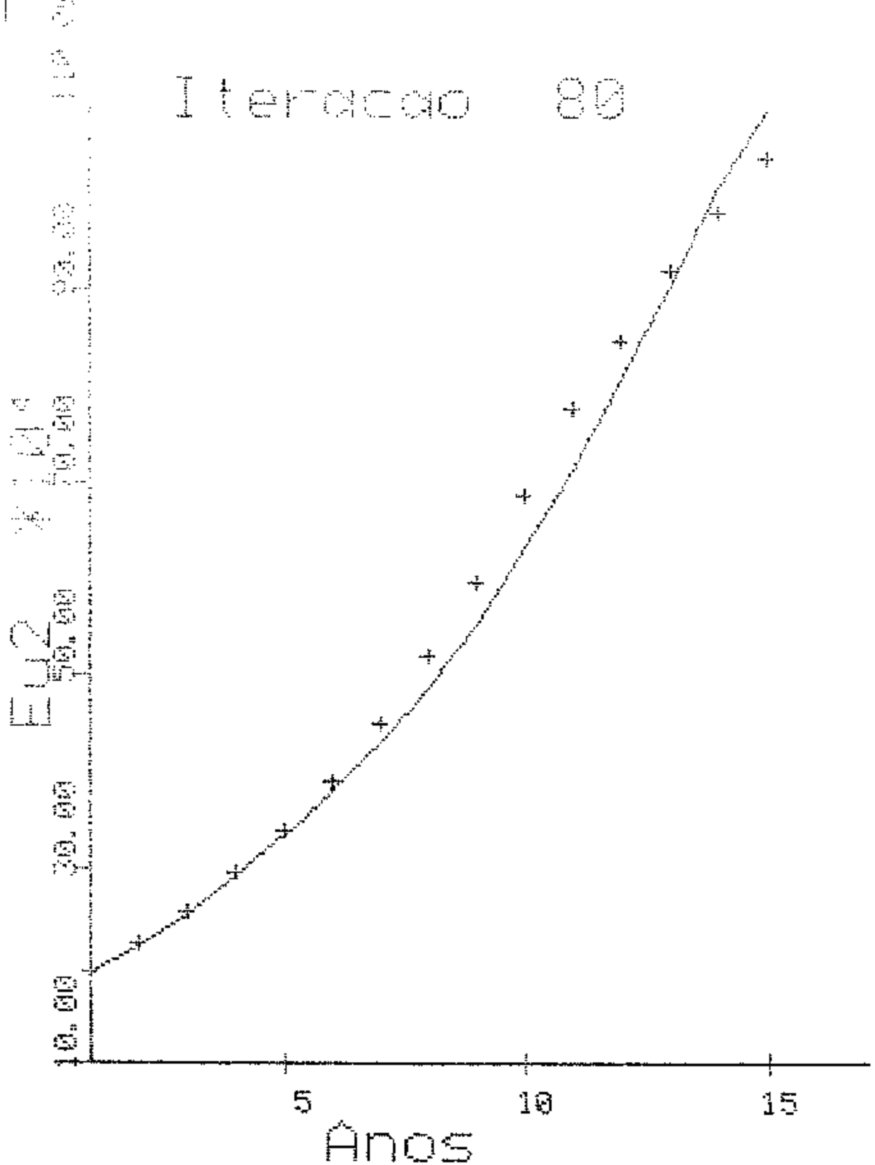
Iteracao 60
Eu2 *10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

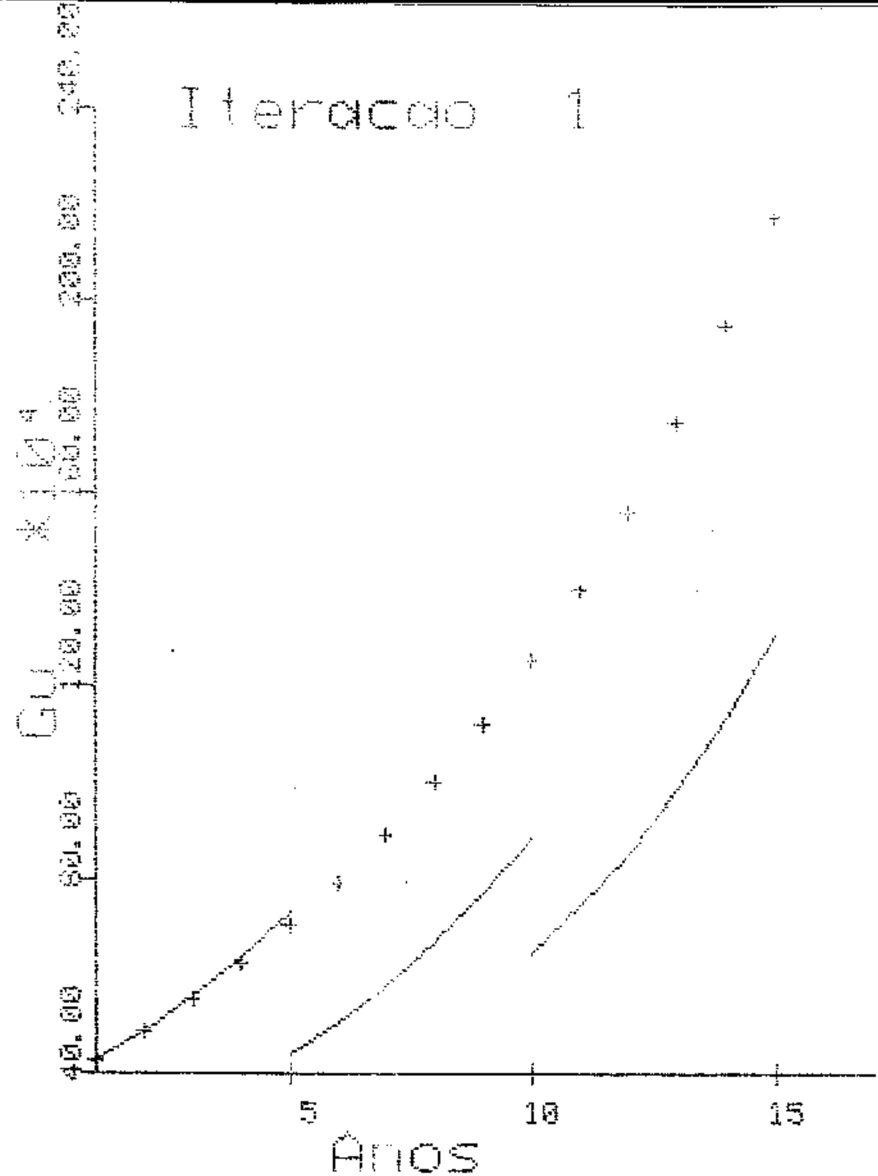


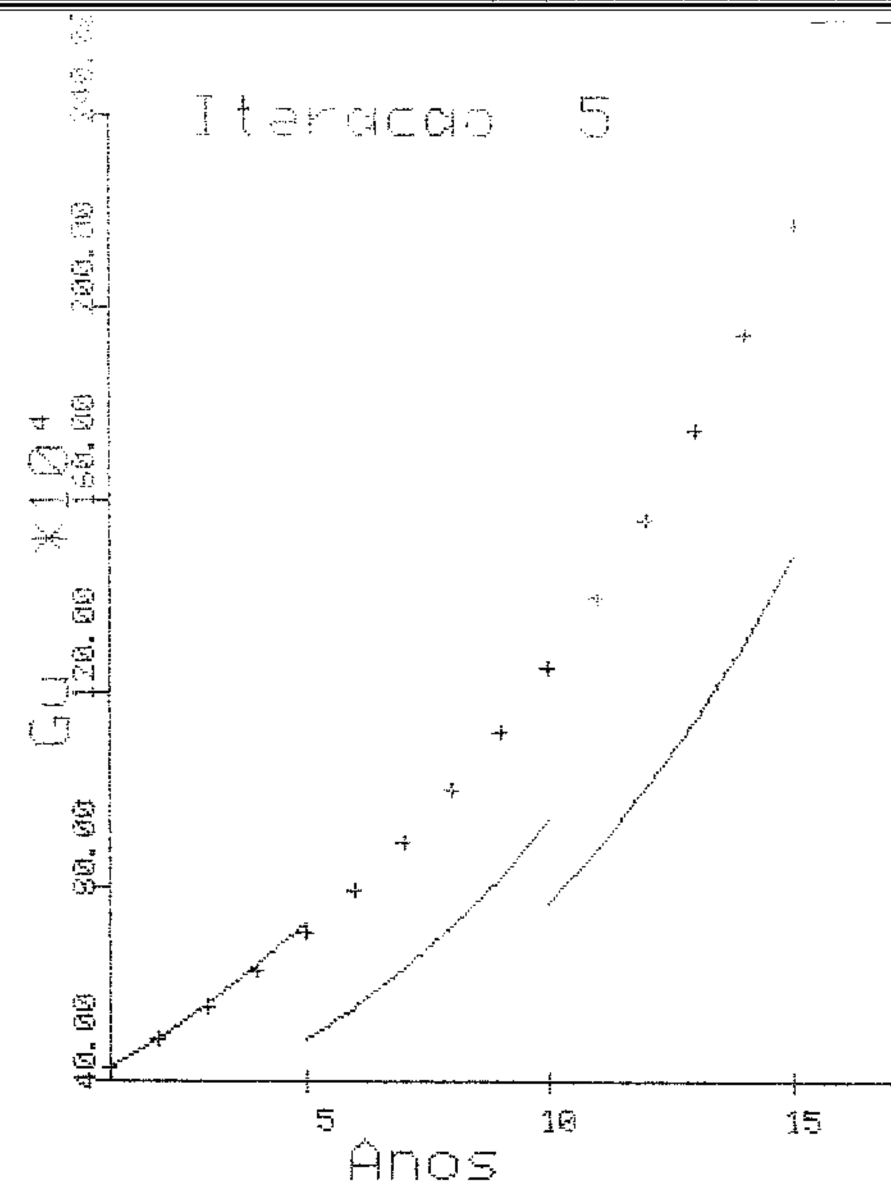
Iteracao 65
Eu2 *10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

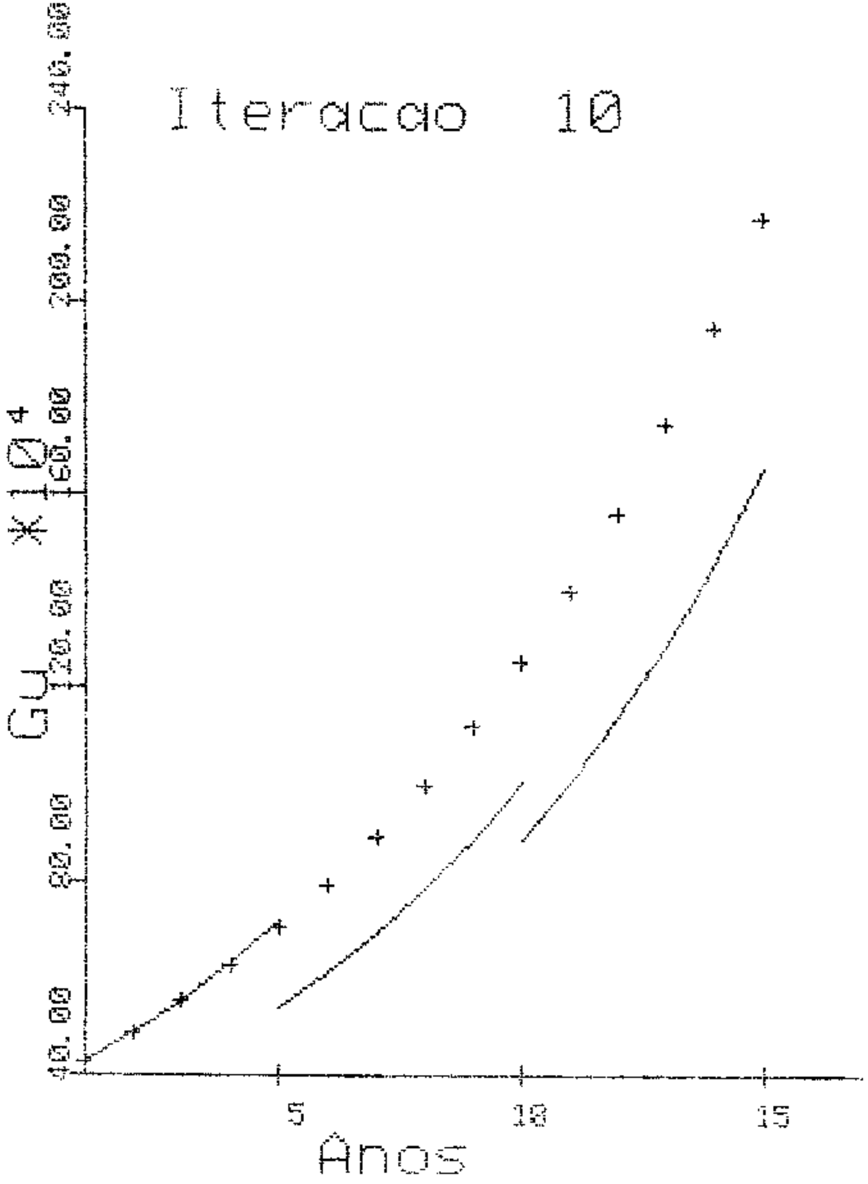

Iteracao 70
Eu2 *10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

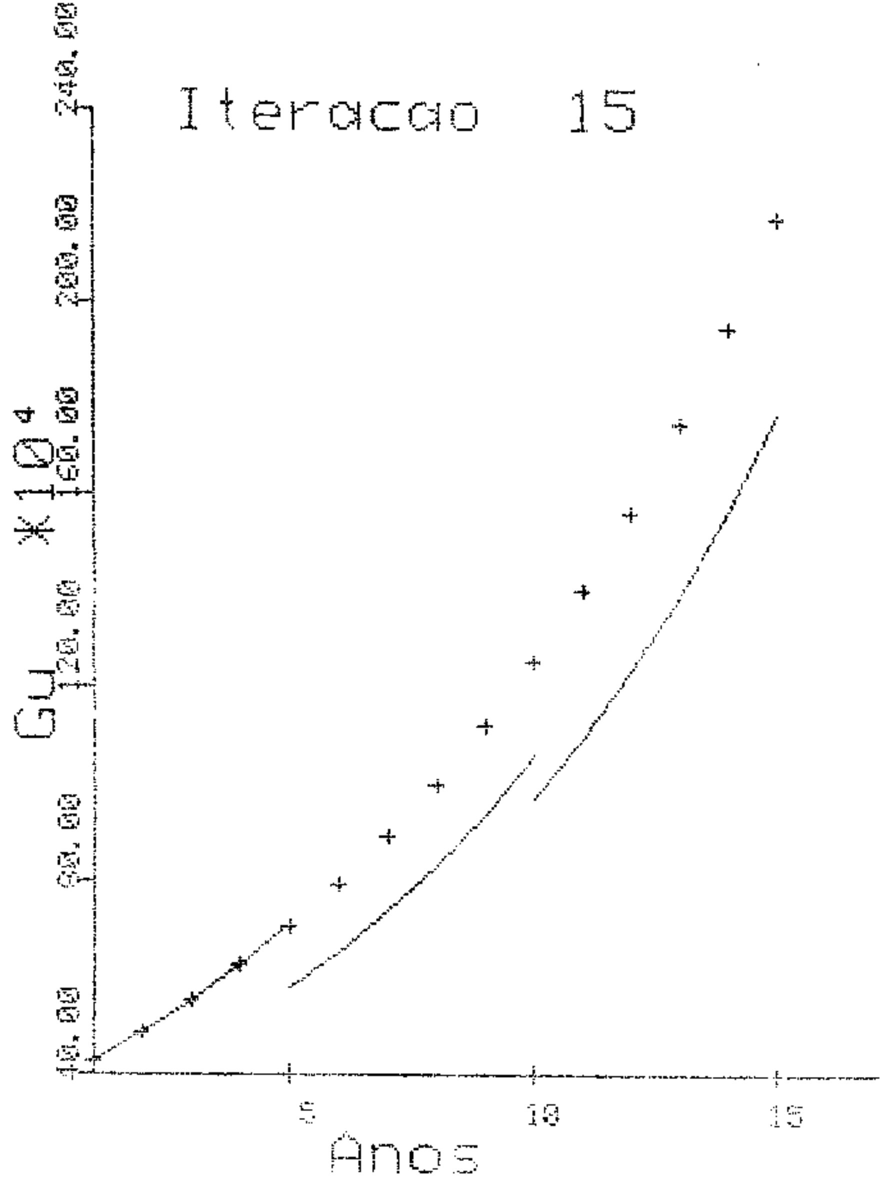

Iteracao 75
Eu2 *10^4
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00
5
10
15
Anos

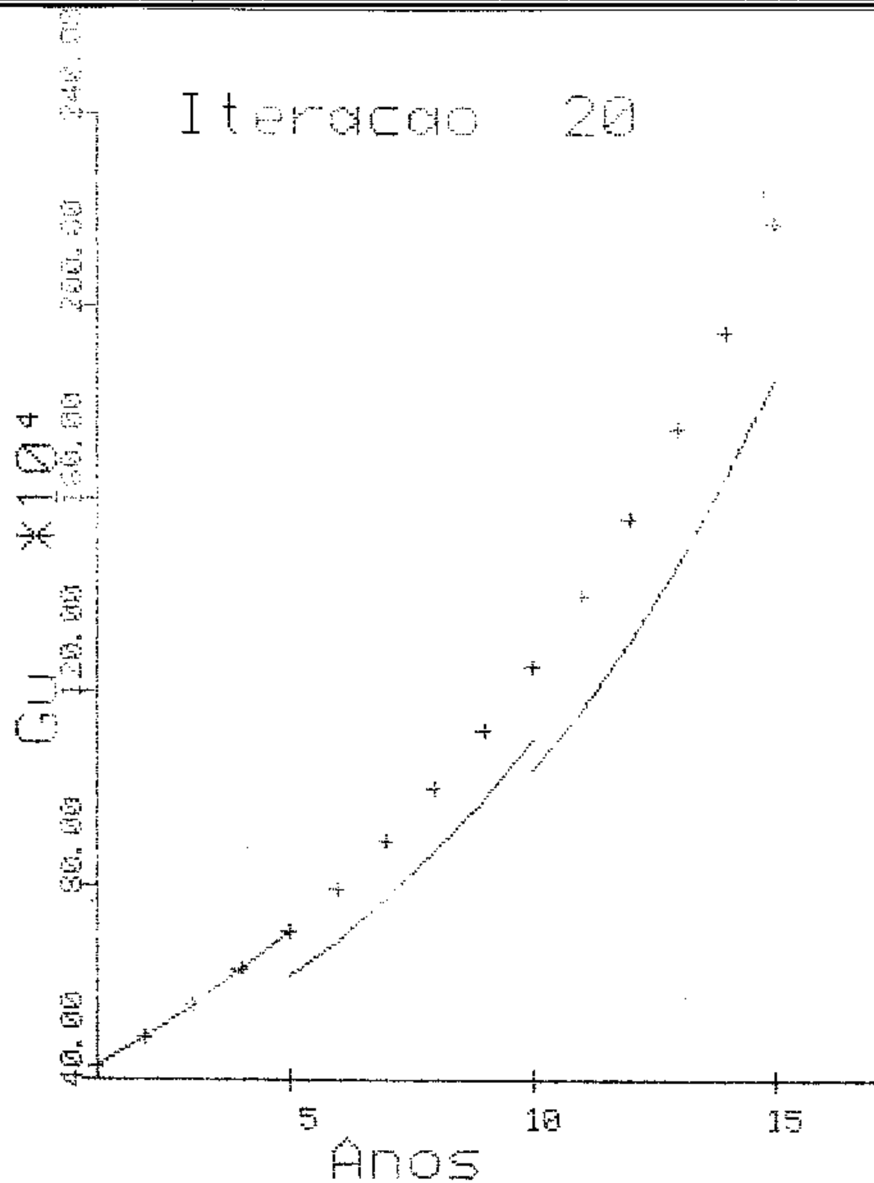

Iteracao 80
EU2
10.00
20.00
50.00
100.00
200.00
5
10
15
Anos

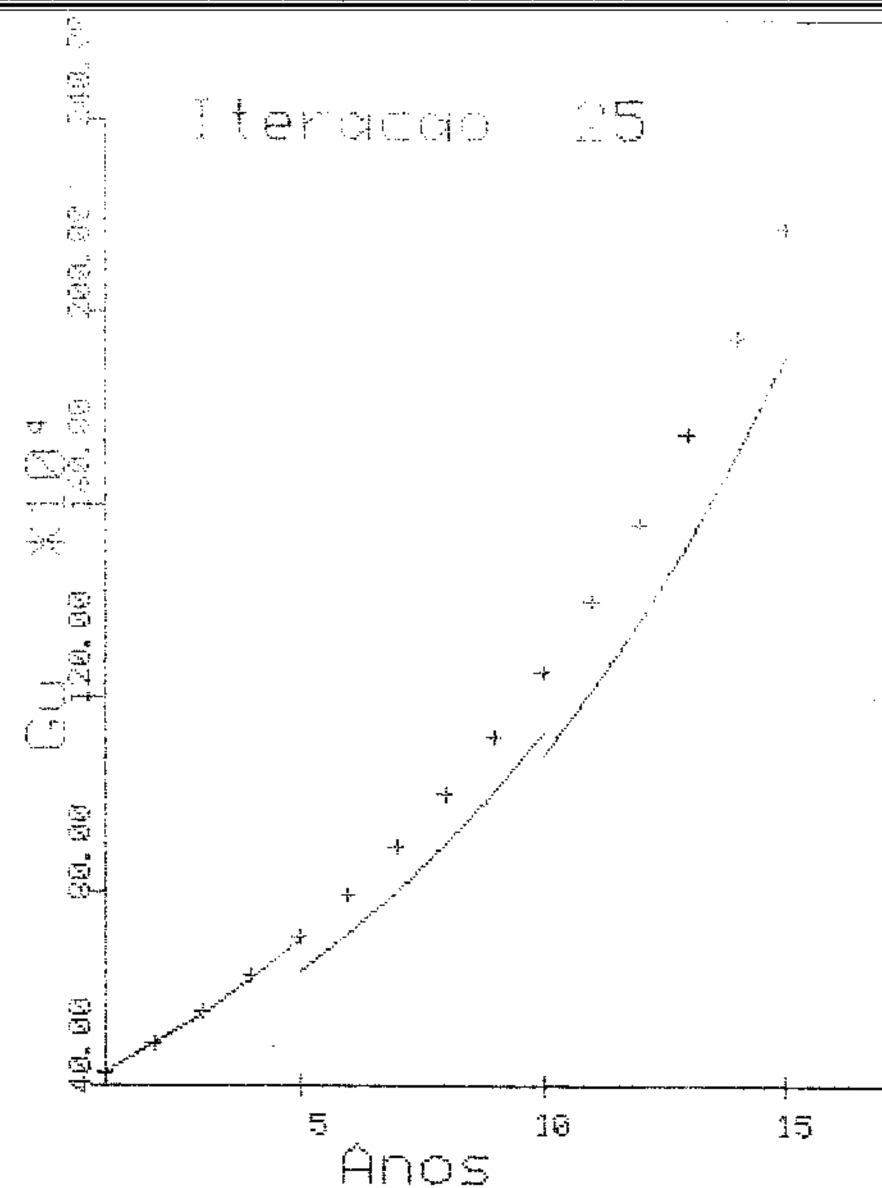

Iteracao 1
Gu *10 4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

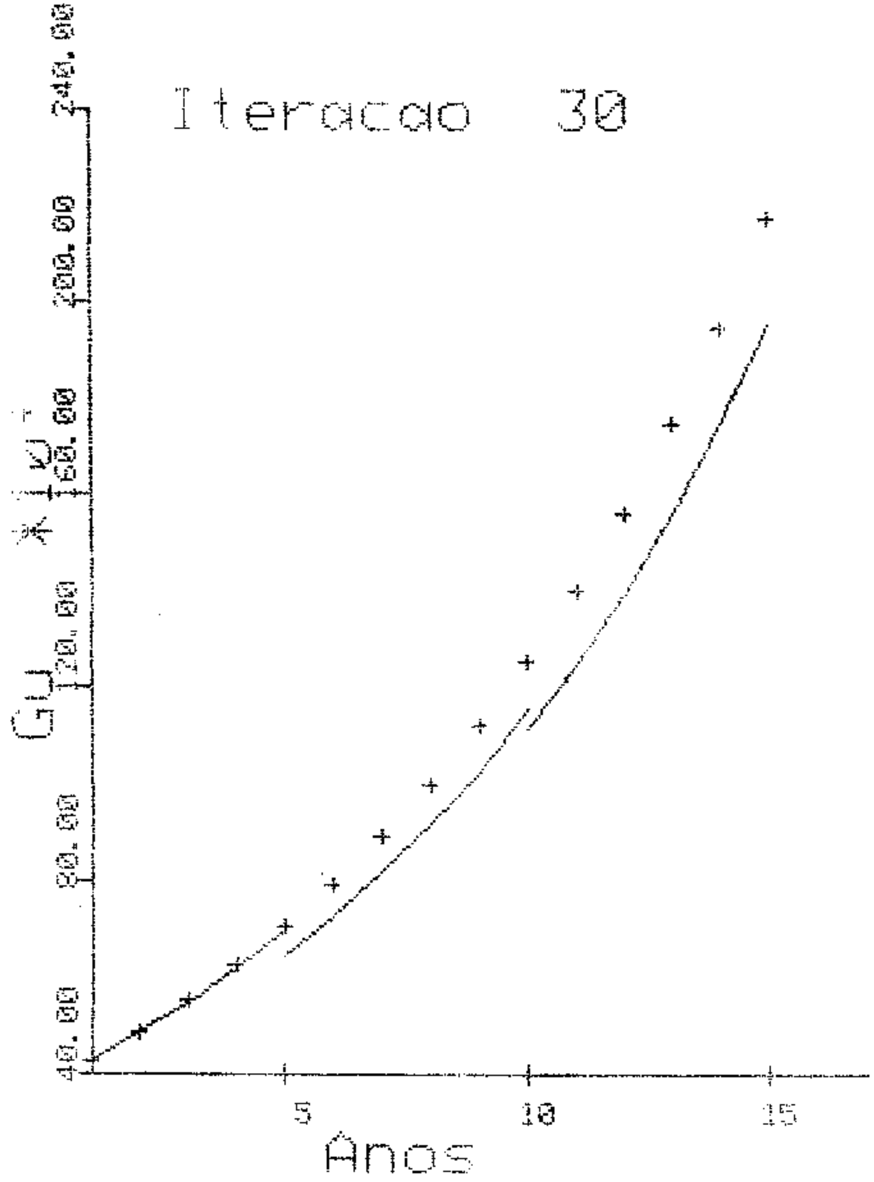

Iteracao 5
Gu *10 4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos


Iteracao 10
Gu *10⁴
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

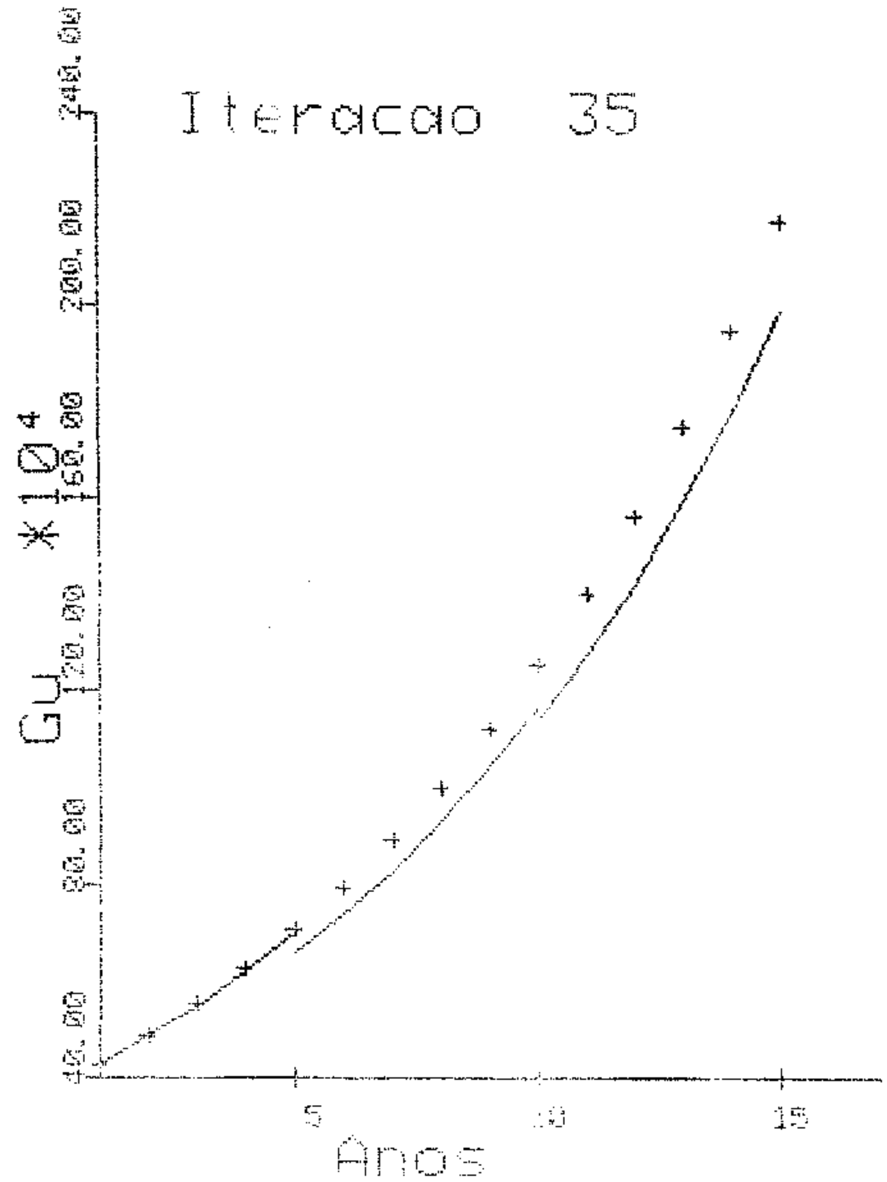

Iteracao 15
Gu *10⁴
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos


Iteracao 20
Gu *10⁴
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

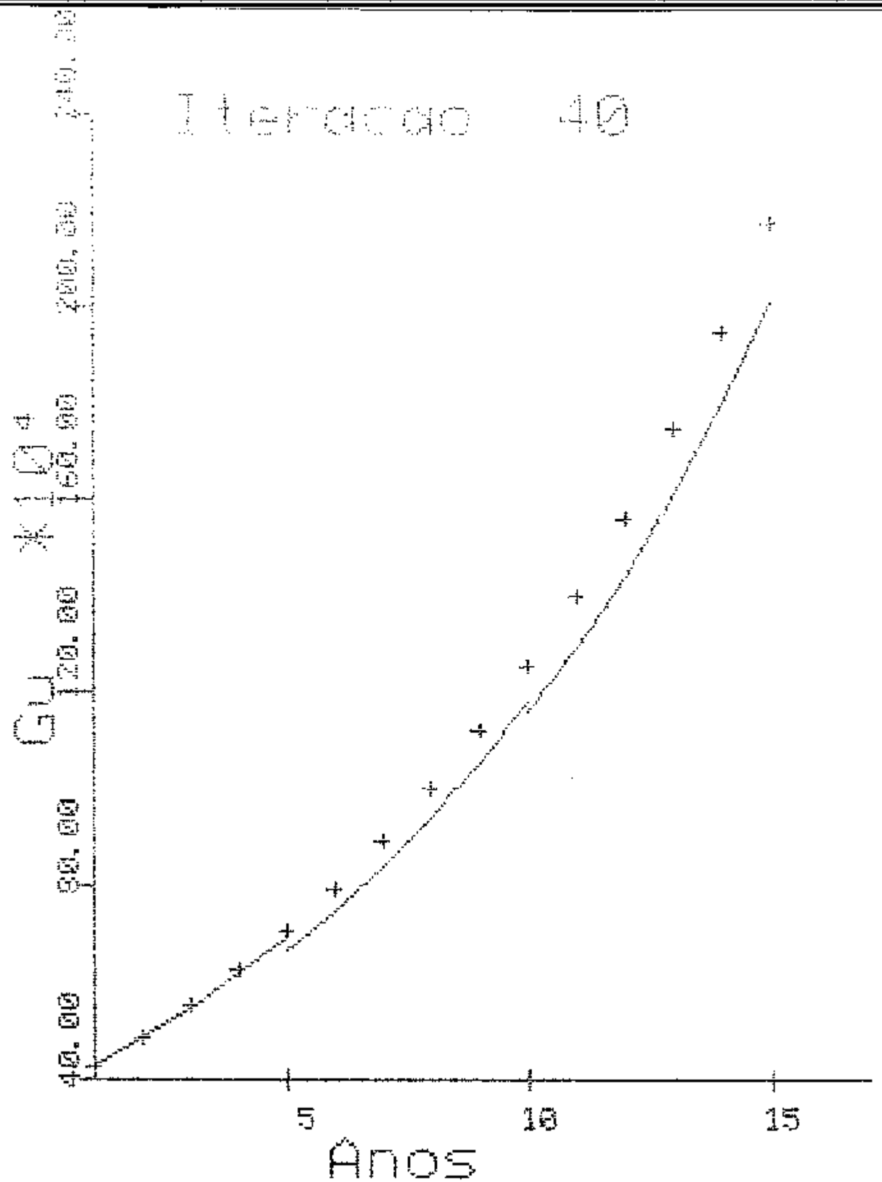

Iteracao 25
Gu *10⁴
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

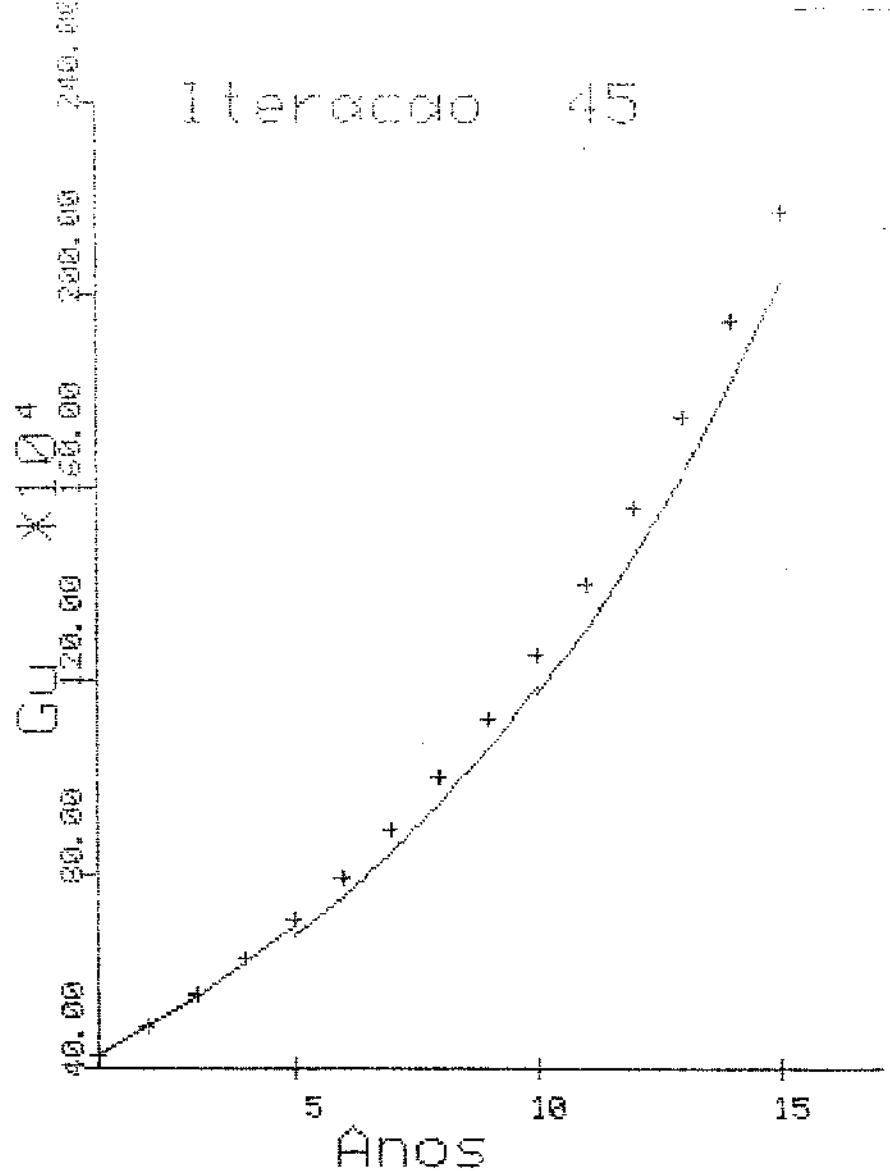


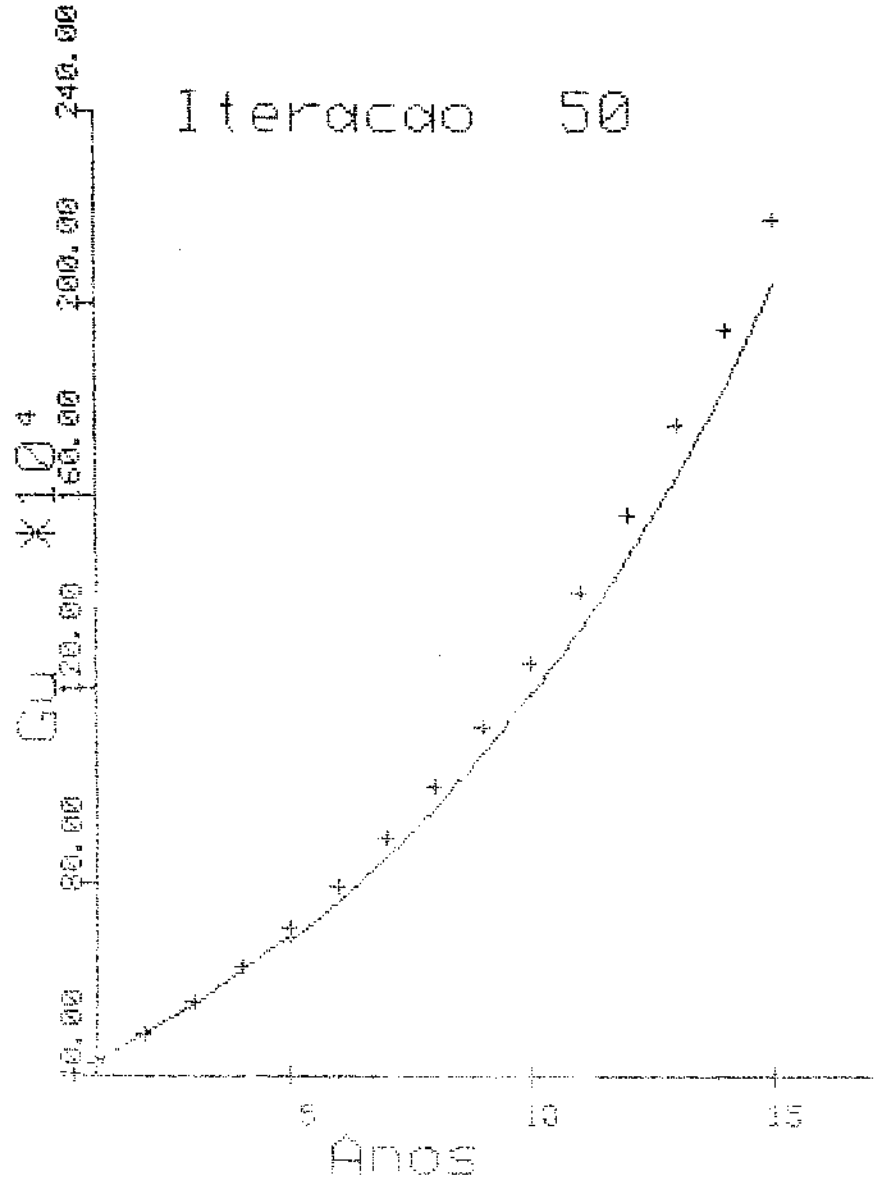
Iteracao 30
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
Gu *10^4
5
10
15
Anos

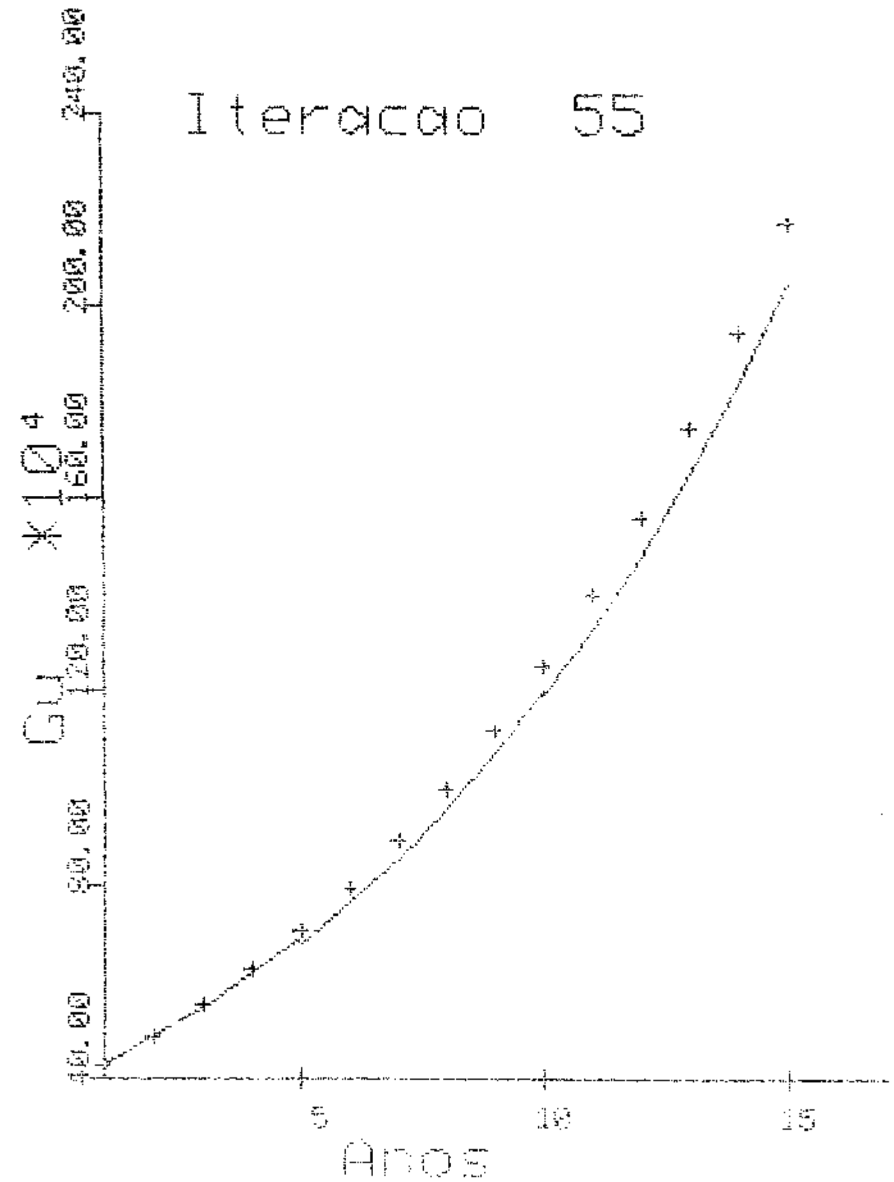


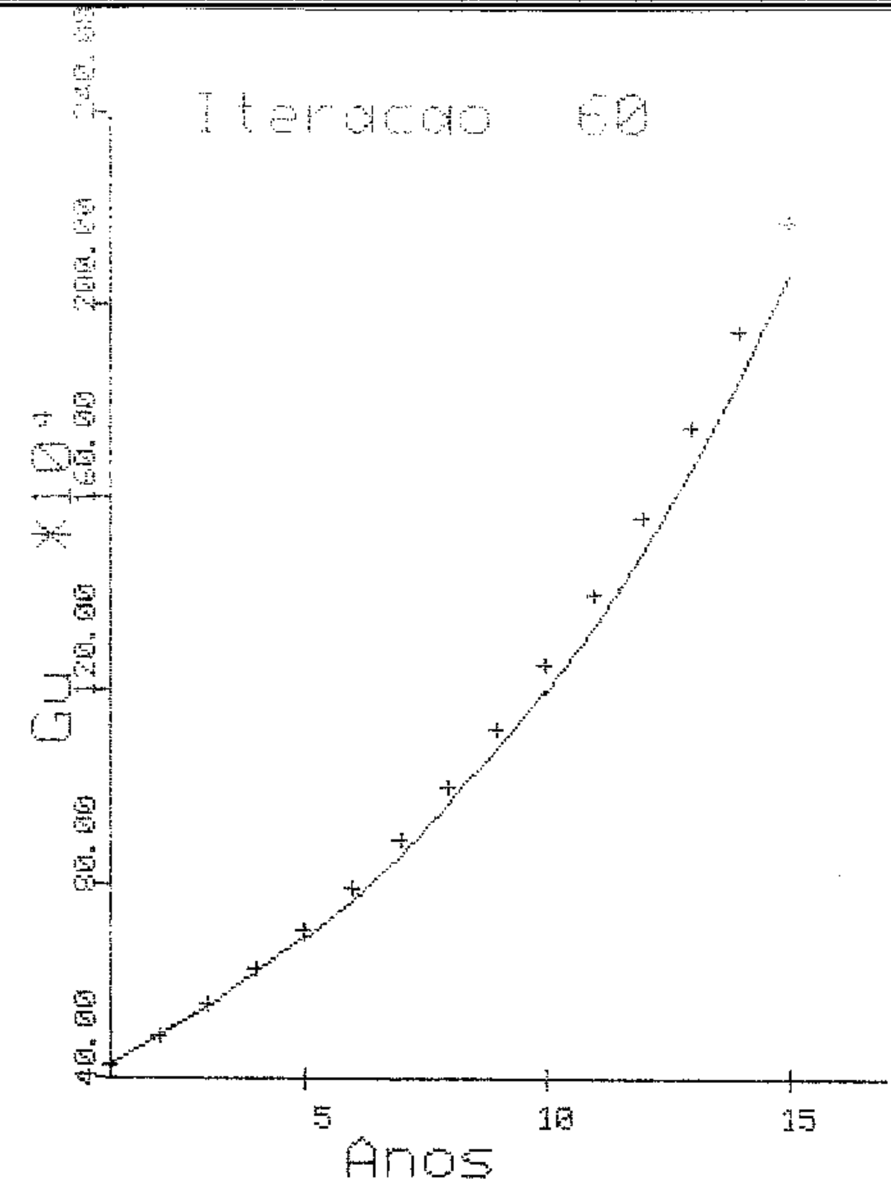
Iteracao 35
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
Gu *10^4
5
10
15
Anos


Iteracao 40
Gu *10^4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

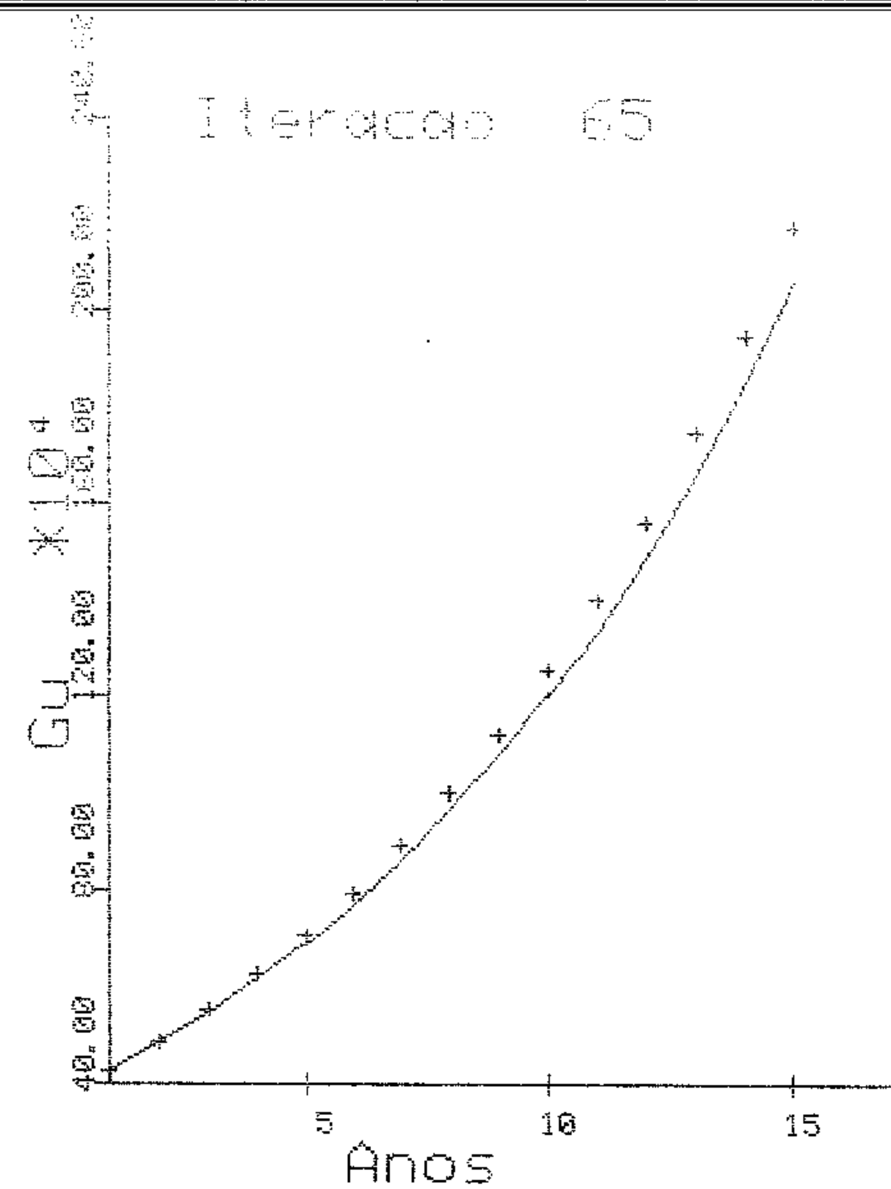

Iteracao 45
Gu *10^4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos


Iteracao 50
Gu *10⁴
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
5
10
15
Anos

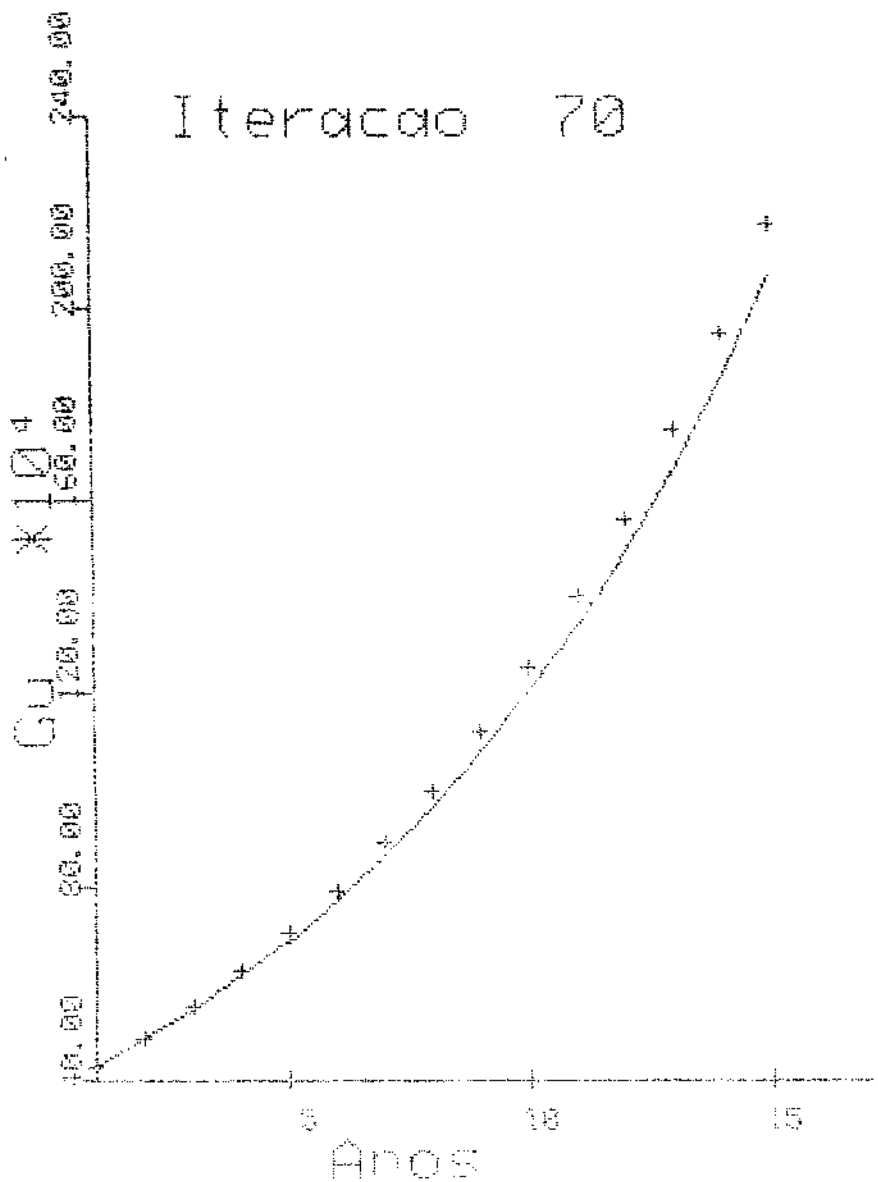

Iteracao 55
Gu *10⁴
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
5
10
15
Anos

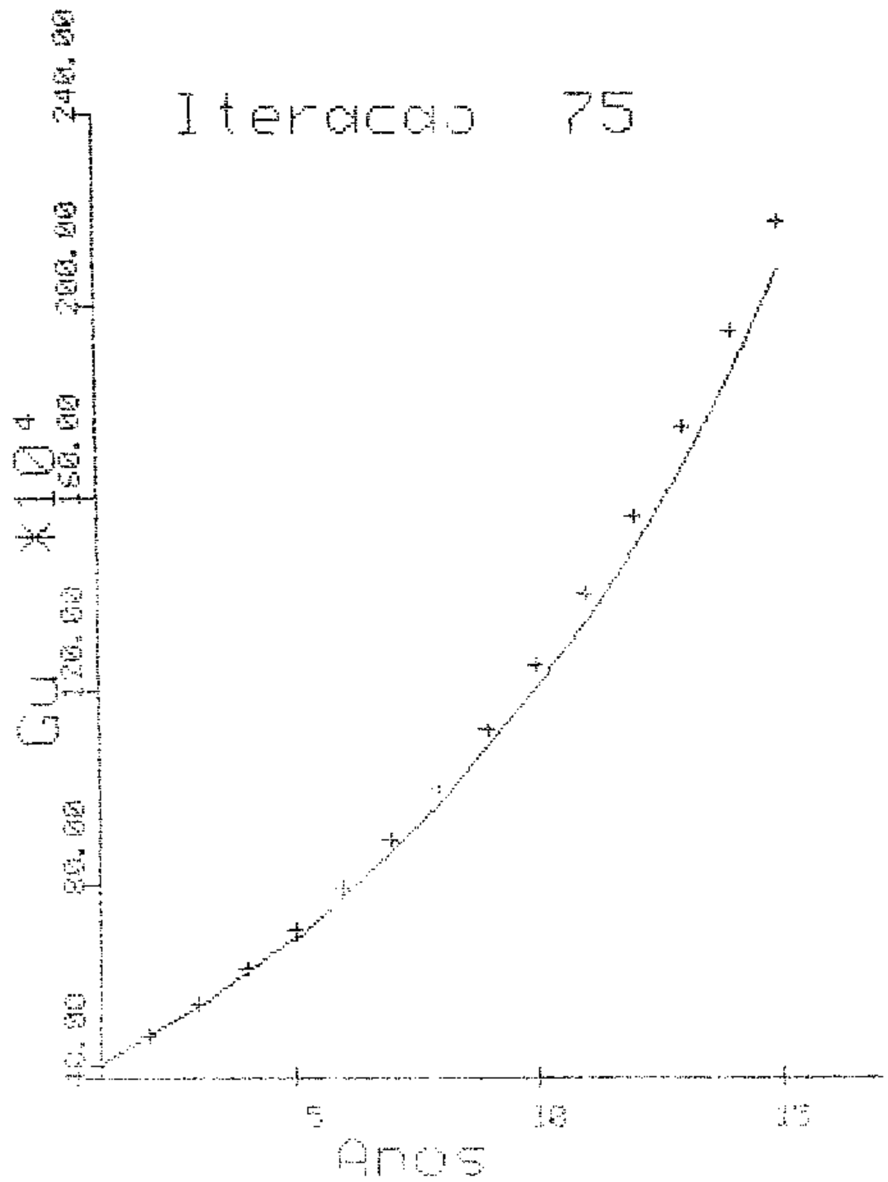


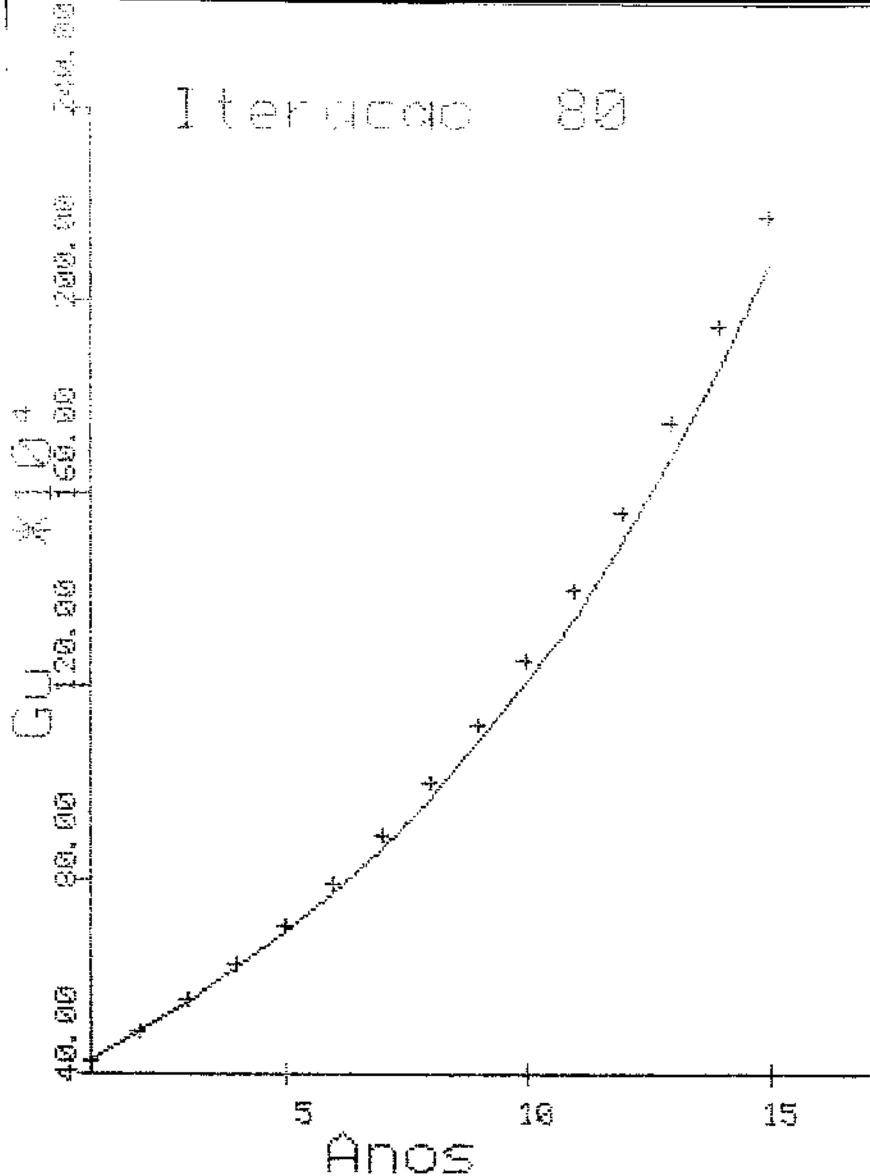
Iteracao 60
Gu *10^4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

