Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Análise Harmônica na Esfera Unitária d-Dimensional Real

por

Fernanda Moura de Oliveira †

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: **Prof. Dr. Sérgio Antônio Tozoni**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Alexander Kushpel**

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Análise Harmônica na Esfera Unitária d-dimensional Real

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Fernanda Moura de Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de agosto de 2005.

Prof. Dr. Sérgio Antônio Tozoni
Orientador

Prof. Dr. Alexander Kushpel
Co-orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Antônio Tozoni.

Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov.

Prof. Dr. Benjamin Bordin.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Oliveira, Fernanda Moura de

OL4a Análise harmônica na esfera unitária d-dimensional real / Fernanda Moura de Oliveira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientadores : Sergio Antonio Tozoni; Alexander Kushpel.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise harmônica. 2. Funções ortogonais. 3. Funções harmônicas. I. Tozoni, Sergio Antonio. II. Kushpel, Alexander. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Harmonic analysis on the unit d-dimensional real sphere.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Harmonic analysis. 2. Orthogonal functions. 3. Harmonic functions.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Benjamin Bordin (IMECC-UNICAMP)i
Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov (UNESP-Rio Preto)

Data da defesa: 29/08/2005

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de agosto de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Sergio Tozoni

Prof. (a). Dr (a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Dimitar K. Dimitrov

Prof. (a). Dr (a). DIMITAR KOLEV DIMITROV

Benjamin Bordin

Prof. (a). Dr (a). BENJAMIN BORDIN

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força para ultrapassar todos os obstáculos e principalmente por ter colocado em minha vida amigos maravilhosos que sempre me fizeram sorrir, principalmente nos momentos mais difíceis. De um modo especial eu gostaria de agradecer à minha mãe Maria José, ao Ederson e à minha amiga Vânia pelo apoio e confiança e também ao professor Ségio Antônio Tozoni pela credibilidade que depositou em mim, pelo competente trabalho de orientação, pela paciência e ajuda em diversos momentos. Quero agradecer à Capes, pelo apoio financeiro. Finalmente, não podendo deixar de citar, sou totalmente grata a um garotinho chamado Caio, que mesmo pequenino, sempre me deixa repleta de alegria com um simples gesto de carinho.

À minha mãe e ao Ederson

ABSTRACT

The purpose of this work is to develop a text in Portuguese about Harmonic Analysis on the d-dimensional real sphere S^d and to apply the results of the text to study a multiplier theorem. In the first two chapters it is made a study about harmonic functions in a domain of the euclidian space $\mathbb{R}^{d+1}$, spherics harmonics, representations of $SO(d+1)$, zonal harmonics, ultraspherics polynomials and about the Laplace Beltrami operator on the sphere. Finally, in the third chapter it is studied a recent multiplier theorem which gives sufficient conditions for a multiplier operator be bounded from $L^p(S^d)$ to $L^q(S^d)$, for $1 \leq p, q \leq \infty$. As application of this theorem are obtained upper bounds for n-widths of Kolmogorov type of Sobolev classes $\overline{W}_p^{\gamma}$ in the spaces $L^q(S^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\gamma > 0$.

RESUMO

O objetivo da dissertação é desenvolver um texto em português sobre Análise Harmônica na esfera d-dimensional real e aplicar os resultados deste texto no estudo de um teorema de multiplicadores. Nos dois primeiros capítulos é realizado um estudo sobre funções harmônicas em um domínio do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{d+1}$, harmônicos esféricos, representações de $SO(d+1)$, harmônicos zonais, polinômios ultraesféricos e sobre o operador de Laplace Beltrami para a esfera. Finalmente, no terceiro capítulo é estudado um teorema de multiplicadores recente, o qual fornece condições suficientes para que um operador multiplicador seja limitado de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d)$, para quaisquer p e q, $1 \leq p, q \leq \infty$. Como aplicação deste teorema são obtidas estimativas superiores para n-larguras de Kolmogorov de classes de Sobolev $\overline{W}_p^\gamma$ nos espaços $L^q(S^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\gamma > 0$.

CONTEÚDO

Introdução

Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver um texto em português e com bastante detalhes sobre Análise Harmônica na esfera d-dimensional real S^d. Este objetivo é realizado nos Capítulos 1 e 2.

Quando alguém necessita fazer um estudo sobre Análise Harmônica na esfera S^d, são necessários, quase sempre, vários livros e artigos em pelo menos uma língua estrangeira e que em geral não fornecem os detalhes que necessitamos. Acreditamos que nestes dois capítulos estão colocados os pré-requisitos para quem pretenda iniciar pesquisas em Análise Harmônica ou em Teoria de Aproximação na esfera S^d.

Outro objetivo deste trabalho é o estudo de um teorema de multiplicadores recentemente demonstrado por B. Bordin, A. K. Kushpel, J. Levesley e S. A. Tozoni em [2], o que é feito no Capítulo 3. Teoremas de multiplicadores são resultados importantíssimos quando pretendemos trabalhar com certas classes de espaços de funções como a dos espaços de Sobolev. Damos uma aplicação na obtenção de estimativas assintóticas superiores para n-larguras de classes de Sobolev.

Iniciamos o Capítulo 1 fornecendo alguns resultados preliminares, especialmente sobre grupos topológicos, medidas de Haar e sobre o grupo $SO(d+1)$. Em seguida fazemos um estudo sobre funções harmônicas num domínio de $\mathbb{R}^{d+1}$. O principal objetivo deste capítulo é o estudo de harmônicos esféricos, o qual é realizado na terceira seção. Na última seção demonstramos o resultado que diz que um operador linear sobre $L^2(S^d)$ que comuta com as rotações próprias de $\mathbb{R}^{d+1}$, é um operador multiplicador. As referências para a primeira seção são [4] e [5], e para as demais seções são [3], [9], [11], [12] e [14].

No Capítulo 2 estudamos os harmônicos esféricos e os polinômios ultraesféricos. O resultado mais importante é aquele que fornece uma representação dos harmônicos zonais em termos dos polinômios ultraesféricos. Os resultados deste capítulo são fundamentais para o terceiro e último capítulo. Na última seção estudamos o operador de Laplace Beltrami para a esfera S^d, demonstramos que os harmônicos esféricos de grau k são os autovetores deste operador associados ao autovalor $-k(d+k-1)$ e demonstramos a fórmula de Funk-Hecke. Referências para os resultados deste capítulo são [3], [9], [11], [12], [13] e [14].

O terceiro capítulo é o principal deste trabalho. Nele é estudado um teorema de multiplicadores obtido em [2], que fornece condições suficientes para que um operador multiplicador seja limitado de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d)$, para $1 \leq p, q \leq \infty$. Para demonstrar este resultado são obtidas estimativas na norma L^p para as somas de Cesàro associadas aos polinômios ultraesféricos. Na demonstração destas estimativas integrais são usadas estimativas pontuais para os módulos dos polinômios de Jacobi e em seguida para as somas de Cesàro associadas aos polinômios de Jacobi, as quais também são demonstradas. As estimativas pontuais para os polinômios de Jacobi podem ser encontradas em [13] e para as somas de Cesàro em [1]. Estas estimativas pontuais para os polinômios ultraesféricos podem ser encontradas também no artigo de Kogbetliantz [6], onde a demonstração é feita fazendo uso de representação integral para somas de Cesàro. Outros teoremas de multiplicadores para a esfera S^d onde são dadas condições suficientes para a limitação de um operador de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d)$, $1 < p, q < \infty$, podem ser encontrados em [1] e [3].

Na última seção do Capítulo 3 definimos os espaços de Sobolev $W_p^\gamma(S^d)$, para $\gamma > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Aplicando o teorema de multiplicadores demonstramos estimativas assintóticas superiores para n-larguras das bolas unitárias de $W_p^\gamma(S^d)$ nos espaços $L^q(S^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Este resultado foi obtido em [2]. Outras referências para esta seção são [7] e [10].

É válido ressaltar que nesta dissertação a numeração das equações é específica para uma demonstração somente.

CAPÍTULO 1

Harmônicos esféricos

Na primeira seção somente fixamos algumas notações e apresentamos algumas definições e resultados preliminares, os quais serão utlizados no decorrer do trabalho. As referências para esta seção são [4], [5] e [14].

Na segunda seção fazemos um estudo sobre funções harmônicas e posteriormente algumas aplicações relacionadas ao núcleo de Poisson.

A seção seguinte é a mais importante do capítulo. Ela trata dos harmônicos esféricos e os resultados desta seção são de grande importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. As referências para as seções 1.2 e 1.3 são [11], [12], [14], [9] e [3].

Finalmente, na última seção aplicamos a teoria de harmônicos esféricos no estudo de representações de $SO(d+1)$. O resultado principal desta seção diz que se um operador linear sobre $L^2(S^d)$ comuta com as rotações próprias de $\mathbb{R}^{d+1}$, então ele é um multiplicador.

1.1 Preliminares

Notação 1.1.1. *Seja X um espaço topológico. Denotaremos por $C(X)$ o conjunto formado por todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ e por $\mathfrak{B}(X)$ a σ-álgebra de Borel de X.*

Notação 1.1.2. *Seja D um aberto de $\mathbb{R}^{d+1}$ e seja m um inteiro positivo. Denotaremos por $C^m(D)$ o conjunto formado por todas as funções de classe C^m sobre D, isto é, por todas as* *funções $f : D \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}},$$

contínuas para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{d+1} \leq m$. Denotamos $C^{\infty}(D) = \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} C^m(D)$.

Denotaremos por Δ o operador laplaciano sobre $C^2(D)$ e por $\bigtriangledown$ o operador gradiente sobre $C^1(D)$, isto é,

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{d+1}^2}(x),$$

$$\bigtriangledown f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}(x) \right).$$

Uma função $f \in C^2(D)$ é chamada harmônica se $\Delta f(x) = 0$ para todo $x \in D$.

Definição 1.1.3. *Seja μ uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}(X)$ de X, onde X é um espaço localmente compacto de Hausdorff.*
i) μ é chamada regular exteriomente sobre $E \in \mathfrak{B}(X)$ se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ E \subset U, \ U \ \textit{aberto}\}.$$

ii) μ é chamada regular interiormente sobre $E \in \mathfrak{B}(X)$ se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E, \ K \ \textit{compacto}\}.$$

iii) Se μ for regular exteriomente e interiomente sobre todo $E \in \mathfrak{B}(X)$, dizemos que μ é regular.
iv) Se μ for finita sobre compactos, regular exteriomente sobre todo boreliano e regular interiormente sobre todo aberto, dizemos que μ é uma medida de Radon.

Definição 1.1.4. *Um grupo topológico é um grupo G que também é um espaço topológico e cujas operações de grupo*

$$(u, v) \in G \times G \longmapsto u \cdot v \in G$$

e

$$u \in G \longmapsto u^{-1} \in G$$

são contínuas.

Definição 1.1.5. *Uma medida de Haar à esquerda sobre o grupo topológico localmente compacto G é uma medida de Radon μ sobre G tal que $\mu(uE) = \mu(E)$ para todo $u \in G$ e $E \in \mathfrak{B}(G)$, onde $uE = \{ua : a \in E\}$.*

Teorema 1.1.6. *([4], p. 315) Sobre todo grupo localmente compacto existe uma medida de Haar à esquerda, que é única a menos de constantes multiplicativas positivas.*

Observação 1.1.7. *Podemos definir medida de Haar à direita da mesma forma que definimos medida de Haar à esquerda e nesse caso também vale o teorema precedente. Observamos que se G é um grupo topológico compacto e μ é uma medida de Haar à esquerda sobre G, então μ também é uma medida de Haar à direita sobre G e para todo $g \in G$ e $f \in C(G)$ temos*

$$\int_G f(u)d\mu(u) = \int_G f(u^{-1})d\mu(u) = \int_G f(gu)d\mu(u) = \int_G f(ug)d\mu(u).$$

Notação 1.1.8. *Seja d um inteiro positivo. Se $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, escrevemos $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, onde $\langle x, y \rangle$ é o produto escalar usual entre x e y em $\mathbb{R}^{d+1}$.*

Se $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $r \geq 0$, denotaremos as bolas aberta e fechada de centro em x e raio r em $\mathbb{R}^{d+1}$ respectivamente por $B(x, r)$ e $B[x, r]$.

Denotaremos por S^d a esfera unitária $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| = 1\}$ de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Notação 1.1.9. *Denotaremos por $SO(d+1)$ o grupo formado por todas as rotações próprias em $\mathbb{R}^{d+1}$. $SO(d+1)$ pode ser identificado como o conjunto formado por todas as matrizes ortogonais de ordem $(d+1) \times (d+1)$ e com determinante igual a 1, munido da operação usual de multiplicação de matrizes.*

Consideramos $SO(d+1)$ munido da topologia induzida de $\mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1}$, com a qual $SO(d+1)$ é um grupo topológico compacto. Denotaremos a medida de Haar normalizada sobre $SO(d+1)$ por du.

O subgrupo de $SO(d+1)$ que deixa invariante o pólo norte $e = (0, \ldots, 0, 1) \in S^d$ é formado por todas as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & M & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $M \in SO(d)$. Com esta identificação podemos considerar $SO(d)$ como um subgrupo de $SO(d+1)$.

Observação 1.1.10. *Seja* $\varphi : SO(d+1) \to S^d$ *a aplicação definida por* $\varphi(u) = ue$*. É fácil verificar que* φ *é contínua e sobrejetora. Consideramos* $SO(d+1)/SO(d)$ *munido da topologia quociente e definimos* $\overline{\varphi} : SO(d+1)/SO(d) \to S^d$ *por* $\overline{\varphi}\,(u\,SO(d)) = ue$, $u \in SO(d+1)$*. Verificamos que* $\overline{\varphi}$ *está bem definida, é bijetora e usando* φ *obtemos que* $\overline{\varphi}$ *é contínua. Como* $\overline{\varphi}$ *é uma aplicação fechada, segue que* $\overline{\varphi}$ *é um homeomorfismo. Portanto podemos concluir que os espaços topológicos* $SO(d+1)/SO(d)$ *e* S^d *são homeomorfos.*

Observação 1.1.11. *O grupo* $SO(d+1)$ *age sobre a esfera* S^d *através da ação*

$$\begin{gathered} SO(d+1) \times S^d \to S^d. \\ (u,x) \to ux \end{gathered}$$

Mais ainda, $SO(d+1)$ *age sobre* S^d *transitivamente, no sentido que, dados* $x, y \in S^d$*, existe* $u \in SO(d+1)$ *tal que* $ux = y$*.*

Notação 1.1.12. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida, ou seja,* X *é um conjunto não-vazio,* Σ *é uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* X *e* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *é uma medida. Se* $1 \leq p < \infty$*, denotaremos por* $L^p(X)$ *o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis* $f : X \to \mathbb{C}$*, onde*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Denotaremos por $L^\infty(X)$ o espaço vetorial formado por todas as funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{C}$ para as quais existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ *q.s.*. Se $f \in L^\infty(X)$ escrevemos

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C : |f(x)| \leq C, \ q.t. \ x \in X \}.$$

Se $f, g \in L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $f = g$ *q.s.*, f e g serão considerados um mesmo elemento de $L^p(X)$. Com esta identificação $L^p(X)$ é um espaço de Banach com norma $\|.\|_p$.

Observação 1.1.13. *Podemos usar coordenadas esféricas para descrever pontos de* S^d*. Se* $\mathcal{D} = [0, \pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]$ *definimos* $\xi_d : \mathcal{D} \to S^d$ *por* $\xi_d(\theta_1, \ldots, \theta_d) = (x_1, \ldots, x_{d+1})$ *onde*

$$x_1 = \cos\theta_1; \quad x_i = \cos\theta_i \prod_{j=1}^{i-1} \operatorname{sen}\theta_j, \quad 2 \leq i \leq d; \quad x_{d+1} = \prod_{j=1}^{d} \operatorname{sen}\theta_j.$$

Consideremos S^d *com a medida de Lebesgue normalizada que denotaremos por* σ*. Se* $G \in \mathfrak{B}(\mathcal{D})$*, então temos que*

$$\sigma\left(\xi_d(G)\right) = \frac{1}{\omega_d} \int_G \operatorname{sen}^{d-1}\theta_1 \cdots \operatorname{sen}\theta_{d-1} d\theta_1 \ldots d\theta_d,$$

onde ω_d é a área de S^d. Se $f \in L^1(S^d)$ então

$$\int_{S^d} f(x)d\sigma(x) = \frac{1}{\omega_d}\int_{\mathcal{D}} f(\xi_d(\theta))\operatorname{sen}^{d-1}\theta_1 \cdots \operatorname{sen}\theta_{d-1}d\theta_1 \dots d\theta_d.$$

Proposição 1.1.14. *A medida de Lebesgue σ sobre S^d é invariante por rotações, isto é, $\sigma(u\,\mathrm{A}) = \sigma(A)$ para todo $u \in SO(d+1)$ e $A \in \mathfrak{B}(S^d)$. Se $f \in L^1(S^d)$ e $u \in SO(d+1)$ então*

$$\int_{S^d} f(u^{-1}y)d\sigma(y) = \int_{S^d} f(y)d\sigma(y).$$

Teorema 1.1.15. *Seja $f \in L^1(S^d)$ e seja $\widetilde{f}$ a função definida em $SO(d+1)$ por $\widetilde{f}(u) = f(ue)$. Então $\widetilde{f} \in L^1\left(SO(d+1)\right)$ e*

$$\int_{S^d} f(y)d\sigma(y) = \int_{SO(d+1)} \widetilde{f}(u)du.$$

Demonstração. Segue como consequência da invariância da medida de Lebesgue por rotações que

$$\int_{S^d} f(y)d\sigma(y) = \int_{S^d} f(uy)d\sigma(y), \quad u \in SO(d+1).$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima com respeito a "u" e aplicando o Teorema de Fubini, obtemos que

$$\int_{S^d} f(y)d\sigma(y) = \int_{SO(d+1)}\left(\int_{S^d} f(uy)d\sigma(y)\right)du = \int_{S^d}\left(\int_{SO(d+1)} f(uy)du\right)d\sigma(y).$$

Para cada $y \in S^d$, seja $u_y \in SO(d+1)$ tal que $u_y(y) = e$. Assim, usando a invariância da medida de Haar du obtemos

$$\int_{SO(d+1)} f(uy)du = \int_{SO(d+1)} f(uu_y y)du = \int_{SO(d+1)} f(ue)du.$$

Logo

$$\int_{S^d} f(y)d\sigma\,(y) = \int_{S^d}\left(\int_{SO(d+1)} f(ue)du\right)d\sigma(y) = \int_{SO(d+1)} \widetilde{f}(u)du.$$

Definição 1.1.16. *Sejam $f, g \in L^1(G)$. Definimos o produto de convolução $f * g$ por*

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(xy^{-1})d\mu(y),$$

onde G é um grupo compacto e μ é a medida de Haar normalizada.

Definição 1.1.17. *Seja $K(t)$ uma função mensurável definida sobre $[-1,1]$ e seja $\overline{K}(x) = K(\langle x, e\rangle)$, $x \in S^d$. Se $\overline{K}, f \in L^1(S^d)$, definimos a convolução $K * f$ por*

$$K * f(x) = \int_{S^d} K(\langle x, y\rangle) f(y) d\sigma(y).$$

Observação 1.1.18. *Consideremos uma função mensurável $K(t)$ definida sobre $[-1,1]$ e seja $f \in L^1(S^d)$. Sejam $\widetilde{K}(u) = K(\langle ue, e\rangle)$, $\widetilde{f}(u) = f(ue)$, onde $u \in SO(d+1)$. Se $\widetilde{K} \in L^1(SO(d+1))$, $x \in S^d$ e $u \in SO(d+1)$ com $ue = x$, então pela Observação 1.1.7 e pelo Teorema 1.1.15,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{K} * \widetilde{f}(u) &= \int_{SO(d+1)} \widetilde{K}(v)\widetilde{f}(uv^{-1})dv = \int_{SO(d+1)} \widetilde{K}(z^{-1}u)\widetilde{f}(z)dz \\
&= \int_{SO(d+1)} K(\langle z^{-1}x, e\rangle)f(ze)dz = \int_{SO(d+1)} K(\langle x, ze\rangle)f(ze)dz \\
&= \int_{S^d} K(\langle x, y\rangle)f(y)d\sigma(y) = K * f(x).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.19. *A integral de Poisson sobre a esfera S^d pode ser vista como um produto de convolução. Seja*

$$P_r(t) = \frac{1}{\omega_d}\frac{1-r^2}{(1-2rt+r^2)^{(d+1)/2}}, \quad 0 \le r < 1, \ -1 \le t \le 1.$$

A integral de Poisson de $f \in L^1(S^d)$ é definida por

$$u_f(r,x) = P_r * f(x) = \int_{S^d} P_r(\langle x, y\rangle)f(y)d\sigma(y).$$

Teorema 1.1.20. *(Desigualdade de Young, [12], p. 31) Seja $K(t)$ uma função mensurável definida sobre $[-1,1]$, $\overline{K}(x) = K(\langle x, e\rangle)$ e sejam $1 \le r, p, q \le \infty$ tais que $1-1/r = 1/p - 1/q$. Se $\overline{K} \in L^r(S^d)$ e $f \in L^p(S^d)$, então $K * f(x)$ está definida para quase todo $x \in S^d$, $K * f \in L^q(S^d)$ e*

$$\|K * f\|_q \le \left\|\overline{K}\right\|_r \|f\|_p.$$

Teorema 1.1.21. *(Fórmula de Green, [8], p. 538) Sejam $u, v \in C^2(\overline{U})$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e limitado. Então*

$$\int_U (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\right) dS$$

onde $\overrightarrow{n}$ é o vetor normal unitário exterior à U, $\partial v/\partial \overrightarrow{n}$ é a derivada direcional de v na direção de $\overrightarrow{n}$ e dS é o elemento de área sobre ∂U.

