"O problema de existência de soluções para a equação de Schrödinger não linear"

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Edson Alberto Coayla Terán e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de dezembro de 1995

Marcia Scialom

Prof(a). Dr(a). Márcia A.G. Scialom
Orientador(a)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Coayla Teran, Edson Alberto

C632p O problema de existência de soluções para a equação de Schrödinger não linear / Edson Alberto Coayla Teran -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1995.

Orientadora: Marcia Assumpção Guimarães Scialom

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Schrödinger, Equação de. 2. Equações diferenciais parciais. I. Scialom, Marcia Assumpção Guimarães. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese de Mestrado defendida e aprovada em 20 de dezembro de 1995
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

José Felipe Juran R

Prof (a). Dr (a).

Prof (a). Dr (a). MILTON DA COSTA LOPES Fº

Márcia Scialoni

Prof (a). Dr (a).

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a muitas pessoas e em especial:

- A minha orientadora Prof$^{\underline{a}}$ Dra. Márcia A.G. Scialom, pela orientação constante e a Prof$^{\underline{a}}$ Dra. Hebe Azevedo Biagioni pela co-orientação.
- A meu amigo e colega Juan Montealegre S. pelas conversas a respeito deste trabalho.
- A CAPES por ter concedido uma bolsa que fez efetivo este trabalho.

Aos meus familiares e a Janny.

SUMÁRIO

RESUMO

Neste trabalho estudamos a existência de soluções locais e globais para a equação de Schrödinger não linear (NLS). No primeiro capítulo apresentamos as ferramentas básicas para posteriormente no capítulo dois fazermos um estudo da equação de Schrödinger homogênea. Estudamos também as propriedades dispersivas dessa equação, que serve para tratar a (NLS). Finalmente no capítulo três estudamos o problema de valor inicial associado à (NLS); demonstramos que sob certas hipóteses o problema é localmente bem posto e que sua solução nem sempre pode ser extendida globalmente.

INTRODUÇÃO

A presente monografia trata fundamentalmente sobre o seguinte problema de valor inicial para a equação diferencial parcial não linear.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + \lambda|u|^\alpha u; & \text{com } (x,t) \in I\!R^n \times I\!R \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \qquad (NLS)$$

A equação acima é conhecida como Schrödinger não linear. Aqui $\lambda, \alpha > 0$ são números reais, $\varphi \in X$ um certo espaço de Banach escolhido e a função u toma valores complexos.

A equação (NLS) é tema de bastante pesquisa pela sua importância na física, especificamente em optica não linear.

O objetivo da presente monografia é mostrar que sob certas condições sobre λ, α e n o problema (NLS) é "localmente bem posto em X" (espaço de Banach que denota um espaço de funções a ser escolhido), isto é, deseja-se provar que existe $0 < T < \infty$ tal que a função

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}: \ X &\to C([-T,T],X) \\ u_0 &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

onde $u(t)$ representa a solução de (NLS) é contínua. Conclui-se então a existência local, unicidade, persistência, (isto siginifica que a solução $u(t)$ está no mesmo espaço X do dado inicial para todo $t \in [-T,T]$) e dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial. Se a função F acima definida é continua para todo $T \in I\!R$, diz-se que o problema (NLS) é bem posto "globalmente".

Veremos também que nem sempre a solução local pode ser estendida a qualquer intervalo de tempo, isto é, para valores especiais de λ, α e u, a solução "explode" em tempo finito.

O capítulo 1 é dedicado a estabelecer as ferramentas necessárias para melhor compreensão do problema (NLS). São dadas as definições básicas e as principais referências deste capítulo são [B], [Po], [D], [C], [CH].

Fizemos também o estudo da existência da solução da equação linear

$$\begin{cases} \partial_t u = -\Delta u; \quad \text{com} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \qquad (LS)$$

chamada a equação de Schrödinger linear. Esse estudo é desenvolvido no capítulo 2 onde as propriedades dispersivas da equação (LS) são enfatizados e as referências principais são [C] e [Po].

Finalmente no Capítulo 3 apresentamos nossos resultados principais colocando ênfase no caso $\alpha = \dfrac{4}{n}$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ que é chamado de caso crítico, as referências principais são [Po] e [CW2].

A notação empregada será a usual na teoria das equações diferenciais parciais. Os teoremas, definições, lemas e proposições serão indicados por 3 ou 4 digítos onde o primeiro dígito indica o capítulo e os demais dígitos correspondem a numeração dentro do capítulo.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 ALGUMAS FERRAMENTAS

Inicialmente vou apresentar os enunciados de alguns dos teoremas que serão usados frequentemente e cuja demonstração fazem parte dos cursos de Matemática e podem ser encontrados na bibliografia indicada.

Teorema 1.1.1 (Teorema de ponto fixo de Banach) Seja (E, d) um espaço métrico completo e $f : E \to E$ uma aplicação tal que existe $k \in [0, 1)$ satisfazendo $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo $(x, y) \in E \times E$. Então existe um único ponto x_0 de E tal que $f(x_0) = x_0$.

Para a demonstração ver por exemplo o livro de Hutsom and Pym[HP] (pag. 116).

Teorema 1.1.2 (Teorema de Lax-Milgram) Seja H um espaço de Hilbert e seja $a : H \times H \to R$ uma forma bilinear. Suponha que existe $c < \infty$ e $\alpha > 0$ tal que
(i) $|a(u, v)| \leq c||u||\,||v||$, para todo $(u, v) \in H \times H$ (continuidade),
(ii) $a(u, u) \geq \alpha||u||^2$, para todo $u \in H$ (coercividade).
Então para todo $f \in H'$ existe um *único* $u \in H$ tal que $a(u, v) = \langle f, v\rangle$ *para todo* $v \in H$.

Quando $f \in H'$ (o dual de H) e $v \in H$ nós denotaremos geralmente $\langle f, v\rangle$ no lugar de $f(v)$. Diz-se que $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto escalar na dualidade H', H. Para a prova destes resultados ver o livro de Brezis [B] (pag. 84).

1.2 INTEGRAÇÃO: Consideraremos no que se segue os espaços L^p de funções a valores complexos, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. $L^p(\Omega)$ (ou simplesmente

L^p, quando não existir risco de confusão) denota o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, \text{ se } p \in [1, \infty);$$
$$Ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty, \text{ se } p = \infty.$$

$L^p(\Omega)$ será munido da norma $|| \ ||_{L^p(\Omega)}$ (ou simplesmente $|| \ ||_{L^p}$ quando não existir risco de confusão) definido por

$$||u||_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |(u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ se } p \in [1, \infty); \\ \\ Ess\sup_{\Omega} |u|, \text{ se } p = \infty. \end{cases}$$

Consideremos agora um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e um espaço de Banach X que tem norma $|| \ ||$.

Definição 1.2.1 Denotaremos como $C_c(I, X)$ o espaço das funções contínuas de I em X com suporte compacto em I.

Definição 1.2.2 A função $f : I \to X$ é mensurável se existem $N \subset I$ de medida zero e uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t) \text{ para todo } t \in I/N.$$

Pela definição observamos que se $f : I \to X$ é mensurável, então $||f|| : I \to \mathbb{R}$ é também mensurável.

Definição 1.2.3 Seja $f : I \to X$ mensurável. Diz-se que f é integrável se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_c(I, X)$ tal que $\int_I ||f_n - f|| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Observação Já que $||f_n - f||$ é mensurável e positiva então $\int_I ||f_n - f||$ faz sentido.

Proposição 1.2.4 Seja f integrável como acima então existe $x(f) \in X$ tal que para qualquer sequência $(f_n)_{n\in \mathbb{N}} \subset C_c(I, X)$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \int_I ||f_n(t) - f(t)||dt = 0$$

se tem

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt = x(f).$$

Definição 1.2.5 O elemento $x(f)$ é chamado a integral de f sobre I. Denotaremos

$$x(f) = \int f = \int_I f = \int_I f(t)dt.$$

Se $I = (a, b)$, denotar-se-a também

$$x(f) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f.$$

Proposição 1.2 (Teorema de Bochner) Seja $f : I \to X$ mensurável. Então f é integravel se e somente se $||f||$ é integravel. Além disso se tem

$$|| \int_I f|| \leq \int_I ||f||.$$

Um desenvolvimento detalhado destas questões pode ser encontrada por exemplo nos livros de Brezis [B], Dunford and Schwartz [DS], Yosida [Y]. Para integração vetorial ver Cazenave e Haraux [CH] (Cap.1, pag. 12-20), Dinculeanu [D].

1.3 ESPAÇOS $L^p(I, X)$

Como na seção 1.2. I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e X é um espaço de Banach com norma $|| \; ||$.

Proposição 1.3.1 Seja $p \in [1,\infty]$. Denotamos por $L^p(I,X)$ o conjunto das funções $f: I \to X$ mensuráveis tais que $t \to ||f(t)||$ esta em $L^p(I)$. Para $f \in L^p(I,X)$ denotamos

$$||f||_{L^p(I,X)} = \left(\int_I ||f(t)||dt\right)^{1/p}, \text{ se } p < \infty;$$
$$||f||_{L^p(I,X)} = Ess\sup_{t\in I} ||f(t)||, \text{ se } p = \infty.$$

O espaço $L^p(I,X)$ possui muitas propriedades do espaço $L^p(I)$, citaremos algumas que serão úteis para nós.

Proposição 1.3.2 $(L^p(I,X), || \, ||_{L^p})$ é um espaço de Banach. Se $p < \infty$, $C_c^\infty(I,X)$ é denso em $L^p(I,X)$.

Proposição 1.3.3 Seja X' o dual de X, e sejam f, φ tal que $f \in L^p(I,X), \varphi \in L^q(I)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} \leq 1$ então $\varphi f \in L^r(I,X)$, e temos a desigualdade

$$||\varphi f||_{L^r(I,X)} \leq ||f||_{L^p(I,X)}||\varphi||_{L^q(I)}.$$

Proposição 1.3.4 Se $f \in L^p(I,X)$ e $g \in L^q(I,X')$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} \leq 1$ então a função h definida por $h(t) = \langle g(t), f(z)\rangle_{X',X}$ esta em $L^r(I)$ e

$$||h||_{L^r} \leq ||f||_{L^p(I,X)}||g||_{L^q(I,X')}.$$

Proposição 1.3.5 Se $f \in L^p(I,X) \cap L^q(I,X)$ com $p < q$ então para cada $r \in [p,q]$ temos $f \in L^r(I,X)$ e

$$||f||_{L^r(I,X)} \leq ||f||^{\theta}_{L^p(I,X)}||f||^{1-\theta}_{L^q(I,X)},$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Proposição 1.3.6 Se I é limitado e $p \leq q$, então $L^q(I,X) \hookrightarrow L^p(I,X)$ e $||f||_{L^p(I,X)} \leq |I|^{\frac{q-p}{pq}}||f||_{L^q}(I,X)$, $|I|$ denota a medida de I.

Definição 1.3.7 Seja $p \in [I, \infty]$. Denotaremos $L^p_{loc}(I, X)$ o conjunto das funções $f : I \to X$ mensuráveis tais que para todo subintervalo compacto J de I tem-se que $f|_J \in L^p(J, X)$.

Proposição 1.3.8 Se X é um espaço de Banach e se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, então para cada $f \in L^p(I, X)$ temos que $Af \in L^p(I, Y)$ e $||Af||_{L^p}(I, Y) \leq ||A||_{\mathcal{L}(x,y)}||f||_{L^p(I,X)}$. Em particular, se $X \hookrightarrow Y$ e se $f \in L^p(I, X)$, então $f \in L^p(I, Y)$ (tomar A como o mergulho).

Proposição 1.3.9 Se Y é um espaço de Banach e se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ então para cada $f \in L^1(I, X)$, temos

$$\int_I Af(t)dt = A\Big(\int_I f(t)dt\Big).$$

Em particular, se $X \hookrightarrow Y$ e se $f \in L^1(I, X)$, então a integral de f no sentido de X é também a integral no sentido de Y.

A demonstração dos teoremas acima é encontrada em Dinculeanu [D], Diestel and Uhl [DU], Dunford e Schwartz [DS], Cazenave T e Haraux A. [CH] (pag. 18).

1.3.1 A transformada de Fourier

Definição 1.3.1.1 Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos sua transformada de Fourier

$$Ff(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

onde $x.\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

O seguinte teorema nos permite definir a transformada de Fourier em L^2.

Teorema 1.3.1.2 (Teorema de Plancherel). Se $f \in L^1 \cap L^2$, então $\hat{f} \in L^2$, e $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$ se estende de forma única a um isomorfismo unitário sobre L^2.

Teorema 1.3.1.3 Seja $S(\mathbb{R}^d)$ o espaço de Schwartz, a transformada de Fourier $F : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ é um isomorfismo.

A demonstração dos teoremas acima é encontrada em Folland [F] (pag. 244) e Ponce [Po] (pag. 11).

1.4 ESPAÇOS DE SOBOLEV.

No que se segue Ω denota um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.4.1 Uma função u definida em quase toda parte sobre Ω é chamada localmente integrável sobre Ω se $u \in L^1(K)$ para cada $K \subset\subset \Omega$. E escrevemos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, (a notação $K \subset\subset \Omega$ significa que $\overline{K} \subset \Omega$ e $\overline{K}$ é compacto).

Notação. Para nós, $C_c^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em Ω. Chamaremos as funções em $C_c^\infty(\Omega)$ de teste.

Definição 1.4.2 Suponha $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Denotamos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e $D^\alpha \phi = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$.
Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, e escrevemos

$$D^\alpha u = v$$

se

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx \tag{1.4.1}$$

para todas as funções teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e seja k um inteiro não negativo. Vamos definir a seguir os espaços de Sobolev.

Definição: 1.4.3 O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas as funções localmente integráveis $u : \Omega \to I\!R$ tal que para cada multi índice α com $|\alpha| \leq k, D^\alpha u$ existe no sentido fraco (i.e u satisfaz 1.3.1) e pertence a $L^p(\Omega)$.

Também definimos o subconjunto fechado $W_0^{k,p}(\Omega)$ de $W^{k,p}(\Omega)$ como o fecho em $W^{k,p}(\Omega)$ de $C_c^\infty(\Omega)$. Quando $p = 2$, denota-se $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$. Se utilizamos a seguinte norma para $H^k(\Omega)$

$$||u||_{H^k(\Omega)} = ||u||_{H^k} = \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

então $H^k(\Omega)$ (também $H_0^k(\Omega)$) é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} Re\Big(\int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx \Big).$$

Observação 1.4.4

(i) O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma $|| \cdot ||_{W^{k,p}} = || \; ||_{W^{k,p}(\Omega)}$ definida por

$$||u||_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}.$$

A seguir apresentamos resultados importantes sobre espaços de Sobolev que serão utilizados nos capítulos seguintes e para sua prova indicaremos o livro de Brezis [B] (Corol. IX.10, pag. 165), Fridman [Fr]. (Thm 9.3, pag. 24) Ponce[Po] (pag.44).

Teorema 1.4.5 Seja $1 \leq p < n$. Então

$$W^{1,p}(I\!R^n) \subset L^q(I\!R^n), \; \forall q \in \Big[p, \frac{np}{n-p}\Big].$$

Teorema 1.4.6 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e sejam j, m dois inteiros $0 \leq j < m$. Se

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{(1-a)}{q},$$

para algum $a \in [\frac{j}{m}, 1]$ ($a < 1$, se $r > 1$ e $n - j - \frac{n}{r} = 0$), então existe $c = c(n, m, j, a, q, r)$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=j} ||D^\alpha u||_{L^p} \leq c\left(\sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_{L^r}\right)^a ||u||_{L^q}^{1-a}$$

para cada $u \in C_c^\infty(I\!R^n)$.

Teorema 1.4.7 Se $k > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ com $p > 2$, então $H^k(I\!R^n) \hookrightarrow L^p(I\!R^n)$.

