

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Métricas de Einstein em variedades
bandeira**

Evandro Carlos Ferreira dos Santos

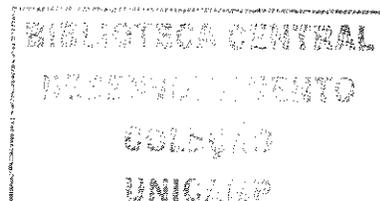
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Co-orientador: Prof. Dr. Nir Cohen

200524029

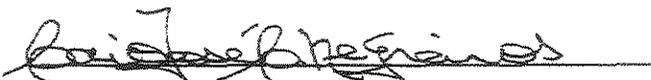
/2005



Métricas de Einstein em variedades bandeira

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por **Evandro Carlos Ferreira dos Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de Setembro de 2005.

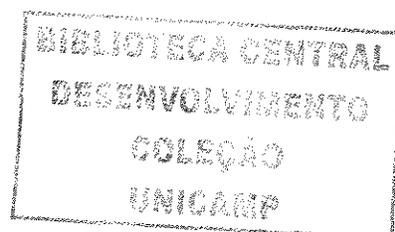

Prof. Caio José Colletti Negreiros
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros.
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martín.
Prof. Dr. Paolo Piccione.
Prof. Dr. Antônio Roberto da Silva.
Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes.


Prof. Dr. Nir Cohen
Co-orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.



UNIVERSIDADE	BC
CHAMADA	H/UNICAMP
	da 59m
EX	
NUMERO BC	66113
PROC.	6-00086/05
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	1,00
DATA	28/10/05
CPD	

BIBID - 366413

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Santos, Evandro Carlos Ferreira dos

Sa59m Métricas de Einstein em variedades bandeira / Evandro Carlos
Ferreira dos Santos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientadores : Caio José Colletti Negreiros; Nir Cohen
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Variedades de Einstein. 2. Espaços homogêneos. 3. Lie, Grupos
semi-simples. 4. Variedades complexas. I. Negreiros, Caio José Colletti.
II. Cohen, Nir. . III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Einstein metrics on flag manifolds.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Einstein manifolds. 2. Homogeneous spaces.
3. Semi-simple Lie groups. 4. Complex manifolds.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paolo Piccione (IME-USP)
Prof. Dr. Antônio Roberto da Silva (UFRJ)
Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes (IM-UFBA)

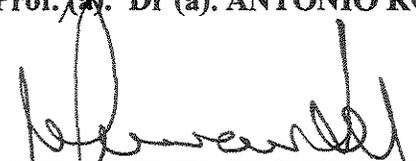
Data da defesa: 19/09/2005

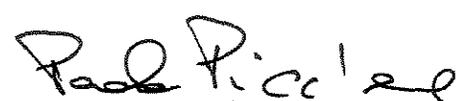
Tese de Doutorado defendida em 19 de setembro de 2005 e aprovada

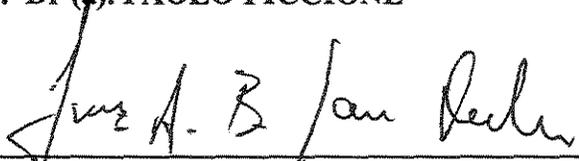
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS


Prof. (a). Dr (a). ANTONIO ROBERTO DA SILVA


Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO NOGUEIRA FERNANDES


Prof. (a). Dr (a). PAOLO PICCIONE


Prof. (a) Dr. (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese a meus amigos.

“Escolho meus amigos não pela pele ou outro arquétipo qualquer, mas pela pupila. Tem que ter brilho questionador e tonalidade inquietante. A mim não interessam os bons de espírito nem os maus de hábitos. Fico com aqueles que fazem de mim louco e santo. Deles não quero resposta, quero meu avesso. Que me tragam dúvidas e angústias e agüentem o que há de pior em mim. Para isso, só sendo louco. Quero-os santos, para que não duvidem das diferenças e peçam perdão pelas injustiças. Escolho meus amigos pela cara lavada e pela alma exposta. Não quero só o ombro ou o colo, quero também sua maior alegria. Amigo que não ri junto não sabe sofrer junto. Meus amigos são todos assim: metade bobeira, metade seriedade. Não quero risos previsíveis nem choros piedosos. Quero amigos sérios, daqueles que fazem da realidade sua fonte de aprendizagem, mas lutam para que a fantasia não desapareça. Não quero amigos adultos nem chatos. Quero-os metade infância e outra metade velhice. Crianças, para que não esqueçam o valor do vento no rosto; e velhos, para que nunca tenham pressa. Tenho amigos para saber quem eu sou. Pois os vendo loucos e santos, bobos e sérios, crianças e velhos, nunca me esquecerei de que “normalidade” é uma ilusão imbecil e estéril.”

Oscar Wilde

AGRADECIMENTOS

A Deus pela dom da vida.

A todos os meus ex-professores por me repassarem os seus conhecimentos, por abraçarem o magistério alguns deles de forma abnegada.

Aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia em especial aos professores José Fernandes Silva Andrade, Marco Antônio N. Fernandes e Enaldo Silva Vergasta.

Aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará pela amizade e confiança em especial aos professores Sebastião Carneiro, Gervásio Colares, Abdênago Barros e Gregório Paccelli Bessa.

Aos Professores Caio Negreiros, Nir Cohen e Luiz A. B. San Martin, pela orientação, por me ensinarem um pouco do que sabem. Ao professor Caio agradeço pela amizade ímpar.

A minha Mãe pelo seu amor, pela oportunidade de estudar e por me educar seguindo sempre a linha da honestidade e acima de tudo nunca desistir dos objetivos. Aos meus filhos Luan Carlos e Evandro Carlos Filho.

As minhas tias(quase mães) meu muito obrigado. Sei que em determinados momentos se fui a escola devo a vocês.

A minha Tia Ana Lúcia Ferreira Santos pelo seu exemplo de luta.

A minha esposa Lícia pela paciência e pelo seu amor, fundamentais na minha vida e na confecção deste trabalho.

A Alice Araújo e Luiz Carlos meu muito obrigado pelos conselhos e pela atenção.

A Universidade Regional do Cariri em especial ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada, pela concessão do afastamento e pela confiança. A Funcap, pelo apoio financeiro.

A Cidinha, Ednaldo e Tânia, pela ajuda na SPG do IMECC, dona Fátima pelas ajudas com a burocracia.

Ao pessoal de apoio do IMECC. Ao pessoal da biblioteca central da Unicamp(Albertina e Célia em especial). Aos Bibliotecários do IMECC(Cláudia, Júlia, Prof. Osvaldino, Silvana, Reginaldo, Ruth em especial) pela presteza no atendimento, as bibliotecárias do IME-USP e do IMPA.

Aos colegas dessa árdua jornada, pela amizade durante este tempo, em especial aos companheiros de quase todas as horas. A Marcelo Furtado, Aline Pinto, Fábio Pereira e Ana, Flávia Zechinel, Juliana Precioso, Rinaldo Júnior(o júnior alagoano, também conhecido como zagueiro de Usina) e Ingrid, “Poli”, Marcelo Veloso e Gilcélia, João de Deus e família, Marcos Salvatierra e Sílvia, Mário Salvatierra, Edson Licurgo e família, Laércio Santos e Lucy Takahashi(amigos de todos as horas), Marcelo Romário e “Paulinha”Takatsuka, Juan Villamizar, Elder Jesus, Maria Cecília, Andréia Cirino, Marcelo Café, Ubiraci Pimenta, Raimundo Nonato, Perfilino Eugênio, Francisco Odair, Paulo César(PC), Alexandre Gurgel, Antônio Caminha, Juscelino Pereira, Juscelino Santos, Luciene Matos(amiga leal), Silvana Costa, Carlos A. G. Almeida e sua esposa Valdneide, Wilson Freire, Mário de Assis Oliveira, José Cavalcanti, Ademir Pastor, Weber Pereira, Luiz Medeiros e Lidiane, Cileide Silva, Fátima Gondim, Juliana(Jú), Nanci, Sônia e Silvana, Mariana Silveira, Lucy Ani Roberto, Amaury Barros, Zé Barros e Genaldi(Gina), Hugo Diniz e Euna(Ceni) Diniz, Rita Silva, Adélia Diniz, Edson Iriarte, Sofia Pinzón, Wesley, Jair, Clair, Madalena, João Eloir, Simão Stelmastchuk.

A todos que sentiram a minha ausência. Espero justificá-la nas próximas páginas.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	viii
1 Preliminares	1
1.1 Variedades Homogêneas	1
1.2 Variedade flag	2
1.3 Espaço tangente	3
1.4 Estruturas quase complexas	7
1.5 Tensores invariantes sobre M	10
1.6 Forma de Kähler	13
1.7 Conexão Riemanniana	18
2 Equação de Einstein	21
2.1 Tensor de Ricci e a equação de Einstein	21
2.2 Métricas Kähler-Einstein	27
2.3 A métrica Normal-Einstein	32
2.4 Métricas Arvanitoyeorgos-Einstein	36

2.5	Métricas Senda-Einstein	40
2.6	Novas métricas de Einstein	44
2.7	Comparações entre as constantes de Einstein	49
2.7.1	As métricas Kähler, normal e Arvanitoyeorgos	49
2.7.2	Senda	53
2.7.3	Comparando as novas métricas	54
2.8	Ação do grupo de Weyl	56
2.9	Soluções em variedades não-maximais	61
3	Fibrações e a variação canônica	64
3.1	Subvariedades de uma variedade flag	65
3.2	C-Fibrações e a geometria das variedades flag	68
4	Estabilidade	77
4.1	Funcionais Riemannianos	77
4.2	O espaço tangente $T_g\mathcal{M}_1$	79
4.3	Primeira variação	80
4.4	Segunda variação	84
4.5	Índice de uma métrica de Einstein	88
	Referências Bibliográficas	92

RESUMO

O objetivo deste trabalho é contribuir para o estudo da geometria Hermitiana invariante das variedades bandeira. Estudamos a classe das métricas de Einstein sobre variedades bandeira.

Neste trabalho apresentamos novas soluções para a equação de Einstein invariante sobre as variedades bandeira do tipo A_l maximais e não-maximais. Considere W um subgrupo do grupo de Weyl. Descrevemos uma ação natural de W sobre o conjunto das soluções da equação de Einstein invariante e provamos que esta ação deixa a equação e o conjunto solução invariantes. Determinamos a constante de Einstein de todas as métricas conhecidas e em alguns casos encontramos a métrica de Yamabe.

Estudamos o funcional de Einstein-Hilbert e concluímos que toda métrica de Einstein invariante sobre uma variedade flag é estável. Usamos C -fibrações para provar que sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$, uma métrica de Einstein $(1, 2)$ -simplética deve ser Kähler. Fizemos uso da classificação das estruturas quase Hermitianas invariantes de San Martin-Negreiros e provamos que uma métrica de Einstein é Kähler ou pertence à classe $W_1 \oplus W_3$. Isto implica em uma solução, no caso das variedades bandeira do tipo A_l , para uma conjectura formulada por W. Ziller[17].

ABSTRACT

The goal of this work is to contribute the study of invariant Hermitian geometry on flag manifolds. We study the class of Einstein metrics on flag manifolds.

In this work we present new solutions for the invariant Einstein equation on flag manifolds, maximal or not, of A_l case. Let W a subgroup of the Weyl group. We described a natural action of W on the solution set of the Einstein equation, and we proved that W leaves the solution set invariant. We obtained the Einstein's constant of all the known metrics and in some cases we found the Yamabe metric.

We studied the Einstein-Hilbert functional and we proved that all invariant Einstein metrics on a flag manifold are stable. Using C -fibrations we proved, in the case $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$, if g is an invariant Einstein metric, and (1,2)-symplectic then g is Kähler. According to San Martin-Negreiros's classification of all almost Hermitian structures on maximal flag manifolds we proved that an Einstein metric is Kähler or belongs to $W_1 \oplus W_3$. This implies in a solution, in flag manifolds of A_l case, for a conjecture proposed by W. Ziller[17].

Introdução

Freqüentemente, questões oriundas de outras ciências fomentam problemas de relevância em matemática. Neste contexto merece destaque a que foi proposta por A.Einstein ([61] e [32]).

Na Teoria da relatividade geral, a métrica de Lorentz g é vista como um potencial gravitacional. Como tal ela pode ser relacionada por uma equação a uma distribuição de massa que gera o campo gravitacional. A.Einstein propôs a equação tensorial $Ric(g) - \frac{S}{2}g = T$ (*) onde T é o tensor de stress-energia, $Ric(g)$ é o tensor de Ricci associado ao tensor fundamental g e S é a curvatura escalar da métrica g .

O tensor $Ric(g) - \frac{S}{2}g$ que aparece na equação acima é o mais simples 2-tensor simétrico construído a partir do tensor g . Por outro lado este tensor possui divergência nula, que é uma condição física relativa ao princípio de conservação da energia. O tensor T está associado a especificidades do meio e no vácuo ele é nulo. Resolver a equação de Einstein significa encontrar um par (g, T) . No vácuo, a equação fica reduzida a $Ric(g) = \frac{S}{2}g$, desse modo resolvê-la significa encontrar uma métrica g que satisfaça a expressão acima. Uma tal solução é chamada de métrica de Einstein.

Se a equação (*) for modificada para $Ric(g) - \frac{S}{2}g + \lambda g = T$ de modo a agregar a constante cosmológica λ , obtemos no vácuo $Ric(g) = cg$. Esta última é historicamente conhecida como a equação de Einstein. Sobre uma variedade Riemanniana uma solução da equação de Einstein é uma métrica Riemanniana que satisfaz $Ric(g) = cg$. Se (M^n, g) , é Einstein c é chamada de constante de Einstein.

Em geral a equação de Einstein é um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem[11] e não são conhecidos resultados gerais sobre a existência de soluções. Entretanto alguns resultados asseguram tal existência em situações especiais. Por exemplo, se a variedade admitir uma estrutura Kähler invariante, existe e é única a menos de isometrias uma métrica de Kähler-Einstein. Se M^n , $n \leq 11$ é compacta, homogênea e simplesmente conexa então existe, a menos de isometrias, pelo menos uma métrica de Einstein invariante[16]. Outros resultados de existência podem ser encontrados, por exemplo, em [17],[34] e [58].

Aqui investigaremos a equação de Einstein invariante, sobre alguns espaços homogêneos compactos de grupos de Lie semi-simples. Neste contexto a equação de Einstein é um sistema algébrico de equações e em alguns casos é possível obter soluções explícitas ver por exemplo [5], [34] e [57]. Esta transformação da equação de Einstein em um sistema algébrico é um típico exemplo de como a teoria de Lie pode ser útil na reformulação de problemas delicados do ponto de vista analítico em problemas de certa forma mais tratáveis.

É comum a descrição de determinados problemas por meios variacionais. O problema se resume à busca por pontos críticos de um funcional apropriado. Entenda-se por funcional apropriado uma função cujos pontos críticos são soluções do problema original. Essa idéia foi amplamente estudada e se iniciou com os trabalhos de I. Newton, L. Euler e J. L. Lagrange [61].

Métricas de Einstein de volume unitário sobre uma variedade fechada, podem ser vistas variacionalmente como os pontos críticos de um funcional introduzido por D. Hilbert[32]. Este funcional associa a cada métrica Riemanniana de volume 1, a integral da sua curvatura escalar: $g \mapsto \int_M S_g d\nu_g$.

Métricas de Einstein são consideradas métricas privilegiadas [11]. Uma variedade Riemanniana admite três noções principais de curvatura: curvatura seccional(ou Riemanniana), curvatura de Ricci e curvatura escalar. Decorre da definição que uma métrica é de Einstein se, e somente se a curvatura de Ricci é constante. Supor que a curvatura seccional é constante é demasiadamente forte, pois implica em sérias restrições à geometria da variedade [35] e por outro lado toda variedade compacta de qualquer dimensão admite métrica de curvatura

escalar constante ([11]Capítulo 4).

Relacionados ao problema de Einstein estão o de saber se uma variedade Riemanniana M admite ou não uma métrica de Einstein e quantas são estas métricas [11],[17]. As respostas para estas questões ainda não são conhecidas em geral. Quando M é um espaço homogêneo compacto de um grupo de Lie semi-simples por um subgrupo parabólico, então a existência de uma métrica de Einstein é garantida [20][40]. Uma métrica Riemanniana sobre M^n , $n = 2$, ou 3 é de Einstein se e somente se a curvatura seccional é constante([35]). Portanto se uma variedade M nestas condições não admitir curvatura seccional constante então M não admite métrica de Einstein: um exemplo típico desta situação é a variedade $S^1 \times S^2$.

Existem exemplos de variedades homogêneas não-compactas que não admitem métricas de Einstein por exemplo $M = SL(2, \mathbb{R})$ ([42] Teorema 1.6). Se G é compacto e $\pi_1(G/H)$ é infinito, então G/H não admite métrica de Einstein com constante de Einstein positiva pois a própria existência de uma métrica com curvatura de Ricci positiva contraria o teorema de Bonnet-Myers. Se $Ric \leq 0$ o teorema de Bochner [14] implica que todo campo de Killing é paralelo e então G/H possui curvatura seccional zero. Portanto se G/H não admitir métrica com curvatura seccional nula então também não admite métrica de Einstein invariante. Mesmo quando $M = G/H$ é compacta e simplesmente conexa a existência de métricas de Einstein não está garantida, por exemplo Wang-Ziller [58] fornecem exemplo de uma variedade 12-dimensional compacta, simplesmente conexa que não admite métrica de Einstein invariante, ver também [11].

Por outro lado, Böhm-Kerr[16] provaram que se M^n é homogênea, compacta, simplesmente conexa e $n \leq 11$ então M admite pelo menos uma métrica de Einstein invariante.

Neste trabalho, estudamos alguns temas relacionados às métricas de Einstein invariantes sobre variedades flag, e apesar de alguns resultados serem aplicáveis a todas as variedades flag associadas a um grupo de Lie semi-simples, notadamente os que dizem respeito a estabilidade do funcional de Einstein-Hilbert, enfatizaremos o caso das variedades flag do tipo A_l . Exibiremos explicitamente novas soluções sobre as variedades $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 5$.

Um flag é uma seqüência de subespaços encaixados: $\{0\} = V_0 \subset V_i \subset V_j \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n$, onde $\dim_{\mathbb{C}} V_i = i$. O conjunto de todos os flags é uma variedade homogênea chamada de variedade flag. Os flags $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n$ são chamados de flags maximais. A variedade que contém todos estes flags é chamada de variedade flag maximal clássica ou geométrica e sua dimensão complexa é $\frac{n(n-1)}{2}$.

De uma forma mais geral, uma variedade flag \mathbb{F} é um espaço homogêneo obtido pelo quociente de um grupo de Lie complexo semi-simples G por um subgrupo parabólico P .

As variedades flag [60] aparecem em diversos ramos da matemática. Elas são compactas, complexas, homogêneas, simplesmente conexas e suas estruturas algébricas, combinatórias e geométricas são fortemente relacionadas [22], [24] e [54]. Aliás esta forte relação é a responsável por muitas das aplicações.

As variedades flag admitem uma estrutura Kähler e é possível construir um mergulho holomorfo desta em um espaço projetivo complexo [30]. Por esta razão às vezes elas são chamadas de "C- espaços Kählerianos" ou D- espaços.

San Martin e Negreiros [54] classificaram a geometria Hermitiana invariante sobre as variedades flag maximais, Silva [55] estudou a geometria Hermitiana invariante no caso de flags parciais. Silva estendeu alguns resultados obtidos por San Martin-Negreiros. Pinzón em [51] fez um estudo das estruturas \mathcal{F} que admitem métricas (1,2)-simpléticas e obteve uma expressão explícita para a curvatura seccional. Anteriormente Paredes descreveu famílias de métricas (1,2)-simpléticas sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 3$. Um trabalho recente de Cohen et al [24] caracteriza as f -estruturas invariantes sobre a variedade flag clássica que admitem métricas (1,2)- simpléticas.

É sabido que se uma variedade Riemanniana admite métrica de Kähler dentre estas algumas são Einstein [40]. Matsushima provou que uma vez fixada a estrutura complexa, dentre todas as métricas de Kähler apenas uma é de Einstein. Em [34], Kimura descreveu completamente todas as soluções da equação de Einstein invariante sobre uma grande classe de variedades flag dentre estas destacamos as variedades

$$\mathbb{F}(n, n_1, n_2, n_3) = \frac{U(n)}{U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)}$$

Anteriormente D'Atri-Nickerson[26] encontraram soluções para a equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(3)$.

Arvanitoyeorgos [5] obteve, de forma independente, alguns dos resultados obtidos por Kimura. Ele obteve também novas soluções para a equação de Einstein invariante sobre uma classe de variedades flag dentre estas destacamos as variedades $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 4$.

Sakane-Senda [52] descreveram novas soluções para a equação de Einstein sobre uma classe de variedades flag, e dentre estas destacamos as variedades $\mathbb{F}(2m)$ $m \geq 3$. Sakane também classificou as métricas de Einstein invariantes sobre a variedade $\mathbb{F}(4)$. Sakane fez uso das bases de Gröbner e de recursos computacionais [52]. Apresentaremos uma classificação das métricas de Einstein invariantes sobre $\mathbb{F}(4)$ utilizando as chamadas C -fibrações e a classificação das estruturas Hermitianas invariantes obtida por San Martin-Negreiros[54].

Aqui descrevemos novas soluções para a equação de Einstein sobre as variedades $\mathbb{F}(5)$, $\mathbb{F}(2m+2)$ $m \geq 5$ e $\mathbb{F}(2m+1)$ $m \geq 6$, além de obter soluções em variedades flag não maximais.

Wang e Ziller [57] descreveram uma ampla classe de variedades para as quais a métrica normal é Einstein (classe esta que inclui várias variedades flag). O livro de A. Besse [11] é uma excelente referência acerca das variedades Einsteinianas. Um outro trabalho neste sentido foi escrito por LeBrun-Wang[37].

A equação de Einstein invariante sobre as variedades flag do caso A_I ,

$$\mathbb{F}(n, n_1, n_2, \dots, n_s) = \frac{U(n)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_s)} \quad (1)$$

é:

$$\lambda_{ij} = n_i + n_j + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{n_l (\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{il} - \lambda_{jl})^2)}{\lambda_{il} \lambda_{jl}}. \quad (2)$$

Esta equação é obtida fazendo uso da teoria de Lie para descrever o tensor de Ricci [5],[52]. Dessa forma a equação de Einstein $Ricci(g) = cg$ fica reduzida a um sistema de $\frac{s(s-1)}{2}$ equações e com a mesma quantidade de variáveis.

Neste trabalho além das soluções nas variedades maximais $\mathbb{F}(5), \mathbb{F}(2m+1)$ $m \geq 6$ e $\mathbb{F}(2m+2)$ $m \geq 5$, já mencionadas, apresentamos também soluções para a equação 2 sobre as variedades (1) com $n_2 = \dots = n_s$ $s \geq 4$:

Observe que quando $n_1 = n_2 = \dots = n_s = 1$ $s \geq 4$ temos o caso maximal e nesta situação reobtemos a menos de escala as métricas descritas em [5]. Quando $n_1 \neq n_2 = \dots = n_s = 1$ $s \geq 4$ obtivemos duas métricas de Einstein não-Kähler invariantes.

Apresentamos, para uma classe de variedades flag do caso A_l , uma solução para a conjectura de Wang-Ziller [17](ver Capítulo 3), provamos que sobre $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 4$ se uma métrica de Einstein invariante é (1,2)-simplética então ela é Kähler. Mostramos(ver Capítulo 3) que uma métrica de Einstein invariante em $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$ é Kähler ou pertence a $W_1 \oplus W_3$. Mostramos (ver Capítulo 2) que sobre $\mathbb{F}(3)$, $\mathbb{F}(4)$ a métrica de maior constante de Einstein é a Kähler-Einstein. Sobre $\mathbb{F}(5)$, dentre as conhecidas, a métrica com maior constante é a métrica descrita no Lema(2.5.3).

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

O **Capítulo 1** é dedicado ao estudo das variedades flag via teoria de Lie. Apresentamos neste capítulo uma descrição destas variedades, e um breve relato dos entes da geometria Hermitiana invariante: métricas invariante, formas de Kähler, estruturas quase complexas invariantes, conexões invariantes.

No **Capítulo 2** estudamos a equação de Einstein sobre variedades flag. Apresentaremos as métricas de Arvanitoyeorgos-Einstein, as métricas de Senda-Einstein. Explicitaremos nossas soluções da equação de Einstein sobre as variedades $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 12$, assim como uma nova solução da equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(5)$ esta aliás possui, dentre as métricas conhecidas, a maior constante de Einstein. Mostramos que a equação de Einstein e o conjunto das soluções desta, são invariantes por uma ação de um subgrupo do grupo de Weyl. Apresentaremos soluções da equação de Einstein sobre variedades flag do caso A_l não-maximais. Finalizamos este Capítulo com um Teorema 2.9.2 que relaciona de forma biunívoca os conjuntos soluções das equações de Einstein sobre flags maximais e flags parciais.

Ainda no Capítulo 2 encontramos a métrica de Yamabe invariante em $\mathbb{F}(3)$, $\mathbb{F}(4)$.

Mostramos que dentre as métricas conhecidas a que possui a maior constante é, na maioria dos casos, a métrica descrita por Senda em [52].

No **Capítulo 3** utilizamos uma classe especial de fibrações, as chamadas C -fibrações para obter propriedades das métricas de Einstein invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$. Dentre essas propriedades concluímos que para $n \geq 4$ não existe métrica de Einstein invariante (1,2)-simplética não-Kähler sobre $\mathbb{F}(n)$. Além disso obtivemos uma classificação das métricas de Einstein invariantes sobre $\mathbb{F}(4)$. Provamos também que uma estrutura Einstein invariante sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$, é Kähler ou pertence à classe $W_1 \oplus W_3$.

No **Capítulo 4** estudaremos a primeira e a segunda variação do Funcional de Einstein-Hilbert. Descrevemos o espaço tangente à variedade das métricas invariantes de volume unitário, e apresentamos novos resultados sobre estabilidade. Neste capítulo provamos que se M é uma variedade flag de um grupo de Lie semi-simples toda métrica de Einstein invariante é estável.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos a notação a ser utilizada no decorrer do texto. Começamos com o estudo dos espaços homogêneos, e em particular das variedades bandeira aqui denominada de variedade “flag”. Abordaremos também alguns aspectos da geometria Hermitiana invariante destas variedades. Algumas referências gerais para este capítulo são os trabalhos [1], [31], [53] e [54].

1.1 Variedades Homogêneas

Um espaço homogêneo M é uma variedade sobre a qual um grupo de Lie G age de forma transitiva, isto é, para quaisquer $x, y \in M$ existe $g \in G$ tal que $g.x = y$.

Podemos identificar M com o conjunto de classes de equivalência G/K onde $K = \{g \in G; g.x = x\}$ é o estabilizador de um ponto $x \in M$, K é claramente um subgrupo fechado de G , porém K não é necessariamente conexo. Um fato bastante conhecido é que qualquer subgrupo fechado K de um grupo de Lie G define uma variedade homogênea $M = G/K$. Existe uma única estrutura diferenciável sobre M para a qual a ação natural de G sobre G/K é diferenciável.

No que se segue admitiremos que a variedade homogênea G/K é um espaço reductivo isto é, que $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ admite uma decomposição.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}. \quad (1.1)$$

Sendo a subálgebra \mathfrak{k} a subálgebra de Lie de K , \mathfrak{m} é o complemento de \mathfrak{k} e $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

1.2 Variedade flag

Nesta seção apresentaremos os espaços homogêneos que são o objeto de estudo desta tese: as variedades flag.

Seja G um grupo de Lie complexo semi-simples, conexo, com algebra de Lie \mathfrak{g} , e subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . Uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} determina a seguinte decomposição de \mathfrak{g} .

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha, \quad (1.2)$$

onde, $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H)X\}$ é o espaço uni-dimensional associado à raiz $\alpha \in \Pi$.