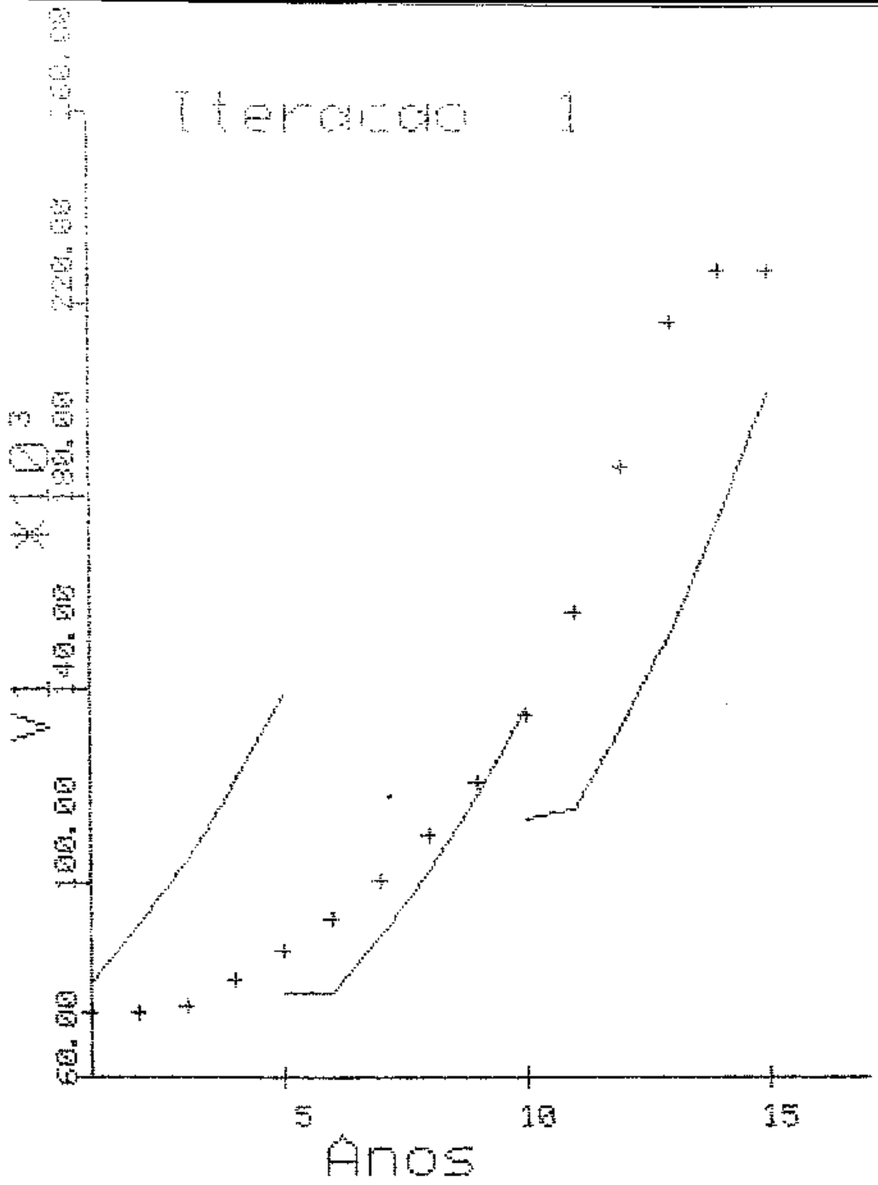


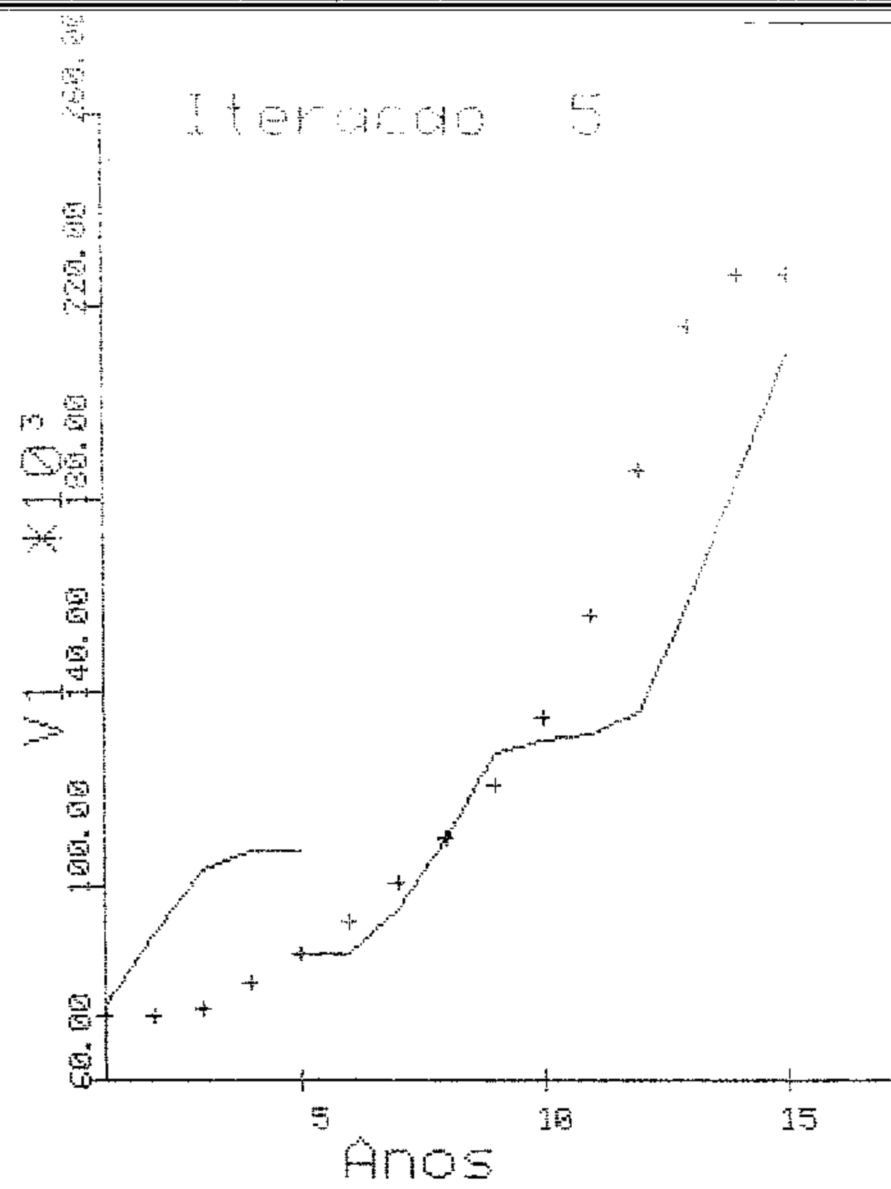
Iteracao 65
Gu *10^4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

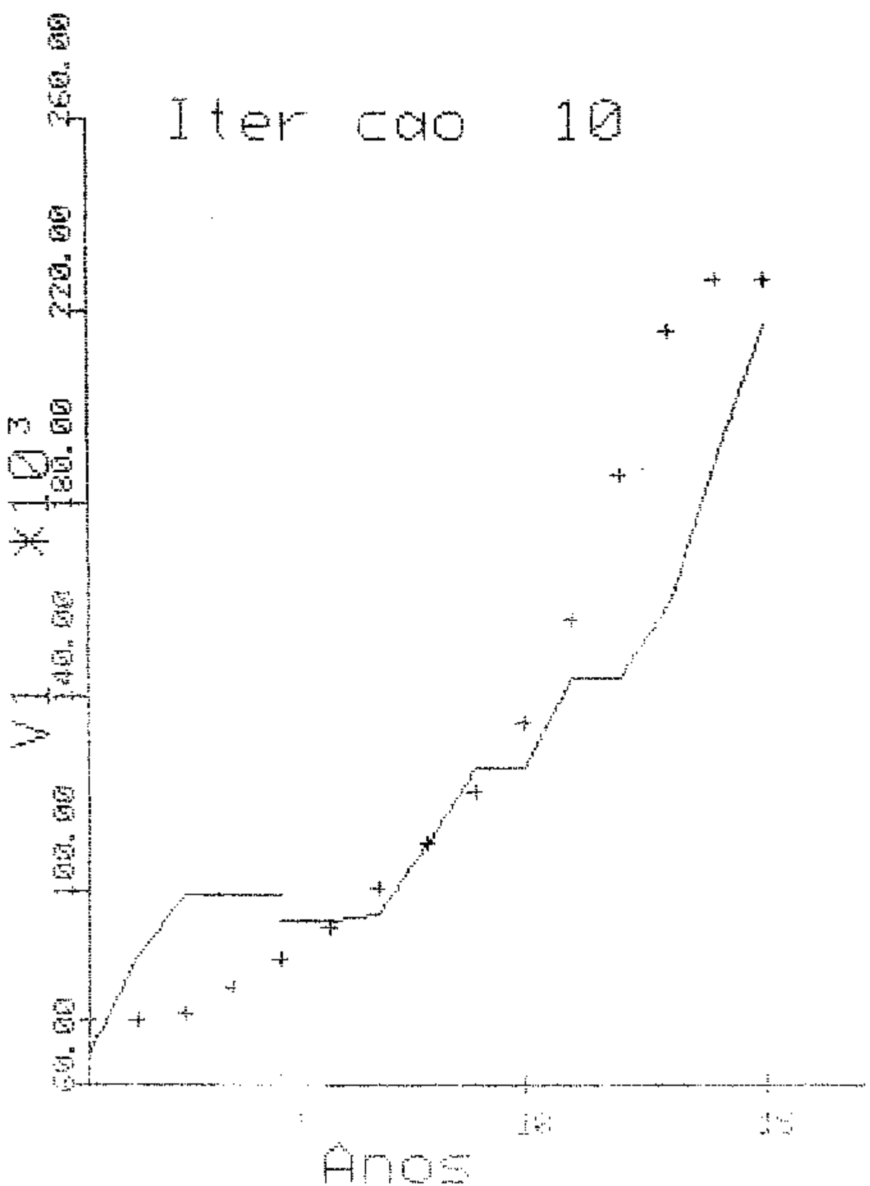

Iteracao 70
Cu *10^4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

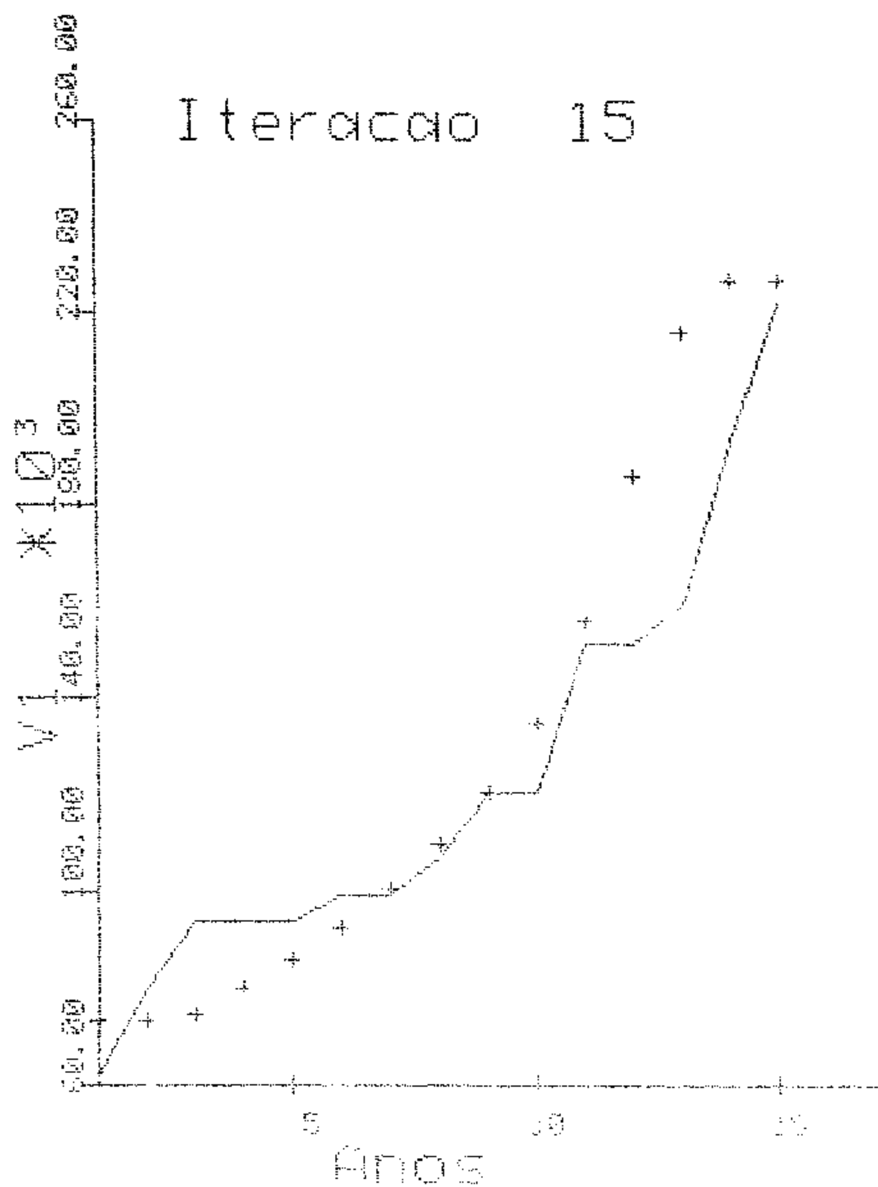

Iteracao 75
Cu *10^4
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

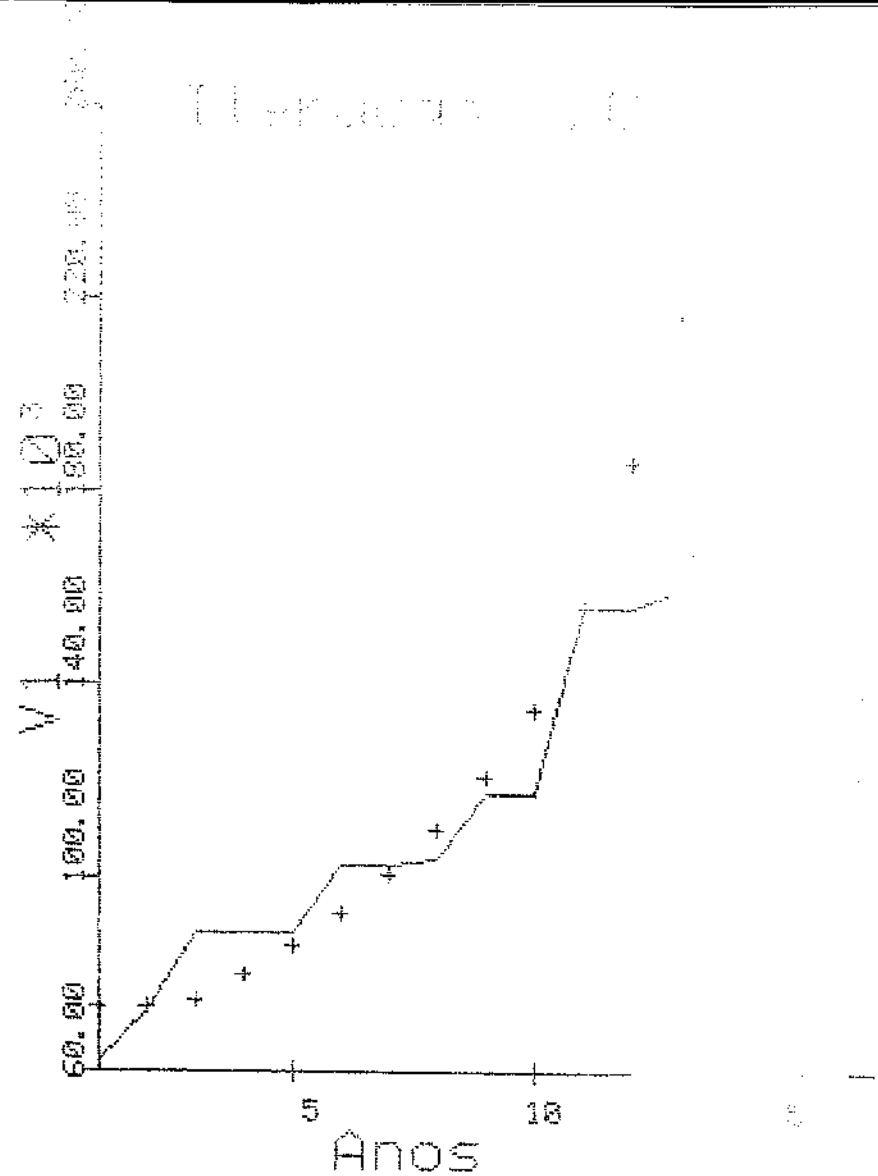

Iteracao 80
GU *10 4
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
5
10
15
Anos

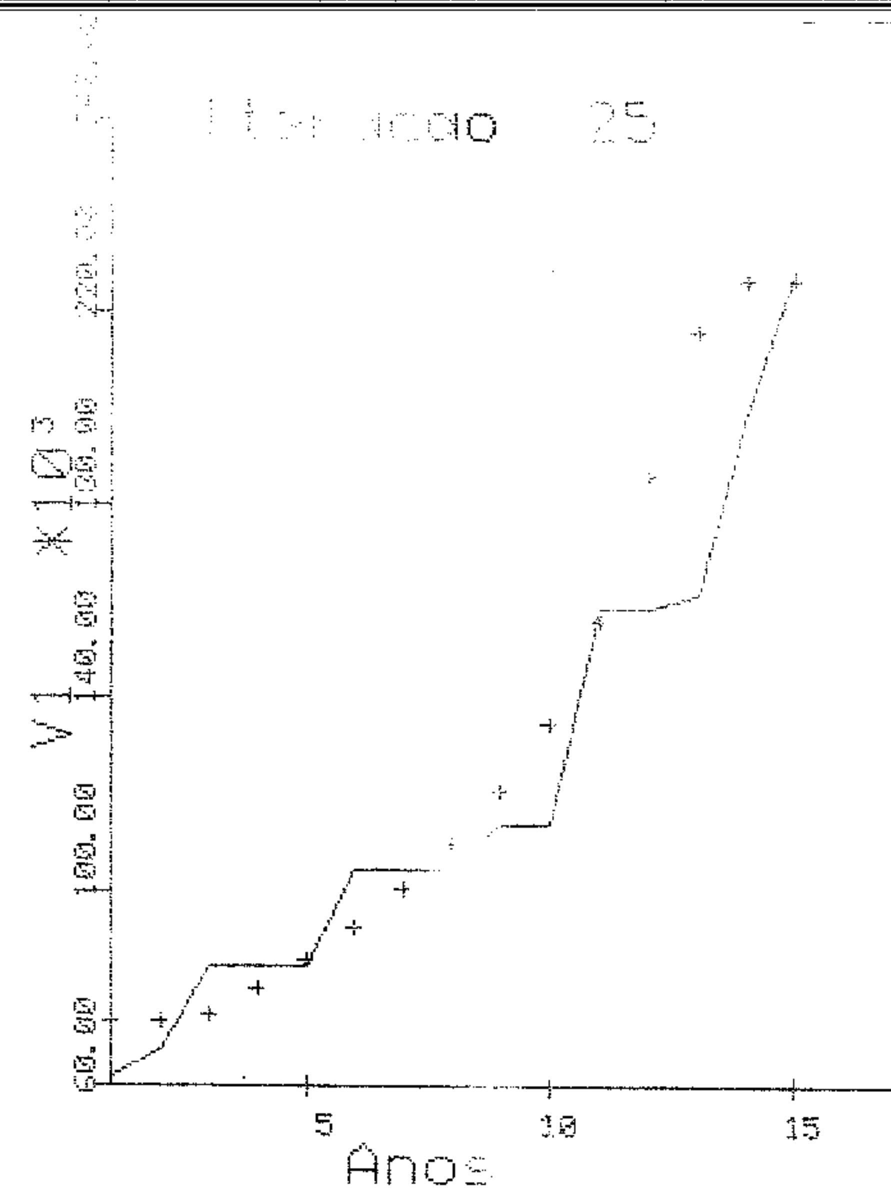

Iteracao 1
V1 * 10^3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
5
10
15
Anos

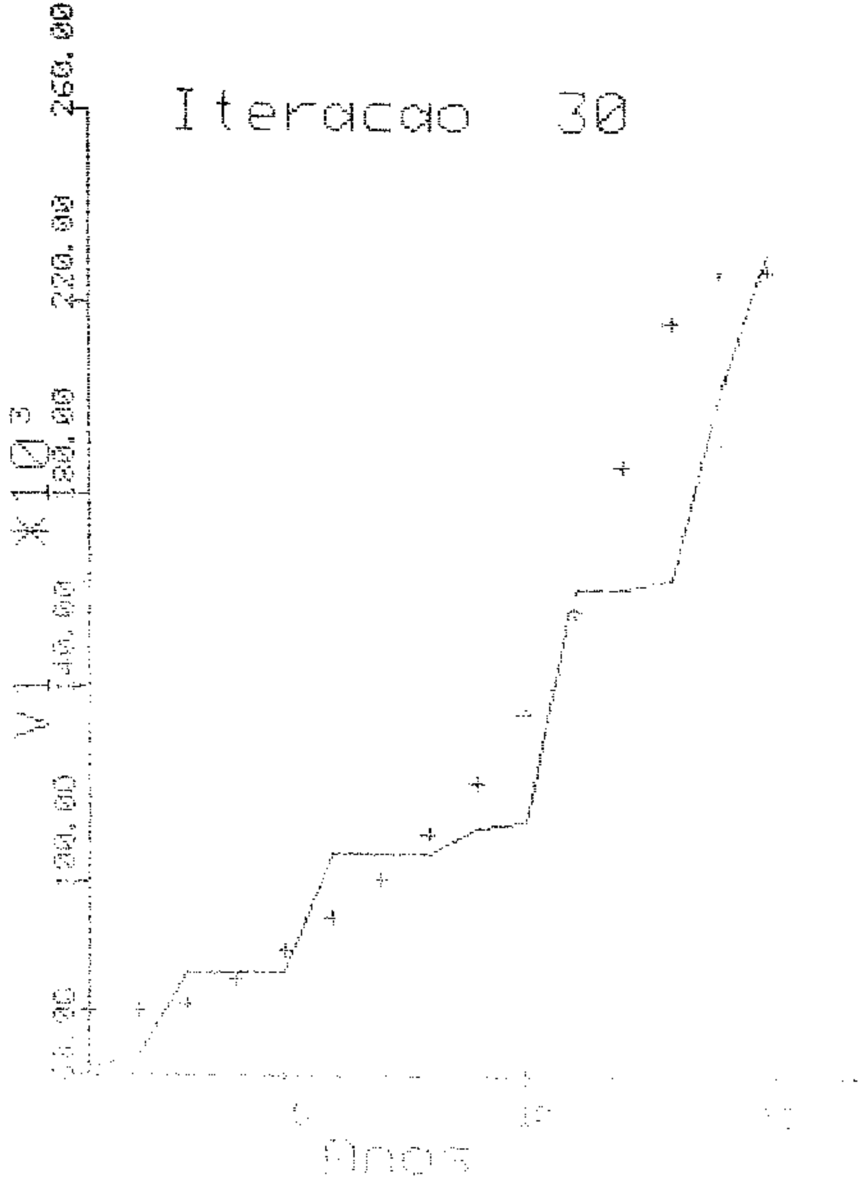

Iteracao 5
V1 * 10^3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
5
10
15
Anos


Iter cao 10
V1 *10 3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
10
15
Anos

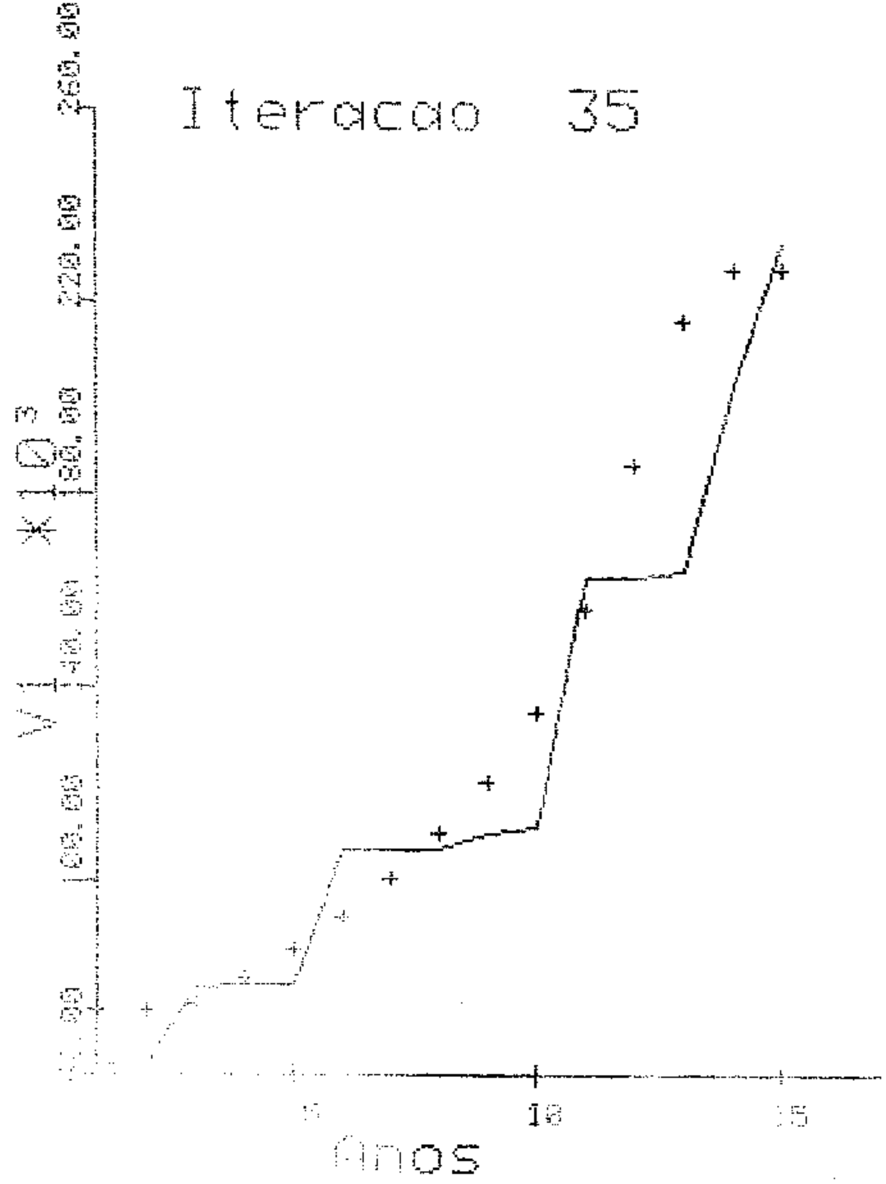

Iteracao 15
V1 *10 3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
5
10
15
Anos


V1 *10^3
60.00
100.00
140.00
180.00
220.00
5
10
Anos

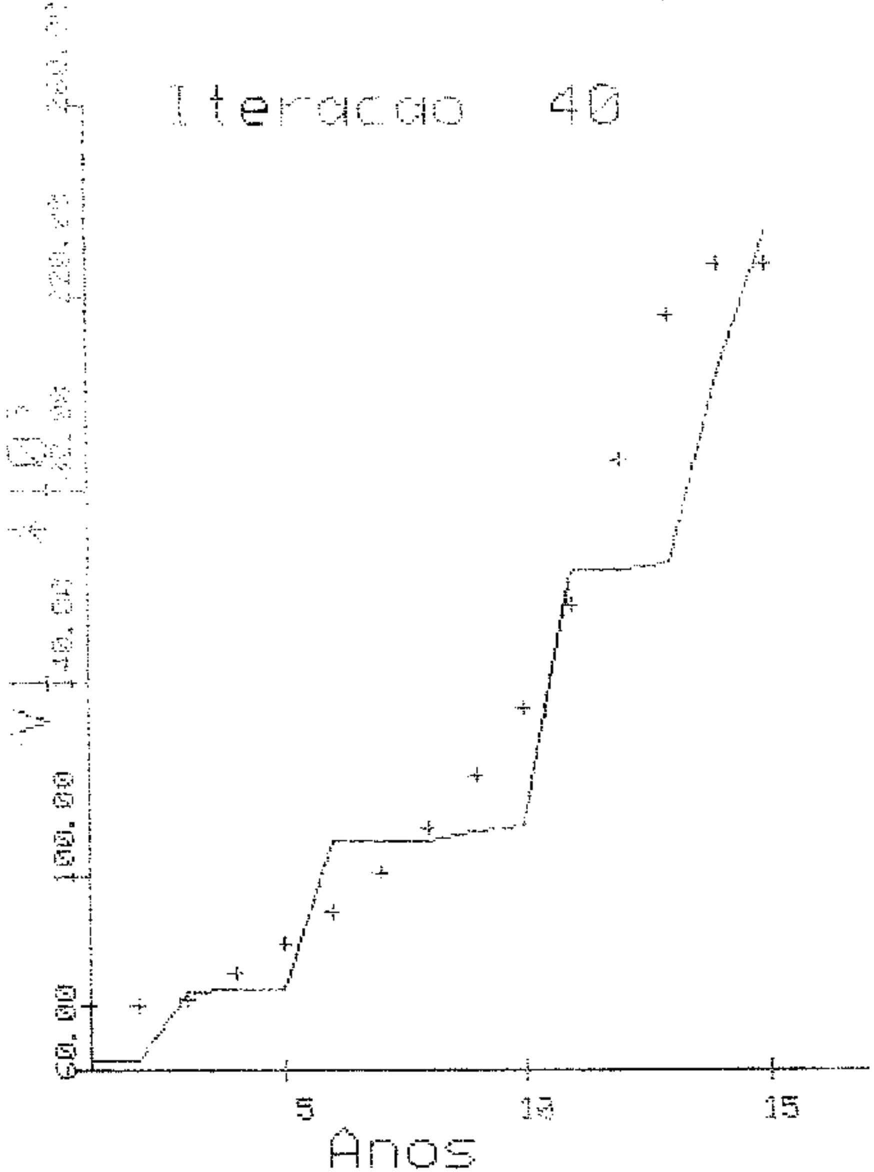

V1 *10^3
60.00
100.00
140.00
180.00
220.00
5
10
15
Anos

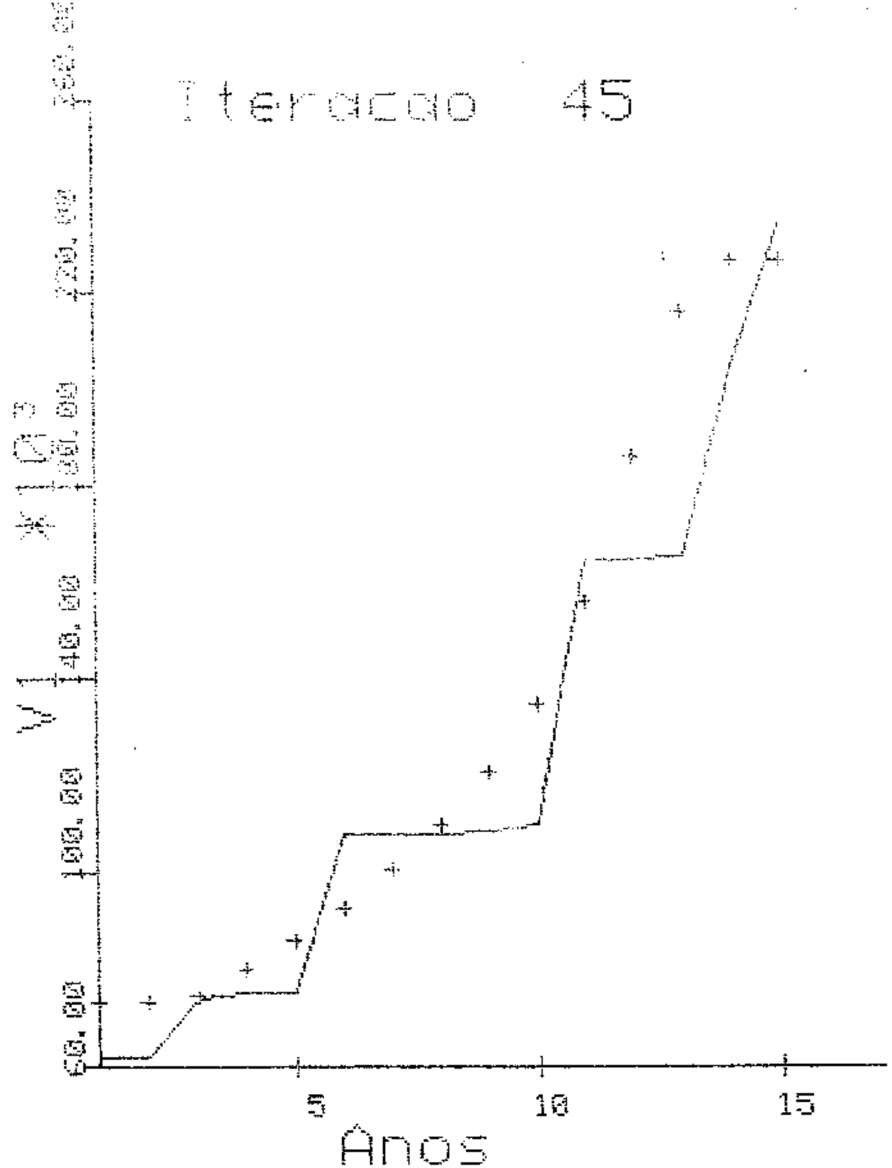


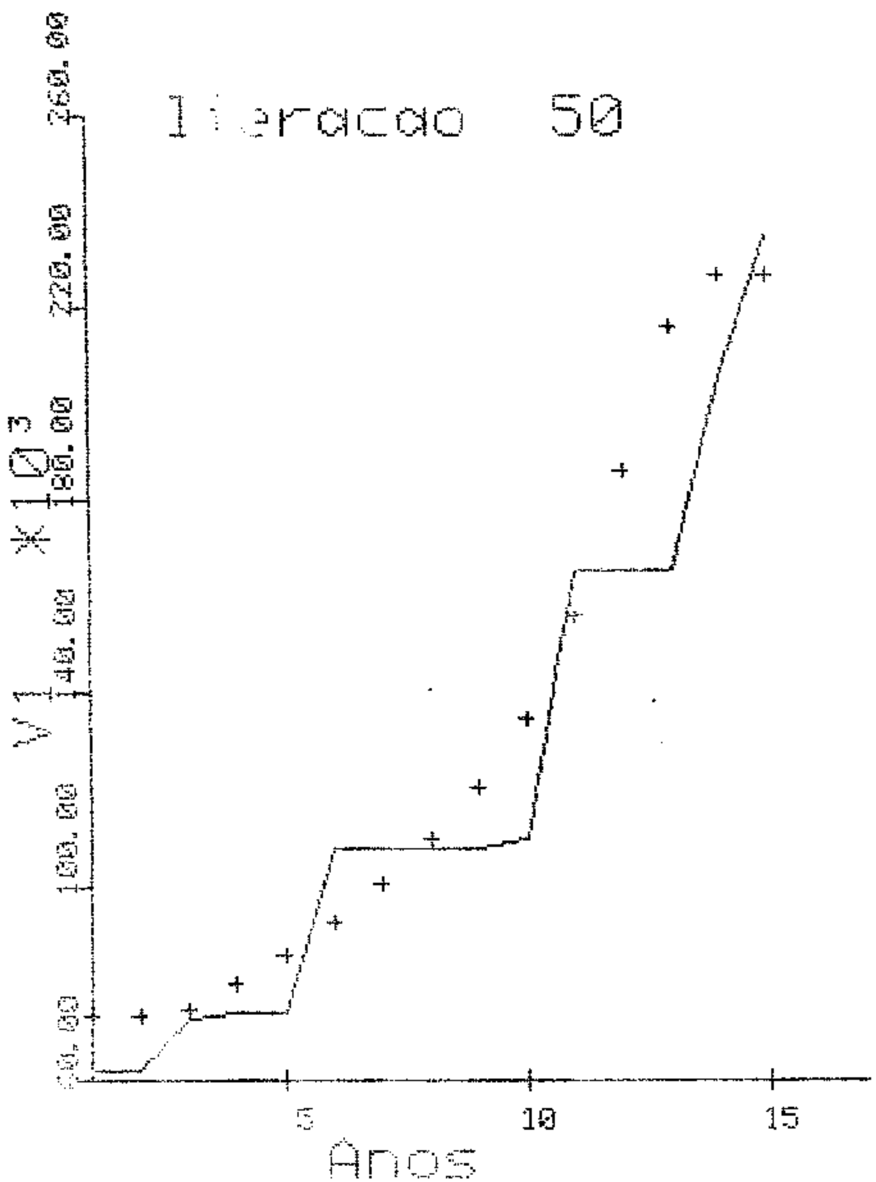
Iteracao 30
V1 * 10^3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
Anos
5
10

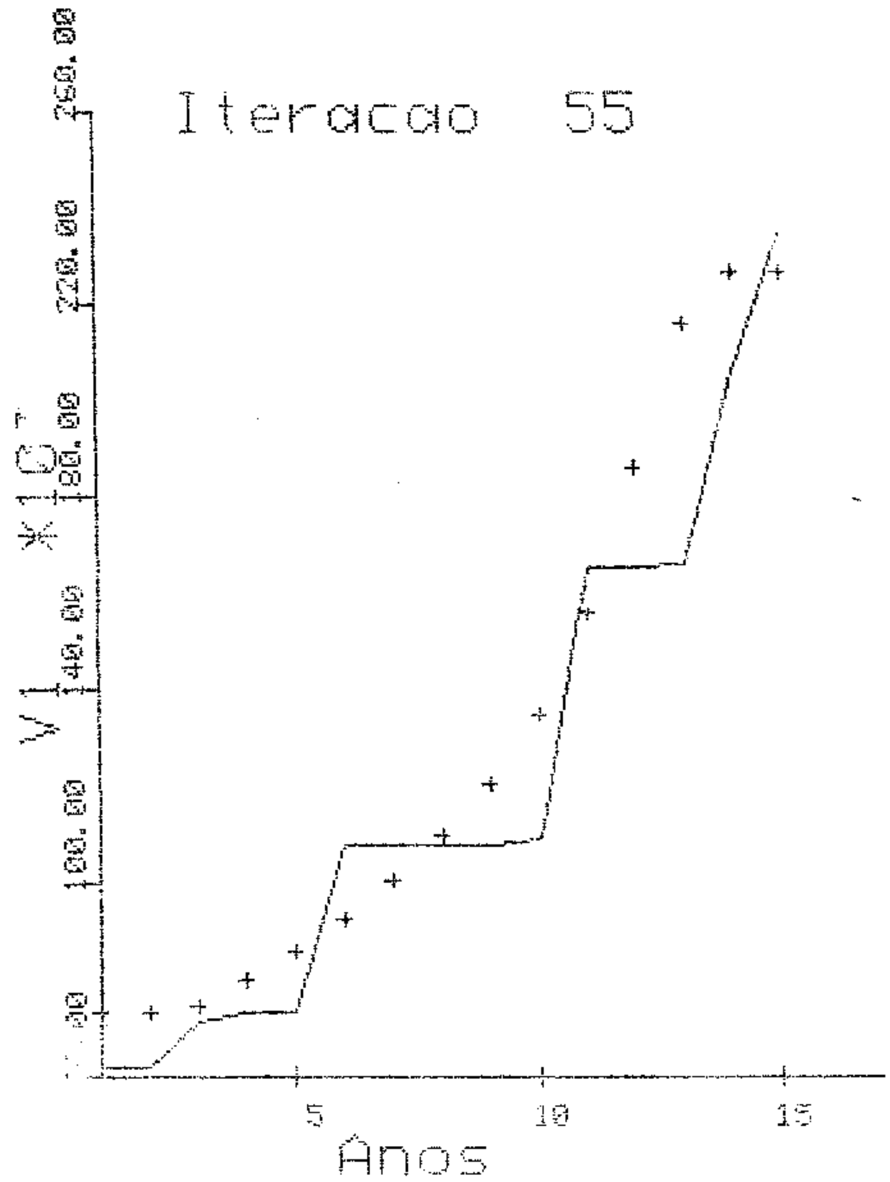


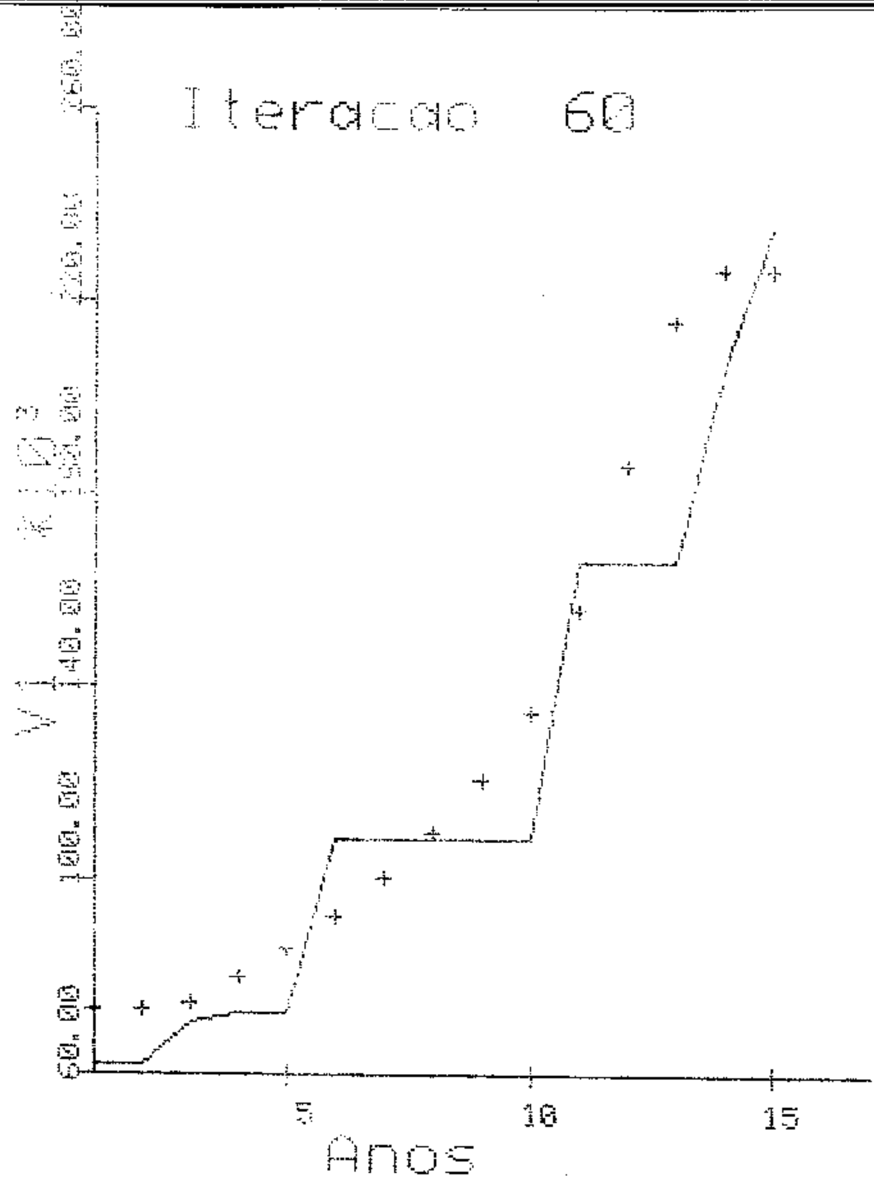
Iteracao 35
V1 * 10^3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
Anos
5
10
15


Iteracao 40
V * 10³
60.00
100.00
140.00
180.00
220.00
260.00
5
10
15
Anos

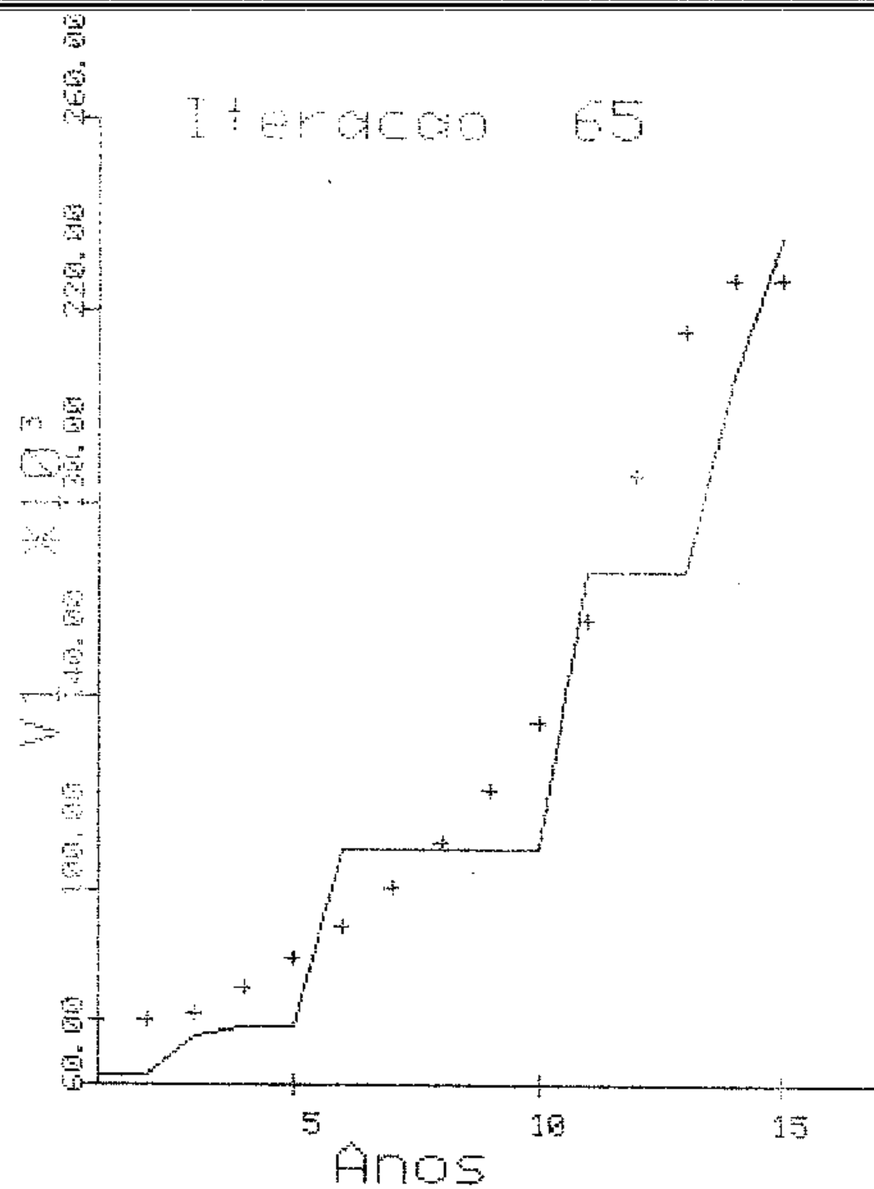

Iteracao 45
V * 10³
60.00
100.00
140.00
180.00
220.00
260.00
5
10
15
Anos


Iteracao 50
V1 *10 3
20.00
100.00
140.00
180.00
220.00
260.00
5
10
15
Anos

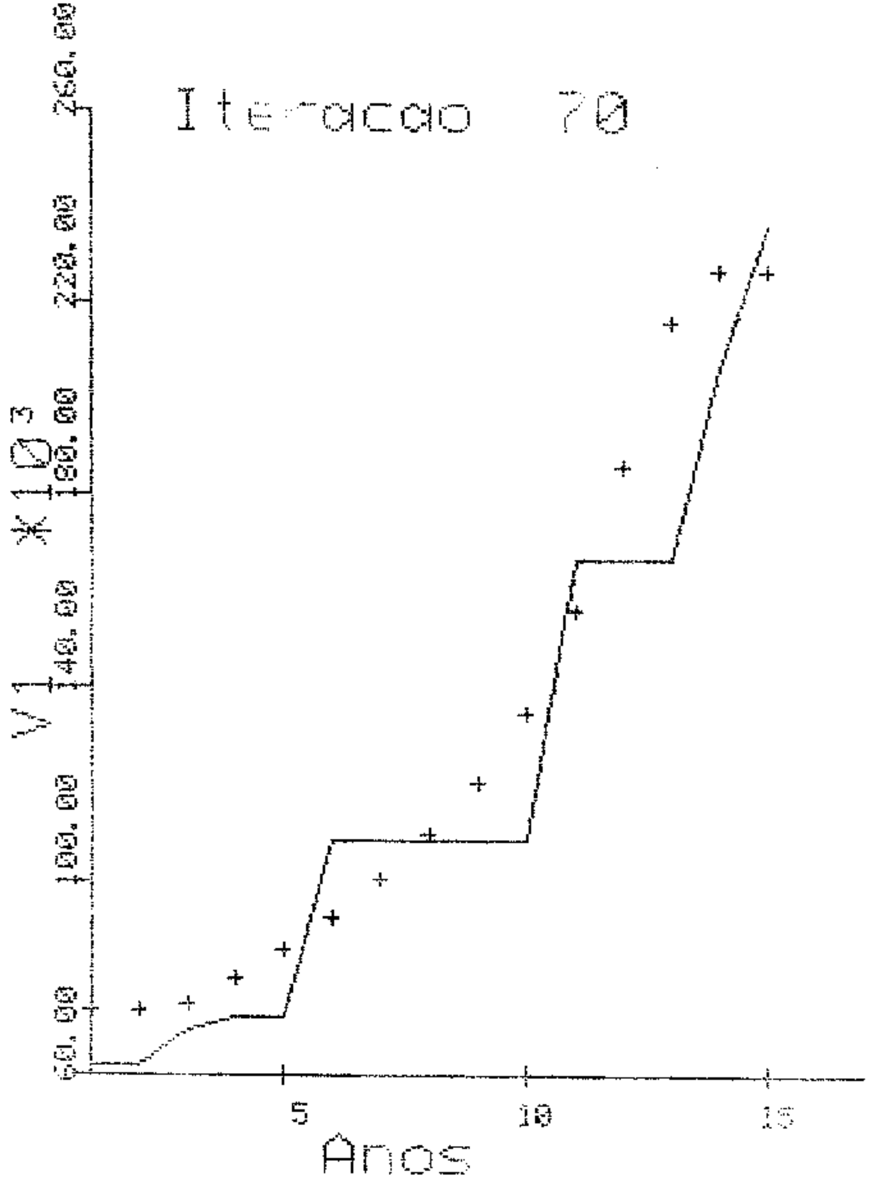

Iteracao 55
V1 *10
100.00
140.00
180.00
220.00
260.00
5
10
15
Anos



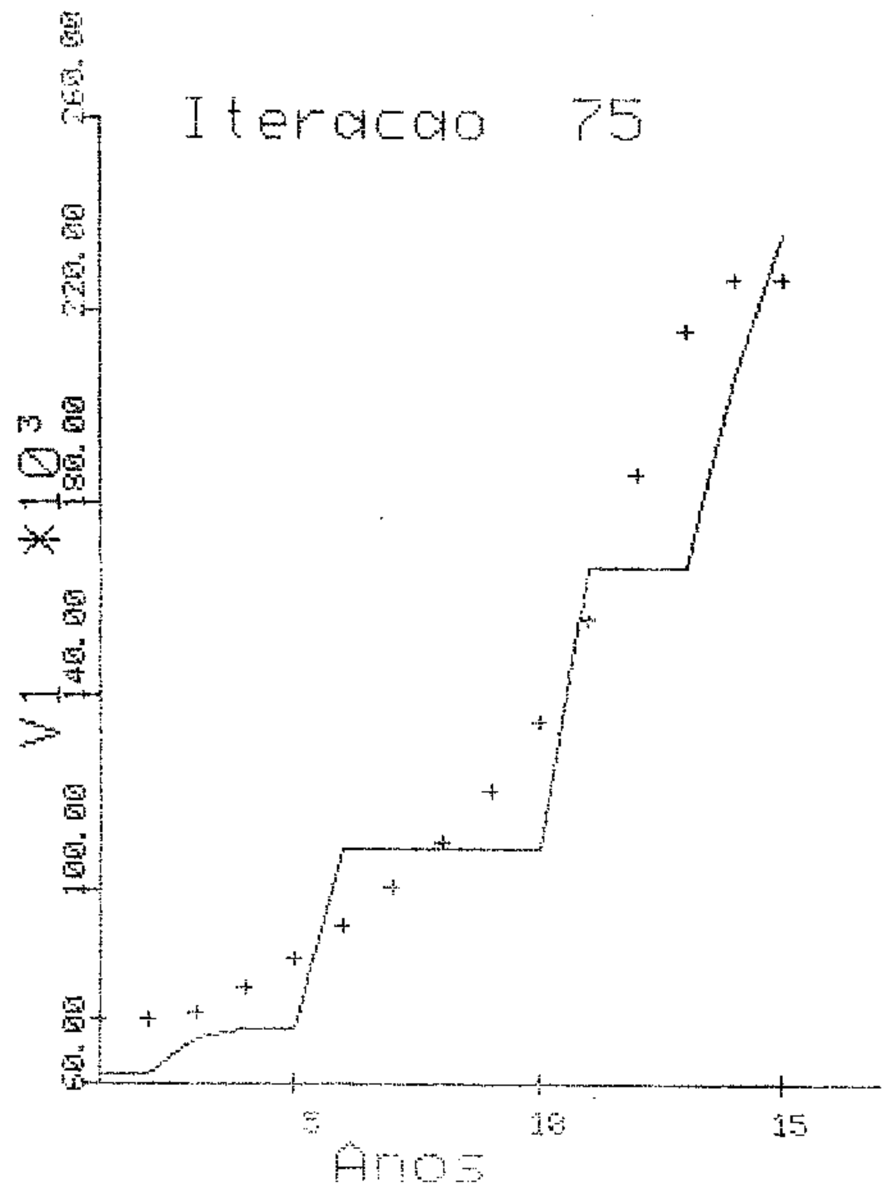
Iteracao 60
V1 * 10³
60.00
100.00
140.00
180.00
220.00
260.00
5
10
15
Anos



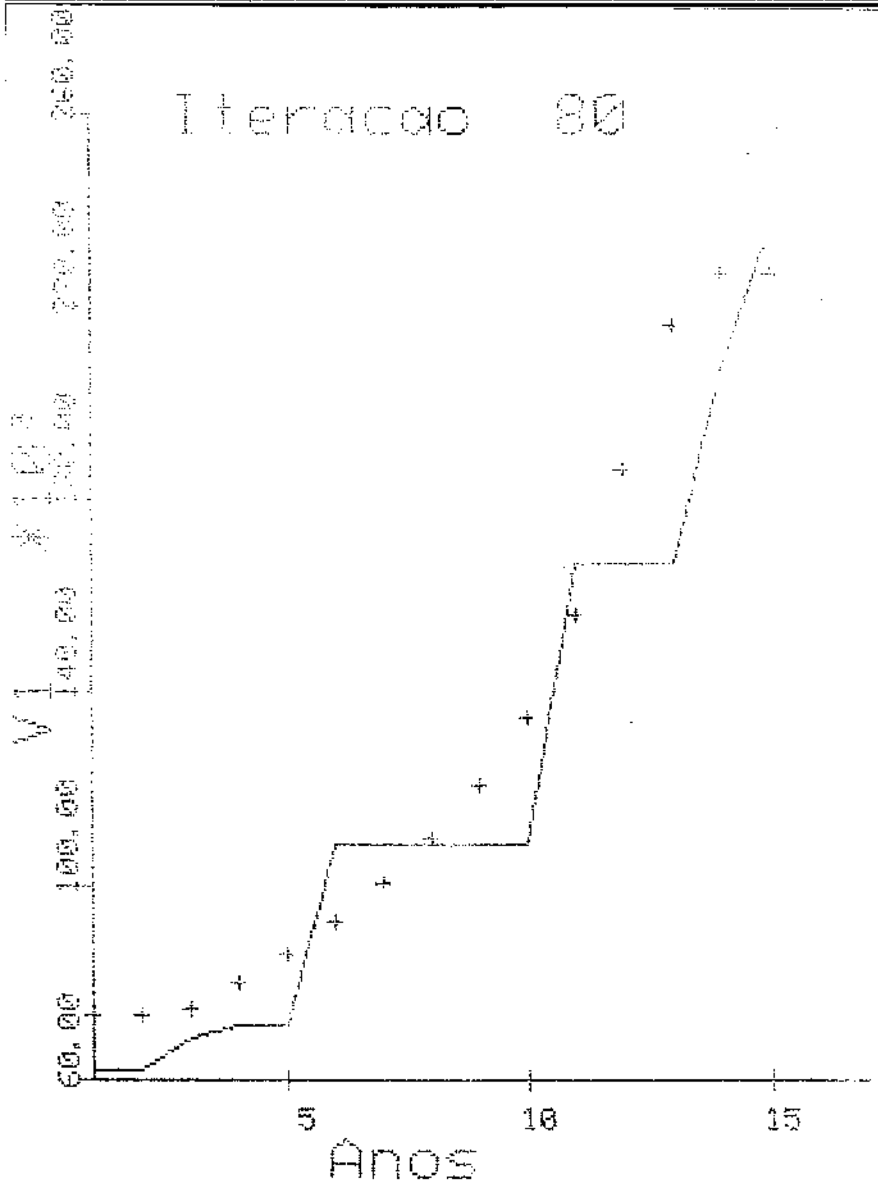
Iteracao 65
V1 * 10³
60.00
100.00
140.00
180.00
220.00
260.00
5
10
15
Anos