Para $1 \leq p < \infty$ e $m \in I\!N$, definimos $W^{-m,p}(\Omega)$ como o espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ define-se também $H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$, logo $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$.

1.5 A DESIGUALDADE DE HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV

Enunciaremos um teorema que usaremos na prova da Proposição 2.2.6

Definição 1.5.1 Sejam $f \in L^p(I\!R^d)$ e $0 < \alpha < d$. O potencial de Riesz de ordem α, denotado por I_α é definido como

$$I_\alpha f(x) = C_\alpha \int_{I\!R^d} \frac{f(t)}{|x-t|^{d-\alpha}} dt, \qquad (1.5.1)$$

onde

$$C_\alpha = \pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)/\Gamma(d/2 - \alpha/2),$$

e Γ é definida por $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$.

Teorema 1.5.2 (Hardy - Littlewood - Sobolev) Sejam $0 < \alpha < d, 1 \leq p < q < \infty$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$,

i) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, então a integral em (1.5.1) que define a I_α converge absolutamente para quase todo $x \in \mathbb{R}^d$.
ii) Se, além disso, $p > 1$ então I_α é tal que

$$||I_\alpha(f)||_{L^q} \leq c(p,q)||f||_{L^p}.$$

Para a demonstração ver os livros de Sadosky [5]. Ponce [Po] (pag. 36).

1.6 OPERADORES m-DISSIPATIVOS

1.6.1 Operadores não Limitados em um espaço de Banach

Definição 1.6.1.1 Um operador linear em X é uma dupla (D, A), onde D é um subespaço vetorial de X e $A : D \to X$ é uma aplicação linear. Diz-se que A é *limitado* se $||Au||$ fica limitada quando $u \in \{x \in D, ||x|| \leq 1\}$. E o caso contrário, A é dito não limitado.

Definição 1.6.1.2 Se (D, A) é um operador linear em X, a imagem de A é o subespaço vetorial $R(A)$ de X definido por $R(A) = A(D)$; e o gráfico de A é o subespaço vetorial de $X \times X$ definido por $G(A) = \{(u, f) \in X \times X$ tal que $u \in D$ e $f = Au\}$.

Observação 1.6.1.3 No que se segue do capítulo, subentende-se o termo operador ao operador linear definido acima quando não exista risco de confusão. Conforme a notação comumente usada nos livros de Análise Funcional, designaremos a dupla (D, A) por "A com domínio de $A = D(A) = D$".

1.6.2 Espaços de Hilbert Complexos

Consideremos um espaço de Hilbert complexo X. Lembramos que X é por definiçao um espaço de Hilbert complexo, se existe uma forma $\mathbb{R}$-bilinear contínua $b : X \times X \to \mathbb{C}$ verificando as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
b(iu, v) &= ib(u, v) \quad \forall(u, v) \in X \times X, \\
b(v, u) &= \overline{b(u, v)} \quad \forall(u, v) \in X \times X, \\
b(u, u) &= ||u||^2, \quad \forall u \in X.
\end{aligned}$$

Neste caso $(u, v) = Re(b(u, v))$ define um produto escalar (real) sobre X, que faz do X um espaço de Hilbert *real*. No que se segue, consideramos X como um espaço de Hilbert *real*.

Seja A um operador linear sobre o espaço de Hilbert real X. Se A é $\mathbb{C}$-linear, pode-se definir iA, como um operador linear sobre o espaço de Hilbert real X.

1.6.3 Operadores m-dissipativos

Definição 1.6.3.1 Um operador (linear) A em X é dissipativo se $\forall u \in D(A)$, e $\forall \lambda > 0$ tem-se $||u - \lambda Au|| \geq ||u||$.

Definição 1.6.3.2 Um operador A em X dito m-dissipativo se A é dissipativo e $\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists u \in D(A)$, tal que $u - \lambda Au = f$.

Proposição 1.6.3.3 Seja A um operador m-dissipativo. Para $u \in D(A)$, denotamos $||u||_{D(A)} = ||u|| + ||Au||$. Então $(D(A), ||\cdot||_{D(A)})$ é um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(D(A), X)$.

1.6.4 Operadores não limitados em espaços de Hilbert

Neste parágrafo, vamos supor que X é um espaço de Hilbert, com produto escalar $\langle , \rangle$. Se A é um operador linear em X de dominio denso $D(A)$, a fórmula

$$G(A^*) = \{(v, \varphi) \in X \times X, \forall (u, f) \in G(A), \langle \varphi, u \rangle = \langle v, f \rangle \}$$

define um operador linear A^* (o adjunto de A), de domínio

$$D(A^*) = \{v \in X, \exists c < \infty, |\langle Au, v \rangle| \leq c||u||, \forall u \in D(A)\}$$

e tal que

$$\langle A^* v, u \rangle = \langle v, Au \rangle, \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

De fato, a forma linear $u \to \langle v, Au \rangle$ $\forall v \in D(A^*)$, definido sobre $D(A)$, se estende de forma única a uma aplicação $\varphi : X \to I\!\!R$, e fazemos $A^* v = \varphi$.

Proposição 1.6.4.1 A é dissipativo em X se e somente se $\langle Au, u \rangle \leq 0$ para todo $u \in D(A)$.

Proposição 1.6.4.2 Se A é m-dissipativo em X, então $D(A)$ é denso em X.

Em seguida caracterizamos um operador m-dissipativo por meio de A^* e $G(A)$

Teorema 1.6.4.3 Seja A um operador linear dissipativo em X, de domínio denso. Então A é m-dissipativo se e somente se A^* é dissipativo e $G(A)$ é fechado.

Definição 1.6.4.4 Seja A um operador linear em X, de domínio denso diz-se que A é auto-adjunto (respectivamente anti-adjunto) se $A^* = A$ (respectivamente $A^* = -A$)

Proposição 1.6.4.5 Seja A um operador linear em X, de domínio denso. tal que $G(A) \subset G(A^*)$ e $A \leq 0$ (isto é dizer $\langle Au, u \rangle \leq 0$ para todo $u \in D(A)$). Então A é

m-dissipativo se e somente se A é auto-adjunto.

Proposição 1.6.4.6 Seja A um operador dissipativo em X. As propriedades seguintes são equivalentes

(i) A é m-dissipativo em X,
(ii) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\forall f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $u - \lambda_0 Au = f$.

Proposição 1.6.4.7 Suponha que $D(A)$ é denso em X. Então A^* é $\mathbb{C}$-linear, e tem-se que $(iA)^* = -iA^*$.

Proposição 1.6.4.8 Se A é auto-adjunto, então iA é anti-adjunto.

Proposição 1.6.4.9 Se A é um operador anti-adjunto em X, então A e $-A$ são m-dissipativos.

1.7 O LAPLACIANO EM UM ABERTO DE $\mathbb{R}^n$.

Seja Ω um aberto qualquer de $\mathbb{R}^n$ e $Y = L^2(\Omega)$, consideramos Y como um espaço de Hilbert real (ver §1.6.2). Define-se o operador linear A sobre Y por

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \ \text{ tal que } \ \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$
$$Au = \Delta u, \forall u \in D(A).$$

Proposição 1.7.1 Temos que A é m-dissipativo, de domínio denso. Mais precisamente A é auto-adjunto e $A \leq 0$.

A demonstração da proposição acima se apóia no seguinte lema.

Lema 1.7.2 Seja $u \in D(A)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx. \tag{1.7.1}$$

Demonstração.

Fazendo integração por partes verifica-se (1.7.1) quando $v \in C_c^\infty(\Omega)$. A prova do lema se faz por densidade. Seja $(v_k)_{k\in N}$ uma sequência em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $v_k \to v$ em $H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega (\Delta u) v_k dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v_k dx \tag{1.7.2}$$

já que os dois membros de 1.7.2 são funcionais contínuos de v_k em $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta u v dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \Delta u v_k dx = -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \nabla u \nabla v_k dx \\ &= \int \nabla u \nabla v dx. \end{aligned}$$

Demonstração da proposição 1.7.1 Já que $C_c^\infty(\Omega) \subset D(A)$, então $D(A)$ é denso em Y. Seja agora $v \in D(A)$; aplicando (1.7.1) com $v = u$ obtemos $\langle Au, u\rangle \leq 0$ e então A é dissipativo (Proposição 1.6.4.1). Consideramos a forma bilinear contínua e coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$

$$\beta(u,v) = \int (uv + \nabla u \nabla v) dx$$

De fato ela é obviamente bilinear provemos a continuidade

$$\begin{aligned} |\beta(u,v)| &\leq \int |uv + \nabla u \nabla v| dx \leq ||u||_{L^2} + ||\nabla u||_{L^2}||\nabla v||_{L^2} \leq \\ &\leq (||u||_{L^2}^2 + ||\nabla u||_{L^2}^2)^{1/2}(||v||_{L^2}^2 + ||\nabla v||_{L^2}^2)^{1/2} = ||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1} \end{aligned}$$

provemos agora que é coerciva

$$\beta(u,u) = \int (uu + \nabla u \nabla u dx) = ||u||_{L^2}^2 + ||\nabla u||_{L^2}^2 = ||u||_{H_0^1}^2$$

pelo teorema de Lax-Milgram (teorema 1.1.2), $\forall f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int (uv + \nabla u \nabla v)dx = \int fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim pelo Lema 1.7.2, $\int (u - \Delta u - f)vdx = 0$ com o que $u - \Delta u = f$ em quase toda parte sobre Ω, logo $u \in D(A)$ e $u - Au = f$ o que implica pela Proposição (1.6.4.6) que A é m-dissipativo, para todo $u, v \in D(A)$. De (1.7.1) tem-se $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ então $G(A) \subset G(A^*)$ e então pela Proposição 1.6.4.5 A é auto-adjunto.

1.8 O OPERADOR DE SCHRÖDINGER

Seja Ω um aberto qualquer de $I\!R^n$, e $Y = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ (consideramos Y como um espaço de Hilbert real (ver §1.5). Definimos o operador linear A sobre Y por

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}), \Delta u \in L^2\} \\ A(u) &= i\Delta u, \forall u \in D(A). \end{aligned}$$

Proposição 1.8.1 A é anti-adjunto, e em particular A e $-A$ são m-dissipativos com domínios densos.

Demonstração

Pelas Proposições 1.7.1 e 1.6.4.8 verifica-se que iA é anti-adjunto, finalmente a Proposição 1.6.4.9 completa a demonstração.

1.9 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES

Consideremos o espaço de Hilbert X. Lembramos que nós estamos considerando X como um espaço Hilbert real (ver §1.6.2)

A seguir alguns resultados referentes a teoria de semigrupos de operadores lineares.

1.9.1 Semigrupos de contração e seus geradores

Definição 1.9.1.1 Uma família a um parâmetro $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares contínuos é dito um semigrupo de contração sobre X, se:
(i) $||S(t)|| \leq 1$ para todo $t \geq 0$,
(ii) $S(0) = I$,
(iii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $s, t \geq 0$,
(iv) para todo $x \in X$, $S(t)x \in C([0,\infty), X)$.

Definição 1.9.1.2 O gerador infinitesimal de $S(t)$ é o operador linear A definido por

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X; \lim_{h\downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe em } X\}, \\ Ax &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Proposição 1.9.1.3 Seja $S(t)$ um semigrupo de contrações sobre X e A seu gerador, então A é m-dissipativo e $D(A)$ é denso.

Teorema 1.9.1.4 (Teorema de Hille-Yosida-Phillips) um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações sobre X se e somente se A é m-dissipativo de domínio denso.

Para a demonstração do teorema acima ver Cazenave e Haraux [CH] (pag. 43).

1.9.2 Grupo de Isometrias

Definição 1.9.2.1 Uma família a um parâmetro $\{S(t)\}_{t\in R}$ de operadores lineares contínuos é dito um grupo de isometrias sobre X, se

(i) $||S(t)x|| = ||x||$ para todo $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$,
(ii) $S(0) = I$,
(iii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
(iv) para todo $x \in X$ a aplicação $t \mapsto S(t)x$ é contínua de $\mathbb{R} \to X$.

Teorema 1.9.2.2 Vamos supor que A é um operador anti-adjunto. Então $S(t)$ se estende a um grupo a um parâmetro $S(t) : R \to \mathcal{L}(X)$ tal que

(i) $\forall x \in X, S(t)x \in C(\mathbb{R}, X)$,
(ii) $\forall x \in X, \forall t \in \mathbb{R}, ||S(t)x|| = ||x||$
(iii) $S(0) = I$
(iv) $\forall s, t \in \mathbb{R}, S(s+t) = S(s)S(t)$
(v) Para todo $x \in D(A), u(t) = S(t)x$ verifique $u \in C(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, X)$ e $\dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Corolário 1.9.2.3 Com as notações do Teorema 1.9.2.2 tem-se que $(S(t))^* = S(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Consideremos $x, y \in D(A)$. Temos assim que

$$\frac{d}{dt}((\langle S(t)x, S(t)y\rangle) = \langle AS(t)x, S(t)y\rangle + \langle S(t)x, AS(t)y\rangle = \langle S(t)x, -AS(t)y\rangle + \\ +\langle S(t)x, AS(t)y\rangle = 0$$

Então $\langle x, y\rangle = \langle S(t)x, S(t)y\rangle$, $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in DA$
Se fizermos $y = S(-t)z$, temos então $\langle x, S(-t)z\rangle = \langle S(t)x, z\rangle$ para todo $x, z \in D(A)$.

Como o domínio $D(A)$ é denso em X, aproxima-se x e z que pertencem a X por $x_n, z_n \in D(A)$, então

$$\langle x, S(-t)z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, S(-t)z_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle S,(t)x_n, z_n\rangle = \langle S(t)x, z\rangle.$$

1.9.3 Observações finais. No que segue-se faremos um resumo de alguns fatos estabelecidos anteriormente e outros sem demonstração (ver Cazenave [C]) que serão usados no Capítulo 2. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador $\mathbb{C}$-linear. Supondo A auto-adjunto (portanto $D(A)$ e denso em X) e $A \leq 0$ (isto é $(Ax, x) \leq 0$ para todo $x \in D(A)$), A gera um semigrupo de contrações $(S(t))_{t\geq 0}$ sobre X (já que pela proposição 1.6.4.5, A é m-dissipativo e pelo Teorema 1.9.1.4 gera um semigrupo de contrações). Também $D(A)$ é um espaço de Hilbert munido do produto escalar $(x, y)_{D(A)} = (Ax, Ay)_X + (x, y)_X$, correspondente a norma $||u||^2_{D(A)} = ||Au||^2_X + ||u||^2_X$. Temos $D(A) \hookrightarrow (D(A))'$ com o mergulho denso.

Denotamos por X_A o completamento de $D(A)$ pela norma $||x||^2_A = ||x||^2_X - (Ax, x)_{X'}$, e para $x, y \in D(A)$ temos,

$$D(A) \hookrightarrow X_A \hookrightarrow X \hookrightarrow X'_A \hookrightarrow (D(A))',$$

com todos os mergulhos densos (ver Cazenave [1]). Além disso podemos estender A a um operador $\overline{A}$ sobre $(D(A))'$ com domínio X tal que
$\overline{A}|_{D(A)} = A$, e $\overline{A}|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), X), \overline{A}|_{X_A} \in \mathcal{L}(X_A, X'_A), \overline{A}|_X \in \mathcal{L}(X, (D(A))')$ como A é auto-adjunto, então
$A : D(A) \subset X \to X$ definido por $(iA)x = iAx$, para $x \in D(A)$ é também $\mathbb{C}$-linear, e é anti-adjunto. Em particular sabemos que iA gera um grupo de isometrias $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sobre X. Também o fato de iA ser anti-adjunto implica

$$S(t)^* = S(-t); \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Assim pelas observações feitas acima $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ pode ser estendido a um grupo de isometrias $(\overline{S}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sobre $(D(A))$; o qual é grupo gerado pelo operador anti-adjunto $i\overline{A}.\overline{S}(t)$ coincide com $S(t)$ sobre X, e $(\overline{S}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ restrita a qualquer um dos espaços $X'_A, X, X_A, D(A)$ é um grupo de isometrias. Por conveniência, usaremos a mesma notação para $S(t)$ e $\overline{S}(t)$. Podemos agora enunciar o seguinte teorema, o qual pode ser encontrado em Cazenave [C].