È possível escolher em cada \mathfrak{g}_α um elemento X_α , de tal modo que

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_{-\alpha}] &= H_\alpha, \\ \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle &= 1, \\ [X_\alpha, X_\beta] &= m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde $m_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$ satisfazem $m_{\alpha, \beta} = m_{-\alpha, -\beta}$, e $m_{\alpha, \beta} = 0$ se $\alpha + \beta \notin \Pi$.

Os elementos $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$, formam o que chamamos de uma base de Weyl de \mathfrak{g} [31].

A subálgebra $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ é chamada de subálgebra de Borel. Uma subálgebra parabólica \mathfrak{p} é qualquer subálgebra que contenha a subálgebra de Borel. Um subgrupo de G é chamado de subgrupo parabólico se ele contém um subgrupo de Borel (isto é um subgrupo

solúvel maximal de G [31]). Podemos associar a cada subálgebra parabólica \mathfrak{p} um subgrupo parabólico P pondo $P = N_G(\mathfrak{p})$.

Definição 1.2.1. *Uma variedade flag é o espaço homogêneo obtido pelo quociente de um grupo de Lie semi-simples complexo conexo por um subgrupo parabólico.*

Sabemos que, neste contexto, um subgrupo parabólico [1] é sempre conexo e coincide com o seu normalizador $N_G(P) = P$. Isto implica, em particular, que $M = G/P$ é uma variedade complexa e simplesmente conexa.

É também conhecido que G admite uma forma real compacta U [53]. U é o maior subgrupo compacto real de G , e se escrevermos \mathfrak{u} para denotar a álgebra de Lie de U teremos $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$. Como U age de forma transitiva sobre $M = G/P$, temos $M = U/T$ onde $T = P \cap U$, então concluímos a compacidade de M .

Exemplo 1.2.2. *O grupo de Lie $U = SU(n)$ é a forma real compacta do grupo de Lie $G = SL(n, \mathbb{C})$.*

Exemplo 1.2.3. *A variedade $\mathbb{F}(n) = \frac{SU(n)}{S(U(1) \times U(1) \times \dots \times U(1))}$ é chamada de variedade de flags maximais clássica ou geométrica.*

Exemplo 1.2.4. *O conjunto de k -planos de \mathbb{C}^n pode ser identificado com a variedade homogênea $\frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$. Este espaço homogêneo é denotado por $G_k(\mathbb{C}^n) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$, é chamada de Grasmanniana. Vemos que $G_k(\mathbb{C}^n)$ é um caso especial de variedade flag [1].*

1.3 Espaço tangente

Nesta seção descreveremos, com o auxílio da teoria de Lie, o espaço tangente à $M = G/P$, onde G é um grupo de Lie semi-simples complexo, conexo arbitrário. Sejam M uma variedade flag, $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}$ as álgebras de Lie de G, P , respectivamente. Como G é semi-simples a forma Cartan-Killing $\mathcal{B}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ de \mathfrak{g} é não-degenerada. Podemos então obter uma decomposição ortogonal de \mathfrak{g} em soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{m}. \quad (1.4)$$

Onde, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^\perp$ e $[\mathfrak{p}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

A álgebra de Lie de P , conforme sabemos [1] é uma subálgebra de \mathfrak{g} que contém a subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Ou seja, a álgebra de Lie \mathfrak{p} contém a subálgebra de Cartan, os espaços \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \Pi^+$, e possivelmente “alguns” espaços \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \Pi^-$. Usaremos a seguinte notação.

- Σ sistema simples de raízes,
- $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto do sistema simples de raízes,
- Π conjunto de todas as raízes $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$ e
- $\langle \Theta \rangle = \langle \Theta \rangle \cap \Pi$ e $\langle \Theta \rangle_\pm = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^\pm$.

Com as notações acima podemos escrever $\Pi_\Theta = \langle \Theta \rangle_- \cup \Pi^+$ e descrever a subálgebra parabólica canônica associada a $\Theta \subset \Sigma$ por:

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle_-} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (1.5)$$

A subálgebra \mathfrak{p}_Θ é parabólica pois ela contém a subálgebra de Borel,

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

A seguinte proposição caracteriza todas as subálgebras parabólicas de uma álgebra de Lie semi-simples \mathfrak{g} .

Proposição 1.3.1. *Toda subálgebra parabólica é conjugada à uma subálgebra da forma \mathfrak{p}_Θ*

Demonstração: Ver por exemplo [1] ou [31]. ■

Conforme já foi feito anteriormente, associaremos a cada subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ um subgrupo parabólico P_Θ pondo $P_\Theta = N_G(\mathfrak{p}_\Theta)$.

Escrevamos $\Pi = \Pi_\Theta \cup \Pi_M$. Assim Π_M será chamado de conjunto das raízes complementares. Ao longo deste trabalho denotaremos a variedade flag G/P_Θ por \mathbb{F}_Θ . Observe que quando $\Theta = \emptyset$ a subálgebra parabólica é a de Borel neste caso a subálgebra parabólica

é minimal e talvez por este motivo a variedade $\mathbb{F} = G/B$ seja chamada de variedade flag maximal. Do mesmo modo quando $\Theta \neq \emptyset$ a variedade \mathbb{F}_Θ é chamada de variedade flag parcial ou generalizada [51], [55]. As variedades flag também são chamadas de “ C -espaços Kählerianos” [5] ou D -espaços.

Observe que para cada subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ podemos obter uma subálgebra parabólica associada a Θ . Assim, podemos obter uma cadeia de inclusões:

$$\emptyset = \Pi_{\Theta_0} \subset \Pi_{\Theta_1} \subset \Pi_{\Theta_2} \subset \cdots \subset \Pi$$

Denotando por P_{Π_i} o subgrupo parabólico cuja álgebra de Lie é:

$$\mathfrak{p}_{\Pi_i} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Pi_{\Theta_i}} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha \in (\Theta_i)_-} \mathfrak{g}_\alpha$$

Obtemos assim, a seqüência de variedades flags

$$\text{Maximal} = G/B \rightarrow G/P_{\Pi_1} \rightarrow \cdots \rightarrow G/G = \{\text{ponto}\}$$

Considere \mathfrak{u} uma forma real compacta de \mathfrak{g} construída a partir de uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . De acordo com [53] $\mathfrak{u} = \langle i\mathfrak{h}, A_\alpha, iS_\alpha, \alpha \in \Pi \rangle$, onde

$$\begin{aligned} A_\alpha &= X_\alpha - X_{-\alpha} \\ S_\alpha &= X_\alpha + X_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Quando \mathfrak{g} é semi-simples e complexa, existe uma única, a menos de isomorfismos, forma real compacta \mathfrak{u} de \mathfrak{g} [31],[53]. A forma real compacta \mathfrak{u} , é uma álgebra de Lie semi-simples pois a sua forma Cartan-Killing, que é restrição da forma Cartan-Killing de \mathfrak{g} , é negativa definida portanto não-degenerada [53].

A complexificação de \mathfrak{u} é \mathfrak{g} . Denote por $U \subset G$ o grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é \mathfrak{u} . Como no caso $\Theta \equiv \emptyset$, o grupo U é compacto e age transitivamente sobre \mathbb{F}_Θ [1]. Desse modo,

$$\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = U/K_\Theta. \quad (1.6)$$

Na expressão acima, $K_\Theta = P_\Theta \cap U$.

Tendo em vista a decomposição (1.4) podemos escrever o espaço tangente complexo à variedade \mathbb{F}_Θ na origem, como:

$$\mathfrak{m}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi_M} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Por uma série de razões é conveniente olhar \mathbb{F}_Θ como um espaço homogêneo de U . Sabemos que U é compacto, o que garante a redutibilidade de \mathbb{F}_Θ . Existe, portanto, um subespaço \mathfrak{m}_Θ que é K_Θ -invariante e se $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_\Theta$ é a álgebra de Lie de K_Θ então $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta^\perp$ ou seja, $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$ e $Ad(k)\mathfrak{m}_\Theta \subset \mathfrak{m}_\Theta$.

Podemos então escrever,

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \sum_{\beta \in \Pi_M} \mathfrak{u}_\beta,$$

onde, $\mathfrak{u}_\beta = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\beta + \mathfrak{g}_{-\beta})$.

Portanto, para cada raiz $\beta \in \Pi_M$, \mathfrak{u}_β possui dimensão dois e é gerado por A_β, iS_β

$$\mathfrak{m}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi_M} (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}). \quad (1.7)$$

Quando $\Theta \equiv \emptyset$ temos uma variedade maximal. Neste caso, $\Pi_M = \Pi^-$.

1.4 Estruturas quase complexas

Uma estrutura quase complexa J sobre uma variedade real M é um campo tensorial $J: TM \rightarrow TM$ tal que $J^2 = -Id$. Aqui, e no que segue estaremos interessados nas estruturas quase complexas invariantes (e.q.c.i.) sobre variedades flag. Uma referência para alguns detalhes omitidos aqui é [55].

Definição 1.4.1. *Uma estrutura quase complexa em uma variedade flag \mathbb{F}_Θ é um campo tensorial J^Θ que em cada ponto $x \in \mathbb{F}_\Theta$ é uma estrutura complexa em $T_x\mathbb{F}_\Theta$, ou seja é um endomorfismo $J_x^\Theta: T_x\mathbb{F}_\Theta \rightarrow T_x\mathbb{F}_\Theta$ tal que $(J_x^\Theta)^2 = -Id$.*

Conforme já mencionamos, estamos interessados em um tipo especial de estrutura quase complexa.

Definição 1.4.2. *Uma estrutura quase complexa U -invariante em \mathbb{F}_Θ é uma estrutura quase complexa J^Θ em \mathbb{F}_Θ que satisfaz $J_{ux}^\Theta = dE_u J_x^\Theta dE_u^{-1}$ para todo $u \in U$.*

Onde, $dE_u: T\mathbb{F}_\Theta \rightarrow T\mathbb{F}_\Theta$ denota a diferencial da translação a esquerda por $u \in U$. Em outras palavras, para todo $X \in T_x\mathbb{F}_\Theta$ vale:

$$dE_u J_x^\Theta X = J_{ux}^\Theta dE_u X.$$

Vamos caracterizar as estruturas quase complexas invariantes sobre $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$. A próxima proposição, que é válida para espaços homogêneos em geral, estabelece uma correspondência biunívoca entre estruturas quase complexas U -invariantes, (que denotaremos por e.q.c.i.) e estruturas complexas que comutam com o grupo de isotropia $\{Ad^{U/K_\Theta}(k) \mid k \in K_\Theta\}$.

Proposição 1.4.3. *Existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas quase complexas U -invariantes J^Θ , e as estruturas complexas $J_{x_0}^\Theta$ em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ que comutam com o grupo de isotropia.*

Demonstração: Ver [51] ou [55]. ■

Portanto para determinar todas as possíveis e.q.c.i.'s em \mathbb{F}_Θ é suficiente descrever as estruturas complexas $J_{x_0}^\Theta$ em \mathfrak{m}_Θ que comutam com o grupo de isotropia. Assim temos o seguinte lema,

Lema 1.4.4. J^Θ comuta com a representação de \mathfrak{k}_Θ em \mathfrak{m}_Θ .

Demonstração:

$L \in \mathfrak{k}_\Theta$. Pela proposição precedente sabemos que $Ad(k)J^\Theta = J^\Theta Ad(k)$ para todo $k \in K_\Theta$. Considere $L \in \mathfrak{k}_\Theta$ e $k(t) = e^{tL}$ uma curva em K_Θ com vetor tangente L na origem, então:

$$ad(L)J^\Theta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad(k(t))J^\Theta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J^\Theta Ad(k(t)) = J^\Theta ad(L).$$

■

Considerando a complexificação de \mathfrak{m}_Θ , podemos considerar a complexificação de J^Θ , $(J^\Theta)^{\mathbb{C}}$ da seguinte maneira: tome $x_0 \in \mathbb{F}_\Theta$ e defina $(J_{x_0}^\Theta)^{\mathbb{C}} : T_{x_0}^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta \rightarrow T_{x_0}^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta$ por

$$(J_x^\Theta)^{\mathbb{C}}(u + iv) = J^\Theta(u) + iJ^\Theta(v).$$

Continuaremos denotando por J^Θ , apesar de termos complexificado a e.q.c.i., a complexificada de J^Θ . A e.q.c.i. $(J^\Theta)^{\mathbb{C}}$ continua satisfazendo a condição $[(J_x^\Theta)^{\mathbb{C}}]^2 = -Id$. Os autovalores desta são $\pm i$ e seus auto-espacos serão

$$T^{(0,1)}\mathbb{F}_\Theta = \{X \in \mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}; J^\Theta X = -\sqrt{-1}X\}$$

$$T^{(1,0)}\mathbb{F}_\Theta = \{X \in \mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}; J^\Theta X = \sqrt{-1}X\}.$$

(1.8)

Os vetores de $T^{(0,1)}\mathbb{F}_\Theta$ (respectivamente de $T^{(1,0)}\mathbb{F}_\Theta$) serão chamados de vetores do tipo $(0, 1)$ (respectivamente $(1, 0)$).

Os próximos lemas podem ser encontrados em [55]

Lema 1.4.5. J^Θ deixa os espacos de raizes complementares (reais e complexos) invariantes.

Demonstração: Faremos a demonstração para os espacos de raizes complexos. O outro caso é inteiramente análogo e pode ser encontrado em [55]. Observe que para $H \in \mathfrak{h}$ e para $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ temos:

$[H, J^\Theta X] = J^\Theta [H, X] = J^\Theta \alpha(H)X$. Ou seja J^Θ deixa os espacos \mathfrak{g}_α invariantes. Como $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ e $(J^\Theta)^2 = -Id$ sobre cada espaco \mathfrak{g}_α temos $J^\Theta X_\alpha = \sqrt{-1}\varepsilon_\alpha X_\alpha$. ■

A proposição abaixo descreve as estruturas quase complexas invariantes sobre uma variedade flag, em termos de um conjunto de sinais.

Proposição 1.4.6. *Uma e.q.c.i. J^Θ sobre $\mathfrak{m} = T_o\mathbb{F}_\Theta$ é dada pelo conjunto $\{\varepsilon_\alpha^\Theta\}_{\alpha \in \Pi_M}$ com $\varepsilon_\alpha^\Theta = \pm 1$ e $\varepsilon_\alpha^\Theta = -\varepsilon_{-\alpha}^\Theta$.*

Demonstração: Foi visto que sobre cada \mathfrak{g}_α temos: $J^\Theta(X_\alpha) = \sqrt{-1}\varepsilon_\alpha^\Theta X_\alpha$ com $\varepsilon_\alpha^\Theta = \pm 1$. Considere agora $J^\Theta(\mathfrak{g}_\alpha) = i\varepsilon_\alpha^\Theta \mathfrak{g}_\alpha$.

Para mostrar que $\varepsilon_\alpha^\Theta = -\varepsilon_{-\alpha}^\Theta$ Considere a igualdade $-\mathfrak{g}_{-\alpha} = \bar{\mathfrak{g}}_\alpha$ aqui a barra denota a conjugação complexa daí temos:

$$-\sqrt{-1}\varepsilon_{-\alpha}\mathfrak{g}_{-\alpha} = J^\Theta(-\mathfrak{g}_{-\alpha}) = J^\Theta(\bar{\mathfrak{g}}_\alpha) = \overline{\sqrt{-1}\varepsilon_\alpha\mathfrak{g}_\alpha} = -\sqrt{-1}\varepsilon_\alpha(-\mathfrak{g}_{-\alpha}) \text{ e isto implica em}$$

$$\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$$

■

Por força da proposição acima, muitas vezes uma e.q.c.i. é dita ser um conjunto de sinais $\{\pm 1\}$, posto que devido a natureza invariante da estrutura complexa J basta conhecer o seu comportamento sobre os espaços de raízes \mathfrak{g}_α , e como vimos este pode ser determinado através dos sinais ± 1 .

Observação 1.4.7. *Denotaremos por $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra gerada por \mathfrak{g}_α , com $\alpha \in \Theta$.*

Seguindo a notação acima, Silva[55] provou o seguinte resultado:

Lema 1.4.8. *Considere uma e.q.c.i. em \mathbb{F}_Θ dada por $\varepsilon_\alpha^\Theta = \{\pm 1\}$ com $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$. Se \mathfrak{g}_α e \mathfrak{g}_β pertencerem a mesma componente irredutível da representação adjunta de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em $\mathfrak{m}_\Theta^\perp$ então $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta$.*

Demonstração: Suponha que \mathfrak{g}_α e \mathfrak{g}_β estejam na mesma componente irredutível da representação adjunta de $\mathfrak{g}(\Theta)$, isto é existe $\gamma \in \langle \Theta \rangle$ tal que $\alpha + \gamma = \beta$, logo para todo x em $\langle \Theta \rangle^\perp$ temos,

$$\beta(x) = \langle \beta, x \rangle = \langle \alpha + \gamma, x \rangle = \langle \alpha, x \rangle + \langle \gamma, x \rangle = \alpha(x).$$

Portanto, $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta$.

■

1.5 Tensores invariantes sobre M

Nesta seção estudaremos os 2-tensores invariantes. Apresentaremos uma representação destes que nos será útil no decorrer deste trabalho. Todos os resultados acerca dos tensores invariantes apresentados aqui valem para espaços homogêneos em geral e são fundamentais no estudo da geometria invariante destas variedades. Como referência geral para esta seção, sugerimos [23].

Definição 1.5.1. *Um 2-tensor h em $M = G/H$ é G -invariante se para todo $g \in G$ temos:*

$$h(X, Y)_x = h(dE_u X, dE_u Y)_{ux}, \text{ para todo } X, Y \in T_x(G/H).$$

O próximo resultado, que é uma versão da proposição (3.16)(1) de [23], mostra que um 2-tensor invariante h sobre G/H fica completamente determinado por seu valor na origem.

Proposição 1.5.2. [23] *Existe uma correspondência biunívoca entre formas bilineares simétricas $Ad(H)$ -invariantes em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ e 2-tensores simétricos G -invariantes em G/H .*

Demonstração: Seja h um 2-tensor simétrico G -invariante sobre M . Restringindo h ao espaço tangente de M na classe $[H] = 0$ obtemos uma forma bilinear simétrica F sobre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. A simetria de F decorre da simetria de h , além disso F é invariante pois $F(X, Y) := h(dE_u X, dE_u Y)_u \quad \forall X, Y \in T_{[H]}M$. Desse modo,

$$F(Ad_M X, Ad_M Y) = h(dE_u Ad_M dE_{u^{-1}} X, dE_u Ad_M dE_{u^{-1}} Y)_u$$

Mas $dE_u \cdot Ad_M(h) = dE_h$. Portanto,

$$\begin{aligned} h(dE_u Ad_M dE_{u^{-1}} X, dE_u Ad_M dE_{u^{-1}} Y)_u &= \\ &= h(dE_h dE_{u^{-1}} X, dE_h dE_{u^{-1}} Y)_{[H]} \\ &= h(dE_{u^{-1}} X, dE_{u^{-1}} Y)_{[H]} = h(dE_u X, dE_u Y)_u = F(X, Y) \end{aligned}$$

onde nas três últimas igualdades usamos a invariância de h . Reciprocamente, dada uma forma bilinear simétrica F invariante pela ação adjunta de Ad_H sobre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, vamos definir um 2-tensor simétrico h sobre $M = G/H$ pondo:

$$h(U, V)_{[x]} := F(dE_{g^{-1}}U, dE_{g^{-1}}V) \quad , \quad x = gH.$$

Na expressão acima h está bem definido pois se $[x] = [x']$, então $x = gH$ e $x' = g'H$, daí existe $k \in H$ com $g' = gk$. Portanto,

$$\begin{aligned} h(U, V)_{x'} &= F(dE_{(g')^{-1}}U, dE_{(g')^{-1}}V) \\ &= F(dE_{(gk)^{-1}}U, dE_{(gk)^{-1}}V) \\ &= F(dE_{(g)^{-1}}dE_{(k)^{-1}}U, dE_{(g)^{-1}}dE_{(k)^{-1}}V) \\ &= F(Ad_{\frac{G}{H}}(k^{-1})dE_{g^{-1}}U, Ad_{\frac{G}{H}}(k^{-1})dE_{g^{-1}}V) \\ &= F(dE_{g^{-1}}U, dE_{g^{-1}}V) = h(U, V)_x. \end{aligned}$$

Provaremos agora a G -invariância de h . Se $x \in G/H$ então $x = gH$ com $g \in G$. Então,

$$\begin{aligned} h(dE_uA, dE_uB)_{ux} &= F(dE_{(ug)^{-1}}dE_uA, dE_{(ug)^{-1}}dE_uB) \\ &= F(dE_{(g)^{-1}}dE_{u^{-1}}dE_uA, dE_{(g)^{-1}}dE_{u^{-1}}dE_uB) \\ &= F(dE_{g^{-1}}A, dE_{g^{-1}}B) = h(A, B)_x. \end{aligned}$$

■

Podemos escrever formas bilineares num espaço vetorial V usando uma forma bilinear não-degenerada e transformações lineares de V . Isso é feito da seguinte maneira: suponha que \mathcal{B} e \mathcal{B}_1 sejam formas bilineares e que \mathcal{B} seja não-degenerada. Quando G é semi-simples podemos tomar, por exemplo, \mathcal{B} como a forma de Cartan-Killing. Definimos $Q : V \rightarrow V$ por:

$$Q = (\mathcal{B}_t)^{-1}(\mathcal{B}_1)_t,$$

onde, a transformação linear \mathcal{B}_t é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_t: V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \mathcal{B}(v, \cdot). \end{aligned}$$

Desse modo $\mathcal{B}_1(X, Y) = \mathcal{B}(QX, Y)$, $\forall X, Y \in V$.

As propriedades da forma bilinear \mathcal{B}_1 são consequência das propriedades de Q . Por exemplo: \mathcal{B}_1 é simétrica se e somente se Q for simétrica com relação à \mathcal{B} .

De fato, se $\mathcal{B}_1(X, Y) = \mathcal{B}_1(Y, X)$ então $\mathcal{B}(QX, Y) = \mathcal{B}(QY, X)$, e a recíproca é feita de modo análogo. \mathcal{B}_1 é positiva definida se, e somente se Q for positiva definida com relação à \mathcal{B} .

Pensando desta maneira e considerando \mathcal{B} como sendo o negativo da forma Cartan-Killing (pois a forma Cartan-Killing é negativa definida), uma métrica invariante sobre \mathbb{F}_Θ pode ser escrita como,

$$ds_{\Lambda^\Theta}^2(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\Lambda^\Theta} = -\langle \Lambda^\Theta X, Y \rangle_{C-K},$$

onde, $\Lambda^\Theta : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ é positiva definida com relação a forma de Cartan-Killing. A próxima proposição descreve um 2-tensor simétrico invariante em \mathbb{F}_Θ .

Proposição 1.5.3. *Um 2-tensor simétrico invariante h em \mathbb{F}_Θ é dado pelo conjunto $\{\lambda_\alpha^\Theta\}_{\alpha \in \Pi_M}$ com $\lambda_\alpha^\Theta = \lambda_{-\alpha}^\Theta$.*

Demonstração: Ver por exemplo [54] ou [55]. ■

Como corolário imediato temos:

Corolário 1.5.4. *Uma métrica invariante em \mathbb{F}_Θ é dada pelo conjunto $\{\lambda_\alpha^\Theta > 0\}_{\alpha \in \Pi_M}$ com $\lambda_\alpha^\Theta = \lambda_{-\alpha}^\Theta$.*

Já vimos que a variedade homogênea G/P possui naturalmente uma estrutura de variedade complexa. Desse modo é natural estendermos a métrica Riemanniana dada por $(\Lambda^\Theta) = \{\lambda_\alpha^\Theta \alpha \in \Pi_M^+\}$ a uma aplicação bilinear, não necessariamente positiva definida como no caso Riemanniano. Como é usual utilizaremos a mesma notação tanto para a métrica Riemanniana como para a sua complexificada. Assim $ds_{\Lambda^\Theta}^2 : T^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta \times T^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por:

$$ds_{\Lambda^\Theta}^2(X_1 + \sqrt{-1}Y_1, X_2 + \sqrt{-1}Y_2) = ds_{\Lambda^\Theta}^2(X_1, X_2) + \sqrt{-1}ds_{\Lambda^\Theta}^2(X_1, Y_2) + \sqrt{-1}ds_{\Lambda^\Theta}^2(Y_1, X_2) + ds_{\Lambda^\Theta}^2(Y_1, Y_2).$$

1.6 Forma de Kähler

Nesta seção veremos algumas propriedades bem conhecidas das variedades “flag.”

Uma métrica invariante $ds_{\Lambda^\Theta}^2$ satisfaz a relação:

$$ds_{\Lambda^\Theta}^2(J^\Theta X, J^\Theta Y) = ds_{\Lambda^\Theta}^2(X, Y), \quad (1.9)$$

para todos os campos X, Y em \mathbb{F}_Θ .

Uma métrica satisfazendo (1.9) é dita ser quase Hermitiana. Para verificar (1.9), observe que,

$$ds_{\Lambda^\Theta}^2(J^\Theta X_\alpha, J^\Theta X_\beta) = ds_{\Lambda^\Theta}^2(\sqrt{-1}\epsilon_\alpha^\Theta X_\alpha, \sqrt{-1}\epsilon_\beta^\Theta X_\beta) = -\epsilon_\alpha^\Theta \epsilon_\beta^\Theta ds_{\Lambda^\Theta}^2(X_\alpha, X_\beta) = -\epsilon_\alpha^\Theta \epsilon_\beta^\Theta \langle \Lambda^\Theta(X_\alpha), X_\beta \rangle$$

Sabemos que $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle \neq 0$ se, e somente se $\beta + \alpha = 0$. Portanto,

$$ds_{\Lambda^\Theta}^2(J^\Theta X_\alpha, J^\Theta X_{-\alpha}) = -\epsilon_\alpha^\Theta \epsilon_{-\alpha}^\Theta \langle \Lambda^\Theta(X_\alpha), X_{-\alpha} \rangle = ds_{\Lambda^\Theta}^2(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

Denote por $\Omega^\Theta = \Omega_{J^\Theta, \Lambda^\Theta}$ a 2-forma Kähler dada por:

$$\Omega^\Theta(X, Y) = ds_{\Lambda^\Theta}^2(X, J^\Theta Y) = -\langle \Lambda^\Theta X, J^\Theta Y \rangle$$

Do mesmo modo que ocorrera com a métrica invariante, $\Omega^\Theta(X_\alpha, X_\beta) = 0$ a menos que $\beta + \alpha = 0$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \Omega^\Theta(X_\alpha, X_{-\alpha}) &= -\langle \Lambda^\Theta X_\alpha, J^\Theta X_{-\alpha} \rangle \\ &= -\langle \lambda_\alpha^\Theta X_\alpha, i\epsilon_{-\alpha}^\Theta X_{-\alpha} \rangle \\ &= -i\lambda_\alpha^\Theta \epsilon_{-\alpha}^\Theta \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle \\ &= i\lambda_\alpha^\Theta \epsilon_\alpha^\Theta. \end{aligned}$$

Decorre da definição, que Ω^Θ é invariante. Antes de prosseguir, apresentamos a seguinte proposição.