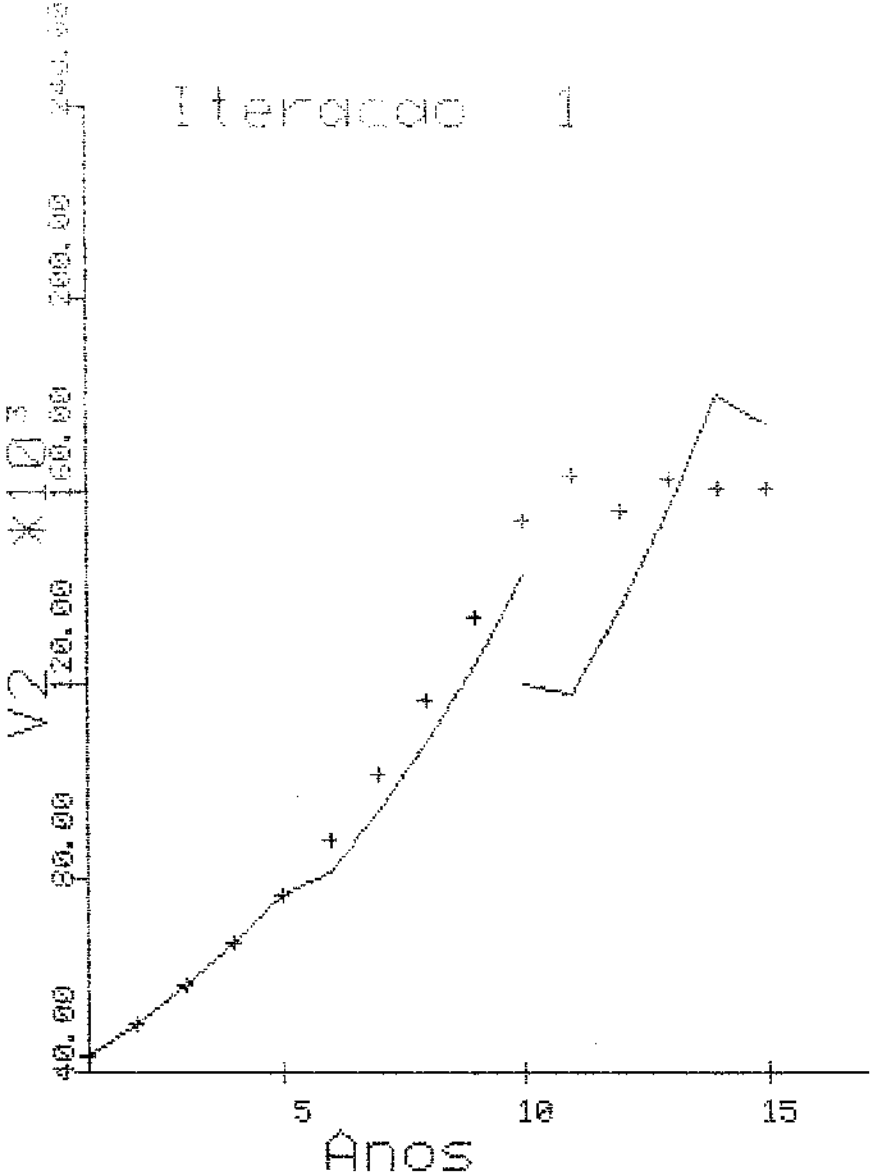


Iteracao 70
V1 *10 3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
5
10
15
Anos

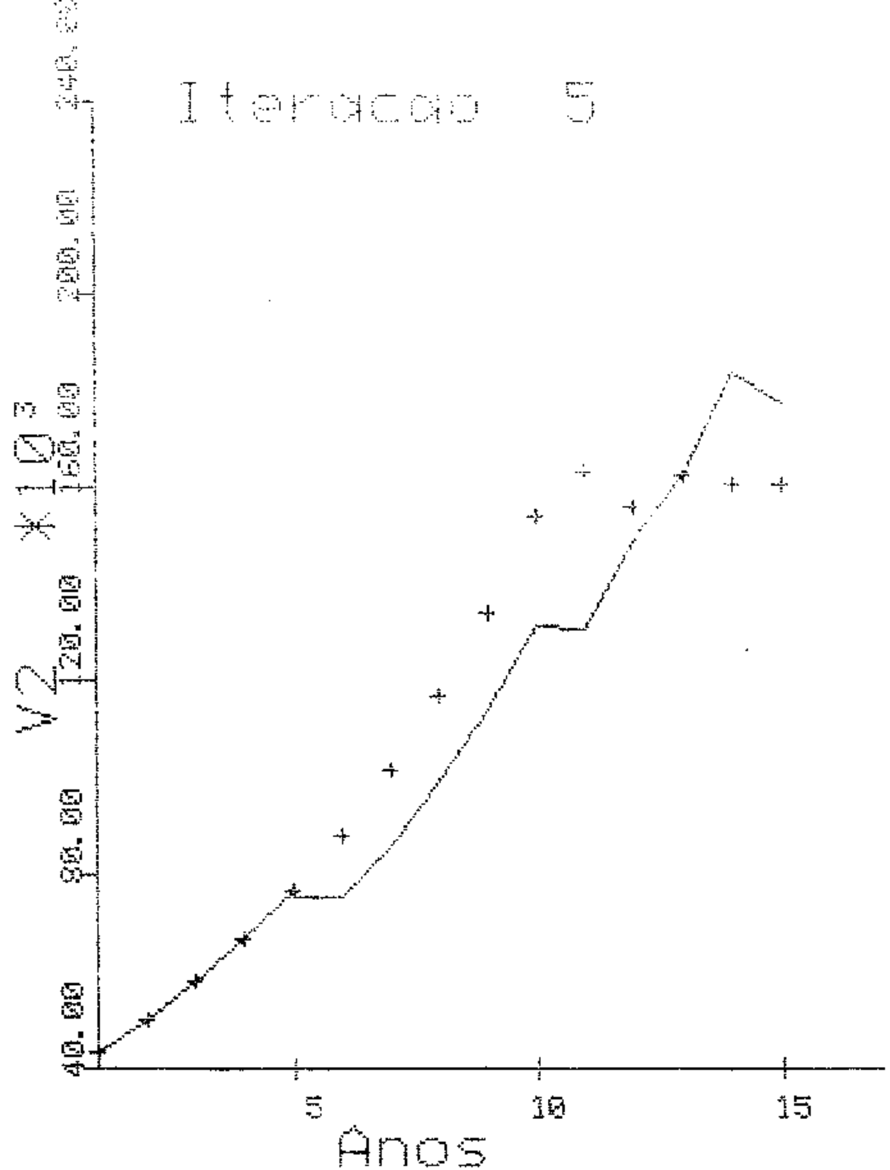


Iteracao 75
V1 *10 3
260.00
220.00
180.00
140.00
100.00
60.00
5
10
15
Anos

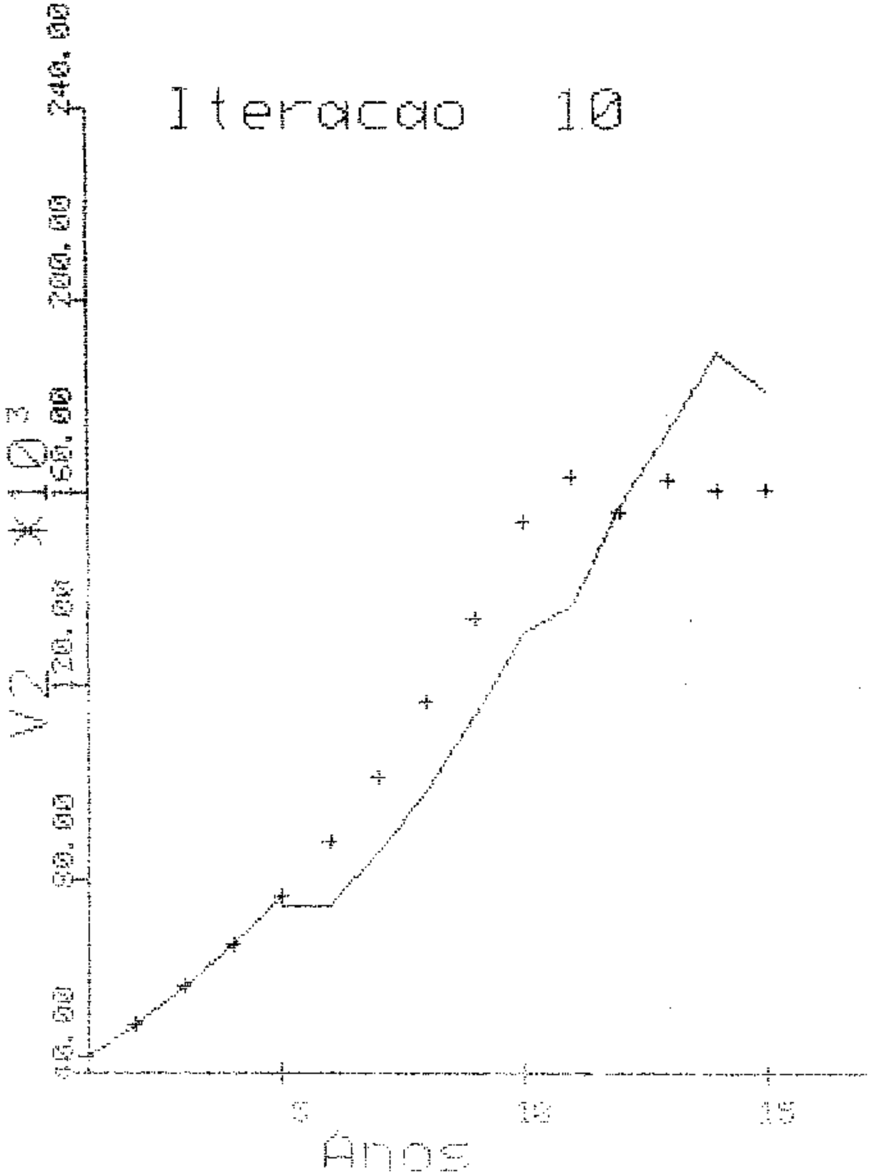

Iteracao 80
V1
60.00
100.00
140.00
260.00
5
10
15
Anos



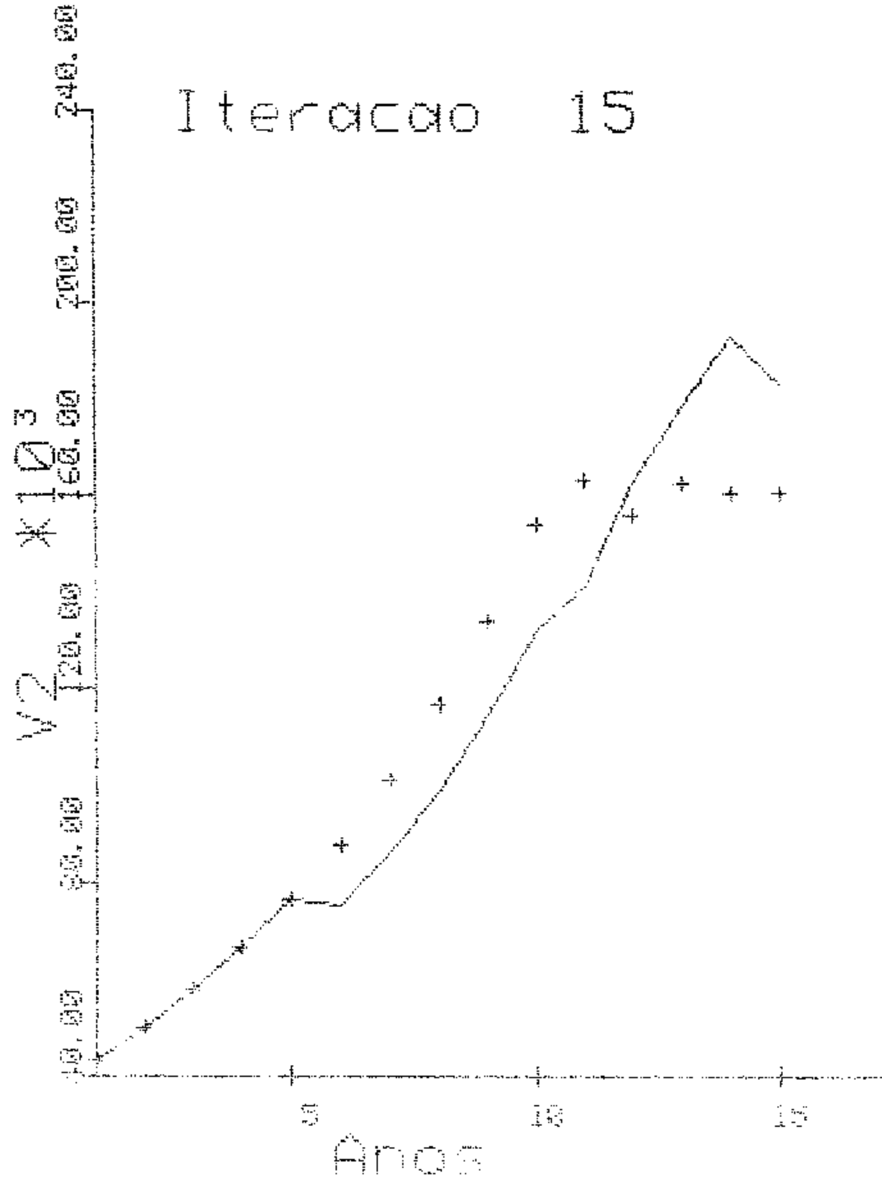
Iteracao 1
V2 *10^3
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos



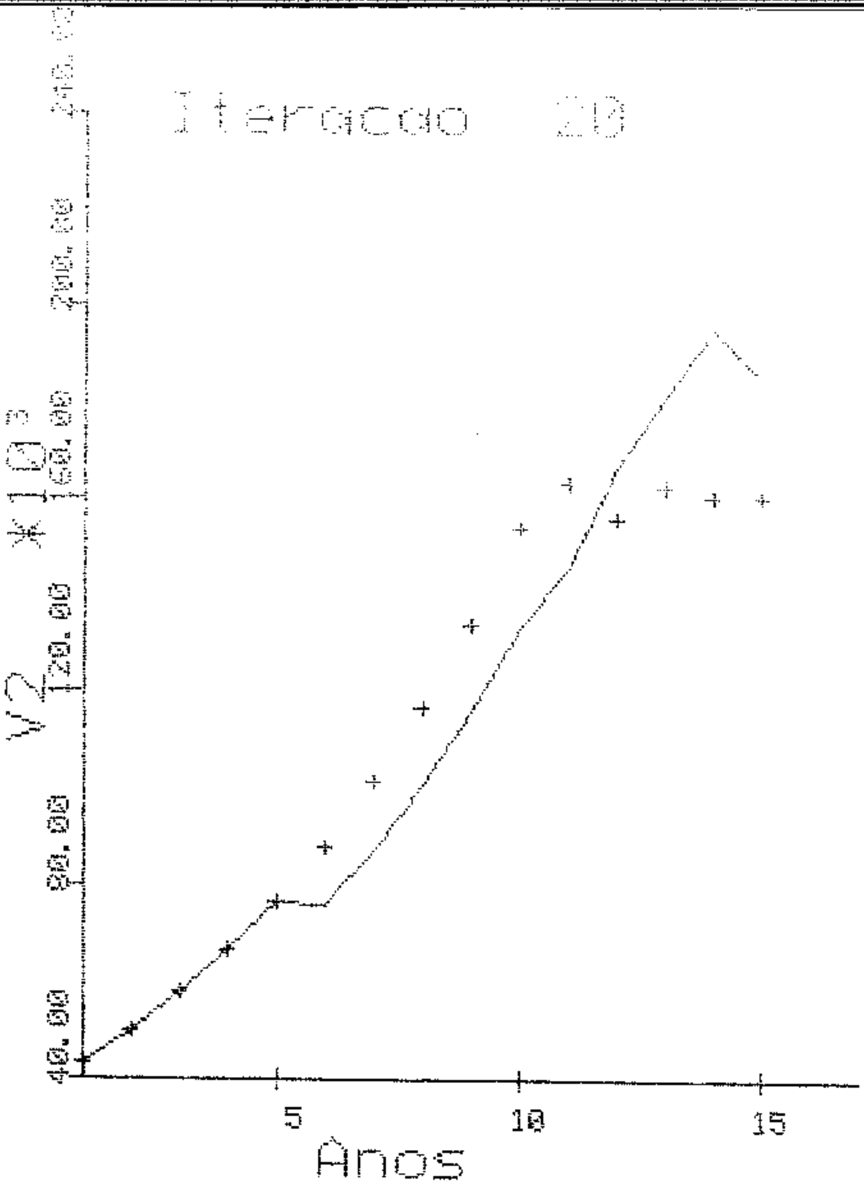
Iteracao 5
V2 *10^3
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

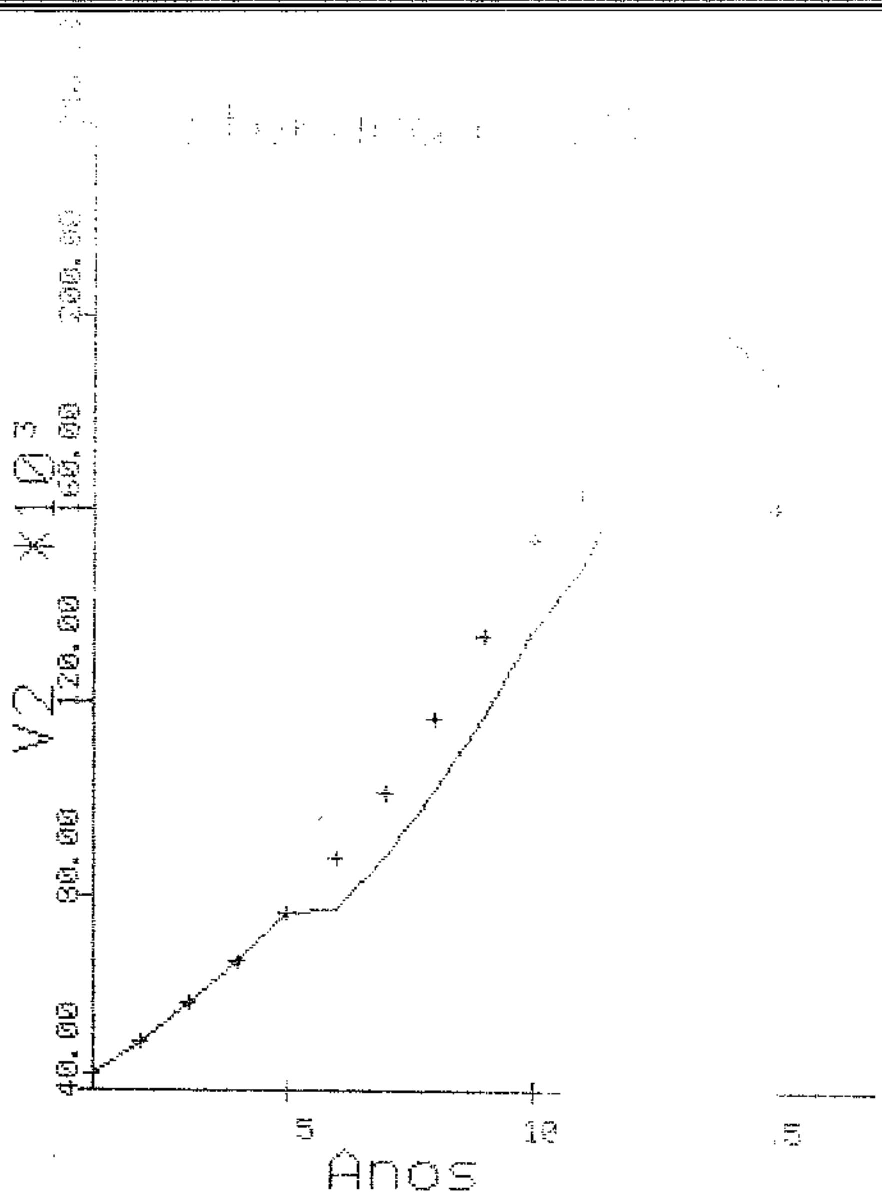


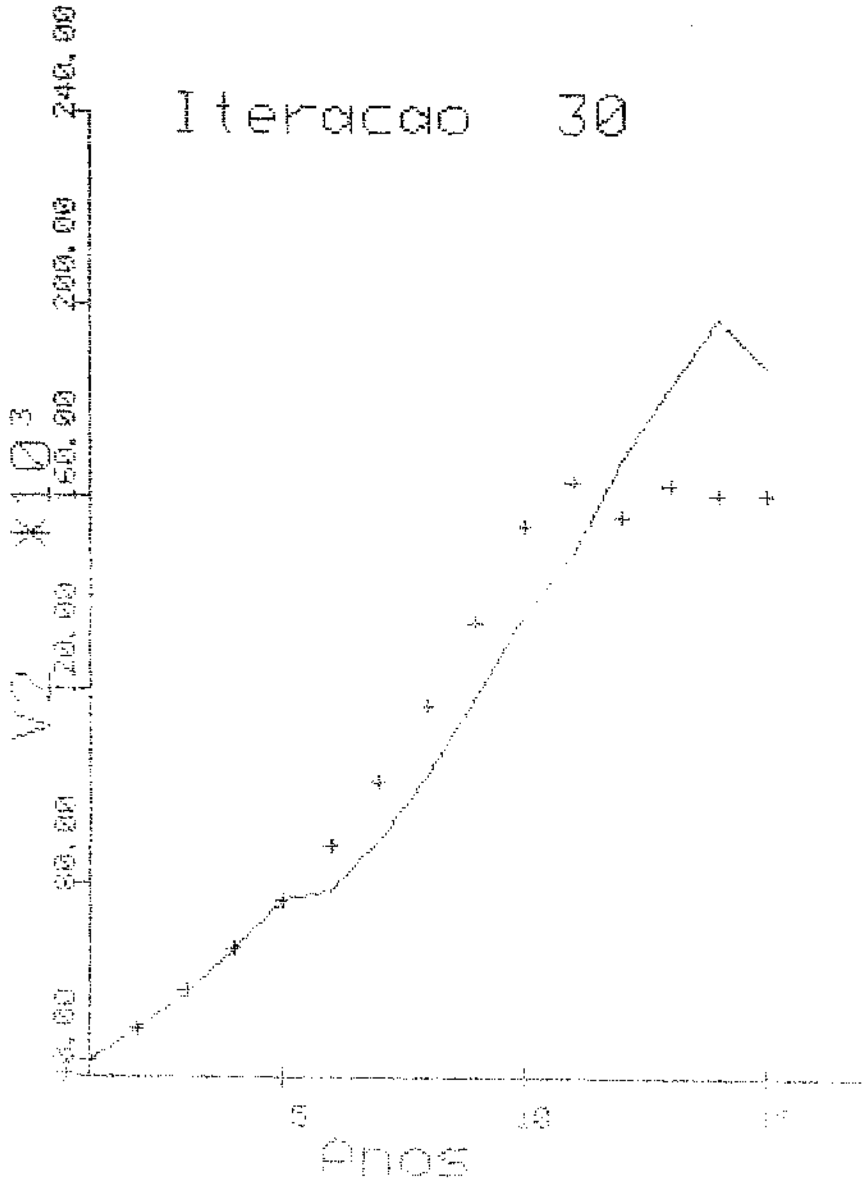
Iteracao 10
V2 *10^3
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
5
10
15
Anos



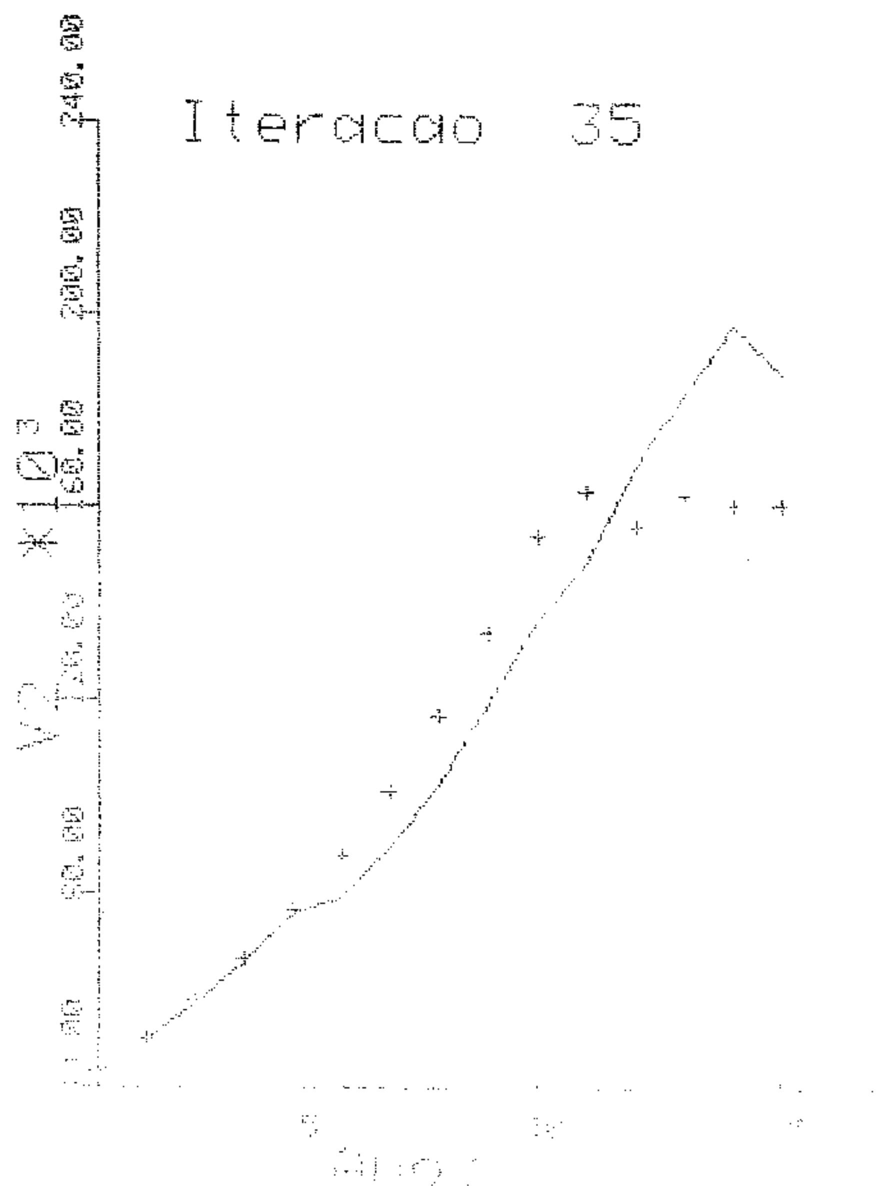
Iteracao 15
V2 *10^3
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
5
10
15
Anos


Iteracao 20
V2 *10³
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

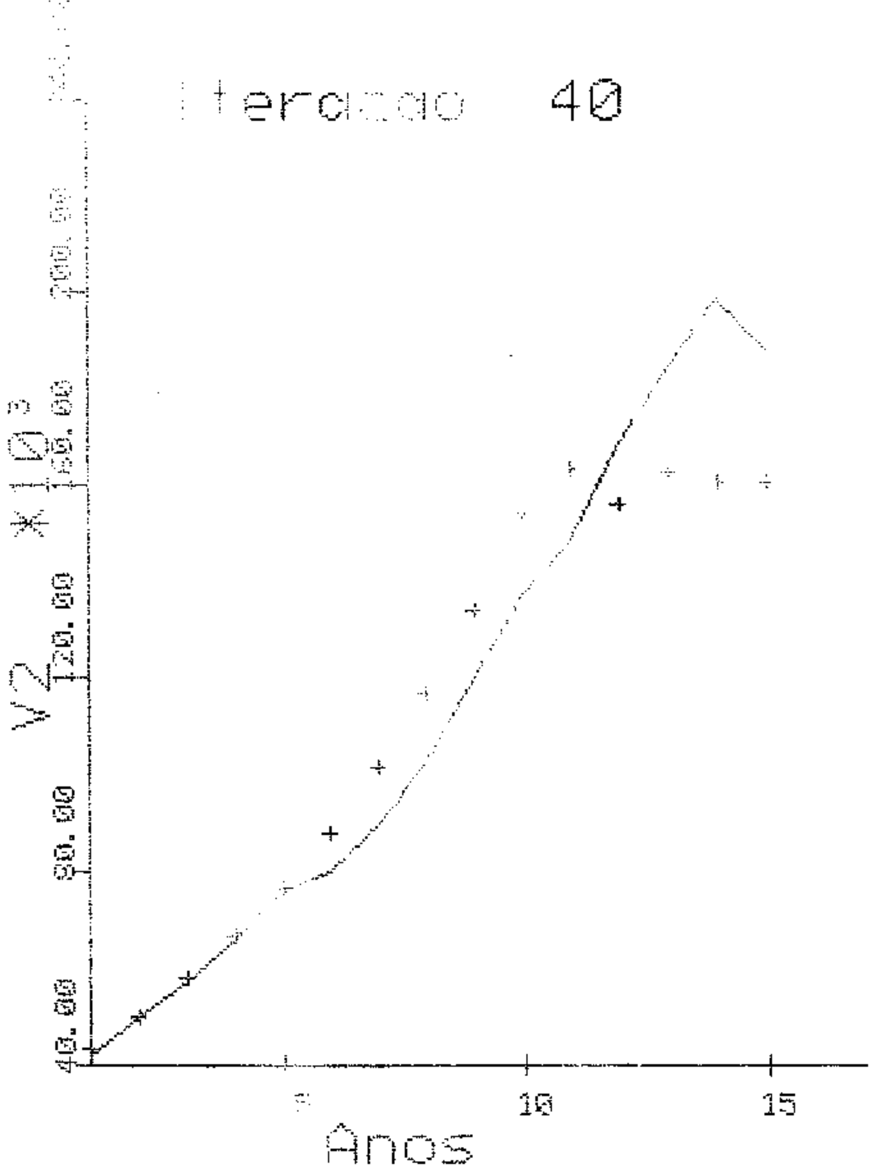

V2 *10³
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
5
10
Anos



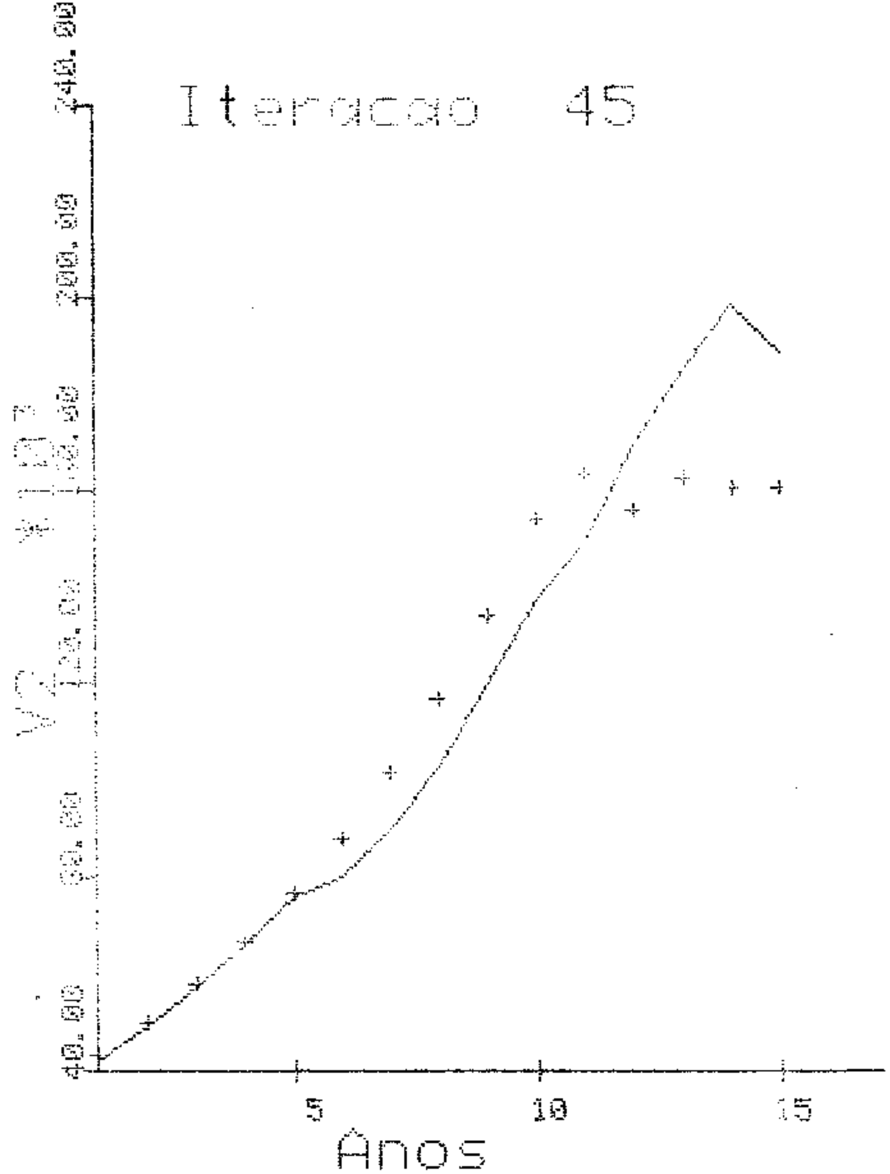
Iteracao 30
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
V2 * 10 3
5
10
15
Anos



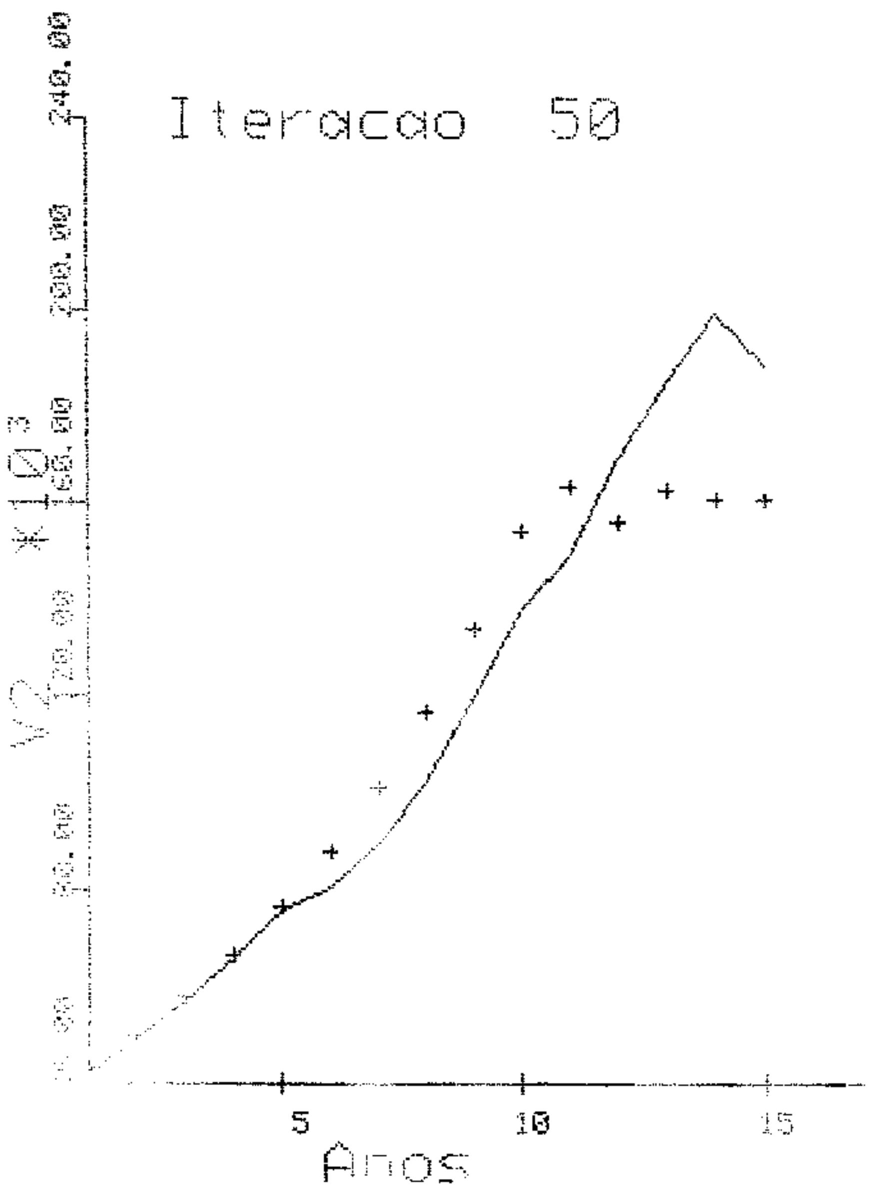
Iteracao 35
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
V2 * 10 3

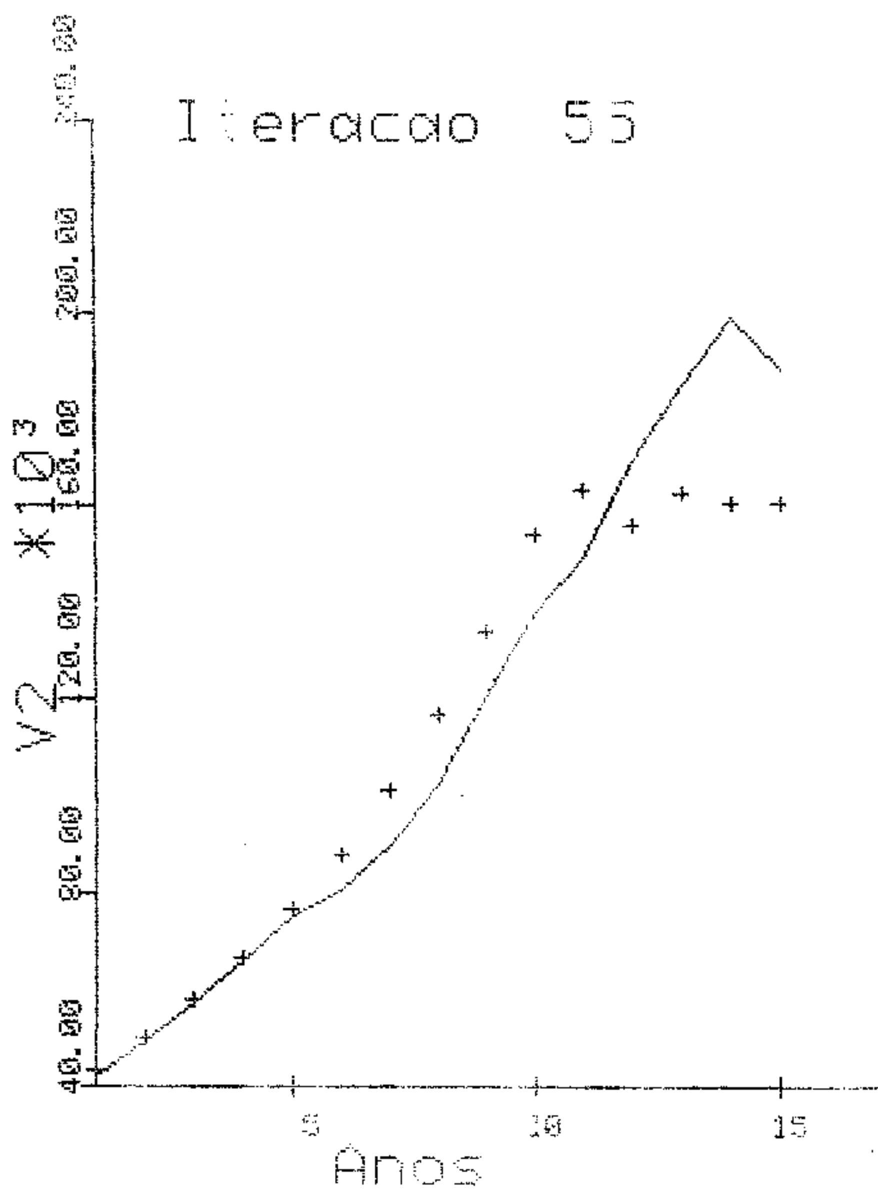


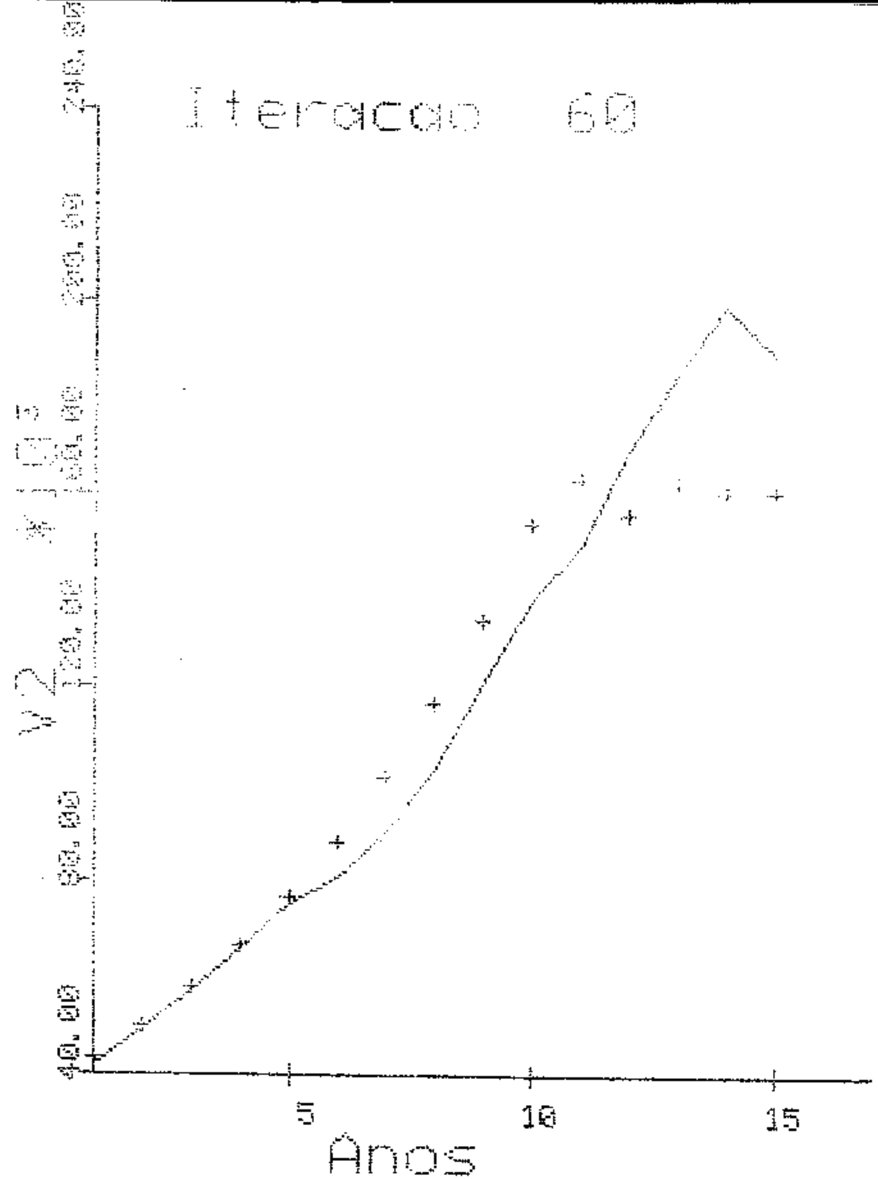
Iteracao 40
V2 * 10^3
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
10
15
Anos

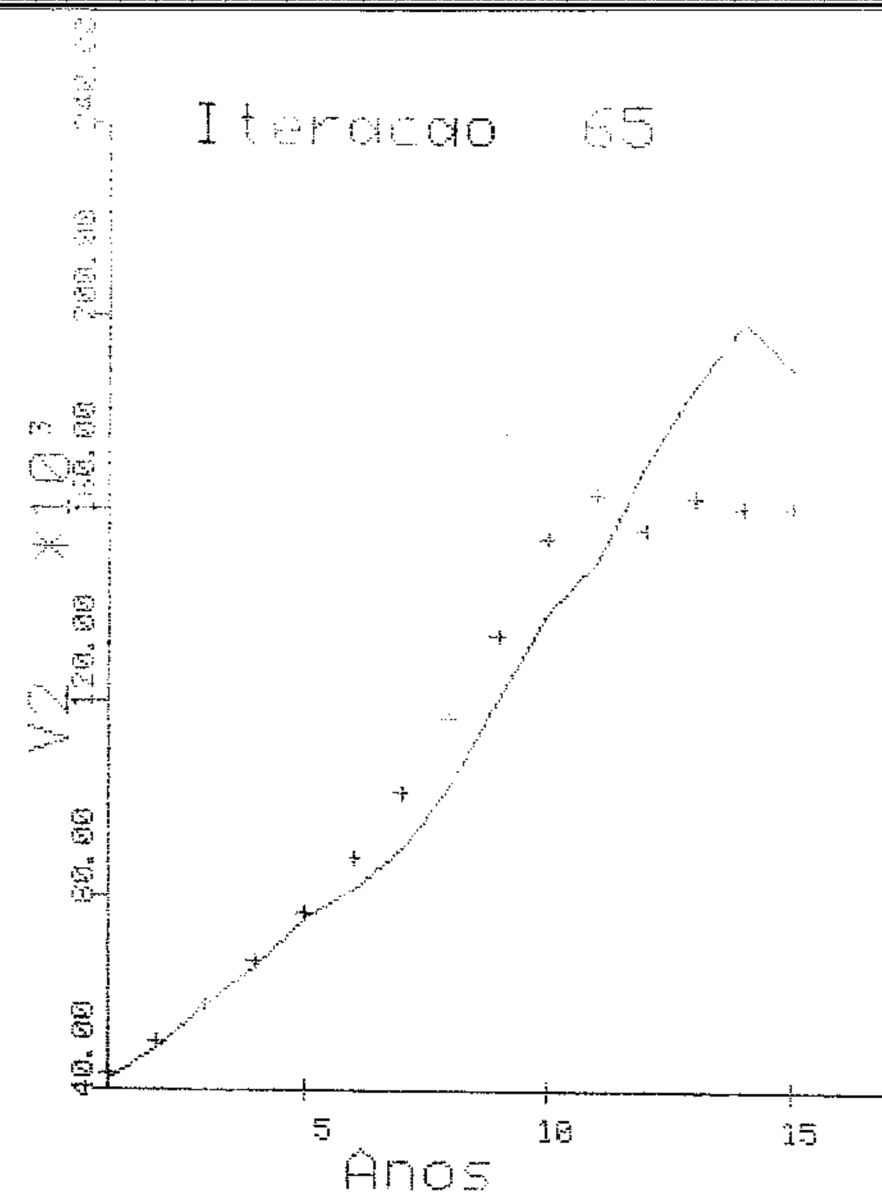


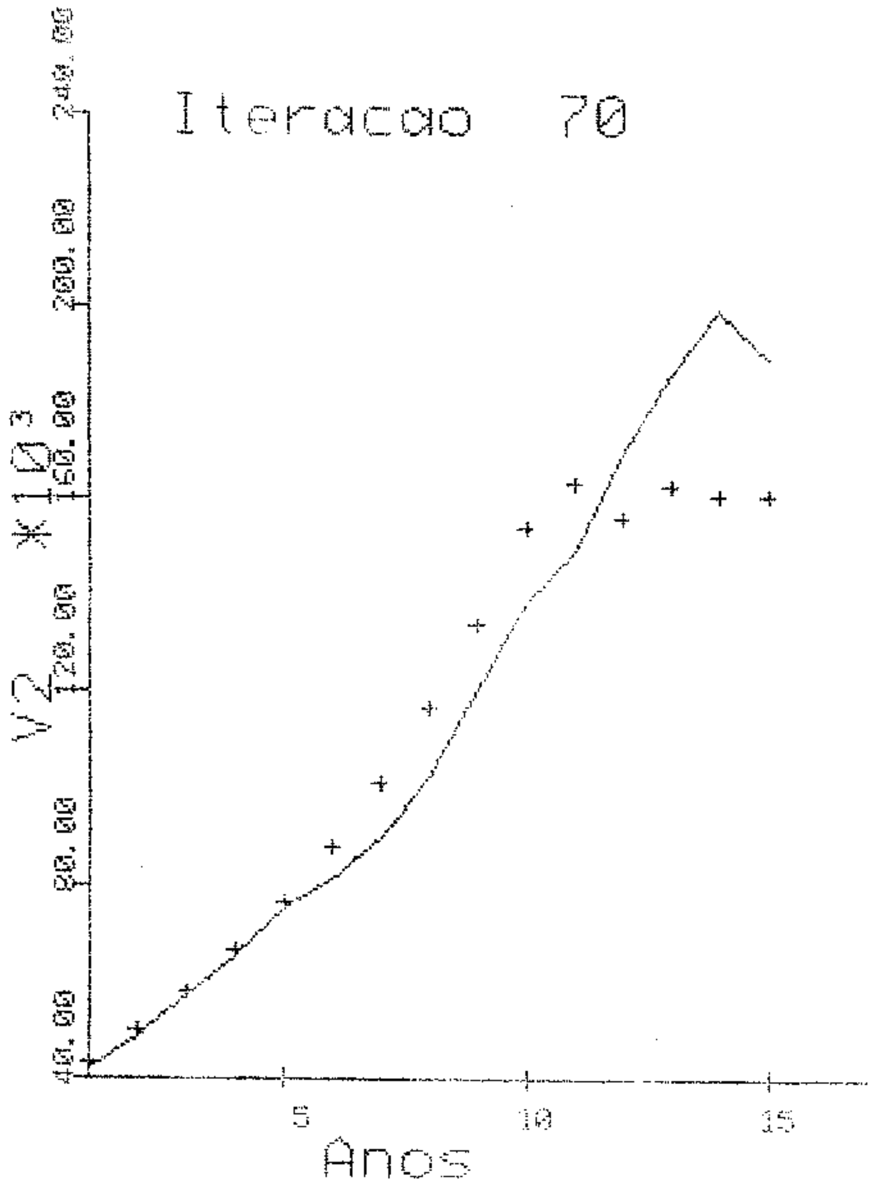
Iteracao 45
V2 * 10^3
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

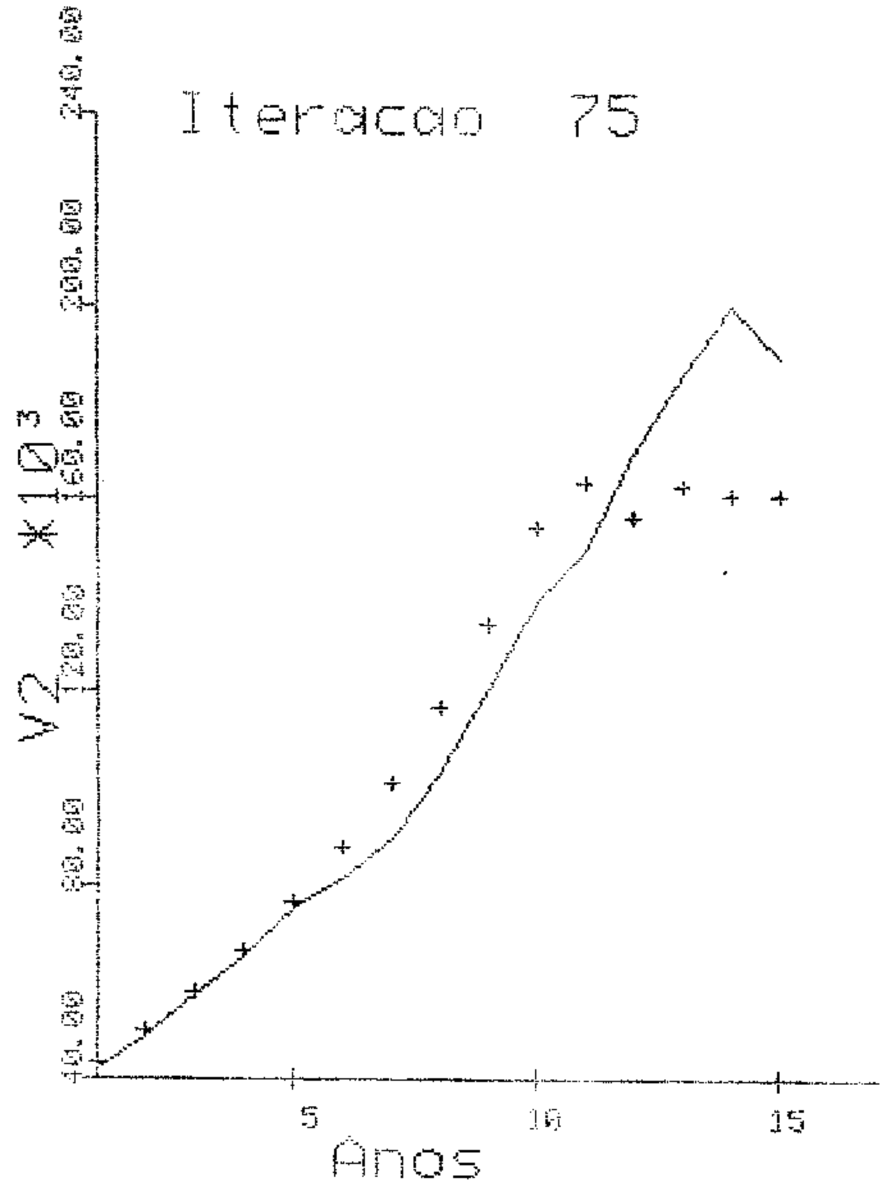

Iteracao 50
V2 *10 3
240.00
200.00
160.00
120.00
80.00
5
10
15
Anos

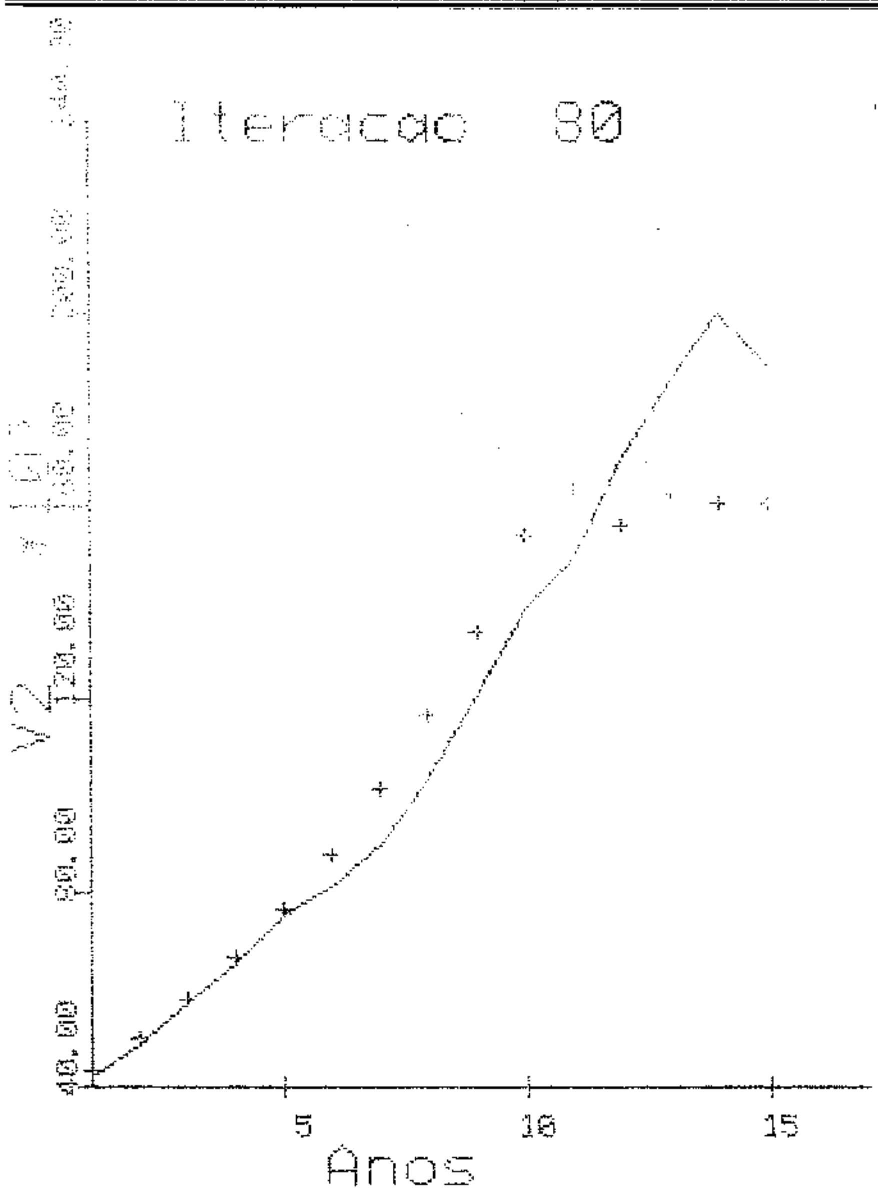

Iteracao 55
V2 *10 3
200.00
160.00
120.00
80.00
40.00
5
10
15
Anos


Iteracao 60
V2 * 10³
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos


Iteracao 65
V2 * 10³
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
5
10
15
Anos


Iteracao 70
V2 * 10^3
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

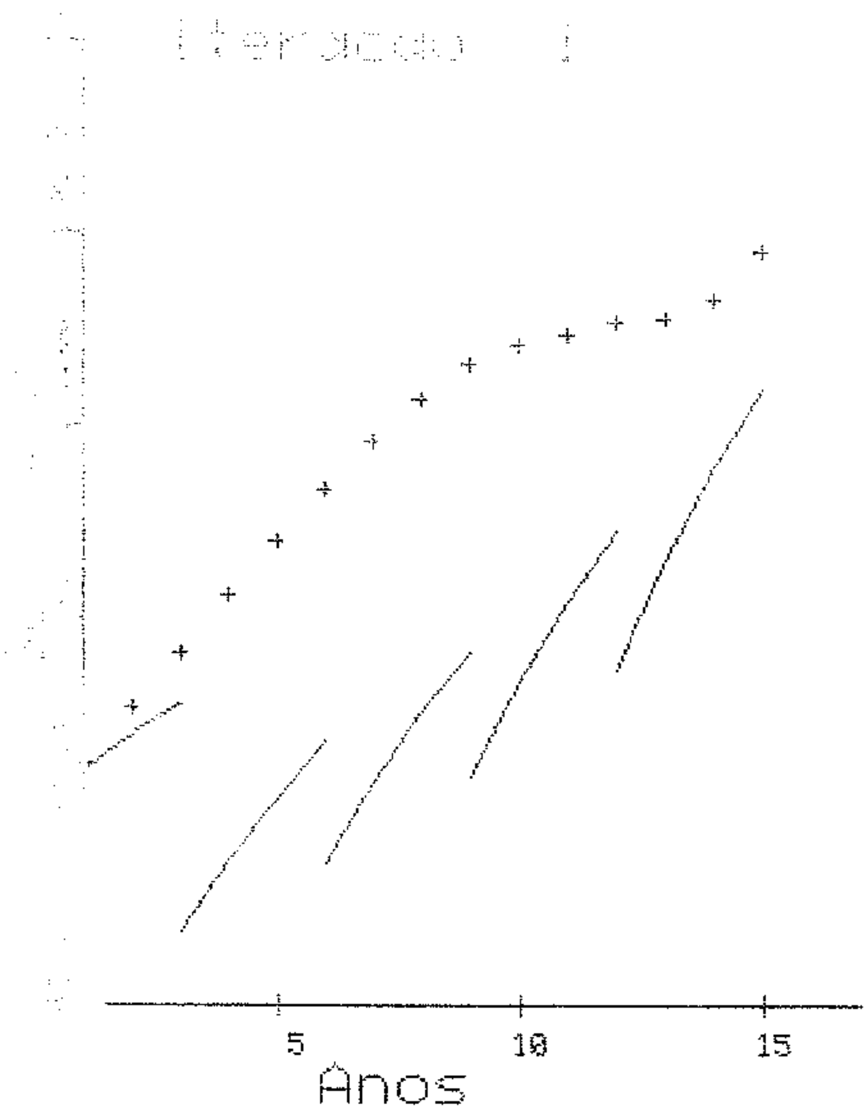

Iteracao 75
V2 * 10^3
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
5
10
15
Anos