Teorema 1.9.3.1 Para cada $x \in X, u(t) = S(t)x$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, (D(A))'); \\ i\dfrac{du}{dt} + \overline{A}u = 0, \ \forall t \in R; \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Além disso, nos temos as seguintes propriedades de regularização.

Se $x \in X_A$, então $u \in C(\mathbb{R}, X_A) \cap C^1(\mathbb{R}, X'_A)$; se $x \in D(A)$, então $u \in C(\mathbb{R}, D(A) \cap C^1(\mathbb{R}, X)$.

Para ter mais informação quanto aos resultados das seções 1.6, 1.7, 1.8 ver o livro de Cazenave e Haraux [CH], e para a seção 1.9 os livros de Cazenave e Haraux [CH], Pazy [P], Brezis [B], e na secção 1.9.3 Cazenave [C].

CAPÍTULO 2

A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER LINEAR

Neste capítulo trataremos de algumas das propriedades da equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{SL}$$

2.1 PROPRIEDADES BÁSICAS

Consideremos o operador (D, A) definido na secção (1.7). Pela proposição (1.7.1) sabemos que A é um operador auto-adjunto e $A \leq 0$ (i.e $\langle Ax, x\rangle \leq 0 \;\; \forall x \in D(A)$); assim aplicaremos os resultados da secção (1.9) com a mesma notação e consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Observamos que X_A é $H_0^1(\mathbb{R}^n)$. De fato $\|\;\|_X = \|\;\|_{H_0^1}$ (pelo Lema (1.7.2)) e $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(A)$, logo $H_0^1(\mathbb{R}^n) \subset X_A$. Já que $D(A) \subset H_0^1(\mathbb{R}^n)$ implica que $X_A \subset H_0^1$; logo $X_A = H_0^1(\mathbb{R}^n)$ e com as normas iguais, e $X_A' = H^{-1}(\mathbb{R}^n)$.
Por outro lado, notamos que $D(A) \neq H_0^2(\mathbb{R}^n)$ o qual implica que $(D(A))' \neq H^{-2}(\mathbb{R}^n)$. O operador $\overline{A} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), (D(A))')$ é definido por

$$\langle \overline{A}u, v\rangle_{D(A)'\; D(A)} = (u, \Delta v)_{L^2}, \quad \text{para} \;\; u \in L^2, v \in D(A)$$

Daqui em diante denotamos por $S(t)_{t\in R}$ o grupo de isometrias gerado por iA em qualquer um dos espaços $D(A), H_0^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n), H^{-1}(\mathbb{R}^n), (D(A))'$. O seguinte resultado é importante no que se segue, e é consequência do Teorema 1.9.3.1.

Proposição 2.1.1 Seja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $u(t) = S(t)\varphi$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}, (D(A))'), \\ iu_t + \Delta u = 0, \text{ em } (D(A))', \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Além disso $||u(t)||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}$, para cada $t \in \mathbb{R}$ e se $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$, então $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$ e $||\nabla u(t)||_{L^2} = ||\nabla\varphi||_{L^2}$.

Observação 2.1.2 Com a notação da Proposição 2.1.1, observamos que $v(t) = \overline{u}(-t)$ satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = 0 \\ v(x,0) = \overline{\varphi} \,; \end{cases}$$

Logo, $v(t) = S(t)(\overline{\varphi})$ mas como $v(t) = \overline{u}(-t) = \overline{S(-t)\varphi}$; então $\overline{S(t)\overline{\varphi}} = S(-t)\varphi$ para $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.2 AS PROPRIEDADES DISPERSIVAS

Nesta seção trataremos das propriedades dispersivas da equação de Schrödinger

Proposição 2.2.1 Seja $2 \leq p < \infty$ e $t \neq 0$, então $S(t)$ aplica continuamente $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$||S(t)\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}||\varphi||_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

Para todo $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, com p' tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

Para a prova faremos uso do seguinte Lema.

Lema 2.2.2 Dado $t \neq 0$, definimos a função K_t por

$$K_t(x) = \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4t}}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$. Então

$$u(t) = S(t)\varphi = K_t * \varphi$$

para $t \neq 0$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (o espaço de Schwartz) e seja $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ definida por

$$\widehat{u(t)}(\xi) = e^{-4\pi^2 i|\xi|^2 t}\hat{\varphi}(\xi), \text{ para } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.2.1}$$

observamos que

$$i\widehat{u_t} - 4\pi^2|\xi|^2\hat{u} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

logo

$$i\widehat{u_t} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_k}} = 0, \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

assim

$$iu_t + \Delta u = 0, \text{ em } R \times \mathbb{R}^n \text{ e por (2.2.1) } \widehat{u(0)} = \hat{\varphi}, \tag{2.2.2}$$

agora de (2.2.1) e do fato que $\widehat{K_t}(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$

$$\widehat{u(t)}(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{\varphi}(\xi) = \hat{K}_t(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \widehat{K_t * \varphi}(\xi).$$

Portanto de (2.2.2) e da unicidade da solução (ver Proposição 2.1.1) da equação da Schrödinger, $u(t) = K_t * \varphi$.

Demonstração da Proposição 2.2.1 Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Lema (2.2.2) e usando a desigualdade generalizada de Young (ver [Po] pag. 39), temos

$$||S(t)\varphi||_{L^\infty} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}}||\varphi||_{L^1}.$$

Por outro lado, do fato que a transformada de Fourier é uma isometria de L^2 em L^2 e de (2.2.1) temos

$$||S(t)\varphi||_{L^2} = ||\widehat{S(t)\varphi}||_{L^2} = ||e^{-4\pi^2 i|\cdot|^2 t}\hat{\varphi}||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}$$

logo

$$||S(t)\varphi||_{L^\infty} \leq c||\varphi||_{L^1}; \quad \text{onde} \quad c = (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{e} \quad \varphi \in \mathcal{S}(I\!R^n) \tag{2.2.3}$$

e

$$||S(t)\varphi||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}: \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{S}(I\!R^n) \tag{2.2.4}$$

A prova de (2.2.3) e (2.2.4) para $\varphi \in L^1(I\!R^n)$ e $\varphi \in L^2(I\!R^n)$, respectivamente se faz por densidade. Provemos (2.2.3) para $\varphi \in L^1(I\!R^n)$; por densidade existe uma sequência $(\varphi_k)_{k\in N}$ em $\mathcal{S}(I\!R^n)$ tal que $\varphi_k \to \varphi$ em $L^1(I\!R^n)$, quando $k \to \infty$; por (2.2.3) temos

$$||S(t)\varphi_k||_{L^\infty} \leq c||\varphi_k||_{L^1} \tag{2.2.5}$$

Agora, passando ao limite em 2.2.5 temos,

$$||S(t)\varphi||_{L^\infty} \leq c||\varphi||_{L^1} \ ; \quad \text{para} \quad \varphi \in L^1(I\!R^n).$$

Logo temos provado que

$$||S(t)||_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}}.$$

Da mesma forma provamos que

$$||S(t)||_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = 1.$$

O caso geral se deduz do Teorema de interpolação de Riesz - Thorin (ver o livro Bergh e Löfstrom [BL] ou Folland [F]) o qual afirma que

$$S(t) : L^{p'}(I\!R^n) \to L^p(I\!R^n), \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

com a norma

$$||S(t)||_{\mathcal{L}(L^{p'},L^p)} \leq 1^\theta((4\pi|t|)^{-n/2})^{1-\theta}$$

onde θ satisfaz $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{\infty}+\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\theta}{2}$, $\dfrac{1}{p'}=\dfrac{1-\theta}{1}+\dfrac{\theta}{2}$; e $\theta\in(0,1)$ e qual implica $1-\theta=\dfrac{1}{p'}-\dfrac{1}{p}$

com o que temos o resultado.

Definição 2.2.3 Chamaremos o par $(q,r), q>0, r>0$; de *par admissível* se as seguintes condições são verificadas:
(i) $2\leq r<\dfrac{2n}{n-2}$ $(2\leq r<\infty$, se $n=2$, e $2\leq r\leq\infty$ se $n=1)$,

(ii) $\dfrac{2}{q}=n\Big(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{r}\Big)$.

Observação 2.2.4

(i) Se (q,r) é um *par admissível* $q\in(2,\infty]$, (se $n=1, q\in[4,\infty]$),
(ii) O par $(\infty,2)$ é um *par admissível*,
(iii) Se (q,r) é um *par admissível*, tem-se em particular que $H^1\subset L^r$ com a inclusão densa, então $L^{r'}\subset H^{-1}$. Logo $C([0,T],H^1)\subset L^q([0,T],L^r)$ e $L^{q'}([0,T],L^{r'})\subset L^{q'}([0,T],H^{-1})$, com $T>0$

Definição 2.2.5 Seja $t\in[0,T]$; para $T>0$, definimos os operadores ϕ,ψ,θ_t por

$$\begin{aligned}\phi_f(t) &= \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau,\ \forall t\in[0,T].\\ \psi_f(\tau) &= \int_\tau^T S(\tau-t)f(t)dt,\ \forall\tau\in[0,T].\\ \theta_{t,f}(\tau) &= \int_0^t S(\tau-\sigma)f(\sigma)d\sigma,\ \forall\tau\in[0,T].\end{aligned}$$

O seguinte Teorema contém o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.2.6 Seja (γ, ρ) um *par admissível* e seja $f \in L^{\gamma'}([0,T], L^{\rho'})$ e $T > 0$. Então $\phi_f \in C([0,T], L^2)$. Além disso, para todo *par admissível* (q,r) tem-se $\phi_f \in L^q([0,T], L^r)$, e existe uma constante c dependendo unicamente de γ e q tal que

$$||\phi_f||_{L^q([0,T],L^r)} \leq c||f||_{L^{\gamma'}([0,T],L^{\rho'})}. \tag{2.2.6}$$

Demonstração do Teorema 2.2.6 A prova será feita em seis etapas.

Etapa 1 Para todo *par admissível* (q,r) o operador ϕ é contínuo de $L^{q'}([0,T], L^{r'})$ em $L^q([0,T], L^r)$.
Primeiro consideremos o caso em que $f \in C([0,T], L^{r'})$. Neste caso $\phi_f \in C([0,T], L^r)$ pela Proposição (2.2.1); já que

$$||S(t-\tau)f(\tau)||_{L^r} \leq c|t-\tau|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}||f(\tau)||_{L^{r'}} \leq c|t-\tau|^{-\frac{2}{q}}||f||_{L^\infty([0,T],L^{r'})} < +\infty,$$

enquanto que para $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} ||\phi_f(t)||_{L^r} &\leq c\int_0^t |t-\tau|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}||f(\tau)||_{L^{r'}}d\tau = c\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{2}{q}}||f(\tau)||_{L^{r'}}d\tau \\ &\leq c\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{2}{q}}||f(\tau)||_{L^{r'}}d\tau. \end{aligned}$$

Pelas estimativas do Teorema 1.5.2 (Hardy-Littlewod-Sobolev) com $d = 1$ e $\alpha = 1 - \dfrac{2}{q}$ temos que

$$||\int_0^T \frac{1}{|t-\tau|^{2/q}}||f(\tau)||_{L^{r'}}d\tau||_{L^q} \leq c(q)||f||_{L^{q'}([0,T],L^{r'})},$$

onde $c(q)$ depende unicamente de q se $0 < 1 - \dfrac{2}{q} < 1$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q'} - \left(1 - \dfrac{2}{q}\right)$,

por sua vez $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q'} - \left(1 - \dfrac{2}{q}\right)$ implica que $n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{2}{q}$, e o fato que $0 < 1 - \dfrac{2}{q} < 1$ implica que $2 < r < \dfrac{2n}{n-2}$ si $n > 2$.

Da mesma forma prova-se no caso $n = 2$, $2 < r < \infty$, e o caso $n = 1, 2 < r \leq \infty$. Além disso, r pode ser igual a 2 independentemente da dimensão n. Segue então,

$$||\phi_f||_{L^q([0,T],L^r)} \leq c(q)||f||_{L^{q'}([0,T],L^{r'})} \quad \text{para } f \in C([0,T],L^{r'}).$$

Finalmente pela densidade de $C([0,T],L^{r'})$ em $L^{q'}([0,T],L^{r'})$ conclui-se a demonstração da etapa 1.

Etapa 2 Da mesma forma mostra-se que os operadores ψ e θ_t são contínuos de $L^{q'}([0,T],L^{r'})$ em $L^q([0,T],L^r)$.
Por exemplo, tem-se para o operador ψ

$$||\psi_t(t)||_{L^r} \leq \int_\tau^T ||S(\tau - t)f(t)||_{L^r}dt \leq \int_0^T c|\tau - t|^{-2/q}||f(t)||_{L^{r'}}dt.$$

A prova é analoga à desenvolvida na etapa 1.

Etapa 3 Para todo *par admissível* (q,r) o operador ϕ é contínuo de $L^{q'}([0,T],L^{r'})$ em $C([0,T],L^2)$.
A demonstração da etapa 3 faz-se supondo primeiro $f \in C([0,T],L^{r'})$ e como na etapa 1 conclui-se o resultado por densidade.
Assim, seja $f \in C([0,T],L^{r'})$, nós podemos supor que $f \in C([0,T],H^1)$, de fato convoluindo f com a sequência regularizante ρ_η na variável espacial; sabemos que $\rho_\eta * f(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho_\eta * f(t,\cdot) \to f(t,\cdot)$ em $L^{r'}(\mathbb{R}^n)$.

Agora $f_\eta(t) = \rho_\eta * f(t,\cdot) \in C([0,T],H^1)$; de fato, seja $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_k \to t$; para $t \in [0,T]$ assim

$$||\rho_\eta * f(t_k,\cdot) - \rho_\eta * f(t,\cdot)||_{L^2} \leq ||\rho_\eta(t)||_{L^p}||f(t_k,\cdot) - f(t,\cdot)||_{L^{r'}}, \quad \text{para } t \in [0,T]$$

Pela desigualdade de Young generalizada (ver Folland [F]) com $p = \dfrac{2r'}{3r'-2} \geq 1$ e $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r'} - 1$.

Analogamente.

$||\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_\eta * f(t_k,\cdot) - \frac{\partial}{\partial x_i}\rho_\eta * f(t,\cdot)||_{L^2} \leq ||\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_\eta||_{L^p}||f(t_k,\cdot) - f(t,\cdot)||_{L^{r'}}$ para $i = 1,2,\ldots,n$ já que $f \in C([0,T],L^{r'})$ implica que $||f(t_k,\cdot) - f(t,\cdot)||_{L^{r'}} \to 0$ quando $k \to +\infty$ com o que $f_\eta \in C([0,T],H^1)$. Neste caso $\phi_{f_\eta} \in C([0,T],H^1)$, (veja Cazenave e Haraux [CH] Lema 4.1.5).