Teorema 1.1.22. *(Teorema de Representação de Riesz, [4], p. 166) Seja $(E, \langle\langle ., . \rangle\rangle)$ um espaço de Hilbert. Se f é um funcional linear contínuo de E, então existe um único $y \in E$ tal que $f(x) = \langle\langle x, y \rangle\rangle$ para todo $x \in E$.*

Lema 1.1.23. *([4], p. 74) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ e sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$; $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Então*

$$\int_{r_1 \leq |x| \leq r_2} f(x)dx = \int_{r_1}^{r_2} \int_{S^d} f(rt)r^d d\sigma(t)dr.$$

Teorema 1.1.24. *(Regra de Leibniz, [8], p. 143) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida, D um aberto de $\mathbb{R}^{d+1}$ e seja $f : X \times D \to \mathbb{C}$ uma função tal que $x \longmapsto f(x,t)$ é integrável para qualquer $t \in D$. Seja $F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x)$. Suponhamos que $\partial f/\partial t_j(x,t)$ existe para todo $(x,t) \in X \times D$ e existe $g \in L^1(X)$ tal que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t) \right| \leq g(x), \quad (x,t) \in X \times D.$$

Então existe $\partial F/\partial t_j(t)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)d\mu(x), \quad t \in D.$$

1.2 Funções Harmônicas

Definição 1.2.1. *Seja u uma função definida num domínio D de $\mathbb{R}^{d+1}$ (um aberto e conexo de $\mathbb{R}^{d+1}$). Se $x \in D$, $r > 0$, $S(x,r) = \left\{x + rt : t \in S^d\right\} \subset D$ e $t \to u(x+rt)$ é integrável sobre S^d, definimos o "valor médio de u sobre a esfera $S(x,r)$" por*

$$\mathcal{M}_{x,u}(r) = \int_{S^d} u(x+rt)d\sigma(t).$$

Teorema 1.2.2. *(Teorema do Valor Médio para Funções Harmônicas) Se u é harmônica num domínio D de $\mathbb{R}^{d+1}$, $x \in D$, $r_0 > 0$ e a bola $B[x, r_0]$ está contida em D, então $u(x) = \mathcal{M}_{x,u}(r)$ para $0 < r \leq r_0$.*

Demonstração. Se $h \in \mathbb{R}^{d+1}$, denotemos por τ_h o operador de translação por h, isto é, $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Podemos verificar facilmente que o laplaciano comuta com a translação, isto é, $(\tau_h \circ \Delta) f = (\Delta \circ \tau_h) f$, e assim segue que se f é harmônica, então $\tau_h f$ também é harmônica.

Suponhamos que u seja harmônica no domínio D e que $B[x,r_0]\subset D$. Tomamos $v=\tau_{-x}u$, $0<r<r_0$ e temos

$$\mathcal{M}_{x,u}(r)=\int_{S^d}u(x+rt)d\sigma(t)=\int_{S^d}\tau_{-x}u(rt)d\sigma(t)=\int_{S^d}v(rt)d\sigma(t)=\mathcal{M}_{0,v}(r).$$

Portanto, é suficiente demonstrar o teorema para o caso $x=0$.

Seja $v(x)=|x|^{-(d-1)}$, $d>1$. Temos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}v(x)=-(d-1)\,|x|^{-(d+1)}+(d-1)(d+1)x_j^2\,|x|^{-(d+3)}.$$

Logo $\Delta v=0$ e assim v é harmônica. Aplicando a Fórmula de Green (Teorema 1.1.21) à função u e à função constante igual a 1 em $B[0,r]$ obtemos

$$0=\int_{B(0,r)}(1\Delta u-u\Delta 1)dx=\int_{S(0,r)}\left(1\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}-u\frac{\partial 1}{\partial\overrightarrow{n}}\right)d\sigma_r=\int_{S(0,r)}\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}d\sigma_r, \tag{1}$$

onde σ_r é a medida de Lebesgue sobre a esfera $S(0,r)$ e $\partial u/\partial\overrightarrow{n}$ é a derivada direcional de u na direção do vetor normal unitário exterior à $B[0,r]$.

Sejam $0<\varepsilon<r\leq r_0$ e seja A a região de $\mathbb{R}^{d+1}$ dada por $A=\left\{x\in\mathbb{R}^{d+1}:\varepsilon\leq|x|\leq r\right\}$. Como u e $v(x)=|x|^{-(d-1)}$ são harmônicas, segue pela Fórmula de Green que

$$0=\int_A(u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\int_{\partial A}\left(u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}\right)dS, \tag{2}$$

onde $\overrightarrow{n}$ é o vetor normal unitário exterior a A e dS é o elemento de área sobre ∂A. Temos que $\partial A=S_r\cup S_\varepsilon$, $S_t=S(0,t)$. Como

$$\nabla v(x)=-(d-1)\,|x|^{-(d+1)}\,x,$$

então, se $x\in S_r$ e $\overrightarrow{n}=x/|x|$ temos

$$\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}(x)=\left\langle\nabla v(x),\frac{x}{|x|}\right\rangle=-(d-1)\,|x|^{-d},$$

e se $x\in S_\varepsilon$ e $\overrightarrow{n}=-x/|x|$ temos

$$\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}(x)=\left\langle\nabla v(x),-\frac{x}{|x|}\right\rangle=(d-1)\,|x|^{-d}.$$

Como v é constante sobre S_r e S_ε, segue por (1) que

$$0=\int_{S_r}v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}d\sigma_r=\int_{S_\varepsilon}v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}d\sigma_\varepsilon,$$

sendo σ_t a medida de Lebesgue sobre S_t. Temos então por (2) que

$$\begin{aligned}0 &= \int_{S_r} -(d-1)\,|x|^{-d}\,ud\sigma_r + \int_{S_\varepsilon} (d-1)\,|x|^{-d}\,ud\sigma_\varepsilon - \int_{S_r} v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}d\sigma_r - \int_{S_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}d\sigma_\varepsilon \\ &= -(d-1)r^{-d}\int_{S_r} ud\sigma_r + (d-1)\varepsilon^{-d}\int_{S_\varepsilon} ud\sigma_\varepsilon\end{aligned}$$

e portanto

$$r^{-d}\int_{S_r} ud\sigma_r = \varepsilon^{-d}\int_{S_\varepsilon} ud\sigma_\varepsilon. \tag{3}$$

Tomando $r = 1$ e $u = 1$ obtemos $\sigma_\varepsilon(S_\varepsilon) = \varepsilon^d$. Como

$$\int_{S^d} f(rx)d\sigma(x) = r^{-d}\int_{S_r} f(x)d\sigma_r(x),$$

segue por (3) que

$$\mathcal{M}_{0,u}(r) = \int_{S^d} u(rt)d\sigma(t) = r^{-d}\int_{S_r} u(x)d\sigma_r(x) = \varepsilon^{-d}\int_{S_\varepsilon} u(x)d\sigma_\varepsilon(x). \tag{4}$$

Agora, como u é contínua em 0, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|u(x) - u(0)| < \delta$ *se* $|x| \leq \varepsilon$. Logo, por (4)

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_{0,u}(r) - u(0)| &= \left|\frac{1}{\varepsilon^d}\int_{S_\varepsilon} u(x)d\sigma_\varepsilon(x) - \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{S_\varepsilon} u(0)d\sigma_\varepsilon(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{S_\varepsilon} |u(x) - u(0)|\,d\sigma_\varepsilon(x) < \frac{1}{\varepsilon^d}\delta\sigma_\varepsilon(S_\varepsilon) = \delta.\end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é verdadeira para δ arbitrário, obtemos que $\mathcal{M}_{0,u}(r) = u(0)$.

Lema 1.2.3. *Seja $u \in C^2(D)$, onde D é um domínio de $\mathbb{R}^{d+1}$ e suponhamos que $\mathcal{M}_{x,u}(r) = u(x)$ para todo $x \in D$ e $r > 0$ tal que $B[x, r] \subset D$. Então u é harmônica em D.*

Demonstração. Fixemos $x \in D$ e para cada $r > 0$ suficientemente pequeno seja $\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}_{x,u}(r)$. Como u é de classe C^2, segue pela Regra de Leibniz (Teorema 1.1.24) que a função $\mathcal{M}''(r) = \partial^2\mathcal{M}/\partial r^2(r)$ está bem definida e é contínua para $r > 0$.

Consideremos a função $g : S^d \times [0, r_0] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t, r) = u(x + rt) = u(x_1 + rt_1, \ldots, x_{d+1} + rt_{d+1}).$$

Temos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t, r) = \sum_{i,j=1}^{d+1} t_i t_j u_{ij}(x + rt)$$

onde u_{ij} são as derivadas parciais de segunda ordem de u. Como u é de classe C^2 temos que $\partial^2 g/\partial r^2$ é contínua e

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t,r)\right| \leq C, \quad (t,r) \in S^d \times [0, r_0]\,.$$

Como $\partial^2 g/\partial r^2$ é contínua em $r = 0$, então para todo $t \in S^d$ temos

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t,r) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t,0) = \sum_{i,j=1}^{d+1} t_i t_j u_{ij}(x)$$

Logo, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}''_{x,u}(0) &= \lim_{r\to 0}\mathcal{M}''(r) = \lim_{r\to 0}\int_{S^d}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t,r)d\sigma(t) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d+1}\left(\int_{S^d} t_i t_j d\sigma(t)\right) u_{ij}(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Temos que se $i \neq j$

$$\begin{aligned} \int_{S^d} t_i t_j d\sigma(t) &= \int_{\{t: t_i t_j > 0\}} t_i t_j d\sigma(t) + \int_{\{t: t_i t_j < 0\}} t_i t_j d\sigma(t) \\ &= \int_{\{t: t_i t_j > 0\}} t_i t_j d\sigma(t) - \int_{\{t: t_i t_j > 0\}} t_i t_j d\sigma(t) = 0 \end{aligned}$$

e assim por (1) temos que

$$\mathcal{M}''_{x,u}(0) = \sum_{j=1}^{d+1}\left(\int_{S^d} t_j^2 d\sigma(t)\right) u_{jj}(x). \tag{2}$$

Sejam agora e_j, $1 \leq j \leq d+1$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^{d+1}$. Se $i < j$, escolhemos $u \in SO(d+1)$ tal que $u(e_j) = e_i$, e assim, tomando $f(t) = t_i^2$ e aplicando a Proposição 1.1.14

$$\int_{S^d} t_i^2 d\sigma(t) = \int_{S^d} f(t) d\sigma(t) = \int_{S^d} f(ut) d\sigma(t) = \int_{S^d} t_j^2 d\sigma(t)$$

e como

$$1 = \int_{S^d} |t|^2\, d\sigma(t) = \sum_{j=1}^{d+1}\int_{S^d} t_j^2 d\sigma(t)$$

segue por (2) que

$$\mathcal{M}''_{x,u}(0) = \frac{1}{d+1}\sum_{j=1}^{d+1} u_{jj}(x) = \frac{1}{d+1}\Delta u(x).$$

Suponhamos agora que $\mathcal{M}_{x,u}(r) = u(x)$ para todo $0 < r < r_0$. Então $\mathcal{M}''_{x,u}(0) = 0$ e assim segue pela identidade acima que $\Delta u = 0$, isto é, u é harmônica.

Teorema 1.2.4. *(Lema de Urysohn, [4], p. 237) Se $K \subset \mathbb{R}^d$ é compacto e $U \subset \mathbb{R}^d$ é aberto e $K \subset U$, então existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ com suporte compacto tal que $0 \le f \le 1$, $f = 1$ sobre K e $supp(f) \subset U$.*

Teorema 1.2.5. *Seja u uma função contínua num domínio D de $\mathbb{R}^{d+1}$ e suponhamos que verifique a propriedade do valor médio, isto é, $\mathcal{M}_{x,u}(r) = u(x)$ para todo $x \in D$ e $r > 0$ tal que $B[x, r] \subset D$. Então u é harmônica e tem derivadas parciais de todas as ordens em D.*

Demonstração. Como o problema é local, podemos restringir u a uma bola fechada contida em D. Suponhamos então que D seja uma bola aberta $B(x_0, r_0)$ e que u seja contínua sobre $\overline{D} = B[x_0, r_0]$.

Inicialmente vamos considerar $x_0 = 0$ e $r_0 = 1$. Assim $D = B(0,1)$ e u está definida em D. Tomamos $U = (-1,1)$ e $K = [0,1/2]$. Pelo Lema de Urysohn existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le f(t) \le 1$ para $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 1$ sobre K e $f(t) = 0$ para $t \notin U$. Considerando $a = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(|x|)\, d\sigma(x)$, $\Phi(t) = f(t)/a$ e definindo $\varphi(x) = \Phi(|x|)$ temos que $\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$, $0 \le \varphi(x) \le 1/a$ para $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\varphi(x) = 1/a$ se $x \in B[0,1/2]$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(0,1)$ e $\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x)dx = 1$.

Para cada $\varepsilon > 0$, tomamos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-(d+1)}\varphi(x/\varepsilon)$. Temos que $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$. De fato

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{1}{\varepsilon^{d+1}}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(y)dy = 1.$$

Estendemos u para todo $\mathbb{R}^{d+1}$ definindo $u(x) = 0$ para $x \notin \overline{D}$. Definimos $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy$ e tomamos $g(x,y) = u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)$; $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$. Temos que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g(x,y) = u(y)\varepsilon^{-|\alpha|-(d+1)}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$. Assim, como $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, $\varphi(x) = 0$ para $x \notin D$ e u é contínua em $\overline{D}$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g(x,y)\right| \le C_\varepsilon \chi_{\overline{D}}(y).$$

Pela Regra de Leibniz (Teorema 1.1.24)

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g(x,y)dy$$

e portanto podemos concluir que u_ε é de classe C^∞.

Fixemos $x \in D$. Usando o Lema 1.1.23 e a hipótese que $\mathcal{M}_{x,u}(r) = u(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(z)u(x-z)dz \\
&= \int_0^\varepsilon \int_{S^d} \varphi_\varepsilon(rt)u(x-rt)r^d d\sigma(t)dr \\
&= \int_0^\varepsilon \Phi_\varepsilon(r)r^d \left(\int_{S^d} u(x-rt)d\sigma(t) \right) dr \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \Phi_\varepsilon(r)r^d dr \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \int_{S^d} \Phi_\varepsilon(r)d\sigma(t)r^d dr \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \int_{S^d} \varphi_\varepsilon(rt)r^d d\sigma(t)dr \\
&= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x)dx = u(x).
\end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que u é de classe C^∞. O fato de u ser harmônica resulta diretamente do Lema 1.2.3.

Faremos agora a análise do caso geral. Suponhamos que $u(x)$ seja contínua e verifique a propriedade do valor médio em $B[x_0, r_0]$. Tomamos $u_0(y) = u(r_0 y + x_0)$, $y \in B[0,1]$ e temos que $u(x)=u_0\left((x-x_0)/r_0\right)$, $x \in B[x_0, r_0]$. Então u_0 é contínua em $B[0,1]$ e verifica a propriedade do valor médio, pois

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{y,u_0}(r) &= \int_{S^d} u_0(y+rt)d\sigma(t) \\
&= \int_{S^d} u((r_0 y + x_0) + r r_0 t)d\sigma(t) \\
&= \mathcal{M}_{r_0 y + x_0, u}(r r_0) \\
&= u(r_0 y + x_0) = u_0(y).
\end{aligned}$$

Assim, pela primeira parte, podemos concluir que u_0 é harmônica e possui derivadas parciais de todas as ordens em $B(0,1)$. Como $u(x) = u_0((x-x_0)/r_0)$ e $\Delta u(x) = \left(\Delta u_0((x-x_0)/r_0)\right)/r_0^2$, obtemos o resultado desejado para u.

Definição 1.2.6. *O núcleo de Poisson é definido por*

$$P_x(y) = \frac{1-|x|^2}{|x-y|^{d+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^{d+1}, \ |x| < 1 \ e \ y \in S^d.$$

Observação 1.2.7. *Se $P_r(t)$ é o núcleo de Poisson do Exemplo 1.1.19, então para $0 \leq r < 1$ e $x, y \in S^d$ temos que*

$$P_{rx}(y) = \frac{1-r^2}{|rx-y|^{d+1}} = \omega_d P_r\left(\langle x, y\rangle\right).$$

Teorema 1.2.8. *Temos que:*

(*a*) $P_x(y) \geq 0$ *para* $y \in S^d$ *e* $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, $|x| < 1$.

(*b*) $\displaystyle\int_{S^d} P_x(y)d\sigma(y) = 1$ *para* $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, $|x| < 1$.

(*c*) $\displaystyle\int_{|x-y|>\delta} P_{rx}(y)d\sigma(y)$ *converge uniformemente para* 0 *para cada* $\delta > 0$, *quando* $r \to 1$.

Demonstração. O ítem (a) é trivial. Passemos então à demontração de (b). Fazendo algumas contas podemos verificar que $P_x(y)$ é uma função harmônica na variável x, $|x| < 1$, para cada $y \in S^d$. Segue então pelo Teorema 1.2.2 que

$$\begin{aligned}1 = P_0(y) = \mathcal{M}_{0,P.(y)}(r) &= \int_{S^d} P_{rt}(y)d\sigma(t) = \int_{S^d} \frac{1-r^2}{|rx-y|^{d+1}}d\sigma(x)\\ &= \int_{S^d} \frac{1-r^2}{|ry-x|^{d+1}}d\sigma(x) = \int_{S^d} P_{ry}(x)d\sigma(x) = \int_{S^d} P_x(y)d\sigma(y).\end{aligned}$$

e portanto concluímos a demonstração de (b).

Demonstremos agora o ítem (c). Sejam $x, y \in S^d$ e $r > 0$. Temos que $|rx-y|^2 = r^2 + 1 - 2r\langle x, y\rangle$ e assim $|x-y| > \delta$ implica $\delta^2 < |x-y|^2 = 2(1-\langle x, y\rangle)$, que implica $-\langle x, y\rangle > \delta^2/2 - 1$. Então se $|x-y| > \delta$ temos

$$|rx-y|^2 > r^2 + 1 + 2r\left(\frac{\delta^2}{2} - 1\right).$$

Se $\sqrt{2} \leq \delta \leq 2$, então para todo $r > 0$, temos que

$$|rx-y|^2 \geq 1 + r^2 \geq 1 \geq \frac{\delta^2}{4}.$$

Seja agora $0 < \delta < \sqrt{2}$ e consideremos a função $h(r) = |rx-y|^2$ para $0 \leq r < 1$ onde $x, y \in S^d$ estão fixos e satisfazem $|x-y| > \delta$. Temos que $h'(r) = 0$ se, e somente se, $\langle x, y\rangle = r$. Como $h''(r) = 2 > 0$, segue que $h(r)$ tem um mínimo em $r = \langle x, y\rangle$ e assim

$$h(r) \geq h\left(\langle x, y\rangle\right) = 1 - \langle x, y\rangle^2 > \frac{\delta^2}{2} > \frac{\delta^2}{4}.$$

Então para todo $\delta > 0$ e para todo $0 \leq r < 1$ temos que $|x-y| > \delta$ implica em $|rx-y| > \delta/2$. Portanto, se $|x-y| > \delta$ segue que

$$P_{rx}(y) = \frac{1-r^2}{|rx-y|^{d+1}} < \left(\frac{2}{\delta}\right)^{d+1}(1-r^2)$$

e logo

$$\int_{|x-y|>\delta} P_{rx}(y)d\sigma(y) < \left(\frac{2}{\delta}\right)^{d+1}(1-r^2)\sigma(A) < \left(\frac{2}{\delta}\right)^{d+1}(1-r^2),$$

onde $A = \left\{y \in S^d : |x-y| > \delta\right\} \subset S^d$. Então, fazendo r tender a 1, obtemos o resultado desejado.

Teorema 1.2.9. *Seja f uma função contínua sobre S^d. Então a função definida por*

$$u(x) = \int_{S^d} f(y)P_x(y)d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^{d+1}, \ |x| < 1$$

e

$$u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{d+1}, \ |x| = 1,$$

é harmônica para $|x| < 1$ e contínua para $|x| \leq 1$.

Demonstração. Observando que a função $P_x(y)$ é harmônica na variável x, segue pelo Teorema 1.2.2 que esta verifica a propriedade da média, isto é,

$$P_x(y) = \mathcal{M}_{x,P_\cdot(y)}(r) = \int_{S^d} P_{x+rt}(y)d\sigma(t)$$

para todo $y \in S^d$ e para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1 - |x|$. Então aplicando o Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{x,u}(r) &= \int_{S^d} u(x+rt)d\sigma(t) = \int_{S^d}\left(\int_{Sd} f(y)P_{x+rt}(y)d\sigma(y)\right)d\sigma(t)\\ &= \int_{S^d} f(y)\left(\int_{Sd} P_{x+rt}(y)d\sigma(t)\right)d\sigma(y) = \int_{S^d} f(y)P_x(y)d\sigma(y) = u(x),\end{aligned}$$

isto é, u verifica a propriedade da média.

Seja $0 < r_0 < 1$. Como a função $(x,y) \longmapsto P_x(y)$ é contínua no compacto $B\,[0,r_0] \times S^d$, então ela é uniformemente contínua. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|P_x(y) - P_z(t)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_1} \quad \text{se} \quad |(x,y)-(z,t)| < \delta.$$

Então, se $|x-z|<\delta$ temos que

$$|u(x)-u(z)| \leq \int_{S^d} |P_x(y)-P_z(y)|\,|f(y)|\,d\sigma(y) \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_1}\int_{S^d}|f(y)|\,d\sigma(y)=\varepsilon.$$

Portanto u é contínua em $B(0,1)$ e assim segue pelo Teorema 1.2.5 que u é harmônica em $B(0,1)$.

Vamos mostrar agora que u é contínua na fronteira S^d. Seja $x' \in S^d$, $0 \leq r < 1$, $x = rx'$ e $\varepsilon > 0$ dado. Segue por (a) e (b) do Teorema 1.2.8 que para todo $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |u(x)-u(x')| &\leq \int_{S^d} |f(y)-f(x')|\,|P_x(y)|\,d\sigma(y) &(1)\\ &= \int_{|y-x'|>\delta} |f(y)-f(x')|\,P_x(y)d\sigma(y) + \int_{|y-x'|\leq\delta} |f(y)-f(x')|\,P_x(y)d\sigma(y). \end{aligned}$$

Como f é uniformemente contínua, existe $\delta' > 0$ tal que

$$|f(y)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se} \quad |y-t| \leq \delta'$$

e assim por 1.2.8(b)

$$\int_{|y-x'|\leq\delta'} |f(y)-f(x')|\,P_x(y)d\sigma(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{S^d} P_x(y)d\sigma(y) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Por outro lado, segue pelo Teorema 1.2.8(c) que existe $\delta'' > 0$ tal que se $|x-x'| = 1-r < \delta''$, então

$$\int_{|y-x'|>\delta'} P_{rx'}(y)d\sigma(y) < \frac{\varepsilon}{4\,\|f\|_\infty}.$$

Portanto se $|x-x'| < \delta''$ temos que

$$\int_{|y-x'|>\delta'} |f(y)-f(x')|\,P_x(y)d\sigma(y) \leq 2\,\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\,\|f\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Logo, se x é tal que $|x-x'| < \delta''$, segue por (1), (2) e (3) que $|u(x)-u(x')| \leq \varepsilon$.