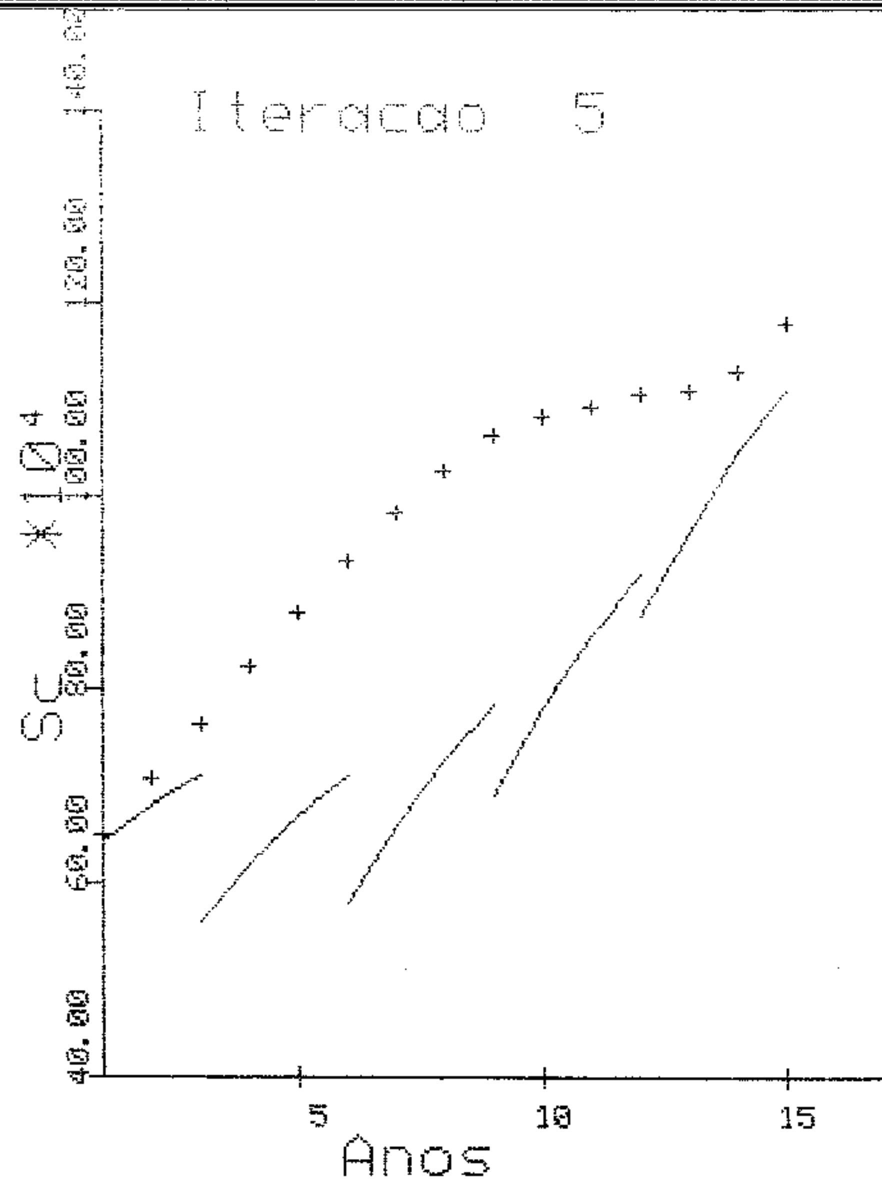

Iteracao 80
V2
x 10
5
10
15
Anos

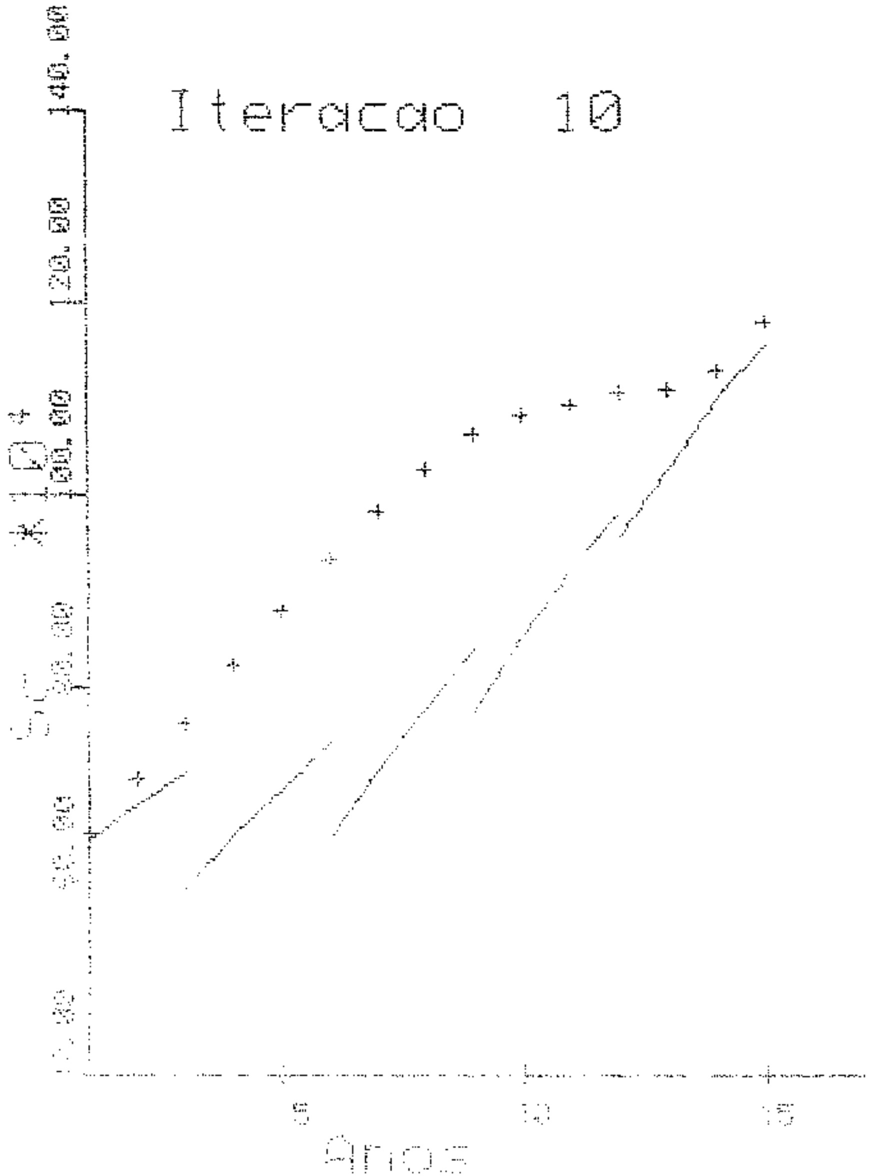
Apêndice II

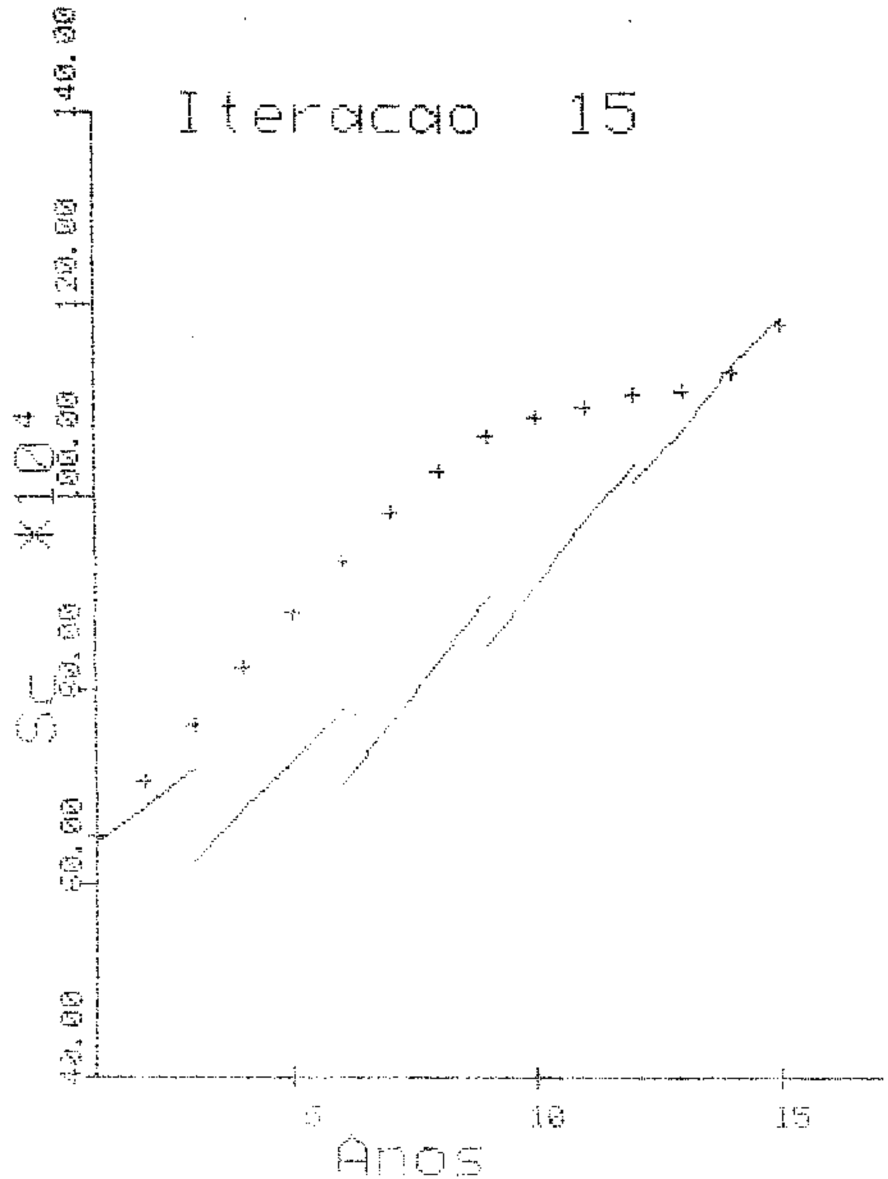
Horizonte de Quinze Anos

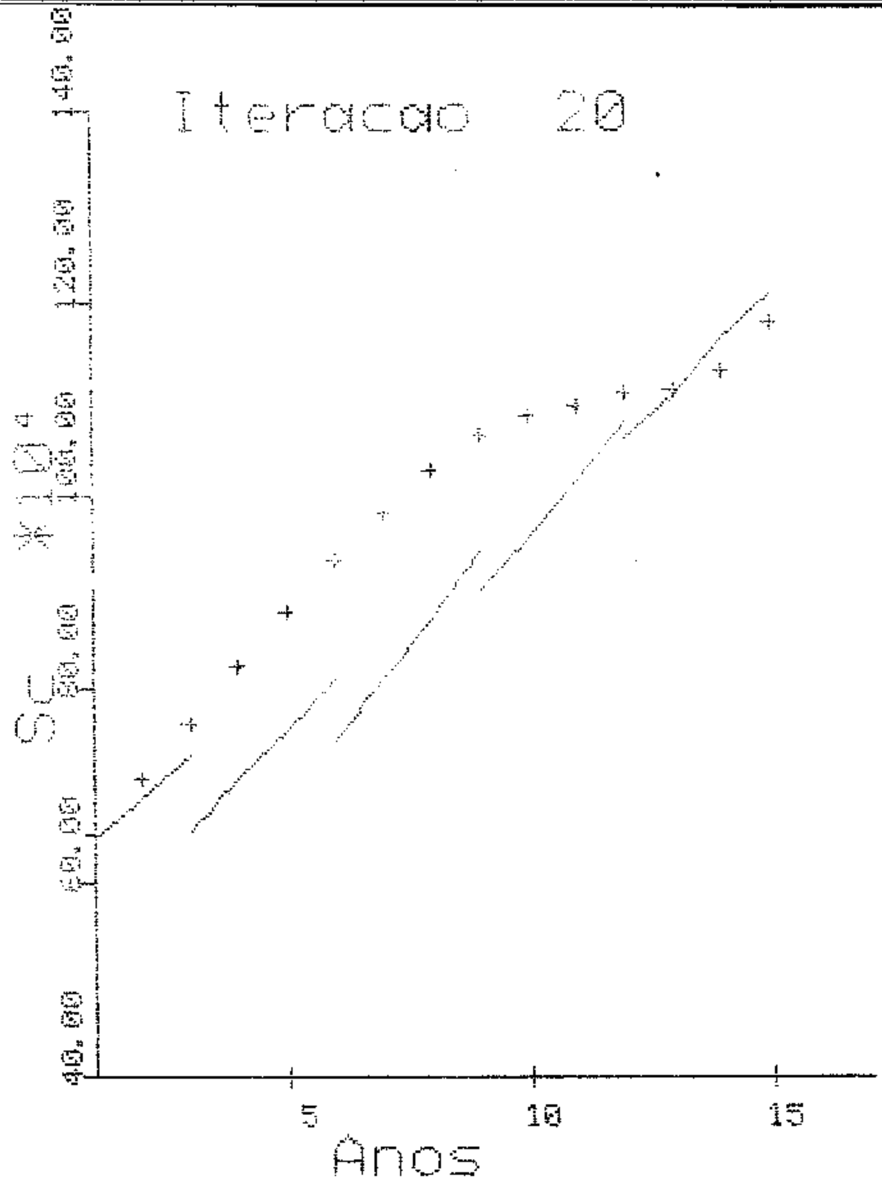
Número de Períodos Igual a Cinco

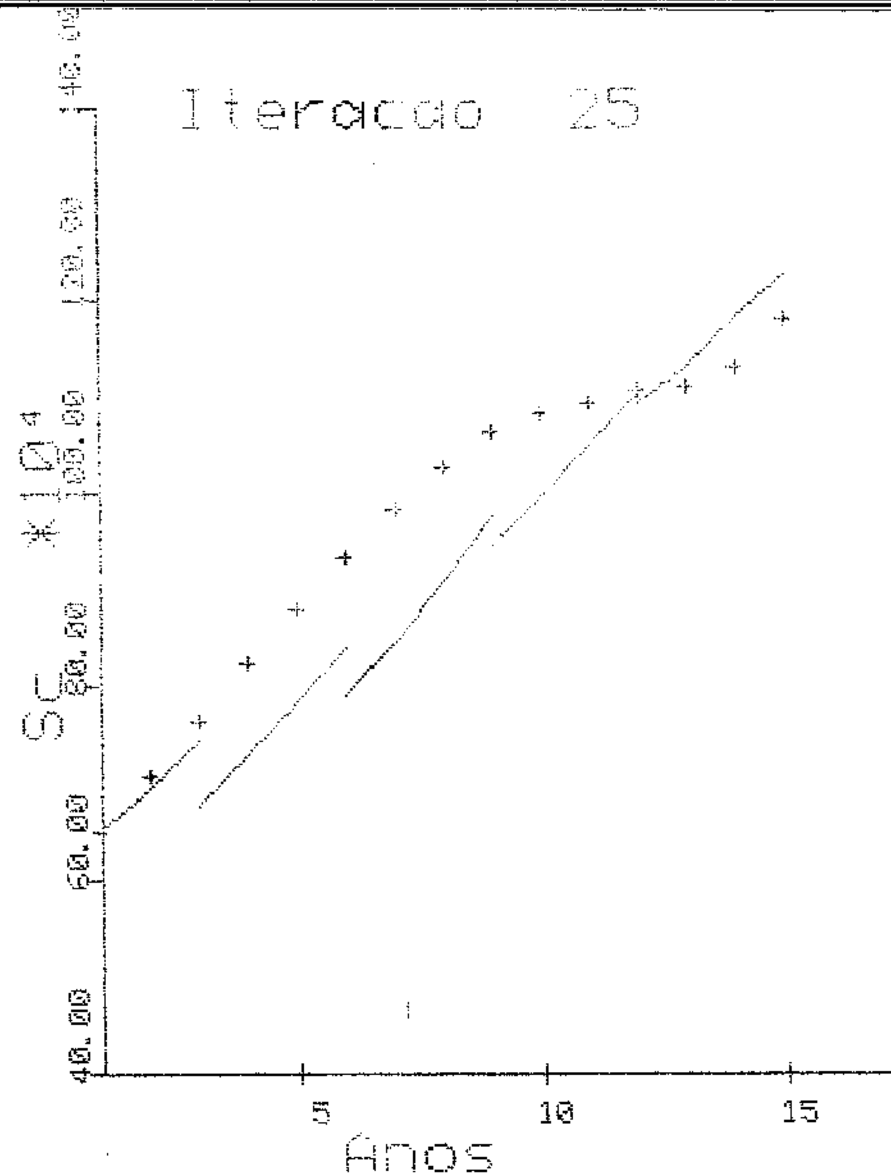

Iteracao 1
5
10
15
Anos

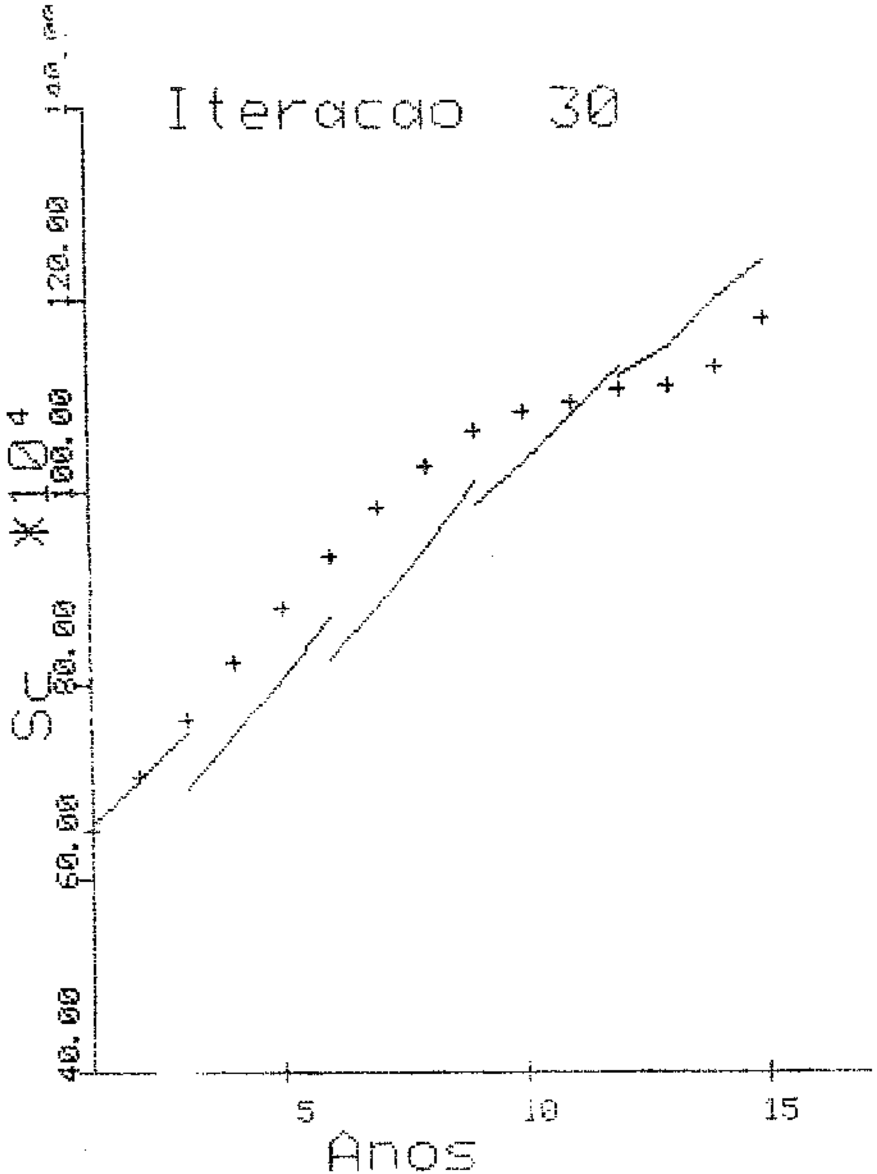

Iteracao 5
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
SC *10^4
5
10
15
Anos


Iteracao 10
SC *10 4
140.00
120.00
100.00
5
10
15
Anos

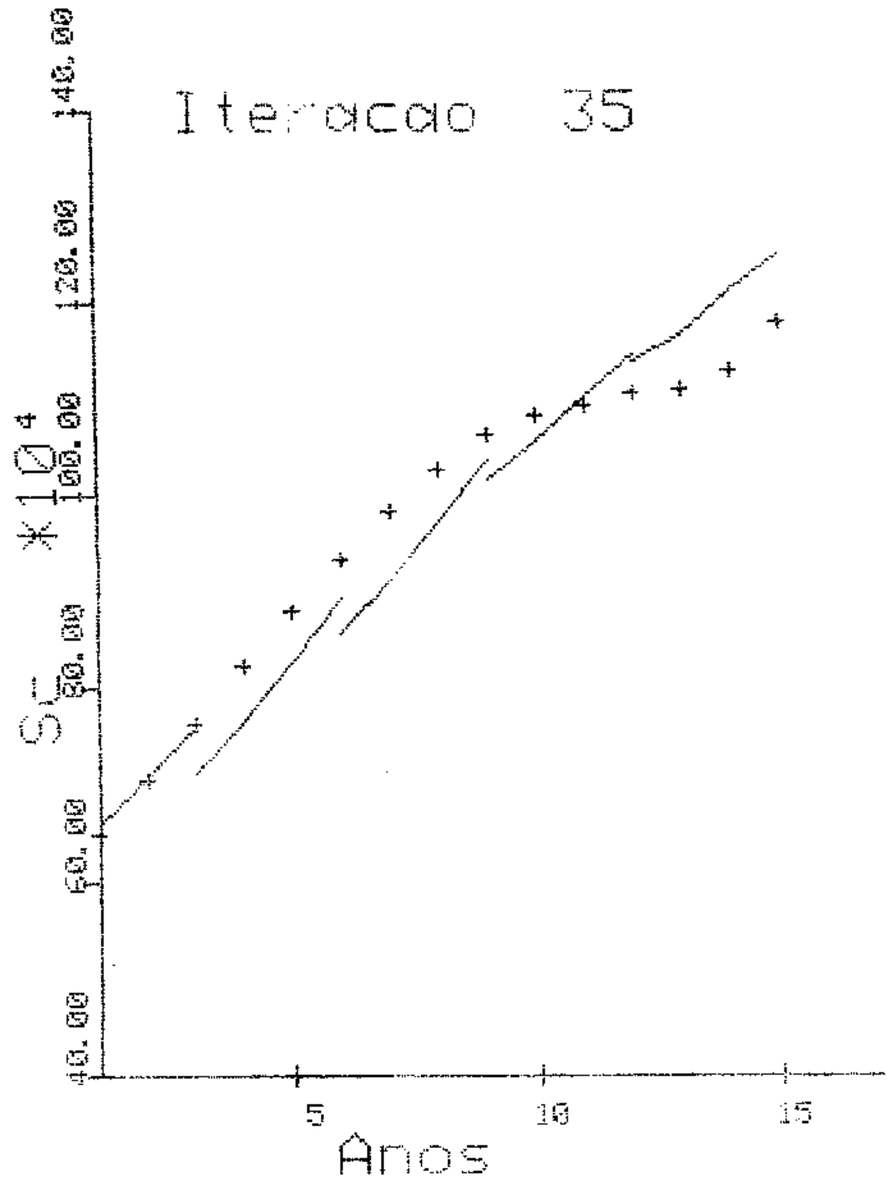

Iteracao 15
SC *10 4
140.00
120.00
100.00
60.00
40.00
5
10
15
Anos


Iteracao 20
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
SC *10 4
5
10
15
Anos

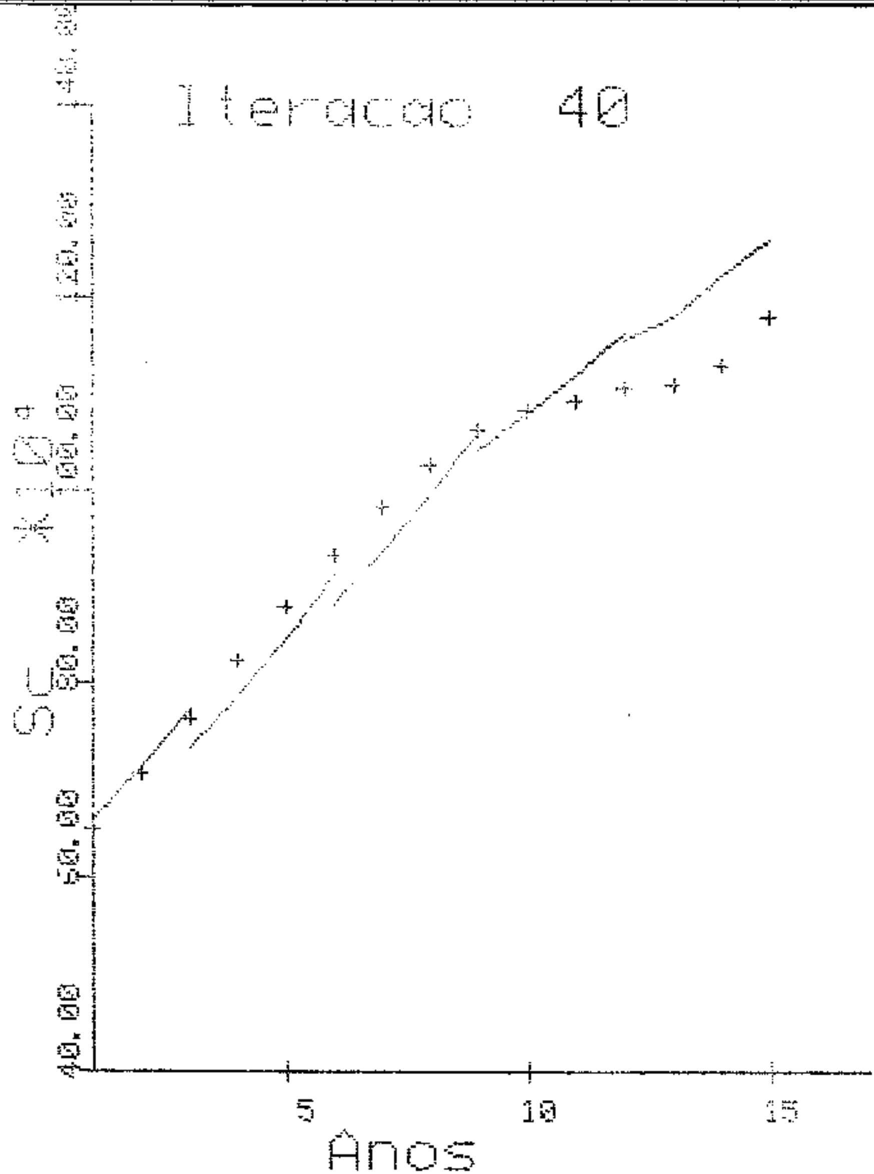

Iteracao 25
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
SC *10 4
5
10
15
Anos



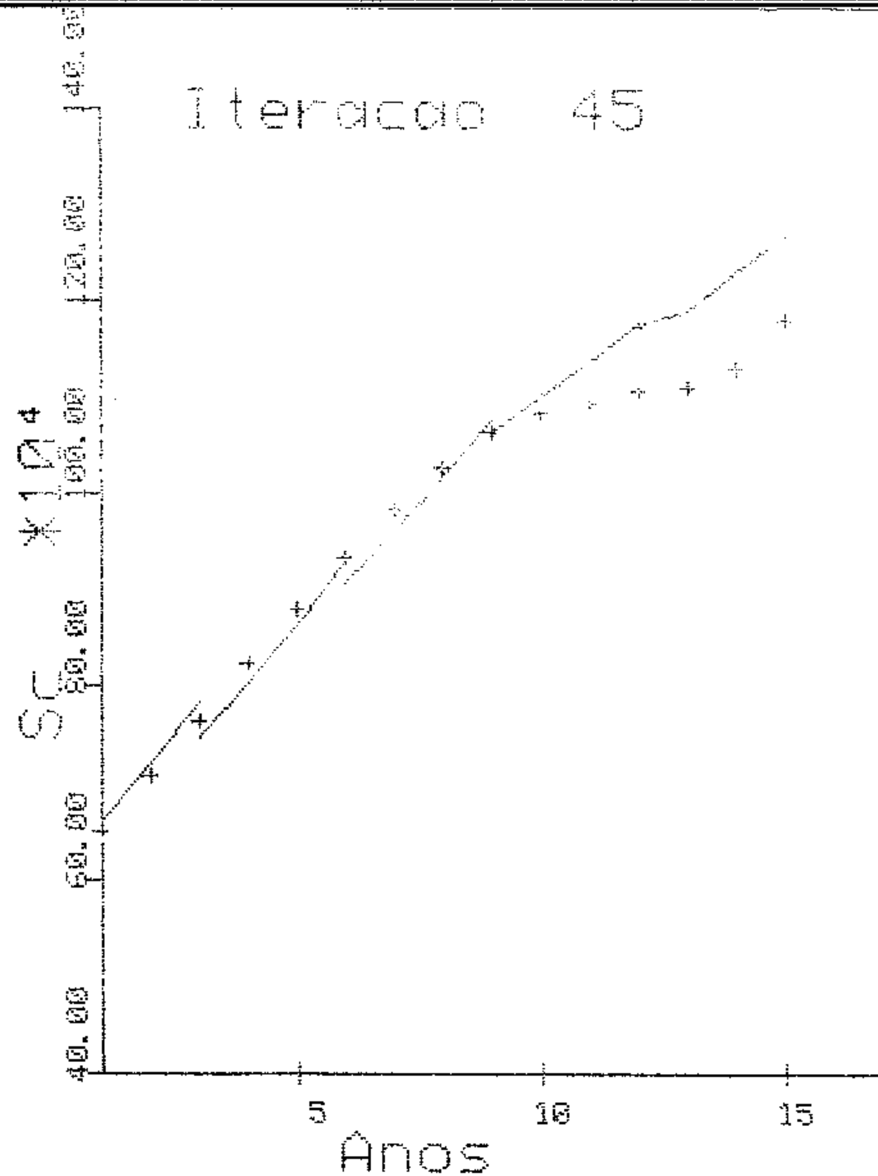
Iteracao 30
SC *10 4
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
5
10
15
Anos



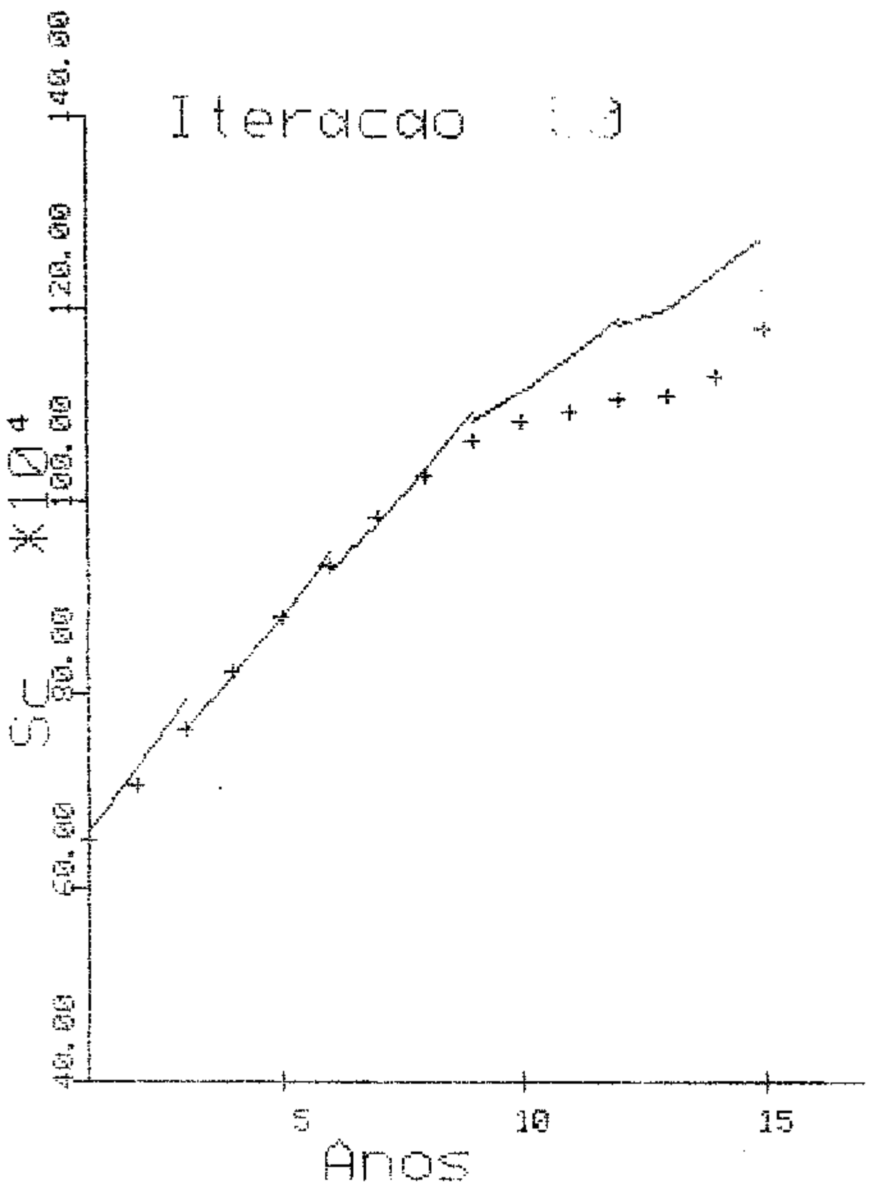
Iteracao 35
SC *10 4
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
5
10
15
Anos

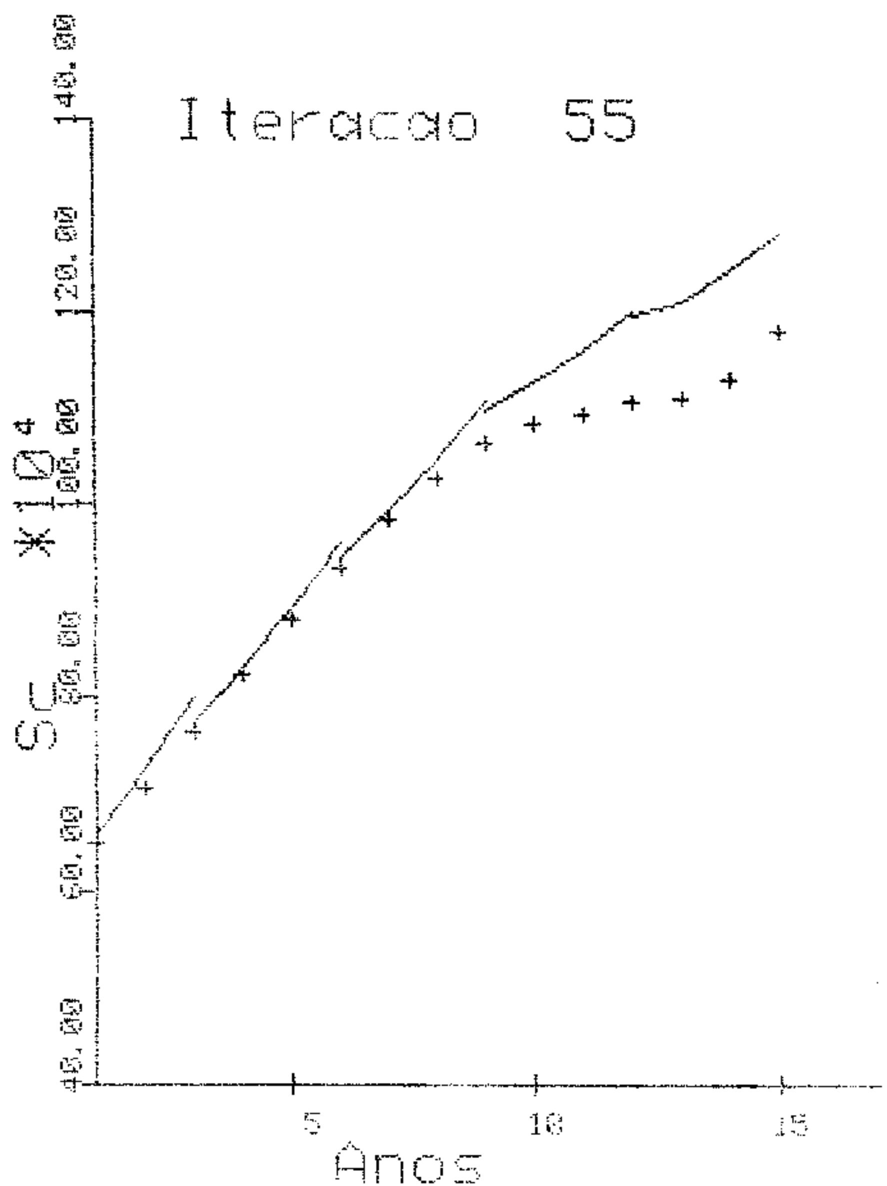


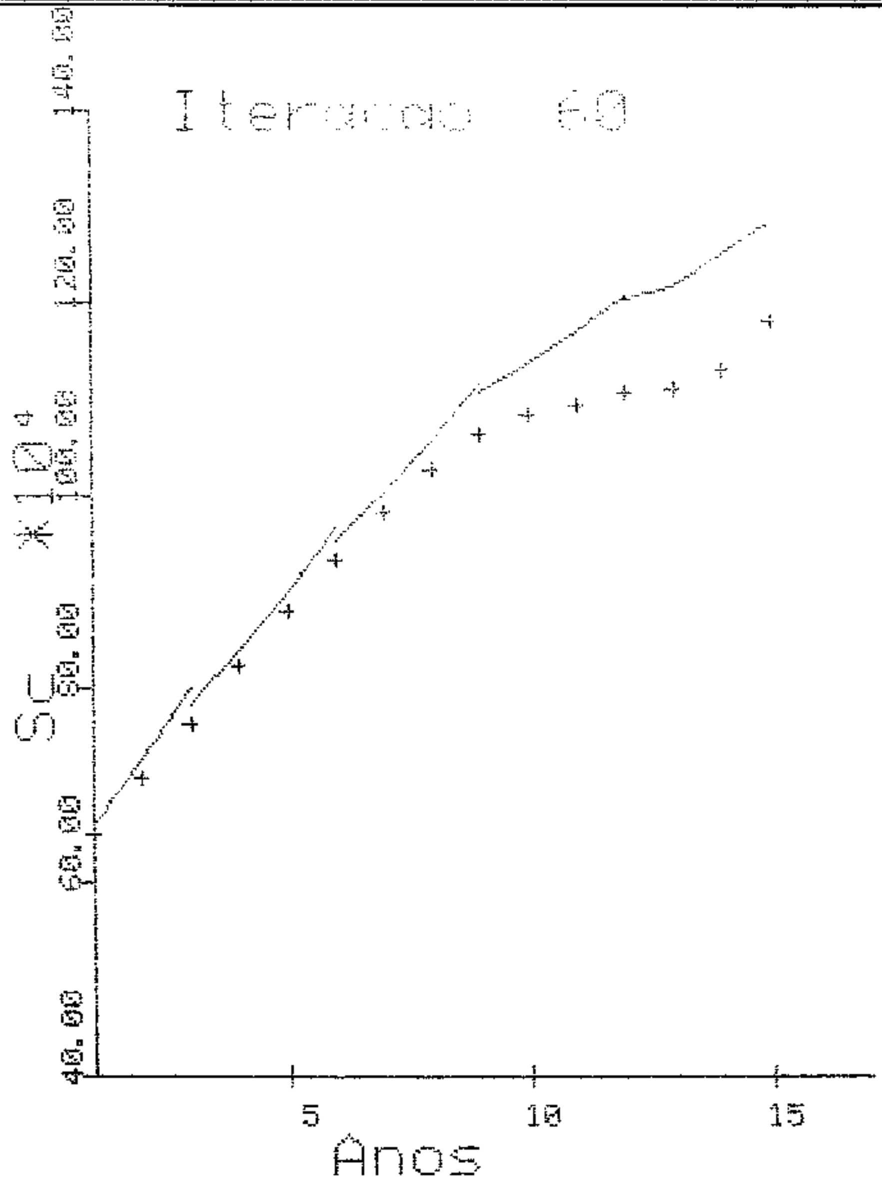
Iteracao 40
SC *10^4
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
5
10
15
Anos



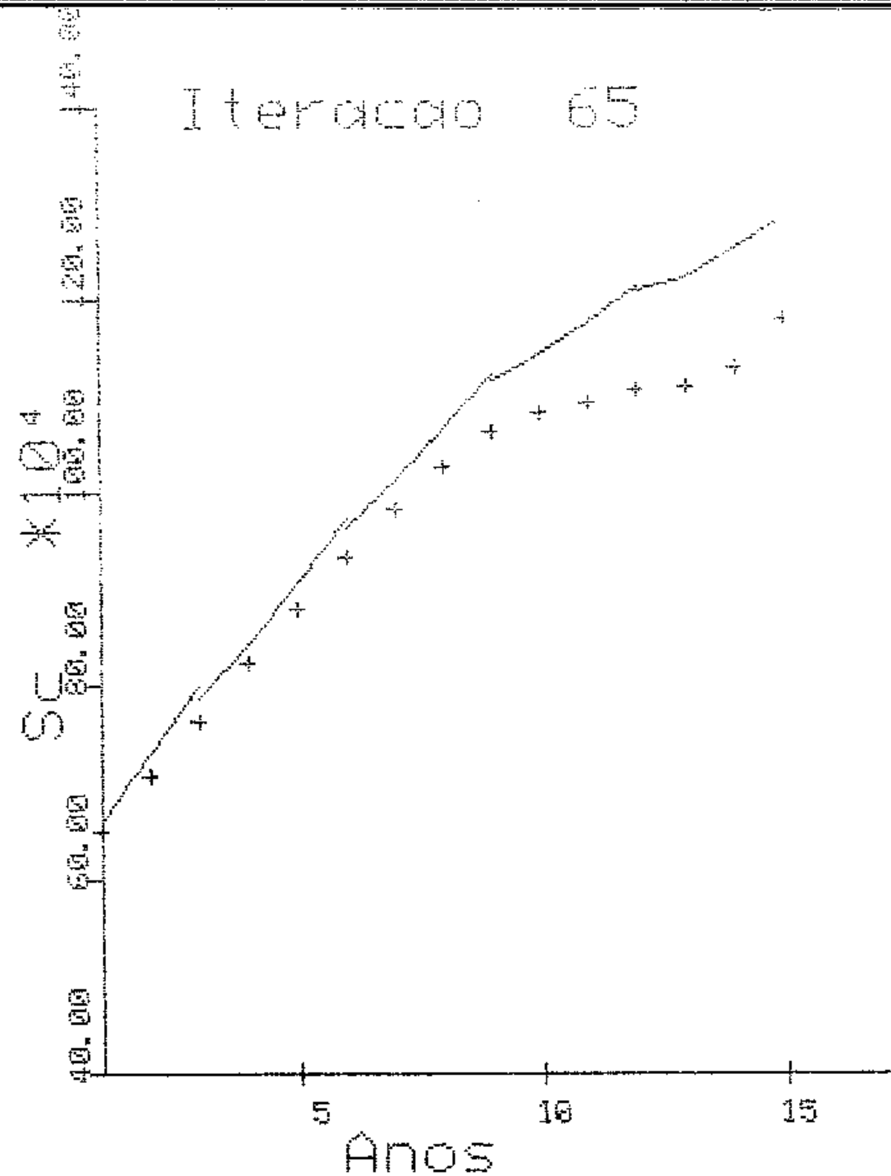
Iteracao 45
SC *10^4
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
5
10
15
Anos


Iteracao
SC *10⁴
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
5
10
15
Anos

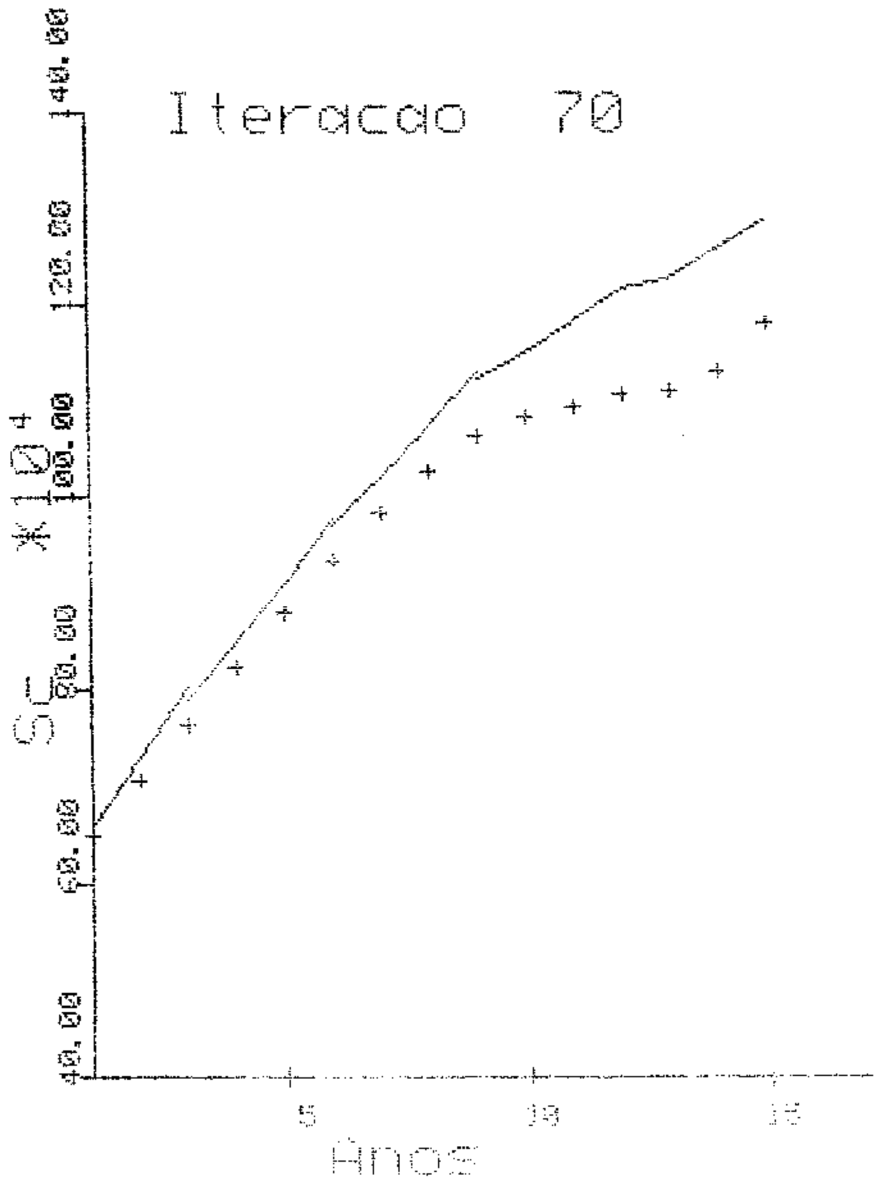

Iteracao 55
SC *10⁴
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
5
10
15
Anos

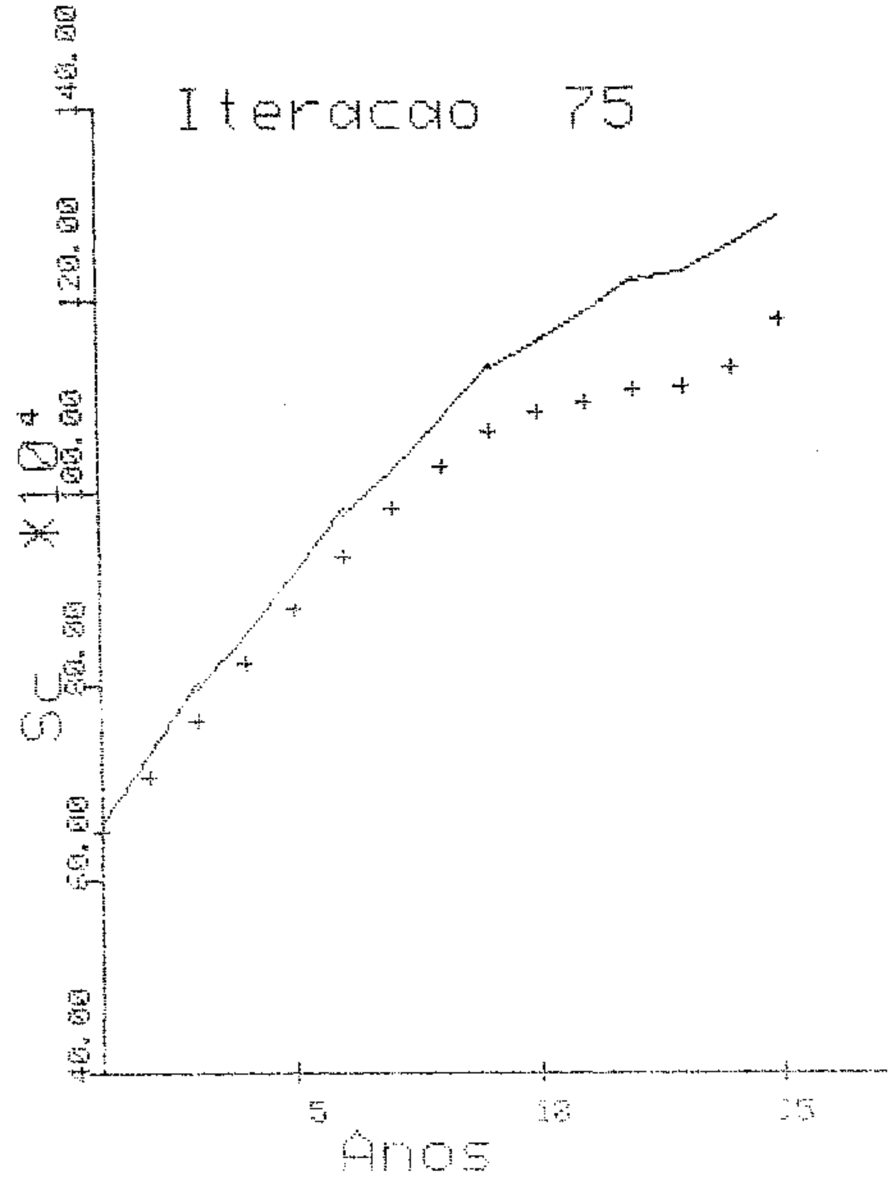


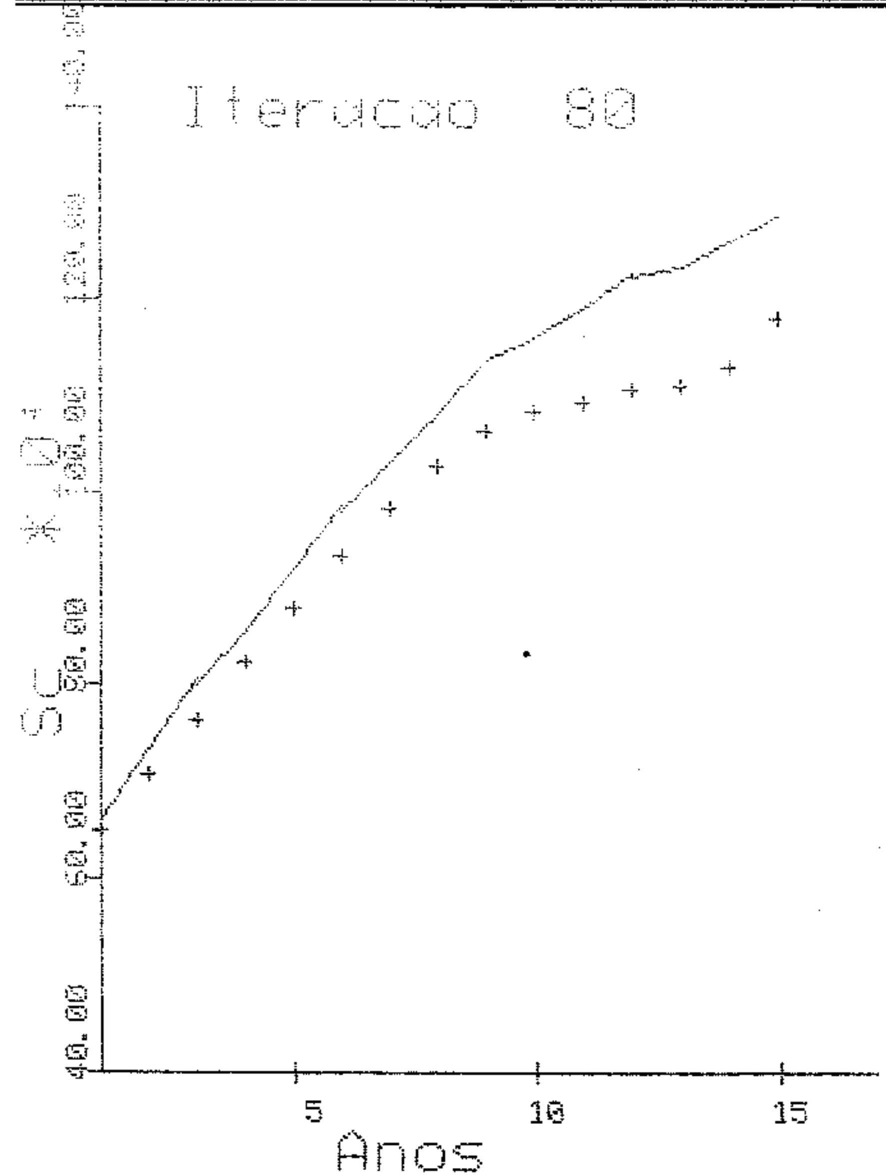
Iteracao 60
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
SC *10^4
5
10
15
Anos



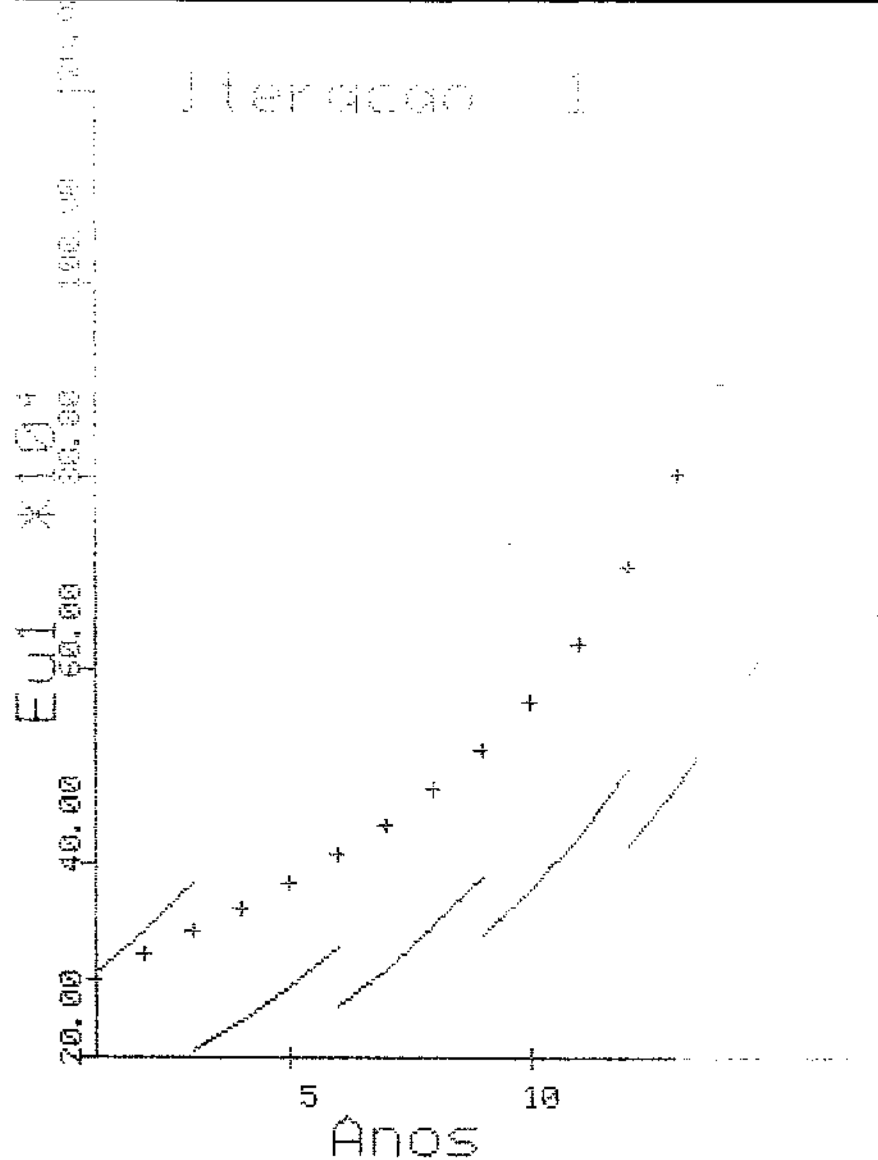
Iteracao 65
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
SC *10^4
5
10
15
Anos

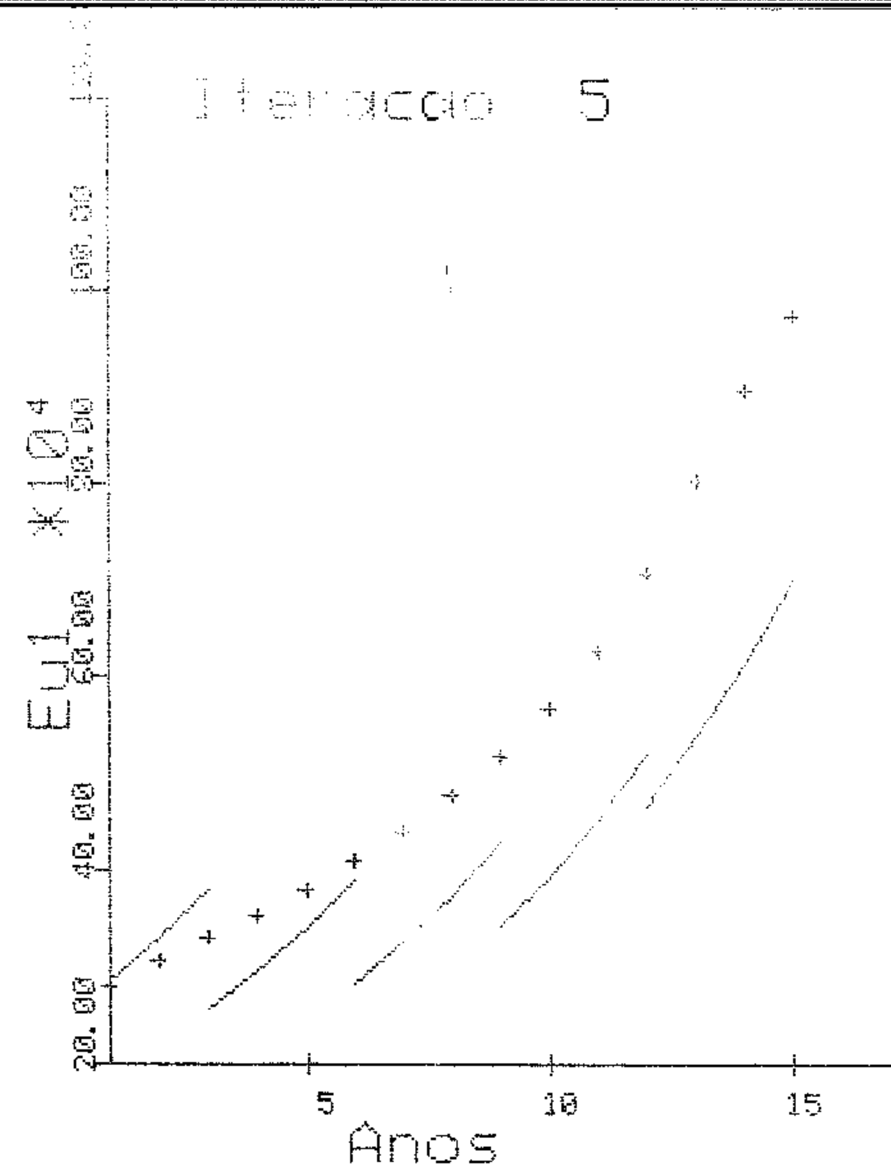

Iteracao 70
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
SC *10^4
5
10
15
Anos