Do fato que $(S(t))^* = S(-t)$ (ver Proposição 1.9.2.3), e denotando $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto escalar em L^2, obtemos que para todo $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
||\phi_{f_\eta}(t)||^2_{L^2} &= \langle\phi_{f_\eta}(t),\phi_{f_\eta}(t)\rangle = \langle\int_0^t S(t-\tau)f_\eta(\tau)d\tau, \int_0^t S(t-\sigma)f_\eta(\sigma)d\sigma\rangle.\\
&= \int_0^t\int_0^t \langle S(t-\tau)f_\eta(\tau), S(t-\sigma)f_\eta(\sigma)\rangle d\sigma d\tau = \int_0^t\int_0^t \langle f_\eta(\tau),(S(t-\tau))^*\\
&\qquad S(t-\sigma)f_\eta(\sigma)\rangle d\sigma d\sigma\\
&= \int_0^t\int_0^t \langle f_\eta(\tau), S(\tau-\sigma)f_\eta(\sigma)\rangle d\sigma d\tau = \int_0^t \langle f_\eta(\tau),\theta_{t,f_\eta}(\tau)\rangle.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Holder no espaço e no tempo, e usando a etapa 2, obtém-se

$$\begin{aligned}
||\phi_{f_\eta}(t)||^2_{L^2} &\leq \int_0^t ||f(\tau)||_{L^{r'}}||\theta_{t,f_\eta}(\tau)||_{L^r}d\tau \leq ||f_\eta||_{L^{q'}([0,T],L^{r'})}||\theta_{t,f_\eta}||_{L^q([0,T],L^r)}\\
&\leq c(q)||f_\eta||^2_{L^{q'}([0,T],L^{r'})}
\end{aligned}$$

já que $||f_\eta(t)||_{L^{r'}} \to ||f(t)||_{L^{r'}}$ e $||\phi_{f_\eta}(t)||_{L^2} \to ||\phi_f(t)||_{L^2}$ quando $\eta \to \infty$.

Finalmente temos que

$$||\phi_f(t)||_{L^2} \leq c(q)||f||_{L^{q'}([0,T],L^{r'})}, \tag{2.2.7}$$

usando a densidade de $C([0,T],L^{r'})$ em $L^{q'}([0,T],L^{r'})$ obtem-se (2.2.7) para $f \in L^{q'}(0,T,L^{r'})$.

Etapa 4 Da mesma forma mostra-se que o operador ψ é continuo de $L^{q'}([0,T],L^{r'})$ em $C([0,T],L^2)$.

Por densidade é suficiente considerar o caso $f \in C([0,T],L^{r'})$ e convoluindo com uma sequência regularizante pode-se supor $f \in C[0,T],H^1)$. Pela demonstração na etapa 3, temos

$$\|\psi_f(\tau)\|_{L^2}^2 = \langle \int_\tau^T S(\tau-t)f(t)dt, \int_\tau^T S(\tau-\sigma)f(\sigma)d\sigma\rangle = \int_\tau^T \int_\tau^T \langle f(t),$$
$$S(t-\sigma)f(\sigma)f(\sigma)\rangle d\sigma dt$$
$$= \int_\tau^T \langle f(t), \int_0^T S(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma - \int_0^\tau S(\tau-\sigma)f(\sigma)d\sigma\rangle \le \int_0^T \|f(t)\|_{L^{r'}}\|\theta_{T,f}\|_{L^r}$$
$$+\|f\|_{L^{r'}}\|\theta_{\tau,f}\|_{L^r}$$
$$\le \|f|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})}c(q)\|f\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})} + \|f\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})}c(q)\|f\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})}$$

concluindo-se assim a etapa 4.

Etapa 5 Para todo *par admissível* (q,r) o operador ϕ é continuo de $L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$ em $L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^n))$.
A seguinte observação é importante para a prova da etapa 5.

Observação 2.2.7 Se (q,r) é um *par admissível* verifica-se que

$$\|u\|_{L^q([0,T],L^r)} = \sup\{|\int_0^T Re(\int u\overline{\varphi}) : \varphi \in C([0,T],L^{r'}) \cap C([0,T],H^1);$$
$$\|\varphi\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})} \le 1\}.$$

Continuando com a demonstração da etapa 5, seja $f \in L^1([0,T],L^2)$ e $\varphi \in C([0,T],H^1) \cap C([0,T],L^{r'})$ tal que $\|\varphi\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})} \le 1$. Em particular, $\phi_f \in C([0,T],L^2)$ (já que $(\infty,2)$ é um *par admissível*) e aplica-se a etapa 4 com $r' = 2$, $q' = 1$ e $\|\psi_\varphi\|_{L^\infty([0,T],L^2)} \le c(q)\|\varphi\|_{L^{q'}([0,T],L^{r'})} \le c(q)$ (também pela etapa 4).
Temos então que

$$\int_0^T Re(\int \phi_f(t)\overline{\varphi}(t))dt = \int_0^T \langle\phi_f(t),\varphi(t)\rangle dt = \int_0^T \int_0^t \langle S(t-\tau)f(\tau),\varphi(t)\rangle d\tau dt =$$
$$= \int_0^T \int_0^t \langle f(\tau), s(\tau-t)\varphi(t)\rangle d\tau dt = \int_0^T \int_\tau^T \langle f(\tau), s(\tau-t)\varphi(t)\rangle dt d\tau$$
$$= \int_0^T \langle f\tau), \psi_\varphi(\tau)\rangle d\tau.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a etapa 4 obtemos

$$|\int_0^T Re(\int \phi_f(t)\overline{\varphi}(t))dt| \leq \int_0^T ||f(\tau)||_{L^2}||\psi_\varphi(\tau)||_{L^2}d\tau \leq ||f||_{L^1([0,T],L^2)}||\psi_\varphi||_{L^\infty([0,T],L^2)}$$
$$\leq c(q)||f||_{L^1([0,T],L^2)}.$$

E finalmente pela observação (2.2.7) conclui-se o resultado.

Etapa 6 Conclusão da demonstração da Proposição (2.2.6). Seja (γ,ρ) um *par admissível* seja (q,r) um *par admissível* tal que $2 \leq r \leq \rho$ e seja $\theta \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{\rho} + \frac{1-\theta}{2} \ \text{ e } \ \frac{1}{q} = \frac{\theta}{\gamma} + \frac{1-\theta}{\infty} \ \text{ e}$$

$$||\phi_f(t)||_{L^r} \leq ||\phi_f(t)||_{L^2}^{1-\theta}||\phi_f(t)||_{L^\rho}^{\theta}$$

Logo,

$$\int_0^T ||\phi_f(t)||_{L^r}^q dt \leq \int_0^T ||\phi_f(t)||_{L^2}^{(1-\theta)q}||\phi_f(t)||_{L^\rho}^{\theta q} dt \leq \{(\int_0^T ||\phi_f(t)||_{L^\rho}^{q\theta\frac{\gamma}{q\theta}} dt)^{\frac{q\theta}{\gamma}}$$

$$||\phi_f||_{L^\infty([0,T],L^2)}^{q(1-\theta)}\}.$$

Assim,

$||\phi_f||_{L^q([0,T],L^r)} \leq ||\phi_f||_{L^\gamma([0,T],L^\rho)}^{\theta}||\phi_f||_{L^\infty([0,T],L^2)}^{1-\theta} \leq c(q,\gamma)||f||_{L^{\gamma'}([0,T],L^{\rho'})}$, para $f \in L^{\gamma'}([0,T],L^{\rho'})$.

Portanto ϕ é continua de $L^{\gamma'}([0,T],L^{\rho'})$ em $L^q([0,T],L^r)$.

Tomemos agora um *par admissível* (q,r) tal que $\rho < r < \dfrac{2n}{n-2}$($\rho < r < \infty$, se $n=2, \rho < r \leq \infty$ se $n=1$). e seja $\mu \in (0,1)$ tal que

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{\mu}{1} + \frac{1-\mu}{q'} \ \text{ e } \ \frac{1}{\rho'} = \frac{\mu}{2} + \frac{1-\mu}{r'}.$$

Pelas etapas 1 e 5 ϕ é um operador contínuo de $L^{q'}([0,T],L^{r'})$ em $L^q([0,T],L^r)$, e de $L^1([0,T],L^2)$ em $L^q([0,T],L^r)$. Aplicando um teorema de interpolação (ver J.

Bergh e J. Löfström [BL] (Teorema 5.1.2 pag. 107)) ϕ é um operador continuo de $L^{\sigma}([0,T],L^{\delta}) \to L^{q}([0,T],L^{r})$, para toda dupla (σ,δ) tal que

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{\theta}{1}+\frac{1-\theta}{q'} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\delta}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{r'}$$

com $\theta \in (0,1)$. Se fizermos a escolha $\theta = \mu$, se deduz-se que ϕ é continuo de $L^{\gamma'}([0,T],L^{\rho'})$ em $L^{q}([0,T],L^{r})$.

A seguir estabelecemos outro resultado da mesma natureza que o Teorema 2.2.6 e cuja demonstração é paralela à demonstração do Teorema 2.2.6.

Proposição 2.2.8 Seja $\varphi \in L^2$. Então para todo *par admissível* (q,r) tem-se que $S(\cdot)\varphi \in L^q(\mathbb{R},L^r)$, e existe uma constante c_1, dependendo unicamente de q tal que

$$||S(\cdot)\varphi||_{L^q(\mathbb{R},L^r)} \le c_1(q)||\varphi||_{L^2}. \tag{2.2.8}$$

Demonstração A demonstração é da mesma forma do Teorema 2.2.6 e só faremos um esboço das etapas. Definimos

$$\wedge_f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} S(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad ,\Gamma_f=\int_{-\infty}^{+\infty} S(-t)f(t)dt$$

Mostra-se que (ver etapa 1 da prova da proposição 2.2.6)

$$||\wedge_f||_{L^q(\mathbb{R},L^r)} \le c(q)||f||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'})}$$

Na mesma forma que na prova da etapa 3 do Teorema 2.2.6 temos que

$$||\Gamma_f||^2_{L^2}=\langle\int_{-\infty}^{+\infty} S(-t)f(t)dt,\int_{-\infty}^{+\infty} S(-\sigma)f(\sigma)d\sigma\rangle =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f(t),S(t-\sigma)f(\sigma)\rangle d\sigma dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f(t),\wedge_f(t)\rangle dt \le \int_{-\infty}^{+\infty}||f(t)||_{L^{r'}}||\wedge_f(t)||_{L^r}dt \le ||f||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'})}$$

$$||\wedge_f||_{L^q(\mathbb{R},L^r)} \le c(q)||f||^2_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'})}.$$

Conclui-se a demonstração de forma similar que na prova da etapa 5 do Teorema 2.2.6. Seja $\psi \in C(\mathbb{R}, L^{r'}) \cap C(\mathbb{R}, H^1)$, $||\psi||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'})} \leq 1$, então

$$|\int_{-\infty}^{+\infty}(S(t)\varphi, \psi(t))dt| = |\langle\varphi, \int_{-\infty}^{+\infty} S(-t)\psi(t)dt\rangle| \leq c(q)||\varphi||_{L^2}||\Gamma_f||_{L^2} \leq$$

$$\leq c(q)||\varphi||_{L^2}||\psi||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'})} \leq c(q)||\varphi||_{L^2}$$

Logo

$$||S(\cdot)\varphi||_{L^q(\mathbb{R},L^r)} \leq c_1(q)||\varphi||_{L^2}.$$

Observação 2.2.9

i) O Teorema 2.2.6 e a Proposição 2.2.7 fornecem uma estimativa para a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f = 0, \\ u(0) = \varphi; \end{cases}$$

como será visto no Capítulo 3.

CAPÍTULO 3

A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR

Neste capítulo estudaremos o problema não linear de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + \lambda |u|^\alpha u, \text{ em } (x,t) \in I\!R^n \times I\!R; \\ \varphi(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{NLS}$$

onde λ e α são constantes reais com $\alpha > 0$.

Consideremos a formulação integral da equação (NLS) (ver Cazenave e Haraux [CH]; capítulo 4 e Kato [K]; Lema 1.1)
Seja,

$$u(t) = S(t)\varphi + (-i\lambda)\int_0^t S(t-\sigma)|u|^\alpha u(\sigma)d\sigma, \tag{3.1}$$

onde $S(t)$ é o grupo de isometrias gerado por $i\Delta$ (ver capítulo 2, seção 2.1) chamando $\mathcal{F}u(t) = -i\lambda \int_0^t S(t-\sigma)|u|^\alpha u(\sigma)d\sigma$ em (3.1). Escrevemos

$$u(t) = S(t)\varphi + \mathcal{F}u(t). \tag{3.2}$$

3.1 A TEORIA LOCAL EM $L^2(I\!R^n)$

Nosso principal resultado estabelece que sob certas hipóteses no expoente α da não linearidade, o problema (3.2) está localmente bem posto em $L^2(I\!R^n)$; mais exatamente temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.1 (Teoria Local em $L^2(I\!R^n)$) Seja $0 < \alpha < \dfrac{4}{n}$, então para todo $\varphi \in L^2(I\!R^n)$, existem $T = T(||\varphi||_{L^2}, n, \lambda, \alpha) > 0$ e uma única solução u da equação integral (3.2) no intervalo de tempo $[-T,T]$ com

$$u \in C([-T,T], L^2(I\!R^n)) \cap L^r([-T,T], L^{\alpha+2}(I\!R^n)). \tag{3.1.1}$$

onde $r = \dfrac{4(\alpha+2)}{n\alpha}$.
Mais ainda, para todo $T_1 < T$ existe uma vizinhança V de φ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que a função

$$\begin{aligned} F : V &\rightarrow C([-T_1, T_1], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([-T_1, T_1], L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^n)) \\ \tilde{\varphi} &\mapsto \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

é lipschitziana.

Na demonstração faremos uso da seguinte notação: para todo par (T_0, a) de constantes positivas definimos o espaço.

$$\begin{aligned} E(T_0, a) &= \{v \in C([-T_0, T_0], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([-T_0, T_0], L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^n)), \text{ tal que} \\ &\quad ||v||_{L^\infty([-T_0,T_0],L^2)} \leq a \ \text{ e } \ ||v||_{L^r([-T_0,T_0],L^{\alpha+2})} \leq a\} \end{aligned}$$

Observação 3.1.2.

i) A dupla $(r, \alpha+2)$ é um *par admissível.*
ii) $E(T_0, a)$ é um espaço métrico completo. (ver [T], Lema 2.3).

A demonstração do Teorema 3.1.1 será feita em duas etapas

Etapa 1: Existem constantes positivas T e a (que dependem só de $||\varphi||_{L^2}, n, \lambda, \alpha$) tais que o operador ϕ definido por

$$\phi u(t) = s(t)\varphi + \mathcal{F}u(t) \tag{3.1.2}$$

satisfaz

$$\phi : E(T, a) \rightarrow E(T, a) \ \text{ e } \phi \ \text{ é uma contração} \tag{3.1.3}$$

Para a demonstração é suficiente considerar o caso em que $t \geq 0$. Fazendo uso de (2.2.6), (2.2.8) (Cap. 2) e da definição de ϕ em (3.1.2) temos que

$$\begin{aligned} ||\phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} &\leq c_1||\varphi||_{L^2} + c|\lambda| \ |||u|^{\alpha+1}||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})} \\ &= c_1||\varphi||_{L^2} + c|\lambda| \ ||u||^{\alpha+1}_{L^{(\alpha+1)r'}([0,T],L^{\alpha+2})} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Pelas hipótese $0 < \alpha < \frac{4}{n}$, tem-se então $1 - \frac{n\alpha}{4} > 0$
Logo de (3.1.4) da desigualdade de Hölder no tempo com as funções 1 e $||u(t)||_{L^{\alpha+2}}^{(\alpha+1)r'}$, e s e s' tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ e $(\alpha+1)r's' = r$ (o qual implica $\frac{1}{s} = r'(1 - \frac{n\alpha}{4})$ temos,

$$||\phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \leq c_1||\varphi||_{L^2} + c|\lambda|T^\theta ||u||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}^{\alpha+1} \tag{3.1.5}$$

com $\theta = \frac{1}{sr'} = 1 - \frac{n\alpha}{4}$.
Fazendo uso de (2.2.6), (2.2.8) (Cap. 2) e (3.1.2) obtém-se

$$||\phi(u)||_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq c_1||\varphi||_{L^2} + c|\lambda||| \, |u|^{\alpha+1}||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})} ,$$

e na mesma forma que em (3.1.5) temos,

$$||\phi(u)||_{L^\infty([0,T),L^2)} \leq c_1||\varphi||_{L^2} + c|\lambda|T^\theta ||u||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}^{\alpha+1} , \tag{3.1.6}$$

onde as constantes c_1 e c dependem só de α e da dimensão n.