Proposição 1.6.1. $d\Omega^\ominus(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e neste caso

$$d\Omega^\ominus(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha,\beta}(\epsilon_\alpha\lambda_\alpha + \epsilon_\beta\lambda_\beta + \epsilon_\gamma\lambda_\gamma). \quad (1.10)$$

Demonstração: Se ω é uma p -forma diferenciável então a sua diferencial [35] $d\omega(X_0, X_1, \dots, X_p)$ é dada por:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \dots, X_p) &= \frac{1}{p+1} \left[\sum_{i=0}^p (-1)^i X_i \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \right]. \end{aligned}$$

Como Ω^\ominus é invariante os termos envolvendo a derivada direcional são nulos, portanto podemos escrever:

$$3d\Omega^\ominus(X, Y, Z) = -\Omega^\ominus([X, Y], Z) + \Omega^\ominus([X, Z], Y) - \Omega^\ominus([Y, Z], X). \quad (1.11)$$

Pela definição de Ω^\ominus temos que na origem

$$\begin{aligned} 3d\Omega^\ominus(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= \\ &- \Omega^\ominus([X_\alpha, X_\beta], X_\gamma) \\ &+ \Omega^\ominus([X_\alpha, X_\gamma], X_\beta) \\ &- \Omega^\ominus([X_\beta, X_\gamma], X_\alpha). \end{aligned}$$

Mas pela escolha da base de Weyl

$$\begin{cases} [X_\delta, X_\sigma] = m_{\delta,\sigma} X_{\delta+\sigma} & \text{se } \delta + \sigma \text{ for uma raiz e} \\ [X_\delta, X_\sigma] = 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue daí que,

$$\begin{aligned} 3d\Omega^\ominus(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= \\ &- \Omega^\ominus(m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) \\ &+ \Omega^\ominus(m_{\alpha,\gamma} X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) \\ &- \Omega^\ominus(m_{\beta,\gamma} X_{\beta+\gamma}, X_\alpha). \end{aligned}$$

Mas, pela definição de Ω^\ominus esta expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 3d\Omega^\ominus(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= \\ &= im_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha+\beta}^\ominus\epsilon_\gamma^\ominus\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma \rangle \\ &\quad - im_{\alpha,\gamma}\lambda_{\alpha+\gamma}^\ominus\epsilon_\beta^\ominus\langle X_{\alpha+\gamma}, X_\beta \rangle \\ &\quad + im_{\beta,\gamma}\lambda_{\beta+\gamma}^\ominus\epsilon_\alpha^\ominus\langle X_{\beta+\gamma}, X_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que $\langle X_\delta, X_\sigma \rangle \neq 0$ se e somente se $\delta + \sigma = 0$. Portanto cada um dos termos da expressão acima é não nulo se e somente se $\alpha + \beta + \gamma = 0$ resultando em:

$$\begin{aligned} 3d\Omega^\ominus(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= \\ &= i.m_{\alpha,\beta}\lambda_{-\gamma}^\ominus\epsilon_\gamma^\ominus\langle X_{-\gamma}, X_\gamma \rangle \\ &\quad - i.m_{\alpha,\gamma}\lambda_{-\beta}^\ominus\epsilon_\beta^\ominus\langle X_{-\beta}, X_\beta \rangle \\ &\quad + i.m_{\beta,\gamma}\lambda_{-\alpha}^\ominus\epsilon_\alpha^\ominus\langle X_{-\alpha}, X_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Mais uma vez pela escolha da base de Weyl

$$\langle X_\delta, X_{-\delta} \rangle = 1.$$

Logo,

$$3d\Omega^\ominus(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\gamma}^\ominus\epsilon_\gamma^\ominus + im_{\alpha,\gamma}\lambda_{-\beta}^\ominus\epsilon_\beta^\ominus - im_{\beta,\gamma}\lambda_{-\alpha}^\ominus\epsilon_\alpha^\ominus. \quad (1.12)$$

Além disso, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ implica que

$$\begin{aligned} m_{\alpha,\beta} &= \langle [X_\alpha, X_\beta], -X_{-(\alpha+\beta)} \rangle \\ &= \langle [X_\alpha, X_\beta], -X_\gamma \rangle \\ &= \langle [X_\beta, X_\alpha], X_\gamma \rangle \\ &= \langle X_\beta, [X_\alpha, X_\gamma] \rangle \\ &= \langle X_\beta, m_{\alpha,\gamma}X_{\alpha+\gamma} \rangle \\ &= -m_{\alpha,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}. \end{aligned}$$

Aplicando sucessivamente este argumento chegamos a:

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha} = -m_{\alpha,\gamma}. \quad (1.13)$$

Finalmente usando as igualdades acima e $\lambda_{-\alpha}^{\ominus} = \lambda_{\alpha}^{\ominus}$ obtemos a proposição. ■

A expressão de $d\Omega^{\ominus}$ sugere a seguinte definição:

Definição 1.6.2. *Seja J^{\ominus} uma estrutura quase complexa invariante. Uma tripla de raízes α, β, γ com $\alpha + \beta + \gamma = 0$ será chamada de:*

- Uma $\{0, 3\}$ -tripla se $\epsilon_{\alpha}^{\ominus} = \epsilon_{\beta}^{\ominus} = \epsilon_{\gamma}^{\ominus}$.
- Uma $\{1, 2\}$ -tripla caso contrário.

Convém lembrar que uma variedade quase Hermitiana é dita $(1, 2)$ -simplética se, e somente se

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0,$$

quando um dos vetores é do tipo $(1, 0)$ e os outros dois são do tipo $(0, 1)$ (1.8). A próxima proposição fornece um critério para um par invariante $(J^{\ominus}, \Lambda^{\ominus})$ ser $(1, 2)$ -simplético sobre uma variedade flag.

Proposição 1.6.3. *O par invariante $(J^{\ominus}, \Lambda^{\ominus})$ sobre uma variedade flag é $(1, 2)$ -simplético se e somente se*

$$\epsilon_{\alpha}^{\ominus} \lambda_{\alpha}^{\ominus} + \epsilon_{\beta}^{\ominus} \lambda_{\beta}^{\ominus} + \epsilon_{\gamma}^{\ominus} \lambda_{\gamma}^{\ominus} = 0$$

para toda $\{1, 2\}$ -tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Demonstração: Ver por exemplo [54] no caso de flag maximal e [55] no caso de flags parciais. ■

Se $d\Omega = 0$ dizemos que M é quase-Kähler. Uma variedade quase Hermitiana M é dita Kähleriana se $d\Omega = 0$ e J for integrável. A integrabilidade da estrutura quase complexa J^{\ominus} está relacionada ao seguinte tensor, conhecido como tensor de Nijenhuis,

$$\frac{1}{2}N(X, Y) = [J^\ominus X, J^\ominus Y] - [X, Y] - J^\ominus [X, J^\ominus Y] - J^\ominus [J^\ominus X, Y] \quad (1.14)$$

Sabemos que J^\ominus é integrável se, e somente se $N(X, Y) = 0$ para quaisquer X, Y [35]. No contexto invariante o tensor acima possui uma expressão mais simples dada pela próxima proposição.

Proposição 1.6.4. *Sejam $J^\ominus = \{\epsilon_\alpha^\ominus\}$ uma e.q.c.i., e $\alpha, \beta \in \Pi_M$. O tensor de Nijenhuis é nulo, a menos que, $\alpha + \beta$ seja uma raiz. Neste caso*

$$\frac{1}{2}N(X_\alpha, X_\beta) = -m_{\alpha, \beta} (\epsilon_\alpha^\ominus + \epsilon_\beta^\ominus) (\epsilon_\alpha^\ominus - \epsilon_{\alpha+\beta}^\ominus) X_{\alpha+\beta}. \quad (1.15)$$

Demonstração: Calculando (1.14) em dois vetores de uma base de Weyl de \mathfrak{g} obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N(X_\alpha, X_\beta) &= -[J^\ominus X_\alpha, J^\ominus X_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] + J^\ominus [X_\alpha, J^\ominus X_\beta] + J^\ominus [J^\ominus X_\alpha, X_\beta] \\ &= -[i\epsilon_\alpha^\ominus X_\alpha, i\epsilon_\beta^\ominus X_\beta] + m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + J^\ominus [X_\alpha, i\epsilon_\beta^\ominus X_\beta] + J^\ominus [i\epsilon_\alpha^\ominus X_\alpha, X_\beta] \\ &= m_{\alpha, \beta} \epsilon_\alpha^\ominus \epsilon_\beta^\ominus X_{\alpha+\beta} + m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} - m_{\alpha, \beta} \epsilon_\beta^\ominus \epsilon_{\alpha+\beta}^\ominus X_{\alpha+\beta} - m_{\alpha, \beta} \epsilon_\alpha^\ominus \epsilon_{\alpha+\beta}^\ominus X_{\alpha+\beta} \\ &= m_{\alpha, \beta} (\epsilon_\alpha^\ominus + \epsilon_\beta^\ominus) (\epsilon_\alpha^\ominus - \epsilon_{\alpha+\beta}^\ominus) X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Portanto se $\alpha + \beta$ não for raiz, $m_{\alpha, \beta} = 0$ e a expressão é nula. Quando $\alpha + \beta$ for uma raiz temos a expressão acima e isso encerra a demonstração. ■

A proposição acima tem como consequência o seguinte fato.

Corolário 1.6.5. *Uma estrutura quase Hermitiana invariante sobre \mathbb{F}_\ominus é quase-Kähler se e somente se é Kähler.*

Demonstração: Ver [55]. ■

Encerramos esta seção com uma caracterização mais precisa das estruturas Kähler invariante sobre \mathbb{F}_\ominus . Esta caracterização foi obtida por Borel-Hirzebruch[19].

Proposição 1.6.6. *Uma métrica invariante $\Lambda^\ominus = \{\lambda_\alpha\}$ sobre \mathbb{F}_\ominus é Kähler com respeito a alguma estrutura quase complexa invariante J^\ominus se e somente se*

$$\lambda_{\alpha+\beta}^\ominus = \lambda_\alpha^\ominus + \lambda_\beta^\ominus \quad \forall \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi_M^+. \quad (1.16)$$

Demonstração: Se $\lambda_{\alpha+\beta}^\ominus = \lambda_\alpha^\ominus + \lambda_\beta^\ominus \quad \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi_M^+$ então Λ^\ominus é quase-Kähler com $\epsilon_\alpha^\ominus = \epsilon_\beta^\ominus = -\epsilon_{\alpha+\beta}^\ominus \quad \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi_M^+$ é sabido [54] que nestas condições o par invariante $(J^\ominus, \Lambda^\ominus)$ é Kähler.

Quanto a recíproca, suponha que o par $(J^\ominus, \Lambda^\ominus)$ é Kähler. Portanto $d\Omega^\ominus = 0$ e $N = 0$. Pela proposição(1.6.1) temos que:

$$\epsilon_\alpha^\ominus \lambda_\alpha^\ominus + \epsilon_\beta^\ominus \lambda_\beta^\ominus + \epsilon_\gamma^\ominus \lambda_\gamma^\ominus = 0 \text{ quando } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Além disso, de acordo com (1.15) não podemos ter $\{0, 3\}$ -triplas pois $N = 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\alpha, \beta \in \Pi_M^+, \gamma \in \Pi_M^-$ desse modo

$$\lambda_{\alpha+\beta}^\ominus = \lambda_\alpha^\ominus + \lambda_\beta^\ominus \quad \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi_M^+$$

O que encerra demonstração. ■

1.7 Conexão Riemanniana

Nesta seção apresentaremos a conexão Riemanniana associada a uma métrica invariante sobre uma variedade flag. Começamos com uma proposição que é válida em um contexto mais geral.

Proposição 1.7.1. *Seja $M = \frac{G}{K}$ um espaço homogêneo redutível com uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ e uma $ad(K)$ -invariante forma bilinear simétrica não-degenerada \mathcal{B} sobre \mathfrak{m} . Denote por g a métrica invariante correspondente a \mathcal{B} . Então:*

1. *A conexão Riemanniana de Λ^\ominus é dada por*

$$\nabla_{\mathfrak{m}}(X)Y = \frac{1}{2} [X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y),$$

onde, $U(X, Y)$ é a aplicação bilinear simétrica de $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ definida por

$$2\mathcal{B}(U(X, Y), Z) = \mathcal{B}(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + \mathcal{B}([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y) \text{ para quaisquer } X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

2. A conexão Riemanniana de Λ^Θ coincide com a conexão natural se e somente se

$$\mathcal{B}(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + \mathcal{B}([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y) = 0 \text{ para quaisquer } X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

Demonstração: Ver por exemplo ([35], Volume II, página 201). ■

Precisaremos de uma expressão para o vetor $U(X, Y)$ com relação a base de $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, formada por $\{X_\beta; \beta \in \Pi_M\}$. No que se segue escreveremos $\lambda_{|\alpha|}$ pra denotar λ_α se $\alpha \in \Pi_M^+$ ou $\lambda_{-\alpha}$ se $\alpha \in \Pi_M^-$.

Escreva $U(X, Y) = \sum_{\beta \in \Pi_M} c_\beta X_\beta$. Então para qualquer $\gamma \in \Pi_M$:

$$\begin{aligned} 2c_\gamma \lambda_\gamma &= 2g\left(\sum_{\beta \in \Pi_M} c_\beta X_\beta, X_{-\gamma}\right) \\ &= g([X_{-\gamma}, X]_{\mathfrak{m}}, Y) + g(X, [X_{-\gamma}, Y]_{\mathfrak{m}}), \end{aligned}$$

onde,

$$c_{\alpha, \beta}^\gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma \neq \alpha + \beta \\ \frac{1}{2} \frac{(\lambda_{|\beta|} - \lambda_{|\alpha|}) m_{\alpha, \beta}}{\lambda_{|\alpha + \beta|}} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \end{cases}$$

Portanto,

$$U(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Pi_M} \frac{1}{\lambda_\beta} [g(Y, [X_{-\beta}, X]_{\mathfrak{m}}) + g(X, [X_{-\beta}, Y]_{\mathfrak{m}})] X_\beta$$

Em particular,

$$\begin{aligned} U(X_\alpha, X_\alpha) &= \sum_{\beta \in \Pi_M} \frac{1}{\lambda_\beta} g(X_\alpha, [X_{-\beta}, X_\alpha]_{\mathfrak{m}}) X_\beta \\ &= \sum_{\beta \in \Pi_M} \frac{1}{\lambda_\beta} m_{-\beta, \alpha} g(X_\alpha, X_{-\beta + \alpha}) X_\beta = 0, \end{aligned}$$

pois $-\beta + \alpha \neq \alpha$. Do mesmo modo podemos provar que $U(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0$.

Exemplo 1.7.2. Com as notações acima se a métrica invariante $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi_M}$ for Kähler então $U(X_{-\alpha}, X_\beta) = \frac{1}{2} [X_{-\alpha}, X_\beta]$. Pois neste caso,

$$\lambda_{|\beta|} - \lambda_{|\alpha|} = \lambda_\beta - \lambda_\alpha = \lambda_{\beta - \alpha} = \lambda_{|\beta - \alpha|}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}U(X_{-\alpha}, X_{\beta}) &= c_{-\alpha, \beta}^{-\alpha+\beta} X_{-\alpha+\beta} \\ &= \frac{1}{2} m_{-\alpha, \beta} X_{-\alpha+\beta} \\ &= \frac{1}{2} [X_{-\alpha}, X_{\beta}].\end{aligned}$$

Exemplo 1.7.3. Ainda com as notações acima se a métrica invariante $\Lambda = \{\lambda_{\alpha}\}_{\alpha \in \Pi_M}$ for a métrica normal, então $U(X_{-\alpha}, X_{\beta}) \equiv 0$.

CAPÍTULO 2

Equação de Einstein

Neste capítulo, exibiremos várias soluções da equação de Einstein sobre variedades flag, para o caso em que estas são do tipo A_l , $l \geq 3$. Descreveremos soluções para as variedades maximais $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$ que coincidem com soluções já conhecidas [4]. Apresentaremos, de um ponto de vista unificado, soluções não-Kähler da equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(2m)$, $m \geq 3$ obtidas por Senda e descritas por Sakane em [52] e as métricas descritas por Arvanitoyeorgos em [5]. Mostraremos novas soluções não-Kähler da equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(2m+1)$ $m \geq 6$, $\mathbb{F}(2m+2)$ $m \geq 5$ e $\mathbb{F}(5)$. Além disso, encontraremos soluções não-Kähler invariantes sobre variedades não-maximais do tipo A_l . Mostraremos que um subgrupo do grupo de Weyl deixa invariante a equação de Einstein, sobre uma variedade flag. Com isso descrevemos uma ação natural deste grupo sobre o conjunto das métricas de Einstein e mostramos que este é finito (respondendo no caso das variedades flag uma questão proposta por Ziller em [17]).

2.1 Tensor de Ricci e a equação de Einstein

Nesta seção apresentaremos o tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre uma variedade flag e exibiremos a equação de Einstein associada.

Definição 2.1.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é Einstein, se a métrica cumprir $\text{Ric}(g) = cg$. Quando $n \geq 3$ e será chamada de constante de Einstein, ou seja, uma métrica Riemanniana é de Einstein se o tensor de Ricci for proporcional a métrica g .*

Logo uma métrica Riemanniana é de Einstein se, e somente se (M, g) possuir curvatura de Ricci constante. Começamos estudando o tensor de Ricci de uma métrica invariante em um espaço homogêneo qualquer.

Apresentaremos também o tensor de Ricci e conseqüentemente a equação de Einstein nos próximos lemas para uma variedade flag maximal. O primeiro Lema pode ser encontrado em [52] ou [44] e fornece as componentes do tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre o espaço homogêneo $M = U/K$. Começamos com uma notação introduzida por Wang-Ziller em [58].

Considere $\{e_\alpha\}$ uma base \mathcal{B} -ortonormal adaptada a decomposição de $\mathfrak{m} = \bigoplus_{k=1}^l \mathfrak{m}_k$. Em outras palavras, $e_\alpha \in \mathfrak{m}_i$ para algum $i \in \{1, \dots, l\}$ e $\alpha < \beta$ se $i < j$ com $e_\alpha \in \mathfrak{m}_i$, $e_\beta \in \mathfrak{m}_j$. Defina como em [58],

$$A_{\alpha\beta}^\gamma = ([e_\alpha, e_\beta], e_\gamma)_{CK}, \quad (2.1)$$

isto é,

$$[e_\alpha, e_\beta] = \sum_{\gamma} A_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \quad \text{e} \quad \sum (A_{\alpha\beta}^\gamma)^2 = \begin{bmatrix} k \\ i \quad j \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

As somas acima (2.2) são tomadas sobre todos os índices α, β, γ com $e_\alpha \in \mathfrak{m}_i$, $e_\beta \in \mathfrak{m}_j$, $e_\gamma \in \mathfrak{m}_k$. Um ponto importante é que $\begin{bmatrix} k \\ i \quad j \end{bmatrix}$ independem do referencial ortonormal escolhido para $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_k$ e

$$\begin{bmatrix} k \\ i \quad j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ j \quad i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \quad i \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Além disso se w é um elemento do grupo de Weyl então:

$$\begin{bmatrix} w(\gamma) \\ w(\alpha) \quad w(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \quad \beta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Usaremos as notações acima nos próximos lemas.

Lema 2.1.2. *As componentes r_k do tensor de Ricci de uma métrica U -invariante sobre*

$M = U/K$ são dadas por:

$$r_k = \frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{4d_k} \sum_{i,j=1}^l \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} \begin{bmatrix} k \\ i \ j \end{bmatrix} - \frac{1}{2d_k} \sum_{i,j=1}^l \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} \begin{bmatrix} j \\ k \ i \end{bmatrix} \quad (k = 1, \dots, l) \quad (2.5)$$

onde, $m = \bigoplus_{k=1}^l m_k$ $d_k = \dim m_k$

Demonstração: O tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre uma variedade homogênea é dado por [11]:

$$\begin{aligned} Ric(g)(X, X) &= -\frac{1}{2} \sum_i \|[X, X_i]_m\|^2 + \frac{1}{2} (X, X)_{C-K} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [X_i, X_j]_m, X \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Considere $\{e_a^k\}$ uma base ortonormal de m_k em relação a $(\cdot, \cdot)_{CK}$.

Considere também os vetores $X_a^k = \frac{e_a^k}{\sqrt{\lambda_k}}$. Estes vetores X_a^k formam uma g base ortonormal para m_k . Como o tensor de Ricci de uma métrica invariante é dado por (2.6), temos:

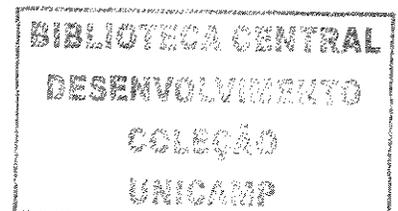
$$\begin{aligned} r_k = Ric(g)(X_a^k, X_a^k) &= \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\lambda_j}{\lambda_i \lambda_k} \sum_s ([e_a^k, e_s^i]_{m_j}, [e_a^k, e_s^i]_{m_j}) \\ &+ \frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} \sum_{t,s} ([e_t^j, e_s^i]_{m_k}, e_a^k). \end{aligned}$$

Portanto decorre de (2.1) e (2.2) que,

$$d_k r_k = \sum_{a=1}^{d_k} Ric(g)(X_a^k, X_a^k) = \frac{d_k}{2\lambda_k} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\lambda_j}{\lambda_k \lambda_i} \begin{bmatrix} j \\ k \ i \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \frac{\lambda_k}{\lambda_j \lambda_i} \begin{bmatrix} k \\ j \ i \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

O que prova o lema. ■

Considere agora, $M = U/T$ uma variedade flag maximal equipada com uma métrica invariante $(\Lambda)_{\alpha \in \Pi^+} = \{\lambda_\alpha > 0\}$.



Lema 2.1.3. *As componentes r_α do tensor de Ricci de uma métrica U -invariante sobre uma variedade flag maximal $M = U/T$ são dadas por:*

$$r_\alpha = \frac{1}{2\lambda_\alpha} + \frac{1}{8} \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \Pi^+ \\ \beta + \gamma \in \Pi^+}} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta \lambda_\gamma} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \Pi^+ \\ \beta + \gamma \in \Pi^+}} \frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\alpha \lambda_\beta} \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \Pi^+) \quad (2.8)$$

Demonstração: Basta aplicar o lema anterior em uma variedade flag $M = U/T$, trocando m por $\bigoplus_{\alpha \in \Pi^+} u_\alpha$. Neste caso, $d_\alpha = \dim u_\alpha = 2$. ■

Nesta tese alguns resultados são aplicáveis a todas as variedades flag arbitrárias, mas como encontramos soluções para a equação de Einstein apenas no caso A_l , concentraremos nossa atenção às variedades deste tipo.

Uma subálgebra de Cartan para a complexificação de $\mathfrak{su}(n)$, é formada pelas matrizes diagonais

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \{\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0\}. \quad (2.9)$$

O sistema de raízes tem a forma $\Pi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, i \neq j\}$, conseqüentemente as raízes positivas podem ser escolhidas como $\Pi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\}$.

A forma Cartan-Killing de $SU(n)$ é $(X, Y) = 2n \text{tr}XY$ temos $(\alpha, \alpha) = \frac{1}{n}$ para todas as raízes α e os vetores X_α que satisfazem $(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$ são da forma $X^{ij} = \frac{X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}}{\sqrt{2n}}$ onde $X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ é o vetor associado à raiz $\varepsilon_i - \varepsilon_j$. As constantes de estrutura são todas iguais a $\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Agora podemos escrever, as componentes do tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre uma variedade flag maximal do tipo A_l . Este é o conteúdo do próximo Lema.

Lema 2.1.4. [52] *Sobre as variedades $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 3$ as componentes do tensor de Ricci de uma métrica $U(n)$ - invariante $(\Lambda)_{\alpha \in \Pi^+}$ são dadas por:*

$$r_{ij} = \frac{1}{2\lambda_{ij}} + \frac{1}{4n} \sum_{k \neq i, j} \left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ik} \lambda_{kj}} - \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{ij} \lambda_{kj}} - \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_{ij} \lambda_{ik}} \right) \quad (2.10)$$

Demonstração: Pelo lema anterior(2.1.3), as componentes do tensor de Ricci de uma

métrica invariante $g(\cdot, \cdot) = \bigoplus_{\alpha \in \Pi^+} \lambda_\alpha \mathcal{B}|_{\mathfrak{m}_\alpha}$ são dadas por

$$r_\alpha = \frac{1}{2\lambda_\alpha} + \frac{1}{8} \sum_{\beta, \gamma \in \Pi^+} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta \lambda_\gamma} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \sum_{\beta, \gamma \in \Pi^+} \frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\beta \lambda_\alpha} \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Mas, para $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 3$ temos:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \varepsilon_i - \varepsilon_j & \\ \varepsilon_i - \varepsilon_k & \varepsilon_k - \varepsilon_j \end{bmatrix} = \frac{1}{n} & (k \neq i, j) \\ \text{caso contrário} & 0 \end{cases}$$

Para concluir a demonstração do lema, basta observar as simetrias dos termos envolvidos nos dois somatórios em (2.11) e que, conforme já mencionamos, pela definição de $A_{\alpha\beta}^\gamma$ [58] temos que:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

■

Arvanitoyeorgos em [5], obteve a seguinte expressão para a equação de Einstein das variedades maximais do caso A_l .

Proposição 2.1.5. [5] Para o espaço $\frac{U(n)}{U(1) \times \dots \times U(1)}$ a equação de Einstein invariante é:

$$\lambda_{ij} = 2 + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{il} - \lambda_{jl})^2}{\lambda_{il} \lambda_{jl}}. \tag{2.12}$$

A equação de Einstein acima é um sistema algébrico com $\frac{n(n-1)}{2}$ equações e $\frac{n(n-1)}{2}$ incógnitas λ_{ij}

Demonstração:

Devemos provar que a equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(n)$ dada pelo lema 2.1.4, é equivalente à equação (2.12). Pelo lema 2.1.4 temos que:

$$r_{ij} = \frac{1}{2\lambda_{ij}} + \frac{1}{4n} \sum_{k \neq i,j} \left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ik}\lambda_{kj}} - \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{ij}\lambda_{kj}} - \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_{ij}\lambda_{ik}} \right) = c.$$

Vamos mostrar que as equações mencionadas são equivalentes. De fato, partindo de (2.1.4) e multiplicando, os dois últimos membros desta igualdade por λ_{ij} ficamos com,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{k \neq i,j} \frac{\lambda_{ij}^2 - \lambda_{ik}^2 - \lambda_{kj}^2}{\lambda_{ik}\lambda_{kj}} = c\lambda_{ij}$$

Agora completando quadrados na expressão acima,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{k \neq i,j} \frac{\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{ik} - \lambda_{kj})^2}{\lambda_{ik}\lambda_{kj}} - \frac{2(n-2)}{4n} = c\lambda_{ij}$$

Portanto,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{4n} \sum_{k \neq i,j} \frac{\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{ik} - \lambda_{kj})^2}{\lambda_{ik}\lambda_{kj}} = c\lambda_{ij}$$

Esta última é, a menos de escala, a equação de Einstein(2.12). ■

Arvanitoyeorgos obteve em [5] o seguinte resultado ,

Lema 2.1.6. *O tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre a variedade*

$$\mathbb{F}(n, n_1, n_2, \dots, n_s) = \frac{U(n)}{U(n_1) \times \dots \times U(n_s)}$$

é dado por

$$r_{ij} = Ric(X_\alpha^{ij}, X_{-\alpha}^{ji}) = \frac{1}{n} + \frac{n_i + n_j - 2}{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{l \neq i,j}^s \frac{n_l(\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{il} - \lambda_{jl})^2)}{\lambda_{il}\lambda_{jl}}, \quad (2.13)$$

onde, $\lambda_{ij} = g(X^{ij}, X^{ji})$ $1 \leq i < j \leq n$

Demonstração: Ver [5] ■

Mais geralmente, se $M = U/K_\Theta$ é uma variedade flag generalizada, Arvanitoyeorgos provou o seguinte resultado:

Proposição 2.1.7. *O tensor de Ricci de uma métrica Riemanniana invariante $(\Lambda_\alpha) = \{\lambda_\alpha > 0 \mid \alpha \in \Pi_M\}$ sobre M é dado por*

$$\begin{aligned} Ric(X_\alpha, X_\beta) &= 0, \quad \alpha, \beta \in \Pi_M, \quad \alpha + \beta \notin \Pi_M \\ Ric(X_\alpha, X_{-\alpha}) &= (\alpha, \alpha) + \sum_{\substack{\phi \in \Pi_\Theta \\ \alpha + \phi \in \Pi}} m_{\alpha, \phi}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta \in \Pi_M \\ \alpha + \beta \in \Pi_M}} \frac{m_{\alpha, \beta}^2 (\lambda_\alpha^2 - (\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\beta)^2)}{\lambda_{\alpha+\beta} \lambda_\beta} \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [5] ■

2.2 Métricas Kähler-Einstein

A existência de uma métrica Einstein, conforme já mencionamos, nem sempre é garantida. Sobre as variedades flag $M = G/K$ equipadas com uma estrutura complexa invariante J mostraremos seguindo os trabalhos de Matsushima[40], Koszul[36] e principalmente Borel[19] a existência de uma métrica de Einstein distinguida, isto é, a existência de uma métrica de Kähler-Einstein. Esta métrica é única, a menos de transformações holomorfas,[40].