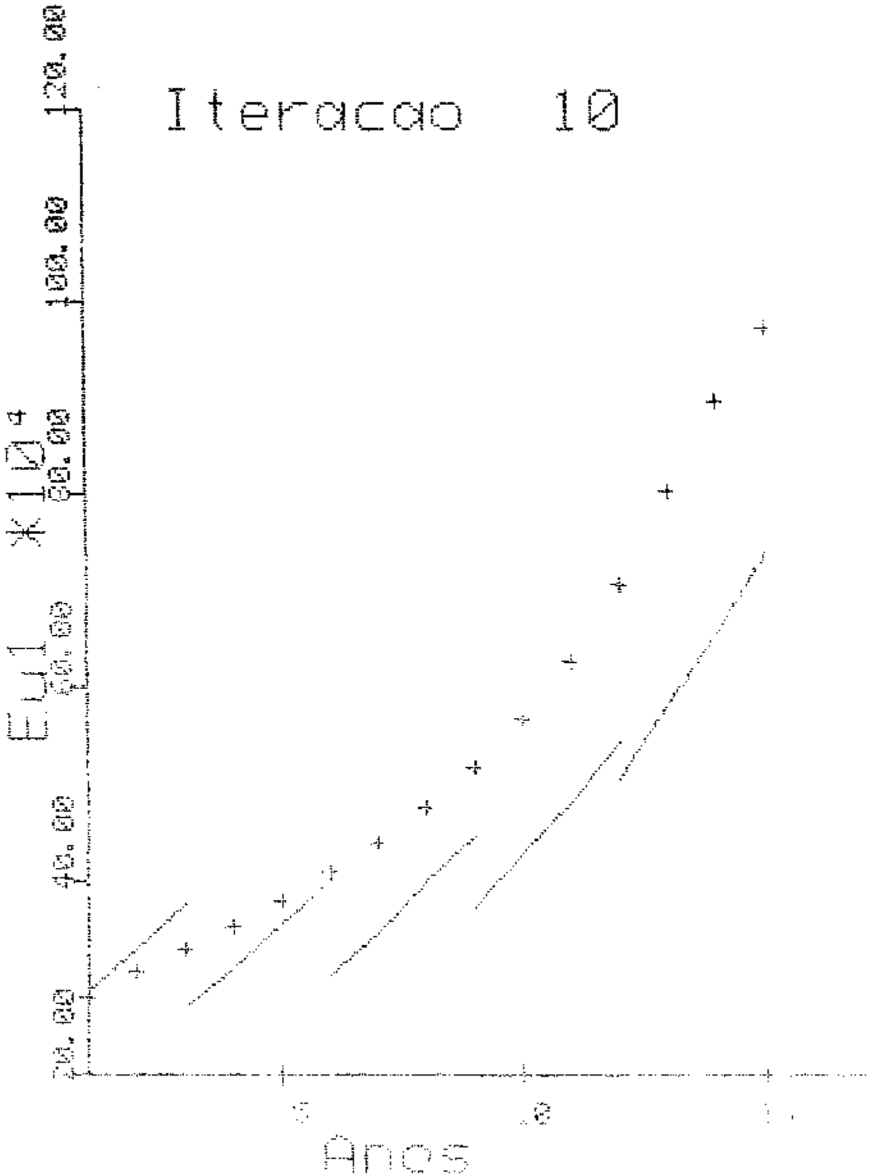

Iteracao 75
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
SC *10^4
5
10
15
Anos

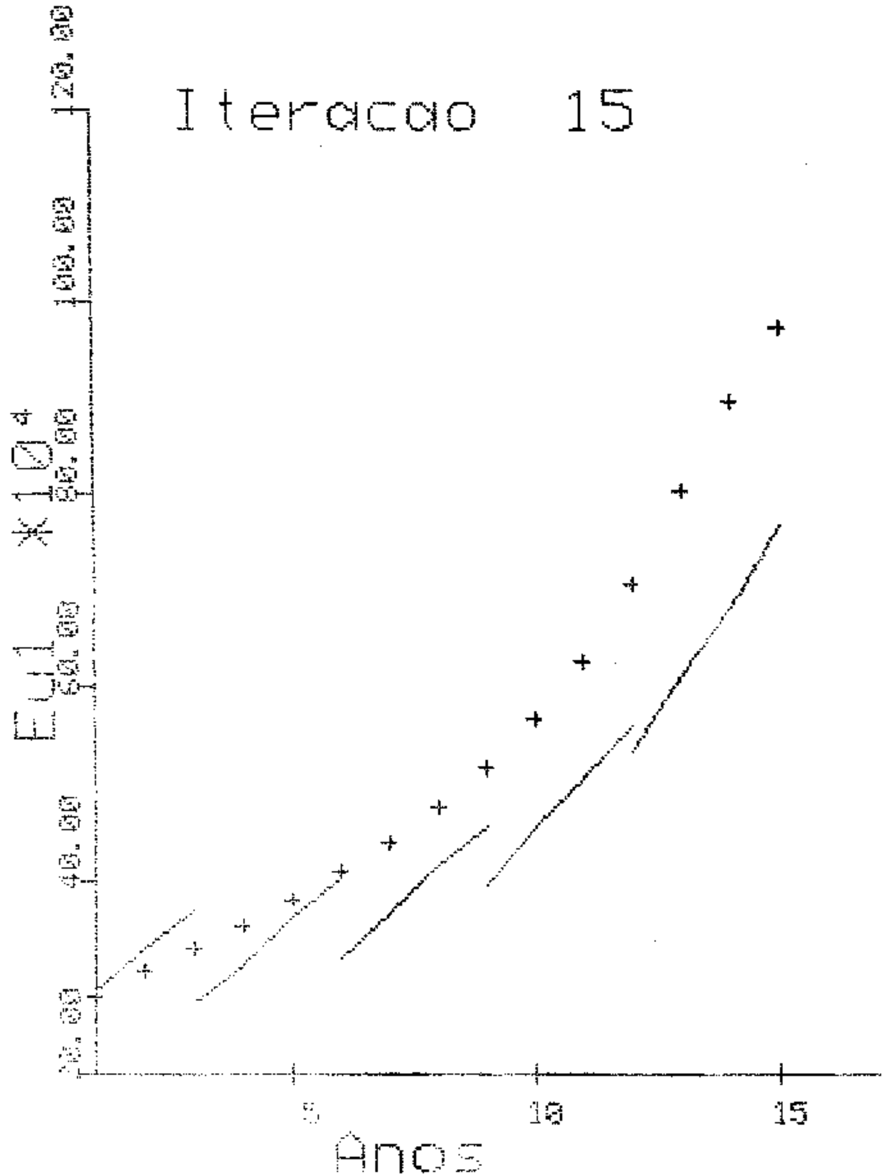


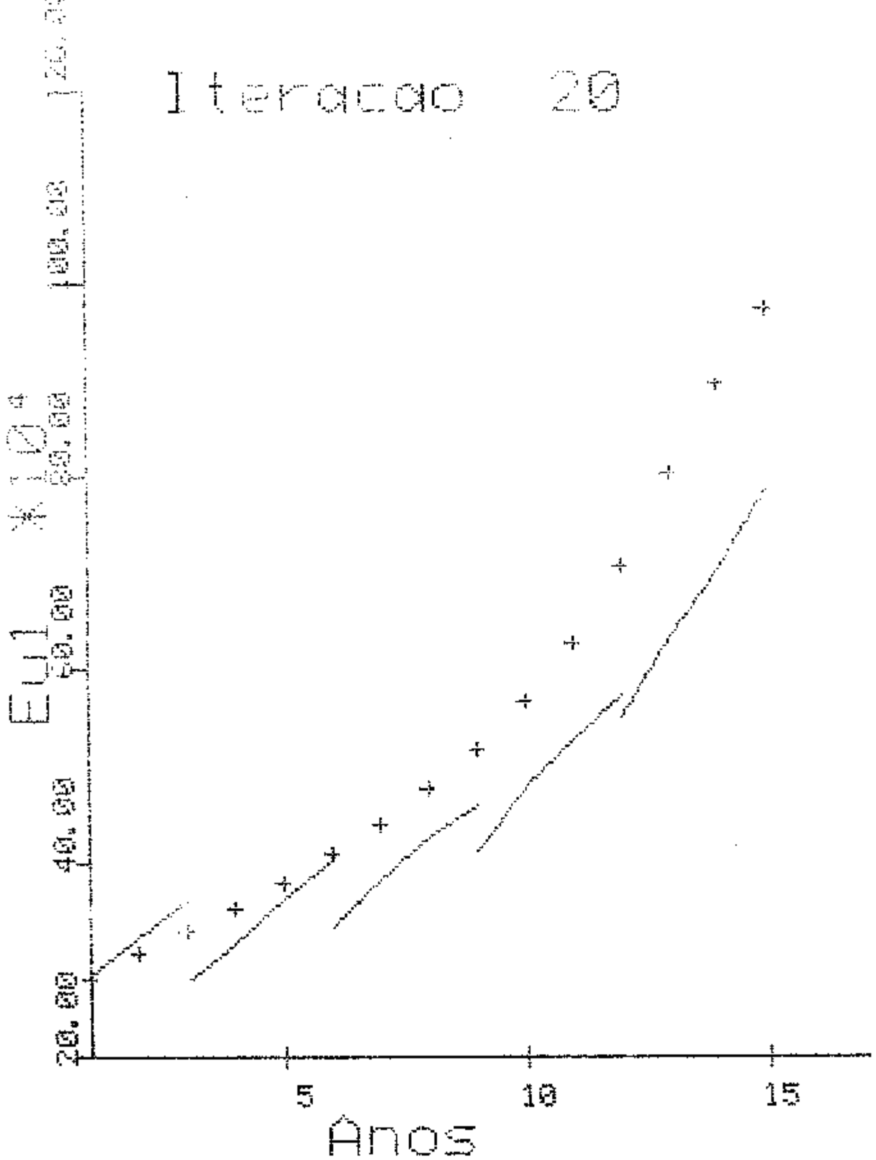
Iteracao 80
SC * 10⁴
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
140.00
5
10
15
Anos

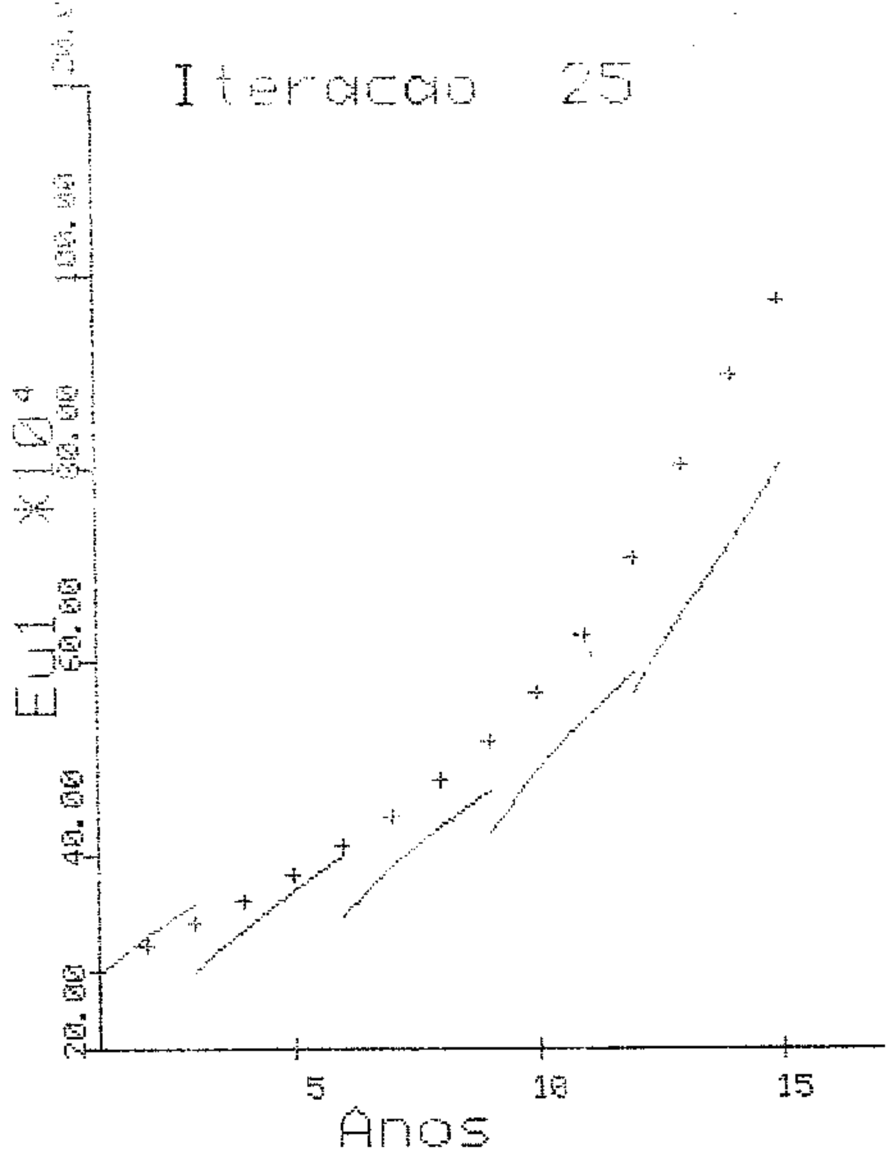

Iteracao 1
Eu1 *10^4
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
5
10
Anos

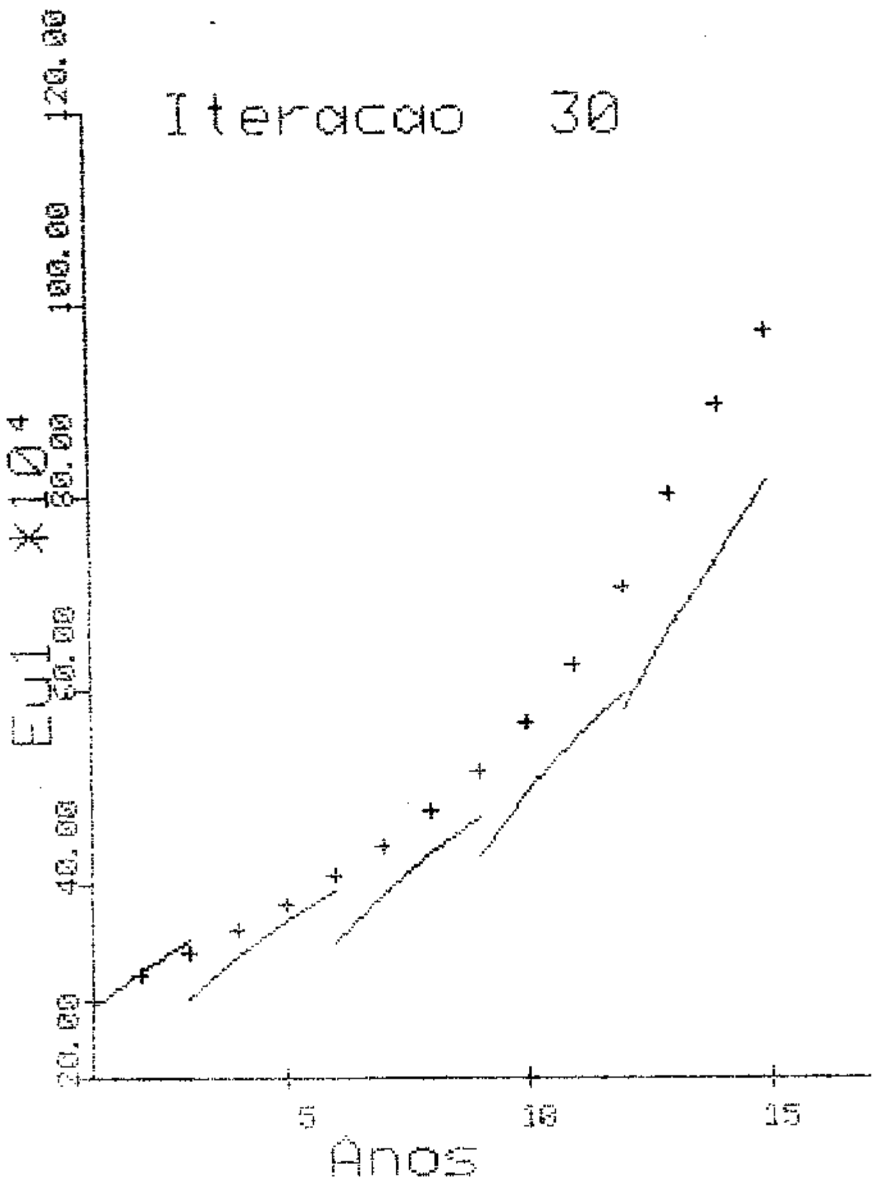

Iteracao 5
Eu1 *10^4
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
5
10
15
Anos

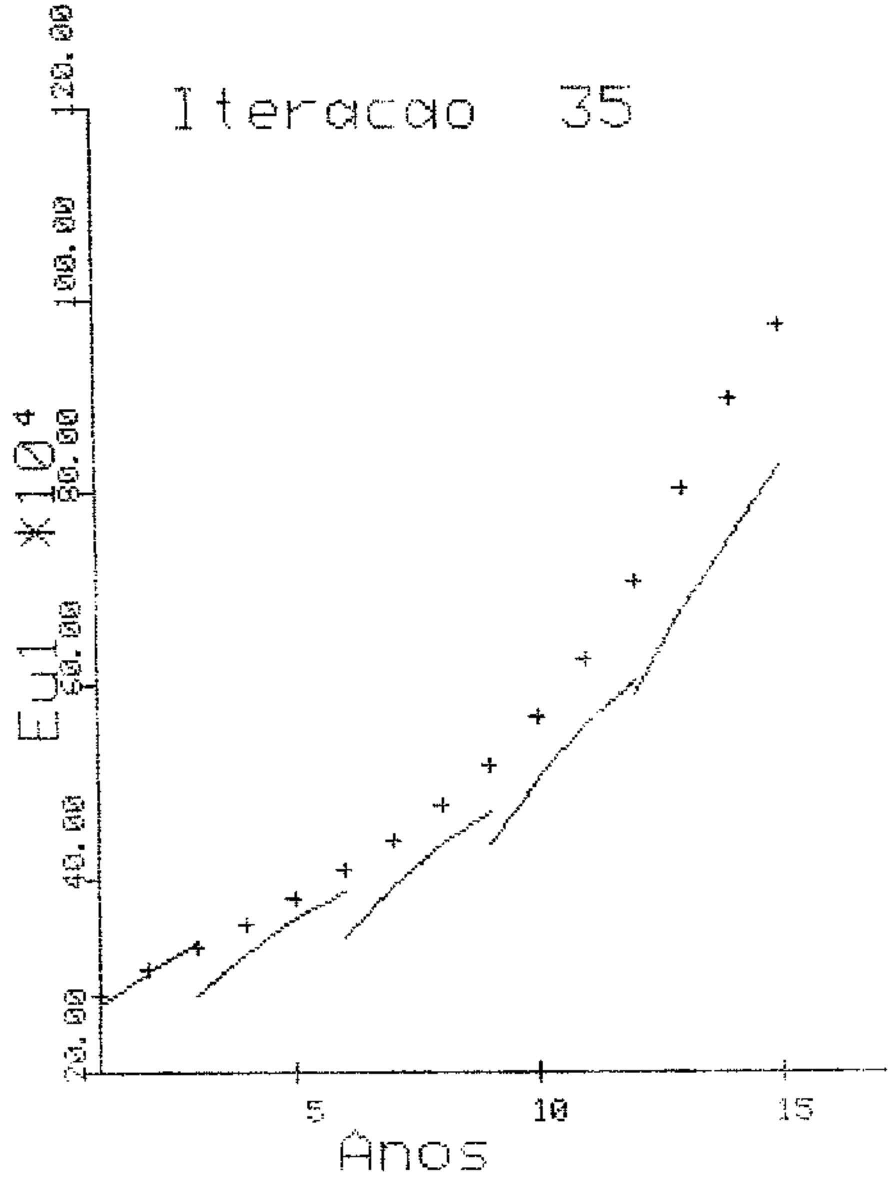

Iteracao 10
Eu1 * 10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
5
10
Anos

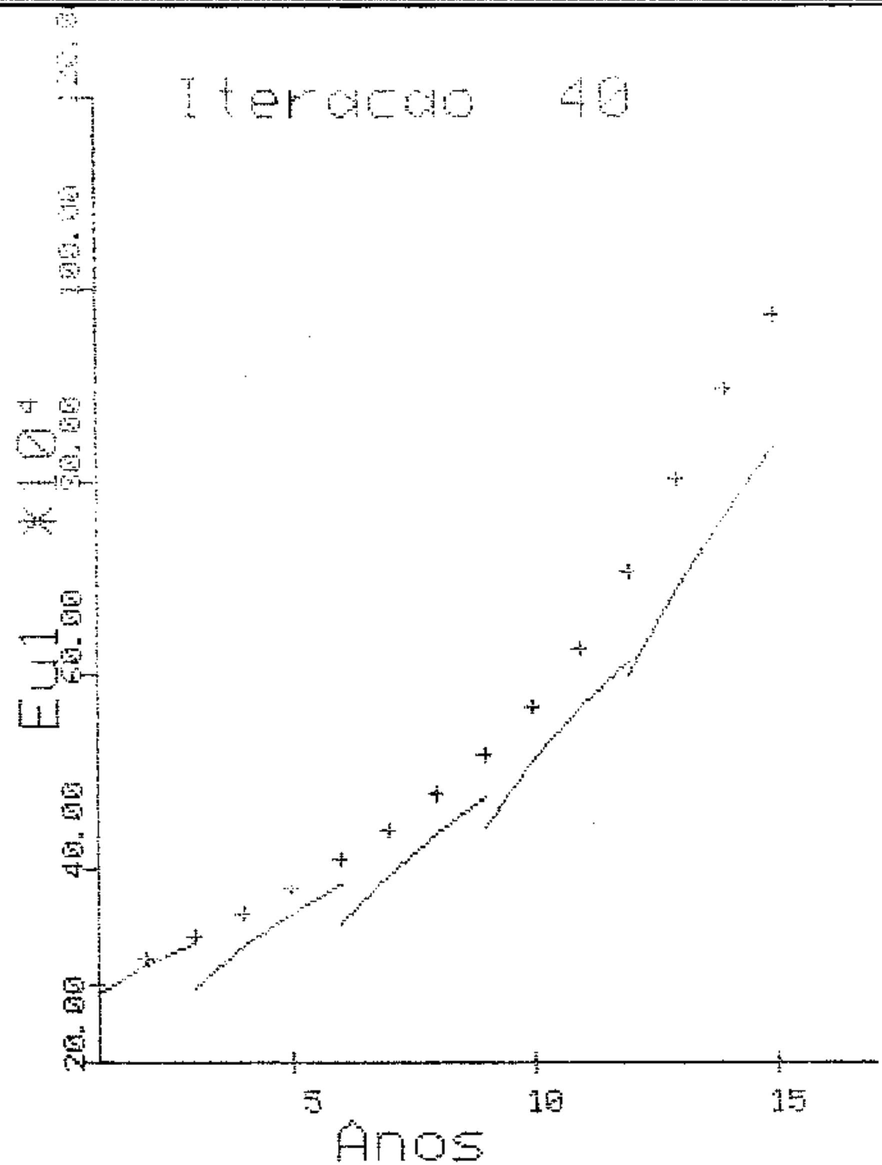

Iteracao 15
Eu1 * 10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
5
10
15
Anos

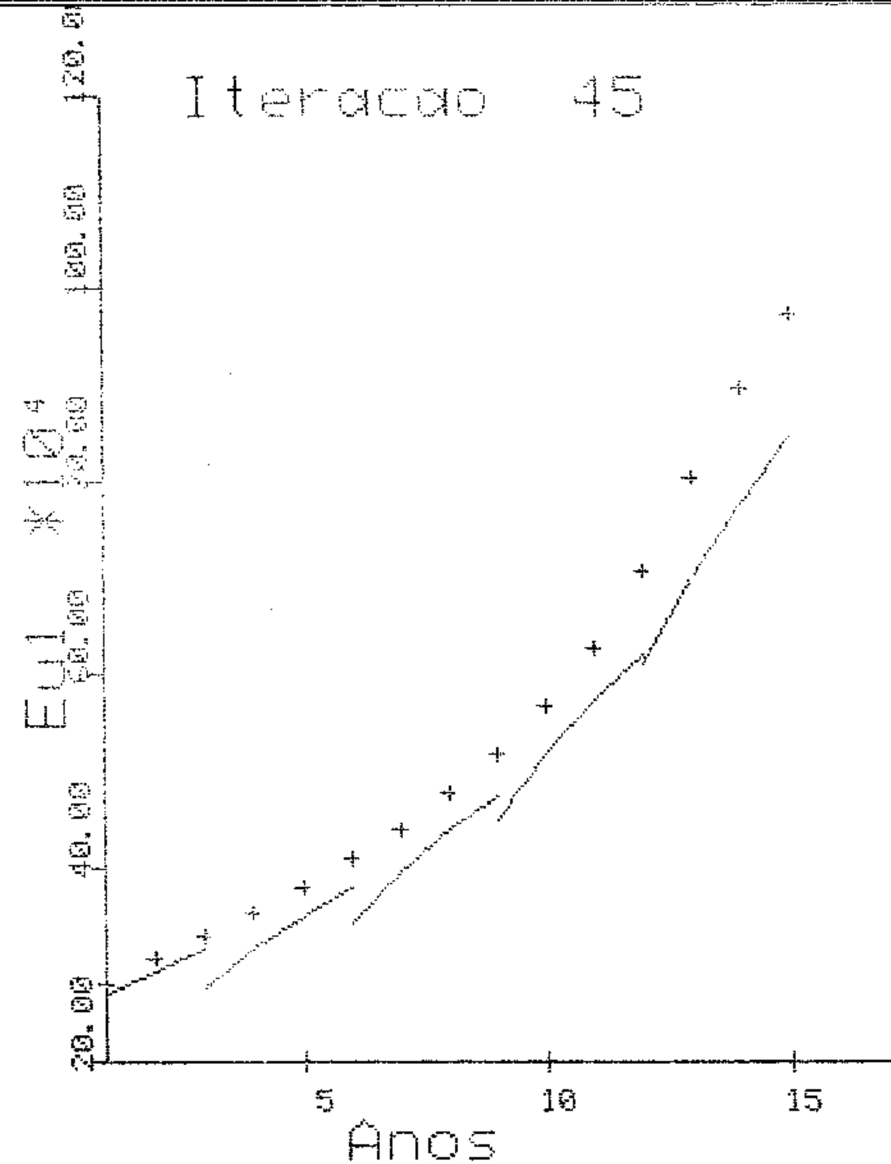

Iteracao 20
Eu1 * 10^4
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
5
10
15
Anos

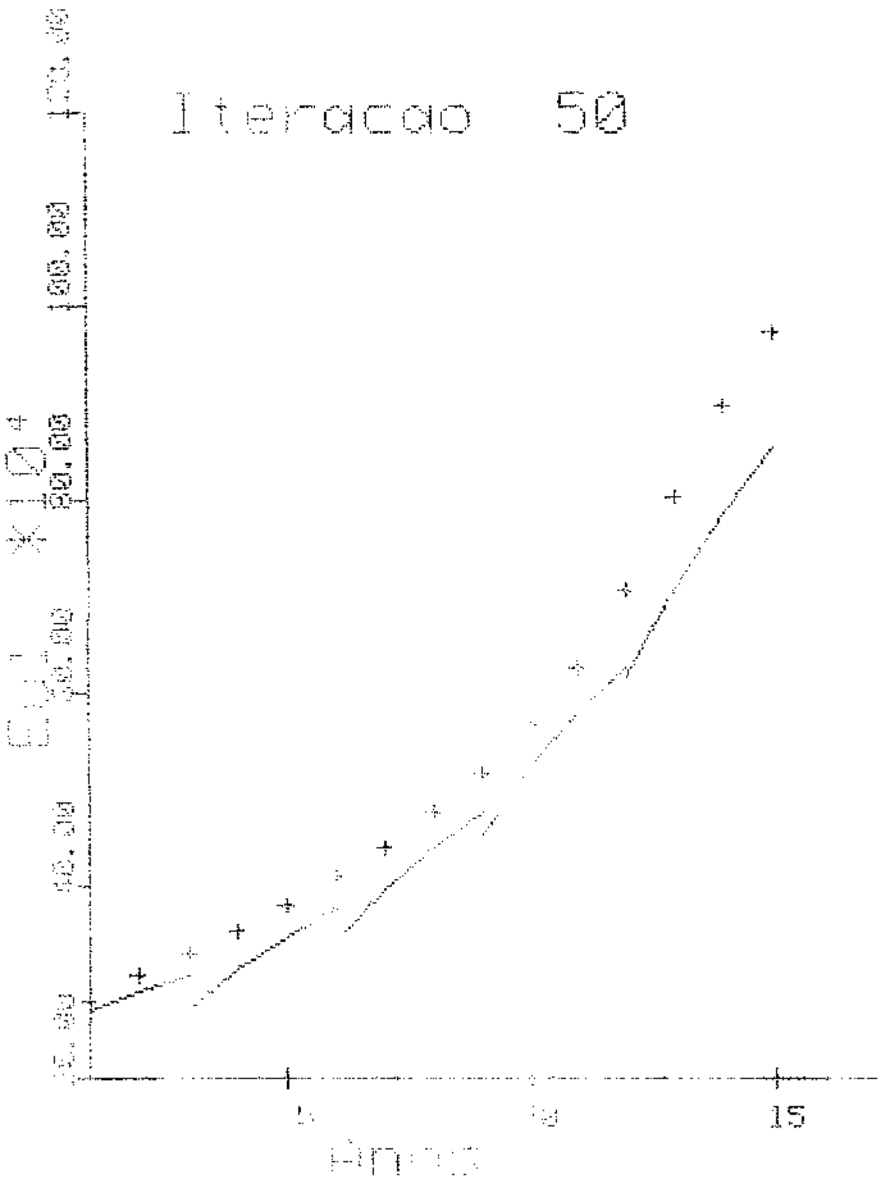

Iteracao 25
Eu1 * 10^4
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
5
10
15
Anos

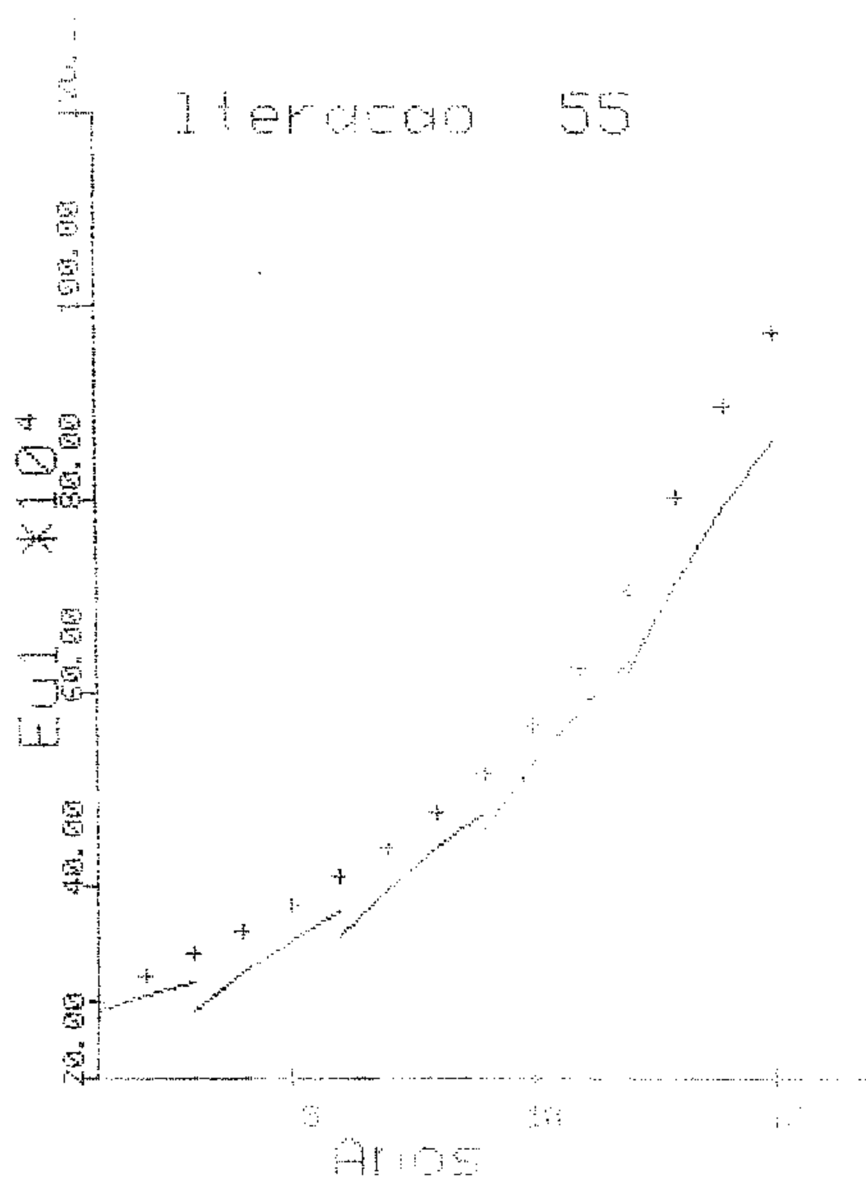

Iteracao 30
Eu1 * 10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

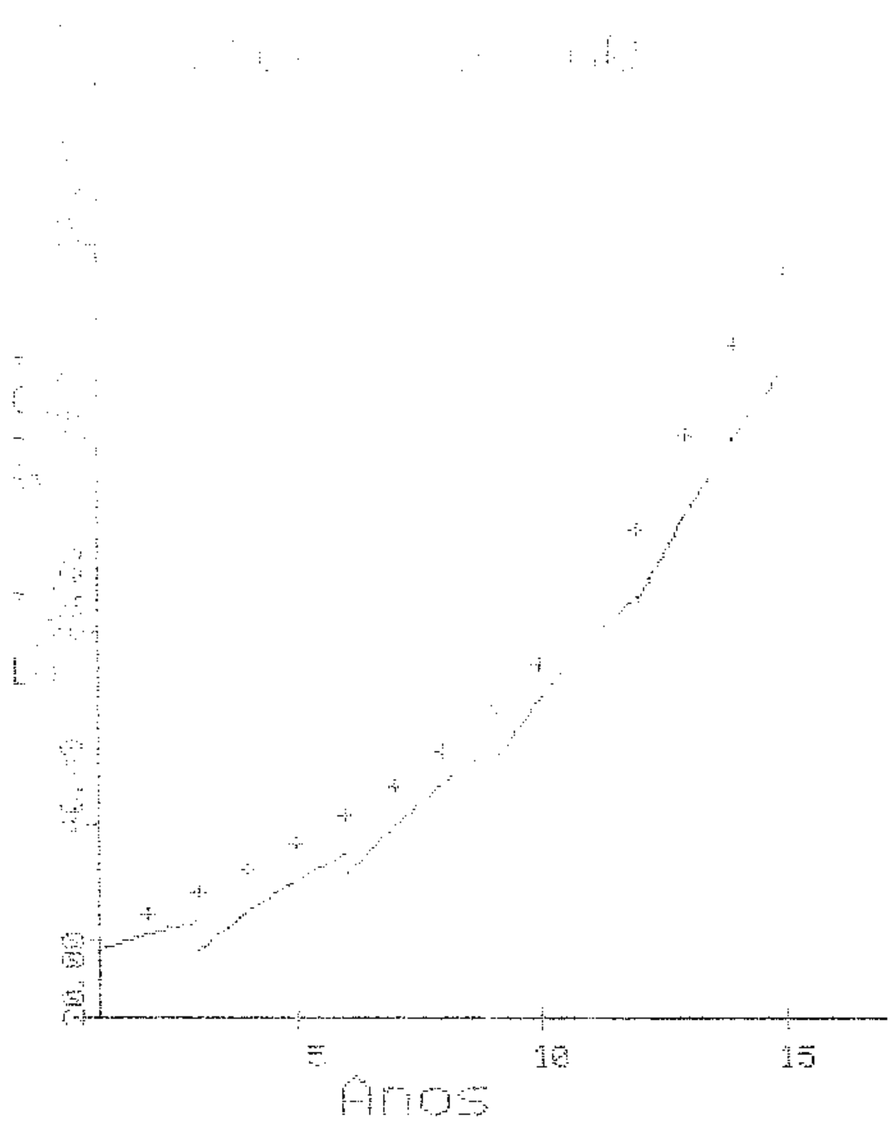

Iteracao 35
Eu1 * 10⁴
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
5
10
15
Anos

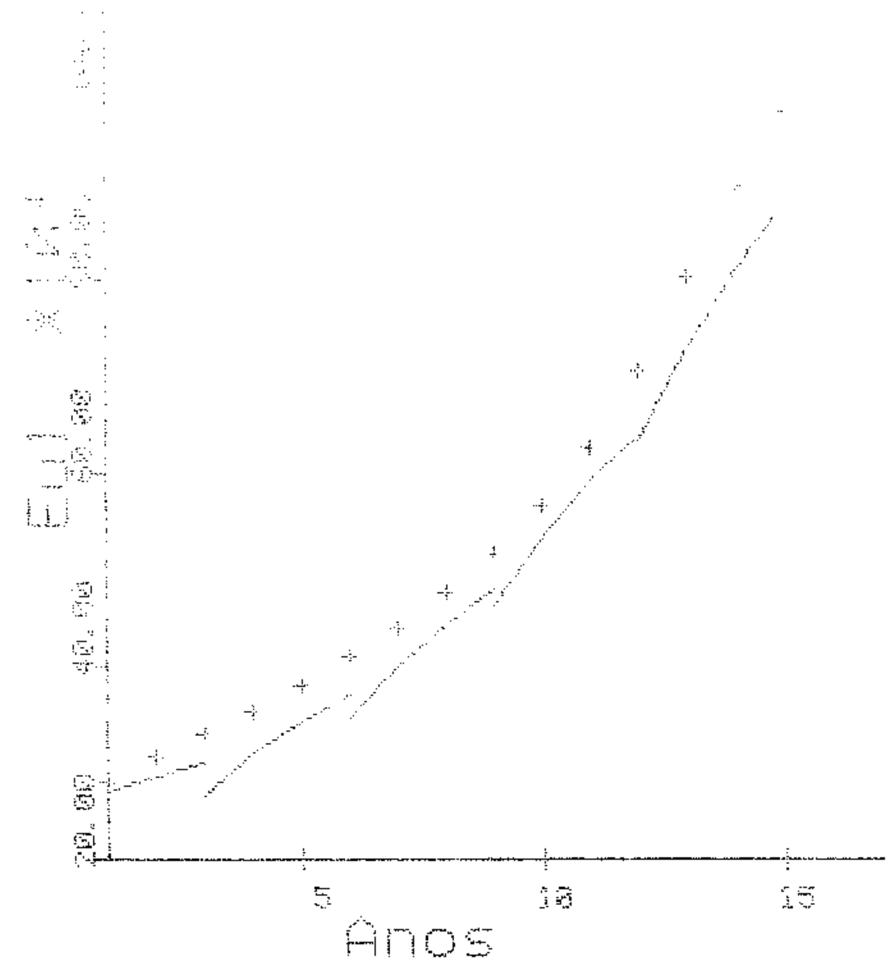

Iteracao 40
Eu1 *10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
5
10
15
Anos

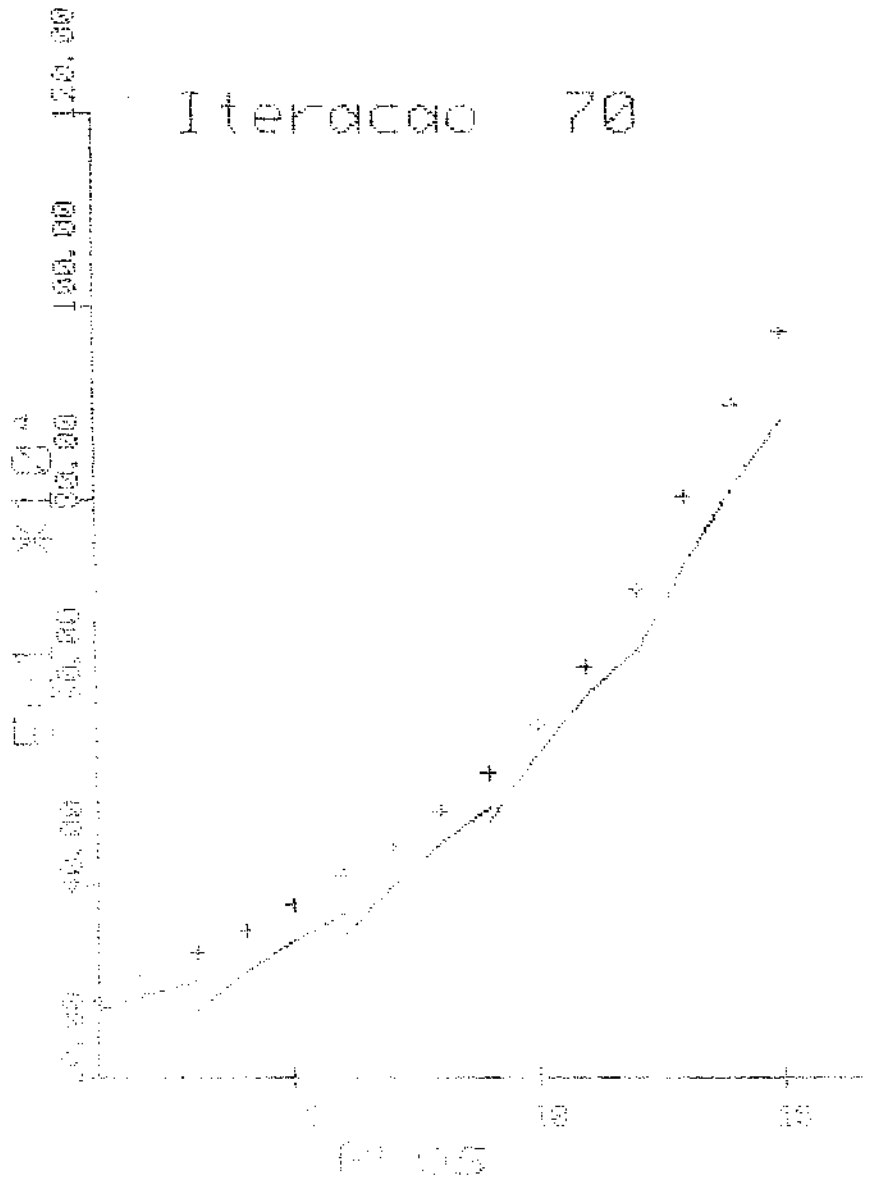

Iteracao 45
Eu1 *10⁴
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
5
10
15
Anos

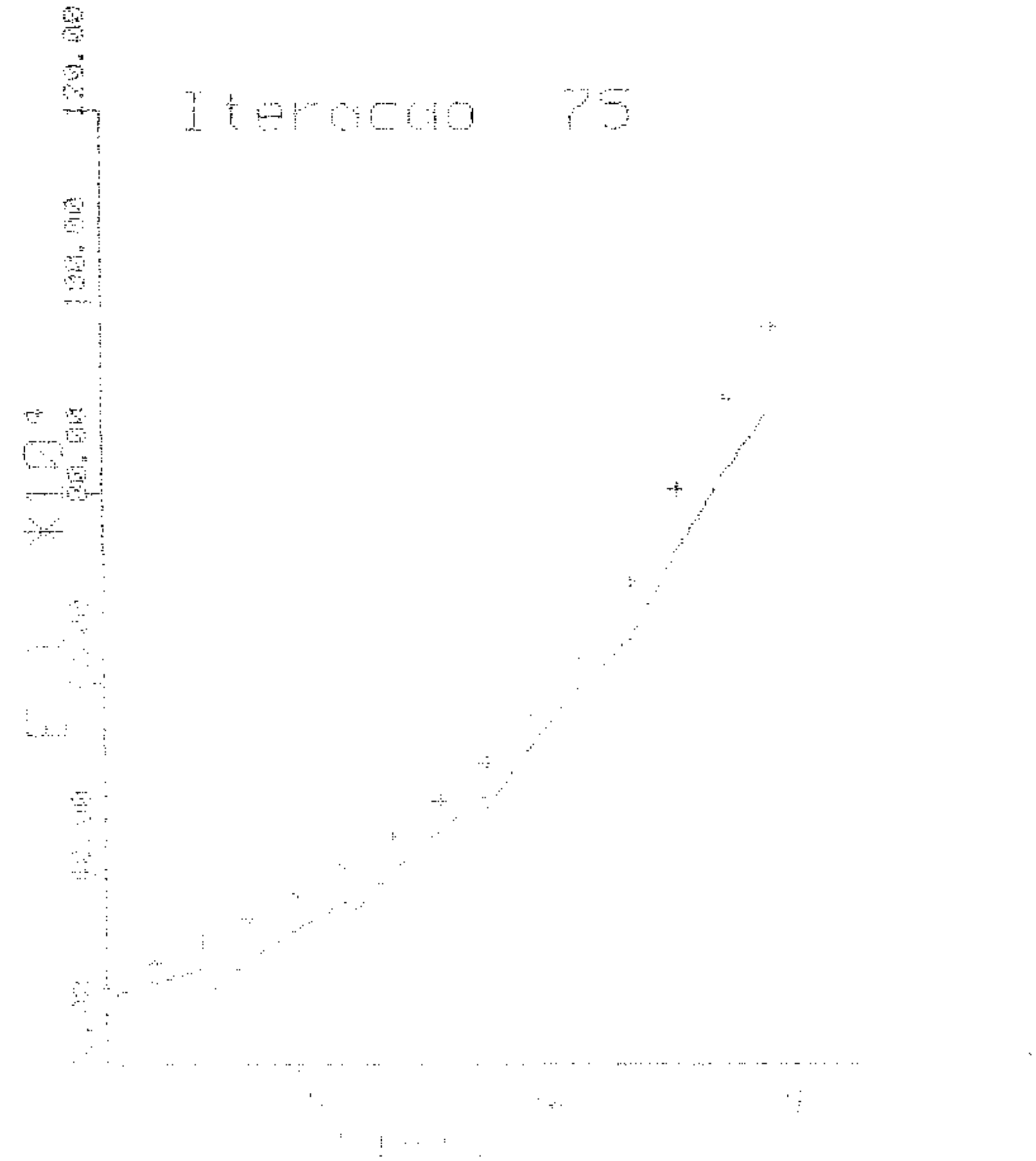

Iteracao 50
Eu1 *10^4
40.00
60.00
80.00
100.00
5
15

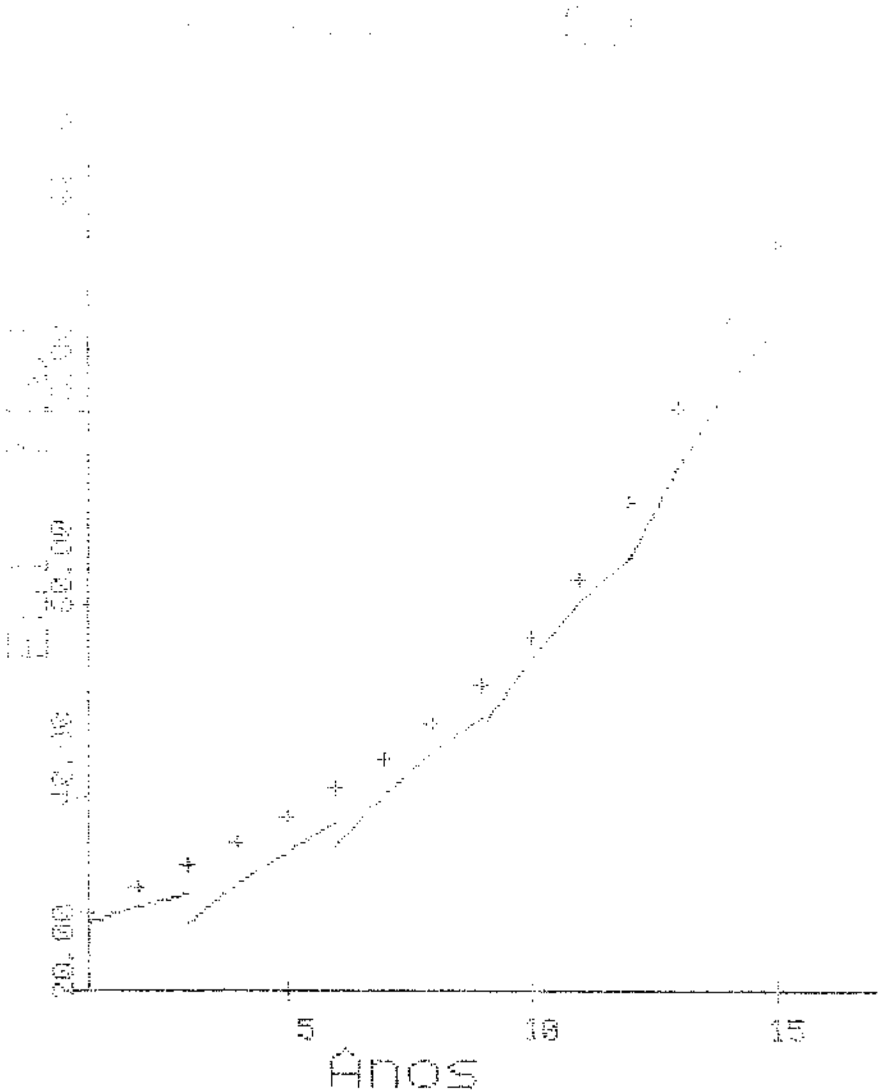

Iteracao 55
Eu1 *10^4
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
5
Anos