Seja $x_0 \in S^d$ e $x = rx'$ tal que $|x-x'| < \delta''$ e $|x'-x_0| < \delta'$. Então tomando $\delta = \min\{\delta'', \delta'/2\}$, temos que $|x-x_0| < \delta$ implica que $|x-x'| \leq |x-x_0| < \delta''$ e $|x'-x_0| < \delta'$. Portanto

$$|u(x)-u(x_0)| \leq |u(x)-u(x')| + |u(x')-u(x_0)| \leq \varepsilon + |f(x')-f(x_0)| < 2\varepsilon$$

e logo podemos concluir que u é contínua em $B[0,1]$.

Teorema 1.2.10. *(Princípio do Máximo para Funções Harmônicas) Seja u uma função harmônica real definida num domínio D de $\mathbb{R}^{d+1}$ que satisfaz $A = \sup_{x\in D} u(x) < \infty$. Então u é constante ou $u(x) < A$ para todo $x \in D$.*

Demonstração. Suponhamos que $u(x_0) = A$ para algum $x_0 \in D$ e seja $r_0 > 0$ tal que $B[x_0, r_0] \subset D$. Como u é harmônica em D e $B[x_0, r_0] \subset D$, segue pelo Teorema 1.2.2 que para todo $0 < r \leq r_0$

$$A = u(x_0) = \mathcal{M}_{x_0,u}(r) = \int_{S^d} u(x_0 + rt)d\sigma(t).$$

Fixemos $0 < r \leq r_0$ e suponhamos que existe $t_0 \in S^d$ tal que $u(x_0 + rt_0) < A$. Tomando $\varepsilon = (A - u(x_0 + rt_0))/2$, segue pela continuidade de u que existe $\delta > 0$ tal que $|u(x_0 + rt) - u(x_0 + rt_0)| < \varepsilon$ se $|t - t_0| < \delta$. Logo $u(x_0 + rt) < \varepsilon + u(x_0 + rt_0) = A - \varepsilon$ se $|t - t_0| < \delta$ e assim

$$\begin{aligned} A = \mathcal{M}_{x_0,u}(r) &= \int_{|t-t_0|\geq\delta} u(x_0 + rt)d\sigma(t) + \int_{|t-t_0|<\delta} u(x_0 + rt)d\sigma(t) \\ &\leq \int_{|t-t_0|\geq\delta} Ad\sigma(t) + \int_{|t-t_0|<\delta} (A-\varepsilon)d\sigma(t) = A - \varepsilon\sigma\left(\left\{t \in S^d : |t - t_0| < \delta\right\}\right) < A, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo devemos ter $u(z) = A$ para qualquer $z \in B[x_0, r_0]$. Isto mostra que $B = \{x \in D : u(x) = A\}$ é um aberto em D. Por outro lado, como u é contínua, segue que B também é fechado em D e sabendo que D é conexo e não vazio, devemos ter $u(x) = A$ para todo $x \in D$. Portanto, concluímos que $u(x) < A$ ou $u(x) = A$ para todo $x \in D$.

Observação 1.2.11. *Aplicando o teorema anterior à função $-u$ obtemos o "Princípio do Mínimo para Funções Harmônicas".*

Corolário 1.2.12. *Seja u uma função real e harmônica num domínio limitado D de $\mathbb{R}^{d+1}$, que é contínua em $\overline{D}$. Então, se u não for constante, o mínimo e o máximo de u são assumidos somente na fronteira de D.*

Demonstração. Pelo fato de u ser uma função contínua em $\overline{D}$ (fechado e limitado), segue que u admite máximo e mínimo em $\overline{D}$, isto é, existem $x_0, x_1 \in \overline{D}$ tal que

$$u(x_0) = \sup_{x\in\overline{D}} u(x) \quad \text{e} \quad u(x_1) = \inf_{x\in\overline{D}} u(x)$$

Sendo u uma função não constante, segue pelo Teorema 1.2.10 e pela Observação 1.2.11 que $u(x) < u(x_0)$ e $u(x) > u(x_1)$ para todo $x \in D$. Portanto concluímos que o mínimo e o máximo de u são assumidos somente na fronteira de D, isto é, x_0 e $x_1 \in \partial D$.

Corolário 1.2.13. *Seja D um domínio limitado de $\mathbb{R}^{d+1}$ e sejam u_1 e u_2 duas funções harmônicas em D e contínuas em $\overline{D}$. Se $u_1 = u_2$ sobre ∂D, então $u_1 = u_2$ sobre D.*

Demonstração. Seja $u = u_1 - u_2$. Então u é harmônica no domínio limitado D de $\mathbb{R}^{d+1}$ e contínua em $\overline{D}$. Pelo Corolário 1.2.12, o máximo e o mínimo de u ocorrem na fronteira ∂D. Como $u = 0$ sobre ∂D, concluímos que $u = 0$ sobre D.

Observação 1.2.14. *A unicidade da função harmônica u do problema de Dirichlet para o interior da esfera unitária S^d (Teorema 1.2.9) segue como consequência do Corolário 1.2.13.*

1.3 Harmônicos esféricos

Definição 1.3.1. *Uma função $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C}$ é chamada homogênea de grau k, $k \in \mathbb{Z}$, se $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.*

Notação 1.3.2. *Denotaremos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os polinômios definidos sobre $\mathbb{R}^{d+1}$ e por $\mathcal{P}_k$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ formado pelos polinômios que são homogêneos de grau k.*

Teorema 1.3.3. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}$ e*

$$d_k = \dim \mathcal{P}_k = \left(\begin{array}{c} d+k \\ k \end{array} \right).$$

Demonstração. Seja $h(t) = (1-t)^{-1}$, $|t| < 1$. Temos que $h^{(k)}(t) = k!(1-t)^{-(k+1)}$ e assim para $|t| < 1$ temos

$$(1-t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k = 1 + t + t^2 + \cdots + t^k + \cdots$$

Portanto segue que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{d+1} (1 - x_j t)^{-1} &= \prod_{j=1}^{d+1} (1 + x_j t + x_j^2 t^2 + \cdots + x_j^k t^k + \cdots) \qquad (1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \right) t^k \end{aligned}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{d+1}$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}$.
Seja agora $g(t) = (1-t)^{-d-1}$, $|t| < 1$. Então

$$g^{(k)}(t) = \frac{(d+k)!(1-t)^{-(d+k+1)}}{d!}$$

e assim, para $|t| < 1$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{d+k}{k} t^k. \tag{2}$$

De (1) e (2) obtemos para $x = (1, \dots, 1)$ que

$$\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha = \binom{d+k}{k}.$$

Podemos então concluir que a dimensão de $\mathcal{P}_k$ é o número de monômios x^α com $|\alpha| = k$, que é igual ao número de termos da soma $\sum\limits_{|\alpha|=k} x^\alpha$, isto é

$$\dim \mathcal{P}_k = \binom{d+k}{k}.$$

Notação 1.3.4. *Seja $p(x) \in \mathcal{P}_k$ dado por*

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha.$$

Denotaremos por $p(D)$ o operador diferencial associado a $p(x)$ definido por

$$p(D) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}.$$

Definição 1.3.5. *Se $p, q \in \mathcal{P}_k$ definimos*

$$[p, q] = p(D)\overline{q}.$$

Teorema 1.3.6. *A aplicação $[\ ,\ ] : \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_k \to \mathbb{C}$ é um produto interno em $\mathcal{P}_k$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{d+1}$ tal que $|\alpha| = |\beta| = k$ e sejam $\widetilde{p}(x) = x^\alpha$, $\widetilde{q}(x) = x^\beta$. Se $\alpha = \beta$ então

$$[\widetilde{p}, \widetilde{q}] = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(x^\beta) = \alpha_1! \cdots \alpha_{d+1}! = \alpha! = \beta!.$$

Se $\alpha \neq \beta$ então existem $1 \leq i, j \leq d+1$ tal que $\alpha_i > \beta_i$ e $\beta_j > \alpha_j$. Então

$$\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \left(x_i^{\beta_i} \right) = \frac{\partial^{\beta_j}}{\partial x_j^{\beta_j}} \left(x_j^{\alpha_j} \right) = 0$$

e assim
$$[\widetilde{p},\widetilde{q}] = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}(x^{\beta}) = 0 = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}(x^{\alpha}) = [\widetilde{q},\widetilde{p}]\,.$$
Agora sejam
$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad q(x) = \sum_{|\beta|=k} b_\beta x^\beta.$$
Segue então por linearidade que
$$[p,q] = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! a_\alpha \overline{b_\alpha}$$
e portanto $[\ ,\ ]$ é um produto interno em $\mathcal{P}_k$ pois:

i) $[p,q]$ é um número complexo;

ii) $[p,p] = \sum_{|\alpha|=k} \alpha!\,|a_\alpha|^2 \geq 0$;

iii) $[p,p] = 0$ se e somente se $p = 0$;

iv) $[p,q] = \overline{[q,p]}$;

v) $[\lambda p + q, r] = \lambda\,[p,r] + [q,r]$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p,q,r \in \mathcal{P}_k$.

Notação 1.3.7. *Seja Δ o operador laplaciano em $\mathbb{R}^{d+1}$ e seja $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{A}_k$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_k$ formado pelos polinômios harmônicos e homogêneos de grau k, isto é,*
$$\mathcal{A}_k = \{p \in \mathcal{P}_k : \Delta p = 0\}\,.$$

Teorema 1.3.8. *Seja $p \in \mathcal{P}_k$ e seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $2l \leq k \leq 2l+1$. Então existem $l+1$ polinômios $p_0,\ldots,p_l$, com $p_j \in \mathcal{A}_{k-2j}$, $j = 0,\ldots,l$ e tal que*
$$p(x) = p_0(x) + |x|^2 p_1(x) + \cdots + |x|^{2l} p_l(x).$$

Demonstração. Se $p \in \mathcal{P}_k$ então $\Delta p \in \mathcal{P}_{k-2}$. Assim Δ é uma aplicação linear de $\mathcal{P}_k$ em $\mathcal{P}_{k-2}$. Vamos demontrar por passos.

1° Passo) Demonstraremos que $[\Delta p, q] = \left[p, |x|^2 q\right]$ para $p \in \mathcal{P}_k$, $q \in \mathcal{P}_{k-2}$.

Sejam $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^{d+1}$ com $|\alpha| = k$ e $|\beta| = k-2$ e sejam $\widetilde{p}(x) = x^\alpha$, $\widetilde{q}(x) = x^\beta$. Temos que
$$\Delta\widetilde{p} = \sum_{j=1}^{d+1} (\alpha_j - 1)\alpha_j x_1^{\alpha_1}\cdots x_j^{\alpha_{j-2}}\cdots x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}.$$

Portanto
$$[\Delta\widetilde{p},\widetilde{q}] = (\alpha_j - 1)\alpha_j \beta!$$

se existe $1 \leq j \leq d+1$ tal que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 2, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{d+1}) = \beta$ e $[\Delta\widetilde{p}, \widetilde{q}] = 0$ caso contrário. Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{p}, |x|^2 \widetilde{q}\right] &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}} (x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2) x_1^{\beta_1} \cdots x_{d+1}^{\beta_{d+1}} \\
&= \sum_{j=1}^{d+1} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_{d+1}^{\alpha_{d+1}}} x_1^{\beta_1} \cdots x_j^{\beta_j + 2} \cdots x_{d+1}^{\beta_{d+1}} \\
&= \beta_1! \cdots \beta_{j-1}! (\beta_j + 2)! \beta_{j+1}! \cdots \beta_{d+1}! \\
&= (\beta_j + 1)(\beta_j + 2)\beta!
\end{aligned}$$

se existe $1 \leq j \leq d+1$ tal que $(\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_j + 2, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_{d+1}) = \alpha$, e $\left[p, |x|^2 q\right] = 0$ caso contrário. Logo podemos concluir que

$$[\Delta\widetilde{p}, \widetilde{q}] = \left[\widetilde{p}, |x|^2 \widetilde{q}\right].$$

Sejam agora

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad q(x) = \sum_{|\beta|=k-2} b_\beta x^\beta.$$

Então

$$\begin{aligned}
[\Delta p, q] &= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k-2} a_\alpha \overline{b_\beta} \left[\Delta(x^\alpha), x^\beta\right] \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k-2} a_\alpha \overline{b_\beta} \left[x^\alpha, |x|^2 x^\beta\right] \\
&= \left[p, |x|^2 q\right].
\end{aligned}$$

2° Passo) Demonstraremos que Δ é sobrejetora.

Suponhamos que Δ não seja sobrejetora. Então existe $q \neq 0$, $q \in \mathcal{P}_{k-2}$ ortogonal à imagem $\mathrm{Im}(\Delta)$. Tomamos $p(x) = |x|^2 q(x)$ e temos que

$$0 = [\Delta p, q] = \left[p, |x|^2 q\right] = [p, p]$$

implicando assim que $p = 0$ e consequentemente $q = 0$, o que contradiz a hipótese de que $q \neq 0$.

3° Passo) Demonstremos que $\mathcal{P}_j = \mathcal{A}_j \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{j-2}$, $2 \leq j \leq k$.

Seja $r(x) = |x|^2 q(x)$, $q \in \mathcal{P}_{j-2}$. Se $p \in \mathcal{P}_j$ temos que

$$[p, r] = \left[p, |x|^2 q\right] = [\Delta p, q]$$

e portanto $0 = [p, r]$ para todo $q \in \mathcal{P}_{j-2}$ se, e somente se, $0 = [\Delta p, q]$ para todo $q \in \mathcal{P}_{j-2}$. Logo $0 = [p, r]$ se, e somente se, $p \in \mathcal{A}_j$ e assim $\mathcal{A}_j$ é o complemento ortogonal de $|x|^2 \mathcal{P}_{j-2}$ em $\mathcal{P}_j$.

4° Passo) Conclusão.

Seja $p \in \mathcal{P}_k$. Segue pelo 3° Passo que

$$p(x) = p_0(x) + |x|^2 q_0(x), \quad p_0 \in \mathcal{A}_k,\ q_0 \in \mathcal{P}_{k-2}.$$

Aplicando novamente o 3° Passo obtemos

$$q_0(x) = p_1(x) + |x|^2 q_1(x), \quad p_1 \in \mathcal{A}_{k-2},\ q_1 \in \mathcal{P}_{k-4}$$

e assim

$$p(x) = p_0(x) + |x|^2 p_1(x) + |x|^4 q_1(x).$$

Então o resultado segue por indução, aplicando o 3° Passo para $j = k-4, \ldots, k-2(l-1)$, $2l \leq k \leq 2l+1$.

Definição 1.3.9. *Um harmônico esférico de grau k é a restrição à esfera S^d de um elemento de $\mathcal{A}_k$. Denotaremos por $\mathcal{H}_k$ o conjunto dos harmônicos esféricos de grau k.*

Teorema 1.3.10. *Temos que* $\dim \mathcal{H}_0 = 1$, $\dim \mathcal{H}_1 = d+1$ *e*

$$\dim \mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d+k-2 \\ k-2 \end{pmatrix} = a_k, \quad k \geq 2.$$

Demonstração. Considere a aplicação $\Psi : \mathcal{A}_k \to \mathcal{H}_k$ dada por $\Psi(p) = p_{|S_d}$. Temos que $\Psi(p) = 0$ se, e somente se, $p(x) = |x|^k p(x/|x|) = 0$ para todo $x \neq 0$. Como $p(0) = 0$, segue que $\Psi(p) = 0$ implica $p = 0$ e assim Ψ é um isomorfismo do espaço vetorial $\mathcal{A}_k$ sobre o espaço vetorial $\mathcal{H}_k$. Vimos no 3^o Passo da demonstração do Teorema 1.3.8 que $\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{k-2}$ e assim obtemos que $\dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{A}_k + \dim \mathcal{P}_{k-2}$. Aplicando o Teorema 1.3.3 obtemos que

$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{A}_k = \dim \mathcal{P}_k - \dim \mathcal{P}_{k-2} = d_k - d_{k-2}.$$

Corolário 1.3.11. *A restrição à esfera S^d de qualquer polinômio de $(d+1)$ variáveis é uma soma finita de harmônicos esféricos.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ com $|\alpha| = k$. Então $p(x) = x^\alpha \in \mathcal{P}_k$ e assim, pelo Teorema 1.3.8 existe $l \in \mathbb{N}$, $2l \leq k \leq 2l+1$ e existem $p_j \in \mathcal{A}_{k-2j}$, $0 \leq j \leq l$, tal que $p(x) = p_0(x) + |x|^2 p_1(x) + \cdots + |x|^{2l} p_l(x)$. Então

$$p_{|S_d} = p_{0|S_d} + p_{1|S_d} + \cdots + p_{l|S_d},$$

isto é, $p_{|S_d}$ é uma soma finita de harmônicos esféricos.

Como todo polinômio é uma combinação linear de monômios, segue que a restrição de qualquer polinômio à esfera S^d é uma soma finita de harmônicos esféricos.

Teorema 1.3.12. *(O Teorema de Aproximação de Weierstrass, [4], p.135) Seja X um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{d+1}$. Então toda função real e contínua definida sobre X pode ser aproximada uniformemente por polinômios restritos a X.*

Corolário 1.3.13. *Toda função contínua sobre S^d pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares finitas de harmônicos esféricos.*

Demonstração. Consequência imediata do Teorema de Weierstrass e do Corolário 1.3.11 que diz que a restrição à esfera S^d de qualquer polinômio de $(d+1)$ variáveis é uma combinação linear de harmônicos esféricos.

Corolário 1.3.14. *O espaço vetorial gerado pela união $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ é denso em $L^p(S^d)$, $1 \le p < \infty$.*

Demonstração. Como $C(S^d)$ é denso em $L^p(S^d)$ (ver [4], p. 210), o resultado segue pelo Corolário 1.3.13.

Definição 1.3.15. *Sejam $f, g \in L^2(S^d)$. Denotaremos por (f,g) o produto interno usual de f por g em $L^2(S^d)$, isto é,*

$$(f,g) = \int_{S^d} f(x)\overline{g(x)}d\sigma(x).$$

Observação 1.3.16. *Vimos na demonstração do Teorema 1.3.3 que $\left\{x^\alpha : x \in \mathbb{R}^{d+1}, |\alpha| = k\right\}$ é uma base para $\mathcal{P}_k$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$. Também vimos na demonstração do Teorema 1.3.8 que a decomposição em soma direta $\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus \mathcal{P}_{k-2}, k \ge 2$, é verdadeira quando consideramos $\mathcal{P}_k$ e $\mathcal{A}_k$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$. Sendo assim, podemos concluir que $\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{A}_k$ independe se estamos considerando $\mathcal{H}_k$ como espaço vetorial real ou complexo. Como consequência, poderemos, sempre que for conveniente, supor que a base ortonormal $\left\{Y_j^{(k)} : 1 \le j \le a_k\right\}$ de $\mathcal{H}_k$ que está sendo considerada, é formada somente por funções reais.*

Teorema 1.3.17. *Para $k, l \in \mathbb{N}$, $k \ne l$, temos $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ em relação ao produto interno $(\ ,\ )$.*

Demonstração. Sejam $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ e $Y^{(l)} \in \mathcal{H}_l$ com $l \neq k$. Se $k \neq 0$ e $l \neq 0$, tomamos $u(0) = v(0) = 0$ e para $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, $x \neq 0$, $r = |x|$, $x' = x/|x|$ tomamos

$$u(x) = u(rx') = r^k Y^{(k)}(x'), \qquad v(x) = v(rx') = r^l Y^{(l)}(x').$$

Se $k = 0$, tomamos $u(x) = Y^{(0)}(e) = c$. Seja $D = B[0,1]$, $\partial D = S^d$. Se $a \in S^d$ e $\overrightarrow{n}$ é o vetor normal unitário exterior a ∂D, então $\overrightarrow{n} = a$ e assim

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{u(ta+a)-u(a)}{t} = \left(\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^k - 1}{t}\right) Y^{(k)}(a) = kY^{(k)}(a).$$

Da mesma forma $\partial v/\partial \overrightarrow{n}(a) = lY^{(l)}(a)$. Como $u \in \mathcal{A}_k$ e $v \in \mathcal{A}_l$ temos que $\Delta u = \Delta v = 0$. Então, pela Fórmula de Green (Teorema 1.1.21)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|x|\leq 1}(u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{S^d}\left(u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}(y) - v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}(y)\right)d\sigma(y) \\ &= (l-k)\int_{S^d} Y^{(k)}(y)Y^{(l)}(y)d\sigma(y) = (l-k)\left(Y^{(k)}, Y^{(l)}\right) \end{aligned}$$

e portanto $\left(Y^{(k)}, Y^{(l)}\right) = 0$, pois $k \neq l$.

Corolário 1.3.18. *Se $f \in L^2(S^d)$, então f admite uma única representação na forma*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x),$$

onde a série acima converge para f na norma de $L^2(S^d)$ e $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Além disso

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left\|Y^{(k)}\right\|_2^2.$$

Demonstração. Para cada k, seja $\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$, $a_k = \dim \mathcal{H}_k$. Vamos mostrar que $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(S^d)$. Da forma que definimos, $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ já é um conjunto ortonormal, pois $\mathcal{H}_k$ é ortonormal a $\mathcal{H}_l$ se $k \neq l$. Agora, suponhamos por absurdo que exista $g \in L^2(S^d)$, $g \neq 0$ e ortogonal a todo elemento de $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$. Se h é uma combinação linear finita de harmônicos esféricos, então

$$\|g-h\|_2^2 = \|g\|_2^2 - 2(g,h) + \|h\|_2^2 = \|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 \geq \|g\|_2^2 > 0.$$

Mas isto contradiz o fato de que o espaço vetorial gerado por $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ é denso em $L^2(S^d)$. Logo $\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)} \right\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(S^d)$.