Considere (M, J, g) uma variedade flag equipada com um par Kähler invariante $(J, g = \Lambda_\alpha)$, veremos que o tensor de Ricci ou equivalentemente a forma Ricci neste contexto independe da métrica invariante.

Sobre uma variedade Hermitiana podemos construir uma 2-forma fundamental também chamada de forma Kähler fazendo

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y) \quad (2.14)$$

Diremos que M é Kähler se $d\Omega = 0$. A forma Ricci é a 2-forma $\rho(X, Y) = Ric(JX, Y)$. Desse modo uma métrica invariante é Einstein se, e somente se $\rho(X, Y) = c\Omega(X, Y)$, para alguma constante c . Segue daí que uma métrica Kähler invariante é Einstein se a forma Ricci for proporcional a forma Kähler, ou seja, se

$$\rho(X, Y) = cg(JX, Y).$$

Considere agora $M = G/K$, uma variedade flag com a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. Uma estrutura complexa G -invariante J , e uma 2-forma Ω podem ser identificadas com uma $Ad(K)$ -invariante transformação linear J_\circ sobre \mathfrak{m} satisfazendo $J_\circ^2 = -1$ e uma $Ad(K)$ -invariante não-degenerada forma anti-simétrica Ω_\circ sobre \mathfrak{m} . O mesmo pode ser feito com o tensor de Ricci e a forma Ricci ρ . É usual estender a métrica g , a estrutura quase complexa J e a forma Kähler Ω a $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, sem qualquer mudança de notação. O ponto central é que como $J_\circ^2 = -Id$ logo a complexificação de J_\circ possui autovalores $\pm i$.

Seja (M, J, Λ) uma variedade flag equipada com uma estrutura complexa J e uma métrica invariante (Λ) . O tensor de curvatura é dado por $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \forall X, Y, Z$ onde ∇ denota a conexão Riemanniana associada a métrica ds_Λ^2 . Para variedades Kähler a forma Ricci pode ser escrita como[35]

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{2} \text{tr}(JR(X, Y)). \quad (2.15)$$

No contexto invariante, o tensor de curvatura é dado por

$$R_o(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]_m} Z - [[X, Y]_t, Z] \quad (2.16)$$

Como a estrutura complexa é G -invariante, e satisfaz $\nabla_X J = 0$, temos que para $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$[X, JY]_{\mathfrak{m}^c} = J[X, Y]_{\mathfrak{m}^c} \quad \nabla_X(JY) = J\nabla_X Y.$$

Segue daí que $\text{tr}(J_o \nabla(X) \nabla(Y)) = \text{tr}(\nabla(X) J_o \nabla(Y)) = \text{tr}(J_o \nabla(Y) \nabla(X))$.

Isto significa que os dois primeiros termos de (2.16) não deverão ser considerados para o cálculo da forma Ricci. Além disso, pela invariância da forma Ricci vemos que é suficiente calculá-la para $X = X_\alpha \ Y = X_{-\alpha}$. Mas,

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \in \mathfrak{t}^c.$$

Portanto do exposto acima e de (2.16),

$$\rho(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{1}{2} \text{tr}(J_o \text{ad}(H_\alpha)). \quad (2.17)$$

Por outro lado sobre \mathfrak{m}^c os vetores X_α , $\alpha \in \Pi$, são autovetores, tanto de J_o como de $\text{ad}(H_\alpha)$ com autovalores $\pm i$ e $\alpha(H)$, respectivamente.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho_\circ(X_\alpha, X_{-\alpha}) &= \frac{i}{2} \sum_{\beta \in \Pi} \epsilon_\beta \beta(H_\alpha) \\
&= \frac{i}{2} \left(\sum_{\beta \in \Pi^+} \beta(H_\alpha) - \sum_{\beta \in \Pi^-} \beta(H_\alpha) \right) \\
&= i \sum_{\beta \in \Pi^+} \beta(H_\alpha) \\
&= i \sum_{\beta \in \Pi^+} \alpha(H_\beta) \\
&= i\alpha \left(\sum_{\beta \in \Pi^+} H_\beta \right) = 2i\mathcal{B}(H_\delta, H_\alpha).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Onde $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi^+} \alpha$. A partir dos fatos acima, descreveremos como construir uma métrica Kähler-Einstein sobre uma variedade flag maximal $M = G/B = U/T$, a construção correspondente, no caso de flags parciais pode ser encontrada em [4],[18]. Denotaremos por $\mathfrak{u}^\mathbb{C}$ e por $\mathfrak{t}^\mathbb{C}$ as complexificadas das álgebra de Lie de \mathfrak{u} e \mathfrak{t} respectivamente. Temos portanto uma decomposição de $\mathfrak{u}^\mathbb{C}$ em espaços de raízes:

$$\mathfrak{u}^\mathbb{C} = \mathfrak{t}^\mathbb{C} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} (\mathfrak{u}_\alpha \oplus \mathfrak{u}_{-\alpha}) \tag{2.19}$$

Até o final desta seção, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ denotará a subálgebra de Borel de \mathfrak{g} enquanto que B denotará o subgrupo de Borel de G correspondente a \mathfrak{b} , e $T = G \cap B$ será o toro maximal de U .

O sistema simples de raízes de $\mathfrak{u}^\mathbb{C}$, $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ estará associado aos funcionais $\Sigma^* = \{\varphi_1 \cdots \varphi_n\}$ de $(\mathfrak{u}^\mathbb{C})^*$ da seguinte forma:

$$\frac{2(\varphi_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq n) \tag{2.20}$$

Podemos identificar uma raiz de $\mathfrak{u}^\mathbb{C}$ com um elemento de $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$, através da dualidade decorrente da forma Cartan-Killing \mathcal{B} . Lembramos, que o fato de \mathfrak{u} ser semi-simples assegura

que a forma Killing é não-degenerada. Em outras palavras, identificamos H_α com α , onde $H_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ é definido como $\mathcal{B}(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ para $H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$.

Desse modo $\sqrt{-1}\mathfrak{t} = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}\varphi_i$. Defina a câmara positiva com respeito a escolha de Σ como $\mathfrak{c}_+ = \{\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}; \mathcal{B}(\lambda, \alpha_i) > 0, i = 1, \dots, n\}$ e denote por $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi^+} \alpha$, a soma das raízes positivas.

Podemos escrever, $\delta = \varphi_1 + \dots + \varphi_n$ e portanto $\delta \in \mathfrak{c}_+$. A demonstração do lema abaixo pode ser encontrada em [20].

Lema 2.2.1. ([20]) *Existe uma correspondência 1-1 entre as métricas Kähler U-invariantes sobre $M = G/B = U/T$ e elementos de \mathfrak{c}_+ . Portanto, para uma métrica Kähler U-invariante sobre M correspondente a $\lambda \in \mathfrak{c}_+$, o tensor de Ricci é também uma métrica Kähler U-invariante sobre M que corresponde a $\delta \in \mathfrak{c}_+$. A métrica Kähler que corresponde a δ é Kähler-Einstein.*

Observe que de acordo com a equação (2.18) a métrica Kähler-Einstein U-invariante sobre U/T correspondente a δ é dada por $g_\delta = \{\lambda_\alpha = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathcal{B}(\varphi_i + \dots + \varphi_n, \alpha)\}$.

Podemos escrever cada raiz positiva α de forma única como $\alpha = \sum_{i=1}^l m_i(\alpha)\alpha_i$ onde $m_i(\alpha)$ são inteiros não-negativos. Utilizando a expressão (2.20) podemos escrever:

$$g_\delta = \{\lambda_\alpha = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)\mathcal{B}(\alpha_i, \alpha_i)\}. \tag{2.21}$$

A expressão acima (2.21) fornece, a menos escala, os coeficientes da métrica Kähler-Einstein sobre $M = U/T$

Exemplo 2.2.2. Sobre $\mathbb{F}(3)$ a métrica Kähler-Einstein de Matsushima [40] associada a

estrutura complexa canônica $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ é a menos de escala dada por:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2.3. De uma forma mais geral, a métrica Kähler-Einstein [40], sobre $\mathbb{F}(n)$ associada a estrutura complexa canônica é a menos de escala dada por:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{2n} \\ \frac{1}{2n} & 0 & \frac{1}{2n} & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{2n} & 0 & \ddots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2n} \\ \frac{n-1}{2n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{2n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 3$, uma vez fixada uma estrutura complexa, existe uma única métrica Kähler-Einstein [40]. Vamos calcular a constante de Einstein desta métrica. Sabemos que o volume de uma métrica invariante sobre M é dado por [5], [34]:

$$V = \prod_{i < j} \lambda_{ij}^2, \quad (2.22)$$

portanto uma métrica $\Lambda^1 = (\lambda_{ij}^1)$ com volume unitário, associada a $\Lambda = (\lambda_{ij})$ é dada por:

$$\lambda_{ij}^1 = \frac{\lambda_{ij}}{n^{(n-1)/2} \sqrt{V}}. \quad (2.23)$$

No caso Kähler-Einstein

$$V = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{2n} \right)^{2(n-k)}.$$

A constante de Einstein da métrica Kähler-Einstein com volume unitário é dada por

$$c_{Kahler} = \frac{n^{(n-1)} \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} k^{2(n-k)}}}{n}.$$

2.3 A métrica Normal-Einstein

Nesta seção estudaremos a condição Einstein, para a métrica normal. Sejam G um grupo de Lie compacto, conexo, semi-simples e H um subgrupo fechado conexo de G . Considere $M = G/H$ pelas propriedades de G e H , M é um espaço homogêneo compacto e simplesmente conexo. Seguiremos a notação de [57]

Qualquer métrica bi-invariante sobre $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, induz uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Podemos identificar \mathfrak{m} com $T_{eH}(M)$, a restrição da métrica bi-invariante a \mathfrak{m} induz, por translações à esquerda, uma métrica G -invariante sobre M . Tal métrica é usualmente, chamada de métrica normal. A escolha canônica para a métrica bi-invariante sobre \mathfrak{g} é o negativo da forma Cartan-Killing, chamaremos tal escolha de \mathcal{B} , a métrica invariante induzida será denotada por $g_{\mathcal{B}}$.

No estudo da condição Einstein, para a métrica $g_{\mathcal{B}}$, a representação isotrópica desempenha um papel central.

Um elemento $h \in H$ age sobre M por translações à esquerda, e a classe eH é estável para a esta ação. A diferencial de h , dh é a diferencial da translação à esquerda gerada por h , ou seja, $dh = dL_h$, dh é um automorfismo de $\mathfrak{m} = T_{eH}(M)$. A representação isotrópica χ é dada por $h \mapsto dh$.

A representação χ induz uma representação de \mathfrak{h} em \mathfrak{m} , que ainda será denotada por χ , usando a identificação de \mathfrak{m} com $T_{eH}(M)$ essas representações serão dadas por: $\chi(h) = \text{Ad}_{\mathfrak{m}}(h)$, para $h \in H$, e para $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{m}$ temos que $\chi(X)Y = [X, Y]$.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{m}$, defina

$$A(X, Y) = - \sum_i \mathcal{B}([X, [Y, Z_i]], Z_i) = - \sum_i \mathcal{B}([Z_i, [Z_i, X]], Y), \quad (2.24)$$

pois \mathcal{B} é $\text{ad}(\mathfrak{g})$ -invariante. Wang-Ziller provaram em [57] a seguinte proposição:

Proposição 2.3.1. ([57]) $\text{Ric}(g_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{4}\mathcal{B} + \frac{1}{2}A$

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{m}$ um vetor unitário. Sabemos ([35]Teorema X) que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(R(X, X_i)X_i, X) &= \frac{1}{4}\mathcal{B}([X, X_i]_{\mathfrak{m}}, [X, X_i]_{\mathfrak{m}}) + \mathcal{B}([X, X_i]_{\mathfrak{k}}, [X, X_i]_{\mathfrak{k}}) \\ &= -\frac{3}{4}\mathcal{B}([X, X_i]_{\mathfrak{m}}, [X, X_i]_{\mathfrak{m}}) + \mathcal{B}([X, X_i], [X, X_i]), \end{aligned}$$

onde $\{X_i\}$ é uma \mathcal{B} - base ortonormal de \mathfrak{m} e $X = X_1$. Portanto,

$$\text{Ric}(g_{\mathcal{B}})(X, X) = \frac{3}{4}\text{tr}_{\mathfrak{m}}(\text{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \text{ad}X)^2 + \mathcal{B}(X, X) - A(X, X) \quad (2.25)$$

Como $[\mathfrak{m}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{m}$, e \mathcal{B} é *adj*- invariante, a matriz de $\text{ad}X$ com respeito a $\{Z_i, X_j\}$ possui a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a(X) \\ -a(X)^t & b(X) \end{pmatrix}$$

Daí, $\text{tr}_{\mathfrak{m}}(\text{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \text{ad}X)^2 = \text{tr}(b(X)^2) = -\mathcal{B}(X, X) + 2\text{tr}(a(X)a(X)^t) = -\mathcal{B}(X, X) + 2A(X, X)$. Então usando agora(2.25), e a igualdade acima temos:

$$\text{Ric}(g_{\mathcal{B}})(X, X) = \frac{1}{4}\mathcal{B}(X, X) + \frac{1}{2}A(X, X), \text{ conforme afirmado.} \quad \blacksquare$$

O operador A pode ser relacionado ao operador de Casimir [31] da representação isotrópica. O operador de Casimir da representação isotrópica χ de \mathfrak{h} com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathcal{B}|_{\mathfrak{h}}$ é definido por:

$$C_{\chi, \langle \cdot, \cdot \rangle} = - \sum_i \chi(X_i)\chi(Y_i), \quad (2.26)$$

onde, $\{X_i\}, \{Y_i\}$ são bases de \mathfrak{h} duais com relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ou seja, $\langle X_i, Y_j \rangle = \delta_{ij}$

Portanto por (2.24) e (2.26)

$$A(X, Y) = \mathcal{B}(C_{\chi, \langle \cdot, \cdot \rangle} X, Y) \quad (2.27)$$

Combinando (2.3.1) com (2.27) Wang-Ziller obtiveram:

Corolário 2.3.2. *Se escrevermos o tensor de Ricci como um endomorfismo simétrico de m então*

$$\text{Ric}(g_B) = \frac{1}{4}Id + \frac{1}{2}C_{X|_B}$$

Portanto g_B é Einstein se, e somente se $C_{X|_B} = aId$

O resultado acima, e outros obtidos a partir deste, permitiram a Wang-Ziller classificarem todos os espaços homogêneos de grupos de Lie simples sobre os quais a métrica normal é Einstein [57] p.577-80.

Sabemos que sobre $M = \mathbb{F}(n)$, $n \geq 3$, a métrica normal é Einstein [57]. Vamos calcular a constante de Einstein desta métrica. Já vimos que o volume de uma métrica invariante sobre M é dado por (2.22).

Portanto uma métrica normal com volume unitário é dada por $\lambda_{ij} = 1$ $1 \leq i < j \leq n$. A constante de Einstein desta métrica pode ser obtida em qualquer das equações componentes da condição Einstein sobre M . Assim:

$$\begin{aligned} c_{\text{normal}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{k \neq 1,2} (-1) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n-2}{4n} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} = \\ &= \frac{n+2}{4n} \end{aligned} \tag{2.28}$$

O próximo lema, cuja demonstração é imediata, será usado na busca de soluções para a equação de Einstein sobre variedades flag, sob as quais a métrica normal é Einstein.

A idéia é que os coeficientes de uma métrica invariante sejam divididos em blocos, onde em cada bloco os coeficientes serão tomados iguais. Pondo estas restrições na equação de Einstein obtemos uma nova equação cujas soluções são soluções da equação de Einstein anterior porém elas são as únicas com as condições impostas. Este processo reduz consideravelmente o número de incógnitas da equação. Nos espaços em que a métrica normal for Einstein este processo sempre admite pelo menos uma solução, a saber a solução normal que é a solução em que todas as entradas são iguais.

Algumas decomposições geram apenas uma solução, ou seja, existe apenas uma solução com as condições impostas. Este processo também funciona em variedades em que a métrica normal não é Einstein, porém nem toda decomposição nestes casos produz soluções. Os exemplos abaixo e os resultados da Seção 2.9 ilustram esta situação.

Exemplo 2.3.3. [5],[34],[52]. Sobre $\mathbb{F}(3)$ a equação de Einstein é dada por:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{13}} \right) = c \\ r_{13} &= \frac{1}{2\lambda_{13}} + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{13}} \right) = c \\ r_{23} &= \frac{1}{2\lambda_{23}} + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}\lambda_{12}} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}\lambda_{13}} \right) = c \end{aligned}$$

A redução $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$ produz a métrica normal $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 1$, com constante de Einstein $c = \frac{5}{12}$, as outras reduções produzem as métricas Kähler-Einstein, que são a menos de escala e de permutações, dadas por

$$\lambda_{12} = \lambda_{23} = 1 \quad \lambda_{13} = 2 \quad c = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2.3.4. Sobre a variedade $\mathbb{F}(4)$ a redução de Arvanitoyeorgos é dada por

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = A \quad \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{34} = B, \quad (2.29)$$

colocando estas restrições na equação de Einstein, obtemos além da métrica normal uma das métricas Arvanitoyeorgos-Einstein. Ainda sobre $\mathbb{F}(4)$ o conjunto de restrições $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{23}$ e $\lambda_{24} = \lambda_{34}$, produz em $\mathbb{F}(4)$, apenas a métrica normal.

Consideremos agora a matriz da métrica invariante $\Lambda = (\lambda_\alpha)$. Posto que a matriz Λ é simétrica basta considerar λ_α com $\alpha \in \Pi^+$, ou seja, consideraremos a parte triangular superior e denotaremos por $C(\Lambda)$ o conjunto das entradas da métrica invariante $\Lambda = (\lambda_\alpha)$.

Podemos decompor o conjunto $C(\Lambda)$ da seguinte forma $C(\Lambda) = \bigcup_{\alpha \in \Pi^+} C(\Lambda_k)$, onde $\Lambda_k \subset \Pi^+$ é um subconjunto de $C(\Lambda)$. Se tomarmos em cada $\Lambda_k \subset \Pi^+$ o valor dos coeficientes iguais obteremos soluções da equação de Einstein com as condições dadas. Este processo gera uma redução no número de variáveis da equação de Einstein.

Agora podemos enunciar o Lema, que nos será útil na busca por soluções da equação de Einstein.

Lema 2.3.5. *Se sobre o espaço Riemanniano homogêneo G/H a métrica normal (Cartan-Killing) g_B é Einstein, então toda decomposição do conjunto dos coeficientes da métrica invariante do tipo*

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha_1} &= a_1, \alpha_1 \in \Lambda_1 \\ \lambda_{\alpha_2} &= a_2, \alpha_2 \in \Lambda_2 \\ &\vdots \\ \lambda_{\alpha_l} &= a_l, \alpha_l \in \Lambda_l,\end{aligned}\tag{2.30}$$

onde $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}^+$, gera pelo menos uma solução da equação de Einstein.

O próximo exemplo é particularmente interessante, pois apesar da métrica normal não ser Einstein sobre os espaços considerados, ele mostra que podemos, ainda assim, utilizar o processo de redução para obter soluções da equação de Einstein.

Exemplo 2.3.6. *Sobre $\mathbb{F}(5, 2, 1, 1, 1)$. O conjunto de restrições $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14}$ e $\lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{34}$, produz em $\mathbb{F}(5, 2, 1, 1, 1)$, duas métricas de Einstein não-Kähler invariantes. Já a restrição $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = \lambda_{24}$ e $\lambda_{14} = \lambda_{34}$ não produz uma solução sequer (observe que neste espaço a métrica normal não é Einstein).*

2.4 Métricas Arvanitoyeorgos-Einstein

Arvanitoyeorgos em [5] descreveu várias soluções para a equação de Einstein invariante sobre as variedades $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 4$. Ele provou o seguinte Teorema:

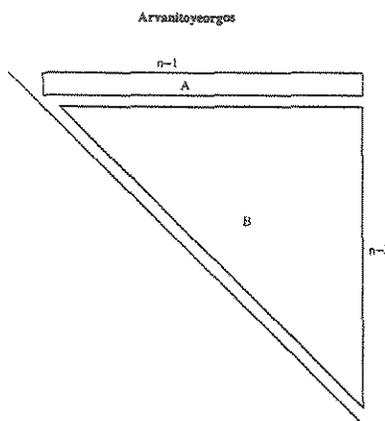
Teorema 2.4.1. *(Arvanitoyeorgos) As variedades $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$, admitem pelo menos $\frac{n!}{2} + 1 + n$ métricas de Einstein invariantes. A métrica normal, as métricas Kähler-Einstein que totalizam $\frac{n!}{2}$, e as n restantes são dadas por:*

$$\begin{aligned}\lambda_{si} &= \lambda_{sj} = n - 1 \quad i \neq s, j \neq s \\ \lambda_{kl} &= n + 1 \quad k, l \neq s (1 \leq s \leq n)\end{aligned}$$

Demonstração: A idéia é reduzir o número de incógnitas da equação de Einstein aplicando uma redução (2.3.5) na equação de Einstein.

$$\begin{aligned}\lambda_{1i} &= \lambda_{12} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \\ \lambda_{jk} &= \lambda_{23} \quad (2 \leq j < k \leq n)\end{aligned}\tag{2.31}$$

A figura abaixo ilustra esta situação. Os coeficientes da métrica invariante que pertencem a uma região delimitada na figura serão tomados iguais. Este processo reduz consideravelmente o número de incógnitas da equação de Einstein.



Após este processo as equações de Einstein serão dadas por:

$$\begin{aligned}r_{12} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{n-2}{4n} \left(\frac{-\lambda_{23}}{\lambda_{12}^2} \right) = c \\ r_{23} &= \frac{1}{2\lambda_{23}} + \frac{1}{4n} \left(\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}^2} - \frac{2}{\lambda_{23}} - \frac{n-3}{\lambda_{23}} \right) = c\end{aligned}\tag{2.32}$$

A condição Einstein é dada por $r_{12} = \dots = r_{1n} = \dots = r_{n-1n}$. Com as condições(2.31) mostraremos que a equação de Einstein (2.32) admite uma solução diferente da solução normal.

Façamos $r_{12} = r_{23}$ esta igualdade é equivalente a:

$$((n-1)\lambda_{23} - (n+1)\lambda_{12})(\lambda_{12} - \lambda_{23}) = 0\tag{2.33}$$

Observe que $\lambda_{12} = n - 1$ e $\lambda_{23} = n + 1$ é solução da equação acima. Podemos considerar também outras reduções equivalentes a esta, fazendo os elementos do grupo simétrico S_n $n \geq 4$ agirem sobre as restrições. Como o grupo simétrico é gerado por transposições basta verificar o efeito destas sobre as restrições(2.31), por exemplo se fizermos a transposição (1 3) agir sobre (2.31) obteremos as condições:

$$\begin{aligned}\lambda_{3i} &= \lambda_{13}(i = 2, \hat{3}, \dots, n) \\ \lambda_{jk} &= \lambda_{12}(1 \leq j < k \leq n), j, k \neq 3\end{aligned}$$

As condições acima nos conduzem, a menos de permutação, às mesmas soluções do caso anterior e se continuarmos procedendo desta maneira, ou seja, considerando após este outro conjunto de restrições obtido através da ação da transposição (1 4) em (2.31), obteremos todas as n soluções.

Uma maneira direta de encontrar as demais soluções, é escrever a matriz da primeira métrica obtida e aplicar as transposições geradoras de S_n diretamente nesta matriz. Assim teremos ao todo n soluções não-Kähler, para a equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 4$ ([5]p.991). Estas métricas não são isométricas à métrica normal. O que prova o Teorema.

■

Para $n = 4$, Sakane provou que não existem, outras métricas de Einstein invariantes sobre $\mathbb{F}(4)$ [52]. Sakane fez uso de recursos computacionais para obter tal resultado. Faremos uso das chamadas C -fibrações e apresentaremos uma demonstração deste fato no capítulo 3. Para uso posterior calculamos a constante de Einstein das métricas descritas por Arvanitoyeorgos.

$$c = \frac{n^2 - n + 2}{4n(n - 1)^2} \quad (2.34)$$

É importante salientar que no cálculo acima (2.34), não foi levado em consideração se a métrica em questão possui volume unitário ou não.

Para obter a métrica correspondente à métrica acima, porém com volume unitário devemos proceder como no caso Kähler. Inicialmente devemos calcular o volume de uma destas métricas. Sabemos que o volume V é dado por(2.22). Neste caso $V = (n - 1)^{2(n-1)} \cdot (n + 1)^{(n-1)(n-2)}$. A constante de Einstein da métrica normalizada(2.23) é dada por:

$$c_{Arv.} = \frac{(n^2 - n + 2) \sqrt[n]{(n - 1)^2(n + 1)^{n-2}}}{4n(n - 1)^2} \quad (2.35)$$

2.5 Métricas Senda-Einstein

Sakane e Senda descreveram soluções diferentes das soluções obtidas por Arvanitoyeorgos para a equação de Einstein invariante sobre as variedades $\mathbb{F}(2m)$ $m \geq 3$. Este é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 2.5.1. (Sakane-Senda)[52] *As variedades $\mathbb{F}(2m)$ $m \geq 3$ admitem pelo menos 4 classes de métricas de Einstein invariantes.*

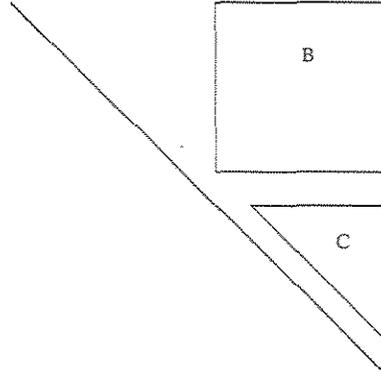
1. A classe formada pelas métricas Kähler que contém ao todo $\frac{(2m)!}{2}$ métricas,
2. A classe descrita por Arvanitoyeorgos, que contém ao todo $2m$ métricas,
3. A classe formada pela métrica normal e
4. a classe de métricas Einstein não-Kähler, que chamaremos de métricas de Senda, dadas por:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= m + 2(1 \leq i < j \leq m) \\
 \lambda_{ij} &= 3m - 2(i \leq m < j) \\
 \lambda_{ij} &= m + 2(m < i < j \leq 2m)
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Demonstração: Observe que sobre estes espaços a métrica normal é Einstein. Portanto pelo Lema (2.3.5) todo e qualquer conjunto de restrições produz pelo menos uma solução. Neste caso:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= A(1 \leq i < j \leq m) \\
 \lambda_{ij} &= B(i \leq m < j) \\
 \lambda_{ij} &= C(m < i < j \leq 2m)
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

A figura abaixo ilustra esta situação. Os coeficientes da métrica invariante que pertencem a uma região delimitada na figura serão tomados iguais. Este processo reduz consideravelmente o número de incógnitas da equação de Einstein.