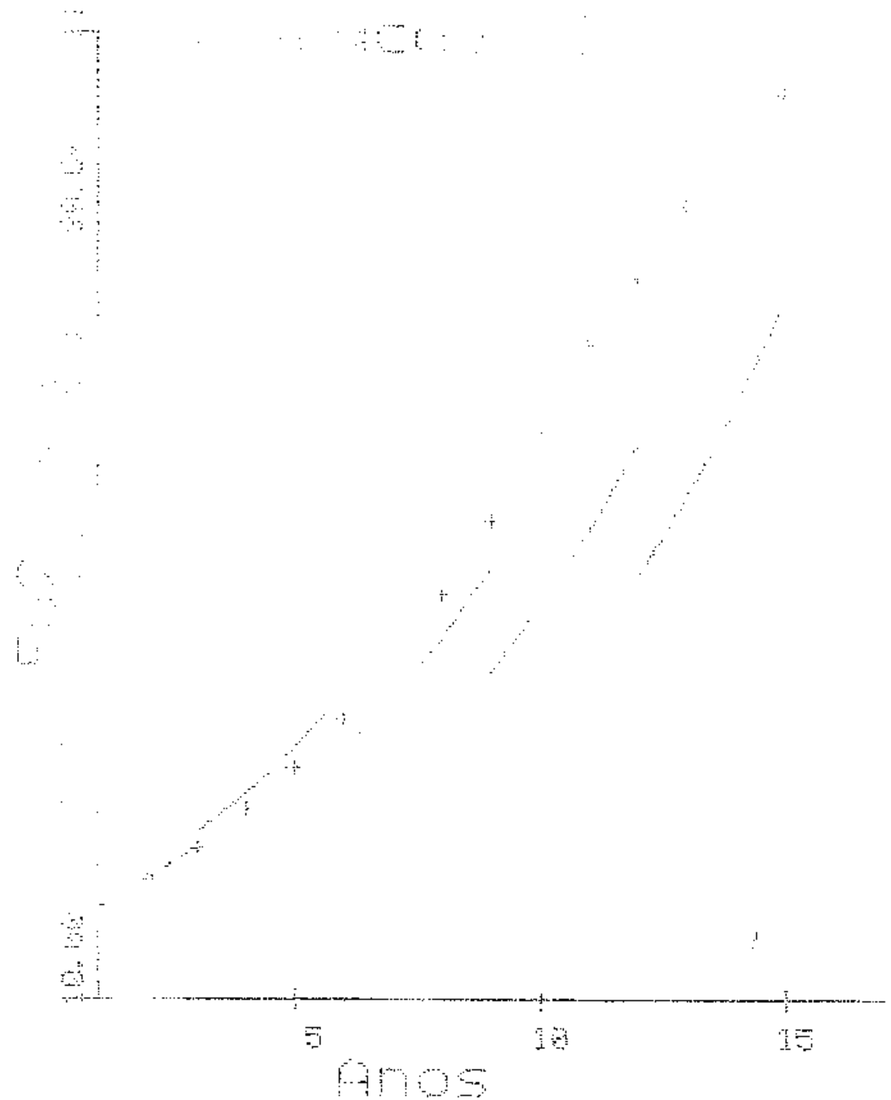

20.00
5
10
15
Anos

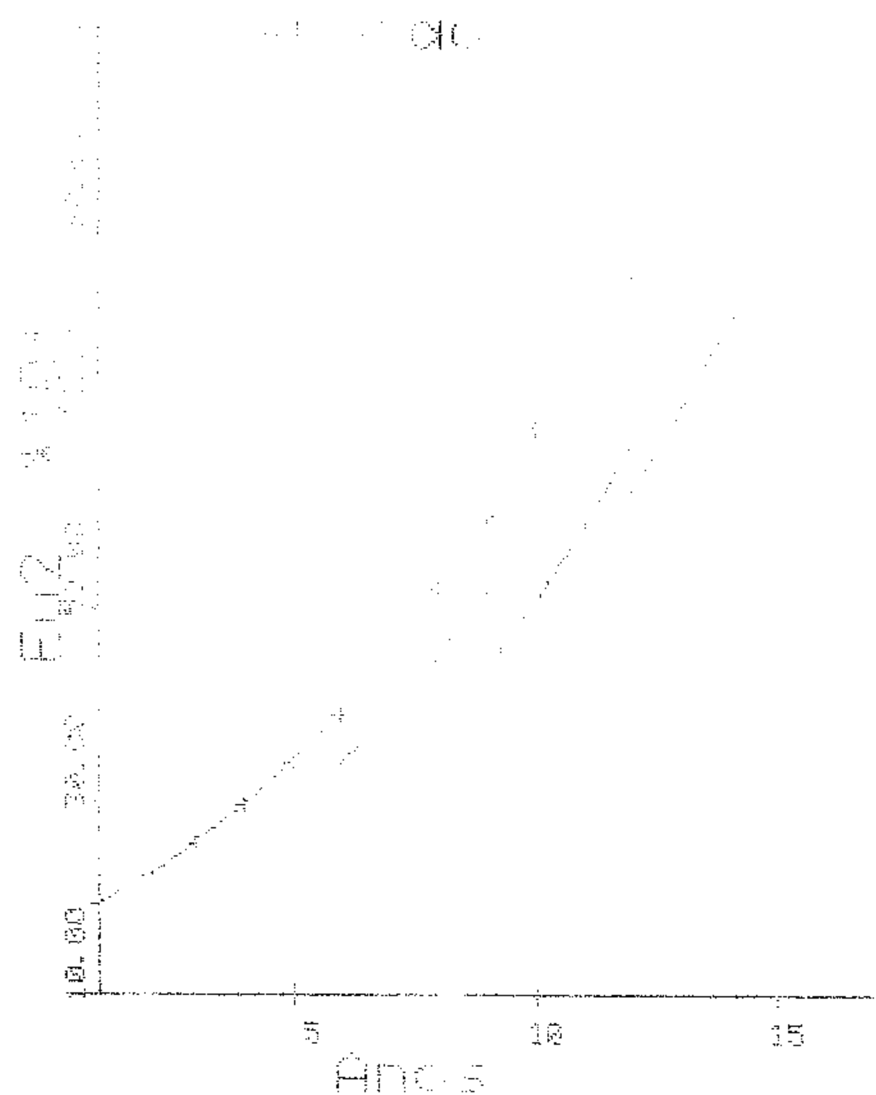

20.00
40.00
60.00
5
10
15
Anos

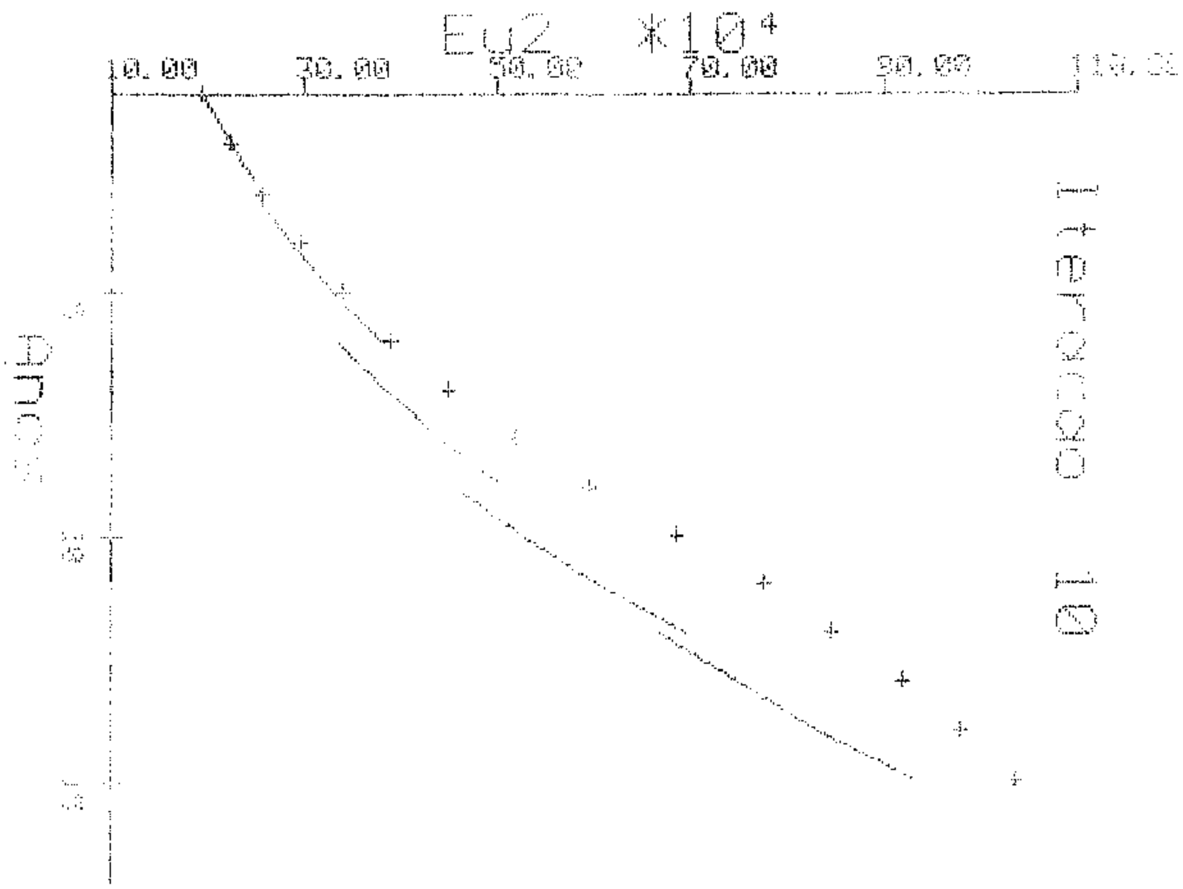

Iteracao 70
20.00
40.00
60.00
80.00
100.00
120.00
10

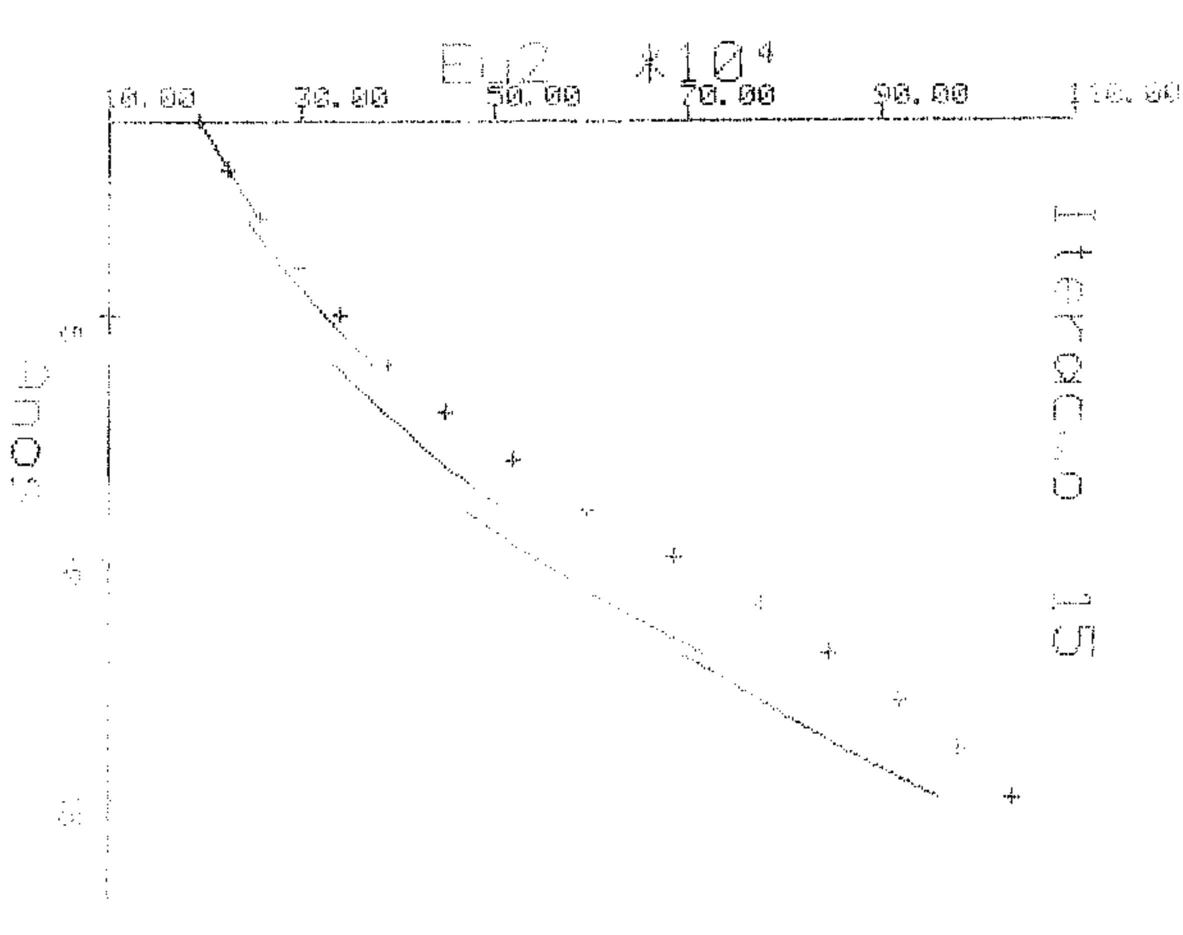

Iteracao 75
100.00
120.00

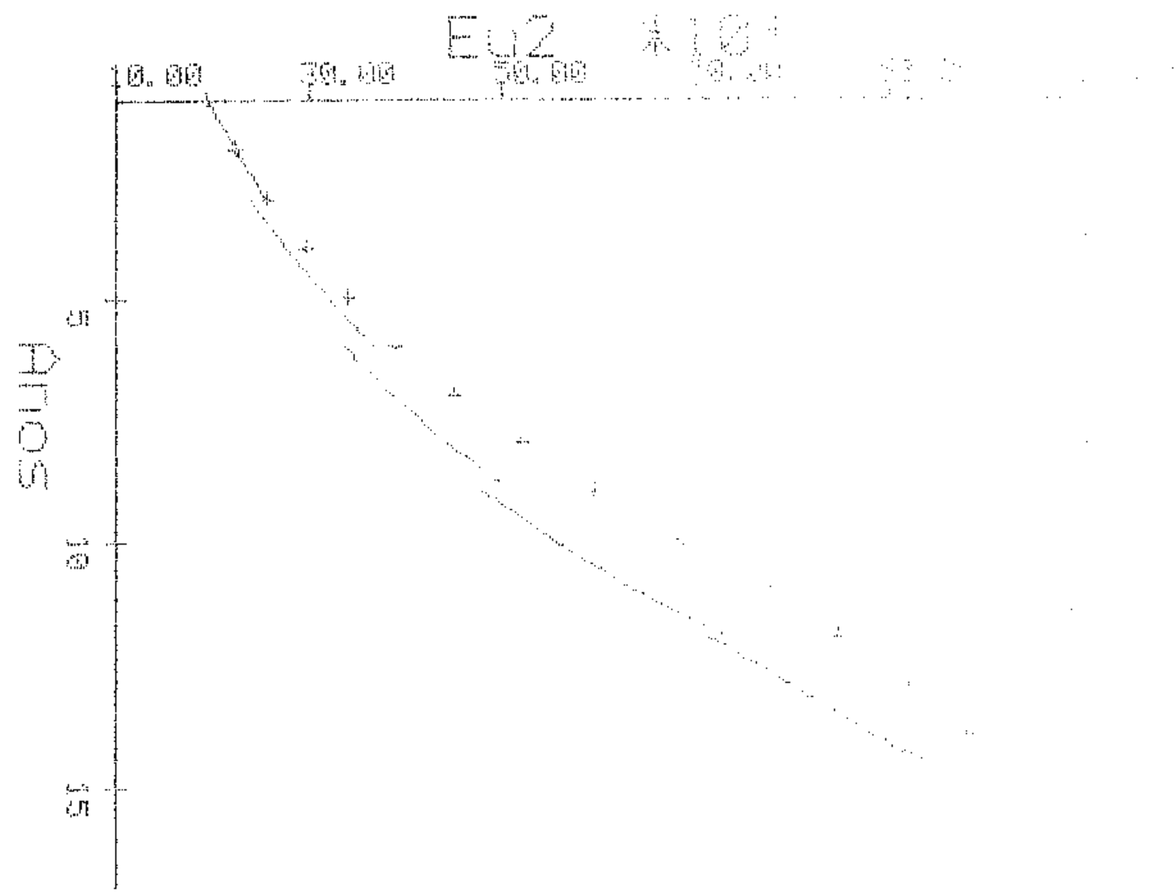

20.00
5
10
15
Anos

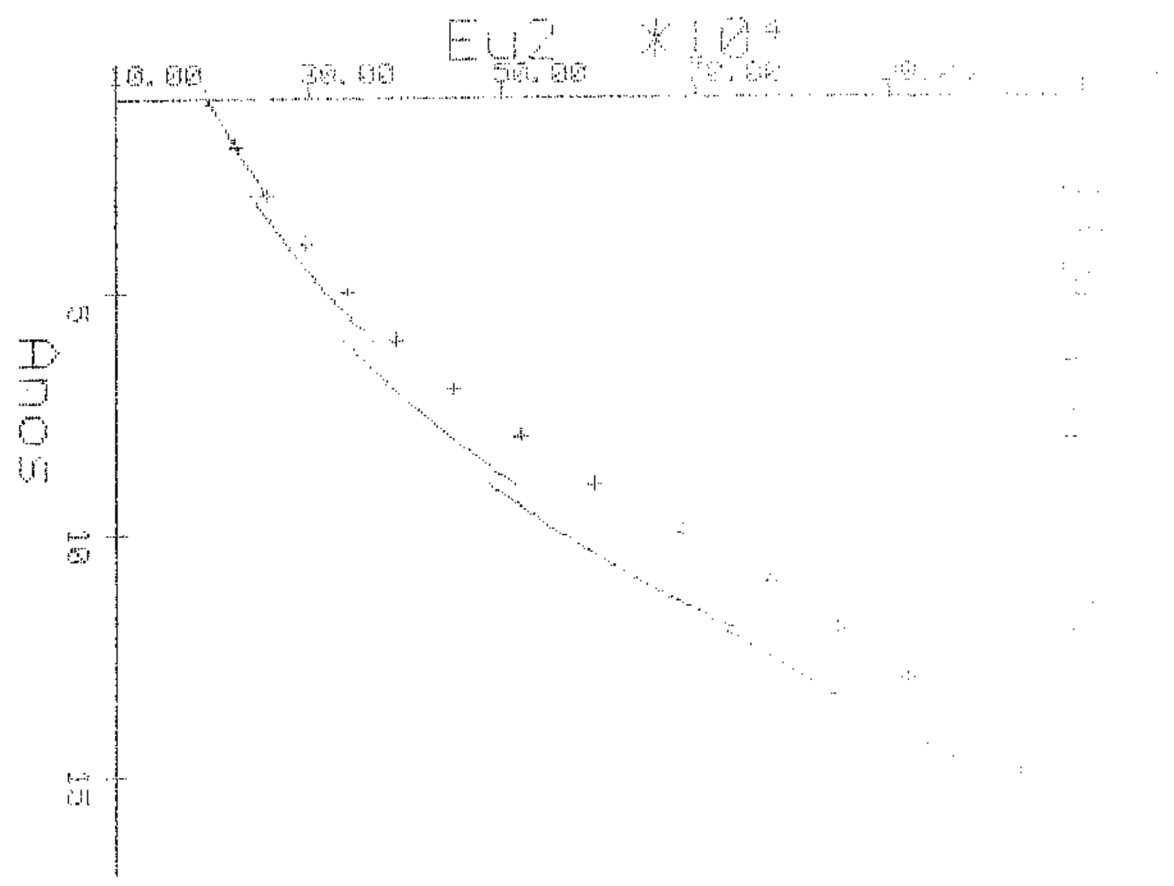

10.00
30.00
5
10
15
Anos

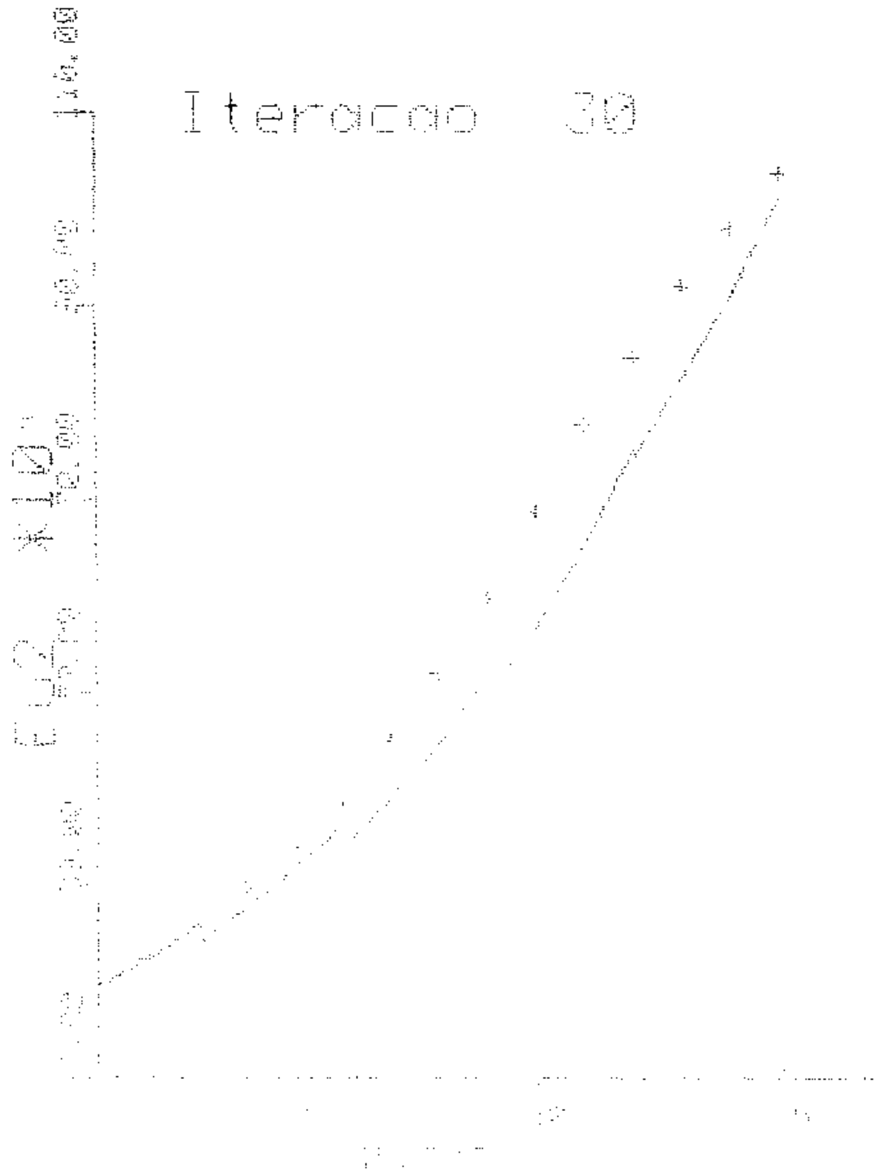

10.00
30.00
5
10
15
Anos

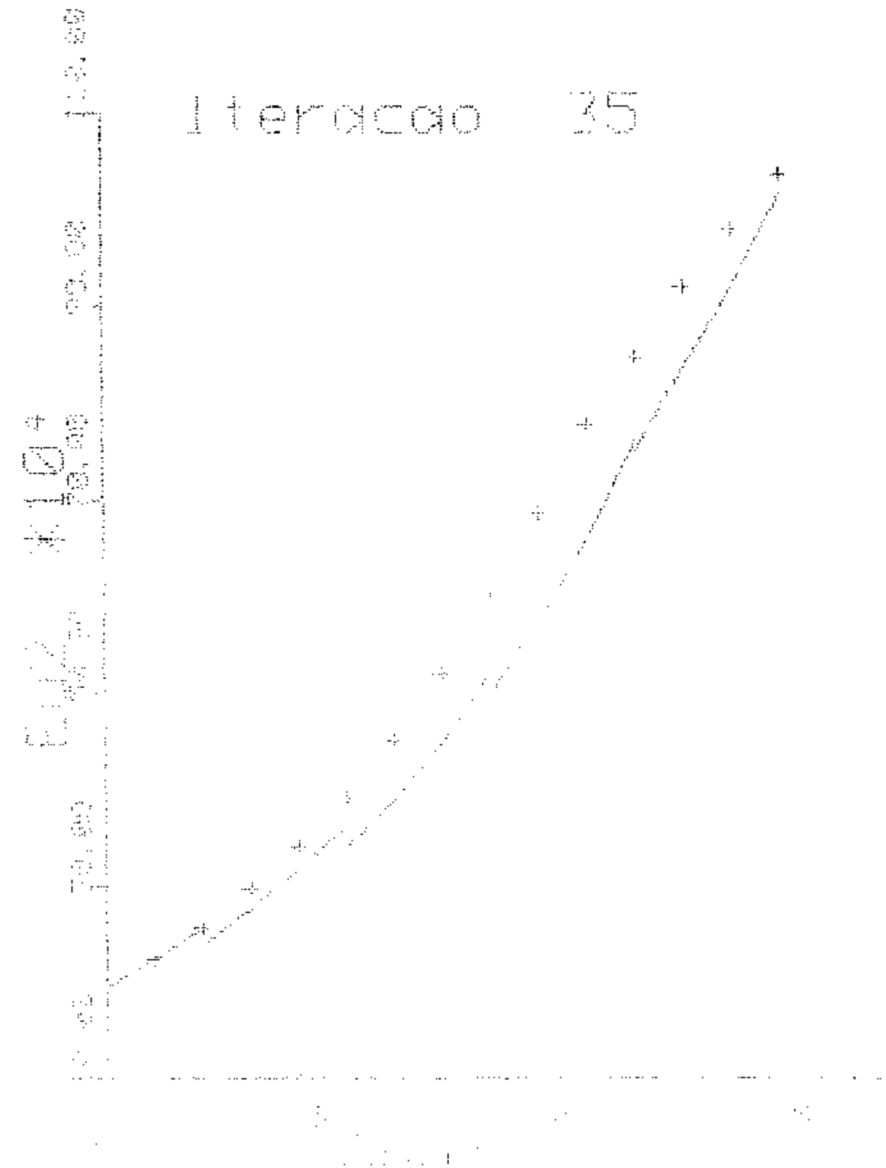

Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00

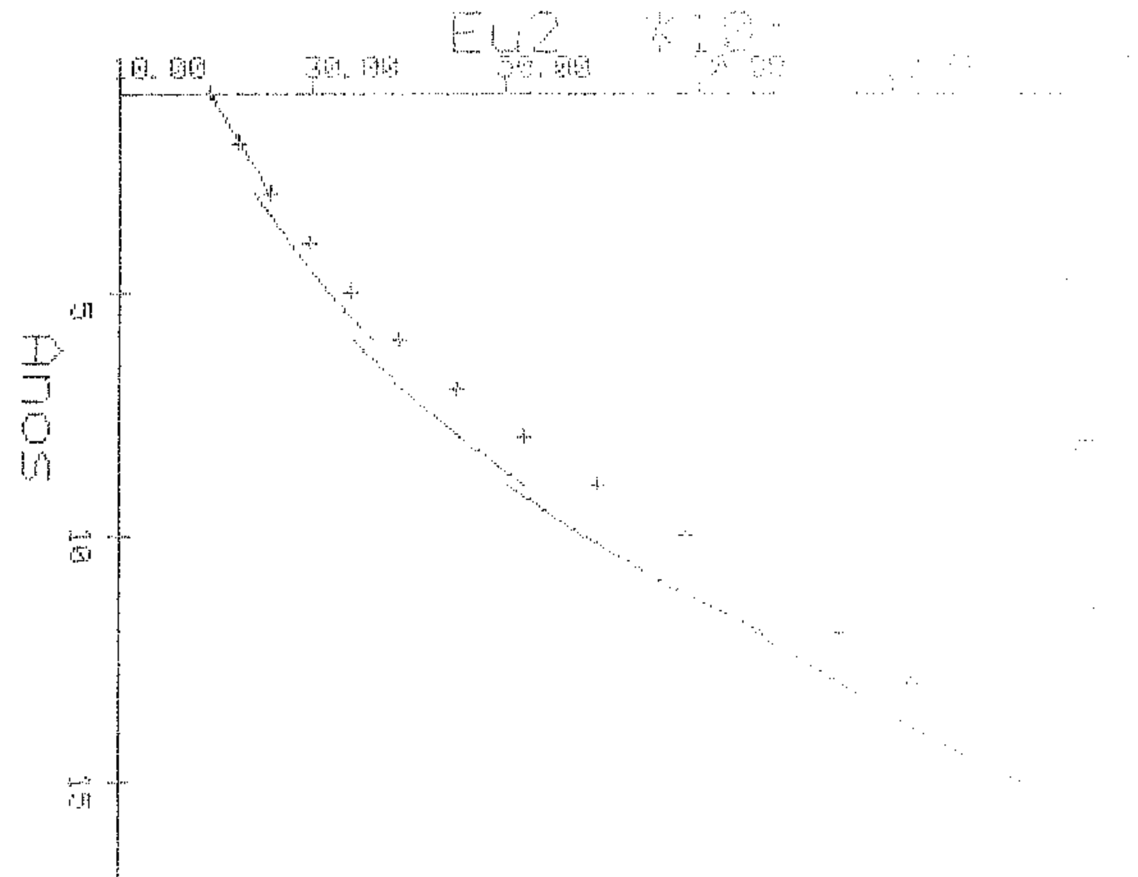

Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00

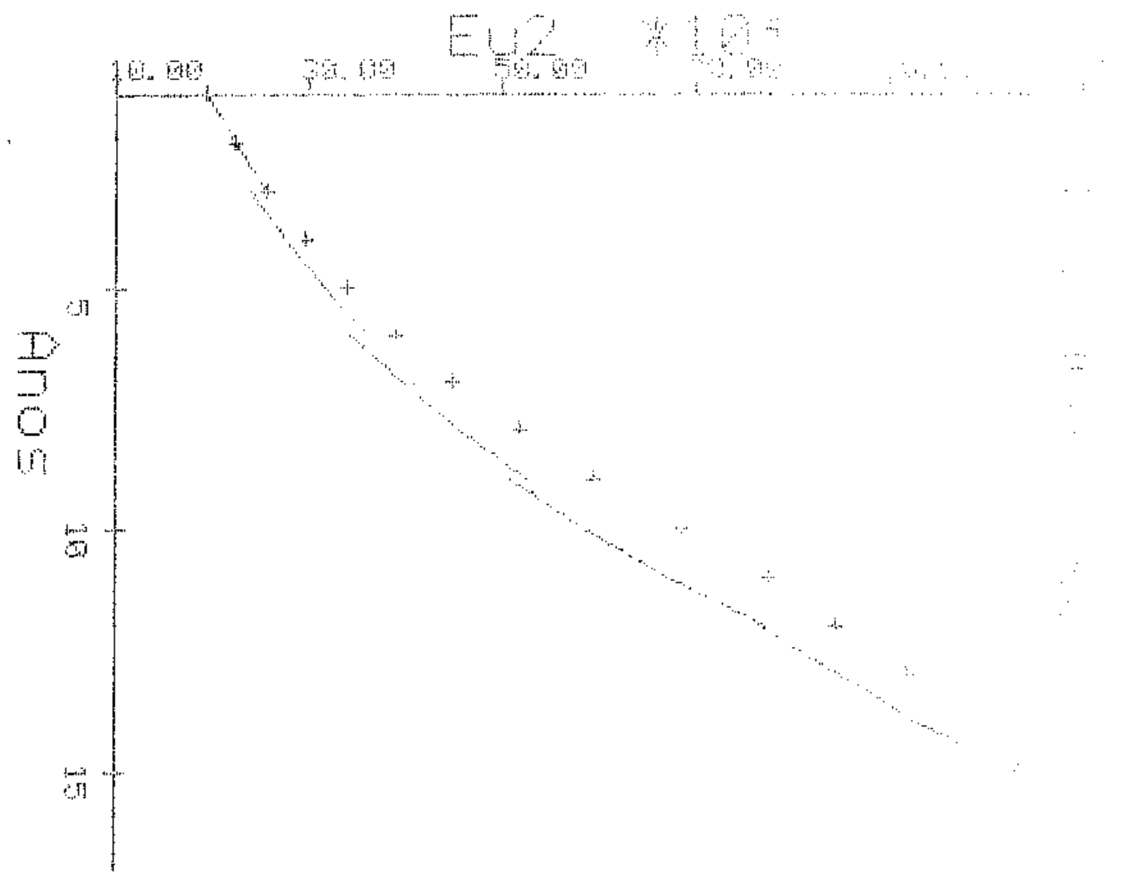

Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00

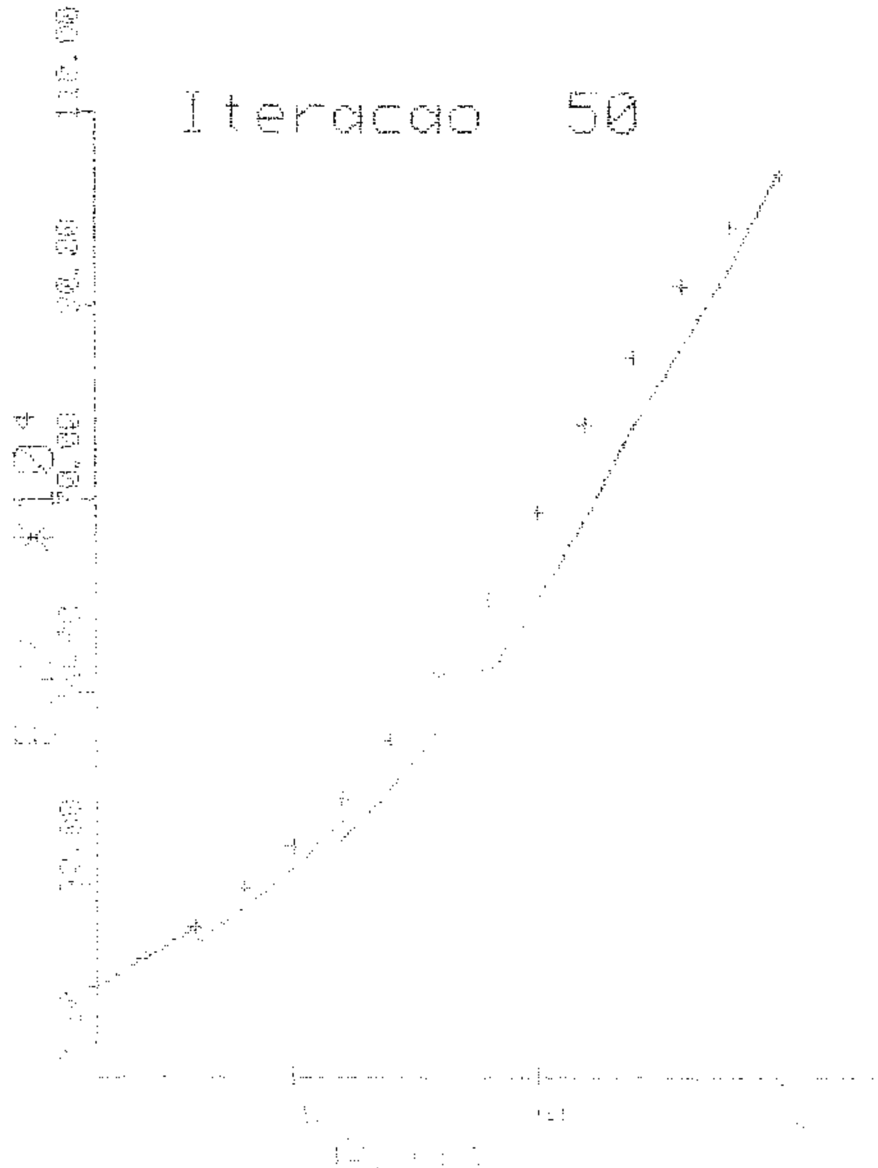

Eu2 *10⁴
10.00
30.00
50.00

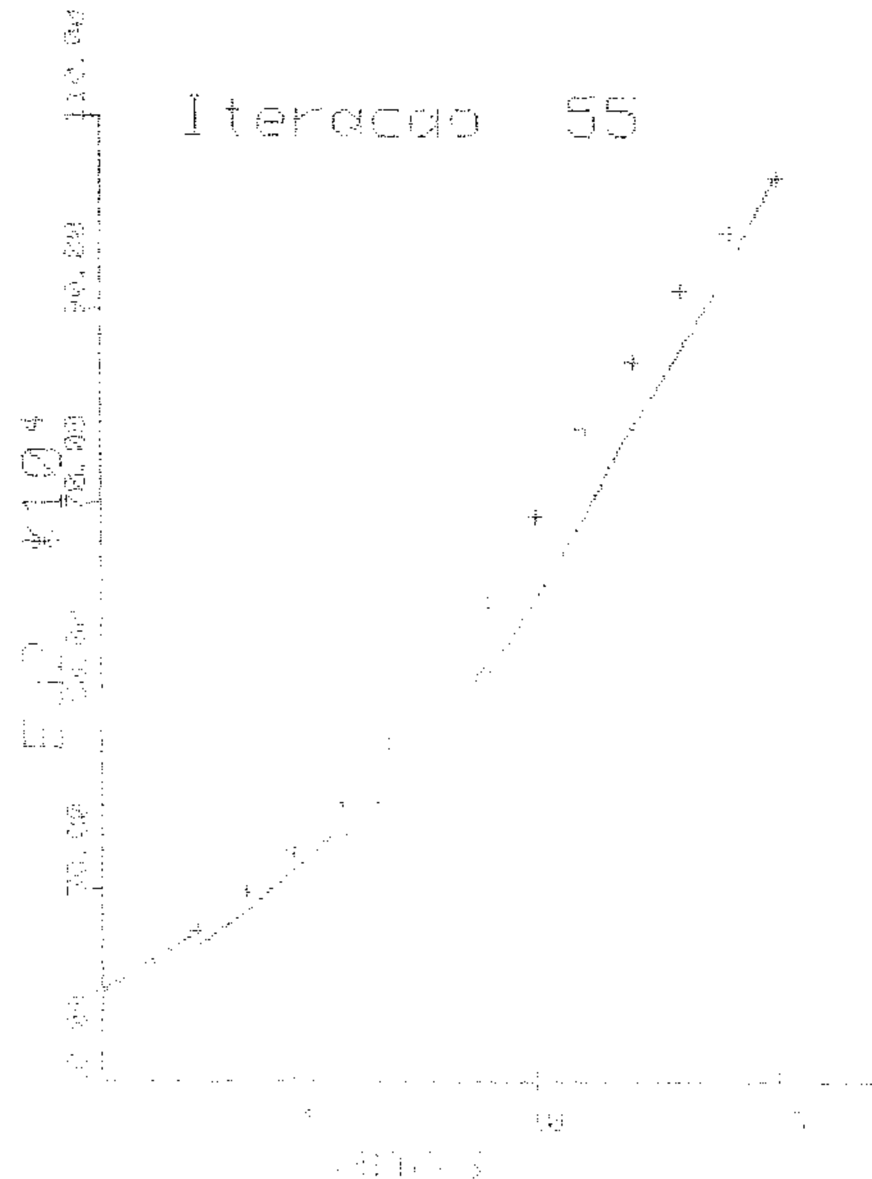

Iteracao 30
Eu2 *10^4

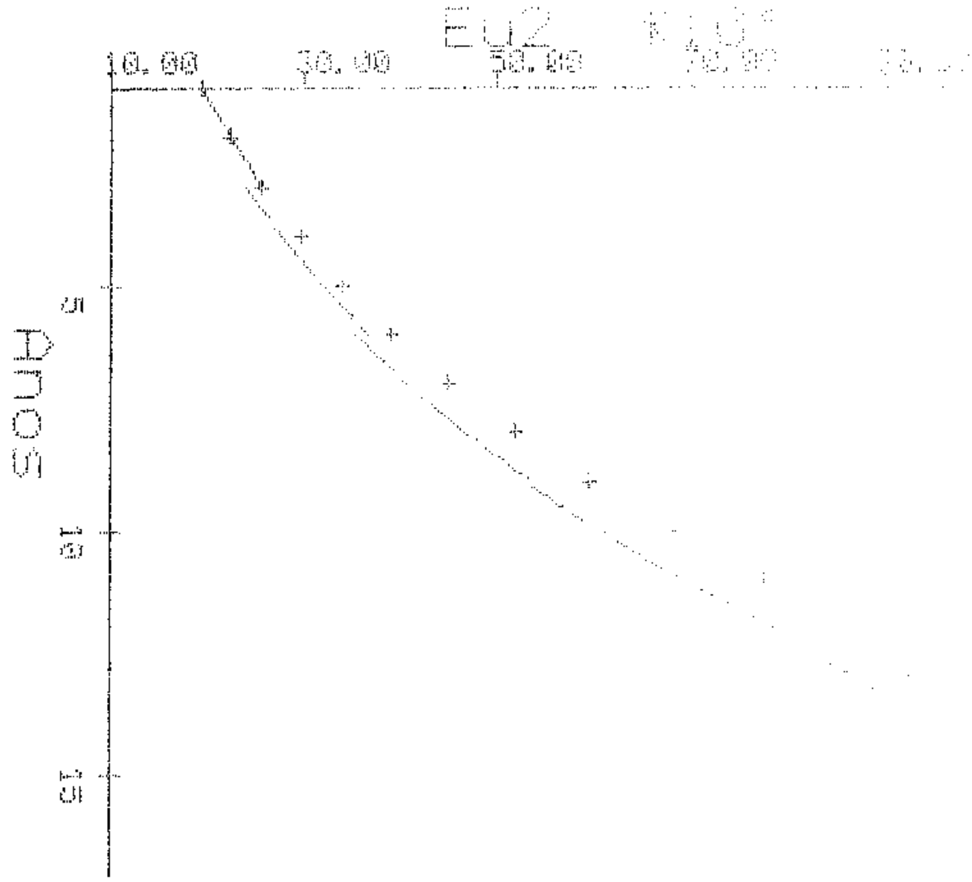

Iteracao 35
Eu2 *10^4

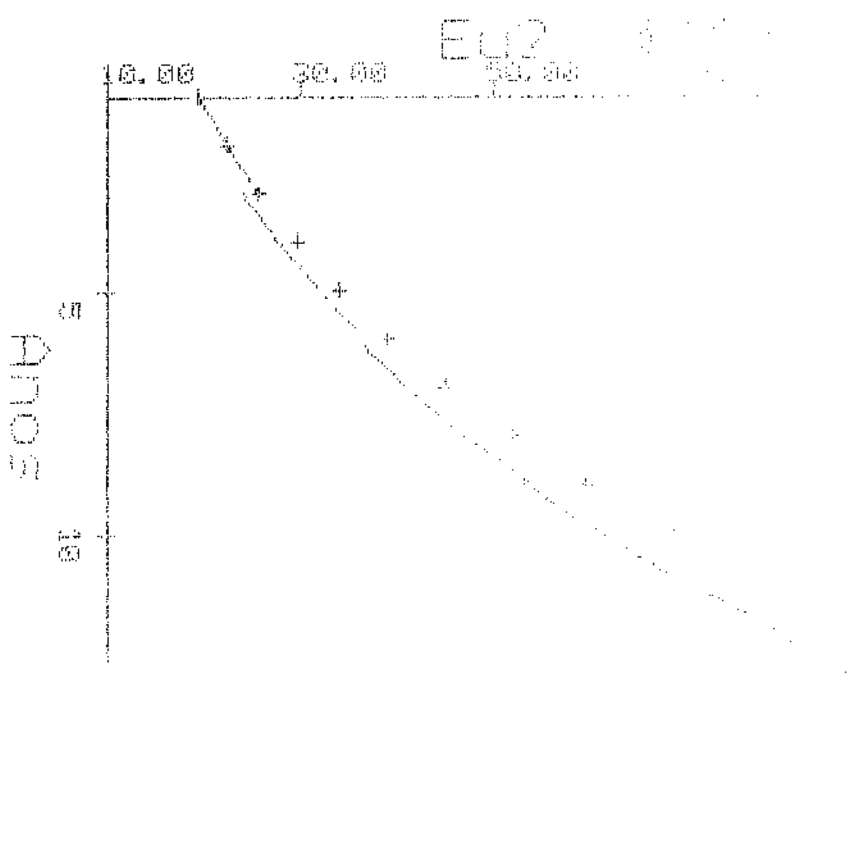

Eu2
10.00
30.00
50.00

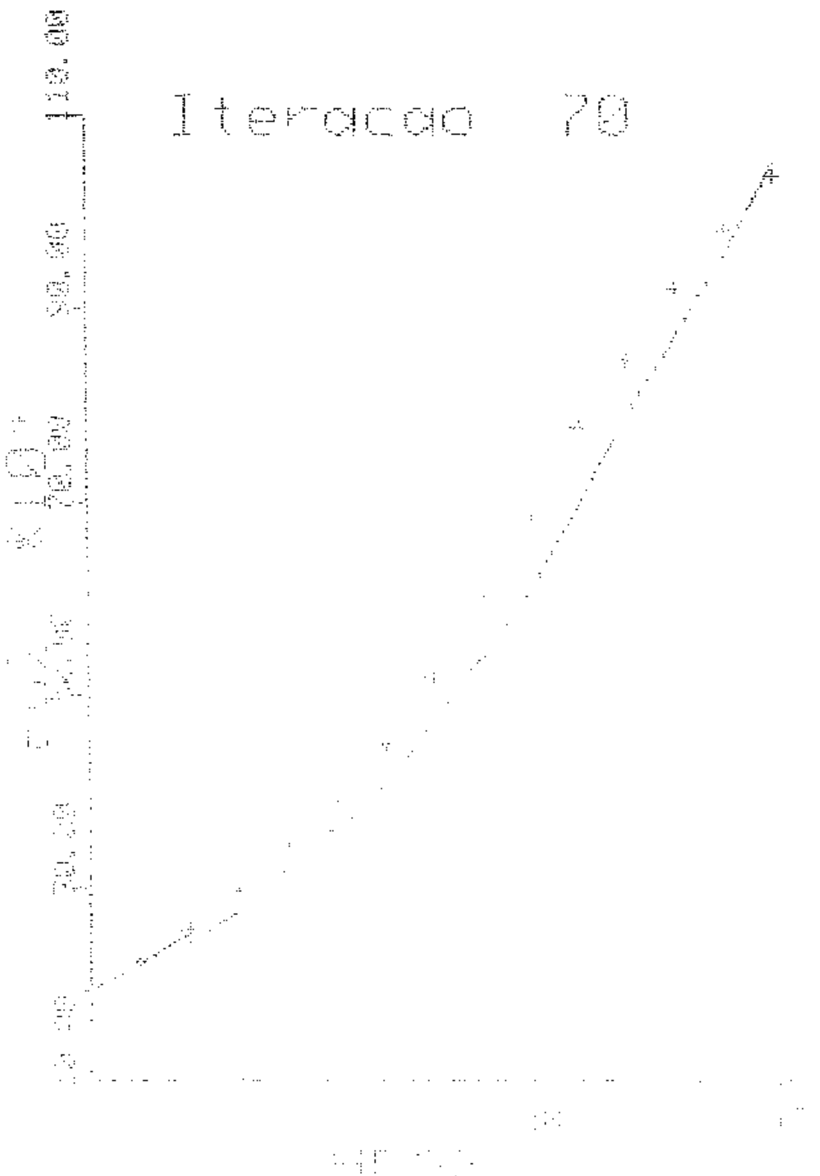

Eu2
10.00
30.00
50.00

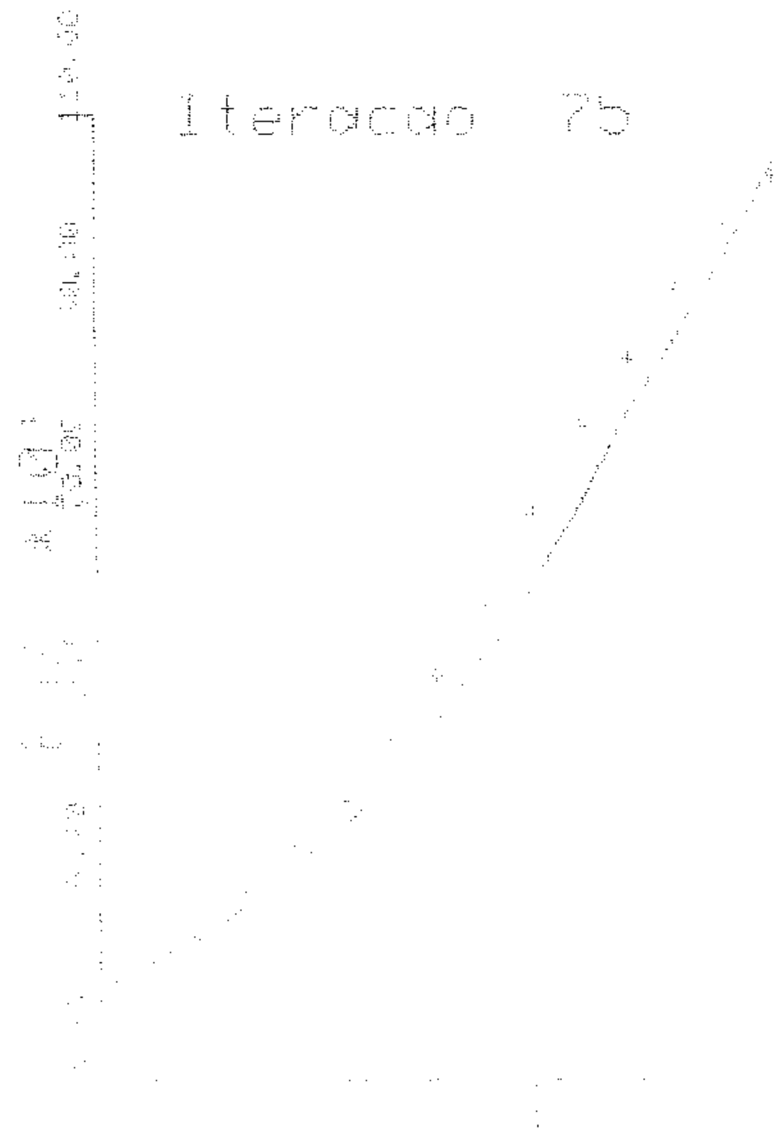

Iteracao 50
E.L2 $*10^4$
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00


Iteracao 55
E.L2 $*10^4$
10.00
30.00
50.00
70.00
90.00
110.00

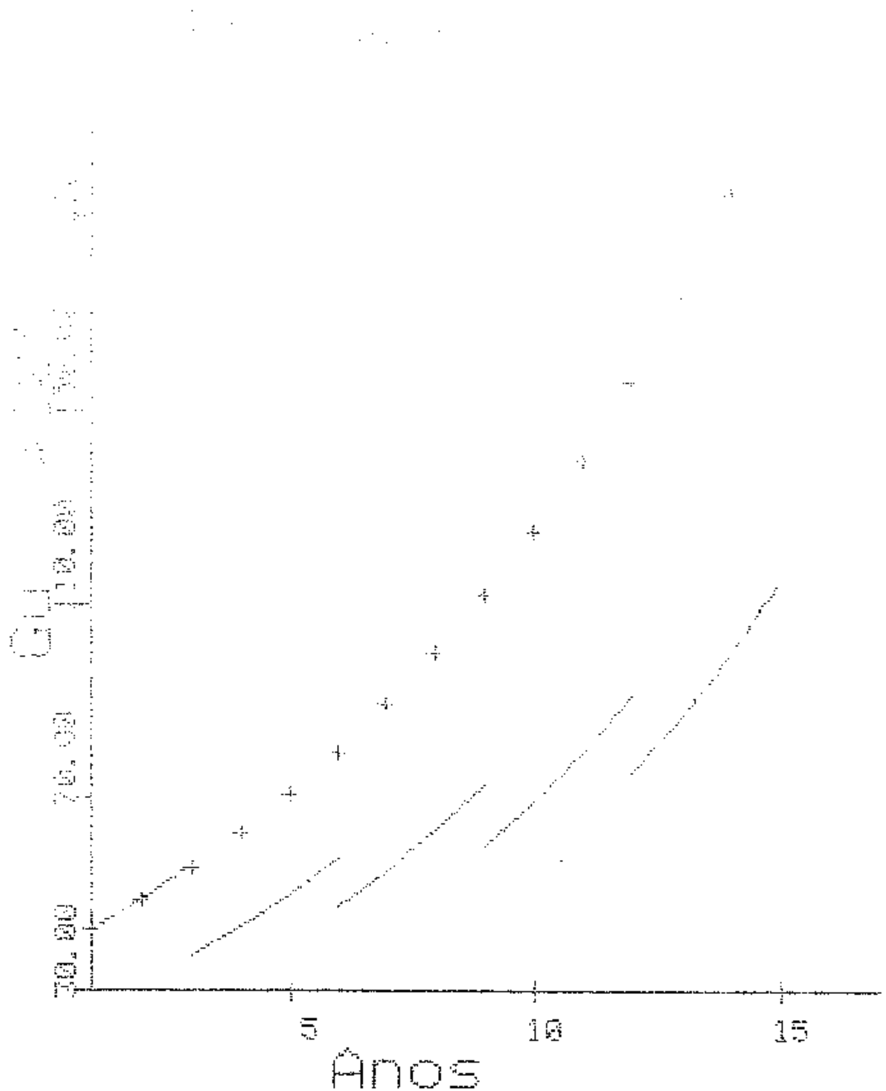

Eu2
10.00
30.00
50.00


Eu2
10.00
30.00
50.00

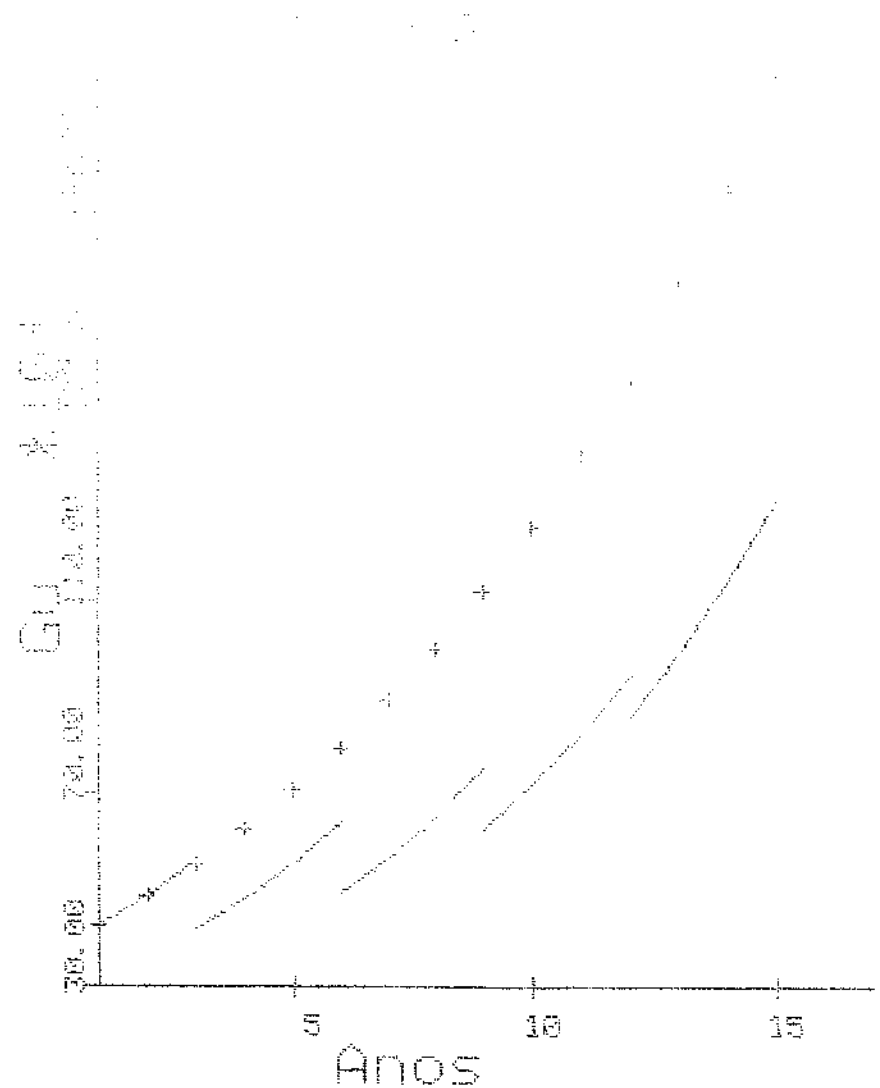

Iteracao 70
110.00
90.00
70.00


Iteracao 75

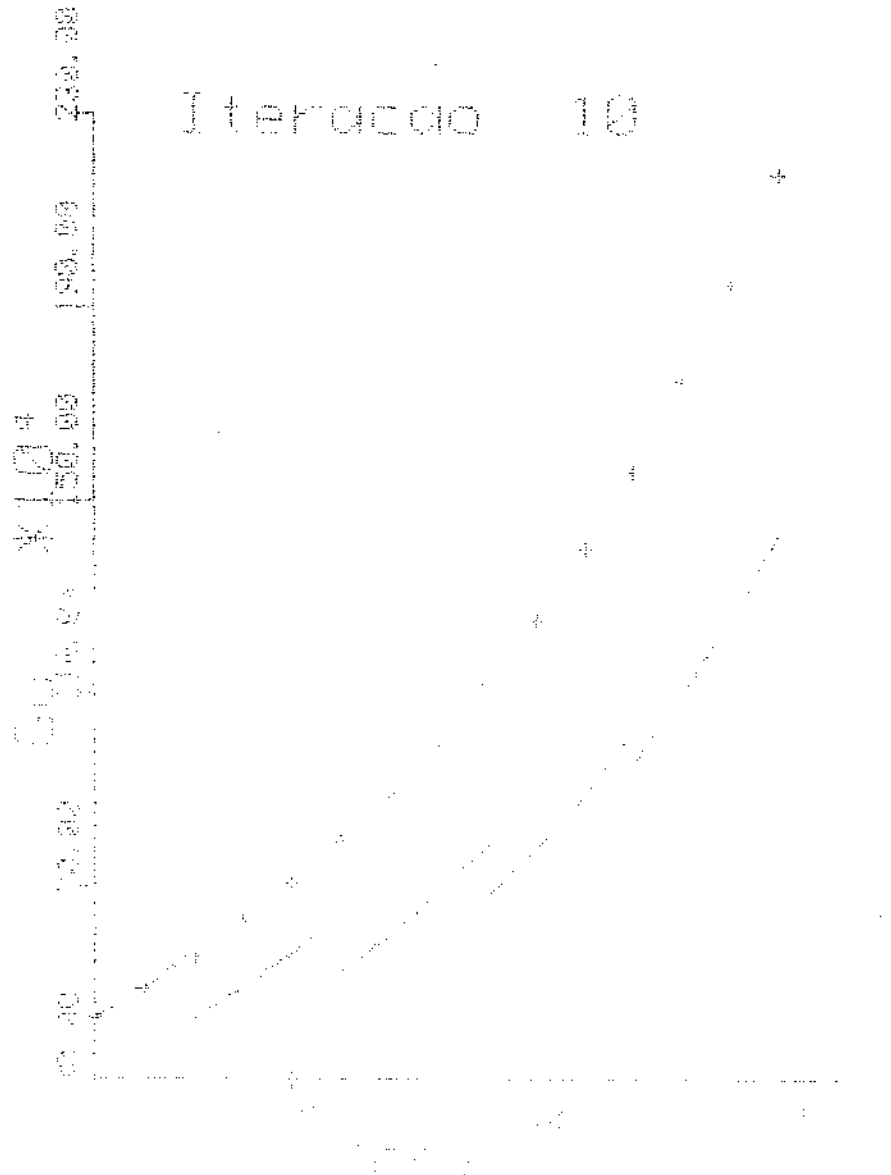

10
15
Anos

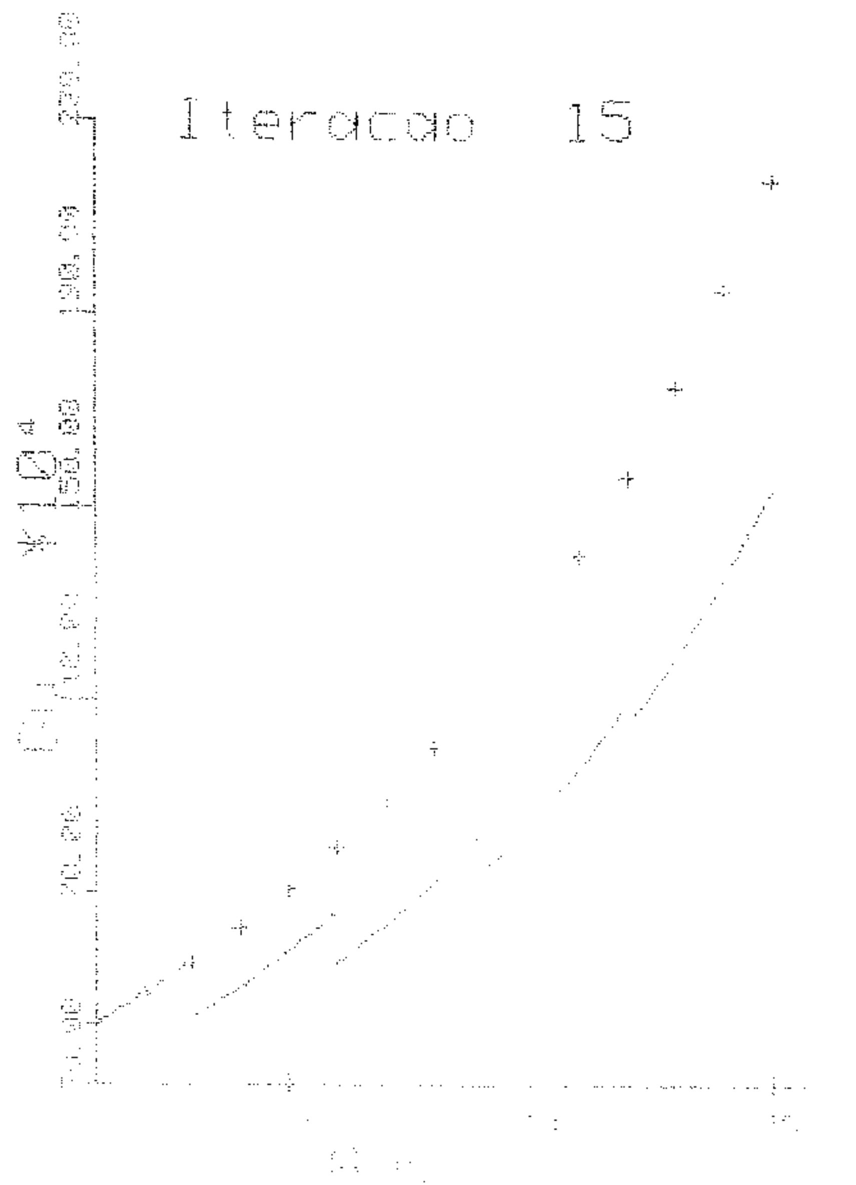


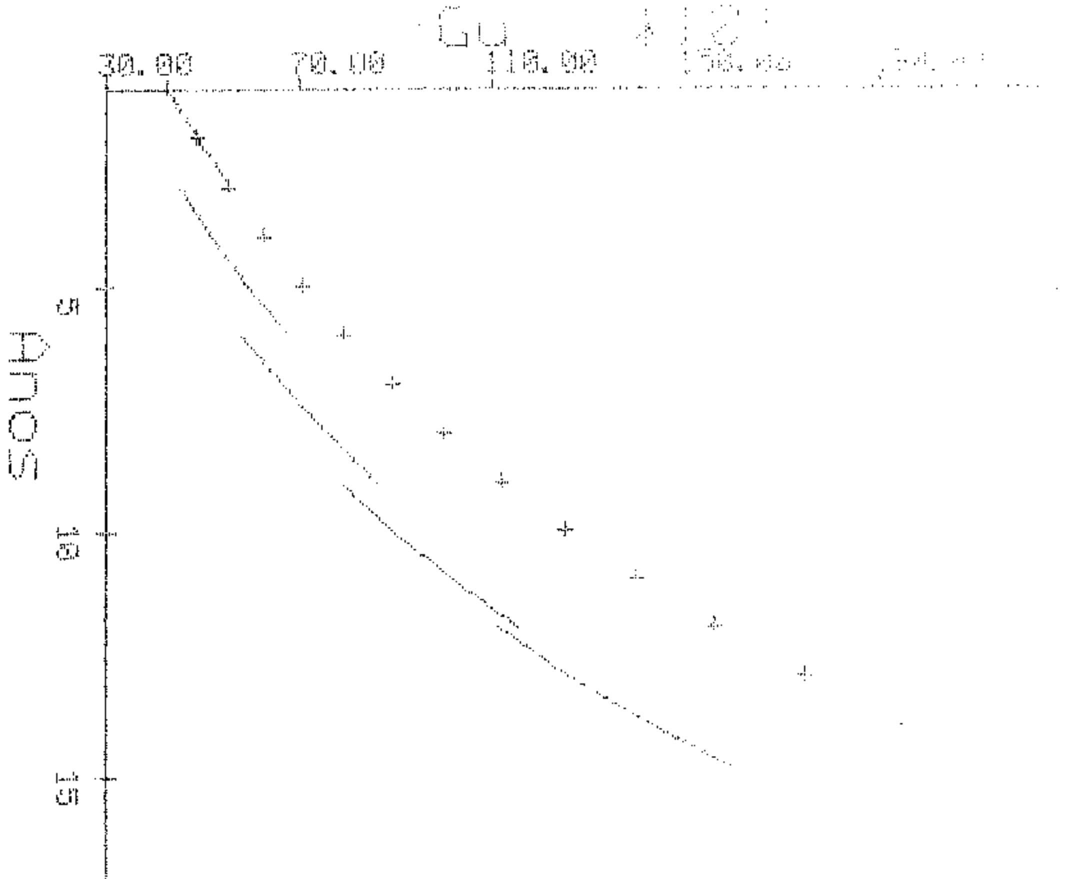