Sejam $u, v \in E(T,a)$ (com (T,a) a serem escolhidos depois), temos

$$(\phi(v) - \phi(u))(t) = -i\lambda \int_0^t S(t-\sigma)(|v|^\alpha v - |u|^\alpha u)(\sigma)d\sigma.$$

Usando novamente (2.2.6) como em (3.1.5),

$$||\phi(v) - \phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \leq c|\lambda||| \, |v|^\alpha v - |u|^\alpha u||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})}. \tag{3.1.7}$$

Tendo em conta a desigualdade

$$||v|^\alpha v - |u|^\alpha u| \leq c_\alpha(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|v-u| \quad \text{(onde a constante } c_\alpha \text{ depende de } \alpha) \tag{3.1.8}$$

a qual pode ser obtida da seguinte forma:
Sem perda de generalidade podemos supor que $|v| \leq |u|$; seja $\tilde{v} = \frac{|v|}{|u|}u$, então $|\tilde{v}| = |v|$

$$\begin{aligned} ||u|^\alpha u - |v|^\alpha v| &\leq ||u|^\alpha u - |\tilde{v}|^\alpha \tilde{v}| + ||\tilde{v}|^\alpha \tilde{v} - |v|^\alpha v| \\ &\leq ||u|^\alpha u - |v|^\alpha \frac{|v|}{|u|} u| + |v|^\alpha |\tilde{v} - v| \end{aligned}$$

calculemos agora os termos da última desigualdade

$$\begin{aligned}||u|^\alpha u - |v|^\alpha \frac{|v|}{|u|}u| &= |u||u|^\alpha - \frac{|v|^{\alpha+1}}{|u|}| = ||u|^{\alpha+1} - |v|^{\alpha+1}| \leq \\ &\leq c_\alpha(|u|^\alpha + |v|^\alpha)||u| - |v|| \\ &\leq c_\alpha(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|u-v|.\end{aligned}$$

$|v|^\alpha|\tilde{v} - v| \leq |u|^\alpha|\tilde{v} - v| \leq |u|^\alpha|u - v|$
com o que demonstra-se a desigualdade.

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder generalizada (ver Brezis [B] Pag. 57) no espaço com $\frac{\alpha+1}{\alpha+2} = \frac{\alpha}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+2}$, temos que

$$\begin{aligned}||\phi(v) - \phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} &\leq c_\alpha|\lambda|||(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|v-u|||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})}, \\ &\leq c_\alpha|\lambda|\ ||\ |||u|^\alpha + |v|^\alpha(\cdot)||_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}}||v - u(\cdot)||_{L^{\alpha+2}}||_{L^{r'}([0,T])} \\ &\leq c_\alpha|\lambda|T^\theta||\ |||u|^\alpha + |v|^\alpha(\cdot)||_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}}||v - u(\cdot)||_{L^{\alpha+2}}||_{L^{r's'}([0,T])} \\ &\leq c_\alpha|\lambda|T^\theta||\ ||(||u(\cdot)||^\alpha_{L^{\alpha+2}} + ||v(\cdot)||^\alpha_{L^{\alpha+2}})||v - u(\cdot)||_{L^{\alpha+2}}||_{L^{\frac{r}{\alpha+1}}([0,T])} \\ &\leq c_\alpha|\lambda|T^\theta\{(||v||^\alpha_{L^r([0,T]),L^{\alpha+2})} \\ &\quad +||u||^\alpha_{L^r([0,T]),L^{\alpha+2})})||v-u||_{L^r([0,T]),L^{\alpha+2})}\},\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder no tempo com s e s' tal que $(\alpha+1)r's' = r$, e $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ (com o que $\theta = \frac{1}{sr'}$) para a terceira desigualdade e a desigualdade de Hölder generalizada no tempo com $\frac{\alpha+1}{r} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r}$ para a última desigualdade. Assim se $u, v \in E(T, a)$

$$||\phi(v) - \phi(u)||_{L^r([0,T]),L^{\alpha+2})} \leq c_\alpha|\lambda|T^\theta 2a^\alpha||v - u||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}, \tag{3.1.9}$$

analogamente obtemos

$$||\phi(v) - \phi(v)||_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq c_\alpha|\lambda|T^\theta 2a^\alpha||v - u||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}$$

de isto, (3.1.5) , (3.1.6) e (3.1.9) temos

$$||\phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \leq c||\varphi||_{L^2} + c_1|\lambda|T^\theta a^{\alpha+1}, \tag{3.1.10}$$

e

$$||\phi(u)||_{L^r([0,T],L^2)} \leq c||\varphi||_{L^2} + c_1|\lambda|T^\theta a^{\alpha+1}, \tag{3.1.11}$$

Fixemos $c_2 = \max\{c_1, c_\alpha\}$ e a tal que $a = 2c_2||\varphi||_{L^2}$ e $T > 0$ tal que $c_2|\lambda|T^\theta a^{\alpha+1} < \dfrac{a}{2}$, então

$$2^{\alpha+1}c_2^{\alpha+1}|\lambda|T^\theta||\varphi||_{L^2}^\alpha < 1 \ .$$

Tem-se então que $2c_\alpha|\lambda|T^\theta a^\alpha < 2^{\alpha+1}c_2^{\alpha+1}|\lambda|T^\theta||\varphi||_{L^2}^\alpha < 1$.

Logo de (3.1.9), (3.1.10) e (3.1.11) conclui-se a demonstração da etapa 1.

Etapa 2 Conclusão da demonstração do Teorema 3.1.1.

Pelo Teorema 1.1.1 e a etapa 1, existe uma única solução da equação (3.2).

Assim temos provado a existência, unicidade da solução da equação (3.2). Agora provaremos a continuidade de $\phi(u)(t)$ com respeito a φ. Sejam u, v duas soluções de (3.2) correspondentes aos dados iniciais φ, φ_0 então

$$u(t) - v(t) = S(t)(\varphi - \varphi_0) + (-i\lambda)\int_0^t S(t-\sigma)(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)(\sigma)d\sigma$$

Usando (2.2.6) e (2.2.8) de maneira análoga à demonstração da etapa 1, obtém-se,

$$||u - v||_{L^r([0,T_1],L^{\alpha+2})} \leq c_1||\varphi_0 - \varphi||_{L^2} + 2c_\alpha T_1^\theta a^\alpha||u - v||_{L^r([0,T_1]),L^{\alpha+2})}$$

para todo $T_1 < T$. Pela escolha feita para T na etapa 1 temos

$$||u - v||_{L^r([0,T_1],L^{\alpha+2})} \leq \tilde{k}||\varphi - \varphi_0||_{L^2}$$

com $\tilde{k} = \dfrac{c_1}{1 - 2c_\alpha a^\alpha T_1^\theta}$.

Analogamente obtém-se que

$$||u - v||_{L^\infty([0,T_1],L^2)} \leq \tilde{k}||\varphi - \varphi_0||_{L^2},$$

com o que de se termina a demonstração do Teorema 3.1.1.

Corolário 3.1.3 A solução u da equação (3.2) obtida no Teorema 3.1.1 pertence a $L^q([T,T],L^p(\mathbb{R}^n))$ para todo *par admissível* (q,p). Mais ainda, a dependência continua da solução com respeito ao dado inicial descrita no Teorema 3.11 se estende aos espaços $L^q([-T,T],L^p(\mathbb{R}^n))$.

Demonstração Sem perda de generalidade vamos supor que $t \geq 0$. Combinando a etapa 1 da demonstração do Teorema 3.1.1 com (2.2.3) e (2.2.5) temos que

$$\begin{aligned}
||u||_{L^q([0,T,L^p)} &\leq c_1|\varphi|_{L^2} + c|\lambda|||u|^{\alpha+1}||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})} \\
&\leq c_1|\varphi|_{L^2} + c|\lambda|T^{\theta}||u||^{\alpha+1}_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}.
\end{aligned}$$

A prova da dependência continua com respeito ao dado inicial descrita no Teorema 3.1.1, faz-se da mesma forma. De fato, sejam u, v duas soluções de (3.2) correspondentes aos dados iniciais φ, φ_0 então

$$u(t) - v(t) = S(t)(\varphi - \varphi_0) + (-i\lambda)\int_0^t S(t-\sigma)((u)^{\alpha}u - |v|^{\alpha}v)(\sigma)d\sigma$$

Usando (2.2.3) e (2.2.5) analogamente à demonstração do Teorema 3.1.1,

$$||u - v||_{L^q([0,T_1],L^p)} \leq c_1||\varphi - \varphi_0||_{L^2} + 2c_{\alpha}T_1^{\theta}a^{\alpha}||u - v||_{L^r([0,T_1],L^{\alpha+2})}$$

e pela demonstração do Teorema 3.1.1

$$||u - v||_{L^q([0,T_1],L^q)} \leq c_1||\varphi - \varphi_0||_{L^2} + \tilde{k}||\varphi - \varphi_0||_{L^2} \leq \tilde{\tilde{k}}||\varphi - \varphi_0||_{L^2}$$

com o que termina-se a demonstração.

3.2 A TEORIA LOCAL EM $H^1(\mathbb{R}^n)$

O seguinte resultado é da mesma natureza que o Teorema 3.1.1, assim como a demonstração.

Consideremos a equação integral (3.2), e vamos supor que α satisfaz.

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{4}{n-2}; & \text{se } n \geq 3 \\ 0 < \alpha < \infty; & \text{se } n = 1, 2. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Teorema 3.2.1 Se α satisfaz (3.2.1), então para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ existe $T = T(||\varphi||_{H^1}, n, \lambda, \alpha) > 0$ e uma única solução u da equação integral (3.2) no intervalo $[-T, T]$ com

$$u \in C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([-T, T], W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}^n)) \tag{3.2.2}$$

onde $r = \dfrac{4(\alpha+2)}{n\alpha}$.
Mais ainda, para todo $T_1 < T$, existe uma vizinhança W de φ em $H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que a função

$$\begin{aligned} F: \quad & W \to C([-T_1, T_1], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([-T_1, T_1], W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}^n)) \\ & \tilde{\varphi}_0 \mapsto \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

é lipschitziana.

Demonstração

Neste teorema faremos a demonstração apenas no caso em que $\alpha \geq 1$. A demonstração no caso geral pode ser encontrada em Kato [K] (Theo I).

Observemos primeiro que a dupla $(r, \alpha + 2)$ é um *par admissível*. Definamos

$$\begin{aligned} E(T, a) \quad = \quad & \{v \in C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([-T, T], W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}^n)) : \\ & ||v||_{L^\infty([-T,T],H^1)} \leq a \quad \text{e} \\ & (\int_{-T}^{T} (||v(t)||^r_{L^{\alpha+2}} + ||\nabla_x v(t)||^r_{L^{\alpha+2}}) dt)^{1/r} \leq a\} \end{aligned}$$

onde T, a são constantes positivas e $E(T, a)$ é um espaço métrico completo.

Definamos o operador (ver 3.2)

$$\phi u(t) = S(t)\varphi + \mathcal{F}u(t)$$

e provemos que existem constantes T e a tal que $\phi(E(T,a)) \subset E(T,a)$.

Supondo $t \geq 0$ e usando (2.2.6), (2.2.8) tem-se,

$$\begin{aligned} ||\phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} &\leq c_1||\varphi||_{L^r} + c|\lambda|\ |||u|^{\alpha+1}||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})} \qquad (3.2.3)\\ &\leq c||\varphi||_{L^2} + c|\lambda|||u||^{\alpha+1}_{L^{(\alpha+1)r'}([0,T],L^{\alpha+2})} \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3.5 segue-se que

$$||u(t)||_{L^{\alpha+2}} \leq ||u(t)||_{H^1}.$$

(Por exemplo, se $n \geq 3, \alpha < \dfrac{4}{n-2}$ se e somente se $\alpha + 2 < \dfrac{2n}{n-2}$ a qual é nossa condição de *par admissível* (para $n = 1$ ou $n = 2$ usa-se o Teorema 1.4.7).

Temos assim que de (3.2.3)

$$\begin{aligned} ||\phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} &\leq c||\varphi||_{L^2} + c|\lambda|||u||^{\alpha+1}_{L^\infty([0,T],H^1}T^{1/r'} \\ &\leq c||\varphi||_{L^2} + c|\lambda|a^{\alpha+1}T^{\frac{1}{r'}}. \end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos usados acima,

$$||\nabla_x\phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \leq c||\nabla\varphi||_{L^2} + c|\lambda|\ |||u|^\alpha\nabla_x u||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})}. \qquad (3.2.4)$$

Usando a desigualdade de Hölder generalizada com $\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} = \dfrac{\alpha}{\alpha+2} + \dfrac{1}{\alpha+2}$ e o Teorema 1.3.5 tem-se,

$$|||u|^\alpha\nabla_x u(t)||_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} \leq ||u(t)||^\alpha_{L^{\alpha+2}}||\nabla_x u(t)||_{L^{\alpha+2}} \leq ||u||^\alpha_{H^1}||\nabla_x u(t)||_{L^{\alpha+2}}.$$

Logo temos,

$$\begin{aligned} |||u|^\alpha\nabla_x u||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})} &\leq ||u||^\alpha_{L^\infty([0,T],H^1)}||\nabla_x u(t)||_{L^{r'}([0,T],L^{\alpha+2})} \\ &\leq T^{1/\ell}||u||^\alpha_{L^\infty([0,T],H^1)}||\nabla_x u||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}, \end{aligned}$$

onde para a última desigualdade usa-se a desigualdade de Hölder generalizada com

$\dfrac{1}{r'} = \dfrac{1}{\ell} + \dfrac{1}{r}$ e $\dfrac{1}{\ell} = 1 - \dfrac{2}{r} > 0$, obtendo-se em (3.2.4) que

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \phi(u)\|_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} &\leq c\|\nabla\varphi\|_{L^2} + c|\lambda|T^{1/\ell}\|u\|^{\alpha}_{L^\infty([0,T],H^1)}\|\nabla_x u\|_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}. \\ &\leq c\|\nabla\varphi\|_{L^2} + c|\lambda|T^{1/\ell}a^{\alpha+1} \qquad (3.2.5) \end{aligned}$$

Para mostrar que

$$\left(\int_0^T (\|\phi(u)\|^r_{L^{\alpha+2}} + \|\nabla_x\phi(u)\|^r_{L^{\alpha+2}})dt\right)^{1/r} \leq a\ ,$$

fixemos a tal que $c\|\varphi\|_{H^1} = \dfrac{a}{2}$ e basta escolher $T_1 > 0$ tal que

$$c|\lambda|a^{\alpha+1}(T_1^{1/r'} + T_1^{1/\ell}) < 1.$$

Analogamente mostra-se que

$$\begin{aligned} \|\phi(u)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} &\leq c\|\varphi\|_{L^2} + c|\lambda|\||u|^{\alpha+1}\|_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})} \\ &\leq c\|\varphi\|_{L^2} + c|\lambda|T^{\theta}\|u\|^{\alpha+1}\|_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \leq \frac{a}{2} + c|\lambda|T^{\theta}a^{\alpha+1} \end{aligned}$$

onde $\theta = 1 - \dfrac{n\alpha}{4} > 0$.

Da mesma forma que em (3.2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla_x\phi(u)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} &\leq c\|\nabla\varphi\|_{L^2} + c|\lambda|\||u|^{\alpha}\nabla_x u\|_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})} \\ &\leq c\|\nabla\varphi\|_{L^2} + c|\lambda|\ \|u\|^{\alpha}_{L^\infty([0,T],H^1)}T^{1/\ell}\|\nabla_x u\|_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \\ &\leq \frac{a}{2} + c|\lambda|a^{\alpha+1}T^{1/\ell}. \end{aligned}$$

Para mostrar que

$$\|\phi(u)\|_{L^\infty([0,T],H^1)} \leq a,$$

basta escolher $T_2 > 0$ tal que

$$c|\lambda|T_2^{\theta}a^{\alpha+1} + c|\lambda|T_2^{1/\ell}a^{\alpha+1} < 1.$$

Tomando $T = \min\{T_1, T_2\}$ tem-se que $\phi(E(T,a)) \subset E(T,a)$.