Sabemos que

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, Y_j^{(k)} \right) Y_j^{(k)}$$

está bem definida, pois de uma forma mais geral, temos o seguinte resultado: Se H é um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal, então para todo $x \in H$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n)\, x_n$$

é incondicionalmente convergente, isto é, convergente e sua soma independe da ordem. Consideremos então $h = f - g$ e mostremos que $h = 0$. Seja $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $l \in \{1, \ldots, a_i\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \left(h, Y_l^{(i)} \right) = \left(f, Y_l^{(i)} \right) - \left(g, Y_l^{(i)} \right) &= \left(f, Y_l^{(i)} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, Y_j^{(k)} \right) \left(Y_j^{(k)}, Y_l^{(i)} \right) \\ &= \left(f, Y_l^{(i)} \right) - \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, Y_j^{(i)} \right) \left(Y_j^{(i)}, Y_l^{(i)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Logo $h \in \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)} \right\} \right)^{\perp} = \{0\}$, isto é, $f = g$. Portanto cada $f \in L^2(S^d)$ admite uma única representação na forma

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, Y_j^{(k)} \right) Y_j^{(k)} \tag{1}$$

e além disso

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left| \left(f, Y_j^{(k)} \right) \right|^2. \tag{2}$$

Assim, se denotarmos

$$Y^{(k)} = \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, Y_j^{(k)} \right) Y_j^{(k)}, \tag{3}$$

segue por (1) que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x),$$

onde $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Mas também, como $\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$, temos por (3) que

$$\|Y^{(k)}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{a_k} \left|\left(f, Y_j^{(k)}\right)\right|^2$$

e portanto por (2)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|Y^{(k)}\|_2^2.$$

Exemplo 1.3.19. *Consideremos o caso $d = 1$. Então, segue pelo Teorema 1.3.10 que $a_0 = \dim \mathcal{H}_0 = 1$, $a_k = \dim \mathcal{H}_k = 2$, $k \geq 1$, e temos que*

$$\mathcal{A}_0 = \mathbb{R};\ \mathcal{A}_1 = \{ax + by : a, b \in \mathbb{R}\};\ \mathcal{A}_2 = \left\{a(x^2 - y^2) + b(2xy) : a, b \in \mathbb{R}\right\};$$
$$\mathcal{A}_k = \left\{a \operatorname{Re}(x + iy)^k + b \operatorname{Im}(x + iy)^k : a, b \in \mathbb{R}\right\},\ k \geq 2.$$

Fazendo a restrição do número complexo $x + iy$ ao círculo S^1 e tomando $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$ obtemos $(x + iy)^k = e^{i\theta} = \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta$. Assim

$$\mathcal{H}_k = \{a \cos k\theta + b \operatorname{sen} k\theta : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto as funções

$$Y_1^{(k)}(\theta) = \sqrt{2} \cos k\theta, \quad Y_2^{(k)}(\theta) = \sqrt{2} \operatorname{sen} k\theta$$

formam uma base ortonormal para $\mathcal{H}_k$, $k \geq 1$, quando identificamos o círculo S^1 com o intervalo $[0, 2\pi]$ munido da medida de Lebesgue normalizada $d\theta/2\pi$. Podemos então concluir que a representação de uma função $f \in L^2(S^1)$ numa série de harmônicos esféricos é a série de Fourier de f.

1.4 Representações de $SO(d + 1)$.

Definição 1.4.1. *Seja G um grupo, V um espaço vetorial e $GL(V)$ o grupo de operadores lineares inversíveis sobre V. Uma representação de G com valores em V é um par (T, V) onde $T : G \to GL(V)$ é uma aplicação tal que, a cada $u \in G$ faz corresponder um operador $T_u \in GL(V)$ de modo que:*
i) $T_e = Id$, onde e é o elemento neutro de G;
ii) $T_{uv} = T_u \circ T_v$, para todos $u, v \in G$.

Segue de i) e ii) que $T_{u^{-1}} \circ T_u = T_u \circ T_{u^{-1}} = Id$. Portanto, cada operador T_u é inversível e assim T é um homomorfismo do grupo G no grupo $GL(V)$.

Definição 1.4.2. *Definimos a aplicação $T : SO(d+1) \to GL\left(L^2(S^d)\right)$ para cada $u \in SO(d+1)$ e $f \in L^2(S^d)$ por*

$$T_u f(x) = f(u^{-1}x).$$

Observação 1.4.3. *É fácil verificar que a aplicação T da definição precedente é uma representação de $SO(d+1)$ em $L^2(S^d)$ e para cada $u \in SO(d+1)$, T_u é unitário, isto é, é um isomorfismo de $L^2(S^d)$ que preserva produto interno, ou seja, $(T_u f, T_u g) = (f, g)$ para qualquer $u \in SO(d+1)$ e $f, g \in L^2(S^d)$.*

Teorema 1.4.4. *Seja*

$$L_k = \{p \in \mathcal{H}_k : T_u(p) = p \text{ para todo } u \in SO(d)\}.$$

Então L_k é um subespaço vetorial de $\mathcal{H}_k$ e $\dim L_k = 1$.

Demonstração. É imediato que L_k é um subespaço vetorial de $\mathcal{H}_k$. Seja $p(x) \in L_k$. Se $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ nós denotaremos $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $x = (\widehat{x}, x_{d+1})$. Denotaremos ainda por $p(x)$ a extensão $\overline{p}(x)$ de $p(x)$ para $\mathbb{R}^{d+1}$, isto é, $\overline{p}(x) = |x|^k p(x/|x|)$ para $x \neq 0$ e $\overline{p}(0) = 0$ se $k \geq 1$. Como $p(x) \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{d+1})$ segue que para cada $0 \leq j \leq k$, existe $p_j(\widehat{x}) \in \mathcal{P}_j(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} x_{d+1}^{k-j} p_j(\widehat{x}).$$

Seja $u \in SO(d)$. Como $p \in L_k$ e u deixa invariante o pólo norte de S^d, devemos ter

$$\sum_{j=0}^{k} x_{d+1}^{k-j} p_j(u\widehat{x}) = p(ux) = p(x) = \sum_{j=0}^{k} x_{d+1}^{k-j} p_j(\widehat{x}).$$

Assim, considerando $\widehat{x}$ fixo obtemos uma igualdade entre dois polinômios na variável x_{d+1} e portanto devemos ter $p_j(u\widehat{x}) = p_j(\widehat{x})$ para todo $0 \leq j \leq k$ e $\widehat{x} \in \mathbb{R}^d$. Dado $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ com $\widehat{x} \neq 0$, seja $u \in SO(d)$ tal que $u(\widehat{x}/|\widehat{x}|) = \widehat{e} = (0, \ldots, 0, 1) \in S^{d-1}$. Então

$$p_j\left(\frac{\widehat{x}}{|\widehat{x}|}\right) = p_j\left(u\left(\frac{\widehat{x}}{|\widehat{x}|}\right)\right) = p_j(\widehat{e})$$

e assim

$$p_j(\widehat{x}) = |\widehat{x}|^j p_j\left(\frac{\widehat{x}}{|\widehat{x}|}\right) = |\widehat{x}|^j p_j(\widehat{e}).$$

Como p_j é um polinômio e $|\widehat{x}|^j = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{j/2}$, devemos ter $p_j(\widehat{e})$=0 para j ímpar. Se $c_i = p_{2i}(\widehat{e})$ e $[k/2]$ é a parte inteira de $k/2$ temos que

$$p(x) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j x_{d+1}^{k-2j} \left(|\widehat{x}|^2\right)^j .$$

Seja $\Delta_d = \partial^2/\partial^2 x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial^2 x_d^2$ o laplaciano nas primeiras d variáveis. Então

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\left(x_1^2 + \cdots + x_d^2\right)^j = 4j(j-1)\left(x_1^2 + \cdots + x_d^2\right)^{j-2} x_l^2 + 2j\left(x_1^2 + \cdots + x_d^2\right)^{j-1}$$

e assim

$$\Delta_d\left(|\widehat{x}|^{2j}\right) = 2j(2j+d-2)\,|\widehat{x}|^{2(j-1)} .$$

Por outro lado, como $p(x)$ é harmônico temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta p = \Delta_d p + \frac{\partial^2}{\partial x_{d+1}^2} p \\
&= \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j 2j(2j+d-2)\,|\widehat{x}|^{2(j-1)}\, x_{d+1}^{k-2j} + \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j (k-2j-1)(k-2j)\,|\widehat{x}|^{2j}\, x_{d+1}^{k-2(j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{[k/2]-1} \left[c_{j+1} 2(j+1)(2j+d) + c_j (k-2j-1)(k-2j)\right] |\widehat{x}|^{2j}\, x_{d+1}^{k-2(j+1)}
\end{aligned}$$

e portanto

$$c_{j+1} = -\frac{(k-2j-1)(k-2j)}{2(j+1)(2j+d)} c_j = \lambda_j c_j, \quad 0 \le j \le [k/2]-1.$$

Tomamos

$$q(x) = x_{d+1}^k + \sum_{j=1}^{[k/2]} (\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}) x_{d+1}^{k-2j}\, |\widehat{x}|^{2j}$$

e assim $p(x) = c_0 q(x)$, isto é, $q_{|S_d}$ é uma base para L_k.

Observação 1.4.5. *Sejam $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $u = (u_{ij})_{1 \le i,j \le d+1} \in SO(d+1)$ e $g(x) = f(ux) = f(y_1, \ldots, y_{d+1})$ onde $y_j = u_{j1}x_1 + \cdots + u_{j(d+1)}x_{d+1}$, $1 \le j \le d+1$. Então usando a regra da cadeia e o fato que as linhas da matriz u formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{d+1}$, obtemos que*

$$T_{u^{-1}}(\Delta f)(x) = (\Delta f)(ux) = \Delta g(x) = \Delta\left(T_{u^{-1}} f\right)(x)$$

isto é, o laplaciano comuta com rotações.

Seja $p \in \mathcal{A}_k$. Então $(T_{u^{-1}}p)(x) = p(ux) \in \mathcal{P}_k$ e $\Delta\left(T_{u^{-1}}p\right)(x) = T_{u^{-1}}(\Delta p)(x) = T_{u^{-1}}(0) = 0$. Logo

$$T_u(\mathcal{H}_k) \subset \mathcal{H}_k, \quad u \in SO(d+1), \; k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.4.6. *Seja H um subespaço não trivial de $\mathcal{H}_k$ tal que $T_u(H) \subset H$ para todo $u \in SO(d+1)$. Então $H = \mathcal{H}_k$.*

Demonstração. Seja "e" o pólo norte se S^d e consideremos o funcional linear Φ sobre H definido por $\Phi(p) = p(e)$. Como H é não trivial, existe $p \in H$, $p \neq 0$. Seja $x \in S^d$ tal que $p(x) \neq 0$ e seja $u \in SO(d+1)$ tal que $ue = x$. Tomamos $\widetilde{p} = T_{u^{-1}}p \in H$ e temos

$$\Phi(\widetilde{p}) = \widetilde{p}(e) = T_{u^{-1}}p(e) = p(ue) = p(x) \neq 0,$$

isto é, Φ não é identicamente nulo.

Consideremos H munido do produto inteno $(,)$ de $L^2(S^d)$. Então H é um espaço de Hilbert e como Φ é não-trivial, pelo Teorema de Representação de Riesz (Teorema 1.1.22) existe um único $q \in H$, $q \neq 0$ tal que

$$\Phi(p) = \int_{S^d} p(x)\overline{q(x)}d\sigma(x), \; p \in H.$$

Agora, para qualquer $u \in SO(d)$ e $p \in H$, aplicando a Proposição 1.1.14 vamos ter

$$\begin{aligned}
\Phi(p) &= \int_{S^d} p(x)\overline{q(x)}d\sigma(x) = p(e) = p(ue) = T_{u^{-1}}p(e) = \Phi(T_{u^{-1}}p) \\
&= \int_{S^d} p(ux)\overline{q(x)}d\sigma(x) = \int_{S^d} p(x)\overline{q(u^{-1}x)}d\sigma(x) \\
&= \int_{S^d} p(x)\overline{T_u q(x)}d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Logo, segue pela unicidade do elemento $q(x)$ na representação do funcional linear Φ que $T_u q = q$ para todo $u \in SO(d)$, isto é, $q \in L_k \cap H$.

Seja $u \in SO(d+1)$ e sejam $p, q \in H$. Temos que $T_u p = T_u q$ se, e somente se, $p(u^{-1}x) = q(u^{-1}x)$ para todo $x \in S^d$, isto é, se, e somente se, $p = q$. Assim $T_u : H \to H$ é injetora e consequentemente $T_u(H) = H$ pois $\dim H < \infty$.

Suponhamos $H^{\perp} = \{q \in \mathcal{H}_k : (p,q) = 0 \text{ para todo } p \in H\} \neq \{0\}$. Seja $q \in H^{\perp}$, $q \neq 0$ e $u \in SO(d+1)$. Temos pela Proposição 1.1.14 que

$$0 = (p,q) = (T_u p, T_u q), \; p \in H$$

e como $T_u(H) = H$, segue que $0 = (p, T_u q)$ para todo $p \in H$. Portanto $T_u q \in H^\perp$ e consequentemente podemos concluir que

$$T_u\left(H^\perp\right) \subset H^\perp, \quad u \in SO(d+1).$$

Assim, de maneira análoga ao que fizemos para H, podemos encontrar $q' \neq 0$, $q' \in L_k \cap H^\perp$. Mas $q \in H$ e $q' \in H^\perp$ inplica que q e q' são linearmente independentes e como q e $q' \in L_k$ vamos ter $\dim L_k \geq 2$, o que contradiz o Teorema 1.4.4. Logo $H^\perp = \{0\}$ e assim $\mathcal{H}_k = H \oplus H^\perp = H$.

Observação 1.4.7. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$. Dada $f \in L^2(S^d)$ existe uma única representação de f na forma $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}$ onde $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Definimos a projeção $P_k : L^2(S^d) \to \mathcal{H}_k$ por*

$$P_k f = Y^{(k)} = \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, Y_j^{(k)}\right) Y_j^{(k)}.$$

Temos que

$$(T_u \circ P_k) f = \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, Y_j^{(k)}\right) T_u Y_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{a_k} \left(T_u f, T_u Y_j^{(k)}\right) T_u Y_j^{(k)}.$$

Por outro lado, $\left\{T_u Y_j^{(k)} : 1 \leq j \leq a_k\right\}$ também é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$ e assim

$$P_k f = Y^{(k)} = \sum_{j=1}^{a_k} \left(f, T_u Y_j^{(k)}\right) T_u Y_j^{(k)}.$$

Logo obtemos que $(P_k \circ T_u) f = (T_u \circ P_k) f$, isto é,

$$T_u \circ P_k = P_k \circ T_u, \quad k \in \mathbb{N}\ ,\ u \in SO(d+1).$$

Notação 1.4.8. *Denotaremos por $\mathcal{H}$ a envoltória linear do conjunto $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$.*

Teorema 1.4.9. *Seja $T : \mathcal{H} \to L^2(S^d)$ uma aplicação linear tal que $T_u \circ T = T \circ T_u$ para todo $u \in SO(d+1)$. Então existe uma sequência de escalares $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$T_{|\mathcal{H}_k} = \lambda_k Id_{|\mathcal{H}_k},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, T é limitado em $L^2(S^d)$ se, e somente se, $\sup_k |\lambda_k| < \infty$.

Demonstração. Para cada par k, $k' \in \mathbb{N}$, consideremos o operador linear

$$T_k^{k'} = P_{k'} \circ T_{|\mathcal{H}_k} : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{k'}.$$

Segue como consequência da hipótese e da observação anterior que $T_u \circ T_k^{k'} = T_k^{k'} \circ T_u$ para todo $u \in SO(d+1)$. Para $u \in SO(d+1)$ e $p \in Ker(T_k^{k'})$ temos que $T_k^{k'}(T_u p) = T_u(T_k^{k'} p) = T_u(0) = 0$ e portanto

$$T_u\left(Ker\left(T_k^{k'}\right)\right) \subset Ker\left(T_k^{k'}\right).$$

Se $q \in \mathrm{Im}(T_k^{k'})$, existe $p \in \mathcal{H}_k$ tal que $q = T_k^{k'} p$ e assim

$$T_u q = T_u\left(T_k^{k'} p\right) = T_k^{k'}(T_u p) \in \mathrm{Im}\left(T_k^{k'}\right).$$

Portanto

$$T_u\left(\mathrm{Im}\left(T_k^{k'}\right)\right) \subset \mathrm{Im}\left(T_k^{k'}\right).$$

Pelo Teorema 1.4.6 temos que

$$\mathrm{Im}\left(T_k^{k'}\right) = \{0\} \text{ ou } \mathrm{Im}\left(T_k^{k'}\right) = \mathcal{H}_{k'}$$

e

$$Ker\left(T_k^{k'}\right) = \{0\} \text{ ou } Ker\left(T_k^{k'}\right) = \mathcal{H}_k.$$

Logo devemos ter $\mathrm{Im}(T_k^{k'}) = \{0\}$ e $Ker(T_k^{k'}) = \mathcal{H}_k$ ou $\mathrm{Im}(T_k^{k'}) = \mathcal{H}_{k'}$ e $Ker(T_k^{k'}) = \{0\}$, isto é, $T_k^{k'} \equiv 0$ ou $T_k^{k'}$ é um isomorfismo. Mas se $T_k^{k'}$ for um isomorfismo devemos ter $\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{H}_{k'}$ e assim $k = k'$. Portanto, se $k \neq k'$ temos $T_k^{k'} \equiv 0$.

Fixemos $k \in \mathbb{N}$ e seja λ_k um autovalor de T_k^k. Tomemos $J_k = T_k^k$-$\lambda_k Id$. Temos que

$$\begin{aligned} T_u \circ J_k &= T_u \circ T_k^k - T_u \lambda_k Id = T_k^k \circ T_u - \lambda_k T_u \\ &= \left(T_k^k - \lambda_k Id\right) \circ T_u = J_k \circ T_u \end{aligned}$$

para todo $u \in SO(d+1)$ e portanto $J_k \equiv 0$ ou J_k é isomorfismo. Como λ_k é um autovalor de T_k^k, existe $p \in \mathcal{H}_k$, $p \neq 0$ tal que $T_k^k p = \lambda_k p$, isto é, $J_k p = 0$. Logo J_k não pode ser um isomorfismo e assim devemos ter $J_k \equiv 0$. Portanto $T_k^k = \lambda_k Id$.

Falta demonstrar que T é limitado em $L^2(S^d)$ se, e somente se, $\sup_k |\lambda_k| < \infty$. Suponhamos primeiramente que $\sup_k |\lambda_k| = C < \infty$. Então se $f = \sum_{k=1}^m Y^{(k)} \in \mathcal{H}$ temos que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=1}^m \lambda_k Y^{(k)} \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^m |\lambda_k|^2 \left\|Y^{(k)}\right\|_2^2 \\ &\leq C^2 \sum_{k=1}^m \left\|Y^{(k)}\right\|_2^2 = C^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

ou seja, T é limitado em $L^2(S^d)$. Suponhamos agora que $\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$ para toda $f \in \mathcal{H}$. Então se $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$,

$$|\lambda_k| \left\|Y^{(k)}\right\|_2 = \left\|T\left(Y^{(k)}\right)\right\|_2 \leq C\left\|Y^{(k)}\right\|_2$$

e assim $|\lambda_k| \leq C$. Como tomamos C arbitrário, segue que $\sup_k |\lambda_k| \leq C$.

CAPÍTULO 2

Harmônicos Zonais

Na primeira seção definimos harmônicos zonais usando harmônicos esféricos e apresentamos algumas propriedades, onde utlizamos resultados obtidos no Capítulo 1. Mostramos também que o núcleo de Poisson se expressa em termos de harmônicos zonais.

Na segunda seção estudamos os chamados polinômios ultraesféricos e a relação destes com os harmônicos zonais. Este resultado é fundamental para o Capítulo 3.

Na terceira seção estudamos o operador de Laplace Beltrami Δ_S sobre a esfera S^d e demonstramos o resultado importante que diz que os harmônicos esféricos de grau k são os autovetores do operador de Laplace Beltrami, associados ao autovalor $-k(d+k-1)$.

As referências para os resultados deste capítulo são [3], [9], [11], [12], [13] e [14].

Definição 2.0.10. *Fixemos $x \in S^d$ e consideremos o funcional linear $L_x^{(k)}$ sobre $\mathcal{H}_k$ que a cada elemento $Y \in \mathcal{H}_k$ associa o valor $L_x^{(k)}(Y) = Y(x)$. Como $\mathcal{H}_k$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno $(\ ,\ )$ de $L^2(S^d)$, existe um único harmônico esférico $Z_x^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ tal que*

$$Y(x) = L_x^{(k)}(Y) = \left(Y, \overline{Z_x^{(k)}}\right) = \int_{S^d} Y(y) Z_x^{(k)}(y) d\sigma(y),$$

para todo $Y \in \mathcal{H}_k$. O harmônico esférico $Z_x^{(k)}$ é chamado de "zonal de grau k e pólo x".

Lema 2.0.11. *(a) Se $\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$, então*

$$Z_x^{(k)}(y) = \sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y).$$

(*b*) $Z_x^{(k)}$ *tem valores reais e* $Z_x^{(k)}(y) = Z_y^{(k)}(x)$.
(*c*) *Se* $u \in SO(d+1)$ *então* $Z_{ux}^{(k)}(uy) = Z_x^{(k)}(y)$.

Demonstração. 1° Passo) Consideremos uma base $\left\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ de $\mathcal{H}_k$ não necessariamente formada por funções reais. Temos que

$$Z_x^{(k)} = \sum_{j=1}^{a_k} \left(Z_x^{(k)}, Y_j^{(k)}\right) Y_j^{(k)}.$$

mas pela Definição 2.0.10

$$\left(Z_x^{(k)}, Y_j^{(k)}\right) = \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y)\overline{Y_j^{(k)}}(y)d\sigma(y) = \overline{Y_j^{(k)}}(x)$$

e assim

$$Z_x^{(k)}(y) = \sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y),$$

o que demonstra (*a*).
2° Passo) Como podemos considerar a base $\left\{Y_j^{(k)} : 1 \leq j \leq a_k\right\}$ formada somente por funções reais, segue por (*a*) que $Z_x^{(k)}$ também é real. Ainda por (*a*) temos que

$$Z_x^{(k)}(y) = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x) Y_j^{(k)}(y) = Z_y^{(k)}(x),$$

o que demonstra (*b*).
3° Passo) Para $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$, dado $u \in SO(d+1)$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{S^d} Z_{ux}^{(k)}(uy) Y^{(k)}(y) d\sigma(y) &= \int_{S^d} Z_{ux}^{(k)}(t) T_u Y^{(k)}(t) d\sigma(t) \\
&= \left(T_u Y^{(k)}\right)(ux) = Y^{(k)}(x) = L_x^{(k)}(Y^{(k)}) \\
&= \int_{S^d} Y^{(k)}(y) Z_x^{(k)}(y) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Assim, segue pela unicidade da representação do funcional linear $L_x^{(k)}$ que $Z_{ux}^{(k)}(uy) = Z_x^{(k)}(y)$, o que demonstra (*c*).