GU
30.00
70.00
110.00
5
10
15
Anos

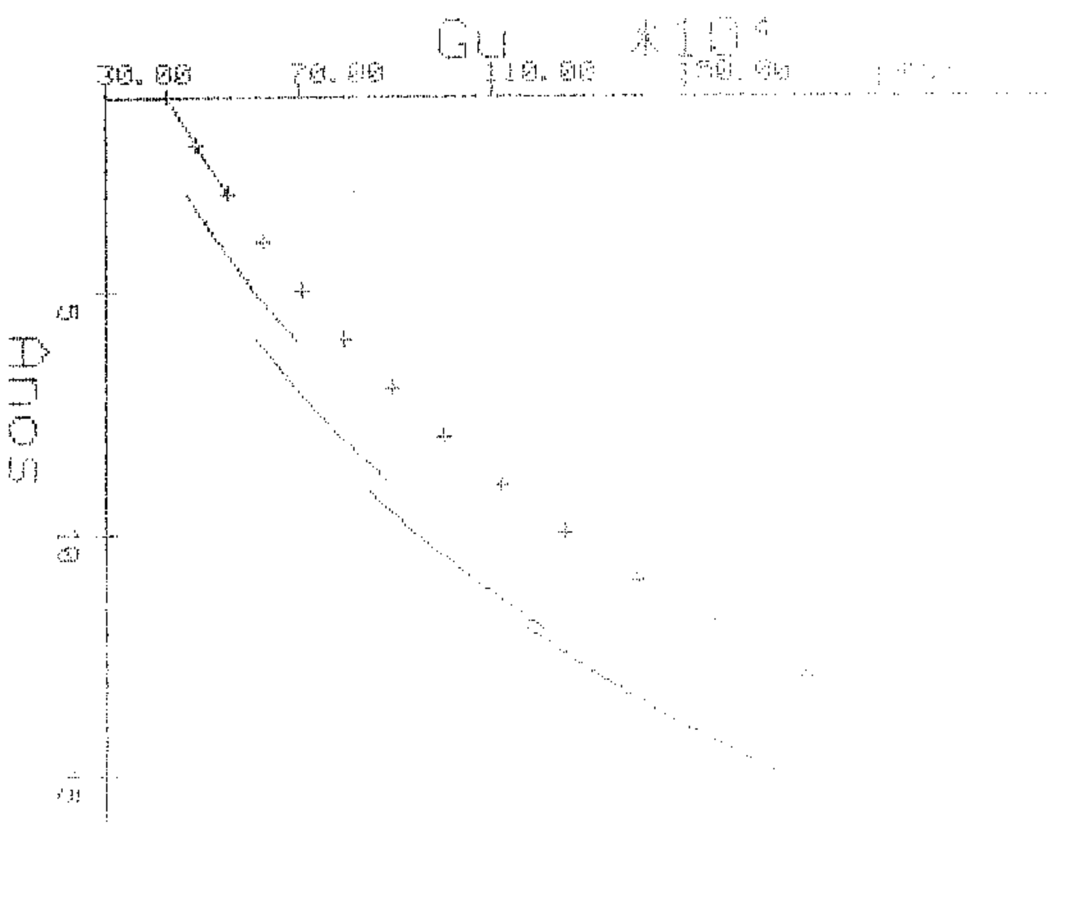


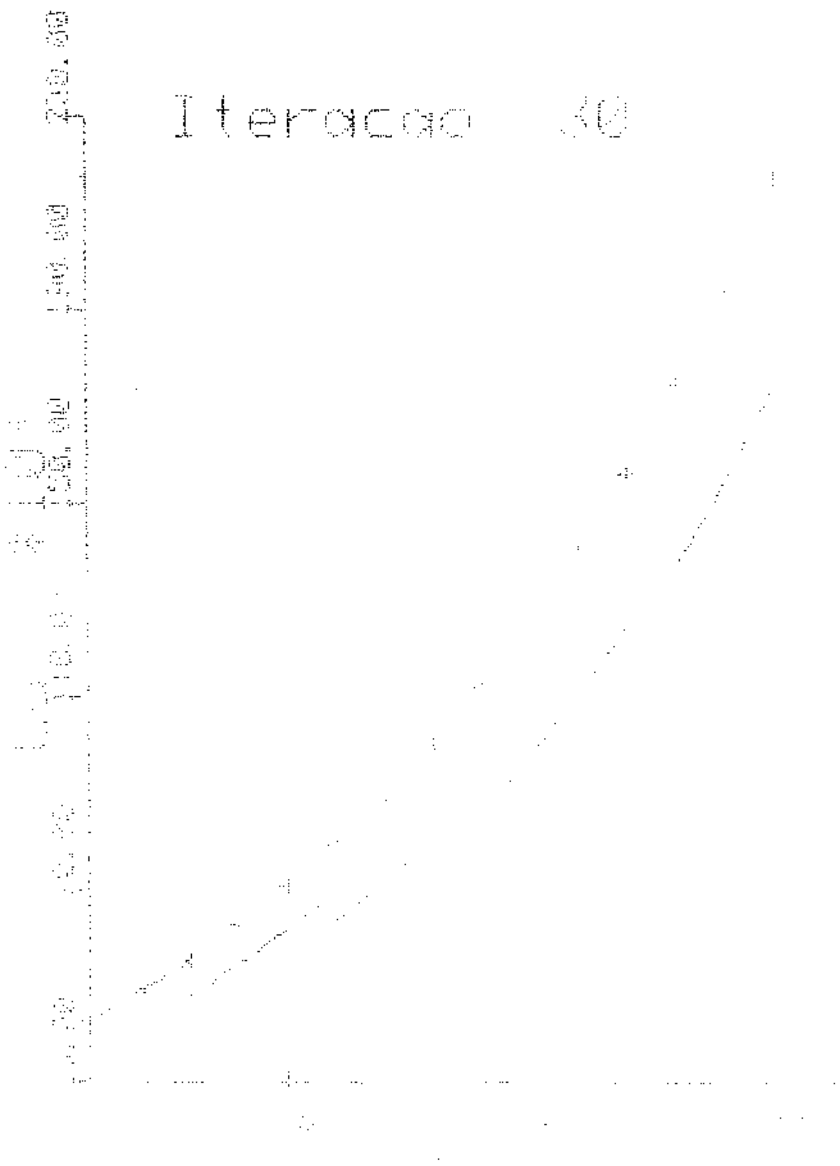
GU
30.00
70.00
5
10
15
Anos

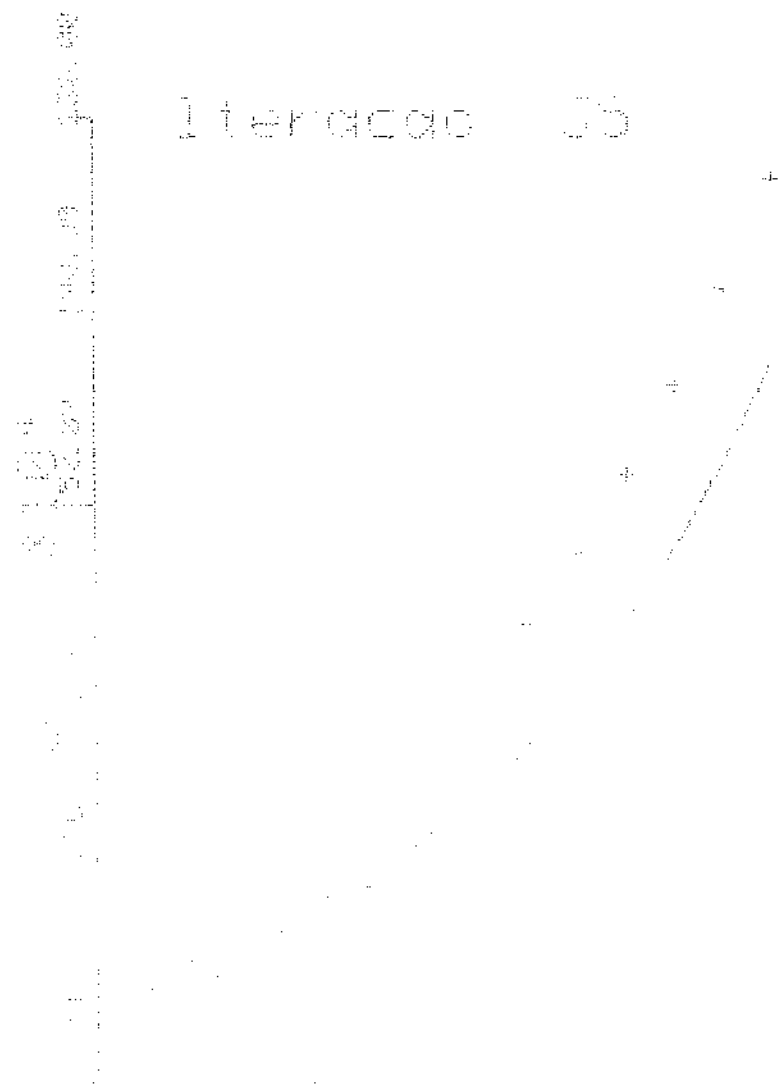

Iteracao 10
*10^4
50.00
150.00
190.00
230.00

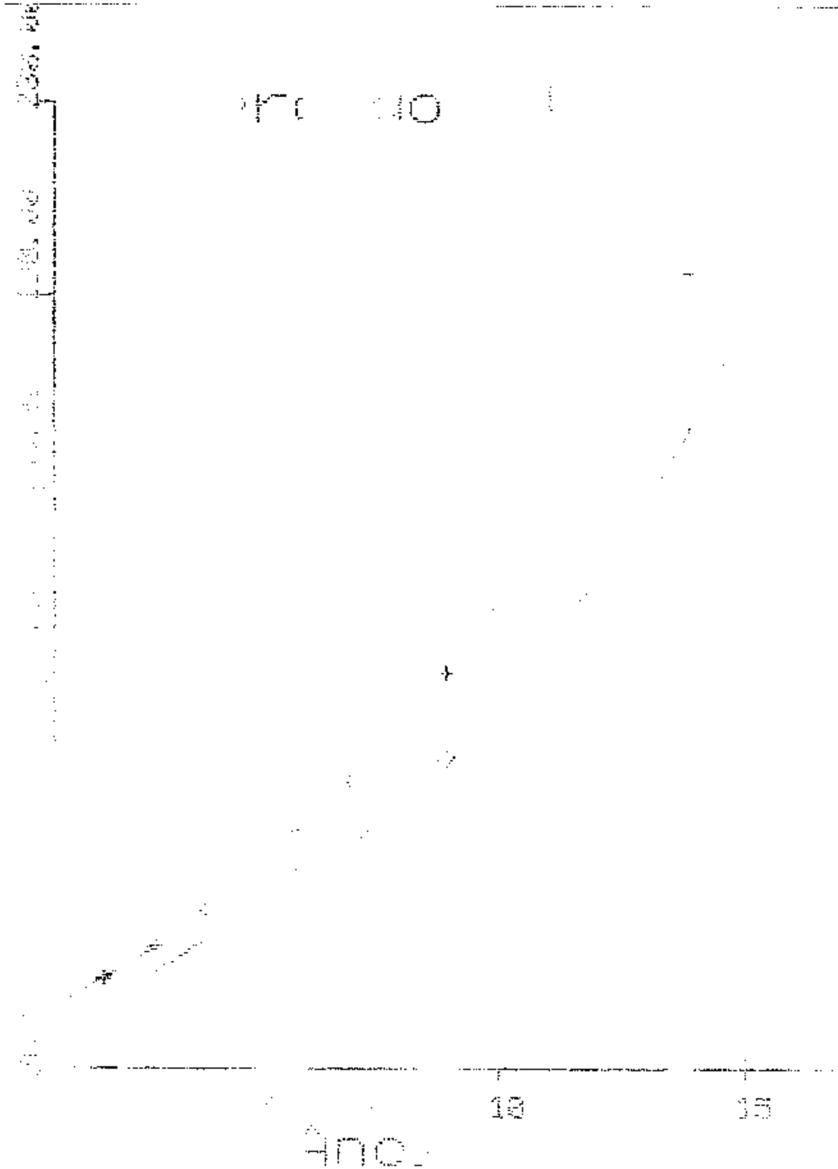

Iteracao 15
*10^4
150.00
190.00
230.00

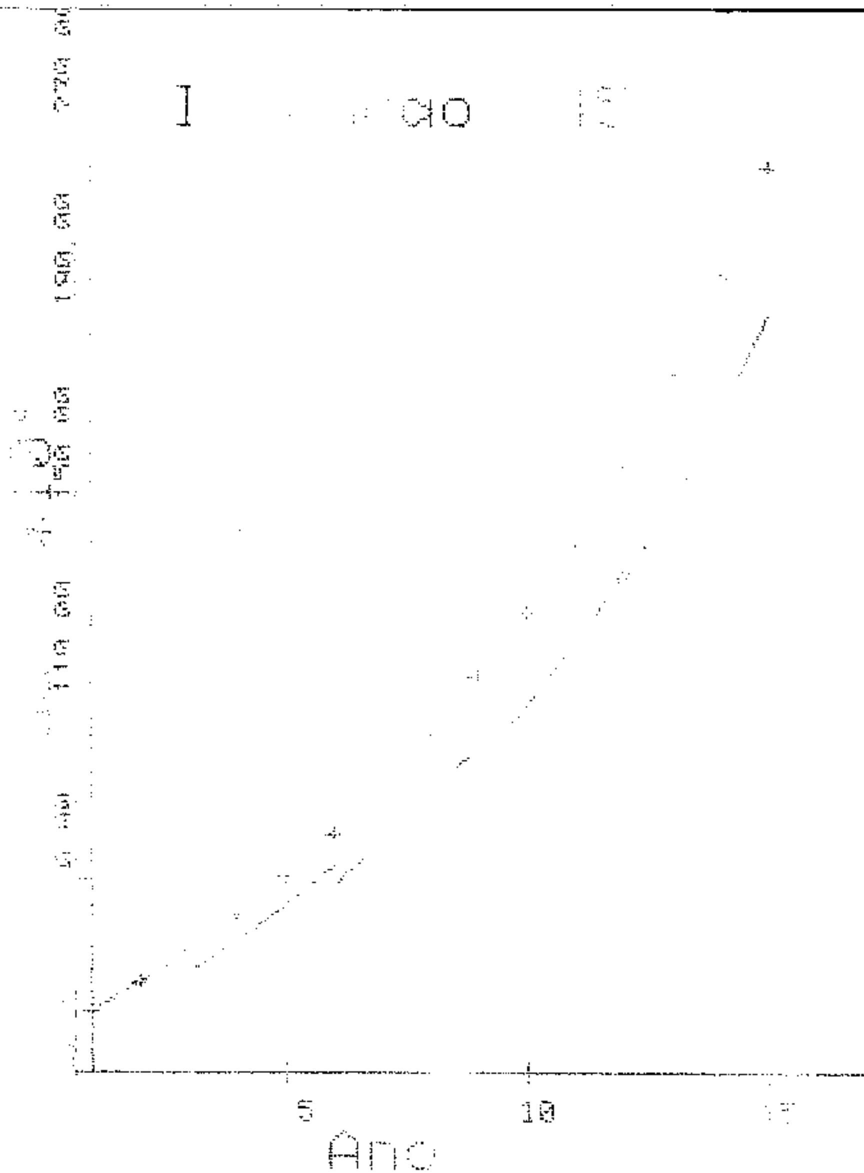

30.00
70.00
110.00
SOUH

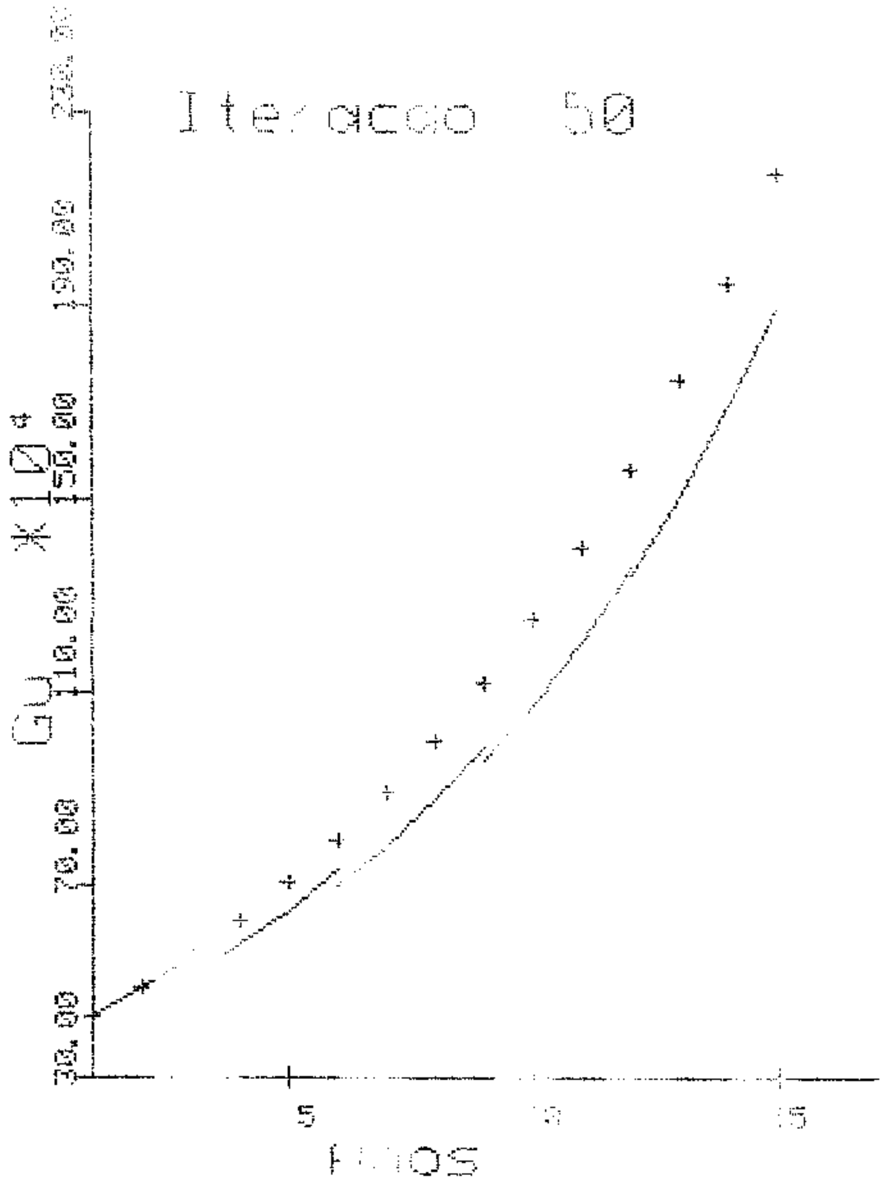

30.00
70.00
110.00
SOUH

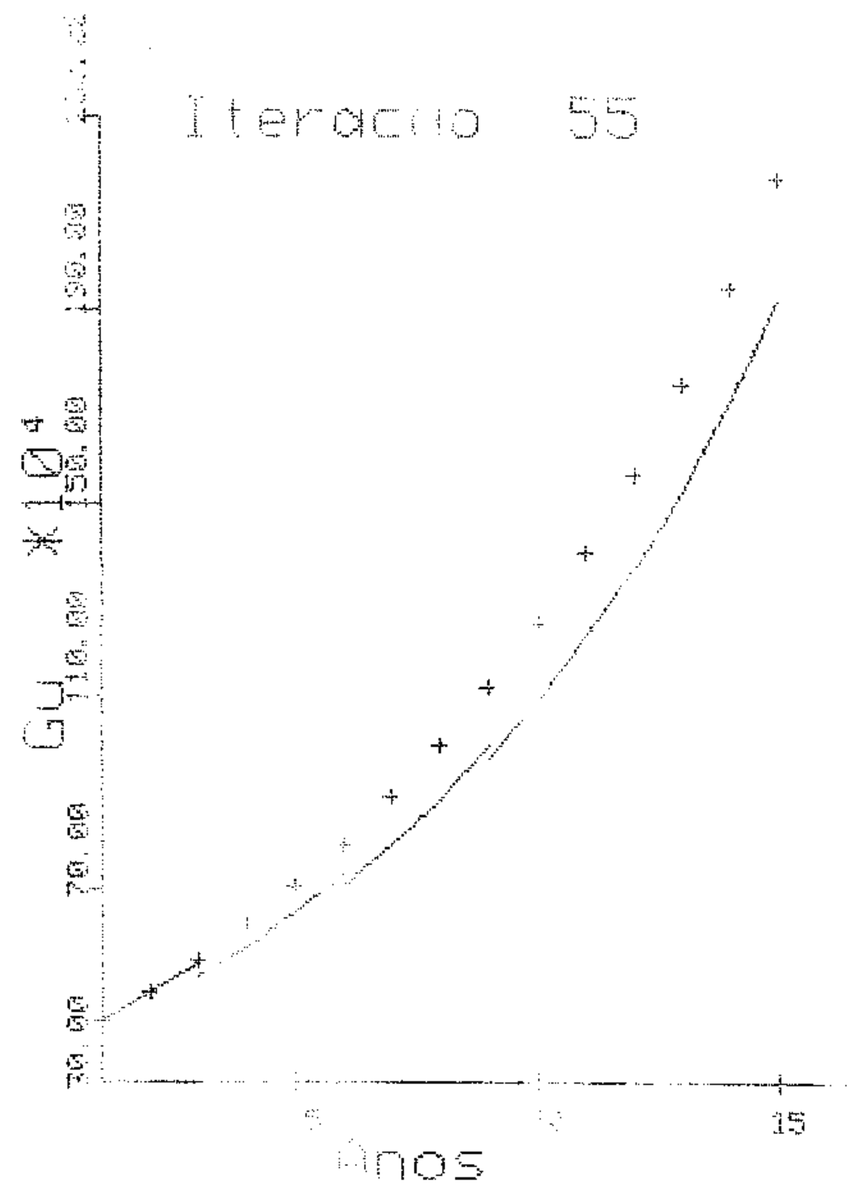

Iteracao 30


Iteracao 35


10
15
Ano

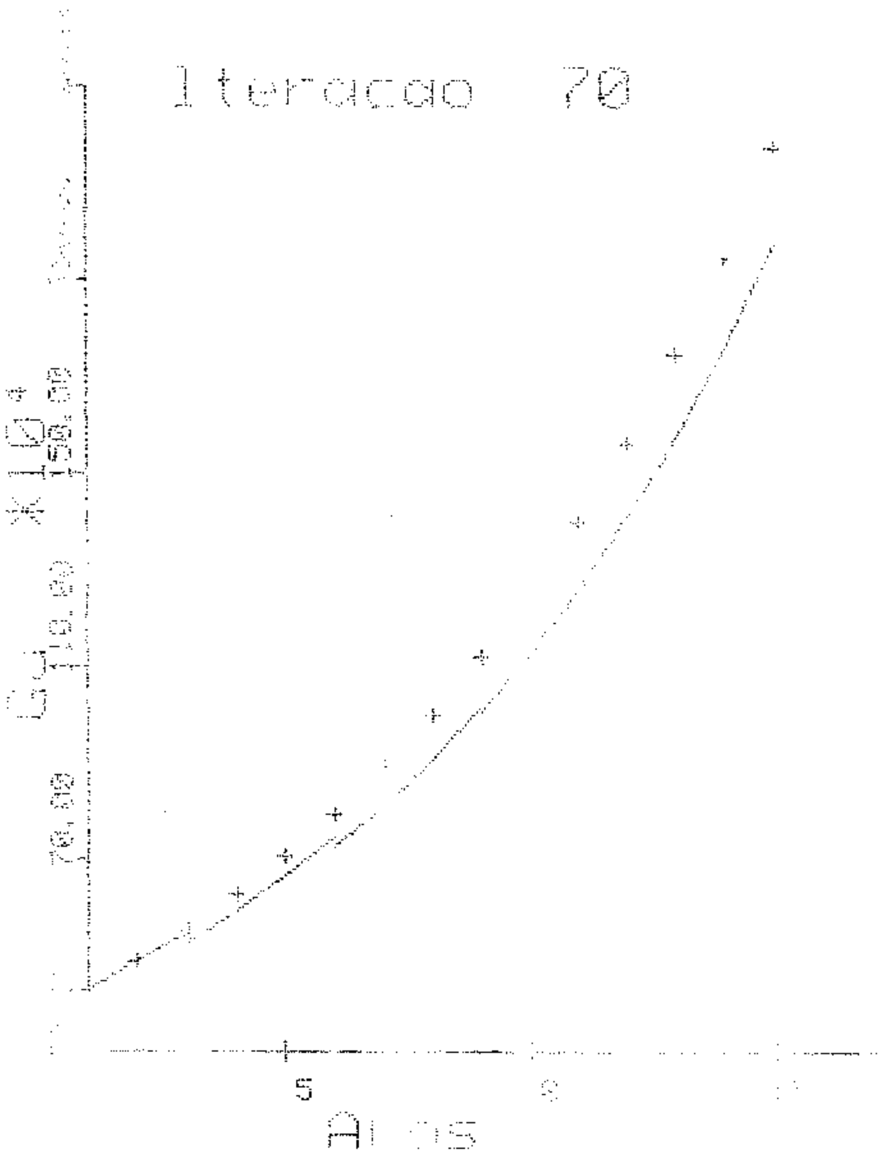

5
10
Ano

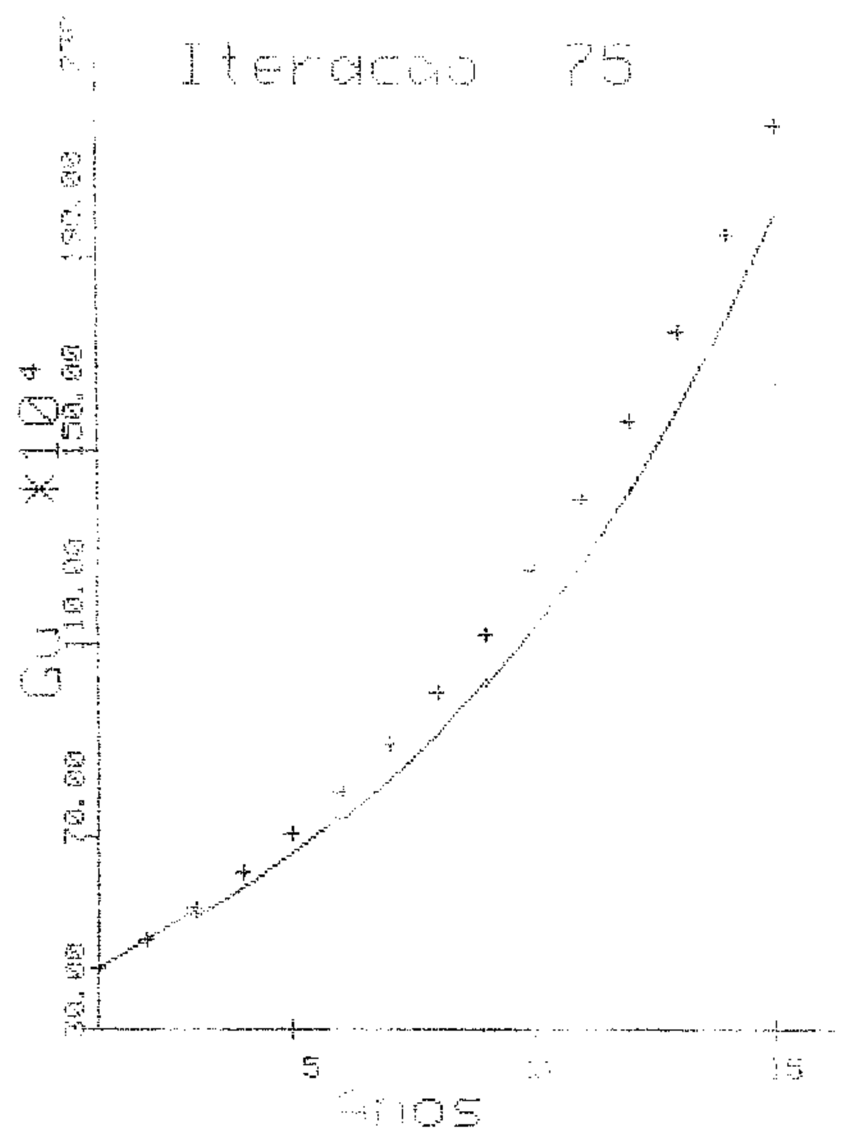

Iteracao 50
Gu *10^4
30.00
70.00
110.00
150.00
190.00
230.00
5
10
15
Anos

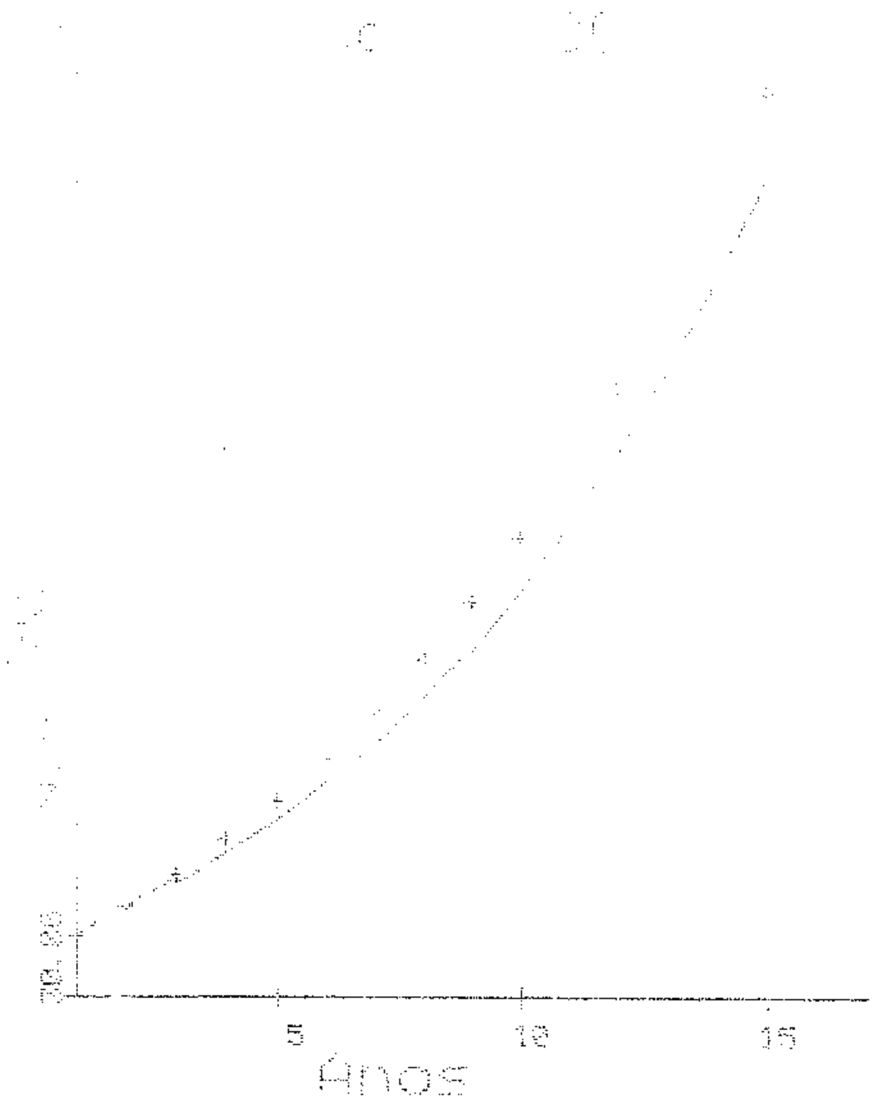

Iteracao 55
Gu *10^4
30.00
70.00
110.00
150.00
190.00
5
10
15
Anos


30.00
70.00
10
15

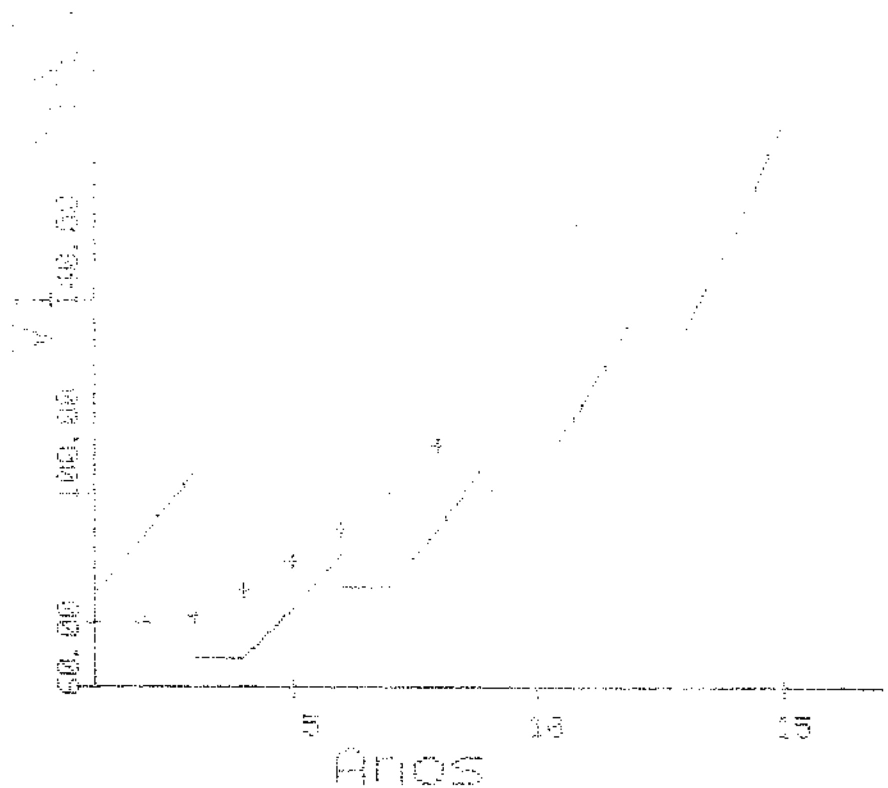

30.00
10
15


Iteracao 70
Gu *10^4
70.00
110.00
150.00
5
Anos

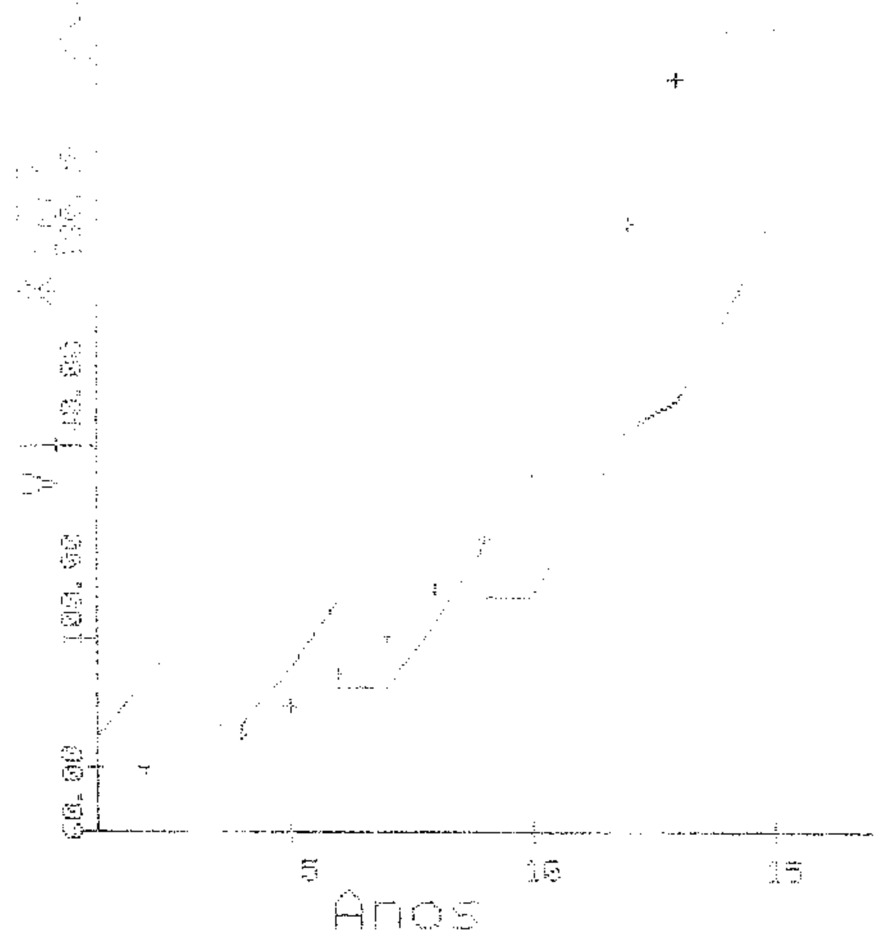

Iteracao 75
Gu *10^4
30.00
70.00
110.00
150.00
190.00
5
15
Anos



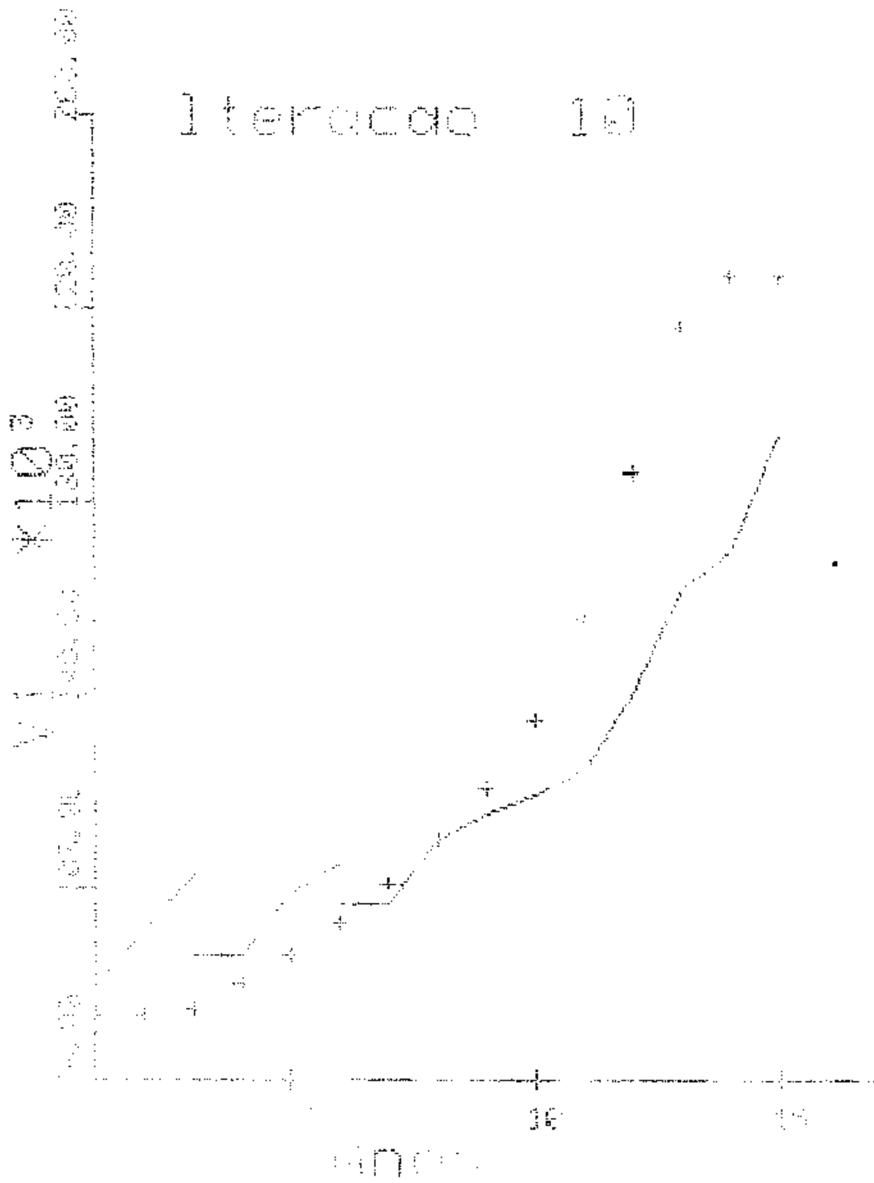
39.08
5
10
15
Anos

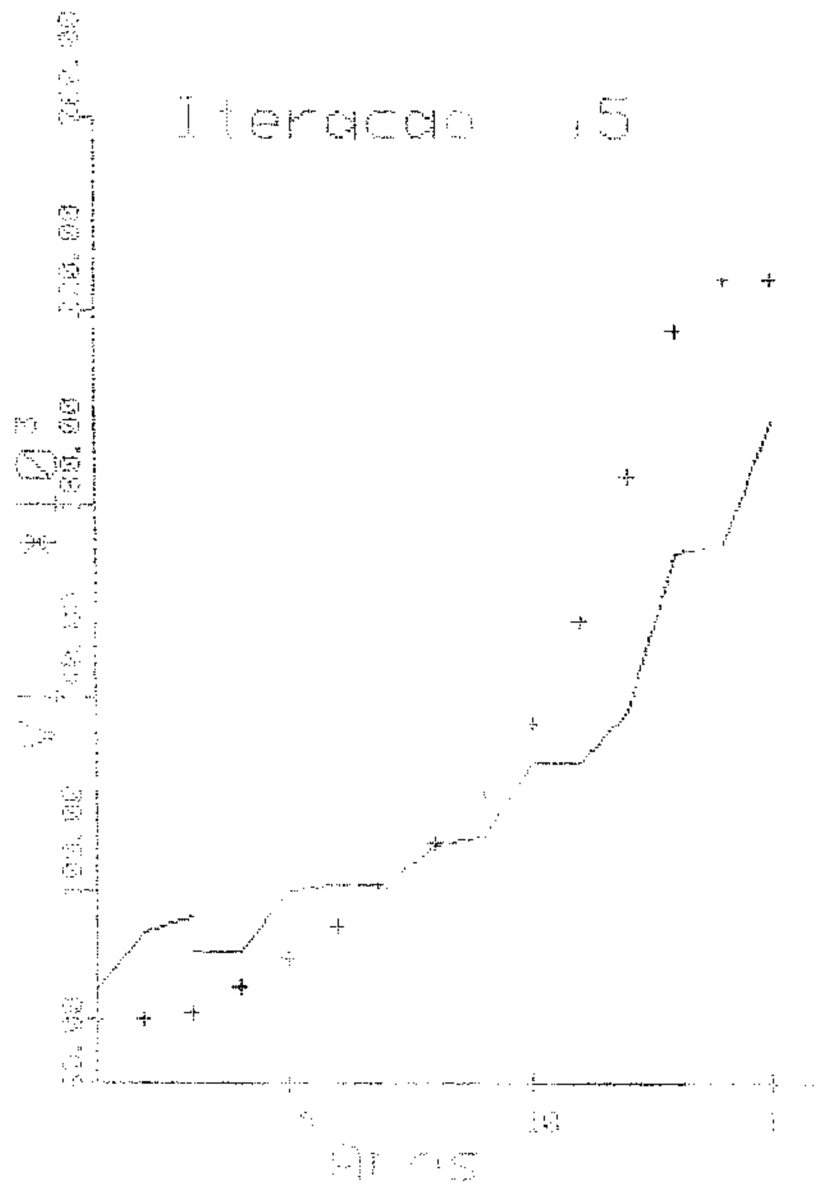


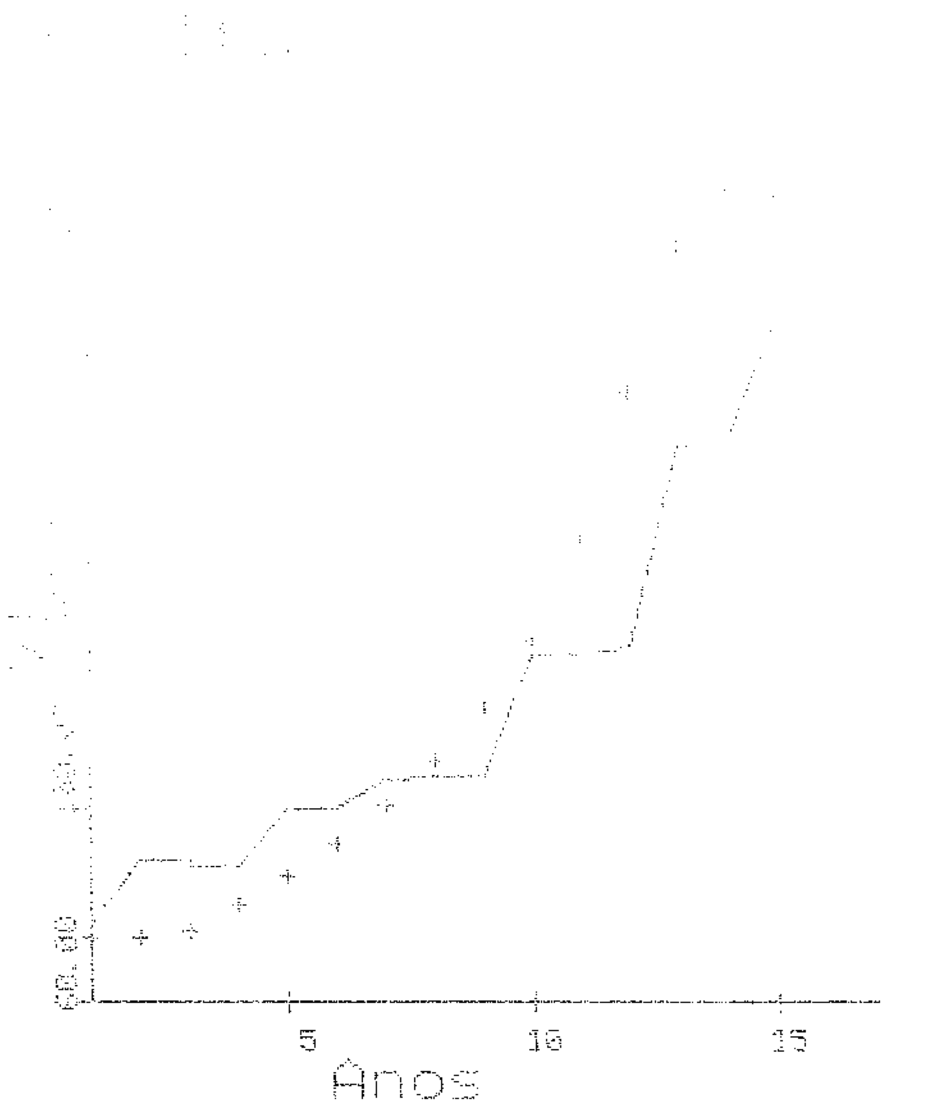
V
60.00
100.00
5
10
15
Anos

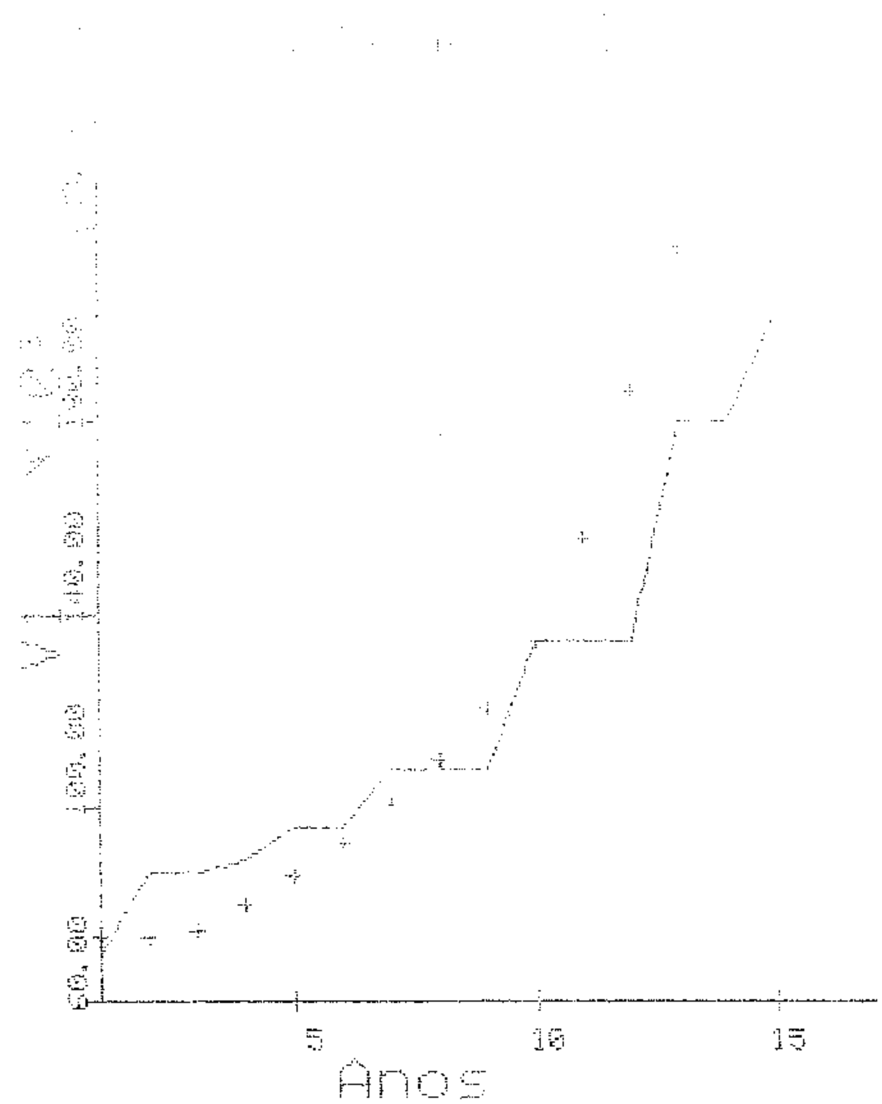


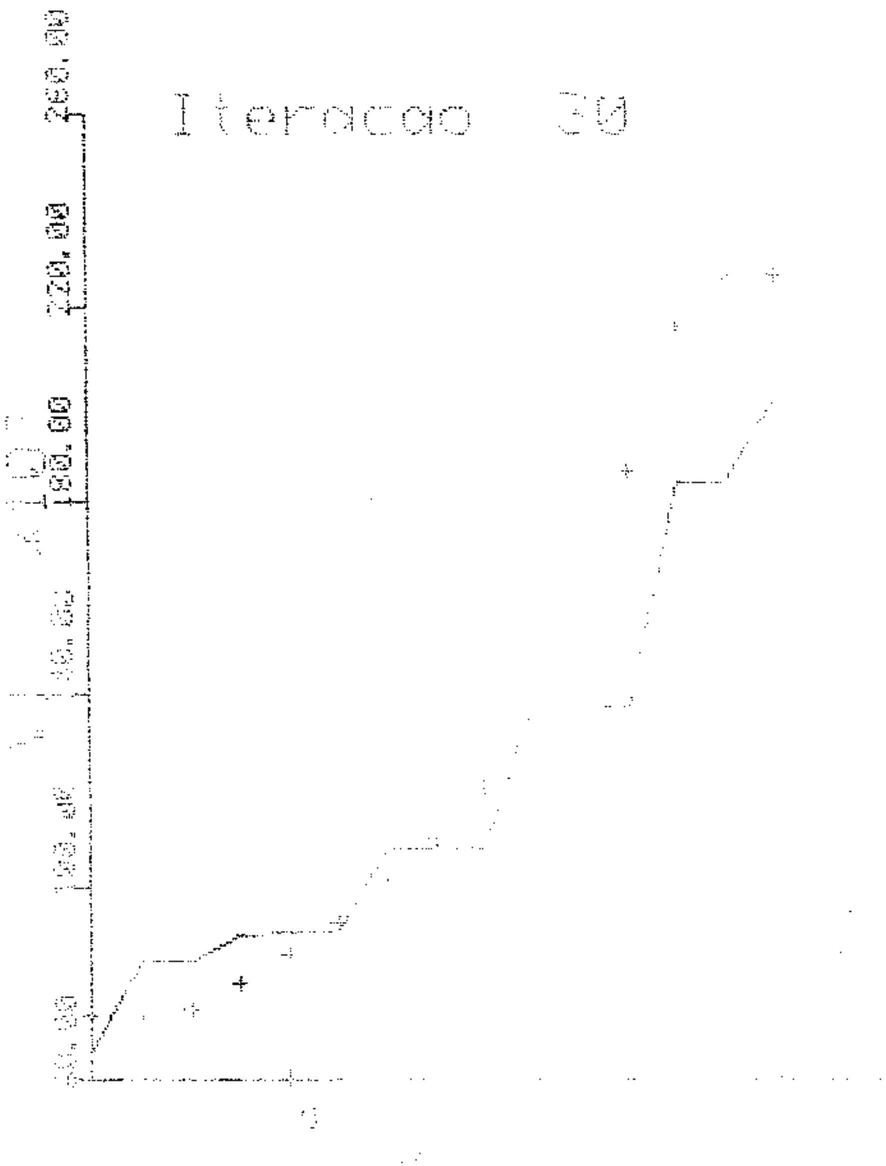
V
60.00
100.00
5
10
15
Anos


Iteracao 10
V1 *10³
Anos
10

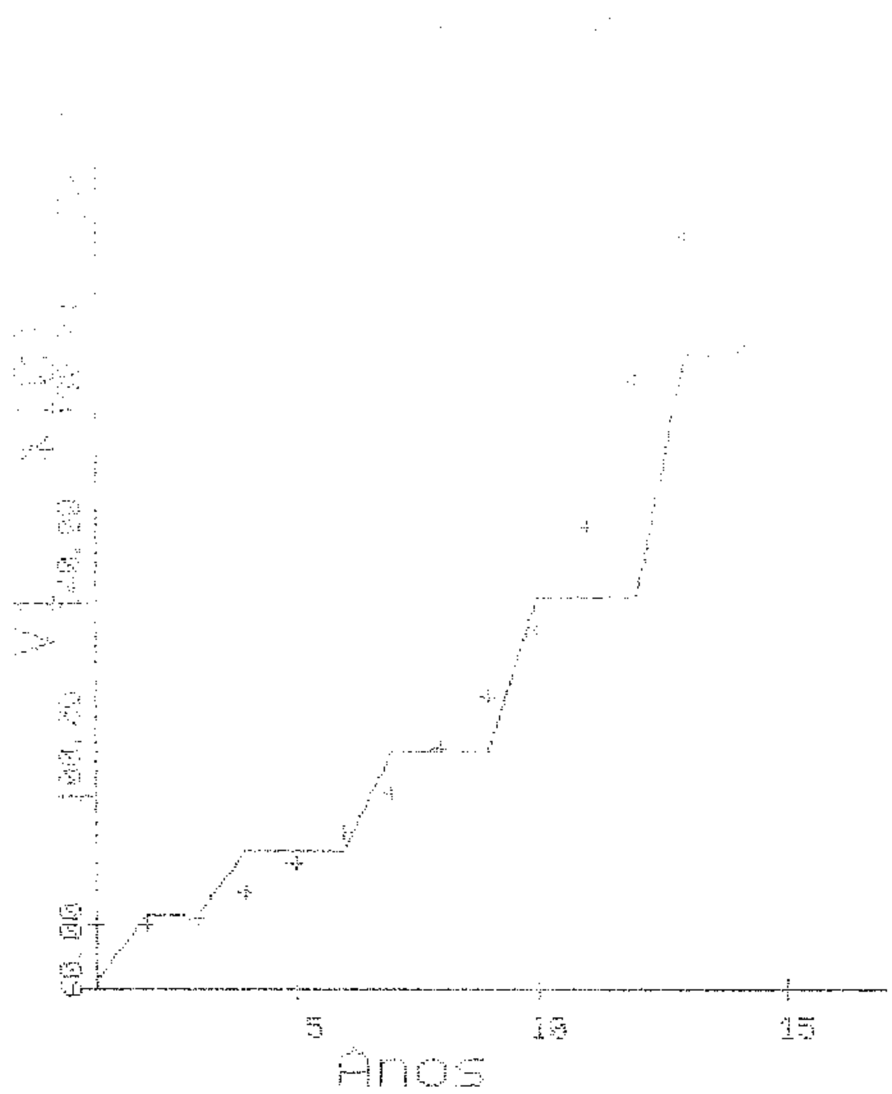

Iteracao 15
V1 *10³
Anos
10


60.00
5
10
15
Anos

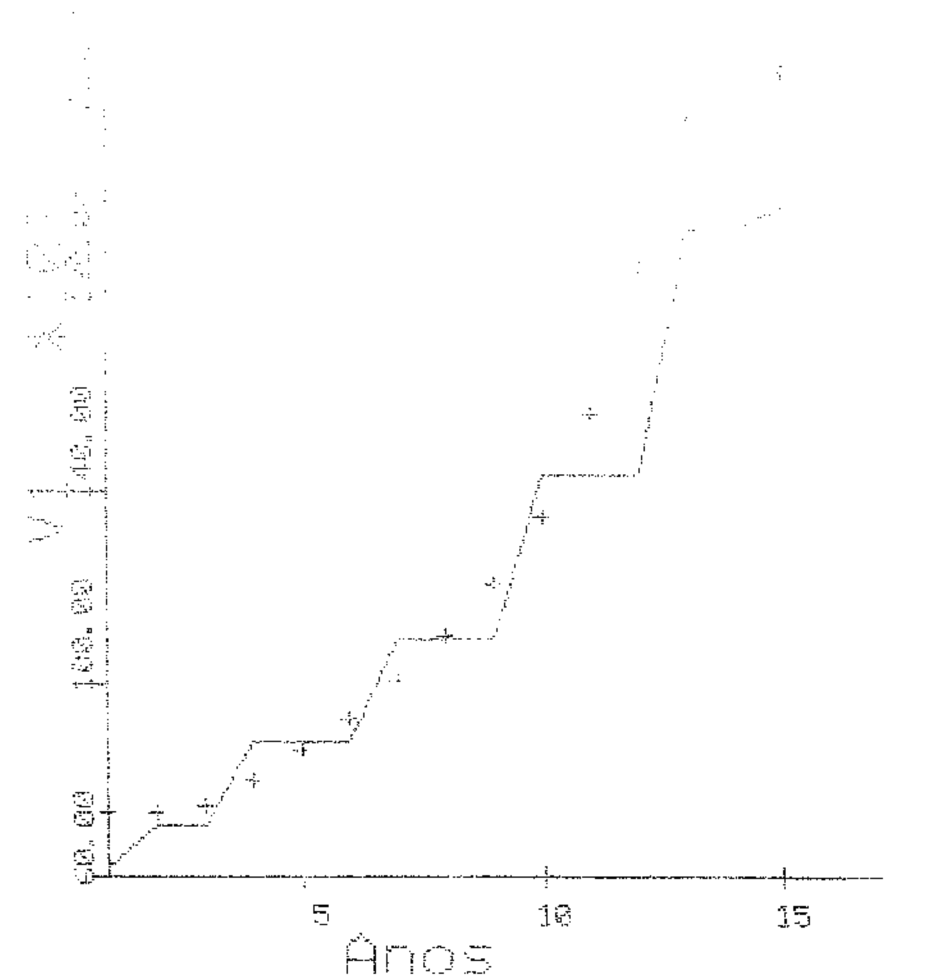

60.00
100.00
140.00
5
10
15
Anos


Iteracao 30
260.00
220.00
180.00
100.00
$\times 10^{2}$

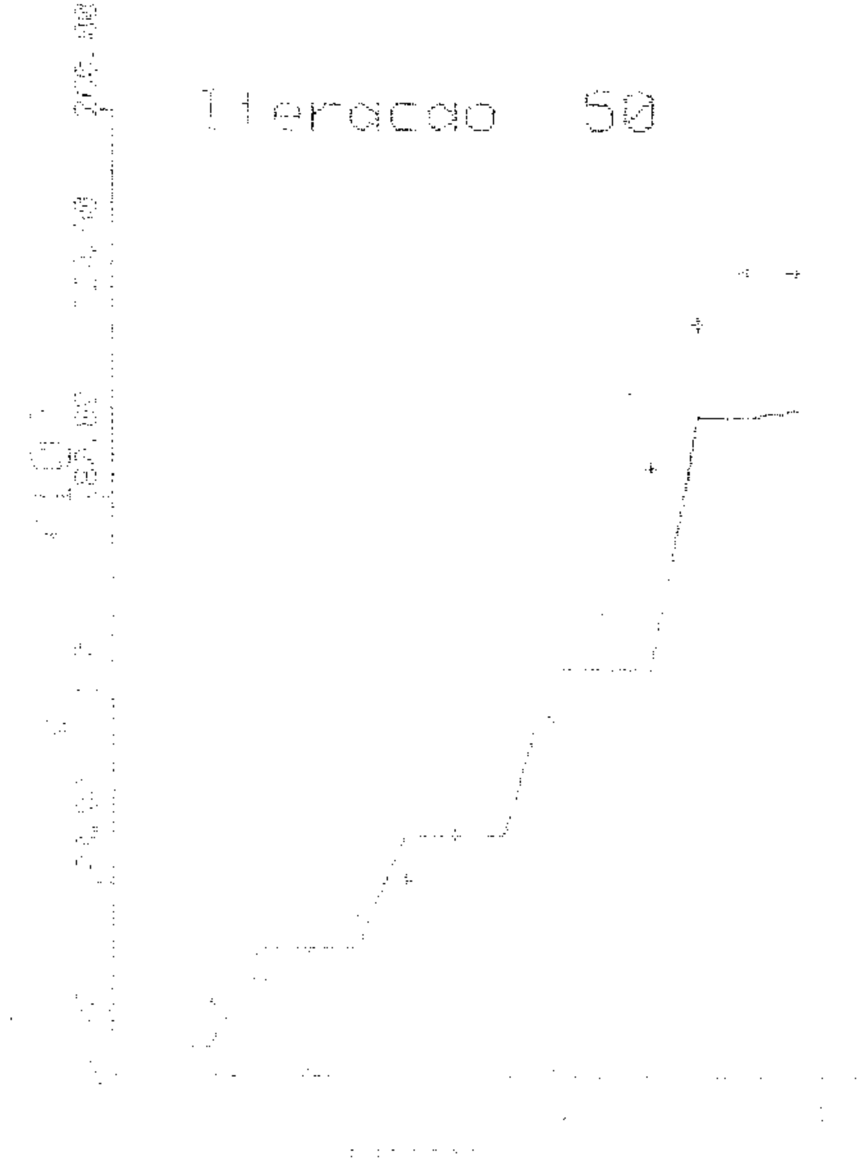