As equações de Einstein são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{8m} \left(\frac{2-m}{\lambda_{12}} + m \left(\frac{-2}{\lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} \right) \right) = c \\
 r_{1n} &= \frac{1}{2\lambda_{1n}} + \frac{1}{8m} \left(\frac{(1-m)\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} + \frac{(1-m)\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} \right) = c \\
 r_{n-1n} &= \frac{1}{2\lambda_{n-1n}} + \frac{1}{8m} \left(\frac{2-m}{\lambda_{n-1n}} + m \left(\frac{-2}{\lambda_{n-1n}} + \frac{\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} \right) \right) = c
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Uma métrica Riemanniana é de Einstein se, e somente se $r_{12} = \dots = r_{1n} = \dots = r_{n-1n}$. Mostraremos que, com as condições acima (2.37), a equação de Einstein (2.38) admite solução diferente da métrica normal. Com as condições acima devemos buscar soluções para, $r_{12} = r_{1n} = r_{n-1n}$.

Façamos inicialmente, $r_{12} = r_{n-1n}$. Esta igualdade é equivalente a

$$(\lambda_{n-1n} - \lambda_{12}) (\lambda_{1n}^2 (m+2) + m\lambda_{12}\lambda_{n-1n}) = 0 \tag{2.39}$$

Observe que $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n}$ é solução da equação acima. Precisamos encontrar λ_{1n} de tal modo que $r_{12} = r_{1n}$. Podemos considerar que, a menos de escala, a métrica Einstein procurada possui $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = 1$. Desse modo $r_{12} = r_{1n}$ é equivalente a

$$(m+2)\lambda_{1n}^2 - 4m\lambda_{1n} - 2 + 3m = 0 \tag{2.40}$$

A equação acima admite, para $m \geq 2$ a solução $\lambda_{1n} = 1$, e a outra solução é dada fazendo

$\lambda_{1n} = \frac{3m-2}{m+2}$. Multiplicando por $m+2$, obtemos $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = m+2$ e $\lambda_{1n} = 3m-2$. Observe que para $m=2$ obtemos sobre $\mathbb{F}(4)$, a menos de escala, a métrica normal.

Para verificar que estas métricas são de fato diferentes das demais métricas de Einstein, vamos calcular a constante de Einstein. Calculando a constante de Einstein, diretamente de qualquer uma das equações(2.38) temos:

$$c = \frac{m^3 + 4m^2 + 7m - 2}{8m(3m - 2)} \quad m \geq 3. \quad (2.41)$$

Precisamos porém obter o valor da constante de Einstein impondo a condição de volume unitário. Procedendo como nos casos anteriores, temos que:

$$V = \left(\frac{n+4}{2}\right)^{\frac{n(n-2)}{2}} \cdot \left(\frac{3n-4}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \quad (2.42)$$

Desse modo a constante de Einstein da métrica normalizada é dada por:

$$c_{Senda} = \frac{\left(\frac{n^3}{8} + n^2 + \frac{7n}{2} - 2\right)^{2n-2} \sqrt{\left(\frac{n+4}{2}\right)^{n(n-2)} \cdot \left(\frac{3n-4}{2}\right)^{n^2}}{2n(3n-4)} \quad (2.43)$$

Comparando com a constante de Einstein das demais métricas de Einstein não-Kähler podemos concluir que elas não são isométricas. O que encerra a demonstração. ■

Exemplo 2.5.2. *A métrica de Senda sobre $\mathbb{F}(6)$ é:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 5 & 0 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 5 & 0 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na tentativa de entender a construção das métricas de Sakane-Senda obtivemos a seguinte métrica invariante sobre $\mathbb{F}(5)$,

Lema 2.5.3. *A métrica sobre $\mathbb{F}(5)$ cujos coeficientes são dados por:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é, a menos de escala, uma métrica de Einstein.

Demonstração: De fato, um cálculo direto em (2.1.4) mostra que $r_{ij} = \frac{11}{40}\lambda_{ij}$ $1 \leq i < j \leq 5$. Normalizando o volume obtemos $c_5 = \frac{11\sqrt[5]{4}}{40}$. Como podemos perceber, esta métrica é não Kähler e não é isométrica a nenhuma das demais métricas de Einstein descritas sobre $\mathbb{F}(5)$ em [5]. ■

Acreditamos que, além desta, não existam, a menos de isometrias e de escala, outras métricas de Einstein invariante sobre $\mathbb{F}(5)$.

2.6 Novas métricas de Einstein

Nesta seção descreveremos soluções obtidas nesta tese, para a equação de Einstein invariante sobre as variedades $\mathbb{F}(2m+2)$, $m \geq 5$ e $\mathbb{F}(2m+1)$, $m \geq 6$. Começamos com $\mathbb{F}(2m+2)$ $m \geq 5$.

Teorema 2.6.1. *As variedades $\mathbb{F}(2m+2)$ $m \geq 5$ admitem pelo menos 5 classes de métricas de Einstein invariantes.*

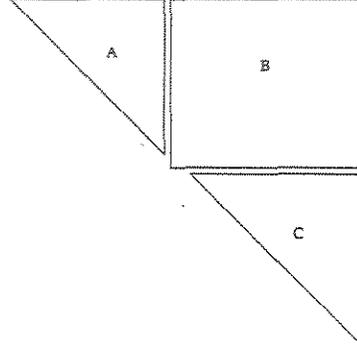
1. A classe formada pelas métricas Kähler que contém ao todo $\frac{(2m+2)!}{2}$ métricas,
2. A classe descrita por Arvanitoyeorgos[5], que contém ao todo $2m + 2$ métricas,
3. A classe descrita por Senda (2.36),
4. A classe formada pela métrica normal e ;
5. A classe:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= m + 6 \quad (1 \leq i < j \leq m + 1) \\
 \lambda_{ij} &= 3m - 2 \quad (i \leq m + 1 < j) \\
 \lambda_{ij} &= m + 6 \quad (m + 2 \leq i < j \leq 2m + 2)
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

Demonstração: Como a métrica normal é Einstein, todo e qualquer conjunto de restrições produz pelo menos uma solução. Neste caso propomos as seguintes restrições:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= A \quad (1 \leq i < j \leq m + 1) \\
 \lambda_{ij} &= B \quad (i \leq m + 1 < j) \\
 \lambda_{ij} &= C \quad (m + 2 \leq i < j \leq 2m + 2).
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

A figura abaixo representa as condições acima. Os coeficientes que pertencem a uma mesma região serão tomados iguais. Assim o número de incógnitas da equação de Einstein, reduz consideravelmente.



Após essas restrições as equações de Einstein são dadas por:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{8m+8} \left(\frac{2-m}{\lambda_{12}} + m \left(\frac{-2}{\lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} \right) \right) = c \\ r_{1n} &= \frac{1}{2\lambda_{1n}} + \frac{1}{8m+8} \left(\frac{(1-m)\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} + \left(\frac{(1-m)\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} \right) \right) = c \\ r_{n-1n} &= \frac{1}{2\lambda_{n-1n}} + \frac{1}{8m+8} \left(\frac{2-m}{\lambda_{n-1n}} + m \left(\frac{-2}{\lambda_{n-1n}} + \frac{\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} \right) \right) = c \end{aligned} \quad (2.46)$$

Uma métrica Riemanniana é de Einstein se e somente se a curvatura de Ricci for constante, isto é, $r_{12} = \dots = r_{1n} = \dots = r_{n-1n}$. Mostraremos que com as restrições acima (2.45) a equação de Einstein (2.46) admite uma solução diferente da métrica normal. Com as condições acima devemos buscar soluções para $r_{12} = r_{1n} = r_{n-1n}$.

Façamos $r_{12} = r_{n-1n}$. Esta igualdade é equivalente a

$$(\lambda_{n-1n} - \lambda_{12}) ((m+6)\lambda_{1n}^2 - m\lambda_{12}\lambda_{n-1n}) = 0 \quad (2.47)$$

Observe que $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n}$ é solução da equação acima. Precisamos encontrar λ_{1n} de tal modo que $r_{12} = r_{1n}$. Podemos supor que, a menos de escala, a solução procurada é tal que $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = 1$. Assim $r_{12} = r_{1n}$ é equivalente a

$$(m+6)\lambda_{1n}^2 - (4m+4)\lambda_{1n} - 2 + 3m = 0 \quad (2.48)$$

A equação (2.48) admite, para $m \geq 4$ a solução $\lambda_{1n} = 1$, a outra solução é dada por $\lambda_{1n} = \frac{3m-2}{m+6}$. Observe que para $m = 4$ obtemos, a menos de escala, sobre $\mathbb{F}(10)$ apenas a métrica normal.

Por fim, a menos de escala, obtemos para $m \geq 5$ $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = m + 6$ $\lambda_{1n} = 3m - 2$.

Essas métricas não são isométricas à nenhuma das métricas de Einstein conhecidas.

Verificaremos este fato analisando suas constantes de Einstein. De fato, substituindo os coeficientes da métrica em qualquer uma das equações (2.46) obtemos

$$c = \frac{2(2m+2)(3m-2)^2 - (3m-2)^3 + m(m+6)^2}{4(2m+2)(3m-2)^2} = \frac{5m^3 + 27m^2 - 4m + 12}{2(2m+2)(3m-2)^2} \quad (2.49)$$

Escrevendo $m = \frac{n-2}{2}$, a expressão (2.49) pode ser reescrita como:

$$c = \frac{5(n-2)^3 + 54(n-2)^2 - 16(n-2) + 96}{8n(3n-6)}. \quad (2.50)$$

Precisamos porém, obter o valor da constante de Einstein impondo a condição de volume unitário. O volume é dado por(2.22). Assim,

$$V = \sqrt{\left(\frac{n+10}{2}\right)^{n(n-2)} \cdot \left(\frac{3n-10}{2}\right)^{(n-2)^2}}. \quad (2.51)$$

Desse modo a constante de Einstein da métrica normalizada é dada por

$$c_{par} = \frac{(5(n-2)^3 + 54(n-2)^2 - 16(n-2) + 96)^{2n(n-1)} \sqrt{\left(\frac{n+10}{2}\right)^{n(n-2)} \cdot \left(\frac{3n-10}{2}\right)^{(n-2)^2}}}{8n(3n-6)}. \quad (2.52)$$

Comparando com a constante de Einstein das demais métricas de Einstein não-Kähler podemos concluir que elas não são isométricas, isso encerra a demonstração. ■

Agora trataremos da equação de Einstein sobre as variedades $\mathbb{F}(2m+1)$ $m \geq 6$.

Teorema 2.6.2. *As variedades $\mathbb{F}(2m+1)$ $m \geq 6$ admitem pelo menos 5 classes de métricas de Einstein invariantes.*

1. A classe formada pelas métricas Kähler-Einstein que contém ao todo $\frac{(2m+1)!}{2}$ métricas,
2. a classe descrita por Arvanitoyeorgos[5], que contém ao todo $2m+1$ métricas,

3. a classe formada pela métrica normal e as classes:

4.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= 1 & (1 \leq i < j \leq m+1) \\
 \lambda_{ij} &= \frac{(m+2) + \sqrt{m^2 - 8m + 12}}{2} & (i < m+1 < j) \\
 \lambda_{ij} &= 1 & (m+1 \leq i < j \leq 2m+1),
 \end{aligned}
 \tag{2.53}$$

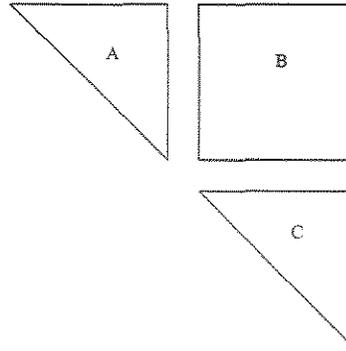
5.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= 1 & (1 \leq i < j \leq m+1) \\
 \lambda_{ij} &= \frac{(m+2) - \sqrt{m^2 - 8m + 12}}{2} & (i < m+1 < j) \\
 \lambda_{ij} &= 1 & (m+1 \leq i < j \leq 2m+1).
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

Demonstração: Considere o conjunto de restrições:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= A & (1 \leq i < j \leq m+1) \\
 \lambda_{ij} &= B & (i < m+1 < j) \\
 \lambda_{ij} &= C & (m+1 \leq i < j).
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

A figura abaixo representa as reduções acima. Os coeficientes da métrica invariante, que pertencem a uma mesma região delimitada na figura serão tomados iguais. Novamente vemos que este processo reduz consideravelmente o número de incógnitas da equação de Einstein.



As equações de Einstein nesta situação (2.55) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{8m+4} \left(\frac{1-m}{\lambda_{12}} + m \left(\frac{-2}{\lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} \right) \right) = c \\
 r_{1n} &= \frac{1}{2\lambda_{1n}} + \frac{1}{8m+4} \left(\frac{(1-m)\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} + \left(\frac{(1-m)\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} + \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{12}\lambda_{n-1n}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}\lambda_{n-1n}} - \frac{\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}\lambda_{12}} \right) \right) = c \\
 r_{n-1n} &= \frac{1}{2\lambda_{n-1n}} + \frac{1}{8m+4} \left(\frac{m\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} - \left(\frac{3m-1}{\lambda_{n-1n}} \right) \right) = c
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Com as condições acima devemos buscar soluções para, $r_{12} = r_{1n} = r_{n-1n}$. Dividiremos a condição Einstein em duas partes. A primeira parte da condição de Einstein será, $r_{12} = r_{n-1n}$ e ela é equivalente a $(\lambda_{n-1n} - \lambda_{12}) [(m+3)\lambda_{1n}^2 - m\lambda_{12}\lambda_{n-1n}] = 0$.

Observe que $\lambda_{n-1n} = \lambda_{12}$ é solução da igualdade acima. Mostraremos que existem soluções para a segunda parte da condição de Einstein: $r_{12} = r_{1n}$. Podemos supor que a menos de escala as soluções são $\lambda_{n-1n} = \lambda_{12} = 1$, desse modo $r_{12} = r_{1n}$ se, e somente se $\lambda_{1n}^3 - (m+3)\lambda_{1n}^2 + 4m\lambda_{1n} + (2-3m) = 0$.

Mas $\lambda_{1n} = 1$ é solução, e este fato permite afirmar que $r_{12} = r_{1n}$ se e somente se $\lambda_{1n} = 1$ ou λ_{1n} satisfaz a equação $\lambda_{1n}^2 - (m+2)\lambda_{1n} + (3m-2) = 0$, cujas soluções são:

$$\lambda_{1n} = \frac{(m+2) \pm \sqrt{m^2 - 8m + 12}}{2} \quad m \geq 6$$

Substituindo os coeficientes das métricas acima em qualquer uma das equações(2.56) e fazendo $m = \frac{n-1}{2}$, temos que as constantes de Einstein destas métricas, são dadas por:

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{2n-2}{\left(\frac{n+3}{2}\right) - \sqrt{(n-1)^2 - 4n + 16}} \right)^2$$

$$c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{2n-2}{\left(\frac{n+3}{2}\right) + \sqrt{(n-1)^2 - 4n + 16}} \right)^2$$

Obteremos o valor da constante de Einstein, impondo a condição de volume unitário. O volume é dado por(2.22), neste caso, temos:

$$V = \left(\frac{n+3 \pm \sqrt{(n-5)(n-13)}}{4} \right)^{\frac{(n-1)^2}{4}}. \quad (2.57)$$

Desse modo a constante de Einstein normalizada, de cada uma destas métricas será dada por

$$c_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{2n-2}{\left(\frac{n+3}{2}\right) - \sqrt{(n-1)^2 - 4n + 16}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\left(\frac{n+3 - \sqrt{(n-5)(n-13)}}{4} \right)^{(n-1)}} \quad (2.58)$$

e

$$c_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left(\frac{2n-2}{\left(\frac{n+3}{2}\right) + \sqrt{(n-1)^2 - 4n + 16}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\left(\frac{n+3 + \sqrt{(n-5)(n-13)}}{4} \right)^{(n-1)}} \quad (2.59)$$

Observe que $c_1 \neq c_2$, o que garante que elas não são isométricas. Note que elas não são isométricas às métricas de Arvanitoyeorgos.

Observe também que as constantes acima, não são iguais a constante de Einstein da métrica de Arvanitoyeorgos. O que encerra a demonstração. ■

2.7 Comparações entre as constantes de Einstein

Nesta seção vamos comparar a constante de Einstein de algumas das métricas mencionadas na seção anterior. Os resultados seguintes são relativos às variedades $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 3$. Começamos comparando as métricas Kähler-Einstein, a métrica normal e a métrica de Arvanitoyeorgos.

2.7.1 As métricas Kähler, normal e Arvanitoyeorgos

Lema 2.7.1. *Para $4 \leq n \leq 6$ a métrica Kähler-Einstein possui constante de Einstein maior do que a constante da métrica de Arvanitoyeorgos, e para $7 \leq n \leq 12$ a constante de Einstein da métrica de Arvanitoyeorgos é maior do que a constante de Einstein da métrica Kähler-Einstein*

Demonstração: Um cálculo direto utilizando(2.2) e (2.35).

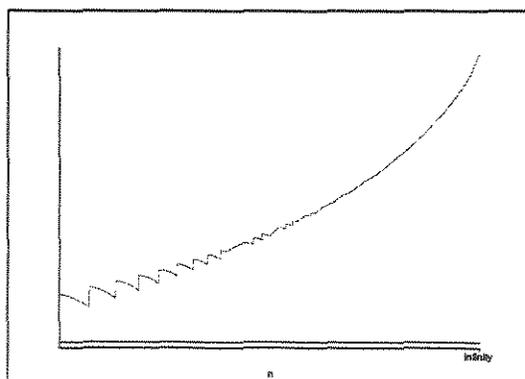
n	$c_{\text{Kähler}}$	$c_{\text{Arv.}}$
4	0.378271437	0.376540048
5	0.352345918	0.350741738
6	0.334518647	0.333723986

Por outro lado, para $7 \leq n \leq 12$ a relação acima se inverte, ou seja, a constante de Einstein da métrica de Arvanitoyeorgos é maior do que a constante de Einstein da métrica Kähler-Einstein.

n	$c_{\text{Kähler}}$	$c_{\text{Arv.}}$
7	0.321431157	0.321651328
8	0.311371733	0.312635526
9	0.303372177	0.305642460
10	0.296841690	0.300058178
11	0.291398299	0.295494908
12	0.286783522	0.291695524

■

O gráfico abaixo descreve, para $n \geq 13$, a razão entre as constantes de Einstein da métrica de Arvanitoyeorgos e a métrica Kähler-Einstein e exibe também a reta $y = 1$. Ele sugere que para $n \geq 13$ a constante de Einstein da métrica de Arvanitoyeorgos é maior do que a constante de Einstein da métrica Kähler-Einstein.



Lema 2.7.2. *Para n suficientemente grande a métrica de Arvanitoyeorgos possui constante de Einstein maior do que a constante de Einstein da métrica Kähler-Einstein.*

Demonstração: Considere a razão,

$$\frac{c_{Arv}}{c_{Kahler}} = \frac{n(n^2 - n + 2) \sqrt[n]{(n-1)^2(n+1)^{n-2}}}{4n(n-1)^2 \sqrt[n(n-1)]{\prod_{k=2}^{n-1} (k)^{2(n-k)}}$$

Como $c_{Arv}, c_{Kahler} > 0$ [14] temos

$$\frac{c_{Arv}}{c_{Kahler}} > 1$$

se, e somente se

$$\left(\frac{c_{Arv}}{c_{Kahler}}\right)^{n(n-1)} > 1.$$

Assim sendo, considere as desigualdades,

$$(n+1)^{(n-2)(n-1)} > (n-1)^{(n-2)(n-1)} \text{ para todo } n \geq 4. \quad (2.60)$$

$$n^{2(n-1)} > (n-1)^{2(n-1)} \text{ para todo } n \geq 4. \quad (2.61)$$

Portanto por (2.60) e (2.61) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_{Arv}}{c_{Kahler}}\right)^{n(n-1)} &= \frac{(n^2 - n + 2)^{n(n-1)} n^{n(n-1)} (n+1)^{(n-2)(n-1)} (n-1)^{2(n-1)}}{\prod_{k=2}^{n-1} (k)^{2(n-k)} [4n(n-1)^2]^{n(n-1)}} \\ &> \frac{[(n^2 - n + 2)(n-1)n]^{n(n-1)} (n^2)^{n-1}}{[4n(n-1)^2]^{n(n-1)} \left(\prod_{k=2}^{n-1} (k)^{2(n-k)}\right)} > 1, \end{aligned} \quad (2.62)$$

para n suficientemente grande. ■

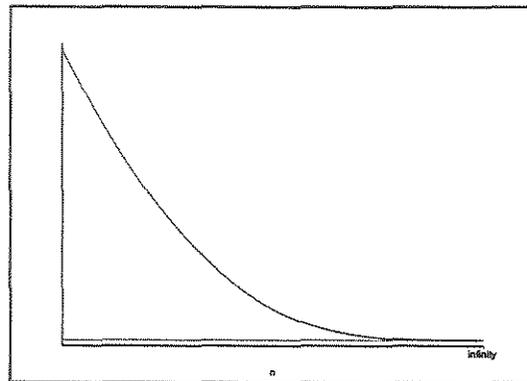
Lema 2.7.3. *Para $4 \leq n \leq 6$ a métrica de Arvanitoyeorgos possui constante de Einstein maior do que a constante de Einstein da métrica normal.*

Demonstração: Um cálculo direto utilizando(2.2) e (2.35) nos dá:

n	c_{normal}	$c_{\text{Arv.}}$
4	0.375000000	0.376540048
5	0.350000000	0.350741738
6	0.333333333	0.333723986

■

O gráfico abaixo descreve a razão entre as constante de Einstein da métrica de Arvanitoyeorgos e da métrica normal, e exibe também a reta $y = 1$. Observe que a figura abaixo sugere que a situação do Lema precedente ocorre também para $n \geq 7$.



Lema 2.7.4. Para $3 \leq n \leq 7$ a métrica Kähler-Einstein possui constante de Einstein maior do que a constante da métrica normal.

Demonstração: Pelos Lemas (2.7.3),(2.7.1) temos que $c_{\text{Kähler}} > c_{\text{normal}}$ para $4 \leq n \leq 6$. Para $n = 3$ um cálculo direto mostra que $c_{\text{Kähler}} = 0,419973683 > c_{\text{normal}} = 0,416666667$, enquanto que para $n = 7$ $c_{\text{Kähler}} = 0,321431157 > c_{\text{normal}} = 0,321428571$ ■

Observação 2.7.5. Sobre $\mathbb{F}(3), \mathbb{F}(4)$ a métrica Kähler-Einstein possui, dentre as métricas de Einstein, a maior curvatura escalar. Sobre $\mathbb{F}(5)$, dentre as métricas conhecidas, a que foi descrita no Lema(2.5.3) possui a maior constante de Einstein $c_5 = 0,362864675$.

2.7.2 Senda

Lema 2.7.6. *Sobre $\mathbb{F}(2m)$ $m \geq 3$ a métrica descrita por Senda, possui constante de Einstein maior do que a constante da métrica de Arvanitoyeorgos.*

Demonstração: Considere (2.35) e (2.43). Pondo $n = 2m$ nestas expressões ficamos com:

$$c_{\text{Senda}} = \frac{(m^3 + 4m^2 + 7m - 2)^{2m-1} \sqrt[m(2m-2)]{(m+2)^{m(2m-2)} \cdot (3m-2)^2 m^2}}{8m(3m-2)}$$

$$c_{\text{Arv.}} = \frac{(4m^2 - 2m + 2)^{2m} \sqrt[(2m-1)^2 \cdot (2m+1)^{2m-2}]}{8m(2m-1)^2}$$

Agora considere as seguintes desigualdades:

$$m^3 + 4m^2 + 7m - 2 > 4m^2 - 2m + 2, \quad \text{para todo } m \geq 3 \quad (2.63)$$

$$^{2m-1}\sqrt{(m+2)^{m(2m-2)}} > ^{2m}\sqrt{(2m-1)^2}, \quad \text{para todo } m \geq 3 \quad (2.64)$$

$$^{2m-1}\sqrt{(3m-2)^{2m^2}} > ^{2m}\sqrt{(2m+1)^{2m-2}}, \quad \text{para todo } m \geq 3 \quad (2.65)$$

Além disso,

$$\frac{1}{8m(3m-2)} > \frac{1}{8m(2m-1)^2} \quad \text{para todo } m \geq 3 \quad (2.66)$$

Assim, usando as desigualdades (2.63), ..., (2.66) obtemos o Lema. \blacksquare

Lema 2.7.7. *Sobre $\mathbb{F}(2m)$, $m \geq 3$ a métrica descrita por Senda, possui constante de Einstein maior do que a constante da métrica normal.*

Demonstração: Considere,

$$c_{\text{Senda}} = \frac{(m^3 + 4m^2 + 7m - 2)^{2m-1} \sqrt[m(2m-2)]{(m+2)^{m(2m-2)} \cdot (3m-2)^{2m^2}}}{8m(3m-2)}$$

e

$$c_{\text{normal}} = \frac{2m+2}{8m}.$$

Um cálculo direto mostra que para todo $m \geq 3$,

$$c_{\text{Senda}} > \frac{(m^3 + 4m^2 + 7m - 2)}{8m} > \frac{2m + 2}{8m} = c_{\text{normal}}$$

■

2.7.3 Comparando as novas métricas

Começamos comparando as métricas de Senda com as métricas descritas em(2.6.1)

Lema 2.7.8. *Sobre $\mathbb{F}(2m + 2)$, $m \geq 5$ a métrica descrita por Senda possui constante de Einstein maior do que a constante das métricas descritas no Teorema 2.6.1.*

Demonstração: Observe inicialmente que para $n = 2m + 2$

$$c_{\text{Senda}} = \frac{(8m^3 + 56m^2 + 144m + 94)^{4m+2} \sqrt{(m+3)^{2m(2m+2)} (3m+1)^{(2m+2)^2}}}{16(2m+2)(6m+2)}$$

Por outro lado, substituindo $n = 2m + 2$ em (2.52).

$$c_{\text{par}} = \frac{(40m^3 - 144m^2 - 344m + 304)^{4m(2m-1)} \sqrt{(m+5)^{2m(2m-2)} \cdot (3m-5)^{(2m-2)^2}}}{16m(6m-6)}$$

Considere as seguintes desigualdades,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(8m^3 + 56m^2 + 144m + 94)^{4m+2} \sqrt{(m+3)^{2m(2m+2)}}}{(40m^3 - 144m^2 - 344m + 304)^{4m(2m-1)} \sqrt{(m+5)^{2m(2m-2)}}} \right)^{8m(2m-1)(2m-1)} \\ & = \frac{[(m+3)^2]^{4m(m+1)(2m-1)(4m)}}{(m+5)^{8m(m-1)(2m+1)}} \\ & > (m+5)^m \end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4m+2 \sqrt{(3m+1)^{(2m+2)^2}}}{4m^{(2m-1)} \sqrt{(3m-5)^{(2m-2)^2}}} \right)^{4m(4m+2)(2m-1)} = \\
& = \frac{(3m+1)^{(2m+2)^2 \cdot 4m(2m-1)}}{(3m-5)^{(2m-2)^2 \cdot (4m+2)}} \\
& > (3m+1)^m.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Portanto por (2.67),(2.68) podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\frac{c_{\text{senda}}}{c_{\text{par}}} &> \\
&> \frac{16(6m-6)(8m^3+56m^2+144m+94)(m+5)^m(3m+1)^m}{16(2m+2)(6m+2)(40m^3-144m^2-344m+304)} \\
&> 1 \text{ para } m \geq 5
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

Lema 2.7.9. *Sobre $\mathbb{F}(2m+2)$ $m \geq 5$ a métrica normal possui constante de Einstein menor do que a constante das métricas descritas no Teorema(2.6.1).*

Demonstração: Observe que $c_{\text{par}}, c_{\text{normal}} > 0$ [14] portanto, $c_{\text{par}} > c_{\text{normal}}$ se, e somente se

$$\left(\frac{c_{\text{par}}}{c_{\text{normal}}} \right)^{(4m+4)(2m+1)} > 1.$$

Mas,

$$\left(\frac{c_{\text{par}}}{c_{\text{normal}}} \right)^{(4m+4)(2m+1)} = \frac{(8m+8)^{(4m+4)(2m+1)}(40m^3+216m^2-32m+96)^{(4m+4)(2m+1)}}{96m(m+1)^{(4m+4)(2m+1)}(2m+4)^{(4m+4)(2m+1)}} \cdot A$$

com $A > 1$. A razão acima é certamente maior do que 1. ■

2.8 Ação do grupo de Weyl

Nesta seção apresentaremos um resultado que nos será útil no decorrer deste capítulo, especialmente na demonstração, no caso de variedades flag, da conjectura de Wang-Ziller [17]. De acordo com Arvanitoyeorgos, [4], temos o seguinte teorema:

Teorema 2.8.1. *A equação de Einstein (2.1.7) para a variedade flag $M = U/K_{\Theta}$ é invariante pela ação do grupo de automorfismos internos de \mathfrak{g} que preservam \mathfrak{k}_{Θ} . Equivalentemente a equação de Einstein é invariante pela ação dos elementos do grupo de Weyl de Π que preservam Π_{Θ} .*

O grupo de Weyl de Π é o conjunto de todas as transformações lineares sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ induzidas por automorfismos internos de \mathfrak{g} que preservam \mathfrak{h} [31], [53]. Por outro lado, um automorfismo interno $w \in \mathfrak{g}$ é dado por $w = Adz$, $z \in G$. Precisamos examinar o efeito de $w = Adz$ sobre as raízes, os vetores da base de Weyl, as constantes de estrutura e o conjunto de equações que determinam a condição Einstein dada pela proposição 2.1.7.