Corolário 2.0.12. (*a*) $Z_x^{(k)}(x) = \dim \mathcal{H}_k = a_k$, *para* $x \in S^d$.
(*b*) $\displaystyle\sum_{j=1}^{a_k} \left|Y_j^{(k)}(x)\right|^2 = a_k$, *para* $x \in S^d$.

(*c*) $\left|Z_x^{(k)}(y)\right| \leq a_k$, *para* x, $y \in S^d$.

Demonstração. 1^o Passo) Sejam $x_1, x_2 \in S^d$ e $u \in SO(d+1)$ tal que $x_2 = ux_1$. Segue por (c) do Lema 2.0.11 que

$$Z_{x_2}^{(k)}(x_2) = Z_{ux_1}^{(k)}(ux_1) = Z_{x_1}^{(k)}(x_1)$$

e portanto a aplicação $x \mapsto Z_x^{(k)}(x)$ é constante. Seja então $c \in \mathbb{R}$ tal que $Z_x^{(k)}(x) = c$ para todo $x \in S^d$. Por (a) do Lema 2.0.11 temos

$$c = Z_x^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{a_k} \left| Y_j^{(k)}(x) \right|^2$$

e assim

$$a_k = \sum_{j=1}^{a_k} \left\| Y_j^{(k)}(x) \right\|_2^2 = \int_{S_d} \left(\sum_{j=1}^{a_k} \left| Y_j^{(k)}(x) \right|^2 \right) d\sigma(x) = c\sigma(S^d) = c,$$

o que demonstra (a) e (b).
$2°$ Passo) Segue pela Definição 2.0.10 e por (a) que

$$\left\| Z_x^{(k)} \right\|_2^2 = \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y) \overline{Z_x^{(k)}(y)} d\sigma(y) = \left(Z_x^{(k)}, Z_x^{(k)} \right) = \overline{Z_x^{(k)}(x)} = a_k.$$

Portanto, aplicando a desigualdade se Schwarz e a Definição 2.0.10 obtemos

$$\begin{aligned} \left| Z_x^{(k)}(y) \right| &= \left| \int_{S^d} Z_x^{(k)}(z) Z_y^{(k)}(z) d\sigma(z) \right| \leq \int_{S^d} \left| Z_x^{(k)}(z) Z_y^{(k)}(z) \right| d\sigma(z) \\ &\leq \left\| Z_x^{(k)} \right\|_2 \left\| Z_y^{(k)} \right\|_2 = a_k. \end{aligned}$$

Exemplo 2.0.13. *Consideremos o caso $d = 1$. Vimos no Exemplo 1.3.19 que $\mathcal{H}^k$ é gerado pelos harmônicos esféricos $Y_1^{(k)}(\theta) = \sqrt{2}\cos k\theta$ e $Y_2^{(k)}(\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, k\theta$. Aplicando o Lema 2.0.11(a) obtemos*

$$\begin{aligned} Z_\theta^{(k)}(\phi) &= Y_1^{(k)}(\theta) Y_1^{(k)}(\phi) + Y_2^{(k)}(\theta) Y_2^{(k)}(\phi) \\ &= 2\cos\left[k(\theta - \phi)\right] = \sqrt{2} Y_1^{(k)}(\theta - \phi), \end{aligned}$$

e a fórmula (a) do Lema 2.0.11 diz essencialmente neste caso que

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{1}$$

A fórmula (b) do Corolário 2.0.12 no caso $d = 1$ diz que

$$2 = \sum_{j=1}^{2} \left| Y_j^{(k)}(\theta) \right|^2 = 2\cos^2 k\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\, k\theta,$$

isto é, essencialmente que

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1. \tag{2}$$

Podemos então entender que a fórmula (a) do Lema 2.0.11 é uma extensão de (1) e (b) do Corolário 2.0.12 é uma extensão de (2).

Teorema 2.0.14. *(Critério de Weierstrass) Consideremos uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, e uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $x \in (a,b)$. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente.*

Teorema 2.0.15. *Se $0 \leq r < 1$ e $x, y \in S^d$, então para o núcleo de Poisson temos*

$$P_{rx}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_x^{(k)}(y).$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
a_k = \dim \mathcal{H}_k &= \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d+k-2 \\ k-2 \end{pmatrix} \qquad (1)\\
&= \frac{(d+k-2)!}{(k-1)!(d-1)!}\left(\frac{(d+k-1)(d+k)}{kd} - \frac{(k-1)k}{dk}\right)\\
&= \begin{pmatrix} d+k-2 \\ k-1 \end{pmatrix}\frac{d+2k-1}{k} \leq \left((d+k-2)\cdots k\frac{1}{(d-1)!}\right)(d+1)\\
&\leq \frac{(d+1)(d-1)^{d-1}}{(d-1)!}k^{d-1} = Ck^{d-1}.
\end{aligned}$$

Seja $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r_0 < 1$. Se $0 \leq r \leq r_0$ e $x, y \in S^d$, temos por 2.0.12(c) e (1) que

$$\left|r^k Z_x^{(k)}(y)\right| = r^k \left|Z_x^{(k)}(y)\right| \leq r_0^k a_k \leq C r_0^k k^{d-1} = b_k$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = r_0 \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{d-1} = r_0 < 1.$$

Portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge absolutamente pelo critério da razão e assim segue pelo Critério de Weierstrass que a série $\sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_x^{(k)}(y)$ converge uniformemente em $B[0, r_0] \times S^d$ para todo $0 < r_0 < 1$. Denotemos

$$Q_{rx}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_x^{(k)}(y), \quad 0 \leq r < 1,\ x, y \in S^d.$$

Suponhamos agora que $u(y)$ seja uma combinação linear finita de harmônicos esféricos, isto é,

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m} Y^{(k)}(y), \quad Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k.$$

Então a função $u(x')$ definida para $x' \in \mathbb{R}^{d+1}$ por $u(0) = Y^{(0)}(0)$ e

$$u(x') = \sum_{k=0}^{m} |x'|^k \, Y^{(k)} \left(\frac{x'}{|x'|} \right)$$

para $x' \neq 0$ é harmônica em $\mathbb{R}^{d+1}$. Segue então pela unicidade do problema de Dirichlet (Observação 1.2.14) que devemos ter

$$u(x') = \int_{S^d} u(y) P_{x'}(y) d\sigma(y), \quad x' \in \mathbb{R}^{d+1}, \ |x'| < 1. \tag{2}$$

Usando a convergência uniforme da série de $Q_{rx}(y)$, a ortogonalidade $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ para $k \neq l$ e a Definição 2.0.10 (harmônico zonal) temos que

$$\begin{aligned} \int_{S^d} u(y) Q_{x'}(y) d\sigma(y) &= \sum_{j=0}^{m} \int_{S^d} Y^{(j)}(y) Q_{x'}(y) d\sigma(y) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} |x'|^k \int_{S^d} Y^{(j)}(y) Z^{(k)}_{x'/|x'|}(y) d\sigma(y) \\ &= \sum_{j=0}^{m} |x'|^j \, Y^{(j)} \left(\frac{x'}{|x'|} \right) = u(x'). \end{aligned} \tag{3}$$

Logo, por (2) e (3) obtemos que

$$\int_{S^d} \left(P_{x'}(y) - Q_{x'}(y) \right) u(y) d\sigma(y) = 0 \tag{4}$$

para toda combinação linear finita de harmônicos esféricos $u(y)$. Logo, segue pela densidade das combinações lineares finitas de harmônicos esféricos em $L^2(S^d)$ (Corolário 1.3.14) que (4) é válida para toda $u \in L^2(S^d)$ e portanto segue que $P_{x'}(y) = Q_{x'}(y)$ para todo $x' \in \mathbb{R}^{d+1}$, $|x'| < 1$ e *q.t.* $y \in S^d$. Mas como $P_{x'}(y)$ e $Q_{x'}(y)$ são contínuas, concluímos que $P_{x'}(y) = Q_{x'}(y)$ para todo $y \in S^d$ e $x' \in \mathbb{R}^{d+1}$, $|x'| < 1$. Assim, tomando $x' = rx$, $x \in S^d$, temos que

$$P_{rx}(y) = Q_{rx}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z^{(k)}_x(y), \quad 0 \leq r < 1, \ x, y \in S^d.$$

Definição 2.0.16. *Um paralelo de* S^d *ortogonal ao ponto* $a \in S^d$ *é a interseção de* S^d *com um hiperplano de* $\mathbb{R}^{d+1}$ *que é perpendicular à linha determinada pela origem e por "a". Estes paralelos são dados por*

$$P_{a,r} = \left\{ z \in S^d : \langle z - ra, a \rangle = 0 \right\}; \quad -1 \leq r \leq 1.$$

Lema 2.0.17. *Sejam* $a, x, y \in S^d$. *Então* x *e* y *pertencem a um mesmo paralelo de* S^d *ortogonal a "a" se, e somente se, existe* $u \in SO(d+1)$ *tal que* $u(x) = y$ *e* $u(a) = a$.

Demonstração. Suponhamos que $x,\, y \in S^d$ e que existe $u \in SO(d+1)$ tal que $u(x) = y$ e $u(a) = a$. Se $x \in P_{a,r}$, então

$$0 = \langle x - ra, a \rangle = \langle u(x - ra), ua \rangle = \langle y - ra, a \rangle$$

e portanto x e y pertencem ao mesmo paralelo $P_{a,r}$. Suponhamos agora que x e y pertencem ao mesmo paralelo $P_{a,r}$. Seja $H_a = \{ta : \ t \in \mathbb{R}\}$ e $H_a^{\perp}$ o complemento ortogonal de H_a. Então

$$\langle x - y, a \rangle = \langle x - ra, a \rangle - \langle y - ra, a \rangle = 0$$

e assim $x - y \in H_a^{\perp}$. Portanto existe $\xi \in [0, \pi]$ e existem $x', y' \in H_a^{\perp}$ com $|x'| = |y'| = 1$ tal que

$$x = (\cos \xi) a + (\operatorname{sen} \xi) x' \quad \text{e} \quad y = (\cos \xi) a + (\operatorname{sen} \xi) y'.$$

Seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ uma base ortonormal de $H_a^{\perp}$ e sejam $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_d, a\}$ e $\{e_1, \ldots, e_{d+1}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{d+1}$. Seja w o operador linear de $\mathbb{R}^{d+1}$ que verifica

$$w(\alpha_j) = e_j, \ 1 \leq j \leq d \text{ e } w(a) = e_{d+1}.$$

Temos que w é um operador ortogonal e podemos supor, caso necessário fazendo uma reordenação nos elementos da base β, que $w \in SO(d+1)$. Se

$$x' = t_1 \alpha_1 + \cdots + t_d \alpha_d \quad \text{e} \quad y' = s_1 \alpha_1 + \cdots + s_d \alpha_d$$

então

$$w(x') = t_1 e_1 + \cdots + t_d e_d \quad \text{e} \quad w(y') = s_1 e_1 + \cdots + s_d e_d.$$

Como $|w(x')| = |w(y')| = 1$, isto é, $w\,(x')\,, w\,(y') \in S^{d-1}$, segue que existe $u \in SO(d)$ tal que $u(w\,(x')) = w\,(y')\,.$ Tomando $v = w^{-1} \circ u \circ w$ temos que

$$v(x') = w^{-1} \circ u \circ w(x') = w^{-1}(w(y')) = y'$$

e

$$v(a) = w^{-1} \circ u \circ w(a) = w^{-1}(u(e_{d+1})) = w^{-1}(e_{d+1}) = a.$$

Logo, encontramos $v \in SO(d+1)$ tal que $v(a) = a$ e

$$v(x) = (\cos\xi)v(a) + (\operatorname{sen}\xi)v(x') = (\cos\xi)a + (\operatorname{sen}\xi)y' = y.$$

Corolário 2.0.18. *O harmônico zonal $Z_a^{(k)}$ de grau k e pólo "a" é constante sobre cada paralelo de S^d ortogonal a "a".*

Demonstração. Sejam x e y pertencentes ao mesmo paralelo $P_{a,r}$. Então pelo Lema 2.0.17 existe $u \in SO(d+1)$ tal que $u(x) = y$ e $u(a) = a$. Portanto segue pelo Lema 2.0.11(c) que

$$Z_a^{(k)}(x) = Z_{ua}^{(k)}(ux) = Z_a^{(k)}(y).$$

Teorema 2.0.19. *Sejam $a \in S^d$ e $Y \in \mathcal{H}_k$. Se Y é constante sobre os paralelos de S^d ortogonais a "a", então existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $Y = cZ_a^{(k)}$.*

Demonstração. Se Y é constante sobre os paralelos de S^d ortogonais a "a", então segue pelo Lema 2.0.17 que $Y(vx) = Y(x)$ para todo $x \in S^d$ e $v \in SO(d+1)$ tal que $v(a) = a$.

Seja $w \in SO(d+1)$ tal que $w(a) = e_{d+1}$ e seja $W(x) = Y\left(w^{-1}(x)\right)$ para todo $x \in S^d$. Temos que $v \in SO(d+1)$ e $v(a) = a$ se, e somente se, $v \in w^{-1}SO(d)w$. Sejam então $u \in SO(d)$ e $x \in S^d$. Como $v = w^{-1} \circ u^{-1} \circ w \in SO(d+1)$ e $v(a) = a$, então

$$\begin{aligned} W(ux) &= Y\left(w^{-1}(ux)\right) = Y(v \circ w^{-1} \circ u(x)) \\ &= Y((w^{-1} \circ u^{-1} \circ w) \circ (w^{-1} \circ u)(x)) \\ &= Y(w^{-1}x) = W(x) \end{aligned}$$

e portanto

$$W \in L_k = \{p \in \mathcal{H}_k : T_u(p) = p \text{ para todo } u \in SO(d)\}.$$

Vimos no Teorema 1.4.4 que L_k tem dimensão 1 e pelo Corolário 2.0.18, $Z_{e_{d+1}}^{(k)} \in L_k$. Logo $W = cZ_{e_{d+1}}^{(k)}$ para alguma constante c.

Dado $y \in S_d$ tomamos $x = wy$ e assim pelo Lema 2.0.11(c),

$$Y(y) = Y(w^{-1}(wy)) = Y(w^{-1}x) = W(x)$$

$$= cZ_{e_{d+1}}^{(k)}(x) = cZ_{w^{-1}e_{d+1}}^{(k)}(w^{-1}x) = cZ_a^{(k)}(y).$$

Corolário 2.0.20. *Seja $F_y(x)$ uma função definida para todos $x, y \in S^d$ e suponhamos que:*
(i) $F_y \in \mathcal{H}_k$ para todo $y \in S^d$;
(ii) $F_{uy}(ux) = F_y(x)$ para todo $u \in SO(d+1)$ e $x, y \in S^d$.
Então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_y(x) = cZ_y^{(k)}(x)$ para todos x, $y \in S^d$.

Demonstração. Fixemos $y \in S^d$ e seja $u \in SO(d+1)$ tal que $u(y) = y$. Por (ii) temos que

$$F_y(x) = F_{uy}(ux) = F_y(ux), \ \ x \in S^d,$$

e assim segue pelo Lema 2.0.17 que F_y é constante sobre os paralelos de S^d ortogonais a "y". Mas por (i), $F_y \in \mathcal{H}_k$ e assim pelo Teorema 2.0.19 existe $c(y) \in \mathbb{C}$ tal que

$$F_y(x) = c(y)Z_y^{(k)}(x), \quad x \in S^d.$$

Vamos mostrar que a função $y \mapsto c(y)$ é constante. Sejam $y_1, y_2 \in S^d$ e seja $u \in SO(d+1)$ tal que $uy_1 = y_2$. Então por (ii) e pelo Lema 2.0.11(c) temos

$$\begin{aligned} F_{y_2}(ux) &= F_{uy_1}(ux) = F_{y_1}(x) = c(y_1)Z_{y_1}^{(k)}(x) \\ &= c(y_1)Z_{uy_1}^{(k)}(ux) = c(y_1)Z_{y_2}^{(k)}(ux). \end{aligned}$$

Assim para todo $x \in S^d$

$$c(y_2)Z_{y_2}^{(k)}(ux) = F_{y_2}(ux) = c(y_1)Z_{y_2}^{(k)}(ux)$$

e portanto devemos ter $c(y_2) = c\,(y_1)$.

2.1 Polinômios Ultraesféricos

Observação 2.1.1. *Seja $\lambda > 0$. O Teorema da Série Binomial diz que, para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$ temos*

$$(1-z)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

onde $a_0 = 1$ e

$$a_k = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

Se r, $t \in \mathbb{R}$, $|t| \leq 1$ e $|r| < 1$, então

$$\left[1 - r\left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)\right]\left[1 - r\left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)\right] = 1 - 2rt + r^2$$

e

$$\left|t - i\sqrt{1-t^2}\right| = \left|t + i\sqrt{1-t^2}\right| = 1.$$

Portanto, segue pela série binomial (1) *que*

$$\begin{aligned}
\left(1 - 2rt + r^2\right)^{-\lambda} &= \left[1 - r\left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)\right]^{-\lambda}\left[1 - r\left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)\right]^{-\lambda} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)^k r^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)^k r^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l+j=k} a_l a_j \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)^l \left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)^j\right) r^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(t) r^k.
\end{aligned} \tag{2}$$

Sejam r_0, $t \in \mathbb{R}$ *fixos,* $0 < r_0 < 1$ *e* $|t| \le 1$. *Então a série* (2) *converge uniformemente para todo* $r \in \mathbb{R}$, $|r| \le r_0$. *Segue também pela expressão de* $P_k^\lambda(t)$ *em* (2) *que as funções* $P_k^\lambda(t)$ *são deriváveis na variável* t *para todo* $t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$. *Fixemos agora* $r \in \mathbb{R}$, $|r| < 1$. *Então*

$$\left|P_k^\lambda(t)\right| \le \sum_{l+j=k} a_l a_j = b_k$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *com* $|t| \le 1$. *Para* $t = 1$ *temos* $P_k^\lambda(1) = b_k$. *Como a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k |r|^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k |r|^k\right)^2$$

converge, segue pelo Critério de Weierstrass que a série (2) *converge uniformemente na variável* t *para* $|t| < 1$. *Temos que*

$$\frac{d}{dt}P_k^\lambda(t) = \sum_{l+j=k} l a_l a_j \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)^{l-1}\left(1 + \frac{it}{\sqrt{1-t^2}}\right)\left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)^j +$$

$$\sum_{l+j=k} j a_l a_j \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)^l \left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)^{j-1}\left(1 - \frac{it}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

e portanto obtemos a desigualdade de Bernstein

$$\left|\frac{d}{dt}P_k^\lambda(t)\right| \le \sum_{l+j=k} k a_l a_j \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k b_k. \tag{3}$$

Mas a série $\sum_k k b_k x^{k-1}$ *tem raio de convergência igual a* 1, *pois é a série das derivadas da série de potências* $\sum_k b_k x^k$ *que tem raio igual a* 1. *Logo podemos concluir por* (3) *que a* *série das derivadas na variável t da série (2) converge uniformemente para todo t, $|t| < 1$. Como já vimos que (2) também converge uniformemente para $|t| < 1$, segue pelo Teorema da Derivação Termo a Termo que para $|r| < 1$ e $|t| < 1$,*

$$2\lambda r(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} P_k^{\lambda}(t) r^k. \tag{4}$$

Teorema 2.1.2. *(i)* $P_0^{\lambda}(t) = 1$, $|t| \leq 1$.
(ii) $\dfrac{d}{dt} P_k^{\lambda}(t) = 2\lambda P_{k-1}^{\lambda+1}(t)$, $|t| < 1$.
(iii) $P_k^{\lambda}(-t) = (-1)^k P_k^{\lambda}(t)$, $|t| \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$.
(iv) $P_k^{\lambda}(t)$ *é um polinômio de grau* k, $k \in \mathbb{N}$.
(v) As combinações lineares finitas de P_k^{λ}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *formam um subconjunto denso no espaço das funções contínuas sobre o intervalo* $[-1, 1]$ *com a métrica da convergência uniforme.*

Demonstração. *(i)* : Basta tomar $r = 0$ em 2.1.1(2).
(ii) : Segue por 2.1.1(2) e 2.1.1(4) que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 2\lambda P_{k-1}^{\lambda+1}(t) r^k &= 2r\lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda+1}(t) r^k \\ &= 2r\lambda(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} P_k^{\lambda}(t) r^k\end{aligned}$$

e portanto obtemos *(ii)*.
(iii) : Por 2.1.1(2) temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(-t) r^k = (1 - 2t(-r) + (-r)^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P_k^{\lambda}(t) r^k$$

para qualquer r, $t \in \mathbb{R}$ com $|r| < 1$ e $|t| \leq 1$ e assim obtemos *(v)*.
(iv) : O fato de que $P_k^{\lambda}(t)$ é um polinômio é encontrado na demonstração do Teorema 2.1.4. Vimos em *(i)* que $P_0^{\lambda}(t) = 1$ é um polinômio de grau 0. Usando *(ii)* obtemos que a derivada de $P_1^{\lambda}(t)$ em relação à t é $2\lambda P_0^{\lambda+1}(t) = 2\lambda$ e assim $P_1^{\lambda}(t)$ é um polinômio de grau 1. Suponhamos agora que $P_k^{\lambda}(t)$ seja um polinômio de grau k para todo $\lambda > 0$. Aplicando *(ii)* obtemos que

$$\frac{d}{dt} P_{k+1}^{\lambda}(t) = 2\lambda P_k^{\lambda+1}(t)$$

é um polinômio de grau k. Portanto $P_{k+1}^\lambda(t)$ é um polinômio de grau $k+1$.
(v) : Se $P_0^\lambda, \ldots, P_k^\lambda$ forem linearmente dependentes, então existe $1 \leq l \leq k$ tal que P_l^λ é combinação linear de $P_0^\lambda, \ldots, P_{l-1}^\lambda$, o que é uma contradição por (iv). Seja E_k o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq k$. Temos que $\dim E_k = k+1$ e que $P_0^\lambda, \ldots, P_k^\lambda$ são linearmente independentes e pertencem a E_k. Logo formam uma base de E_k e assim os polinômios $1, t, \ldots, t^k$ são obtidos como combinações lineares finitas dos polinômios $P_0^\lambda, \ldots, P_k^\lambda$. Segue então pelo Teorema de aproximação de Weierstrass (Teorema 1.3.12) que o conjunto de todas as combinações lineares finitas dos polinômios $P_0^\lambda, \ldots, P_k^\lambda, \ldots$ é um subconjunto denso do espaço das funções contínuas sobre $[-1,1]$ com a métrica da convergência uniforme.