Iteracao 35
260.00
180.00
$\times 10^{2}$

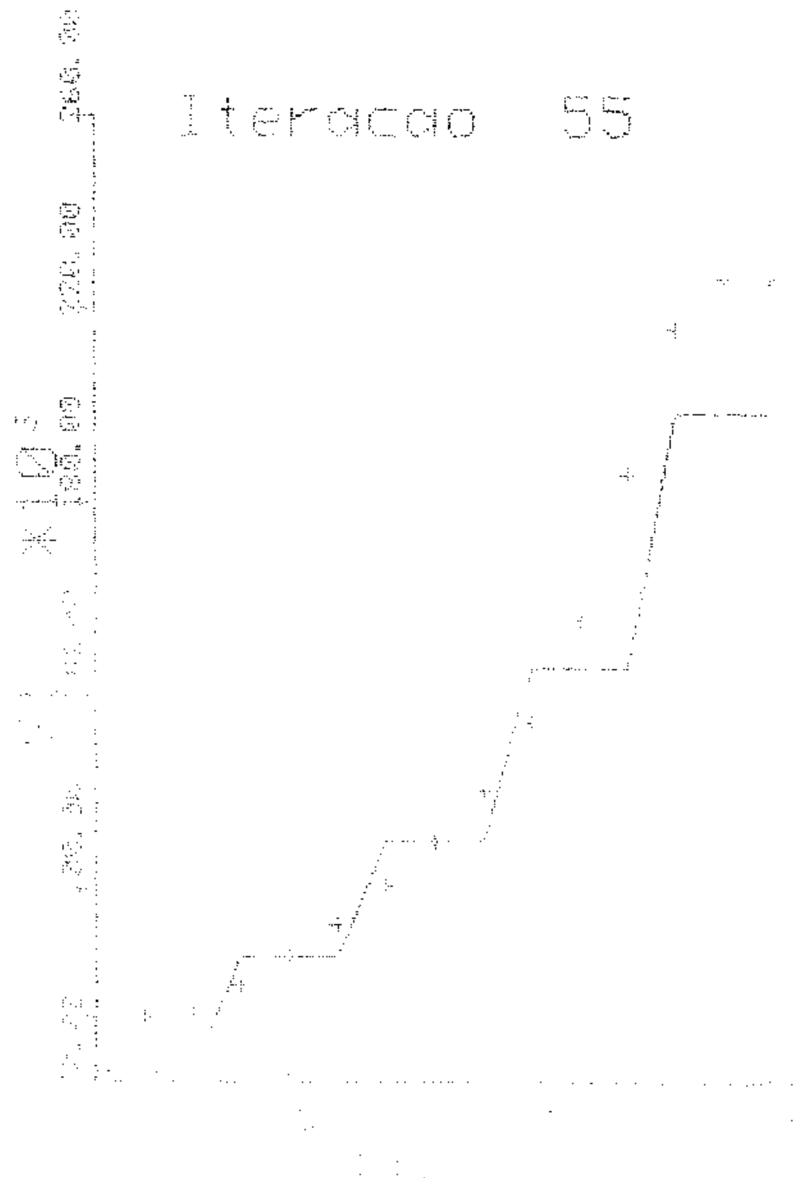


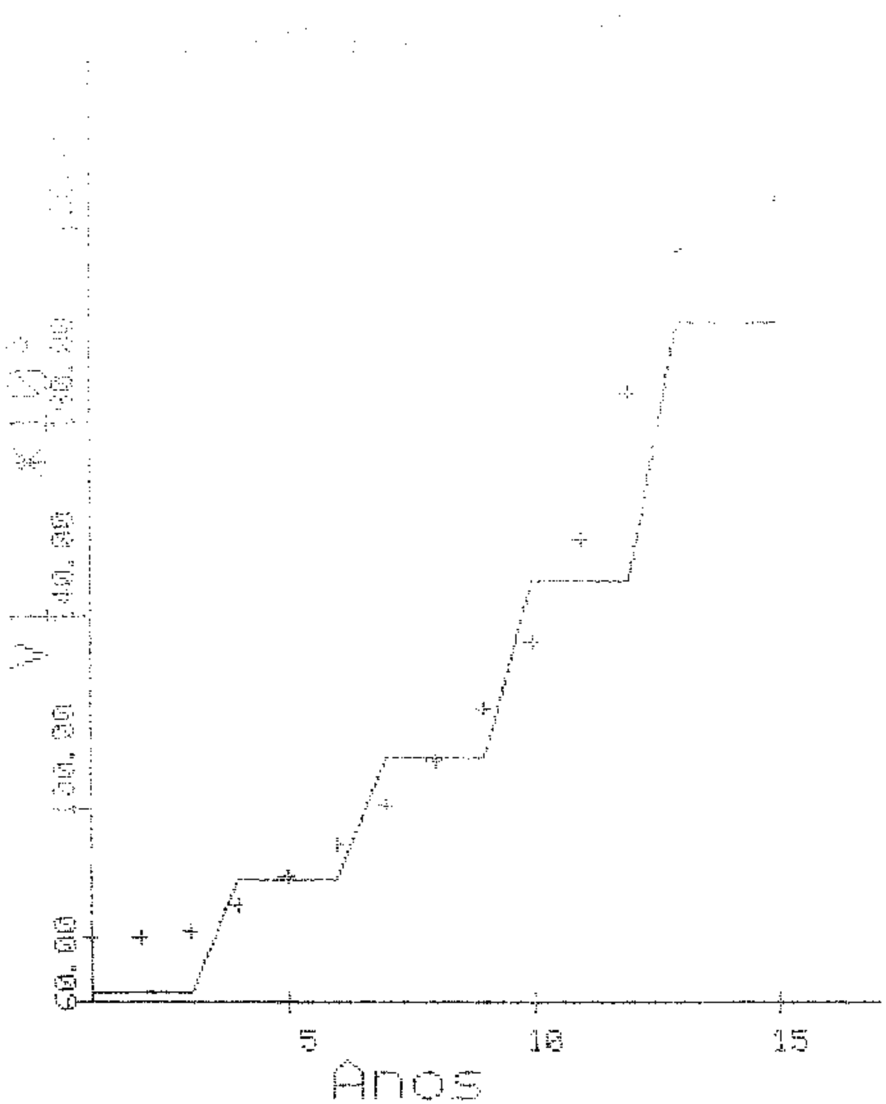
60.00
100.00
140.00
5
10
15
Anos

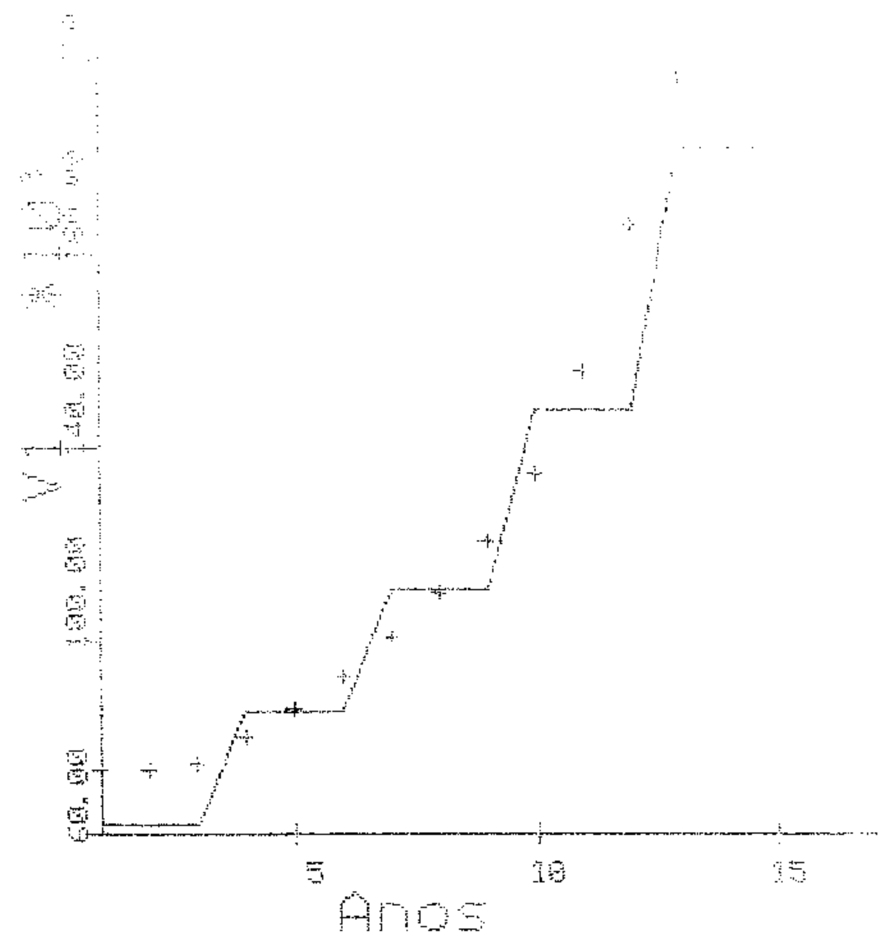


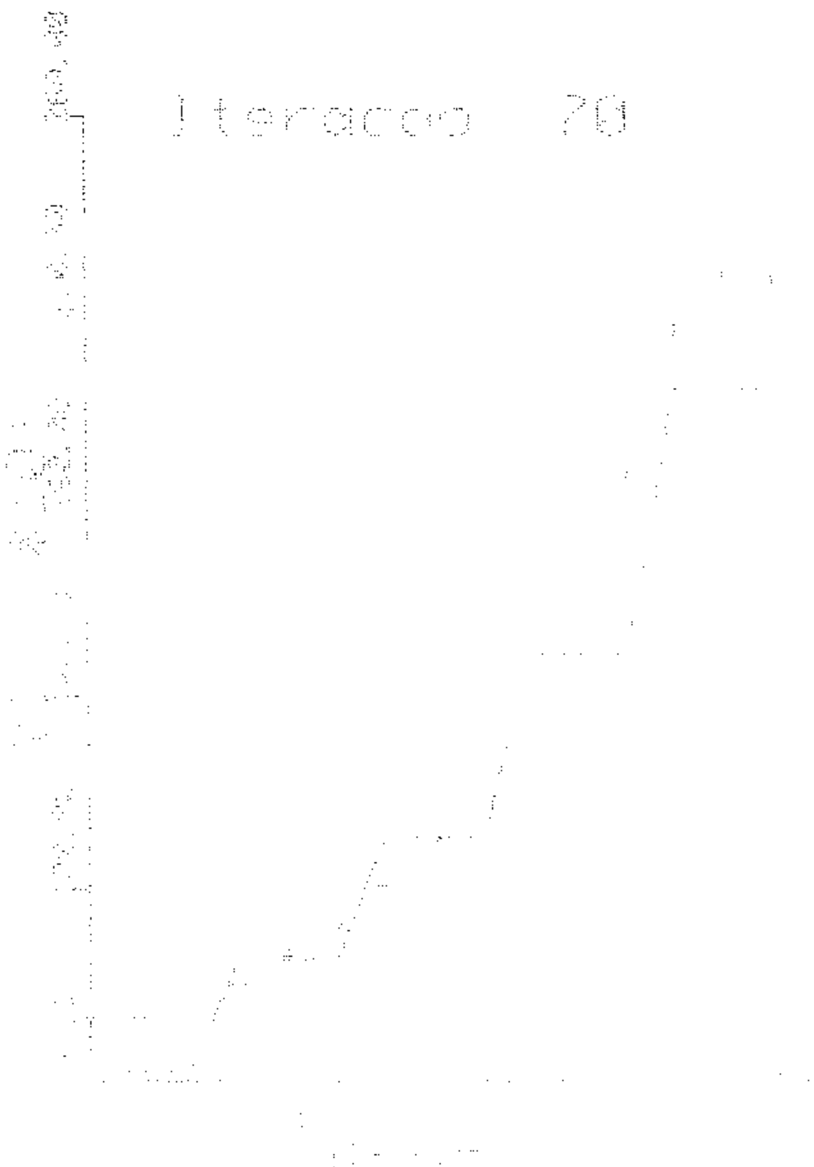
60.00
100.00
140.00
5
10
15
Anos

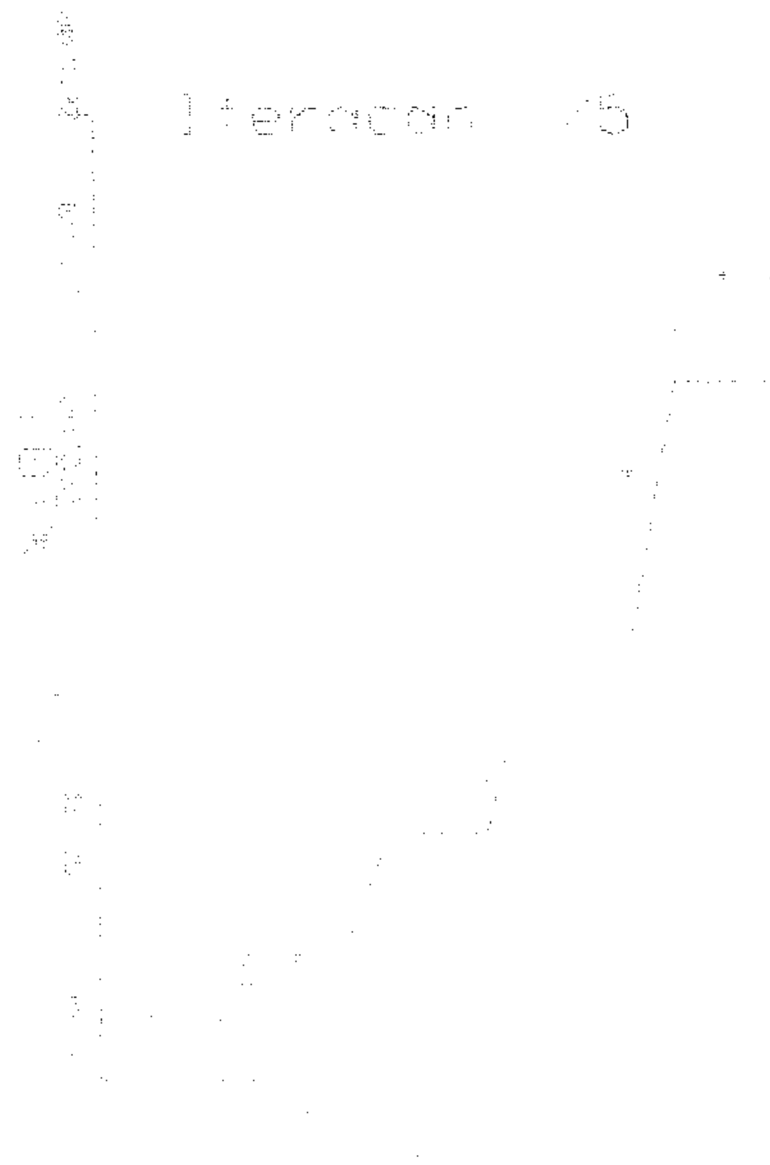

Iteracao 50
180.00
220.00
260.00

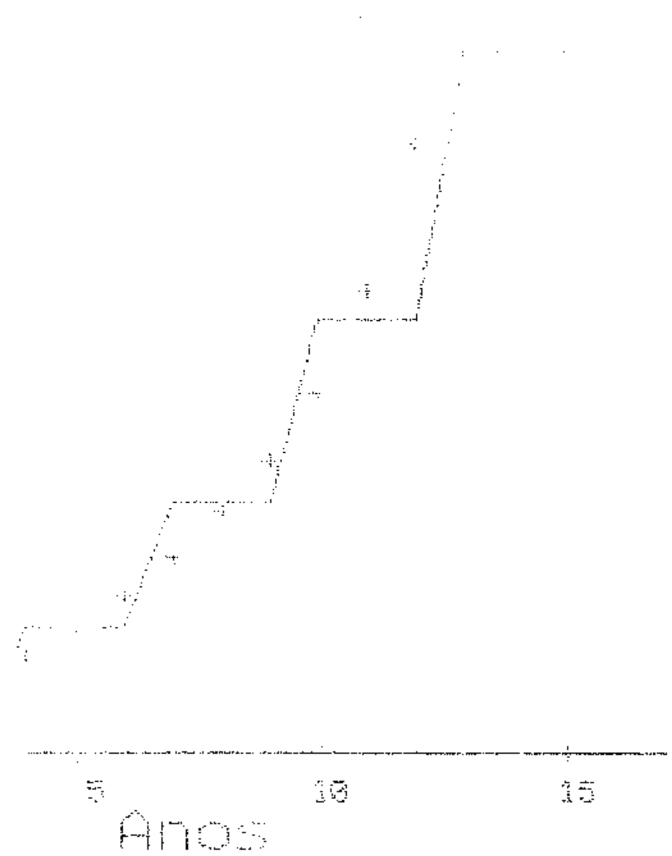

Iteracao 55
$\times 10^{3}$
180.00
220.00
260.00

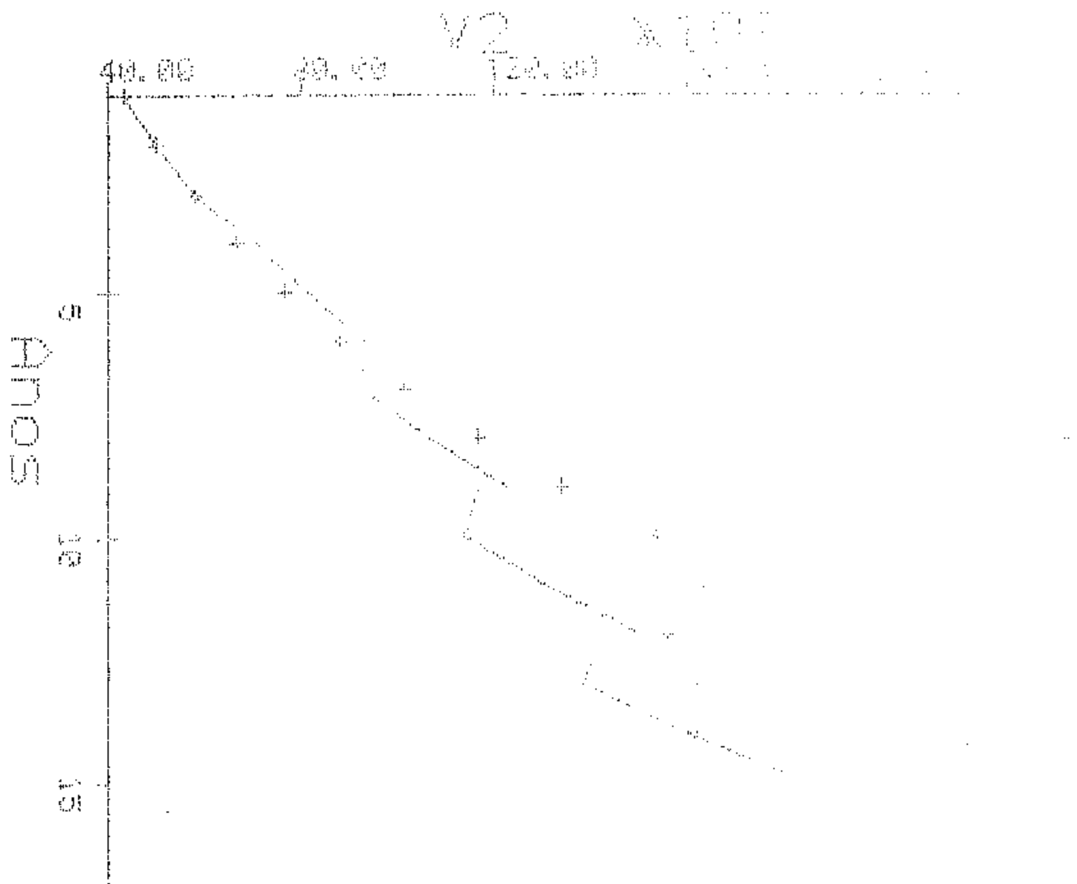
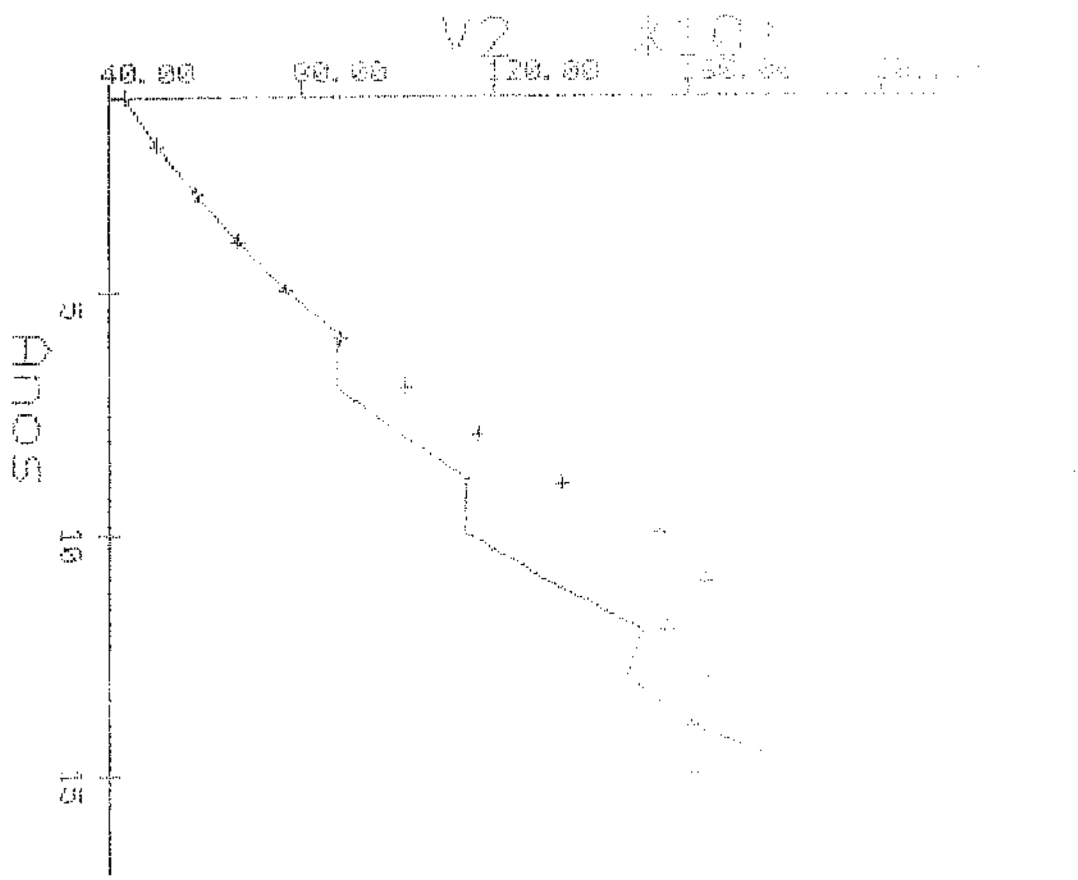

V1 * 10^3
60.00
100.00
140.00
180.00
5
10
15
Anos

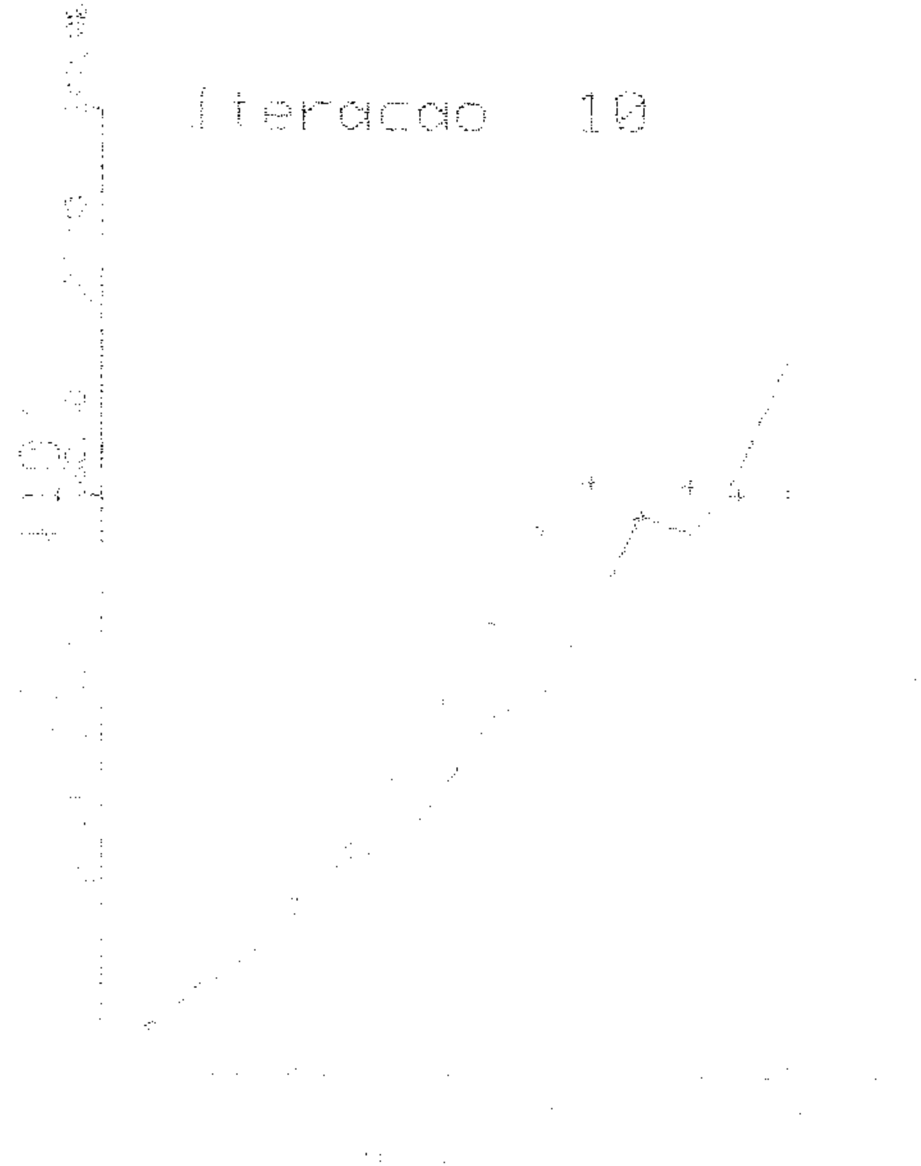

V1 * 10^3
60.00
100.00
140.00
5
10
15
Anos

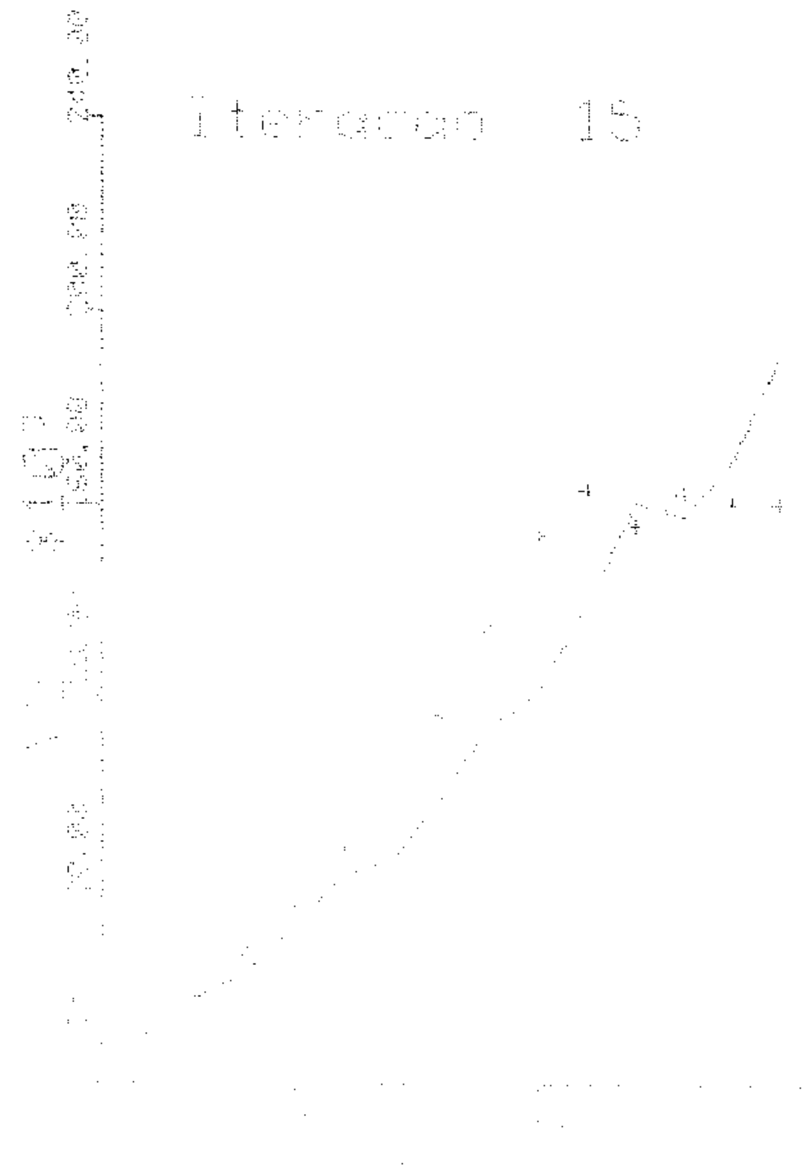

Iteracao 20

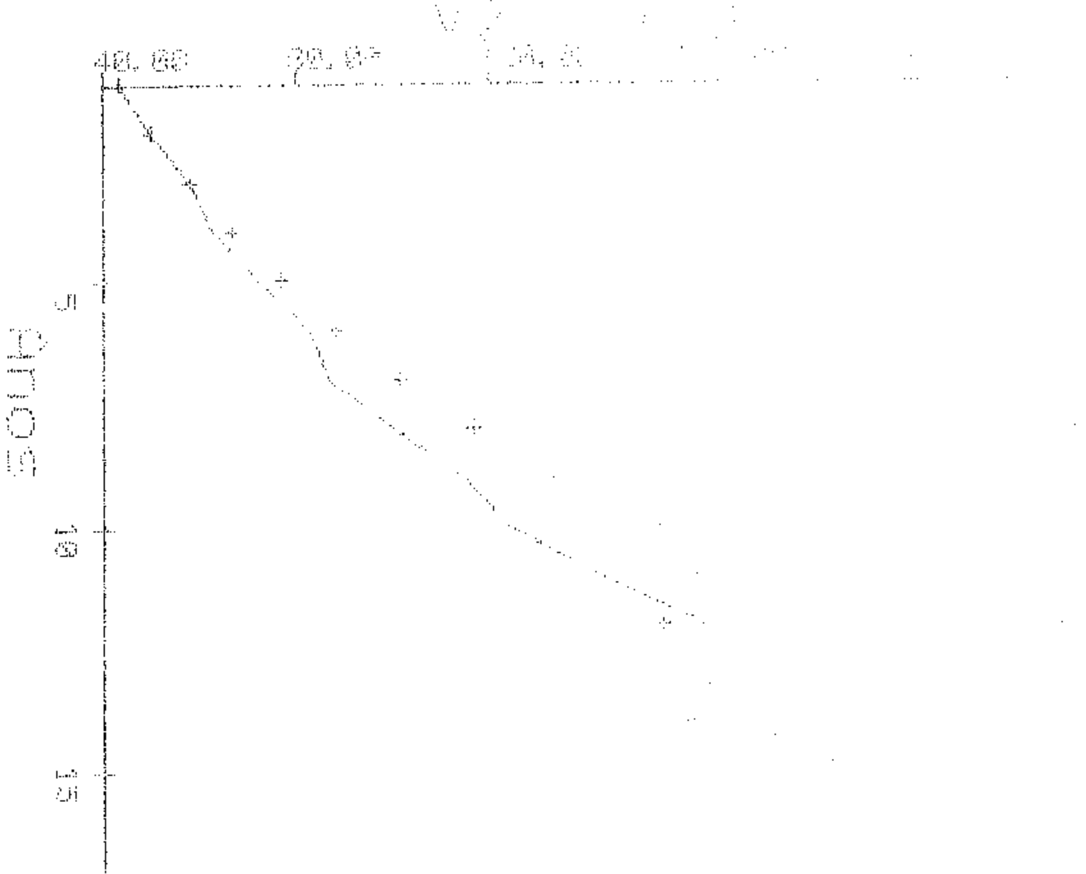

Iteracao 25

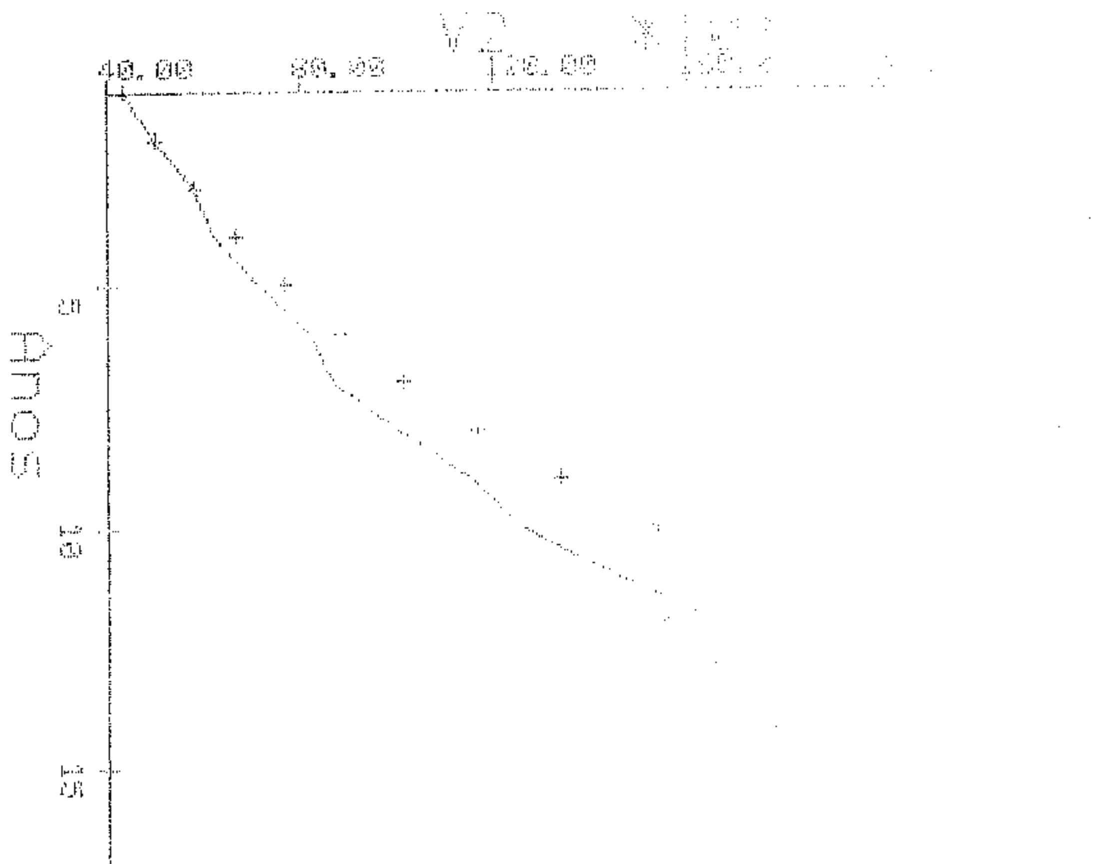

5
10
15
Anos

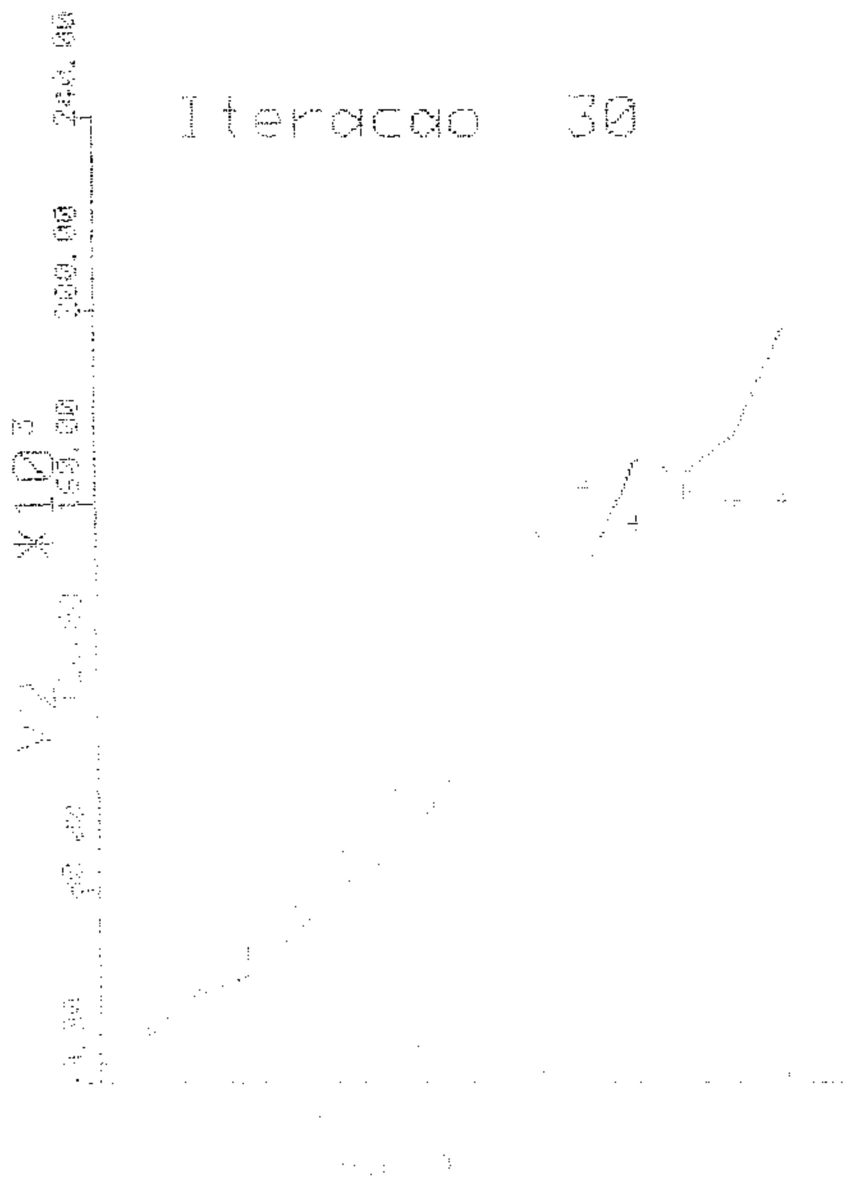

V2
40.00
80.00
120.00
5
10
15

V2
40.00
80.00
120.00
5
10
15

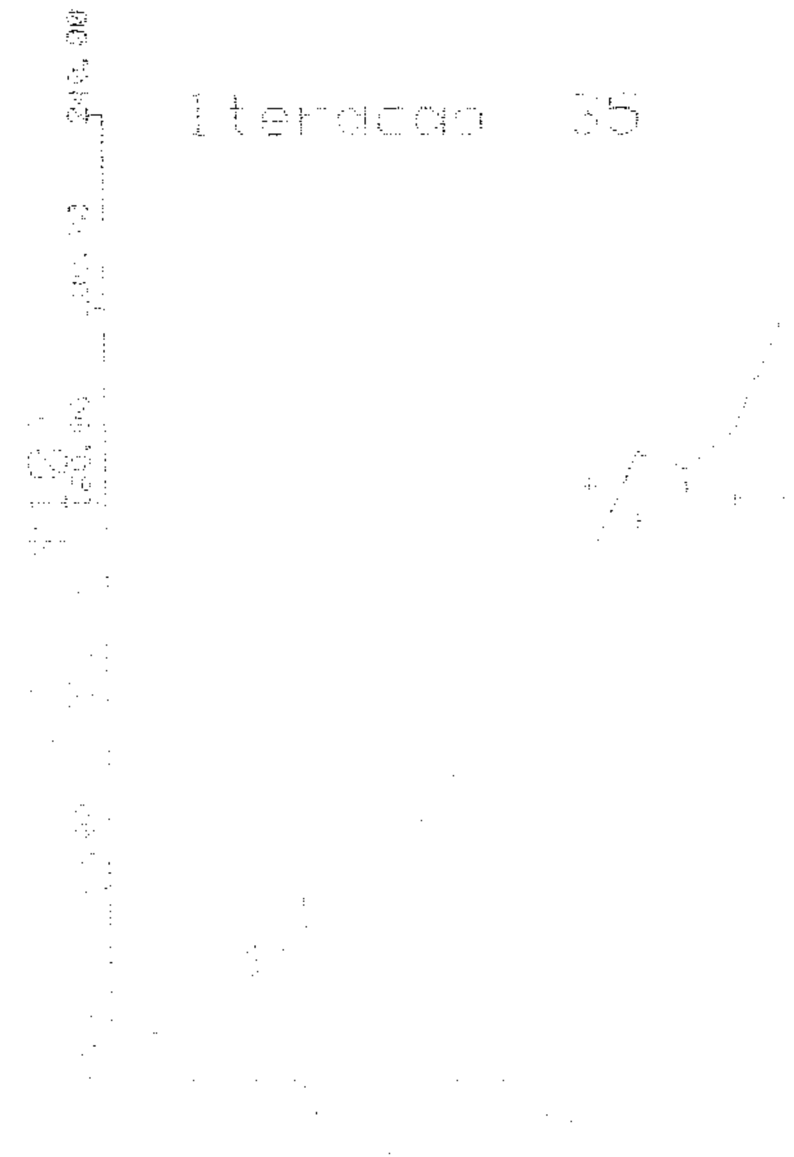

Iteracao 10

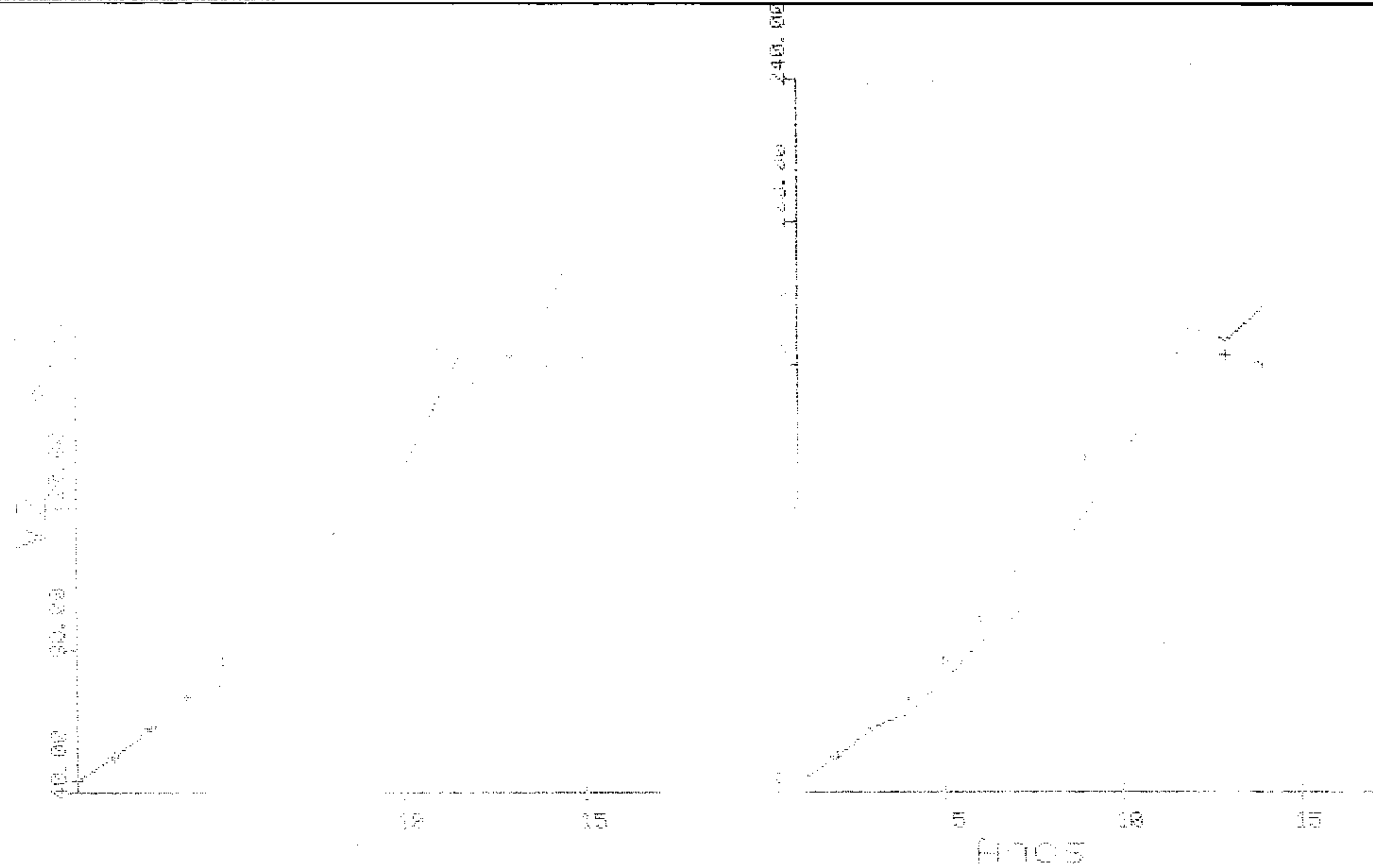

Iteracao 15


40.00
SOUTH
5
10
15

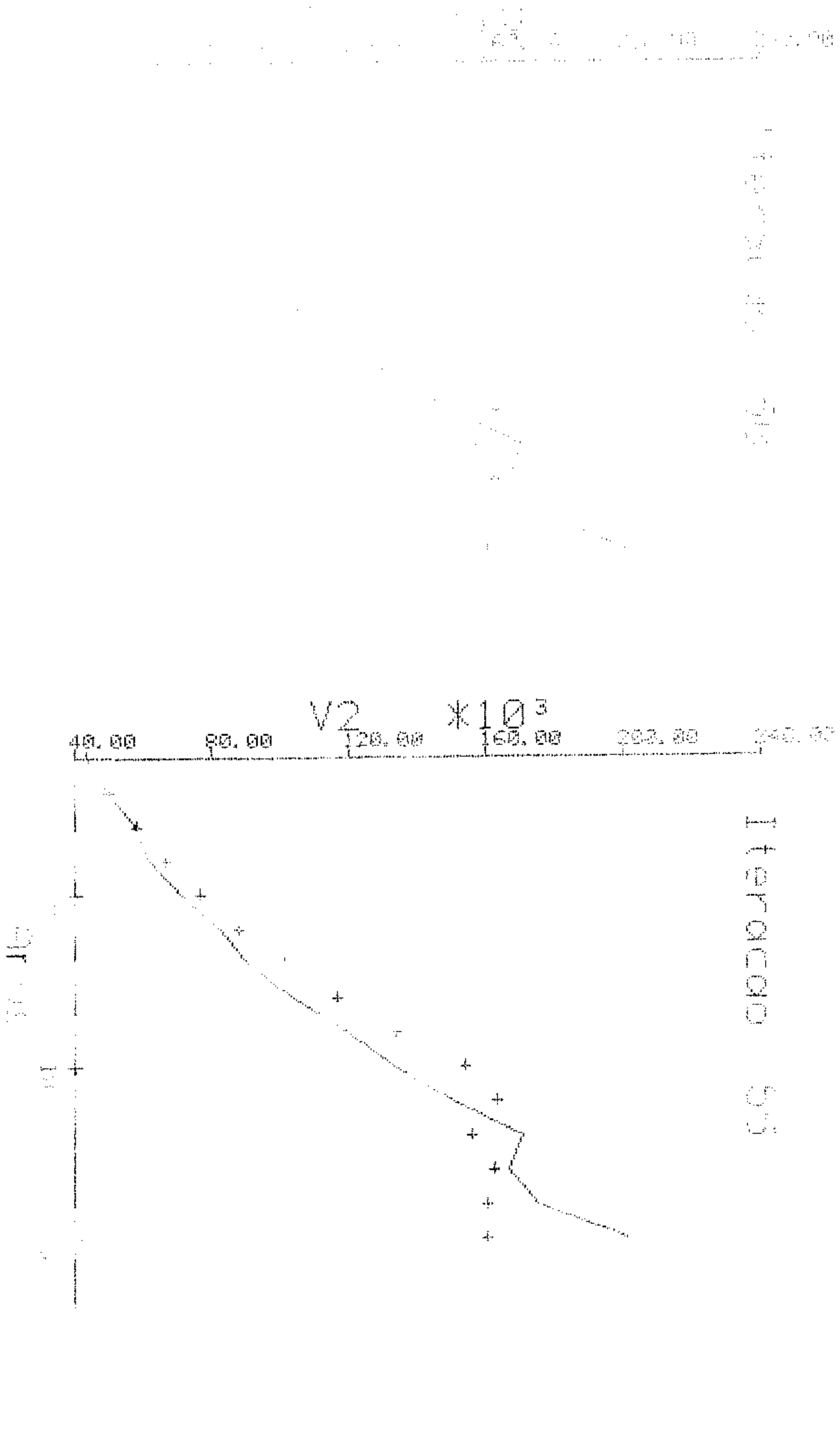

40.00
80.00
120.00
SOUTH


Iteracao 30
V2 ＊10³
160.00
200.00
240.00

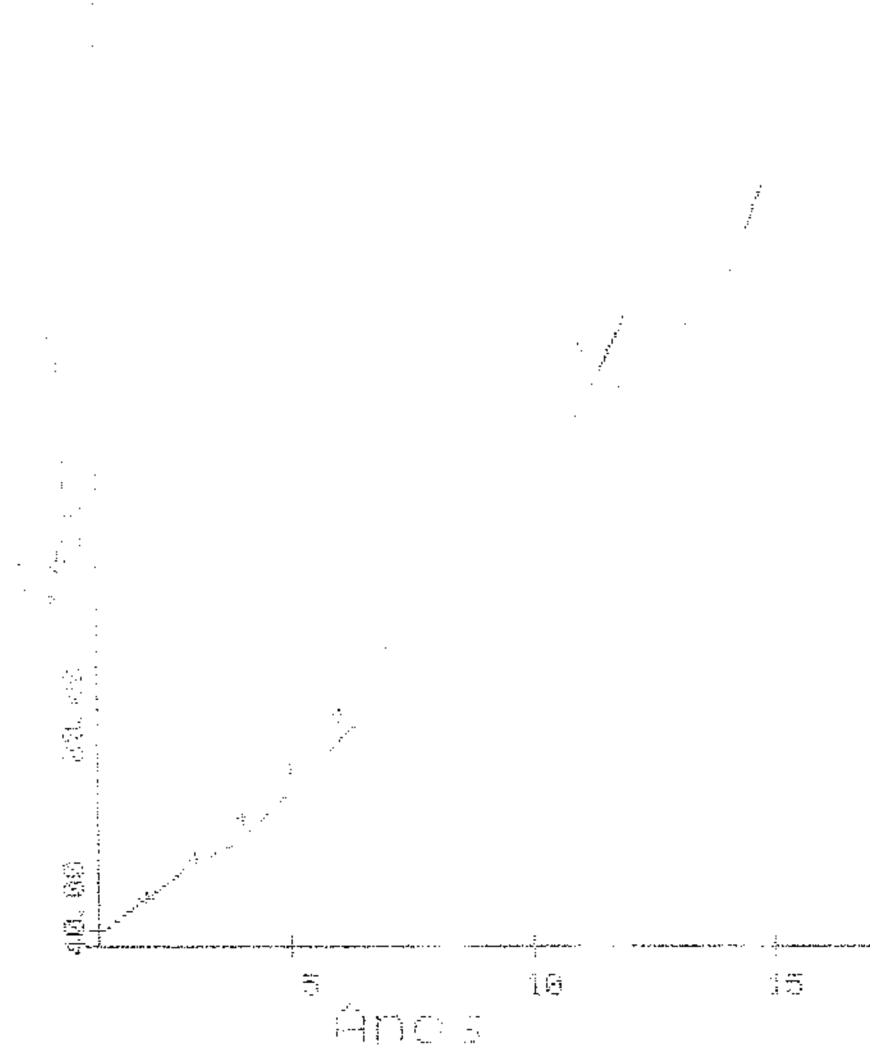

Iteracao 35
240.00

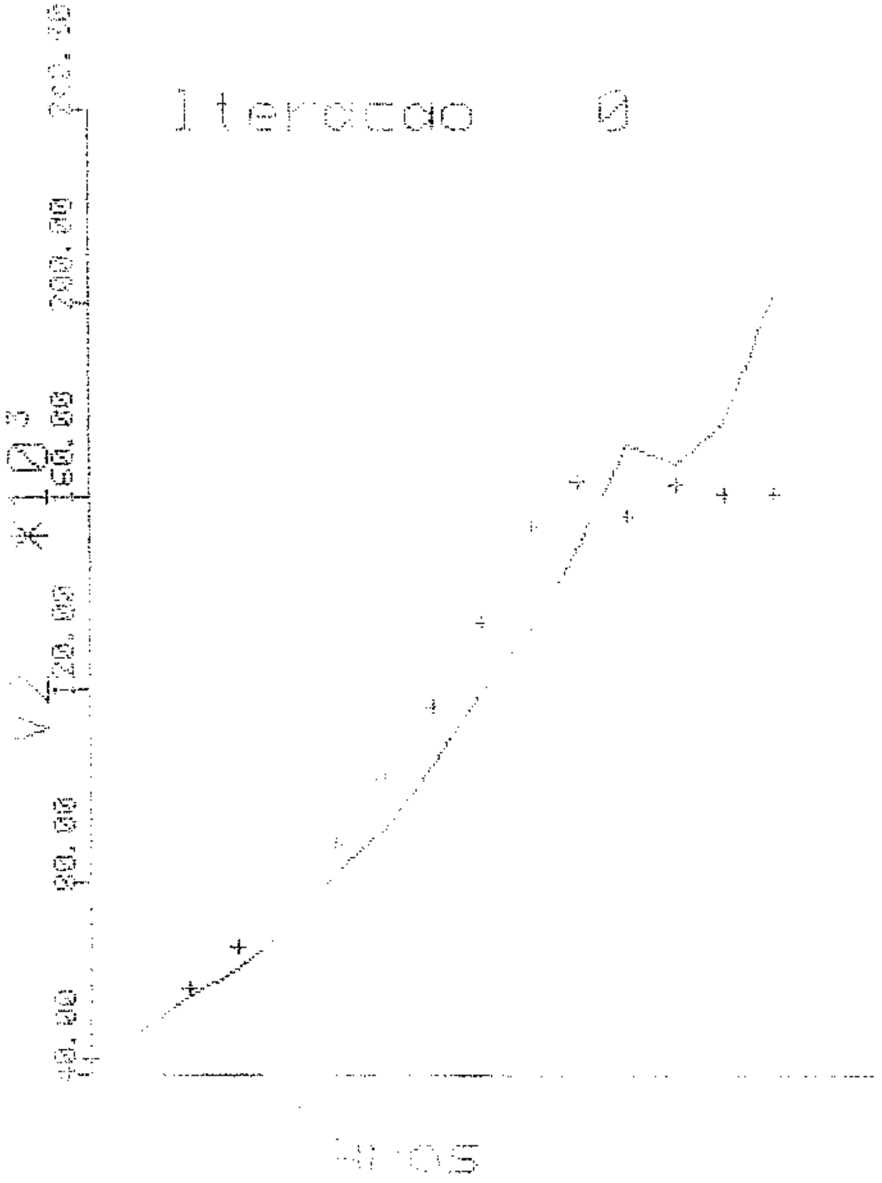


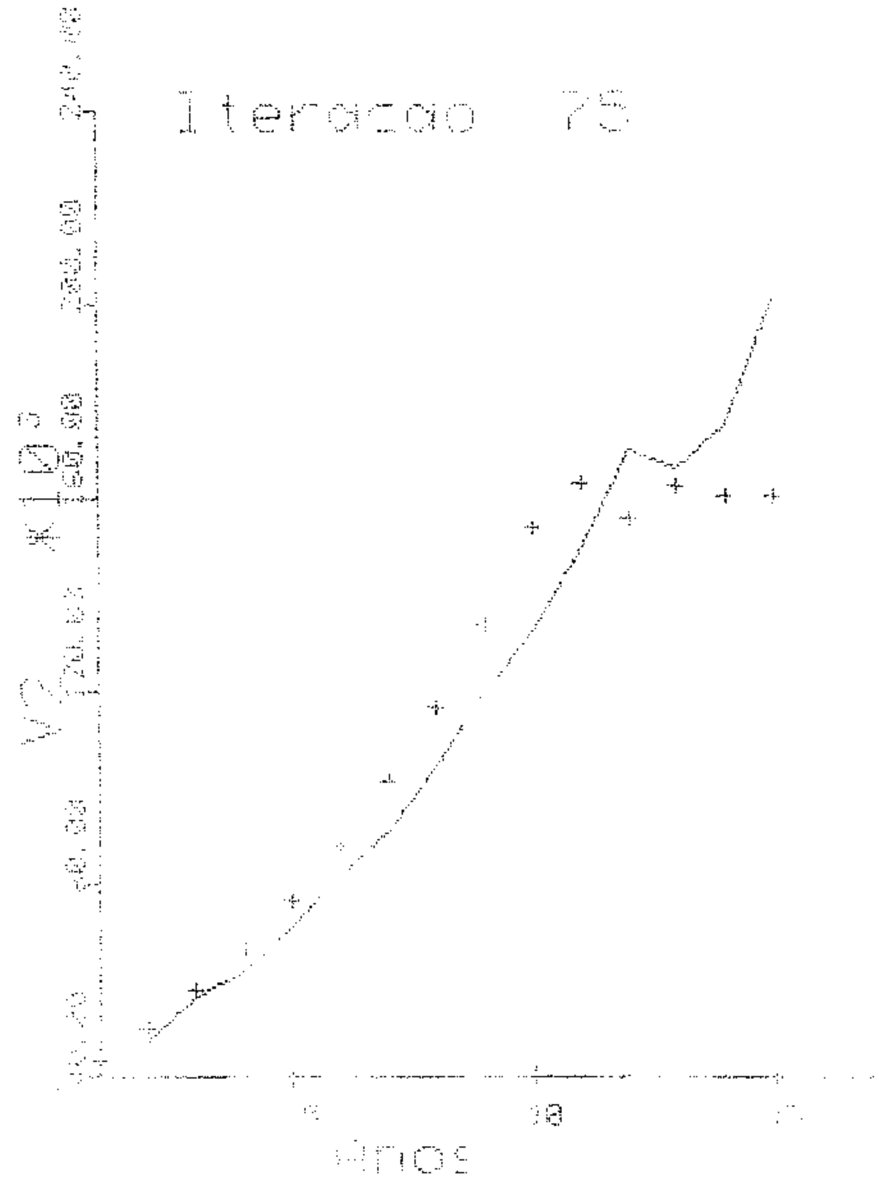
40.00
90.00
10
15
240.00
5
10
15
Años

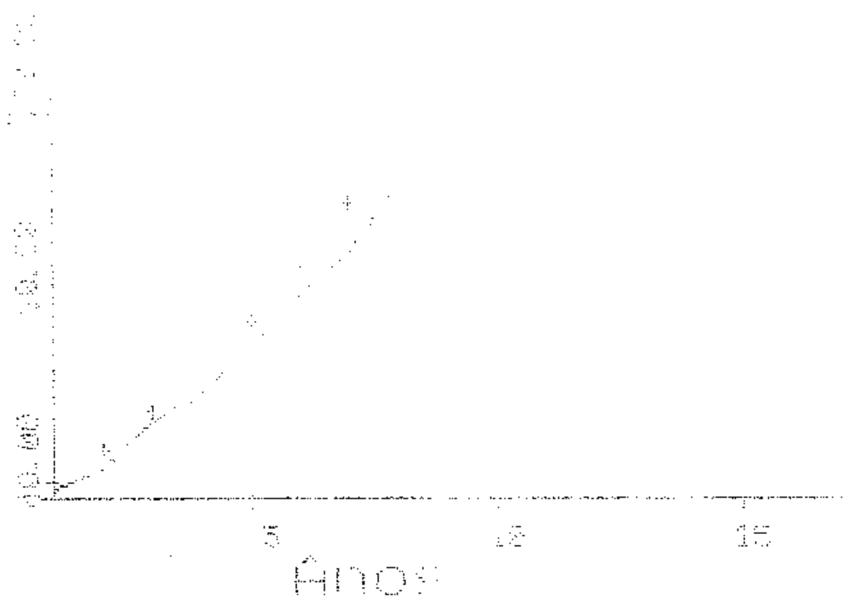

V2 *10³
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00

65




Iteracao 0
V2 *10^3
40.00
80.00
120.00
160.00
200.00
240.00
Anos


Iteracao 75
V2 *10^3
160.00
200.00
240.00
Anos


5
10
15
Anos