Demostraremos agora que existe uma única solução u da equação (3.2). Para isso demostraremos que $\phi : E(T,a) \to E(T,a)$ é uma contração.

Sejam $u, v \in E(T,a)$, então

$$\begin{aligned}
||\phi(v) - \phi(u)||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} &\leq c_\alpha|||u|^\alpha u - |v|^\alpha v||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})}\\
&\leq c_\alpha|\lambda|\{||(||u(t)||^\alpha_{L^{\alpha+2}} + ||v(t)||^\alpha_{L^{\alpha+2}})\\
&\quad ||(u-v)(t)||_{L^{\alpha+2}}||_{L^{r'}([0,T])}\\
&\leq c_\alpha|\lambda|T^{1/r'}||u-v||_{L^\infty([0,T],H^1)}(||u||^\alpha_{L^\infty([0,T],H^1)}\\
&\quad +||v||^\alpha_{L^\infty([0,T],H^1)})\\
&\leq c_\alpha|\lambda|T^{1/r'}2a^\alpha||u-v||_{L^\infty([0,T],H^1)}.
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Analogamente

$$||\nabla_x(\phi(v) - \phi(u))||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \leq c_1|||u|^\alpha\nabla_x u - |v|^\alpha\nabla_x v||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})}. \tag{3.2.7}$$

A seguinte desigualdade

$$||u|^\alpha\partial_x u - |v|^\alpha\partial_x v| \leq c_2\{|v|^\alpha|u_x - v_x| + (|u|^{\alpha-1} + |v|^{\alpha-1})|u-v|\ |u_x|\} \tag{3.2.8}$$

é obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned}
||u|^\alpha u_x - |v|^\alpha v_x| &\leq ||u|^\alpha u_x - |v|^\alpha u_x| + ||v|^\alpha u_x - |v|^\alpha v_x|\\
&\leq ||u|^{\alpha-1}|u| - |v|^{\alpha-1}|v|||u_x| + |v|^\alpha|u_x - v_x|\\
&\leq c_2(|u|^{\alpha-1} + |v|^{\alpha-1})|u-v||u_x| + |v|^\alpha|u_x - v_x|)
\end{aligned}$$

De (3.2.7), (3.2.8) e da desigualdade de Hölder generalizada obtemos

$$\begin{aligned}
&|||u|^\alpha\nabla_x u - |v|^\alpha\nabla_x v(t)||_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} \leq c_2|\lambda|\{||v(t)||^\alpha_{W^{1,\alpha+2}}||(u-v)(t)||_{W^{1,\alpha+2}}\\
&+||u(t)||_{W^{1,\alpha+2}}||(u-v)(t)||_{W^{1,\alpha+2}}(||u(t)||^{\alpha-1}_{W^{1,\alpha+2}} + ||v(t)||^{\alpha-1}_{W^{1,\alpha+2}})\}.
\end{aligned}$$

para obter mais uma desigualdade similar a (3.2.6) temos supondo $\alpha \geq 1$, e usando a desigualdade acima

$$\begin{aligned}
||\nabla_x(\phi(v)-\phi(u))||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} &\leq |\lambda| c a^{\alpha} ||u-v||_{L^{r'}([0,T],W^{1,\alpha+2})} \\
&\quad +2a^{\alpha}||u-v||_{L^{r'}([0,T],W^{1,\alpha+2})} \\
&\leq |\lambda| 2ca^{\alpha}||u-v||_{L^{r'}([0,T],W^{1,\alpha+2})} \\
&\leq 2ca^{\alpha}|\lambda| T^{\theta}||u-v||_{L^{r}([0,T],W^{1,\alpha+2})} \quad (3.2.9)
\end{aligned}$$

com $\theta = \dfrac{1}{r's'} = \dfrac{r-2}{r}$; onde para obter a última desigualdade aplicamos a desigualdade de Hölder com s e s' tal que $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$ e $r's=r$; observe-se que $\theta > 0$ já que $r > 2$.

Analogamente prova-se

$$||\phi(u)-\phi(v)||_{L^{\infty}([0,T],L^2)} \leq c|\lambda| T^{1/r'} 2a^{\alpha}||u-v||_{L^{\infty}([0,T],H^1)} \qquad (3.2.10)$$

e

$$||\nabla_x(\phi(u)-\phi(v))||_{L^{\infty}([0,T],L^2)} \leq 2cT^{\theta}a^{\alpha}|\lambda| ||u-v||_{L^{r}([0,T],W^{1,\alpha+2})}, \qquad (3.2.11)$$

de (3.2.6) a (3.2.11) podemos escolher $T(||\varphi||_{H^1}, n, \lambda, \alpha) > 0$ tal que

$$2c|\lambda| T^{1/r'} a^{\alpha} + T^{\theta} 2ca^{\alpha}|\lambda| < 1.$$

Com o que a aplicação ϕ é uma contração (ver demonstração do Teorema 3.1.1), assim pelo Teorema 1.1.1 temos a existência e unicidade da solução para a equação integral (3.2).

De maneira análoga ao Teorema 3.1.1 provaremos a dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial. Sejam u, v duas soluções de 3.2 correspondentes aos dados iniciais φ, φ_0 então

$$||u-v||_{L^r([0,T_1],W^{1,\alpha+2})} \leq c||\varphi-\varphi_0||_{H^1} + 2c_{\alpha}a^{\alpha}|\lambda|(T_1^{\theta}+T_1^{1/r'})||u-v||_{L^r([0,T_1],W^{1,\alpha+2})}$$

para todo $T_1 < T$.

Pela escolha feita para T temos que

$$||u-v||_{L^r([0,T_1],W^{1,\alpha+2})} \leq \tilde{K}||\varphi-\varphi_0||_{H^1}.$$

Da mesma forma demonstra-se que

$$||u-v||_{L^\infty([0,T_1],H^1)} \leq \tilde{K}_1||\varphi-\varphi_0||_{H^1}$$

com o que conclui-se a demonstração do Teorema acima.

Corolário 3.2.2 A solução u da equação integral (3.2) obtida no Teorema 3.2.1 pertence a $L^q([-T,T],W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ para todo par (q,p) admissível. Mais ainda a dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial descrita no Teorema 3.2.1 estende-se ao espaço $L^q([-T,T],W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

Demonstração Fazendo uso da Proposição 2.2.6 e do Teorema 3.2.1 temos

$$\begin{aligned} ||u||_{L^q([0,T],L^p)} &\leq c_1||\varphi||_{L^2}+c|\lambda|||u||^{\alpha+1}_{L^{(\alpha+1)r'}([0,T],L^{\alpha+2})} \\ &\leq c_1||\varphi||_{L^2}+c|\lambda|T^\theta||u||^{\alpha+1}_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})} \end{aligned}$$

na mesma forma temos

$$||\nabla_x u||_{L^q([0,T],L^p)} \leq c_1||\nabla\varphi||_{L^2}+c|\lambda|\; ||\;|u|^\alpha\nabla_x u||_{L^{r'}([0,T],L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})}$$

analogamente a (3.2.5) e (3.2.6)

$$||\nabla_x u||_{L^q([0,T],L^p)} \leq c_1||\nabla\varphi||_{L^2}+cT^{1/\ell}|\lambda|\; ||u||_{L^\infty([0,T],H^1)}||\nabla_x u||_{L^r([0,T],L^{\alpha+2})}.$$

A prova da dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial faz-se como no Teorema 3.2.1, donde concluímos a demonstração.

3.3 A TEORIA LOCAL EM $H^2(\mathbb{R}^n)$

Consideremos a equação integral 3.2 supondo que a não linearidade α satisfaz

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \dfrac{8}{n-4} : n \geq 5 \\ 0 < \alpha < \infty, n \leq 4 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Teorema 3.3.1 (A teoria local em $H^2(\mathbb{R}^n)$) se α satisfaz (3.3.1) então para todo $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ existe $T = T(||\varphi||_{H^2}, n, \lambda, \alpha) > 0$ e uma única solução u da equação integral (3.2) no intervalo $[-T, T]$ com

$$u \in C([-T,T], H^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], W^{2,r}(\mathbb{R}^n)) \text{ com } (q,r) \textit{ par admissível} \tag{3.3.2}$$

Mais ainda, para todo $T_1 < T$ existe uma vizinhança W de φ em $H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que a função

$$\begin{aligned} F: \quad & W \to C([-T_1, T_1], H^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T_1, T_1], W^{2,r}(\mathbb{R}^n)) \\ & \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

é lipschitziana.
A demonstração é feita da mesma forma que na demonstração dos Teorema 3.2.1 e Teorema 3.2.1; ver também Kato [K1].

Corolário 3.3.2 Se u é solução de (3.2) obtida no Teorema 3.3.1, então para todo *par admissível* (q, r) temos que

$$\partial_t u \in L^q([-T, T], L^r(\mathbb{R}^n)).$$

Mais ainda u é a única solução da equação diferencial (NLS) no intervalo $[-T, T]$.

Demonstração Sem perda de geralidade vamos supor que $t \geq 0$. Provemos que $|u|^\alpha u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$. De fato, pelo Teorema 3.3.1, $u \in C([0,T], H^2(\mathbb{R}^n))$. Pela

Proposição 1.4.7 e (3.3.1), seja $\tau \in [0, T]$ e $h > 0$ tal que $h < T - \tau$

$$\begin{aligned}
|||u|^\alpha u(\tau+h) - |u|^\alpha u(\tau)||_{L^2} &\leq (||u(\tau+h)||^{\alpha+1}_{L^{2(\alpha+1)}} + ||u(\tau)||^{\alpha+1}_{L^{2(\alpha+1)}})||u(\tau+h) - u(\tau)||_{L^{2(\alpha+1)}} \\
&\leq 2||u||^{\alpha+1}_{L^\infty([0,T],H^2)}||u(\tau+h) - u(\tau)||_{H^2}.
\end{aligned}$$

como o que conclui-se o resultado.

Pelo Teorema 3.3.1 $\Delta u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$: provaremos que toda solução u da equação integral (3.2) é solução da equação diferencial (NLS).

Seja $t \in [0, T)$, e $h > 0$ tal que $h < T - t$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{F}u(t+h) - \mathcal{F}u(t)}{h} &= (\frac{S(h)-I}{h})(-i\lambda\int_0^t S(t-\tau)|u|^\alpha u(\tau)d\tau) + \frac{i\lambda}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)|u|^\alpha u(\tau) \\
&= \frac{S(h)-I}{h}\mathcal{F}u(t) + \frac{(-i\lambda)}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)|u|^\alpha u(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

fazendo $h \downarrow 0$ e observando que

$$\frac{S(h)-I}{h}\mathcal{F}u(t) \to i\Delta\mathcal{F}u(t) \quad \text{e} \quad \frac{i\lambda}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)|u|^\alpha u(\tau)d\tau \to -i\lambda|u|^\alpha u(t)$$

temos $\dfrac{d^+}{dt}\mathcal{F}u(t) = i\Delta\mathcal{F}u(t) + (-i\lambda)|u|^\alpha u(t)$.

Da mesma forma prova-se que para $t \in (0, T]$

$$\frac{d^-}{dt}\mathcal{F}u(t) = i\Delta\mathcal{F}u(t) + (-i\lambda)|u|^\alpha u(t)$$

com o que u é solução de (NLS). Assim $\partial_t u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$, e a equação diferencial (NLS) se realiza no espaço $C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$.

Só resta provar a unicidade da solução da equação (NLS). Seja v solução de (3.2), dada pelo Teorema 3.3.1, tal que $v \in C([0,T], H^2(\mathbb{R}^n))$.

Seja $\tau \in (0, t)$

$$\begin{aligned}
w(\tau) &= S(t-\tau)v(\tau) \\
\partial_t w(\tau) &= S(t-\tau)\partial_t v(\tau) + (-i\Delta)S(t-\tau)v(\tau) \\
&= S(t-\tau)(-i\lambda)|v|^\alpha v(\tau),
\end{aligned}$$

integrando de 0 a t

$$\int_0^t \partial_t w(\tau) = -i\lambda \int_0^t S(t-\tau)|v|^\alpha v(\tau)d\tau$$
$$w(t) = w(0) + -i\lambda \int_0^t S(t-\tau)|v|^\alpha v(\tau)d\tau$$
$$v(t) = S(t)\psi + \mathcal{F}v(t)$$

logo $v = u$ com o que conclui-se a demonstração do corolário acima.

A seguir provaremos as leis de conservação para a solução u obtida no Teorema 3.3.1.

Conservação da carga

$$||u(\cdot,t)||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.3.3}$$

Conservação da energia

$$E(u(\cdot,t)) = E(\varphi), \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.3.4}$$

onde

$$E(w) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx + \frac{2\lambda}{\alpha+2}||w||_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}, \text{ para } w \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Para demonstrar (3.3.3) multiplica-se a equação diferencial (NLS) por $\overline{u}$ e integra-se sobre $\mathbb{R}^n$ obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} i\partial_t u\overline{u}dx = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta u\overline{u}dx + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda|u|^\alpha u\overline{u}dx\ . \tag{3.3.5}$$

Analogamente temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} -i\partial_t\overline{u}u = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\overline{u}udx + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda|u|^\alpha\overline{u}udx\ . \tag{3.3.6}$$

computando a diferença de (3.3.5) com (3.3.6) e integrando por partes temos que

$$i\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u\overline{u} + \partial_t\overline{u}udx = 0\ .$$

Logo

$$\frac{\partial}{\partial t}||u(t)||_{L^2}^2 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u}(t)u(t)dx = 0.$$

com o que obtemos (3.3.3).

Demonstremos agora a conservação da energia (3.3.4). Para isso, multiplica-se a equação diferencial (NLS) por $\overline{u}_t$ e integra-se sobre $\mathbb{R}^n$ obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} i\partial_t u\overline{\partial_t u}dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u\overline{\partial_t u}dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha u\overline{\partial_t u}dx \ .$$

Analogamente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} -i\overline{\partial_t u}u_t dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\overline{u}\partial_t u dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha\partial_t u dx \ .$$

somando membro a membro obtemos

$$0 \ = \ i\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla u(t)|^2 + \frac{2\lambda}{\alpha+2}(uu)^{\frac{\alpha+2}{2}}dx.$$

Logo,

$$0 \ = \ \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2 + \frac{2\lambda}{\alpha+2}|u|^{\alpha+2}dx$$

com o que obtém-se (3.3.4).

Teorema 3.1.1 resolve o problema de valor inicial para a equação (NLS) em L^2, se consideramos o dado inicial em H^1 o seguinte teorema afirma que a solução existe em H^1 tanto quanto ela existia em L^2.

Teorema 3.3.3 Considere (q,p) um *par admissível.*
i) Seja $v \in C([-T,T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ a solução da equação integral (3.2) obtida na seção 3.1. Se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$u \in C([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], W^{1,p}(\mathbb{R}^n)).$$

ii) Seja $u \in C([-T,T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([-T,T], W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ a solução da equação integral (3.2) obtida na seção 3.2. Se $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \geq 1$ então $u \in$

$C([-T,T],H^2(\mathbb{R}^n))$, satisfaz a equação diferencial (NLS) e as leis de conservação (3.3.5) e (3.3.4).

Para a demonstração deste teorema ver Ponce [Po] (Pag. 88).

A seguir provaremos a lei de conservação (3.3.3) para a solução u obtida no Teorema 3.1.1.