Definição 2.1.3. *Seja $\lambda > 0$ e sejam a_k, $k \in \mathbb{N}$, os coeficientes da série binomial* (1). *Os polinômios $P_k^\lambda(t)$, $-1 \leq t \leq 1, k \in \mathbb{N}$, em 2.1.2*(2) *dados por*

$$P_k^\lambda(t) = \sum_{l+j=k} a_l a_j \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)^l \left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)^j,$$

são chamados "polinômios ultraesféricos ou de Gegenbauer".

Teorema 2.1.4. *Sejam $d \geq 2$, $\lambda = (d-1)/2$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$. Então para todo x, $y \in S^d$ temos*

$$Z_y^{(k)}(x) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^\lambda\left(\langle x, y\rangle\right).$$

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar que existe uma constante c_k tal que $Z_y^{(k)}(x) = c_k^{-1} P_k^\lambda\left(\langle x, y\rangle\right)$. Definimos a função $F_y^{(k)}(x)$ para $y \in S^d$ e $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ por $F_y^{(k)}(0) = 0$ se $k \geq 1$, $F_y^{(0)}(0) = 1$ e

$$F_y^{(k)}(x) = |x|^k P_k^\lambda\left(\frac{\langle x, y\rangle}{|x|}\right) \quad \text{se } x \neq 0.$$

Se mostrarmos que a função $F_y^{(k)}(x)$ satisfaz as hipóteses (i) e (ii) do Corolário 2.0.20, obteremos como consequência que existe uma constantre c_k tal que $F_y^{(k)}(x) = c_k Z_y^{(k)}(x)$.
Se $u \in SO(d+1)$ e x, $y \in S^d$, segue que

$$F_{uy}^{(k)}(ux) = P_k^\lambda\left(\langle ux, uy\rangle\right) = P_k^\lambda\left(\langle x, y\rangle\right) = F_y^{(k)}(x)$$

e assim a função $F_y^{(k)}(x)$ satisfaz a hipótese (ii) do Corolário 2.0.20. Falta então mostrar que para cada $y \in S^d$, a função $x \mapsto F_y^{(k)}(x)$, quando restrita à esfera S^d, é um harmônico esférico de grau k.

Se k é par, suponha $k = 2m$, segue pelas propriedades (iii) e (v) do Teorema 2.1.2 que $P_k^\lambda(t)$ é um polinômio de grau k e $P_k^\lambda(-t) = (-1)^k P_k^\lambda(t) = P_k^\lambda(t)$. Assim podemos escrever

$$P_k^\lambda(t) = \sum_{j=0}^{m} d_{2j} t^{2j}.$$

Portanto tomando $t = \langle x, y\rangle / |x| = (x_1y_1 + \cdots + x_{d+1}y_{d+1}) / \left(x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2\right)^{1/2}$ obtemos que

$$F_y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{m} d_{2j} \left(x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2\right)^{m-j} (x_1y_1 + \cdots + x_{d+1}y_{d+1})^{2j}$$

é um polinômio homogêneo de grau $k = 2m$ na variável x. Da mesma forma podemos verificar que se k for ímpar, $k = 2m+1$, então

$$F_y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{m} d_{2j+1} \left(x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2\right)^{m-j} (x_1y_1 + \cdots + x_{d+1}y_{d+1})^{2j+1}$$

é um polinômio homogêneo de grau $k = 2m+1$ na variável x.

Fazendo alguns cálculos podemos verificar que a função $x \mapsto |x|^{1-d}$ é harmônica na região $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$. Como o laplaciano comuta com translações, segue que se $x_0 \in \mathbb{R}^{d+1}$, a função $x \mapsto |x - x_0|^{1-d}$ é harmônica na região $\mathbb{R}^{d+1} - \{x_0\}$. Fixemos $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ e $y \in S^d$. Então a função $x \mapsto |s|^{1-d} |x - y/s|^{1-d}$ é harmônica na região $\mathbb{R}^{d+1} - \{y/s\}$ e pela definição de polinômios ultraesféricos temos que

$$\begin{aligned} |s|^{1-d} \left| x - \frac{y}{s} \right|^{1-d} &= (\langle sx - y, sx - y\rangle)^{-(d-1)/2} \qquad (1) \\ &= \left(1 - 2s\,|x| \left\langle \frac{x}{|x|}, y \right\rangle + (s\,|x|)^2\right)^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda \left(\left\langle \frac{x}{|x|}, y \right\rangle \right) s^k\,|x|^k = \sum_{k=0}^{\infty} F_y^{(k)}(x) s^k, \end{aligned}$$

sendo que a série acima converge na região $R_s = \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 < |x| < 1/\,|s|\right\}$.

Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^{d+1}$, $x_0 \neq 0$ e tomemos $0 < r_0 < |x_0|$. Escolhemos $s \in \mathbb{R}$ tal que $B\,[x_0, r_0] \subset B\,(0, 1/\,|s|)$. Como $u(x) = |s|^{1-d} |x - y/s|^{1-d}$ é harmônica na região R_s, segue pelo Teorema 1.2.2 que $u(x_0) = \mathcal{M}_{x_0,u}(r_0)$. Mas a série em (1) converge uniformemente sobre a esfera $S(x_0, r_0)$ e assim integrando ambos os membros de (1) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} F_y^{(k)}(x_0) s^k = u(x_0) &= \int_{S^d} u(x_0 + r_0 t) d\sigma(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S^d} F_y^{(k)}(x_0 + r_0 t) d\sigma(t) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_{x_0, F_y^{(k)}}(r_0) s^k. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{M}_{x_0,F_y^{(k)}}(r_0) = F_y^{(k)}(x_0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e assim segue pelo Teorema 1.2.5 que $F_y^{(k)}$ é harmônica na região $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$. No entanto, como já sabemos que $F_y^{(k)}$ é um polinômio, podemos concluir que $F_y^{(k)}$ é harmônica em $\mathbb{R}^{d+1}$, isto é, $F_y^{(k)}|_{S^d} \in \mathcal{H}_k$.

Vamos agora demonstrar que $c_k = (d+2k-1)/(d-1)$. Pelo Teorema 1.3.10 temos que

$$a_k = \dim \mathcal{H}_k = \frac{(d+k-2)!(d+2k-1)}{k!(d-1)!}.$$

Pelo Corolário 2.0.12(a) e pela primeira parte da demonstração obtemos que

$$a_k = Z_x^{(k)}(x) = c_k P_k^{(d-1)/2}(\langle x, x\rangle) = c_k P_k^{(d-1)/2}(1).$$

Portanto

$$c_k = \frac{(d+k-2)!(d+2k-1)}{k!(d-1)!P_k^{(d-1)/2}(1)}.$$

Por outro lado, por 2.1.1(2) e 2.1.1(1) obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(1) r^k = (1-r)^{-2\lambda} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda(2\lambda+1)\cdots(2\lambda+k-1)}{k!} r^k$$

e assim para $\lambda = (d-1)/2$ e $k \geq 2$,

$$P_k^{\lambda}(1) = \frac{2\lambda(2\lambda+1)\cdots(2\lambda+k-1)}{k!} = \frac{(d+k-2)!}{k!(d-2)!}.$$

Substituindo o valor $P_k^{(d-1)/2}(1)$ na expressão de c_k dada acima, obtemos o resultado desejado.

Observação 2.1.5. *Para $k \in \mathbb{N}$, seja $P_k^0(\theta) = 2\cos(k\theta)$. Pelo Exemplo 2.0.13 segue que para $d = 1$ temos*

$$Z_\theta^{(k)}(\phi) = P_k^0(\theta - \phi),$$

que é o resultado do Teorema 2.1.4 quando $d = 1$.

Corolário 2.1.6. *Os polinômios $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ são mutualmente ortogonais com respeito ao produto interno*

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) (1-t^2)^{(d-2)/2} dt.$$

Demonstração. Seja $\xi_d : [0, \pi]^{d-1} \times [0, 2\pi] \to S^d$ a função definida por $\xi_d(\theta_1, \ldots, \theta_d) = (x_1, \ldots, x_{d+1})$ onde

$$x_1 = \cos\theta_1, \quad x_i = \cos\theta_i \prod_{j=1}^{i-1} \operatorname{sen}\theta_j, \quad 2 \leq i \leq d \quad \text{e} \quad x_{d+1} = \prod_{j=1}^{d} \operatorname{sen}\theta_j.$$

Denotaremos $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d) = (\theta_1, \theta')$, $\theta' = (\theta_2, \ldots, \theta_d)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Então $\xi_d(\theta) = (\cos\theta_1)e_1 + (\operatorname{sen}\theta_1)\xi_{d-1}(\theta')$. Sejam $l, k \in \mathbb{N}$, $l \neq k$. Então como $Z_{e_1}^{(l)}$ e $Z_{e_1}^{(k)}$ são ortogonais em $L^2(S^d)$, aplicando o Teorema 2.1.4, fazendo mudança de variáveis para coordenadas esféricas e finalmente fazendo a mudança de variável $t = \cos\theta_1$ obtemos

$$0 = \int_{S^d} Z_{e_1}^{(l)}(x) Z_{e_1}^{(k)}(x) d\sigma(x) = c_l c_k \int_{S^d} P_l^{(d-1)/2}(\langle e_1, x\rangle) P_k^{(d-1)/2}(\langle e_1, x\rangle) d\sigma(x)$$

$$= \frac{c_l c_k}{w_d} \int_{[0,\pi]^{d-1}\times[0,2\pi]} P_l^{(d-1)/2}(\langle e_1, \xi_d(\theta)\rangle) P_k^{(d-1)/2}(\langle e_1, \xi_d(\theta)\rangle) \operatorname{sen}^{d-1}\theta_1 \cdots \operatorname{sen}\theta_{d-1} d\theta$$

$$= \frac{c_l c_k}{w_d} \left(\int_{[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]} \operatorname{sen}^{d-2}\theta_2 \cdots \operatorname{sen}\theta_{d-1} d\theta' \right) \left(\int_0^{\pi} P_l^{(d-1)/2}(\cos\theta_1) P_k^{(d-1)/2}(\cos\theta_1) \operatorname{sen}^{d-1}\theta_1 d\theta_1 \right)$$

$$= \frac{c_l c_k w_{d-1}}{w_d} \int_{-1}^{1} P_l^{(d-1)/2}(t) P_k^{(d-1)/2}(t)(1-t^2)^{(d-2)/2} dt.$$

Corolário 2.1.7. *Os polinômios* $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *formam uma base ortogonal para o espaço* $L^2\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$.

Demonstração. Como o espaço $C([-1,1])$ das funções contínuas sobre $[-1,1]$ é denso em $L^2\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$ (ver [4], p. 237) e o espaço das combinações lineares finitas das funções $P_0^{(d-1)/2}$,
$P_1^{(d-1)/2}, \ldots$ é pelo Teorema 2.1.2(iv) denso em $C([-1,1])$ com a métrica da convergência uniforme e portanto também com a métrica de L^2, segue que o espaço das combinações lineares finitas das funções $P_0^{(d-1)/2}, P_1^{(d-1)/2}, \ldots$ é denso em $L^2\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$.

Seja $f \in L^2\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$. Se f for ortogonal a todo polinômio $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ então pela observação acima, vai ser ortogonal a toda função de $L^2\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$ e portanto deve ser nula. Logo, os polinômios $P_k^{(d-1)/2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ formam um conjunto ortogonal completo de $L^2\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$ e portanto, com raciocíneo análogo ao utilizado na demonstração do Corolário 1.3.18, concluímos o desejado.

Definição 2.1.8. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. *O ângulo* θ *entre* x *e* y *é definido como sendo o ângulo* $0 \leq \theta \leq \pi$ *que verifica*

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|}.$$

Observação 2.1.9. *Sejam* $a \in S^d$ *e* $-1 \leq r \leq 1$. *O paralelo* $P_{a,r}$ *de* S^d *ortogonal a "a" é dado por*

$$P_{a,r} = \left\{ z \in S^d : \langle z - ra, a\rangle = 0 \right\}.$$

Mas $0 = \langle z - ra, a\rangle = \langle z, a\rangle - r$ *se, e somente se,* $\theta = \arccos r$ *é o ângulo entre* z *e* a. *Portanto os elementos de* $P_{a,r}$ *são os vetores* $z \in S^d$ *cujo ângulo com o vetor "a" é dado por* $\theta = \arccos r$.

Teorema 2.1.10. *(Teorema da Adição) Se* $\left\{Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{N}$, *então*

$$\sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y) = Z_x^{(k)}(y) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(\cos\theta),$$

onde θ *é o ângulo entre* x *e* y.

Demonstração. Segue imediatamente pelo Lema 2.0.11(a) e pelo Teorema 2.1.4.

Notação 2.1.11. *Denotamos por* $\widetilde{Z}^{(k)}(t)$ *a função*

$$\widetilde{Z}^{(k)}(t) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(t)$$

e se $e = e_{d+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ *é o pólo norte de* S^d *e* $f \in L^2(S^d)$, *definimos o produto de convolução* $Z_e^{(k)} * f$ *por*

$$Z_e^{(k)} * f(x) = \widetilde{Z}^{(k)} * f(x) = \int_{S^d} \widetilde{Z}^{(k)}\left(\langle x, y\rangle\right) f(y) d\sigma(y) = \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y) f(y) d\sigma(y).$$

Teorema 2.1.12. *Seja* $f \in L^2(S^d)$. *Então*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_e^{(k)} * f(x)$$

onde a série acima converge para f *na norma de* $L^2(S^d)$ *e* $Z_e^{(k)} * f(x) \in \mathcal{H}_k$.

Demonstração. Pelo Corolário 1.3.18 basta mostrar que se $\left\{Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ é uma base ortonormal (podemos supor real) de $\mathcal{H}_k$, então

$$Z_e^{(k)} * f(x) = \sum_{j=1}^{a_k} \left(f(x), Y_j^{(k)}(x)\right) Y_j^{(k)}(x).$$

Sejam $x \in S^d$ e $u \in SO(d+1)$ tal que $ue = x$. Segue pela Notação 2.1.11, pelo Teorema 1.1.15, pelo Teorema 2.1.4, pela Observação 1.4.7, pela Definição 2.0.10 (definição de zonal) e pela Definição 1.3.15 que

$$\begin{aligned}
Z_e^{(k)} * f(x) &= \int_{S^d} \widetilde{Z}^{(k)}\left(\langle x, y\rangle\right) f(y) d\sigma(y) \\
&= \int_{SO(d+1)} \widetilde{Z}^{(k)}\left(\langle ue, ve\rangle\right) f(ve) dv = \int_{SO(d+1)} Z_{ve}^{(k)}(ue) f(ve) dv \\
&= \int_{SO(d+1)} \left(\sum_{j=1}^{a_k} \left(Z_{ve}^{(k)}, Y_j^{(k)}\right) Y_j^{(k)}(ue)\right) f(ve) dv \\
&= \sum_{j=1}^{a_k} \left(\int_{SO(d+1)} Y_j^{(k)}(ve) f(ve) dv\right) Y_j^{(k)}(ue) \\
&= \sum_{j=1}^{a_k} (f, Y_j^{(k)}) Y_j^{(k)}(x).
\end{aligned}$$

2.2 O Operador de Laplace Beltrami

Em geral uma hipersuperfície (superfície de dimensão d) suave S em $\mathbb{R}^{d+1}$ tem um laplaciano Δ_S, o qual é derivado do laplaciano Δ definido sobre $\mathbb{R}^{d+1}$ no seguinte sentido: dada uma função f sobre S, consideremos a extensão F para uma vizinhança de S que coincide com f sobre S e que é constante ao longo das linhas normais à S. Então o laplaciano $\Delta_S f$ de f é obtido por restrição de ΔF à superfície original S.

Em particular, se S for a esfera unitária S^d obtemos o operador Δ_S conhecido por laplaciano esférico ou operador de Laplace Beltrami como segue.

Definição 2.2.1. *Seja f uma função definida sobre S^d e seja $E_0 f$ a função definida sobre $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$ por $E_0 f(x) = f\left(x/|x|\right)$, $x \neq 0$. Se g é uma função definida numa vizinhança de S^d, denotaremos por Rg a restrição de g à esfera S^d. O laplaciano esférico Δ_S é definido por*

$$\Delta_S f = R \Delta E_0 f.$$

Observação 2.2.2. *Seja $F(x)$ uma função homogênea de grau k e com derivadas parciais num aberto Ω de $\mathbb{R}^{d+1}$. Se $x \in \Omega$ e t é um número real positivo suficientemente pequeno, podemos verificar facilmente que*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(tx) = t^{k-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x), \quad 1 \leq j \leq d+1.$$

Portanto as derivadas parciais $\partial F/\partial x_j$ são funções homogêneas de grau $k-1$.

Se f é uma função definida sobre S^d, então $E_0 f$ está definida sobre $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$ e é homogênea de grau zero. Portanto $\Delta E_0 f$ é homogênea de grau -2.

Lema 2.2.3. *Sejam f, g duas funções de $L^2(S^d)$ tais que $\Delta_S f$ e $\Delta_S g$ estejam bem definidas e sejam funções de $L^2(S^d)$. Então*

$$\int_{S^d} f \Delta_S g d\sigma = \int_{S^d} g \Delta_S f d\sigma,$$

isto é, o operador de Laplace Beltrami Δ_S é um operador auto-adjunto em relação ao produto interno de $L^2(S^d)$.

Demonstração. Sejam $F = E_0 f$ e $G = E_0 g$. Como ΔF e ΔG são homogênceas de grau -2, segue pelo Lema 1.1.23 que

$$\begin{aligned} \int_{1\le|x|\le 2} (G\Delta F - F\Delta G)\, dx &= \int_1^2 r^d \int_{S^d} (G(rt)\Delta F(rt) - F(rt)\Delta G(rt))\, d\sigma(t) dr \qquad (1) \\ &= \left(\int_1^2 r^{d-2} dr\right) \int_{S^d} (g\Delta_S f - f\Delta_S g)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Denotemos por σ_s a medida de Lebesgue sobre a esfera $\left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| = s\right\}$. Então segue pela Fórmula de Green (Teorema 1.1.21) que

$$\begin{aligned} \int_{1\le|x|\le 2} (G\Delta F - F\Delta G)\, dx = &\int_{|x|=2} \left(G\frac{\partial F}{\partial r} - F\frac{\partial G}{\partial r}\right) d\sigma_2 \qquad (2) \\ &- \int_{|x|=1} \left(G\frac{\partial F}{\partial r} - F\frac{\partial G}{\partial r}\right) d\sigma_1 = 0 \end{aligned}$$

O resultado desejado segue então por (1) e (2).