Chamaremos de W_{Θ} , o grupo formado pelos elementos do grupo de Weyl que satisfazem as condições do Teorema 2.8.1 que será provado após uma seqüência de lemas.

Lema 2.8.2. *Se denotarmos $\alpha^*(H) = B(H, Adz(H_{\alpha}))$, $H \in \mathfrak{h}$, então $Adz(X_{\alpha}) = X_{\alpha^*}$.*

Demonstração: Aplicando Adz à equação $[H, X_{\alpha}] = \alpha(H)X_{\alpha}$ obtemos:

$$[Adz(H), Adz(X_{\alpha})] = \alpha(H)Adz(X_{\alpha}). \quad (2.69)$$

Seguindo a notação acima e escrevendo $Adz(H_{\alpha}) = H_{\alpha^*}$. Esta relação, e a invariância da forma Cartan-Killing com relação à Adz implicam que:

$$\alpha(H) = B(H, H_{\alpha}) = B(Adz(H), Adz(H_{\alpha})) = B(Adz(H), H_{\alpha^*}) = \alpha^*(Adz(H)). \quad (2.70)$$

De (2.69) e (2.70) obtemos:

$$[Adz(H), Adz(X_{\alpha})] = \alpha^*(Adz(H))Adz(X_{\alpha}). \quad (2.71)$$

Esta última igualdade implica que $Adz(X_\alpha)$ é o vetor correspondente à raiz α^* , a menos de constante. A escolha da base de Weyl torna esta constante igual a 1.

Observe que α^* satisfaz a equação

$$\alpha^* = \mathcal{B}(Adz^{-1}(H), H_\alpha) = \alpha(Adz^{-1}(H)) = w \cdot \alpha(H)$$

■

O próximo lema diz como age o grupo W_Θ , sobre as constantes de estrutura e os símbolos $\begin{bmatrix} k \\ i & j \end{bmatrix}$.

Lema 2.8.3. $m_{\alpha^*, \beta^*} X_{\alpha^* + \beta^*} = m_{\alpha, \beta} X_{(\alpha + \beta)^*}$ e portanto W_Θ preserva os símbolos $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$.

Demonstração:

As constantes de estrutura são definidas pelas igualdades $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$ $\alpha + \beta \in \Pi$.

Aplicando Adz a esta igualdade obtemos

$$[Adz(X_\alpha), Adz(X_\beta)] = m_{\alpha, \beta} Adz(X_{\alpha + \beta}).$$

Pelo Lema(2.8.2)

$$m_{\alpha^*, \beta^*} X_{\alpha^* + \beta^*} = [X_{\alpha^*}, X_{\beta^*}] = m_{\alpha, \beta} X_{(\alpha + \beta)^*}.$$

Logo podemos escrever,

$$m_{\alpha, \beta} X_{(\alpha + \beta)^*} = m_{\alpha^*, \beta^*} X_{\alpha^* + \beta^*}.$$

Agora os fatos acima implicam que $\begin{bmatrix} w(\alpha) & \\ w(\beta) & w(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$.

Note que $\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \neq 0$ apenas quando $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e nestes casos $\begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = 2(m_{\alpha, \beta})^2$

ou $\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = 2(m_{\alpha, -\beta})^2$. ■

O próximo lema diz que o grupo W_Θ leva métricas invariantes em métricas invariantes e portanto define uma ação sobre o conjunto das soluções da equação de Einstein.

Lema 2.8.4. *Seja g um métrica invariante então $Adz \cdot g(X, Y) = g(Adz(X), Adz(Y))$.*

Demonstração: Seja $w = Adz$ um elemento do grupo de Weyl de Π que preserva Π_Θ . Então o difeomorfismo de G , $C_z(g) = z \cdot g \cdot z^{-1}$ preserva K_Θ , assim ele induz uma aplicação \tilde{C}_z em G/K_Θ .

Adz corresponde à restrição da aplicação $d\tilde{C}_z$ sobre $\mathfrak{m} = T_0(G/K_\Theta)$. Desse modo:

$$Adz \cdot g(X, Y) = g(Adz(X), Adz(Y)). \quad (2.72)$$

Mais precisamente para $X = X_\alpha$ e $Y = X_{-\alpha}$ a igualdade acima implica que

$$(Adz \cdot g)_\alpha = g(X_{\alpha^*}, X_{-\alpha^*})$$

■

Finalmente apresentamos a demonstração do Teorema 2.8.1.

Demonstração: Aplicando $w = Adz$ em X_α em 2.1.7 obtemos

$$r_{w \cdot \alpha} = r_{\alpha^*} = (\alpha^*, \alpha^*) + \sum_{\substack{\phi^* \in \Pi_\Theta \\ \alpha^* + \phi^* \in \Pi}} m_{\alpha^*, \phi^*}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta^* \in \Pi_M \\ \alpha^* + \beta^* \in \Pi_M}} \frac{m_{\alpha^*, \beta^*}^2 (\lambda_{\alpha^*}^2 - (\lambda_{\alpha^* + \beta^*} - \lambda_{\beta^*})^2)}{\lambda_{\alpha^* + \beta^*} \lambda_{\beta^*}} \quad (2.73)$$

Precisamos mostrar que (2.73) é equivalente a:

$$(\alpha^*, \alpha^*) + \sum_{\substack{\phi \in \Pi_\Theta \\ \alpha^* + \phi \in \Pi}} m_{\alpha^*, \phi}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta \in \Pi_M \\ \alpha^* + \beta \in \Pi_M}} \frac{m_{\alpha^*, \beta}^2 (\lambda_{\alpha^*}^2 - (\lambda_{\alpha^* + \beta} - \lambda_\beta)^2)}{\lambda_{\alpha^* + \beta} \lambda_\beta} \quad (2.74)$$

Considere a equação (2.74). Como Π_Θ é invariante por w e $\Pi \setminus \Pi_\Theta = \Pi_M$ então se $\alpha, \beta \in \Pi_M$ com $\alpha + \beta \notin \Pi_M$ temos que $\alpha + \beta \in \Pi_\Theta$, e pela hipótese $(\alpha + \beta)^* \in \Pi_\Theta$

Portanto, ainda pela hipótese $\alpha + \beta \in \Pi_\Theta$ se, e somente se $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^* \in \Pi_\Theta$.

Isso implica, em particular, que se $\alpha, \beta \in \Pi_M$ com $\alpha + \beta \in \Pi_M$ então,

$$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^* \in \Pi_M.$$

Portanto o grupo W_Θ preserva o conjunto dos elementos de Π_M , cujas somas ainda pertençam a Π_M .

Tendo em vista que $\alpha^* = w \cdot \alpha$, os fato acima e a hipótese podemos substituir em (2.74) ϕ e β por ϕ^* e β^* respectivamente.

Usando mais uma vez a invariância de Π_Θ pela ação de w obtemos a equação (2.73) e isso conclui a demonstração do Teorema. ■

Denote por $\varepsilon(U/K_\Theta)$ o conjunto de todas as soluções da equação de Einstein sobre $M = U/K_\Theta$, dada na proposição 2.1.7, e por W_Θ o grupo descrito acima. O próximo resultado desempenhará um papel central no restante desta seção.

Corolário 2.8.5. *Os elementos de W_Θ deixam $\varepsilon(U/K_\Theta)$ invariante*

Demonstração:

Note que pelo Lema 2.8.4 um elemento de W_Θ leva uma métrica invariante em outra métrica invariante. Além disso, se $x \in \varepsilon(U/K_\Theta)$ e w é um elemento de W_Θ então $w \cdot x$ também é solução da equação de Einstein dada pela proposição 2.1.7.

Do contrário w levaria o sistema, dado na proposição 2.1.7 em um sistema não equivalente (pois não possuiria o mesmo conjunto solução) e portanto não deixaria a condição Einstein invariante. O que contraria o Teorema 2.8.1. ■

Exemplo 2.8.6. *Considere a equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 3$:*

$$\lambda_{ij} = 2 + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{il} - \lambda_{jl})^2}{\lambda_{il} \lambda_{jl}}.$$

A equação de Einstein neste caso é um sistema algébrico de $\frac{n(n-1)}{2}$ equações e com o mesmo número de incógnitas λ_{ij} .

O grupo de Weyl age sobre o conjunto de raízes de $\mathfrak{su}(n)$, $\Pi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i \neq j\}$ da seguinte maneira:

$$w(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \varepsilon_{w(i)} - \varepsilon_{w(j)}$$

e

$$w \cdot g_{ij} = g_{w(i), w(j)}.$$

Se $x = (x^{1,2}, \dots, x^{n-1,n})$ é uma solução da equação de Einstein acima então $w \cdot x = (x^{w(1),w(2)}, \dots, x^{w(n-1),w(n)})$ também é uma solução.

Decorre do Teorema 2.8.1 que o grupo W_Θ é finito, pois este é um subgrupo do grupo de Weyl que é finito para as álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita. Na variedade flag clássica $\mathbb{F}(n)$, W_Θ é o grupo simétrico S_n .

O Lema 2.8.4 diz, em particular, que W_Θ age sobre o conjunto das métricas invariantes de forma natural, e portanto age sobre $\varepsilon(U/K_\Theta)$. Escreveremos $E(x)$ para denotar o subgrupo que estabiliza a solução $x \in \varepsilon(U/K_\Theta)$. A órbita que passa por x será designada por $\Gamma(x)$. O próximo resultado foi provado em [17].

Teorema 2.8.7. *Sejam G um grupo de Lie compacto e G/H um espaço homogêneo com grupo fundamental finito. Então cada componente de $\varepsilon(G/H)$ é compacta e o conjunto de constantes de Einstein em $\varepsilon(U/K_\Theta)$ é finito.*

2.9 Soluções em variedades não-maximais

Nesta seção apresentaremos soluções para a equação de Einstein sobre variedades flag do tipo A_i não-maximais. Em cada situação, serão apresentadas pelo menos duas soluções não-Kähler. Sabemos que na maioria dos espaços abaixo ($k \neq q$), a métrica normal não é Einstein, portanto o Lema 2.3.5 não garante a existência de soluções para todo e qualquer tipo de restrições mencionadas no Lema. Contudo um conjunto de restrições permite encontrar soluções nesta situação.

Teorema 2.9.1. *O espaço $\mathbb{F}(n, k, q, q, \dots, q) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(q)^s}$, $q \in \left(0, \frac{2k}{\sqrt{s^2 - 4} - (s-2)}\right)$, $n = k + sq$ $s \geq 3$ admite pelo menos 2 métricas Einstein não-Kähler invariantes .*

Demonstração: Colocando as seguintes restrições na equação de Einstein correspondente(2.13):

$$\begin{aligned}\lambda_{12} = \lambda_{13} = \dots = \lambda_{1s+1} = x \quad \text{e} \\ \lambda_{23} = \lambda_{24} = \dots = \lambda_{ss+1} = y,\end{aligned}\tag{2.75}$$

obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}x &= k + sq - \frac{(s-1)qy}{2x} \\ y &= \frac{(s+2)q}{2} + \frac{ky^2}{2x^2}.\end{aligned}$$

As equações acima, são as equações de Einstein obtidas de 2.13 impondo as restrições (2.75).

Escrevendo $\frac{y}{x} = t$ obtemos a seguinte equação:

$$t^2 \left(\frac{k + (s-1)q}{2} \right) - (k + sq)t + \frac{(s+2)q}{2} = 0\tag{2.76}$$

Observe que de acordo com a hipótese

$$q \in \left(0, \frac{2k}{\sqrt{s^2 - 4} - (s-2)}\right)$$

é equivalente a

$$k > \frac{\sqrt{s^2 - 4} - (s - 2)}{2}q,$$

que por sua vez é equivalente a

$$k^2 + (s - 2)kq + (2 - s)q^2 > 0.$$

De fato,

$$k^2 + (s - 2)kq + (2 - s)q^2 = \frac{(2k + (s - 2)q)^2}{4} - \frac{(s^2 - 4)q^2}{4}$$

Portanto, $k^2 + (s - 2)kq + (2 - s)q^2 > 0$ se, e somente se $\frac{2k + (s - 2)q}{2} > \frac{\sqrt{(s^2 - 4)q}}{2}$, conforme afirmamos.

Os fatos acima asseguram a existência de soluções :

$$t = \frac{k + sq \pm \sqrt{k^2 + (s - 2)kq + (2 - s)q^2}}{k + (s - 1)q}.$$

Ainda pela hipótese, como $q \in \left(0, \frac{2k}{\sqrt{s^2 - 4} - (s - 2)}\right)$, podemos tomar $s \geq 3$ e $k = q$.

Um outro fato importante é que os valores de t descritos acima são positivos pois

$$k + sq > \sqrt{k^2 + (s - 2)kq - (2 - s)q^2}$$

é equivalente a

$$(s + 2)kq + (s^2 - s + 2) > 0,$$

e a expressão acima é verdadeira para todo $s \geq 3$, e para todo $k, q > 0$. Por construção, as métricas descritas não são Kähler. ■

Note que no Teorema acima podemos tomar $k = q$. Se considerarmos $k = q = 1$ obteremos a menos de escala a métrica normal e uma das soluções descritas por Arvanitoyeorgos [5]. No próximo resultado consideraremos $k = q$ e obteremos uma correspondência biunívoca

entre o conjunto-solução da equação de Einstein invariante em $\mathbb{F}(n)$, e o respectivo conjunto-solução da equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(kn, k, k, \dots, k)$ $n \geq 3$, $k \geq 1$.

O que nos levou a este resultado foi o fato de que o grupo S_n deixa a equação de Einstein invariante em ambas situações.

A correspondência obtida afirma que o número de soluções para a equação de Einstein permanece inalterado nessas duas classes de variedades, e que as métricas que se relacionam via este teorema são do mesmo tipo, ou seja, se Λ e $\tilde{\Lambda}$ são duas métricas relacionadas pelo teorema então Λ é (1,2)-simplética se, e somente se $\tilde{\Lambda}$ o for. O mesmo vale para $\Lambda \in W_1 \oplus W_3$ [54] e [55].

Teorema 2.9.2. *Seja $\mathbb{F}(n, n_1, \dots, n_k) = \frac{U(n)}{U(n_1) \times U(n_2) \times \dots \times U(n_k)}$ com $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ $k \geq 3$. A métrica invariante (λ_{ij}) é Einstein sobre $\mathbb{F}(k) = \frac{U(k)}{U(1) \times U(1) \times \dots \times U(1)}$ se, e somente se a métrica invariante $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_{ij}) = \left(\frac{n \cdot \lambda_{ij}}{k}\right)$, $\forall n = k, 2k, 3k, 4k, \dots$, for Einstein sobre $\mathbb{F}(n, n_1, \dots, n_k) = \frac{U(n)}{U(n_1) \times U(n_2) \times \dots \times U(n_k)}$ com $n_1 = n_2 = \dots = n_k$.*

Demonstração: Se a métrica invariante $\Lambda = (\lambda_{ij})$ for solução da equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(k)$, então $\lambda_{ij} = 2 + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{(\lambda_{ij}^2 - (\lambda_{il} - \lambda_{jl})^2)}{\lambda_{il} \lambda_{jl}}$ daí,

$$\begin{aligned} \frac{n \lambda_{ij}}{k} &= \frac{2n}{k} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{\frac{n}{k} ((\frac{n}{k} \lambda_{ij})^2 - (\frac{n}{k} \lambda_{il} - \frac{n}{k} \lambda_{jl})^2)}{(\frac{n}{k} \lambda_{il})(\frac{n}{k} \lambda_{jl})} = \\ &= n_i + n_j + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{n_l ((\frac{n}{k} \lambda_{ij})^2 - (\frac{n}{k} \lambda_{il} - \frac{n}{k} \lambda_{jl})^2)}{(\frac{n}{k} \lambda_{il})(\frac{n}{k} \lambda_{jl})} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Na última igualdade usamos que $n_1 = n_2 = \dots = n_k = \frac{n}{k}$. A expressão acima diz que a métrica $(\tilde{\lambda}_{ij}) = \left(\frac{n \lambda_{ij}}{k}\right)$ é Einstein sobre $\mathbb{F}(n, n_1, \dots, n_k)$ com $n_1 = n_2 = \dots = n_k \forall n = k, 2k, 3k, 4k, \dots$. Pois decorre de (2.77) que:

$$\tilde{\lambda}_{ij} = n_i + n_j + \frac{1}{2} \sum_{l \neq i, j} \frac{n_l ((\tilde{\lambda}_{ij})^2 - (\tilde{\lambda}_{il} - \tilde{\lambda}_{jl})^2)}{(\tilde{\lambda}_{il})(\tilde{\lambda}_{jl})} \quad (2.78)$$

Reciprocamente se $(\tilde{\lambda}_{ij}) = \left(\frac{n \lambda_{ij}}{k}\right) \forall n = k, 2k, 3k, 4k, \dots$, for uma métrica de Einstein invariante sobre $\mathbb{F}(n, n_1, \dots, n_k)$ com $n_1 = n_2 = \dots = n_k$, então pondo $n = k$ obtemos a primeira parte do Teorema. ■

CAPÍTULO 3

Fibrações e a variação canônica

Neste capítulo utilizaremos o fato de que todas as métricas U -invariantes sobre U/H , quando este é simplesmente conexo, são obtidas por meio de uma submersão Riemanniana fixa $K/H \rightarrow U/H \rightarrow U/K$ escalonando as métricas na fibra e na base[41],[58]. Este processo é conhecido como variação canônica [11],[41]. Suporemos que G é um grupo de Lie complexo semi-simples e que U é a sua forma real compacta.

Podemos associar a cada grupo de Lie semi-simples complexo uma única, a menos de isomorfismos, forma real compacta. U é um grupo de Lie semi-simples compacto e $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$, onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G . Este fato será amplamente usado aqui(ver por exemplo[31] ou [53]).

Começamos definindo uma interessante deformação da métrica g do espaço total de uma submersão Riemanniana, chamaremos esta deformação de **variação canônica**. Esta terminologia foi introduzida por Bérard-Bergery e Bourguignon em [8], ver também [41].

Definição 3.0.3. *Seja $\pi: M \rightarrow B$ uma submersão Riemanniana com fibra F . Chamamos de variação canônica g_t da métrica Riemanniana g sobre M ao conjunto de métricas $g_t = g_B + tg_F$, $t > 0$ tal que :*

$$\begin{aligned}g_t|_{\mathcal{V}} &= tg|_{\mathcal{V}}, \\g_t|_{\mathcal{H}} &= g|_{\mathcal{H}}, \\g_t(\mathcal{V}, \mathcal{H}) &= 0.\end{aligned}$$

3.1 Subvariedades de uma variedade flag

Nesta seção descreveremos um tipo especial de subvariedades de uma variedade flag. Antes enunciaremos dois resultados que nos serão úteis neste capítulo. O primeiro é devido a Berard-Bergery, provado independentemente por Matsuzawa [11],[41].

Teorema 3.1.1. ([11],[41]) *Seja $F \rightarrow M \rightarrow B$ uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas e espaço total completo. Suponha que as métricas sobre B, M e F sejam Einstein com constantes de Einstein c_B, c_M, c_F respectivamente e $c_F > 0$. Então a métrica obtida pela variação canônica $g_t = g_B + tg_F$, $t > 0$, é Einstein se, e somente se, $t = 1$ ou $t = c_F/c_B - c_F$.*

Demonstração: Ver por exemplo [41]. ■

Observe que se $c_F \neq \frac{1}{2}c_B$ obtemos uma métrica de Einstein sobre M diferente de g .

O próximo resultado nos será útil, especialmente no entendimento das relações entre as métricas da fibra F e do espaço total M .

Teorema 3.1.2. *Sejam G um grupo de Lie complexo reductivo, $P \subset Q$ subgrupos parabólicos de G , e K um subgrupo compacto maximal de G . A métrica K -invariante Kähler-Einstein em G/P , restrita a qualquer fibra da fibração $G/P \rightarrow G/Q$ é ainda Kähler-Einstein.*

Demonstração: Ver [6] ■

No Teorema acima G é um grupo de Lie complexo reductivo, podemos então supor que G é semi-simples. Assim o subgrupo compacto maximal de G é, a menos de isomorfismos, a sua forma real compacta.

Sejam $K \subset H \subset U$ grupos de Lie compactos. Aqui, sempre estaremos pensando em U como a forma real compacta de um grupo de Lie complexo e semi-simples G . Existe uma fibração natural,

$$\begin{aligned} \pi: U/K &\rightarrow U/H \\ aK &\mapsto aH \end{aligned}$$

com fibra, H/K e grupo estrutural H . Temos portanto um H -fibrado principal [35]

$$\pi : U \rightarrow U/H, \quad \text{com fibra } H/K.$$

A aplicação π é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas e isométricas a H/K ([7],[8], [11] p.257 e [41]).

Considere $M = U/K = Ad(U)w$ ($w \in u$) uma variedade flag, com decomposição

$$u = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}.$$

Apresentamos agora a definição de C -subálgebra,

Definição 3.1.3. *Uma subálgebra \mathfrak{f} de u é chamada de uma C -subálgebra se:*

(a) $\mathfrak{f} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{n}$ onde, $\mathfrak{k}' = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{n} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{m}$

(b) *Existe uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{k} tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$.*

Um subgrupo de Lie $F \subset U$ com álgebra de Lie \mathfrak{f} conforme a definição acima é chamado de um C -subgrupo de Lie, e a órbita $N = Ad(F)w$ é dita uma C -subvariedade de M . Então uma C -subvariedade é uma variedade flag [1] $N = F/K'$, onde K' é o subgrupo de Lie de F com subálgebra $\mathfrak{k}' = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{k}$.

Proposição 3.1.4. *Seja N uma C -subvariedade de uma variedade flag $M = U/K'$. Então N é totalmente geodésica com relação a qualquer métrica U -invariante sobre M .*

Demonstração: Ver por exemplo[11] observando que $N = F/K'$ é a fibra da submersão Riemanniana $U/K' \rightarrow U/F$. ■

Estamos interessados nas fibrações obtidas a partir de um C -subgrupo F que contenha um subgrupo parabólico K .

Definição 3.1.5. *Sejam $M = U/K$ uma variedade flag e $F \supset K$ um C -subgrupo de Lie de U . Então F/K é uma C -subvariedade de M , e a fibração*

$$F/K \dashrightarrow U/K \rightarrow U/F,$$

é chamada de uma C -fibrção associada à M .

Arvanitoyeorgos [4] descreveu as C -fibrações associadas a uma variedade flag M em termos das raízes da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Aqui, e no que se segue $M = U/K$.

Proposição 3.1.6. *Existe uma correspondência entre subconjuntos $S \subset \Sigma_M$ e C -fibrações associadas a M .*

Demonstração: Sejam $\Sigma_\Theta \subset \Sigma$ bases para os sistemas de raízes Π_Θ e Π , respectivamente.

Seja $\Sigma_M = \Sigma \setminus \Sigma_\Theta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ o conjunto das raízes complementares simples. Lembremos que $\Pi_\Theta = \Pi^+ \cup \langle \Theta \rangle^-$.

Escreva a álgebra de Lie de K por $\mathfrak{k}^C = \mathfrak{h}^C \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} u_\alpha$.

Onde $u_\alpha = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha})$

Dado um subconjunto $S \subset \Sigma_M$ digamos $S = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ podemos escrever Π_M como

$$\Pi_M = \langle S \rangle_M \cup (\Pi_M \setminus \langle S \rangle_M), \quad (3.1)$$

onde, $\langle S \rangle_M = \langle S \rangle \cap \Pi_M$.

Assim ao subconjunto S podemos fazer corresponder a subálgebra

$$\mathfrak{f}_S^C = \mathfrak{k}^C \oplus \sum_{\alpha \in \langle S \rangle_M} u_\alpha$$

cujos subgrupo associado, F contém K , ou seja $F \supset K$. Temos portanto, nos termos da definição 3.1.5, uma C -fiação associada a M , dada por:

$$U/K \rightarrow U/F.$$

■

A decomposição de Π_M (3.1) e a proposição 1.4.6 permitem descrever as e.q.c.i. J sobre U/K do seguinte modo. Se J é uma tal e.q.c.i. escreva,

$$J(X_\alpha) = \begin{cases} J_{U/F}(X_\alpha) & \text{se } \alpha \in \Pi_M \setminus \langle S \rangle_M \\ J_{F/K}(X_\alpha) & \text{se } \alpha \in \langle S \rangle_M \end{cases}$$

Note que J é de fato uma e.q.c.i, pois $J^2 = -1$ e J é invariante pois as componentes o são. Os mesmos argumentos permitem descrever uma métrica invariante sobre U/K de forma inteiramente análoga.

Algumas propriedades desta e.q.c.i J e portanto de todas as e.q.c.i.'s sobre U/K serão descritas na próxima seção.

Usaremos a notação $\{a, b\}$ -tripla para denotar uma $\{1, 2\}$ ou uma $\{0, 3\}$ -tripla.

Denotaremos $J_{F/K}$ por J_F , $J_{U/F}$ por J_B , numa alusão à base e à fibra da C -fibrção conforme 3.1.5, e finalmente $J_{U/K}$ por J_T para denotar a e.q.c.i. do espaço total.

A demonstração do próximo resultado é imediata.

Lema 3.1.7. *Se $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma $\{a, b\}$ -tripla para a e.q.c.i. J_F (ou J_B) então $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma $\{a, b\}$ -tripla para J_T .*

3.2 C-Fibrações e a geometria das variedades flag

Nesta seção utilizaremos as C -fibrções para estudar a Geometria Hermitiana invariante das variedades flag. Começamos esta seção, com um breve comentário sobre a classificação das estruturas quase Hermitianas invariantes, sobre variedades flags maximais obtida por San Martin-Negreiros [54].

Uma estrutura quase Hermitiana invariante, sobre uma variedade flag maximal é um par (J, Λ) onde $J = \{\epsilon_\alpha\}$ é uma e.q.c.i. sobre $M = U/K$ e $\Lambda = \{\lambda_\alpha \mid \alpha \in \Pi^+\}$ é uma métrica invariante sobre M .

Segundo a classificação obtida por San Martin-Negreiros [54], baseada na classificação de Gray-Hervella [29], as estruturas quase Hermitianas invariantes sobre as variedades flag maximais podem ser agrupadas em três classes:

- (a) $W_1 \oplus W_2$ (1,2)-simplética
- (b) $W_1 \oplus W_3$
- (c) $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ co-simplética,

onde a classe $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ contém todas as estruturas quase Hermitianas invariantes.