Supondo $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in (1, \frac{4}{n})$, escolhamos uma sequência $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $||\varphi^k - \varphi||_{L^2} \to 0$ quando $k \to \infty$. Pelos Teoremas 3.3.1. e 3.3.3 temos que existe $T > 0$ tal que $u^k \in C([-T,T] : H^2)$, $k = 1, ...,$ é solução de (3.1) e (3.2) com dado inicial φ^k. Por satisfazer a equação diferencial (3.1), temos a conservação da carga

$$||u^k(t)||_{L^2} = ||\varphi^k||_{L^2} \quad \text{para} \quad t \in [-T,T]. \tag{3.3.7}$$

Pela dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial descrita no Teorema 3.1.1 temos que $||u^k - u||_{L^\infty([-T_1,T_1],L^2)} \to 0$ quando $k \to \infty$, onde $T_1 < T$. Assim passando ao limite em (3.3.7), tem-se que para $t \in [-T_1, T_1]$

$$||u(t)||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}. \tag{3.3.8}$$

A identidade 3.3.8 permite aplicar de novo o Teorema 3.1.1 e estender a solução ao intervalo $[-(T_1 + \Delta T_1), T_1 + \Delta T_1]$ onde a identidade (3.3.9) se preserva aplicando sucessivamente o Teorema 3.1.1 obtemos a identidade (3.3.5) em qualquer intervalo de tempo.

3.4 A TEORIA GLOBAL EM $L^2(\mathbb{R}^n)$

Nesta seção nosso objetivo é estender a solução u da equação integral (3.2) dada no Teorema 3.1.1 a qualquer intervalo de tempo.

Teorema 3.4.1 Se $0 < \alpha < \frac{4}{n}$, então para todo $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existe uma única solução u da equação integral (3.2) em qualquer intervalo de tempo $[-T_0, T_0]$ com

$T_0 > 0$ e

$$u \in C([-T_0, T_0], L^2(I\!R^n)) \cap L^r([-T_0, T_0], L^{\alpha+2}(I\!R^n))$$

onde $r = \dfrac{4(\alpha+2)}{n\alpha}$. Mais ainda, existe uma vizinhança W de φ em $L^2(I\!R^n)$ tal que a função

$$\begin{aligned} F: \quad & W \to C([-T_0, T_0], L^2(I\!R^n)) \cap L^r([-T_0, T_0], L^{\alpha+2}(I\!R^n)) \\ & \tilde{\varphi}_0 \mapsto \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

é lipschitziana.

Demonstração Pelo Teorema 3.1.1 existe $T > 0$ tal que a solução da equação integral (3.2) $u \in C([-T,T], L^2(I\!R^n)) \cap L^r([-T,T], L^{\alpha+2}(I\!R^n))$. Pela identidade (3.3.3) temos que $||u(T)||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}$. Aplicando de novo o Teorema 3.1.1 pode-se estender a solução u ao intervalo $[-(T+\Delta T), T+\Delta T]$. Aplicando sucessivamente o Teorema 3.1.1 conclui-se o resultado.

3.5 A TEORIA GLOBAL EM $H^1(I\!R^n)$

Como no Teorema 3.4.1, agora estendemos a solução obtida no Teorema 3.2.1 a um intervalo de tempo qualquer.

Teorema 3.5.1
(i) Se $\lambda > 0$ os resultados do Teorema 3.2.1 são globais.
(ii) Se $\lambda < 0$ e $\dfrac{n\alpha}{2} < 2$ isto é $\alpha < \dfrac{4}{n}$, então,

$$||\nabla u||_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq c_0,$$

e por consequência, a solução dada pelo Teorema 3.2.1 pode ser estendida a qualquer intervalo de tempo.
(iii) Se $\lambda < 0$ e $\dfrac{n\alpha}{2} \geq 2$ isto é $\alpha \geq \dfrac{4}{n}$, então a solução obtida no Teorema 3.2.1 pode-se estender a um intervalo de tempo qualquer se $||\varphi||_{L^2}$ é suficientemente pequena.

Demonstração Usando 3.3.4, temos que se u é solução no intervalo $[0,T]$ então para todo $t \in [0,T]$

$$E(u(\cdot,t)) = E(\varphi) \tag{3.5.1}$$

Logo se $\lambda > 0$ pode-se concluir que

$$||\nabla_x(u)||^2_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq E(\varphi)$$

e pela identidade (3.3.3)

$$||u||^2_{L^\infty([0,T],H^1)} \leq E(\varphi) + ||\varphi||^2_{L^2}$$

com o que aplicando sucessivamente o Teorema 3.2.1 se estende a solução u a qualquer intervalo de tempo. Assim temos demonstrado (i).

Para demonstrar (ii) suponha $\lambda < 0$ e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (Teorema 1.4.6) tem-se

$$||u(t)||^{\alpha+2}_{L^{\alpha+2}} \leq c||\nabla_x u(t)||^a_{L^2}||u(t)||^{1-a}_{L^2}$$

com a tal que $\dfrac{1}{\alpha+2} = a(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}) + \dfrac{1-a}{2}$ então $a = \dfrac{n\alpha}{(\alpha+2)2}$.

Assim neste caso,

$$||u(t)||^{\alpha+2}_{L^{\alpha+2}} \leq c||\varphi||^\theta_{L^2}||\nabla_x u(t)||^{\frac{n\alpha}{2}}_{L^2}. \tag{3.5.2}$$

com $\theta = \alpha + 2 - \dfrac{n\alpha}{2}$.

Assim de (3.5.1) e (3.5.2)

$$||\nabla_x u(t)||^2_{L^2} \leq |E(\varphi)| + c|\lambda|\ ||\varphi||^\theta_{L^2}||\nabla_x u(t)||^{\frac{n\alpha}{2}}_{L^2} \tag{3.5.3}$$

supor $\dfrac{n\alpha}{2} < 2$ é dizer $\alpha < \dfrac{4}{n}$ e fazendo $f(t) = ||\nabla_x u(t)||^2_{L^2}$ temos,

$$f(t) \leq |E(\varphi)| + c_1 f(t)^{\frac{n\alpha}{4}} \quad \text{onde} \quad c_1 = c_1(\alpha, \lambda, ||\varphi||_{L^2}).$$

como $\frac{n\alpha}{4} < 1$, existe $M > 0$ tal que

$$||\nabla_x u||_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq M.$$

Análogo à demonstração de (i), u pode ser estendida a um intervalo de tempo qualquer.

Demonstremos agora (iii), fixando $\alpha \in [\frac{4}{n}, \frac{4}{n-2})$; provaremos que para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M, n, \alpha, \lambda)$ tal que se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ com $||\nabla\varphi||_{L^2} \leq M$ e $||\varphi||_{L^2} \leq \delta$ então a solução u da equação integral (3.2) obtida no Teorema 3.2.1 pode ser estendida globalmente.

De (3.5.1) temos que

$$||\nabla_x u(t)||^2_{L^2} \leq E(\varphi) + c_1\delta^\theta ||\nabla_x u(t)||^{2+\mu}_{L^2}.$$

fazendo $f(t) = ||\nabla_x u(t)||_{L^2}$ temos em particular para $t = 0$

$$(f(0))^2 - c_1\delta^\theta (f(0))^{2+\mu} \leq E(\varphi),$$

com $\mu \in [0, \alpha)$ e $\mu = \frac{n\alpha}{2} - 2$ onde $c_1 = c_1(\lambda, \alpha) > 0$. Tomamos $\delta \in (0, \delta_0)$ com $f(0)^2 - c\delta_0 M^{2+\mu} > 0$.

Assim $E(\varphi) > 0$ e

$$(f(t))^2 \leq E(\varphi) + c_1\delta^\theta (f(t))^{2+\mu} \tag{3.5.4}$$

onde a última desigualdade é verdade se $f(t) \in [0, c_2(\delta)) \cup (c_3(\delta), \infty)$ com $c_2(\delta) < c_3(\delta)$. Dado $M > 0$ sempre é possível escolher $\delta > 0$ tal que $c_2(\delta) > M$; e já que $||\nabla\varphi||_{L^2} \leq M$ pela continuidade de f em t temos que

$$\sup_{[0,T]} ||\nabla_x u(t)||_{L^2} \leq c_1(\delta)$$

Logo é possível estender a solução a qualquer intervalo de tempo. Assim a demonstração do Teorema está completa.

Observação 3.5.2. Observe que de (3.5.3) temos que se $\alpha = \dfrac{4}{n}$ e $||\varphi||_{L^2}$ suficientemente pequeno tal que $1 - c|\lambda|\ ||\varphi||_{L^2}^{\theta} > \dfrac{1}{2}$ então

$$||\nabla_x u||_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq 2|E(\varphi)|.$$

com o que pode-se estender a solução a um intervalo de tempo qualquer.

3.6 O CASO CRÍTICO EM $L^2(\mathbb{R}^n)$

Na seção 3.1 mais especificamente o Teorema 3.1.1, resolve o problema de existência da solução para a equação (3.2); com algumas condições sobre o expoente da não linearidade α. Nesta seção apresentaremos um resultado de existência e unicidade da solução para a equação (3.2) ainda no caso em que $\alpha = \dfrac{4}{n}$, chamando este o caso crítico en $L^2(R^n)$.

Antes de demonstrar o resultado principal desta seção, demonstremos alguns resultados prévios.

Lema 3.6.1 Supor $\alpha = \dfrac{4}{n}$. Seja $T \in (0, \infty)$ seja $\sigma = \alpha + 2$, e seja também (q, r) um *par admissível*. Então, se $u \in L^\sigma([0, T], L^\sigma(\mathbb{R}^n))$, segue-se que

$$\mathcal{F}u \in C([0, T], H^{-1}(\mathbb{R}^n)) \cap L^q([0, T], L^r(\mathbb{R}^n))$$

Além disso existe k, que não depende de T, tal que

$$||\mathcal{F}v - \mathcal{F}u||_{L^q([0,T],L^r)} \leq k(||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} + ||v||^{\alpha}_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)})||v - u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \quad (3.6.1)$$

para cada $u, v \in L^\sigma([0, T], L^\sigma(\mathbb{R}^n))$.

Demonstração Se $u \in L^\sigma([0, T], L^\sigma(\mathbb{R}^n))$, então $|u|^\alpha u \in L^{\sigma'}([0, T], L^{\sigma'}(\mathbb{R}^n))$; de fato já que $(\alpha + 1)\sigma' = \alpha + 2 = \sigma$ tem-se que

$$||\ |u|^\alpha u||_{L^{\sigma'}([0,T],L^{\sigma'})} = ||u||^{\alpha+1}_{L^{(\alpha+1)\sigma'}([0,T],L^{(\alpha+1)\sigma'})} = ||u||^{\alpha+1}_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)}.$$

Observemos que a dupla (σ,σ) é um *par admissível* o qual implica pela observação (2.2.4) que $L^{\sigma'}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ e $L^{\sigma'}([0,T],L^{\sigma'}(\mathbb{R}^n)) \subset L^1([0,T],H^{-1}(\mathbb{R}^n))$. Assim $\mathcal{F}u \in C([0,T],H^{-1}(\mathbb{R}^n))$; aplicando o Teorema 2.2.6 com $\gamma=\rho=\sigma$ tem-se que $\mathcal{F}u \in L^q([0,T],L^r)$ para (q,r) *par admissível*. Estimemos agora (3.6.1). Pelo Teorema 2.2.6 com $\gamma=\rho=\sigma$, e a desigualdade de Hölder, tem-se

$$
\begin{aligned}
&||\mathcal{F}u-\mathcal{F}v||_{L^q([0,T],L^r)} \leq |\lambda|\,||\int_0^t S(t-\tau)(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v)(\tau)d\tau||_{L^q([0,T],L^r)} \leq \\
&\leq c_1||\,|u|^\alpha u-|v|^\alpha v||_{L^{\sigma'}([0,T],L^{\sigma'})} \leq k||(|u|^\alpha+|v|^\alpha)|u-v|||_{L^{\sigma'}([0,T],L^{\sigma'})} \leq \\
&\leq k(\int_0^T(||(|u|^\alpha+|v|^\alpha)(t)||_{L^{\frac{\sigma}{\alpha}}}||(u-v)(t)||_{L^\sigma})^{\sigma'}dt)^{1/\sigma'} \\
&\leq k(||u||^\alpha_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)}+||v||^\alpha_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)})||v-u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)},
\end{aligned}
$$

onde c_1 é a constante obtida pelo Teorema 2.2.6 e k é o produto de c_1 com a constante obtida na desigualdade (3.1.8).

Proposição 3.6.2 Existe $\delta>0$ que satisfaz a seguinte propriedade, se $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $T>0$, tal que $||S(\cdot)\varphi||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)}<\delta$. existe uma única solução da equação integral (3.2) $u \in C([0,T],L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^\sigma([0,T],L^\sigma(\mathbb{R}^n))$. Além disso $u \in L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^n))$ para cada *par admissível* (q,r) e $||u(t)||_{L^2}=||\varphi||_{L^2}$ para $t\in[0,T]$. Finalmente a solução u depende continuamente em $C([0,T],L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^\sigma([0,T],L^\sigma(\mathbb{R}^n))$ do dado inicial $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ então $u \in C([0,T],H^1(\mathbb{R}^n))$.

Demonstração Seja $\delta>0$ a ser escolhido depois, e sejam φ, T como acima. Definindo o conjunto E como

$$E=\{u \in L^\sigma([0,T],L^\sigma(\mathbb{R}^n)); ||u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \leq 2\delta\},$$

observemos que E e um espaço métrico completo. Para $w \in E$, definimos $\phi(w)$ por

$$\phi(w)(t)=S(t)\varphi+\mathcal{F}w(t).$$

Vamos provar que ϕ é uma contração em E. Sejam $w_1, w_2 \in E$,

$$\begin{aligned}||\phi(w_1) - \phi(w_2)||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} &= ||\mathcal{F}w_1 - \mathcal{F}w_2||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \leq \\ &\leq k(||w_1||^\alpha_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} + ||w_2||^\alpha_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)})||w_1 - w_2||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \\ &\leq 2k(2\delta)^\alpha ||w_1 - w_2||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)}.\end{aligned}$$

Escolhemos δ tal que $2k(2\delta)^\alpha < 1$.

Assim pelo Teorema 1.1.1 ϕ possui um único ponto fixo u, o qual é solução de (3.2). Provemos agora que $u \in L^q([0,T], L^r)$: pelo Lema 3.6.2 (com $v = 0$) e a Proposição (2.2.8) tem-se

$$\begin{aligned}||u||_{L^q([0,T],L^r)} &\leq ||S(t)\varphi||_{L^q([0,T],L^r)} + ||\mathcal{F}u||_{L^q([0,T],L^r)} \\ &\leq c||\varphi||_{L^2} + 2k||u||^\alpha_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)}||u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)}.\end{aligned}$$

Precisamos provar também que se $\{\varphi^m\}$ é uma sequência em $L^2(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi^m \to \varphi$, quando $m \to \infty$, então $u^m \to u$ em $L^\sigma([0,T], L^\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$. Consideremos a sequência $\varphi^m \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $\varphi^m \to \varphi$, quando $m \to \infty$. Seja m suficientemente grande tal que

$$||\varphi_m - \varphi||_{L^2} < \frac{\delta}{c_1}.$$

onde c_1 é a constante obtida na Proposição 2.2.8

Pela Proposição 2.2.8 tem-se,

$$||S(\cdot)\varphi^m||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \leq ||S(\cdot)\varphi^m - S(\cdot)\varphi + S(\cdot)\varphi||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \leq c_1||\varphi^m - \varphi||_{L^2} + \delta < 2\delta$$

Pelos argumentos feitos anteriormente construímos $u^m \in L^\sigma(0,T,L^\sigma)$ solução de (3.2) com dado inicial φ^m. Novamente por (3.6.1) tem-se

$$\begin{aligned}||u^m - u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} &= ||S(\cdot)(\varphi^m - \varphi)||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} + ||\mathcal{F}u^m - \mathcal{F}u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \leq \\ &\leq c_1||\varphi^m - \varphi||_{L^2} + k2(2\sigma)^\alpha||u^m - u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)}.\end{aligned}$$

Pela nossa escolha de $\delta(\delta > 0$ tal que $1 - k2(2\delta)^\alpha > 0$

então

$$||u^m - u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \leq \tilde{k}||\varphi^m - \varphi||_{L^2}.$$

Como $(\infty, 2)$ é *par admissível* tem-se também,

$$||u^m - u||_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq \tilde{k}||\varphi^m - \varphi||_{L^2}$$

Mais ainda,

$$||u^m - u||_{L^q([0,T],L^r)} \leq \tilde{k}||\varphi^m - \varphi||_{L^2}$$

para (q, r) *par admissível.*

Assim $u^m \to u$ em $L^\sigma([0,T], L^\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$, e

$$u^m \to u \text{ em } L^q([0,T], L^r(\mathbb{R}^n))$$

quando $m \to \infty$.