Lema 2.2.4. *Seja F uma função de classe C^2 e homogênea de grau k numa vizinhança da esfera S^d e seja f a restrição de F à esfera S^d. Então*

$$\Delta F(x) = k(d+k-1)\, |x|^{k-2} f\left(\frac{x}{|x|}\right) + |x|^{k-2} \Delta_S f\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Demonstração. Tomaremos $H(x) = |x|^k$ e $G(x) = E_0 f(x) = f(x/|x|)$, $x \neq 0$. É fácil verificar que

$$\Delta(HG) = H\Delta G + 2\langle \nabla H, \nabla G\rangle + G\Delta H.$$

Temos que $H(x) = \left(x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2\right)^{k/2}$ e

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}(x) = kx_j\,|x|^{k-2}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x_j^2}(x) = k\,|x|^{k-2} + k(k-2)x_j^2\,|x|^{k-4}$$

e assim

$$\nabla H(x) = k\,|x|^{k-2}\,x, \quad \Delta H(x) = k(d+k-1)\,|x|^{k-2}.$$

Como G é homogênea de grau zero segue que $\partial G/\partial r = 0$, e como ΔG é homogênea de grau -2, pela Observação 2.2.2 obtemos

$$\Delta G(x) = |x|^{-2}\,\Delta G\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^{-2}\,\Delta_S f\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Sabemos que o gradiente de $G(x)$ aponta para a direção em que a função tem crescimento máximo. Como G é constante na direção normal às esferas centradas na origem, segue que $\nabla G(x)$ é tangente à esfera centrada na origem e passando por x, isto é,

$$\langle \nabla G(x), x\rangle = 0.$$

Temos então que

$$\langle \nabla H(x), \nabla G(x)\rangle = \left\langle k\,|x|^{k-2}\,x, \nabla G(x)\right\rangle = k\,|x|^{k-2}\,\langle x, \nabla G(x)\rangle = 0$$

e assim

$$\begin{aligned}\Delta F(x) = \Delta(HG)(x) &= H\Delta G + G\Delta H \\ &= |x|^{k-2}\,\Delta_S f\left(\frac{x}{|x|}\right) + k(d+k-1)\,|x|^{k-2}\,f\left(\frac{x}{|x|}\right).\end{aligned}$$

Teorema 2.2.5. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_k$ é o espaço vetorial dos autovetores do operador de Laplace Beltrami Δ_S associados ao autovalor $-k(d+k-1)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}_k$ o espaço vetorial formado por todos os polinômios harmônicos e homogêneos de grau k definidos sobre $\mathbb{R}^{d+1}$. Se $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ e $p \in \mathcal{A}_k$ é tal que $Y^{(k)} = p_{|S^d}$, então pelo Lema 2.2.4 temos

$$0 = \Delta p(x) = k(d+k-1)\,|x|^{k-2}\,Y^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) + |x|^{k-2}\,\Delta_S Y^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

e assim para $|x| = 1$ obtemos que

$$\Delta_S Y^{(k)}(x) = -k(d+k-1)Y^{(k)}(x).$$

Corolário 2.2.6. *Os polinômios $P_k^\lambda(t)$, $\lambda = (d-1)/2$, satisfazem a equação diferencial homogênea de segunda ordem*

$$(1-t^2)y''(t) - dty'(t) + k(k+d-1)y(t) = 0.$$

Demonstração. Tomando $t = \cos\theta$ e sabendo que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{dy}{d\theta} \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{dy}{d\theta}\right),$$

devemos mostrar que $P_k^\lambda(\cos\theta)$ satisfaz a equação

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}(\cos\theta) + (d-1)\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{dy}{d\theta}(\cos\theta) + k(k+d-1)y(\cos\theta) = 0.$$

Como $Z_x^{(k)} \in \mathcal{H}_k$, pelo Teorema 2.2.5 temos que $\Delta_S Z_x^{(k)}(y) = -k(d+k-1)Z_x^{(k)}(y)$ e em particular, tomando $x = e_1 = (1,0,\ldots,0)$ e utilizando o Teorema 2.1.4, temos que

$$\Delta_S Z_{e_1}^{(k)} = -k(d+k-1)c_k P_k^\lambda(\cos\theta_1), \qquad c_k = \frac{d+2k-1}{d-1}. \tag{1}$$

Por outro lado, seja $F(x)$ definida para $x \in \mathbb{R}^{d+1}\setminus\{0\}$ por $F(x) = |x|^k\, Z_{e_1}^{(k)}\left(x/|x|\right)$. O laplaciano ΔF, em coordenadas esféricas é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta F &= r^{-d}\frac{d}{dr}\left(r^d\frac{dF}{dr}\right) + r^{-2}\left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{-d+1}\frac{d}{d\theta_1}\left[\left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{d-1}\frac{dF}{d\theta_1}\right] \\
&+ r^{-2}\left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{-2}\left(\operatorname{sen}\theta_2\right)^{-d+2}\frac{d}{d\theta_2}\left[\left(\operatorname{sen}\theta_2\right)^{d-2}\frac{dF}{d\theta_2}\right] + \cdots + \\
&+ r^{-2}\left(\operatorname{sen}\theta_1\ldots\operatorname{sen}\theta_{d-2}\right)^{-2}\left(\operatorname{sen}\theta_{d-1}\right)^{-1}\frac{d}{d\theta_{d-1}}\left[\left(\operatorname{sen}\theta_{d-1}\right)\frac{dF}{d\theta_{d-1}}\right] \\
&+ r^{-2}\left(\operatorname{sen}\theta_1\ldots\operatorname{sen}\theta_{d-1}\right)^{-2}\frac{d^2F}{d\theta_d^2}.
\end{aligned}$$

Fazendo a restrição de ΔF para a esfera S^d e observando que $Z_{e_1}^{(k)} = c_k P_k^\lambda(\cos\theta_1)$ depende somente de θ_1, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_S Z_{e_1}^{(k)} &= \left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{-d+1}\frac{d}{d\theta_1}\left[\left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{d-1}\frac{dZ_{e_1}^{(k)}}{d\theta_1}\right] \\
&= \left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{-d+1}\left[(d-1)\left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{d-2}\cos\theta_1\frac{dZ_{e_1}^{(k)}}{d\theta_1} + \left(\operatorname{sen}\theta_1\right)^{d-1}\frac{d^2Z_{e_1}^{(k)}}{d\theta_1^2}\right] \\
&= (d-1)\frac{\cos\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_1}\frac{dZ_{e_1}^{(k)}}{d\theta_1} + \frac{d^2Z_{e_1}^{(k)}}{d\theta_1^2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Portanto, por (1) e (2) segue que

$$\frac{d^2P_k^\lambda}{d\theta_1^2}(\cos\theta_1)+(d-1)\frac{\cos\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_1}\frac{dP_k^\lambda}{d\theta_1}(\cos\theta_1)+k(d+k-1)P_k^\lambda(\cos\theta_1)=0,$$

e logo concluímos o desejado. Esta demonstração se encontra mais direta em [13]

Observação 2.2.7. *Pela demonstração do Teorema 2.1.4 temos*

$$a_k=c_kP_k^{(d-1)/2}(1),\quad c_k=\frac{d+2k-1}{d-1},\quad P_k^{(d-1)/2}(1)=\frac{(d+k-2)!}{k!(d-2)!},$$

e pela demonstração do Corolário 2.1.6

$$\frac{c_k^2\omega_{d-1}}{\omega_d}\left\|P_k^{(d-1)/2}\right\|_{2,W}^2=a_k$$

onde $W(t)=(1-t^2)^{(d-2)/2}$ *e* $\|.\|_{2,W}$ *é a norma do espaço* $L^2\left([-1,1],W(t)dt\right)$. *Segue como consequência que*

$$c_k=\frac{\omega_d}{\omega_{d-1}}\frac{a_k}{c_k\left\|P_k^{(d-1)/2}\right\|_{2,W}^2}=\frac{\omega_d}{\omega_{d-1}}\frac{P_k^{(d-1)/2}(1)}{\left\|P_k^{(d-1)/2}\right\|_{2,W}^2}. \tag{1}$$

Agora, se $K\in L^1\left([-1,1],W(t)dt\right)$, *tomando* $x=ue_1$, $\theta'=(\theta_2,\ldots,\theta_d)$, *fazendo mudança de variáveis para coordenadas esféricas e em seguida fazendo a mudança de variável* $t=\cos\theta_1$, *obtemos que*

$$\begin{aligned}\int_{S^d}K\left(\langle x,y\rangle\right)d\sigma(y)&=\int_{S^d}K\left(\langle ue_1,y\rangle\right)d\sigma(y) \qquad (2)\\ &=\int_{S^d}K\left(\left\langle e_1,u^{-1}y\right\rangle\right)d\sigma(y)=\int_{S^d}K\left(\langle e_1,y\rangle\right)d\sigma(y)\\ &=\left(\frac{1}{\omega_d}\int_{[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi]}\operatorname{sen}^{d-2}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{d-1}d\theta'\right)\int_0^\pi K(\cos\theta_1)\operatorname{sen}^{d-1}\theta_1d\theta_1\\ &=\frac{\omega_{d-1}}{\omega_d}\int_{-1}^1K(t)(1-t^2)^{(d-2)/2}dt=\frac{\omega_{d-1}}{\omega_d}\int_{-1}^1K(t)W(t)dt.\end{aligned}$$

Teorema 2.2.8. *(Fórmula de Funk-Hecke) Se* $K\in L^1\left([-1,1],(1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$ *e* $Y^{(k)}\in\mathcal{H}_k$, *então*

$$\int_{S^d}K\left(\langle x,y\rangle\right)Y^{(k)}(y)d\sigma(y)=\lambda_kY^{(k)}(x) \tag{1}$$

onde

$$\lambda_k=\frac{\omega_{d-1}}{\omega_dP_k^{(d-1)/2}(1)}\int_{-1}^1K(t)P_k^{(d-1)/2}(t)(1-t^2)^{(d-2)/2}dt.$$

Demonstração. 1° Passo) Sejam $k, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq m$ e seja

$$K(t) = \sum_{l=0}^{m} b_l P_l^{(d-1)/2}(t).$$

Então por 2.1.4, 2.0.10, 2.2.7(1) e 1.3.17 temos que

$$\int_{S^d} K(\langle x, y\rangle) Y^{(k)}(y) d\sigma(y) = \sum_{l=0}^{m} \frac{b_l}{c_l} \int_{S^d} Z_x^{(l)}(y) Y^{(k)}(y) d\sigma(y)$$

$$= \frac{b_k}{c_k} Y^{(k)}(x) = b_k \left(\frac{\omega_d}{\omega_{d-1}} \frac{P_k^{(d-1)/2}(1)}{\left\| P_k^{(d-1)/2} \right\|_{2,W}^2} \right)^{-1} Y^{(k)}(x)$$

$$= \left(\frac{\omega_{d-1}}{\omega_d P_k^{(d-1)/2}(1)} \int_{-1}^{1} b_k P_k^{(d-1)/2}(t) P_k^{(d-1)/2}(t)(1-t^2)^{(d-2)/2} dt \right) Y^{(k)}(x)$$

$$= \lambda_k Y^{(k)}(x).$$

2° Passo) Seja $K(t)$ uma função contínua. Então segue pelo Teorema 2.1.2(iv) que existe uma sequência de funções $K_j(t)$, onde cada $K_j(t)$ é uma combinação linear finita dos polinômios $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ e tal que $K_j(t) \to K(t)$ uniformemente quando $j \to \infty$. Assim

$$\int_{-1}^{1} |K_j(t) - K(t)| (1-t^2)^{(d-2)/2} dt \to 0$$

quando $j \to \infty$, pois

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{(d-2)/2} dt = \int_{0}^{\pi} (\operatorname{sen}\theta)^{d-1} d\theta \leq \pi.$$

Logo, por 2.2.7(2) temos que

$$\int_{S^d} |K_j(\langle x, y\rangle) - K(\langle x, y\rangle)| \left| Y^{(k)}(y) \right| d\sigma(y)$$

$$\leq \left\| Y^{(k)} \right\|_\infty \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{-1}^{1} |K_j(t) - K(t)| (1-t^2)^{(d-2)/2} dt$$

e asssim quando $j \to \infty$, segue que

$$\int_{S^d} |K_j(\langle x, y\rangle) - K(\langle x, y\rangle)| \left| Y^{(k)}(y) \right| d\sigma(y) \to 0. \tag{2}$$

Como pelo 1° Passo a equação (1) é verdadeira para cada K_j, então por (2) obtemos que (1) também é verdadeira para K.

3° Passo) Seja agora $K \in L^1\left([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt\right)$ e seja K_j uma sequência de funções contínuas tal que

$$\int_{-1}^{1} |K_j(t) - K(t)| (1-t^2)^{(d-2)/2} dt \to 0$$

quando $j \to \infty$. Então pelo 2° Passo temos que (1) é verdadeira para cada K_j. Como (2) também é verdadeira neste caso, segue que (1) é verdade para $K(t)$.

CAPÍTULO 3

Teorema de Multiplicadores

Neste capítulo estão os resultados principais deste trabalho. Estudamos um teorema de multiplicadores recentemente demonstrado por B. Bordin, A. Kushpel, J. Levesley e S. A. Tozoni em [2].

Enunciamos algumas propriedades dos polinômios de Jacobi e as utilizamos para demonstrar estimativas pontuais para os módulos destes polinômios e para as somas de Cesàro associadas também a estes polinômios. Estas estimativas são aplicadas na demonstração de estimativas na norma da L^p para as somas de Cesàro associadas aos polinômios ultra-esféricos. Estas últimas estimativas constituem a ferramenta principal para demonstrar o teorema de multiplicadores. As referências para as somas de Cesàro são [1] e [13] e para o teorema de multiplicadores [2] e [14].

Na última seção aplicamos o teorema de multiplicadores para obter estimativas assintóticas superiores para n-larguras de classes de Sobolev nos espaços $L^q(S^d)$. As referências são [2] e [7].

3.1 Somas de Cesàro

Definição 3.1.1. *Seja $(Z_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer de funções. Definimos a soma de Cesàro S_n^δ de ordem $n \in \mathbb{N}$ e índice $\delta \geq 0$ por*

$$S_n^\delta(x) = \frac{1}{C_n^\delta}\sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^\delta Z_m(x)$$

onde

$$C_m^\delta = \frac{\Gamma(m+\delta+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\delta+1)}.$$

Definição 3.1.2. *([13], p. 69) Sejam $\alpha, \beta > -1$. Os Polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ podem ser definidos através de uma função geradora por*

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1 - z + R)^{-\alpha} (1 + z + R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(t) z^n,$$

onde $R = (1 - 2tz + z^2)^{1/2}$.

Lema 3.1.3. *([13]) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq -1/2$.*
(i) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| \leq C n^\alpha, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

(ii) Para $-1 \leq t \leq 1$,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-t) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(t).$$

(iii) Para $-1 \leq t \leq 1$,

$$P_n^\lambda(t) = \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n + \lambda + 1/2)} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(t).$$

(iv) Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C > 0$ dependendo de ε tal que

$$\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| \leq C n^{-1/2}, \quad n \geq 1, \quad \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon.$$

(v) Seja $W(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\|P_n^{(\alpha,\beta)}\right\|_{2,W}^{-2} = \left(\int_{-1}^{1} \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\right|^2 W(t)dt\right)^{-1} \leq Cn, \quad n \geq 1.$$

(vi) Os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ satisfazem a equação diferencial homogênea de segunda ordem

$$(1 - t^2)y''(t) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)\, t]\, y'(t) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(t) = 0.$$

(vii) Seja δ um inteiro positivo e sejam $S_n^\delta(x)$ as somas de Cesàro relativas à sequência $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$Z_n(t) = \left\|P_n^{(\alpha,\beta)}\right\|_{2,W}^{-2} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) P_n^{(\alpha,\beta)}(t).$$

Então

$$S_n^\delta(x) = \left(C_n^\delta\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n} H_k(n,\delta) P_k^{(\alpha+\delta+1,\beta)}(t),$$

onde

$$H_k(n,\delta) = \begin{cases} n^{\delta-1}, & k=0, \\ \sum\limits_{j=0}^{\delta-1} (n-k)^j k^{\alpha-j}, & 1 \le k \le n-1, \\ n^{\alpha+1}, & k=n. \end{cases}$$

Lema 3.1.4. *Suponhamos que $y(t)$ satisfaz a equação diferencial*

$$y''(t) + \phi(t) y = 0,$$

onde $\phi(t)$ é uma função positiva com derivada contínua e com sinal constante no intervalo $[x_0, X_0]$.
(i) Se $\phi'(t) \le 0$, então a sequência dos máximos relativos de $|y(t)|$ forma uma sequência crescente quando t cresce de x_0 para X_0.

(ii) Se $\phi'(t) \ge 0$, então a sequência dos máximos relativos de $|y(t)|$ forma uma sequência decrescente quando t cresce de x_0 para X_0.

Demonstração. Tomemos

$$f(t) = (y(t))^2 + (\phi(t))^{-1} (y'(t))^2 \tag{1}$$

e denotemos $\psi(t) = (\phi(t))^{-1}$. Temos que

$$\begin{aligned} f' &= 2yy' + \psi' (y')^2 + 2\psi y' y'' \\ &= 2y' \left\{ y + \frac{1}{2}\psi' y' + \psi\left(-\psi^{-1} y\right) \right\} = \left(\phi^{-1}\right)' (y')^2 \\ &= -\phi' \frac{(y')^2}{\phi^2}, \end{aligned}$$

e assim f' possui sinal contrário ao de ϕ'.

Se $\phi'(t) \le 0$, então $f'(t) \ge 0$, ou seja, f é uma função crescente. Considerando $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ os pontos de máximo relativos de $|y(t)|$ em (x_0, X_0), temos que $t_1, \ldots, t_n$ são pontos de máximo ou mínimo relativos de $y(t)$, isto é, $y'(t_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Mas se $y'(t) = 0$, por (1) segue que $f(t) = (y(t))^2$ e como f é crescente temos que $f(t_1) \le f(t_2) \le \ldots \le f(t_n)$. Assim $|y(t_1)| \le \ldots \le |y(t_n)|$, e portanto mostramos (i). A demonstração do item (ii) é análoga.

Lema 3.1.5. *A função*

$$u_n(\theta) = \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \phi_n(\theta)u = 0,$$

onde

$$\phi_n(\theta) = \frac{1/4-\alpha^2}{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)} + \frac{1/4-\beta^2}{4\cos^2(\theta/2)} + \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2.$$

Demonstração. Utilizaremos o Lema 3.1.3(vi), isto é, o fato de que os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ satisfazem a equação

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{d\theta^2}(\cos\theta) - \left[\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\cos\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right]\frac{dy}{d\theta}(\cos\theta) + \\ + n(n+\alpha+\beta+1)y(\cos\theta) = 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Denotando $Y = P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_n}{d\theta^2} &= \frac{4\alpha^2-1}{16}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-3/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+5/2}Y - \frac{4\alpha\beta+6\alpha+2\beta+3}{16}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}Y \\ &+ \frac{2\alpha+1}{4}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+3/2}\frac{dY}{d\theta} - \frac{4\alpha\beta+6\beta+2\alpha+3}{16}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}Y \\ &+ \frac{4\beta^2-1}{16}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+5/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta-3/2}Y - \frac{2\beta+1}{4}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+3/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta-1/2}\frac{dY}{d\theta} \\ &+ \frac{2\alpha+1}{4}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+3/2}\frac{dY}{d\theta} - \frac{2\beta+1}{4}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+3/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta-1/2}\frac{dY}{d\theta} \\ &+ \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}\frac{d^2Y}{d\theta^2}.\end{aligned}$$

Logo, aplicando algumas identidades trigonométricas e (1), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_n}{d\theta^2} + \phi_n(\theta)u_n = \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}\Bigg\{\frac{d^2Y}{d\theta^2} + \Bigg[\frac{2\alpha+1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ - \frac{2\beta+1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\Bigg]\frac{dY}{d\theta} + \Bigg[\frac{4\alpha^2-1}{16}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{-2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2} \\ - \frac{(2\alpha+1)(2\beta+3)}{16} - \frac{(2\beta+1)(2\alpha+3)}{16} + \frac{4\beta^2-1}{16}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-2} \\ + \frac{1-4\alpha^2}{16}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{-2} + \frac{1-4\beta^2}{16}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-2} + \left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2\Bigg]Y\Bigg\} = 0.\end{aligned}$$

Lema 3.1.6. *Sejam $\alpha \geq \beta \geq -1/2$. Então para $n \geq 1$,*

$$\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| \leq C \begin{cases} n^{\alpha}, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ n^{-1/2}\theta^{-\alpha-1/2}, & c/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ n^{\beta}, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos demonstrar este resultado aplicando os Lemas 3.1.4 e 3.1.5. Sejam $\phi_n(\theta)$ e $u_n(\theta)$ como no enunciado do Lema 3.1.5.

Suponhamos $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$. Então $-1/2 \leq \beta \leq 1/2$ e assim $1/4-\alpha^2 \geq 0$, $1/4-\beta^2 \geq 0$. Portanto temos que $\phi_n(\theta) \geq 0$ para $n \geq 0$, $0 < \theta \leq \pi/2$. Temos que

$$\phi_n'(\theta) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{-3}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-3}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right).$$

Então $\phi_n'(\theta) \leq 0$ se, e somente se,

$$\alpha^2 - 1/4 \leq \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{4}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-4}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Tomemos

$$\delta = 2\left(\frac{\alpha^2 - 1/4}{4\beta^2 - 1}\right)^{1/4}.$$

Como $\alpha^2 - 1/4 \leq 0$, $\beta^2 - 1/4 \leq 0$ e $1/4 \leq \cos^4(\theta/2) \leq 1$, segue que se $0 < \theta \leq \delta$, então

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{4}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-4} \leq \left(\frac{\theta}{2}\right)^{4} 4 \leq \frac{\alpha^2 - 1/4}{\beta^2 - 1/4}.$$

Portanto $\phi_n'(\theta) \leq 0$ para $0 < \theta \leq \delta$, isto é, $\phi_n(\theta)$ é decrescente.

Suponhamos agora $\alpha \geq 1/2$ e tomemos $k \in \mathbb{R}$, $k > 2\left(\alpha^2 - 1/4\right)^{1/2}$. Se $-1/2 \leq \beta < 1/2$, então $\beta^2 - 1/4 < 0$. Assim

$$\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \geq \frac{\alpha^2 - 1/4}{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)},$$

implica $\phi_n(\theta) \geq 0$. Para $k/n \leq \theta \leq \pi/2$, temos que

$$n \geq \frac{k}{4}\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta/2)} \geq \frac{\left(\alpha^2 - 1/4\right)^{1/2}}{2\operatorname{sen}(\theta/2)} \tag{1}$$

e assim $\phi_n(\theta) \geq 0$. Agora, se $\beta \geq 1/2$,

$$(\alpha+\beta+1)^2 \geq 4\left(\beta^2 - 1/4\right),$$

e assim
$$\frac{\alpha+\beta+1}{2} \geq \sqrt{2}\frac{(\beta^2-1/4)^{1/2}}{2\cos(\theta/2)}, \tag{2}$$
e logo segue por (1), (2) e pela definição de $\phi_n(\theta)$, que $\phi_n(\theta) \geq 0$ quando $\beta \geq 1/2$. Se $\beta^2 - 1/4 < 0$, segue trivialmente que $\phi_n'(\theta) \geq 0$.

Agora, se $\beta \geq 1/2$ e $0 < \theta \leq \delta$, temos
$$\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \leq \frac{1}{4}\frac{\alpha^2-1/4}{\beta^2-1/4} \leq \frac{\alpha^2-1/4}{\beta^2-1/4}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^4,$$
e assim $\phi_n'(\theta) \geq 0$. Portanto $\phi_n(\theta)$ é crescente para $0 < \theta \leq \delta$.

Segue como consequência dos Lemas 3.1.5 e 3.1.4 que os máximos relativos de $|u_n(\theta)|$ formam uma sequência crescente se $\alpha^2 - 1/4 < 0$ e uma sequência decrescente se $\alpha^2 - 1/4 \geq 0$, quando θ cresce de k/n para δ. Sendo assim, podemos concluir que
$$\sup_{k/n \leq \theta \leq \delta} |u_n(\theta)| \leq \begin{cases} |u_n(\delta)|, & \alpha^2 < 1/4, \\ |u_n(k/n)|, & \alpha^2 > 1/4. \end{cases} \tag{3}$$
Usando 3.1.3(iv) obtemos
$$|u_n(\delta)| \leq C\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\delta)\right| \leq Cn^{-1/2}. \tag{4}$$
Agora, por 3.1.3(i), segue que
$$\begin{aligned} |u_n(k/n)| &= \left(\operatorname{sen}\frac{k}{2n}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{k}{2n}\right)^{\beta+1/2}\left|P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leq C\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+1/2}\left|P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{k}{n}\right)\right| \leq Cn^{-1/2}. \end{aligned} \tag{5}$$
Aplicando 3.1.3(iv) obtemos que, para $\delta \leq \theta \leq \pi/2$,
$$|u_n(\theta)| \leq Cn^{-1/2}. \tag{6}$$
Por (3), (4), (5) e (6), obtemos que
$$|u_n(\theta)| \leq Cn^{-1/2}, \quad \frac{k}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$
Mas $(\operatorname{sen}(\theta/2))^{-1} \leq 4\theta^{-1}$ e assim para $k/n \leq \theta \leq \pi/2$,
$$\begin{aligned} \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| &\leq C|u_n(\theta)|\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2} \\ &\leq Cn^{-1/2}\theta^{-\alpha-1/2}, \end{aligned}$$

onde demonstramos a segunda desigualdade .