Vimos que uma estrutura invariante $(J, \Lambda) \in W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, para toda $\{1, 2\}$ -tripla de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\epsilon_\alpha^\Theta \lambda_\alpha^\Theta + \epsilon_\beta^\Theta \lambda_\beta^\Theta + \epsilon_\gamma^\Theta \lambda_\gamma^\Theta = 0. \quad (3.2)$$

Ver detalhes em [54] no caso $\Theta = \emptyset$ e [55] para $\Theta \neq \emptyset$.

Observe que as estruturas Kähler invariantes pertencem a esta classe, conforme afirma a proposição 1.6.6. Por outro lado, a métrica Cartan-Killing(normal) não é $(1, 2)$ -simplética exceto na variedade $\mathbb{F}(3)$ [43].

Lema 3.2.1. *Uma condição necessária e suficiente para um par invariante (J, Λ) estar em $W_1 \oplus W_3 \approx W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ é $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma \forall \{0, 3\}$ -tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.*

Demonstração: Ver [54] no caso $\Theta = \emptyset$ e [55] para $\Theta \neq \emptyset$. ■

Note também que as métricas descritas por Arvanitoyeorgos [5] p.991, as métricas obtidas por Senda e as apresentadas aqui no Capítulo 2 não são $(1, 2)$ -simpléticas.

Mostraremos que as métricas de Arvanitoyeorgos sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$ não são $(1, 2)$ -simpléticas mas pertencem à classe $W_1 \oplus W_3$. O mesmo argumento pode ser aplicado, às métricas obtidas por Senda e as obtidas aqui nas variedades maximais $\mathbb{F}(2m+1)$ e $\mathbb{F}(2m+2)$.

Lema 3.2.2. *Para qualquer $n \geq 4$, as métricas de Arvanitoyeorgos sobre $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 4$, não são $(1, 2)$ -simpléticas.*

Demonstração: Considere uma das métricas de Arvanitoyeorgos sobre $\mathbb{F}(n)$ $n \geq 4$. Uma métrica invariante sobre uma variedade flag maximal é $(1, 2)$ -simplética se e somente se toda $\{1, 2\}$ -tripla de raízes satisfizer(3.2).

Portanto se $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma tal tripla com $\gamma = -(\alpha + \beta)$ e $\epsilon_\alpha = \epsilon_\beta$ por (3.2) devemos ter $\lambda_\gamma = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$. Mas isto não ocorre, pois para tais métricas e para todo $n \geq 4$ em cada tripla $\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma\}$ temos pelo menos um par de valores iguais, digamos $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$. Com relação a λ_γ , sabemos que este cumpre a seguinte relação (Ver[5]p.991 e (2.4.1)):

$$\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\alpha} = 1, \quad 1 - \frac{2}{n+1} \text{ ou } 1 + \frac{2}{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 4.$$

Portanto em nenhum dos casos vale a relação

$$\lambda_\gamma = 2\lambda_\alpha.$$

O que encerra a demonstração. ■

Devemos mencionar que sobre a variedade $\mathbb{F}(3)$, a métrica normal é Einstein e (1,2)-simplética [43], [50],[57], mas não é Kähler. Conforme veremos na Proposição 3.2.12, sobre as variedades $\mathbb{F}(n)$ este é o único caso de métrica de Einstein, (1,2)-simplética e não-Kähler.

Os próximos resultados permitem obter informações, sobre o par invariante $(\Lambda, J = J_T)$, a partir de dados sobre (Λ_F, J_F) . O próximo Lema será utilizado na demonstração da Proposição 3.2.12. Existe um resultado análogo quando M é uma variedade Kähler, ver Teorema 3.1.2 ou [6].

Lema 3.2.3. *Se (Λ_F, J_F) não é (1,2)-simplético então $(\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F, J)$ não é (1,2)-simplético em U/K .*

Demonstração:

Provaremos no caso em que o espaço total é uma variedade flag maximal mas, o mesmo argumento se aplica aos flags parciais devido a (3.2).

Se (Λ_F, J_F) não é (1,2)-simplético então existe uma $\{1,2\}$ -tripla de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ com $\epsilon_\alpha = \epsilon_\beta \neq \epsilon_\gamma$ e

$$\epsilon_\alpha \lambda_\alpha + \epsilon_\beta \lambda_\beta + \epsilon_\gamma \lambda_\gamma \neq 0.$$

O lema 3.1.7 conclui a demonstração. ■

O próximo resultado é um análogo do anterior para a outra classe de estruturas quase-Hermitianas invariantes sobre variedades flags maximais.

Lema 3.2.4. *Se $(\Lambda_F, J_F) \notin W_1 \oplus W_3$ então $(\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F, J) \notin W_1 \oplus W_3$ em U/K .*

Demonstração:

Se $(\Lambda_F, J_F) \notin W_1 \oplus W_3$ por [54], no caso maximal, e por [55] no caso de flags parciais existe uma $\{0,3\}$ -tripla de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ com $\epsilon_\alpha = \epsilon_\beta = \epsilon_\gamma$ e $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta = \lambda_\gamma$. O lema 3.1.7 conclui a demonstração. ■

Os próximos lemas serão importantes na demonstração da Proposição 3.2.12.

Lema 3.2.5. *Suponha que a e.q.c.i. J_B é integrável. Se (Λ, J) não é Kähler então (Λ_F, J_F) não é Kähler.*

Demonstração: Observe que da partição (3.1) podemos concluir que todas as as métricas invariantes de M são obtidas pela variação canônica $\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F$, $t > 0$. Portanto devemos considerar as triplas formadas apenas por raízes em $\langle S \rangle_M$, ou formadas apenas por raízes em $\Pi_M \setminus \langle S \rangle_M$, pois do contrário, pela Definição 3.0.3 se $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma tripla de raízes da e.q.c.i. J com, por exemplo, $\alpha, \beta \in \langle S \rangle_M$ e $\gamma \in \Pi_M \setminus \langle S \rangle_M$ então

$$(N(X_\alpha, X_\beta), JX_\gamma)_{\Lambda_t} = 0.$$

Segue daí que, $N_{\Lambda_t} = N_{\Lambda_B} + N_{t\Lambda_F}$. Pela hipótese $N_{\Lambda_B} = 0$. Além disso $N_{t\Lambda_F} = tN_{\Lambda_F}$ com $t > 0$

Portanto, se (Λ, J) não é Kähler então (Λ_F, J_F) não é Kähler. ■

Lema 3.2.6. *Suponha que a e.q.c.i. J_B é integrável. Se $(\Lambda, J) \notin W_1 \oplus W_3$ então $(\Lambda_F, J_F) \notin W_1 \oplus W_3$.*

Demonstração: Observe que da partição (3.1) podemos concluir que todas as as métricas invariantes de M são obtidas pela variação canônica $\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F$, $t > 0$. Portanto devemos considerar as triplas formadas apenas por raízes em $\langle S \rangle_M$, ou formadas apenas por raízes em $\Pi_M \setminus \langle S \rangle_M$, pois do contrário, pela Definição 3.0.3 se $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma tripla de raízes da e.q.c.i. J com, por exemplo, $\alpha, \beta \in \langle S \rangle_M$ e $\gamma \in \Pi_M \setminus \langle S \rangle_M$ então

$$(N(X_\alpha, X_\beta), X_\gamma)_{\Lambda_t} = 0.$$

Segue daí que, $N_{\Lambda_t} = N_{\Lambda_B} + tN_{\Lambda_F}$. A classe $W_1 \oplus W_3$ é formada pelas estruturas que aniquilam o tensor $(N(X, Y), X)_\Lambda$. Portanto se J_B é integrável temos que $N_{\Lambda_B} = 0$. Portanto se a estrutura $\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F$ não aniquila o tensor $(N(X, Y), X)_\Lambda$ como $(N(X, Y), X)_\Lambda = t(N(X, Y), X)_{\Lambda_F}$, $t > 0$ então, a estrutura (Λ_F, J_F) também não aniquila o tensor $(N(X, Y), X)_{\Lambda_F}$.

■

Conforme já mencionamos o grupo de Lie U denota a forma real compacta de um grupo de Lie complexo e semi-simples G . Agora apresentamos um resultado que é quase uma recíproca para o Teorema 3.1.1.

Proposição 3.2.7. *Sejam $K \subset F \subset U$ grupos de Lie compactos com K subgrupo parabólico e $F/K \dashrightarrow U/K \rightarrow U/F$ a submersão Riemanniana correspondente. Se a métrica $\Lambda = \Lambda_B + \Lambda_F$, for Einstein então as métricas Λ_F, Λ_B são, a menos de escala, Einstein.*

Demonstração: Uma métrica invariante em U/K pode ser descrita como:

$$\Lambda(X_\alpha) = \begin{cases} \Lambda_{U/F}(X_\alpha) & \text{se } \alpha \in \Pi_M \setminus \langle S \rangle_M \\ \Lambda_{F/K}(X_\alpha) & \text{se } \alpha \in \langle S \rangle_M \end{cases}$$

Portanto a equação de Einstein em U/K se decompõe nos espaços de raízes. Logo se a métrica de U/K for Einstein as métricas de U/F e de F/K são também Einstein, a menos de escala, devido a decomposição acima. ■

Agora aplicaremos os resultados acima e as C -fibrações em uma situação especial. Considere $G = SL(n + 1, \mathbb{C})$, $n \geq 3$, a sua forma real compacta $U = SU(n)$. $K = S(U(1) \times \dots \times U(1))$ o seu toro maximal e $F = S(U(n - 1) \times U(1))$ um C -subgrupo. Assim,

$$U/F = \mathbb{C}P^{n-1}$$

$$U/K = \mathbb{F}(n)$$

$$F/K = \mathbb{F}(n - 1)$$

Neste caso, o conjunto das raízes simples de $\mathfrak{su}(n)$ é $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$. Portanto, o conjunto S é dado por $S = \Sigma \setminus \{\alpha_{n-1}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}\}$.

Desse modo, conforme (3.1.6), temos a seguinte C -fibração associada a $\mathbb{F}(n)$:

$$\mathbb{F}(n - 1) \dashrightarrow \mathbb{F}(n) \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}. \tag{3.3}$$

Sobre $\mathbb{C}P^{n-1}$ a única, a menos de escala, métrica de Einstein, $U(n)$ -invariante é a métrica Fubini-Study [62], e sabemos que esta métrica é Kähler-Einstein [40]. Este fato será usado logo a seguir na demonstração da Proposição 3.2.12.

A classificação das métricas de Einstein sobre $\mathbb{F}(n)$ é conhecida apenas para $n = 3, 4$.

Em $\mathbb{F}(3)$ uma classificação das métricas de Einstein invariantes foi obtida por Kimura [34] e por Arvanitoyeorgos[5] de forma independente.

Teorema 3.2.8. [34][5] *O espaço $SU(n)/S(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))$ admite, a menos de escala, precisamente 4 métricas de Einstein invariantes.*

$$\begin{array}{lll}
 (a) \lambda_{12} = n_1 + n_2 & \lambda_{13} = n_1 + 2n_2 + n_3 & \lambda_{23} = n_2 + n_3, \\
 (b) \lambda_{12} = n_1 + n_2 + 2n_3 & \lambda_{13} = n_1 + n_3 & \lambda_{23} = n_2 + n_3, \\
 (c) \lambda_{12} = n_1 + n_2 & \lambda_{13} = n_1 + n_3 & \lambda_{23} = 2n_1 + n_2 + n_3, \\
 (d) \lambda_{12} = n_1 + n_2 & \lambda_{13} = n_1 + n_3 & \lambda_{23} = n_2 + n_3.
 \end{array}$$

As soluções (a)–(c) são Kähler-Einstein e (d) é não-Kähler. Se $n_1 = n_2 = n_3$ então (d) é a métrica normal [57].

A classificação das métricas de Einstein invariantes sobre $\mathbb{F}(4)$ foi obtida por Sakane fazendo uso de bases de Gröbner [52]. Apresentamos abaixo uma classificação em $\mathbb{F}(4)$ utilizando as C -fibrações, a variação canônica e parte do que fizemos até aqui.

Lema 3.2.9. *As únicas métricas de Einstein sobre $\mathbb{F}(4)$ são as métricas Kähler-Einstein, as métricas descritas por Arvanitoyeorgos e a métrica normal (ver Teorema 2.4.1).*

Demonstração: Suponha que $\Lambda = (\lambda_{ij})$ seja uma métrica de Einstein invariante em $\mathbb{F}(4)$.

Pela decomposição (3.2) todas as métricas invariantes de $\mathbb{F}(4)$ pertencem a variação canônica. Pelo Teorema 3.1.1 as métricas de Einstein sobre $\mathbb{F}(4)$ são da forma $\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F$ com $t = 1$ ou $t = c_F/c_B - c_F$ onde Λ_B, Λ_F são métricas de Einstein respectivamente na base e na fibra da submersão Riemanniana (3.3). A única métrica de Einstein $U(4)$ -invariante sobre a base da C -fibração (3.3) é a métrica Fubini-Study [62] que aliás é Kähler-Einstein [40]. Pelo Lema 3.2.5, a métrica Λ será Kähler se, e somente se a métrica Λ_F for Kähler.

Por outro lado se a métrica da fibra $\mathbb{F}(3)$ for a métrica normal-Einstein então a métrica do espaço total $\mathbb{F}(4)$ possuirá dois blocos com cada um três entradas iguais. Um dos blocos é proveniente da métrica normal em $\mathbb{F}(3)$ o outro bloco é oriundo da única métrica de Einstein da base da fibração. Separando as entradas de uma métrica invariante em $\mathbb{F}(4)$ em dois

blocos com 3 entradas cada, teremos exatamente 20 possibilidades para a montagem destes blocos. Resolvendo a equação de Einstein com estas restrições obteremos em cada uma das 20 possibilidades uma das métricas de Arvanitoyeorgos ou a métrica normal. E isso encerra a demonstração. ■

Corolário 3.2.10. *Para cada $k \geq 1$ o espaço $U(4k)/U(k)^4$ admite, a menos de escala, exatamente 17 métricas de Einstein invariantes.*

Demonstração: Pelo Teorema acima a variedade $\mathbb{F}(4)$ admite exatamente 17 métricas de Einstein invariantes: 12 são Kähler, 4 são as métricas de Arvanitoyeorgos (ver Teorema 2.4.1) e a métrica normal. O corolário agora é consequência do Teorema 2.9.2. ■

Lema 3.2.11. *Sobre $\mathbb{F}(5)$ não existe métrica de Einstein invariante $(1, 2)$ -simplética não-Kähler.*

Demonstração: Suponha que em $\mathbb{F}(5)$ exista uma métrica de Einstein invariante $(1, 2)$ -simplética não-Kähler.

Pela Proposição 3.2.7 a métrica invariante Λ_F seria Einstein sobre $\mathbb{F}(4)$, pelo Lema 3.2.3 ela seria $(1, 2)$ -simplética e pelo Lema 3.2.5 ela também seria não-Kähler. O que contradiz o Lema 3.2.9 e a classificação obtida por Sakane [52]. ■

Mais geralmente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.12. *Em $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$, se uma métrica de Einstein é invariante e $(1, 2)$ -simplética, então ela é Kähler.*

Demonstração:

Considere a C -fibrção (3.3), pela Proposição 3.1.4 as fibras são totalmente geodésicas. A constante das métricas de Einstein da fibra c_F são positivas, pois cada fibra é uma variedade flag de um grupo de Lie semi-simples [14]. Todas as métricas invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$ são da forma $\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F$ [58]. Nestas condições, pelo Teorema (3.1.1) uma métrica invariante $\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F$ é Einstein quando Λ_B, Λ_F forem Einstein e $t = 1$ ou $t = c_F/c_B - c_F$.

Observe que a métrica $U(n)$ -invariante de Einstein sobre a base da fibração (3.3) é Kähler [62], o que nos permite aplicar o Lema 3.2.5.

Procederemos por indução. Pelos Lemas (3.2.9) e (3.2.11) podemos iniciar a indução com $n = 6$.

Suponha que, neste caso, exista uma métrica de Einstein invariante Λ que seja $(1, 2)$ -simplética e não-Kähler. Pelo Teorema 3.1.1 pelos Lemas 3.2.3, 3.2.5 e a Proposição 3.2.7 a métrica invariante Λ_F , que é a restrição de Λ à fibra $\mathbb{F}(5)$, seria Einstein, $(1, 2)$ -simplética e não-Kähler o que contradiz o Lema 3.2.11.

Supondo válida a afirmação para $n = k$ temos que $\mathbb{F}(k)$ não admite métrica de Einstein invariante $(1, 2)$ -simplética não-Kähler. Provaremos agora que o Teorema continua válido, para $n = k + 1$. Suponha o contrário, ou seja, suponha que $\mathbb{F}(k + 1)$ admita métrica de Einstein invariante $(1, 2)$ -simplética não-Kähler.

Assim pela Proposição 3.2.7, e os Lemas 3.2.3 e 3.2.5 a métrica invariante Λ_F seria Einstein, $(1, 2)$ -simplética e não-Kähler sobre $\mathbb{F}(k)$. O que contradiz a hipótese indutiva e isso encerra a demonstração. ■

O próximo resultado produz uma classificação das métricas de Einstein na variedade flag clássica.

Teorema 3.2.13. *Uma métrica de Einstein invariante sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$ é Kähler ou pertence a $W_1 \oplus W_3$.*

Demonstração: Pela decomposição 3.2 todas as métricas invariantes de $\mathbb{F}(n)$ pertencem a variação canônica. Pelo Teorema 3.1.1 as métricas de Einstein sobre $\mathbb{F}(n)$ são da forma $\Lambda_t = \Lambda_B + t\Lambda_F$ com $t = 1$ ou $t = c_F/c_B - c_F$ onde Λ_B, Λ_F são métricas de Einstein respectivamente na base e na fibra da submersão Riemanniana 3.3.

Procederemos por indução. Para $n = 4$ este fato é uma conseqüência do Lema 3.2.9. Suponha que a afirmação seja válida para $n = k$, ou seja, sobre $\mathbb{F}(k)$ uma métrica de Einstein é Kähler ou pertence a $W_1 \oplus W_3$.

Considere a fibração $\mathbb{F}(k) \dashrightarrow \mathbb{F}(k + 1) \rightarrow \mathbb{C}P^k$ e a variação canônica. A métrica em $\mathbb{C}P^k$ é Kähler. Se o par invariante (Λ_F, J_F) , na fibração acima, for integrável e Einstein

pelo Lema 3.2.5 a e.q.c.i. J no espaço total será integrável. Sabemos que tal e.q.c.i. é Kähler admissível[54] e por Matsushima [40] para esta e.q.c.i. existe uma única métrica Kähler-Einstein.

Por outro lado se o par invariante (Λ_F, J_F) , na fibração acima, é Einstein e pertence a classe $W_1 \oplus W_3$ considere o fato da única métrica de Einstein $U(k+1)$ -invariante ser Kähler, pelo Lema 3.2.6 e o Teorema 3.1.1 podemos concluir que a estrutura (Λ, J) é Einstein e aniquila o tensor $(N(X, Y), X)_\Lambda$ portanto esta estrutura pertence a $W_1 \oplus W_3$.

■

Suspeitamos que o mesmo seja válido para outras variedades flags maximais. A dificuldade em verificar essa suspeita, reside na falta de exemplos de métricas de Einstein nestes espaços que não estão no caso A_i , e de uma classificação destas métricas sobre variedades flag. Contudo, estamos trabalhando na tentativa de produzir exemplos de métricas de Einstein, especificamente nas variedades flag dos grupos clássicos.

CAPÍTULO 4

Estabilidade

Neste capítulo, definimos o funcional curvatura escalar total, também conhecido por funcional de Einstein- Hilbert[58]. Mostraremos que os pontos críticos deste funcional [13],[49] são métricas de Einstein. Estudaremos assim, o problema de Einstein sob o ponto de vista variacional. Apresentamos também as fórmulas da primeira e da segunda variação e novos resultados de estabilidade. Adotaremos a notação de [9],[11] e [38].

4.1 Funcionais Riemannianos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre funcionais Riemannianos [13],[11] e [27]. Ainda nesta seção estudaremos o espaço dos 2-tensores simétricos sobre M . Começamos com a definição de funcional Riemanniano.

Definição 4.1.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta orientada e \mathcal{M} a variedade das métricas Riemannianas sobre M . Uma aplicação $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita um funcional Riemanniano[11] se:*

$$\psi(\phi^*g) = \psi(g) \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D} \text{ e para toda } g \in \mathcal{M}. \quad (4.1)$$

Na expressão acima \mathcal{D} denota o grupo de difeomorfismos de M .

Em outras palavras se $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$ são métricas Riemannianas, de modo que (M, g_1) é isométrica a (M, g_2) então, $\psi(g_1) = \psi(g_2)$.

No que se segue o conjunto dos 2-tensores simétricos sobre uma variedade Riemanniana M será denotado por $\mathcal{S}^2(M)$.

Definição 4.1.2. *Um funcional Riemanniano ψ diferenciável, possui um gradiente em $g \in \mathcal{M}$ se existir $a \in \mathcal{S}^2(M)$ tal que, para todo $h \in \mathcal{S}^2(M)$,*

$$\psi'_g = \langle a, h \rangle_g$$

Passaremos agora a apresentar algumas propriedades dos funcionais Riemannianos, começamos com a propriedade que retrata a invariância destes funcionais pelo grupo de difeomorfismos de M .

Lema 4.1.3. *Se $\text{grad}\psi_g$ é o gradiente em g de um funcional Riemanniano ψ , então*

$$\delta_g \text{grad}\psi_g = 0.$$

Demonstração:

Sejam X um campo de vetores, e L_X a derivada de Lie[11] correspondente. Considere os difeomorfismos associados a X , $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$. Como ψ é um funcional Riemanniano temos:

$$\psi(\varphi^*(t)g) = \psi(g)$$

Portanto: $\frac{d}{dt}\psi(\varphi^*(t)g) = \frac{d}{dt}\psi(g) = 0$.

Em particular:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{grad}\psi(\varphi^*(0)g) \cdot \varphi'^*(0)g = \\ &= \text{grad}\psi_g \cdot X.g \\ &= \text{grad}\psi_g \cdot L_X g \\ &= \langle \text{grad}\psi_g, L_X g \rangle \\ &= \langle \text{grad}\psi_g, 2\delta_g^* X \rangle \\ &= 2\langle \delta_g \text{grad}\psi_g, X \rangle. \end{aligned}$$

Como X é arbitrário temos o resultado. ■

4.2 O espaço tangente $T_g\mathcal{M}_1$

Passaremos agora a estudar o espaço tangente a variedade das métricas Riemannianas, em uma métrica g fixada. O entendimento deste espaço é fundamental no estudo da natureza dos pontos críticos dos funcionais Riemannianos, uma vez que devemos buscar vetores variacionais neste espaço.

Como \mathcal{M} é um subconjunto aberto de $\mathcal{S}^2(M) = \{2\text{-tensores simétricos sobre } M\}$, temos que $T_g\mathcal{M} = \mathcal{S}^2(M)$. Aqui, e no que se segue, a divergência δ_g é a adjunta formal de δ_g^* [11]. É importante observar que a variedade das métricas com volume unitário \mathcal{M}_1 , não é um subconjunto aberto de $\mathcal{S}^2(M)$. Vamos analisar o espaço tangente a variedade \mathcal{M}_1 em uma métrica Riemanniana g fixa.

Considere $g(t)$ uma variação de classe C^2 da métrica g , isto é,

$$g(t) \in \mathcal{M}_1, \quad \forall t \in (-\varepsilon, +\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \quad g(0) = g \quad \text{e} \quad g'(0) = h. \quad .$$

Conforme a tradição, aqui h será chamado de vetor variacional. Algumas vezes, será chamado de perturbação.

Como $g(t) \in \mathcal{M}_1$, podemos escrever $1 = \langle g(t), g(t) \rangle$. Derivando em $t = 0$ obtemos, $0 = 2 \langle g'(0), g(0) \rangle$ daí,

$$T_g\mathcal{M}_1 = \{h \in \mathcal{S}^2; \langle h, g \rangle = 0\}. \quad (4.2)$$

O conjunto \mathcal{S}^2 admite várias decomposições dentre estas convém destacar.

Lema 4.2.1. ([10]) $\mathcal{S}^2 = \text{Ker}\delta_g \oplus \text{Im}\delta_g^*$.

Demonstração:

Considere $\delta_g : \mathcal{S}^2(M) \rightarrow A^1(M)$ conforme definido em [11]. Sabemos que $\mathcal{S}^2 = \text{Ker}\delta_g \oplus (\text{Ker}\delta_g)^\perp$ mas $\text{Im}\delta_g^* = (\text{Ker}\delta_g)^\perp$. De fato $\forall Z \in \text{Ker}\delta_g \quad W \in \text{Im}\delta_g^*$ temos $\langle Z, W \rangle = \langle Z, \delta_g^*(\alpha) \rangle = \langle \delta_g(Z), \alpha \rangle = 0$.

Provando assim o lema. ■

Como $T_g\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{S}^2$, podemos reescrever (4.2) da seguinte maneira

$$T_g\mathcal{M}_1 = \text{Im}\delta_g^* \oplus (\text{Ker}\delta_g \cap \{h \in \mathcal{S}^2; \langle h, g \rangle = 0\}).$$

O próximo Lema diz que ao considerar perturbações, não devemos tomar o vetor variacional em $\text{Im}\delta_g^*$.

Lema 4.2.2. *Seja ψ um funcional Riemanniano que é diferenciável, pelo menos, até segunda ordem, então para toda $g \in \mathcal{M}$ e para todo $X \in TM$ temos*

$$\psi''(\delta_g^*, \cdot) = 0$$

Demonstração: Ver [11] ou [27]. ■

Com isso basta considerar variações $g(t)$ cujos vetores variacionais h cumpram a seguinte condição:

$$h \in \text{Ker}\delta_g \cap \{h \in \mathcal{S}^2(M); \langle h, g \rangle = 0\} \quad (4.3)$$

4.3 Primeira variação

Considere uma variedade Riemanniana compacta, M o funcional curvatura escalar total é o funcional que associa a cada métrica Riemanniana g sobre M , a integral da curvatura escalar. Ele é também chamado de funcional de Einstein-Hilbert.

$$g \in \mathcal{M} \mapsto T(g) = \int_M S_g d\nu_g \quad (4.4)$$

Portanto o funcional T é uma aplicação,

$$\begin{aligned} T: \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto T(g) = \int_M S_g d\nu_g \end{aligned}$$

O Teorema seguinte, devido a D. Hilbert [32], justifica o interesse pelos pontos críticos deste funcional.

Teorema 4.3.1. *(D. Hilbert [32]) Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta, orientável, então as métricas de Einstein, são precisamente os pontos críticos de T restrito à \mathcal{M}_1 .*

Em geral, é tecnicamente difícil encontrar pontos críticos deste funcional. As dificuldades residem no fato da dimensão da variedade das métricas Riemannianas \mathcal{M} , ser infinita. Chamaremos de \mathcal{M}_1 a variedade das métricas Riemannianas de volume unitário. Designaremos por \mathcal{M}_1^G , o subconjunto de \mathcal{M}_1 formado pelas métricas G - invariantes. O “Princípio da Criticalidade Simétrica” de Palais [49], fornece uma versão do teorema acima em dimensão finita.

Teorema 4.3.2. (R. Palais[49]) *Sejam $M = G/H$ uma variedade Riemanniana homogênea e $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional Riemanniano. Denote por $\Sigma = \{p \in M; g.p = p \quad \forall g \in G\}$. Se $p \in \Sigma$ é um ponto crítico de $\psi|_{\Sigma}$, então p é ponto crítico de ψ .*

Demonstração: Ver [49]. ■

Como conseqüência dos Teoremas acima temos o seguinte,

Teorema 4.3.3. *Uma métrica $g \in \mathcal{M}_1^G$ é uma métrica de Einstein se e somente se g é ponto crítico de $T|_{\mathcal{M}_1^G}$*

Demonstração:

Inicialmente observe que se $g \in \mathcal{M}_1^G$ é uma métrica de Einstein então pelo Teorema de Hilbert 4.3.1, g é ponto crítico de T .