Suponha $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Já que (3.2) possui solução local única em $H^1(\mathbb{R}^n)$, conclui-se que $u \in C([0,\tau], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\sigma([0,\tau], W^{1,\sigma}(\mathbb{R}^n))$ (Teorema 3.2.1 e Corolário 3.2.2) para algum $\tau \in (0, T]$.

Afirmamos que pode-se tomar $\tau = T$, isto é a solução existe em $H^1(\mathbb{R}^n)$ tanto quanto ela existe em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha que não, então deveríamos ter que $||u(t)||_{H^1} \to \infty$ quando $t \uparrow \tau$. (Ver Teorema 2.1 de [CW1)]). Pela desigualdades (3.6.1), (2.2.6) e (2.2.8) tem-se que

$$||u||_{L^q([0,t],W^{1,r})} \leq c_1||S(\cdot)\varphi||_{L^q([0,t],W^{1,r})} + ||\mathcal{F}u||_{L^q([0,t],W^{1,r})}. \tag{3.6.2}$$

Vamos estimar os termos da direita da desigualdade anterior;

$$\begin{aligned} ||S(\cdot)\varphi||_{L^q([0,t],W^{1,r})} &\leq ||S(\cdot)\varphi||_{L^q([0,t],L^r)} + ||\nabla_x S(\cdot)\varphi||_{L^q([0,t],L^r)} \\ &\leq c_1||\varphi||_{L^2} + c_1||\nabla\varphi||_{L^2} = c_1||\varphi||_{H^1}. \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned} &||\mathcal{F}u||_{L^q(0,t,W^{1,r})} \leq ||\mathcal{F}u||_{L^q([0,t],L^r)} + ||\nabla_x \mathcal{F}u||_{L^q([0,t],L^r)} \leq \\ &\leq c|| \, |u|^\alpha u||_{L^{\sigma'}([0,t],L^{\sigma'})} + 2k||u||^\alpha_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}||\nabla u||_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}. \end{aligned}$$

Para obter a última desigualdade computamos o termo $||\nabla \mathcal{F} u||_{L^q([0,t],L^r)}$ da seguinte forma.

Usando (3.6.1) com u e v_h; com $v_h(x) = u(x + he_i)$, $i = 1, \ldots, n$ $h > 0$

$$||\frac{\mathcal{F} v_h - \mathcal{F} u||}{h}||_{L^q([0,t],L^r)} \leq k(||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)} + ||v_n||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)})||\frac{v_h - u}{h}||_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}$$

fazendo $h \to 0$ temos

$$\begin{aligned} ||\nabla_x \mathcal{F} u||_{L^q([0,t],L^r)} &\leq k(||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)} + ||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)})||\nabla u||_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)} \\ &\leq 2k||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}||\nabla u||_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)} \end{aligned}$$

com o que em (3.6.2) temos

$$\begin{aligned} ||u||_{L^q([0,t],W^{1,r})} &\leq c_1||\varphi||_{H^1} + c||u||^{\alpha+1}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)} + 2k||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}||\nabla_x u||_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)} \\ &= c_1||\varphi||_{H^1} + ||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}(c||u||_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)} + 2k||\nabla_x u||_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}) \\ &= c_1||\varphi||_{H^1} + \tilde{k}||u||^{\alpha}_{L^\sigma([0,t],L^\sigma)}||u||_{L^\sigma([0,t],W^{1,\sigma})} \qquad (3.6.3) \end{aligned}$$

com $\tilde{k} = \max\{2k, c\}$.

Assim, de (3.6.3) temos

$$||u||_{L^q([0,t],W^{1,r})} \leq c_1||\varphi||_{H^1} + \tilde{k}(2\delta)^{\alpha}||u||_{L^\sigma([0,t],W^{1,\sigma})}$$

para cada $t \leq \tau$.

Fazendo sucessivamente $(q, r) = (\sigma, \sigma)$ e $(q, r) = (\infty, 2)$ na desigualdade anterior temos

$$||u||_{L^\sigma([0,t],W^{1,\sigma})} \leq c_1||\varphi||_{H^1} + \tilde{k}(2\delta)^{\alpha}||u||_{L^\sigma([0,t],W^{1,\sigma})}$$

e

$$||u||_{L^\infty([0,t],H^1)} \leq c_1||\varphi||_{H^1} + \tilde{k}(2\delta)^{\alpha}||u||_{L^\sigma([0,t],H^1)}$$

Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $1 > \tilde{k}(2\delta)^{\alpha}$ temos

$$||u||_{L^\sigma([0,t],W^{1,\sigma})} \leq c_3||\varphi||_{H^1} \qquad \text{com} \qquad c_3 = \frac{c_1}{1 - \tilde{k}(2\delta)^{\alpha}}$$

e

$$||u||_{L^\infty([0,t],H^1)} \leq c_3||\varphi||_{H^1}$$

fazendo $t \uparrow \tau$ temos

$$||u||_{L^\infty([0,t],H^1)} \leq c_3||\varphi||_{H^1}$$

o qual contradiz o fato que $\lim_{t\uparrow\tau}||u(t)||_{H^1} \to \infty$.
Assim $\tau = T$ e segue-se disto que $||u(t)||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}$ $\forall t \in [0, T]$ (ver equação 3.3 e [CW1]).

Seja agora $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ arbitrário, pela densidade de $H^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência $(\varphi^m)_{m\in\mathbb{N}} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi^m \to \varphi$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, quando $m \to \infty$; e seja u^m a solução de (3.2) correspondente ao dado inicial φ^m e para cada m tem-se que

$$||u^m(t)||_{L^2} = ||\varphi_m||_{L^2}; \text{ para } t \in [0, T]. \tag{3.6.4}$$

Pela dependência contínua da solução com respeito do dado inicial, $u^m \to u$ em $L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$ quando $m \to \infty$. Assim $u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$ e fazendo $m \to \infty$ em (3.6.4) temos que

$$||u(t)||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2} \text{ para cada } t \in [0,T],$$

com o que a prova da proposição está completa.

Finalmente demostraremos o resultado principal deste Capítulo.

Teorema 3.6.3. Suponha $\alpha = \dfrac{4}{n}$. Para cada $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe uma única solução maximal $u \in C([0,T^*), L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^{\alpha+2}_{loc}([0,T^*), L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^n))$ de (3.2). Além disto

i) $u \in L^q([0,T], L^r(\mathbb{R}^n))$ para cada $T < T^*$, e cada *par admissível* (q,r);
ii) $||u(t)||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}$, para cada $t \in [0, T^*)$.

iii) Se $T^* < \infty$, então $||u||_{L^q([0,T^*],L^r)} = \infty$ para cada *par admissível* (q,r) com $r \geq \alpha + 2$.

Demonstração Seja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Já que $||S(\cdot)\varphi||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \to 0$ quando $T \to 0$, para T suficientemente pequeno a hipótese da proposição (3.6.2) é satisfeita. Aplicando iterativamente a Proposição 3.6.2 pode-se construir uma solução maximal $u \in C([0,T^*), L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^\sigma_{loc}([0.T^*), L^\sigma(\mathbb{R}^n))$ de (3.2) da seguinte forma. A Proposição 3.6.2 garante a existência de uma solução u de (3.2) no espaço $C([0,T], L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\sigma([0,T], L^\sigma(\mathbb{R}^n))$; aplicando novamente a Proposição 3.6.2 estendemos a solução ao intervalo $[0, T + \Delta T]$: e por aplicações sucessivas desta Proposição 3.6.2 obtemos o resultado desejado. Agora só resta provar (iii). Assim, vamos supor que $T^* < \infty$ e supondo o contrário que $||u||_{L^\sigma([0,T^*],L^\sigma)} < \infty$. Seja $t \in [0, T^*)$. Para cada $\tau \in [0, T^* - t)$, temos

$$\begin{aligned}
&S(\tau)u(t) = S(\tau)(S(t)\varphi + \mathcal{F}u(t)) = S(\tau + t)\varphi + (-i\lambda) \\
&\int_0^{t+\tau} S(t+\tau-r)|u|^\alpha u(r)dr - (-i\lambda)\int_t^{t+\tau} S(t+\tau-r)|u|^\alpha u(r)dr \\
&= u(\tau+t)\varphi - (-i\lambda)\int_0^\tau S(\tau-\lambda)|u|^\alpha(t+\lambda)d\lambda \\
&= u(\tau+t) - \mathcal{F}(u(t+\cdot))(\tau)
\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

onde para obter a expressão (3.6.4) fizemos a mudança de variável $\lambda = r - t$.

Agora de (3.6.4) e (3.6.1) obtemos

$$\begin{aligned}
||S(\cdot)u(t)||_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)} &\leq ||u(t+\cdot)||_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)} + \\
&k||u(t+\cdot)||^\alpha_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)}||u(t+\cdot)||_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)} = \\
&= ||u(t+\cdot)||_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)} + k||u(t+\cdot)||^{\alpha+1}_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)}.
\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Fazendo a mudança de variável $p = t + \tau$ temos,

$$\begin{aligned}
&||u(t+\cdot)||_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)} = (\int_0^{T^*-t} ||u(t+\tau)||^\sigma_{L^\sigma} d\tau)^{1/\sigma} \\
&= (\int_t^{T^*} ||u(p)||^\sigma_{L^\sigma} dp)^{1/\sigma} = ||u||_{L^\sigma([t,T^*],L^\sigma)}.
\end{aligned}$$

Portanto, de (3.6.5),

$$||S(\cdot)u(t)||_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)} \leq ||u||_{L^\sigma([t,T^*],L^\sigma)} + k||u||^{\alpha+1}_{L^\sigma([t,T^*],L^\sigma)} .$$

Escolhendo-se t perto de T^*, segue-se que

$$||S(\cdot)u(t)||_{L^\sigma([0,T^*-t],L^\sigma)} < \delta.$$

Então, aplicando a Proposição (3.6.2) a solução pode ser estendida além do T^*, o qual contradiz a maximalidade da solução u. Seja agora (q,r) um *par admissível* com $r \geq \sigma$. Aplicando a desigualdade de Hölder temos que para $T < T^*$ e $\mu \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\mu}{2} + \frac{1-\mu}{r}, \; \frac{1}{\sigma} = \frac{1-\mu}{q} + \frac{\mu}{\infty} \text{ o qual implica } \mu = \frac{2(r-\sigma)}{\sigma(r-2)} ,$$

temos que

$$||u||_{L^\sigma([0,T],L^\sigma)} \leq || \, ||u||^{\mu}_{L^2}||u||^{1-\mu}_{L^r}||_{L^\sigma[0,T]} \leq ||u||^{1-\mu}_{L^q([0,T],L^r)}||u||^{\mu}_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq ||\varphi||^{\mu}_{L^2}||u||^{1-\mu}_{L^q([0,T],L^r)}$$

fazendo $T \to T^*$ obtemos que $||u||_{L^q([0,T^*],L^r)} = \infty$, o qual prova (iii). Assim completamos a demonstração do Teorema 3.6.3.

Observação 3.6.4

A solução local obtida no Teorema 3.6.3 nem sempre pode ser estendida a qualquer intervalo de tempo, por exemplo se $\lambda < 0$ e $\psi \in H^1(I\!R^n)$ é uma solução não trivial da equação

$$-\Delta\psi + \psi = \lambda|\psi|^{4/n}\psi, \quad x \in I\!R^n,$$

definindo $u(x,t) = (1-t)^{-n/2}\exp(i(4t-|x|^2)/4(1-t)\psi(x/(1-t))$; para $x \in I\!R^n, t \in [0,1)$ temos que u é solução da equação diferencial (3.1) (ver [W]). Mas $u \notin L^\sigma([0,1], L^\sigma(I\!R^n))$; com $\sigma = 2 + \dfrac{4}{n}$ já que

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{L^\sigma} &= \frac{1}{(1-t)^{n/2}}\left(\int_{I\!R^n}|\psi(\frac{x}{1-t})|^\sigma dx\right)^{1/\sigma} = \frac{1}{(1-t)^{n/2}}\left(\int_{I\!R^n}|\psi(\varepsilon)|^\sigma(1-t)^n d\xi\right)^{1/\sigma} = \\ &= c\frac{1}{(1-t)^{2/\sigma}}; \quad \text{com } \; c = ||\psi||_{L^\sigma}. \end{aligned}$$

Concluimos então que a solução u obtida no Teorema 3.6.3 não pode ser estendida ao intervalo $[0, t)$ com $t > 1$.

BIBLIOGRAFIA

[B] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle. Paris, (1983).

[BL] Bergh, Löfstrom J., Interpolation Spaces, Springer, New York (1976).

[C] Cazenave T, An introduction to nonlinear Schröndiger equations, Textos de Métodos Matemáticos 26, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1993).

[CH] Cazenave T, Haraux A., Introduction aux Problèmes D'évolution Semi-Linéares.

[CW1] Cazenave T, Weissler F.B., The Cauchy problem for the nonlinear Schröndinger equation en H^1, Manuscripta Mathematica, 61 (1988) 477-494.

[CW2] Cazenave T, Weissler F.B., Some remarks on the nonlinear Schödinger equation in the critical case, Lectures Notes in Mathematica. Vol. 1394 pp. 18-29, Springer-Verlag, New York/Berlim, 1980

[D] Dinculeanu N., Vector measures, Pergamon Press, New York, 1967.

[DU] Diestel I, Uhl J. J. Jr., Vector measures, Math. Survey is Amer. Math. Soc.,Providence, 1977.

[DS] Dunford C, Schwartz J.T., Linear Operators Interscience Publ., New York, 1958.

[F] G.B. Folland, Real Analysis. Modern Techniques and aplications. John Wiley (1984).

[F1] A. Fridman, Partial Differential Equations, Holt, Rinehart, Winston, 1969.

[HP] U. Hutson and J.S. Pym.. Application of Fundamental Analysis and Operator Theory, Academic Press (1980).

[I] R.J. Iorio Jr., Tópicos na Teoria da Equação de Schrödinger 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNpq (1987).

[IN] R.J. Iorio Jr., W.L.V. Nunes, Introdução à Equações de Evolução não Lineares 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq (1992).

[K] Kato, T., On nonlinear Schrödinger equations, Ann Inst. Henri Poincaré, Physique Theórique, 46, 113-124 (1987).

[K1] Kato, T., On nonlinear Schrödinger equations Lecture Notes for Physics Nordic Summer School (1988).

[P] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag (1983).

[Po] G. Ponce., Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución, Colombia (1993).

[S] Sadosky C., Interpolation of Operators and Singular Integrals and introduction to Harmonic Analysis Lecture Notes and Appl. Math. Marcel Dekker (1979).

[SW] Stein E.M. and Weiss G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press Princeton N.J. (1971)

[T] Tsutsumi Yoshio, L^2-Solutions for Nonlinear Schröndinger Equations and Nonlinear Groups, Funkcialaj Ekvacioj, 30, 115-125 (1987).

[W] M. Weinstein M., On the structure and formation of singularities of solutions to Nonlinear dispersive evolution equations, Comm. PDE, 11(1986), 545-565.