Reciprocamente, se g é ponto crítico de $T|_{\mathcal{M}_1^G}$, então pelo “Princípio da Criticalidade Simétrica” de Palais 4.3.2 g é ponto crítico de T , pois basta tomar no Teorema(4.3.2) $M = \mathcal{M}_1$, $\psi = T$ e $\Sigma = \mathcal{M}_1^G$. ■

Após a discussão acima começaremos o estudo do fenômeno da estabilidade do Funcional de Einstein-Hilbert(4.4).

Começamos obtendo as chamadas equações de Euler-Lagrange do problema.

Considere o Funcional de Einstein-Hilbert(4.4):

$$T(g) = \int_M S_g \nu_g$$

Além disso, considere também uma variação de classe pelo menos C^2 $g(t)$ da métrica Riemanniana g , com $g(0) = g$ e $g'(t)|_{t=0} = h$.

Seguiremos a notação de Berger [9], por esta razão escreveremos ρ para significar o tensor de Ricci.

Mostraremos neste primeiro momento que os pontos críticos de T restrito às métricas de volume unitário são de Einstein. Este fato, além de fornecer uma demonstração para o Teorema(4.3.1) será o ponto de partida para obtermos na próxima seção o índice de um ponto crítico deste funcional.

Considere o produto interno global [9],

$$\langle a, b \rangle = \int_M (a|b) \nu_g \quad (4.5)$$

Considere,

$$\begin{aligned} T(g(t)) &= \int_M S_{g(t)} \nu_{g(t)} \text{ daí,} \\ T'(g(t)) &= \int_M S'_{g(t)} \nu_{g(t)} + \int_M S_{g(t)} \nu'_{g(t)} \\ &= \int_M \Delta \tilde{h} + \delta \delta h - (h|\rho) \nu_{g(t)} \\ &\quad + \int_M S_{g(t)} \frac{1}{2} (h|g) n u_{g(t)} \\ &= \int_M \left(\Delta \tilde{h} + \delta \delta h - (h|\rho) |1 \right) \nu_{g(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_M (h|S_{g(t)} g(t)) \nu_{g(t)} \\ &= \frac{1}{2} \langle h, S_{gt} g t \rangle + \langle \Delta \tilde{h}, 1 \rangle \\ &\quad + \langle \delta \delta h, 1 \rangle - \langle (h|\rho_{g(t)}), 1 \rangle. \end{aligned}$$

Mas pelo Teorema de Green [56], $\langle \Delta \tilde{h}, 1 \rangle = 0$ e pelas restrições ao vetor variacional h (4.3) $\langle \delta \delta h, 1 \rangle = 0$.

Portanto,

$$T'(g(t)) = \left\langle h, \frac{S_{gt}}{2} g t \right\rangle - \langle (h|\rho_{g(t)}), 1 \rangle. \quad (4.6)$$

Logo para $t = 0$,

$$T'(g) \cdot h = \langle h, \frac{S_g}{2} g - \rho_g \rangle.$$

Do exposto acima podemos escrever,

$$\text{grad}T_g = \frac{S_g}{2}g - \rho g. \quad (4.7)$$

O método dos multiplicadores de Lagrange[9], nos diz que g é crítica se, e somente se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{grad}T_g = \lambda g. \quad (4.8)$$

Contraindo os tensores, com relação a g , da igualdade tensorial(4.7) ficamos com

$$\frac{S_g n}{2} - S_g = \lambda n.$$

Portanto,

$$\lambda = \frac{S_g(n-2)}{2n}.$$

Finalmente, substituindo o valor de λ em (4.7), obtemos:

$$\rho = \frac{S_g}{2} - \lambda g = \frac{S_g}{2} - \frac{S(n-2)g}{2n}$$

Logo,

$$\rho = \frac{S_g}{n}g. \quad (4.9)$$

Conforme afirmamos, os pontos críticos do funcional T restrito a variedade das métricas de volume unitário são métricas de Einstein. A equação (4.9) é também conhecida como equação de Euler-Lagrange do funcional de Einstein-Hilbert.

Exemplo 4.3.4. *Em uma variedade tri-dimensional nem toda métrica Riemanniana é de Einstein. Além do mais existem variedades que não admitem nenhuma métrica de Einstein. De fato, neste caso uma métrica é de Einstein se e somente se a curvatura seccional K for constante [35]. Um exemplo de variedade tri-dimensional que não admite métrica de Einstein (invariante ou não) é $M = S^1 \times S^2$.*

Exemplo 4.3.5. *A variedade $G = SL(2, \mathbb{R})$ não admite métrica de Einstein invariante. De fato, neste caso uma métrica de Einstein possui necessariamente curvatura seccional constante. Mas a variedade acima não admite métrica invariante com curvatura constante $K > 0$, pois o teorema de Bonnet-Myers implicaria que M é compacta. Se $K \leq 0$ um teorema de Milnor [42] diz que sob estas hipóteses o grupo de Lie G seria solúvel.*

Exemplo 4.3.6. Mesmo quando M é homogênea, compacta e simplesmente conexa, a existência de uma métrica de Einstein, e portanto de um ponto crítico do funcional de Einstein-Hilbert, mesmo invariante, não está garantida conforme foi mostrado em ([58], ver também [16]).

4.4 Segunda variação

Nesta seção, apresentaremos a fórmula da segunda variação do funcional de Einstein-Hilbert. O objetivo é determinar o índice deste funcional.

Na seção anterior obtivemos as equações de Euler-Lagrange do funcional de Einstein-Hilbert, agora usaremos a equação (4.6) para obter a segunda variação deste funcional.

Teorema 4.4.1. *Se g é uma métrica de Einstein sobre a variedade compacta, orientável M então,*

$$T''(0) = \frac{1}{n} \|d\tilde{h}\|^2 - \frac{S}{n^2} \|\tilde{h}\|^2 + \frac{S}{n} \|h\|^2 - \frac{1}{2} \langle h, \Delta_L h \rangle. \quad (4.10)$$

Na expressão acima o operador

$$\begin{aligned} \Delta_L: S^2(M) &\rightarrow S^2(M) \\ h &\mapsto \Delta_L(h) = \nabla^* \nabla(h) + \mathring{R}(h) \end{aligned}$$

é o Laplaciano de Lichnerowicz [9] e [38],.

$$\nabla^* \nabla(h) = - \sum_{j=1}^n \nabla_{\epsilon_j} \nabla_{\epsilon_j}(h), \quad (4.11)$$

é o Laplaciano da conexão [10].

$$\mathring{R}(h) = \sum_l (\rho_{al} h_{lb} + \rho_{bl} h_{la}) - 2 \sum_{l,p} R_{albp} h^{lm} \quad (4.12)$$

é o operador de curvatura [9]. R é o tensor de curvatura,

$$R_{XY} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} \quad (4.13)$$

e finalmente $\tilde{h} = \text{tr}_g h$.

Demonstração:

Mais uma vez considere o produto interno global (4.5).

Foi visto que

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left\langle h(t), \frac{S(t)}{n}g(t) - \rho(t) \right\rangle \\ &= \int_M \left(h(t) \left| \frac{S(t)}{n}g(t) \right. \right) \nu_{g(t)} \\ &\quad - \int_M (h(t) | \rho(t)) \nu_{g(t)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T''(t) &= \int_M \left(h(t) \left| \frac{S(t)}{n}g(t) \right. \right)' \nu_{g(t)} \\ &\quad + \int_M \left(h(t) \left| \frac{S(t)}{n}g(t) \right. \right) \nu'_{g(t)} \\ &\quad - \int_M (h(t) | \rho(t))' \nu_{g(t)} \\ &\quad - \int_M (h(t) | \rho(t)) \nu'_{g(t)}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned} T''(t) &= \int_M \left\{ \left(h'(t) \left| \frac{S(t)}{n}g(t) \right. \right) + \left(h(t) \left| \frac{S'g}{n} \right. \right) + \left(h(t) \left| \frac{S}{n}g' \right. \right) - 2 \left(h(t) \left| \frac{S(t)}{n}g(t) \right. | h \right) \right\} \nu_{g(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_M \left(h(t) \left| \frac{S(t)}{n}g(t) \right. \right) (h(t) | g(t)) \nu_{g(t)} \\ &\quad - \int_M (h'(t) | \rho(t)) \nu_{g(t)} + (h(t) | \rho'(t)) \nu_{g(t)} \\ &\quad - 2(h(t) | \rho | h(t)) \nu_{g(t)} - \frac{1}{2} \int_M (h(t) | \rho(t)) (h | g) \nu'_{g(t)}. \end{aligned}$$

Podemos simplificar mais a expressão acima, usando essencialmente que g é ponto crítico, e obter:

$$\begin{aligned}
T''(t) &= \int_M \left(h'(t) \left| \frac{S(t)}{n} g(t) \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&+ \int_M \left(h \left| \Delta \tilde{h} \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&+ \int_M \left(h \left| \delta \delta h \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&- \int_M \left(h(t) \left| (h(t) | \rho(t)) g(t) \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&+ \int_M \frac{S(t)}{n} \left(h(t) \left| h(t) \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&- \int_M \left(h'(t) \left| \rho(t) \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&+ \frac{1}{2} \int_M \left(h(t) \left| \Delta h \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&- \frac{1}{2} \int_M \left(h(t) \left| 2\delta^* \delta h \right. \right) \nu_{g(t)} \\
&- \frac{1}{2} \int_M \left(h(t) \left| \text{Hess} \tilde{h} \right. \right) \nu_{g(t)}
\end{aligned}$$

Usando o fato de g ser Einstein, as expressões para as derivadas de $\rho(t) = \rho(g(t))$, $S(t) = S(g(t))$ e $\nu(t) = \nu_{g(t)}$ para $t = 0$ [9], a condição (4.3) e $(\text{Hess})^* = \delta\delta$ [9] ficamos com:

$$\begin{aligned}
T''(0) &= \frac{S}{n} \int_M \left(h'(0) \left| g \right. \right) \nu_g + \int_M \left(h \left| \Delta \tilde{h} \right. \right) \nu_g \\
&- \int_M \left(h \left| \rho \right. \right) \left(h \left| \frac{g}{n} \right. \right) \nu_g + \frac{S}{n} \int_M \left(h \left| h \right. \right) \nu_g \\
&- \int_M \left(h'(0) \left| \rho \right. \right) \nu_g - \frac{1}{2} \int_M \left(h \left| \Delta_L h \right. \right) \nu_g.
\end{aligned}$$

Usando mais uma vez o produto interno global (4.5)

$$\begin{aligned}
T''(0) &= -\frac{1}{2}\langle h, \Delta_L h \rangle + \frac{S}{n}\langle h, h \rangle \\
&+ \frac{1}{n} \int_M \left(h |(\Delta \tilde{h}) \frac{g}{n} \right) \nu_g \\
&- \int_M \left(h | \frac{S}{n} g \right) \left(h | \frac{g}{n} \right) \nu_g.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T''(0) &= -\frac{1}{2}\langle h, \Delta_L h \rangle + \frac{S}{n}\langle h, h \rangle \\
&+ \frac{1}{n} \int_M \left(h |(\Delta \tilde{h}) \frac{g}{n} \right) \nu_g \\
&- \frac{S}{n^2} \|\tilde{h}\|^2.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Mas, pela definição de (\cdot, \cdot) ver [9] e pelo Teorema de Stokes [56] temos,

$$\begin{aligned}
\int_M \left(h |(\Delta \tilde{h}) g \right) \nu_g &= \int_M (\Delta \tilde{h}) \tilde{h} \nu_g \\
&= \int_M (d\tilde{h} | d\tilde{h}) \nu_g \\
&= \|d\tilde{h}\|^2.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Substituindo (4.15) em (4.14), obtemos a demonstração do Teorema.

$$T''(0) = \frac{1}{n} \|d\tilde{h}\|^2 - \frac{S}{n^2} \|\tilde{h}\|^2 + \frac{S}{n} \|h\|^2 - \frac{1}{2} \langle h | \Delta_L h \rangle. \tag{4.16}$$

■

4.5 Índice de uma métrica de Einstein

Apresentaremos nossos resultados sobre estabilidade, das métricas de Einstein invariantes sobre variedades flags. Começamos com a definição de estabilidade de um funcional.

Definição 4.5.1. *Sejam $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe pelo menos C^2 e $p \in M$ um ponto crítico de ϕ . Dizemos que ϕ é estável em p se, e somente se para toda variação $g(t)$ com $g(0) = p$*

$$\left. \frac{d^2 \phi(g(t))}{dt^2} \right|_{t=0} \geq 0. \quad (4.17)$$

Agora apresentamos a definição de perturbação invariante.

Definição 4.5.2. *Uma perturbação invariante de uma métrica Riemanniana g é um 2-tensor simétrico invariante h que satisfaz (4.3).*

Um tensor invariante h sempre satisfaz a condição $\delta_g h = 0$, para toda métrica invariante sobre \mathbb{F}_Θ . Observe que, se h é um 2-tensor invariante sobre uma variedade flag então, para toda métrica invariante g ,

$$\delta_g h(e_\gamma) = \sum_\alpha \nabla_{e_\gamma} h(e_\alpha, e_\alpha) = 0.$$

O espaço das perturbações invariantes de uma métrica invariante g será denotado por \mathcal{I}_g . Aqui estamos cometendo um abuso de notação. Na verdade uma perturbação de uma métrica invariante g é uma família de métricas $g(t)$, sendo cada uma delas de classe pelo menos C^2 e satisfazendo:

$$g(t) \in \mathcal{M}_1 \quad g(0) = g \quad g'|_{t=0} = h$$

Quando nos referirmos à uma perturbação invariante, estaremos nos referindo a toda e qualquer família de métricas de classe C^2 que satisfaça(4.5) e cujo vetor variacional pertença à \mathcal{I}_g .

Com isso, a Definição 4.5.1 fica restrita às perturbações invariantes, o que é natural uma vez que estamos estudando a geometria invariante das variedades flag.

Quando consideramos perturbações invariantes, o índice do Funcional de Einstein-Hilbert depende apenas do sinal da curvatura escalar, ou equivalentemente, do sinal da constante de Einstein.

Este é um dos resultados principais deste capítulo.

Teorema 4.5.3. *Seja g uma métrica de Einstein invariante sobre \mathbb{F}_Θ então para toda perturbação invariante, $T''(0) = \frac{S}{n} \|h\|^2$.*

Demonstração: Seja g uma métrica de Einstein invariante, se h é um 2-tensor simétrico invariante sobre M a fórmula da segunda variação do funcional de Einstein-Hilbert T nos diz que :

$$T''(0) = -\frac{1}{2} \langle \Delta_L h, h \rangle + \frac{S}{n} \|h\|^2 - \frac{S}{n^2} \|\tilde{h}\|^2 + \frac{1}{n} \|d\tilde{h}\|^2.$$

As hipóteses sobre g e h e o fato de $Vol_g(M) = 1$ implicam que:

$$0 = \langle h, g \rangle = \int_M (h, g) d\nu_g = \int_M tr_g h d\nu_g = tr_g h = \tilde{h}. \quad (4.18)$$

Por outro lado a invariância de h , acarreta:

$$(\Delta_L h)_{-\alpha\alpha} = -\nabla_\epsilon \nabla_\epsilon h_{-\alpha\alpha} + \rho_{\alpha\epsilon} h_{-\alpha}^\epsilon + \rho_{-\alpha\epsilon} h_\alpha^\epsilon - 2R_{\alpha\epsilon}{}_{-\alpha\sigma} h^{\epsilon\sigma}$$

Ainda pela invariância de h temos $\nabla_\epsilon h_{-\alpha\alpha} = 0$.

Agora pela invariância do tensor de Ricci ρ e do vetor variacional h temos,

$$\rho_{\alpha\epsilon} = 0, \quad \text{a menos que} \quad \alpha + \epsilon = 0$$

e

$$h_{-\alpha}^\epsilon = 0, \quad \text{a menos que} \quad \alpha = \epsilon.$$

Ou seja, $\rho_{\alpha\epsilon} h_{-\alpha}^\epsilon = 0$, e a mesma conclusão é válida para o outro termo envolvendo o tensor de Ricci.

Com as condições acima, por (4.13) e pela Proposição 1.7.1 temos,

$$R_{\alpha\epsilon\alpha\sigma} = \langle [\nabla_{X_\alpha} X_{-\alpha}, \nabla_{X_\epsilon} X_{-\alpha}], X_\sigma \rangle - \langle \nabla_{[X_\alpha, X_\epsilon]} X_{-\alpha}, X_\sigma \rangle$$

Este termo é sempre nulo, exceto quando

$$\begin{aligned} \epsilon = \alpha \quad e \quad \sigma = -\alpha \\ \text{ou} \\ \epsilon = -\alpha \quad e \quad \sigma = \alpha \end{aligned}$$

Mas, observe que por (4.13) $R_{\alpha\alpha\alpha} = 0$ e $R_{\alpha} = 0$.

As igualdades acima e (4.18) encerram a demonstração. ■

O Teorema acima pode ser enunciado de uma forma um pouco mais geral. Defina o conjunto das deformações infinitesimais de uma métrica de Einstein g como:

$$\varepsilon_g = \{h \in \mathcal{S}^2; E'_g(h) = 0, \delta_g h = 0 \text{ e } \int_M \text{tr}_g h_{\mu\nu} = 0\}.$$

Onde,

$$\begin{aligned} E: \mathcal{M}_1 &\rightarrow \mathcal{S}^2 \\ g &\mapsto E(g) = \rho_g - \frac{1}{n} S(g)g \end{aligned}$$

é chamado de o operador de Einstein[11].

Denotaremos o conjunto das deformações infinitesimais de uma métrica de Einstein g por $\varepsilon(g)$.

M. Berger e D. Ebin [10] provaram o seguinte Teorema:

Teorema 4.5.4. *Um 2-tensor simétrico h é uma deformação infinitesimal da métrica de Einstein g se, e somente se h for solução das seguintes equações:*

$$\Delta_L h = 0, \quad \delta_g h = 0 \quad e \quad \text{tr}_g h = 0. \quad (4.19)$$

Demonstração: Ver [10] ou [11]. ■

Observe que pelo Teorema 4.5.3, pela identidade (4.18) e por (4.3) o conjunto das perturbações invariantes, $\mathcal{I}_g \subset \varepsilon_g$.

Observe que se uma variedade Riemanniana admitir apenas métricas de Einstein invariantes com curvatura escalar não-negativa, em particular, ela admite apenas constante de Einstein não-negativa, a expressão dada pelo Teorema 4.5.3 permite afirmar que todas as métricas de Einstein invariantes são estáveis. É o que acontece com as variedades flag de grupos de Lie semi-simples.

Teorema 4.5.5. *(S. Bochner) Se $M = U/K$ é uma variedade compacta homogênea de um grupo de Lie semi-simples, então toda métrica de Einstein invariante possui curvatura escalar positiva*

Demonstração: Ver [14] Teorema 8. ■

A combinação do Teorema 4.5.5 com o Teorema 4.5.3 permite afirmar que:

Teorema 4.5.6. *Seja $M = U/K$ uma variedade flag então toda métrica de Einstein invariante é estável.*

Demonstração:

Vimos no Teorema 4.5.3 que a estabilidade de uma métrica de Einstein invariante sobre uma variedade flag de um grupo de Lie semi-simples depende apenas do sinal da curvatura escalar. O resultado agora é consequência do Teorema 4.5.5. ■

Referências Bibliográficas

- [1] D.V.Alekseevsky, *Flag Manifolds*, Disponível em <http://www.esi.ac.at> n° 415. Ou (Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. 6 (14) , (1997), pp. 3-35)
- [2] ———, *Homogeneous Einstein metrics*, Differential Geometry and its Applications(Proceedings of Brno Conference), Univ. of Purkine-Czechoslovakia(1987)1–21.
- [3] R. Andreani, J. M. Martínez, M. Salvatierra, F. Yano, *Global Order-value Optimization by means of a multistart harmonic oscillator escaping strategy*, versão preliminar, Universidade Estadual de Campinas(2004).
- [4] A. Arvanitoyeorgos, *Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds*, PhD Thesis, Rochester University, (1991).
- [5] ———, *New Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds*, Trans. AMS, vol.337, (2), 981-995.
- [6] H.Azad, R. Kobayashi e M.N. Qureshi, *Quasi-potentials and Kähler-Einstein metrics on flag manifolds*, Journal of Algebra, 196,(1997)620–629.
- [7] L.Bérard-Bergery, *Sur certain fibrations d'espaces homogenes riemanniens*, Compositio Math.,n°30(1975), 43–61.

- [8] L.Bérard-Bergery e J. P. Bourguignon, *Laplacian and Riemannian submersions with totally geodesic fibres*, Lectures Notes in Mathematics, n°838, (1979), 30–35.
- [9] M. Berger, *Quelques formules de variation pour une structure Riemannienne*, Annales Scientifiques É.N.S. 4^e série, tome 3, n°3(1978), 285–294.
- [10] _____ and D. Ebin, *Some decompositions of the symmetric tensors on a Riemannian manifold*, J. Of Differential Geometry, n°3(1969), 379–392.
- [11] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer Verlag, 1987
- [12] M.Black, *Harmonic map into homogeneous spaces*, Research Notes in Math.255, Pitman, 1991.
- [13] D.Bleecker, *Critical Riemannian Manifolds*, J.Differential Geometry, 14,(1979) 599–608.
- [14] S.Bochner, *Curvature and Betti numbers I*, Annals of Mathematics,49,n°. 2,(1948) 379–390.
- [15] S.Bochner, *Curvature and Betti numbers II*, Annals of Mathematics,50, n°. 1,(1949)77–93.
- [16] C.Böhm and M. Kerr, *Low dimensional homogeneous Einstein manifolds*, A aparecer em Transactions of A.M.S.
- [17] C. Böhm, M. Wang and W. Ziller, *A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds*, Geometric and Functional Analysis 4 Vol.14,(2004)681–733.
- [18] M.Bordemann,M. Forger and H. Romer, *Homogeneous Kähler manifolds:Paving the way towards supersymmetric sigma-models*, Commun. Math. Physics(1986),102,605–647.
- [19] A.Borel, *Kählerian coset spaces of semi-simple Lie Groups*, Proc.Nat. Acad. USA n° 12,(1954), 40, 1147–1151.

- [20] ——— and F.Hirzebruch, *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, Amer. Journal Math. 80,(1958)458–538.
- [21] R.Bott and L.W.Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, Springer Verlag(1982).
- [22] F.E.Burstall and S. Salamon, *Tournaments, flags and harmonic maps*, Math. Ann.277(1987),249-265.
- [23] J.Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian geometry*, North Holand 1975.
- [24] N. Cohen, C. J. C. Negreiros, M. Paredes, S. Pinzón, L. A. B. San Martin, *f-structures on the classical flag manifold which admit (1,2)-symplectic metrics*, Tôhoku Math. J. 57(2) (2005), 262–271.
- [25] J. E. D’Atri and N. K. Nickerson, *geodesic symmetries in spaces with special curvature tensors*, J. Diff. Geometry, n°4,(1969), 467–476.
- [26] J. E. D’Atri and N. K. Nickerson, *Divergence-preserving geodesic symmetry*, J. Diff. Geometry, 9, (1974), 251–262.
- [27] D.Ebin, *The manifold of Riemannian metrics*, Proc. symp. Pure math., 15, (1970), 11–40.
- [28] J. Eells and J. C. Wood, *Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces*, Adv. Math., 49, (1983), 217–263.
- [29] A.Gray and L.M. Hervella, *The Sixteen classes of Almost Hermitian Manifolds and their Linear Invariants*, Ann. Mat.Pura Appl., 123, (1980), 35–58.
- [30] M.A.Guest, *Geometry of maps between Generalized Flag manifolds*, J. Differential Geometry, 25(1987), 223–247
- [31] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic press,(1978).

- [32] D.Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Nachr. Akad. Wiss. Gött.,395–407(1915).
Reimpresso em Math. Ann., 92, (1924), 1–32.
- [33] G.R.Jensen, *The Scalar curvature of Left-Invariant Riemannian metrics*, Indiana University Mathematics Journal, vol. 20, (1971), n°12, 1125–1144
- [34] M. Kimura, *Homogeneous Einstein Metrics on Certain Kähler C-spaces*, Advanced Studies in Pure Mathematics, n°18-I, 1990. Recent Topics in Differential and Analytic Geometry,(1986) 303-320.
- [35] S. Kobayashi and K.Nomizu, *Foundations of differential geometry*,Interscience Publishers, vols1,2, 1969.
- [36] J.L. Koszul, *Sur la forme Hermitienne canonique des espaces homogènes complexes*, Can. Journal of Math., 7, (1955), 562–576.
- [37] C. LeBrun e M.Y.Wang , *Surveys in differential geometry VI:essays on Einstein manifolds*, eds. C. LeBrun, M.Y. Wang, Internatonal press,(1999).
- [38] A. Lichnerowicz, *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*, Publications mathématiques de L'I.H.É.S., tome 10()1961,p.5-56.
- [39] A. Lichnerowicz, *Applications harmoniques et variétés Kählériennes*, Symposia Mathematica, 3, (Bologna), (1970),341–402.
- [40] Y. Matsushima, *Remarks on Kähler-Einstein Manifolds*,Nagoya Math.Journal, 46, (1972), 161–173.
- [41] T. Matsuzawa, *Einstein metrics and fibred Riemannian structures*, Kodai Mathematical Journal 6,(1983), 340–345.
- [42] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. in Mathematics 21, (1976), 293–329.

- [43] X.Mo and Caio J.C. Negreiros, *(1,2)-Symplectic structures on flag manifolds*, Tôhoku Math.J., (2000), 271–282.
- [44] Y. Mutô, *On Einstein metrics*, Journal of Differential geometry, 9, (1974), 521–530.
- [45] Caio J.C. Negreiros and L.A.B. San Martin, *Stability properties of Holomorphic maps on flag manifolds*, Universidade Estadual de Campinas, (2005), versão preliminar.
- [46] Yu G. Nikonorov, *Compact homogeneous Einstein 7-manifolds*, Geometriae Dedicata, 109, (2004), 7–30.
- [47] Yu G. Nikonorov and E.D.Rodionov, *Compact homogeneous Einstein 6-manifolds*, Differential Geometry and its Applications 19, (2003), 369–378.
- [48] B. O’Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13, (1966), 459–469.
- [49] R. Palais, *Critical point theory and the minimax principle*, Proc. symp. Pure math., 15, (1970), 185–212.
- [50] M. Paredes, *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [51] S. Pinzòn, *Variedades bandeira, estruturas-f e mètricas (1,2)-simplèticas*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [52] Y. Sakane, *Homogeneous Einstein metrics on flag manifolds*, Lobatchevskii Journal of Mathematics, vol.4, (1999), 71–87.
- [53] Luiz A.B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, (1999).
- [54] Luiz A.B. San Martin e Caio J.C. Negreiros, *Invariant almost Hermitian structures on Flag manifolds*, Adv. in Math., 178, (2003), n°2, 277–310.

- [55] Rita de Cássia J. Silva , *Estruturas quase Hermitianas invariantes em espaços homogêneos de grupos semi-simples*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
- [56] H. Urakawa, *Calculus of Variations and Harmonic Maps*, Translations of AMS, vol.132, 1990.
- [57] M. Wang and W. Ziller, *On normal homogeneous Einstein metrics*, Ann. Sci. Ecole Norm.Sup., 18, (1985), 563–633.
- [58] M. Wang and W. Ziller, *Existence and Non-Existence of Homogeneous Einstein Metrics*, Invent. math., 84, (1986), 177–194.
- [59] M. Wang e W. Ziller, *On isotropy irreducible Riemannian manifolds*, Acta Mathematica, vol.166, (1991), 223–261.
- [60] D.Wansbrough, *What are flag manifolds and Why are they interesting?*, Disponível no sítio da sociedade Australiana de Matemática.
- [61] E. Weisstein, *Einstein Summation*, www.mathworld.wolfram.com/EinsteinSummation.html
- [62] W. Ziller, *Homogeneous Einsteinmetrics on Spheres and Projective spaces*, Math. Ann., 259, (1982), 351–358.