As outras duas desigualdades seguem facilmente das propriedades dos polinômios de Jacobi (i) e (ii) do Lema 3.1.3.

Observação 3.1.7. *Para $m, k \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\frac{k^m}{m!} \leq C_k^m = \frac{(m+k)!}{m!k!} = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)\dots\left(\frac{k}{m}+1\right) \leq 2^m k^m.$$

Lema 3.1.8. *Sejam $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, δ um inteiro positivo e S_n^δ as somas de Cesàro relativas aos polinômios de Jacobi (ver Lema 3.1.3(vii)). Então existe uma constante positiva C independente de n tal que*

(i) se $0 \leq \delta \leq \alpha+\beta+2$, temos

$$\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| \leq C \begin{cases} n^{2\alpha+2}, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ n^{\alpha+\beta+1-\delta}, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi; \end{cases}$$

(ii) se $0 \leq \delta \leq \alpha+3/2$, temos

$$\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| \leq C n^{\alpha+1/2-\delta}\theta^{-\alpha-\delta-3/2}, \qquad 2/n \leq \theta \leq \pi/2;$$

(iii) se $\alpha+3/2 \leq \delta \leq \alpha+\beta+2$, temos

$$\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| \leq C n^{-1}\theta^{-2\alpha-3} + C n^{-1}\theta^{-\alpha-\delta-3/2}, \quad 2/n \leq \theta \leq \pi/2.$$

Demonstração. 1° Passo) Suponhamos $\delta \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Segue por 3.1.3(i), 3.1.3(v), 3.1.7 e 3.1.6 que

$$\begin{aligned} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n-k}^\delta}{C_n^\delta} \left\|P_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_{2,W}^{-2} \left|P_k^{(\alpha,\beta)}(1)\right| \left|P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\right| \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)^\delta k^{2\alpha+1} \leq C n^{2\alpha+2}, \end{aligned}$$

e assim obtemos a primeira desigualdade em (i).

2° Passo) Suponhamos $0 \leq \delta \leq \alpha+3/2$ e $2/n \leq \theta \leq \pi/2$. Por 3.1.3($i$) temos que $P_0^{(\alpha+\delta+1,\beta)}(t) = P_0^{(\alpha+\delta+1,\beta)}(1) = 1$, $t \in [-1,1]$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, segue pelo desenvolvimento binomial que

$$(1-z)^{-(a+1)}(1-z)^{-(b+1)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k^a z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j^b z^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^a C_k^b\right) z^n$$

e ao mesmo tempo

$$(1-z)^{-(a+b+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{a+b+1} z^n.$$

Portanto temos que

$$C_n^{a+b+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{a} C_k^{b}.$$

Mas C_n^δ é da ordem de n^δ (ver Observação 3.1.7) e assim n^{a+b+1} é da ordem de

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)^a k^b.$$

Logo, por 3.1.3(vii), 3.1.3(i), 3.1.7 e 3.1.6,

$$\begin{aligned}
\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| &\le \left(C_n^\delta\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n} |H_k(n,\delta)| \left|P_k^{(\alpha+\delta+1,\beta)}(\cos\theta)\right| \\
&\le Cn^{-\delta}\left(n^{\delta-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{\delta-1}(n-k)^j k^{\alpha-j-1/2} + n^{\alpha+1/2}\right)\theta^{-\alpha-\delta-3/2} \\
&\le C\left(n^{-1} + n^{-\delta}\sum_{j=0}^{\delta-1} n^{\alpha+1/2} + n^{\alpha+1/2-\delta}\right)\theta^{-\alpha-\delta-3/2} \\
&\le Cn^{\alpha+1/2-\delta}\theta^{-\alpha-\delta-3/2},
\end{aligned}$$

e assim obtemos a primeira desigualdade em (ii).

3° Passo) Suponhamos $0 \le \delta \le \alpha+\beta+2$ e $\pi/2 \le \theta \le \pi$. Por 3.1.3(vii), 3.1.7 e 3.1.6, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| &\le Cn^{-\delta}\left(n^{\delta-1} + \sum_{j=0}^{\delta-1}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^j\, k^{\alpha+\beta-j} + n^{\alpha+\beta+1}\right) \\
&\le Cn^{-\delta}\left(n^{\delta-1} + \sum_{j=0}^{\delta-1} n^{\alpha+\beta+1} + n^{\alpha+\beta+1}\right) \le C\left(n^{-1} + n^{\alpha+\beta+1-\delta}\right) \\
&\le Cn^{\alpha+\beta+1-\delta},
\end{aligned}$$

e assim obtemos a segunda desigualdade em (i).

4° Passo) Suponhamos $\alpha+3/2 \le \delta \le \alpha+\beta+2$ e $2/n \le \theta \le \pi/2$. Por 3.1.3(vii), 3.1.7, 3.1.6

e 3.1.3(i), obtemos que

$$\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| \le Cn^{-\delta}\left(n^{\delta-1}+n^{\alpha+1/2}\theta^{-\alpha-\delta-3/2}+\sum_{k=1}^{n-1}|H_k(n,\delta)|\left|P_k^{(\alpha+\delta+1,\beta)}(\cos\theta)\right|\right) \tag{1}$$

$$\le C\left(n^{-1}+n^{\alpha-\delta+1/2}\right)\theta^{-\alpha-\delta-3/2}+Cn^{-\delta}\sum_{1\le k\le 1/\theta}\sum_{j=0}^{\delta-1}(n-k)^j k^{2\alpha+\delta-j+1}$$

$$+\,Cn^{-\delta}\left(\sum_{1/\theta\le k\le n/2}\sum_{j=0}^{\delta-1}(n-k)^j k^{\alpha-j-1/2}\right)\theta^{-\alpha-\delta-3/2}$$

$$+\,Cn^{-\delta}\left(\sum_{n/2\le k\le n-1}\sum_{j=0}^{\delta-1}(n-k)^j k^{\alpha-j-1/2}\right)\theta^{-\alpha-\delta-3/2}$$

$$\le Cn^{-1}\theta^{-\alpha-\delta-3/2}+CS_1+CS_2\theta^{-\alpha-\delta-3/2}+CS_3\theta^{-\alpha-\delta-3/2}.$$

Seja $1/\theta \le k \le n/2$ e tomemos $f(x)=(n-k)^x k^{-x}=e^{x\ln[(n-k)/k]}$. Como $k\le n/2$, então $\ln[(n-k)/k]>0$ e assim o máximo de $f(x)$ para $0\le x\le \delta-1$ é assumido em $x=\delta-1$. Portanto

$$(n-k)^j k^{\alpha-j-1/2}\le (n-k)^{\delta-1}k^{\alpha-\delta+1/2},\quad 0\le j\le \delta-1.$$

Assim

$$S_2=n^{-\delta}\sum_{1/\theta\le k\le n/2}\sum_{j=0}^{\delta-1}(n-k)^j k^{\alpha-j-1/2}\le \delta n^{-\delta}\sum_{1/\theta\le k\le n/2}(n-k)^{\delta-1}k^{\alpha-\delta+1/2}$$

$$\le \delta n^{-\delta}n^{\delta-1}\sum_{1/\theta\le k\le n/2}k^{\alpha-\delta+1/2}\le \delta n^{-1}\int_{1/\theta-1}^{n/2}t^{\alpha-\delta+1/2}dt\le Cn^{-1}\theta^{-\alpha+\delta-3/2},$$

e logo

$$S_2\theta^{-\alpha-\delta-3/2}\le Cn^{-1}\theta^{-2\alpha-3}. \tag{2}$$

Seja $1\le k\le 1/\theta$. Podemos mostrar que

$$(n-k)^j k^{2\alpha+\delta-j+1}\le (n-k)^{\delta-1}k^{2\alpha+2},\quad 0\le j\le \delta-1,$$

e assim

$$S_1=n^{-\delta}\sum_{1\le k\le 1/\theta}\sum_{j=0}^{\delta-1}(n-k)^j k^{2\alpha+\delta-j+1}\le \delta n^{-\delta}\sum_{1\le k\le 1/\theta}(n-k)^{\delta-1}k^{2\alpha+2} \tag{3}$$

$$\le \delta n^{-1}\int_1^{1/\theta+1}t^{2\alpha+2}dt\le cn^{-1}\theta^{-2\alpha-3}.$$

Seja agora $n/2 \leq k \leq n-1$. Como a função $f(x) = (n-k)^x k^{-x}$, $0 \leq x \leq \delta - 1$, é decrescente, segue que

$$(n-k)^j k^{\alpha - j - 1/2} \leq k^{\alpha - 1/2}, \quad 0 \leq j \leq \delta - 1,$$

e assim para $\alpha > -1/2$,

$$S_3 \leq \delta n^{-\delta} \sum_{n/2 \leq k \leq n-1} k^{\alpha - 1/2} \leq C n^{\alpha - \delta + 1/2}, \tag{4}$$

Se $-1/2 < \alpha < 1/2$,

$$S_3 \leq \delta n^{-\delta} \int_{n/2-1}^{n-1} t^{\alpha - 1/2} dt \leq C n^{-\delta + \alpha + 1/2}. \tag{5}$$

e se $\alpha = -1/2$, obtemos a mesma desigualdade.

Por (1), (2), (3) e (4) e (5) segue que

$$\left| S_n^\delta (\cos \theta) \right| \leq C n^{-1} \theta^{-2\alpha - 3} + C n^{-1} \theta^{-\alpha - \delta - 3/2},$$

e assim obtemos a desigualdade em (iii).

Corolário 3.1.9. *Consideremos as somas de Cesàro S_n^δ relativas à sequência $\left(\widetilde{Z}^{(k)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$, $\widetilde{Z}^{(k)}(t) = (d + 2k - 1)/(d-1) P_k^{(d-1)/2}(t)$, isto é,*

$$S_n^\delta (t) = \frac{1}{C_n^\delta} \sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^\delta \widetilde{Z}^{(m)}(t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Então existe uma constante positiva C, independente de n, tal que para $d \geq 1$,
(i) se $0 \leq \delta \leq d$, então

$$\left| S_n^\delta (\cos \theta) \right| \leq C \begin{cases} n^d, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ n^{d-1-\delta}, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi; \end{cases}$$

(ii) se $0 \leq \delta \leq (d+1)/2$, então

$$\left| S_n^\delta (\cos \theta) \right| \leq C \begin{cases} n^{(d-2\delta-1)/2} \theta^{-(d+2\delta+1)/2}, & 2/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ n^{(d-2\delta-1)/2} (\pi - \theta)^{-(d-1)/2}, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi - 2/n; \end{cases}$$

(iii) se $(d+1)/2 \leq \delta \leq d$, então

$$\left| S_n^\delta (\cos \theta) \right| \leq C n^{-1} (\pi - \theta)^{-d+\delta}, \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi - 2/n.$$

Demonstração. Observamos que em virtude da propriedade 3.1.3(iii), que relaciona os polinômios de Jacobi com os polinômios ultraesféricos, podemos concluir que as somas de Cesàro para os polinômios ultraesféricos podem ser vistas como um caso particular das somas de Cesàro para os polinômios de Jacobi, quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2 = (d-2)/2$.

Temos que (i) segue imediatamente de 3.1.8(i) quando tomamos $\alpha = \beta = (d-2)/2$. Da mesma forma a primeira desigualdade em (ii) segue de 3.1.8(ii).

Seja $\pi/2 \leq \theta \leq \pi - 2/n$. Tomemos $\gamma = \pi - \theta$, $2/n \leq \gamma \leq \pi/2$. Por 2.1.2($v$) temos que

$$\left|P_n^\lambda(\cos\theta)\right| = \left|P_n^\lambda(-\cos\gamma)\right| = \left|P_n^\lambda(\cos\gamma)\right|$$

e assim, como na demonstração de todas as estimativas do Lema 3.1.8 trabalhamos sempre com o módulo dos polinômios de Jacobi, segue por 3.1.8(ii) que

$$\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| = \left|S_n^\delta(\cos\gamma)\right| \leq Cn^{(d-2\delta-1)/2}\gamma^{-(d+2\delta+1)/2}.$$

Para obter a segunda desigualdade em (ii) basta observar que $-(d+2\delta+1)/2 < -(d-1)/2$.

Seja $\pi/2 \leq \theta \leq \pi - 2/n$ e $\gamma = \pi - \theta$. Por 3.1.8(iii),

$$\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right| \leq Cn^{-1}\left(\gamma^{-d-1} + \gamma^{-(d+2\delta+1)/2}\right).$$

Como $(d+1)/2 \leq \delta \leq d$ obtemos que $-(d+1) \leq -d+\delta$ e $-(d+2\delta+1)/2 \leq -d+\delta$. Assim ($iii$) segue da desigualdade acima.

Observação 3.1.10. *Sejam $\lambda > 0, \delta > 0$. Usando a relação*

$$\frac{1}{(1-2rt+r^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\lambda(t)r^n, \qquad |t| \leq 1, \;\; |r| < 1,$$

podemos obter, para $|t| \leq 1, |r| < 1$, a relação

$$\frac{\lambda(1-r^2)}{(1-2rt+r^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)P_n^\lambda(t)r^n.$$

Agora, usando o desenvolvimento em série de potências da função $(1-r)^{-(\delta+1)}$ (série binomial), podemos mostrar que para $|t| \leq 1, |r| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(1+r)}{(1-r)^\delta(1-2rt+r^2)^\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^\delta (k+\lambda)P_k^\lambda(t)\right)r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n^\delta S_n^\delta(t)\right)r^n.\end{aligned}$$

Tomando $r = 1/z$, *multiplicando ambos os membros da relação acima por* z^{k-1} *e tomando* $t = \cos\theta$, *obtemos*

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(1+z)z^{k+\delta+2\lambda}}{(z-1)^{\delta}\left(1-2z\cos\theta+z^2\right)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{\delta}S_n^{\delta}(\cos\theta)\right]z^{k-n-1}.$$

O resíduo de $\varphi(z)$ *no pólo* $z_0 = 0$ *é* $C_k^{\delta}S_k^{\delta}(\cos\theta)$. *Segue então pelo Teorema de Resíduo que*

$$C_k^{\delta}S_k^{\delta}(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)dz, \tag{1}$$

onde C *é uma curva fechada, orientada no sentido positivo e envolvendo as três singularidades* $z_1 = e^{-i\theta}$, $z_2 = 1$ *e* $z_3 = e^{-i\theta}$ *de* $\varphi(z)$.

E. Kogbetliantz estudou estimativas para $\left|S_n^{\delta}(\cos\theta)\right|$ *no seu artigo de 1924 (ver [6]) utilizando a representação integral* (1) *no caso* $0 < \lambda < 1$, *obtendo depois estimativas para o caso geral* $\lambda > 0$, *usando indução sobre* $N \in \mathbb{N}$, $N - 1 < \lambda \leq N$. *Embora as desigualdades para* $\left|S_n^{\delta}(\cos\theta)\right|$ *que necessitamos neste capítulo possam ser encontradas em [6], observamos que as demonstrações neste artigo são trabalhosas e de difícil generalização para outros casos, como o caso importante dos polinômios de Jacobi. Assim sendo, preferimos, mesmo tendo que utilizar algumas propriedades dos polinômios de Jacobi sem demonstração, obter as estimativas para as somas de Cesàro, primeiramente para os polinômios de Jacobi como está no artigo de A. Bonami e J-L Clerc [1] e fazendo algumas demonstrações como no livro de G. Szegö [13].*

Lema 3.1.11. *Consideremos a* L^p*- norma da soma de Cesàro* S_n^{δ} *do Corolário 3.1.9 dada por*

$$\left\|S_n^{\delta}\right\|_p = \left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(d-2)/2}\left|S_n^{\delta}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

(*i*) *Se* $0 \leq \delta \leq (d+1)/2$ *então existe uma constante* $C > 0$ *independente de* n, *tal que*

$$\left\|S_n^{\delta}\right\|_p \leq C\begin{cases} n^{(d-2\delta-1)/2}, & 1 \leq p < 2d/(d+2\delta+1), \\ n^{(d-2\delta-1)/2}(\ln n)^{(d+2\delta+1)/2d}, & p = 2d/(d+2\delta+1), \\ n^{d(1-1/p)}, & p > 2d/(d+2\delta+1). \end{cases}$$

(*ii*) *Se* $(d+1)/2 \leq \delta \leq d$ *então existe uma constante* $C > 0$ *independente de* n, *tal que*

$$\left\|S_n^{\delta}\right\|_p \leq Cn^{d(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Demonstração. Para obter cada uma das desigualdades desta demonstração, faremos uso do Corolário 3.1.9. Como todas as contantes C que aparecem no enunciado deste corolário dependem dos parâmetros d e δ, então todas as constantes que surgirem nesta demonstração dependerão pelo menos de d e δ, algumas dependerão também de p, e iremos denotar todas elas simplesmente por C.

Temos que $\operatorname{sen}\theta \leq \theta$ se $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e logo se $1 \leq p < \infty$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\|S_n^\delta\right\|_p^p &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{(d-2)/2} \left|S_n^\delta(x)\right|^p dx \qquad (1)\\
&= \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)^{(d-2)/2} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= \int_0^\pi \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p (\operatorname{sen}\theta)^{d-1} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p (\operatorname{sen}\theta)^{d-1} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p (\operatorname{sen}\theta)^{d-1} d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p \theta^{d-1} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p (\pi-\theta)^{d-1} d\theta \\
&= I + I'.
\end{aligned}$$

1° Passo) Vamos obter estimativas para a integral I em (1) no caso $0 \leq \delta \leq (d+1)/2$. Tomemos $r = 2d/(d+2\delta+1)$. Pelo Corolário 3.1.9(i) temos que

$$\int_0^{2/n} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p \theta^{d-1} d\theta \leq C n^{dp} \int_0^{2/n} \theta^{d-1} d\theta \leq C_d n^{d(p-1)}. \qquad (2)$$

Agora se $p \neq r$, pelo Corolário 3.1.9(ii) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{2/n}^{\pi/2} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p \theta^{d-1} d\theta &\leq C n^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} \int_{2/n}^{\pi/2} \theta^{-\left(\frac{d+1}{2}+\delta\right)p+d-1} d\theta \qquad (3)\\
&= \frac{C\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\left(\frac{d+1+2\delta}{2}\right)p}}{d-\left(\frac{d+1+2\delta}{2}\right)p} n^{\left(\frac{d-1-2\delta}{2}\right)p} - \frac{C 2^{-\left(\frac{d+1+2\delta}{2}\right)p+d}}{d-\left(\frac{d+1+2\delta}{2}\right)p} n^{d(p-1)}.
\end{aligned}$$

Se $1 \leq p < r$ então $d - (d+2\delta+1)p/2 > 0$ e $d(p-1) < (d-2\delta-1)p/2$. Assim por (2) e (3) obtemos

$$I \leq C n^{(d-2\delta-1)p/2}. \qquad (4)$$

Se $p > r$ então $d - (d+2\delta+1)p/2 < 0$ e $d(p-1) > (d-2\delta-1)p/2$ e assim por (2) e (3) obtemos

$$I \leq C n^{d(p-1)}. \qquad (5)$$

Se $p = r$ então $-(d + 2\delta + 1)\, p/2 + d = 0$ e assim usando (2) obtemos

$$\begin{aligned} I &\leq Cn^{d(p-1)} + Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} \int_{2/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} \qquad (6) \\ &= Cn^{d(p-1)} + C\left(\ln \frac{\pi}{4}\right) n^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} + C\left(\ln n\right) n^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} \\ &\leq Cn^{(d-2\delta-1)r/2} \ln n. \end{aligned}$$

2° Passo) Vamos obter estimativas para a integral I' em (1) no caso $0 \leq \delta \leq (d+1)/2$. Tomemos $t = 2d/(d-1)$. Temos que $r = 2d/(d + 2\delta + 1) < 2$ e $t > 2$ e pelo Corolário 3.1.9(i) temos que

$$\int_{\pi-2/n}^{\pi} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p (\pi-\theta)^{d-1}\, d\theta \leq Cn^{(d-1-\delta)p} \int_0^{2/n} \theta^{d-1} d\theta = \frac{C2^d}{d} n^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p + \frac{d-1}{2}p - d}. \qquad (7)$$

Agora se $p \neq t$, pelo Corolário 3.1.9(ii) temos que

$$\int_{\pi/2}^{\pi-2/n} \left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p (\pi-\theta)^{d-1}\, d\theta \leq Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} \int_{2/n}^{\pi/2} \theta^{d-1-\frac{d-1}{2}p} d\theta \qquad (8)$$

$$= \frac{C\left(\frac{\pi}{2}\right)^{d-\frac{d-1}{2}p}}{d - \frac{d-1}{2}p} n^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} - \frac{C2^{d-\frac{d-1}{2}p}}{d-\frac{d-1}{2}p} n^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p - d + \frac{d-1}{2}p}.$$

Se $1 \leq p < t$ então $(d-1)\, p/2 - d < 0$ e assim por (7) e (8) temos que

$$I' \leq Cn^{(d-2\delta-1)p/2}. \qquad (9)$$

Se $p > t$ então $(d-1)\, p/2 - d > 0$ e assim por (7) e (8) temos que

$$I' \leq Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p + \left(\frac{d-1}{2}\right)p - d} = Cn^{d(p-1)-p(\delta+1)}. \qquad (10)$$

Se $p = t$ então $(d-1)\, p/2 - d = 0$ e assim usando (7) obtemos

$$\begin{aligned} I' &\leq Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} + Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} \int_{2/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} \qquad (11) \\ &= Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} + C\left(\ln \frac{\pi}{4}\right) n^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} + Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} \ln n \\ &\leq Cn^{\left(\frac{d-1}{2}-\delta\right)p} \ln n. \end{aligned}$$

3° Passo) Vamos obter as estimativas da parte (i). Se $1 \leq p < r$, então $p < t$ e assim por (1), (4) e (9) obtemos

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq Cn^{(d-2\delta-1)/2}. \qquad (12)$$

Se $p=r$, então $p<t$ e assim por (1), (6) e (9) obtemos

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p^p \leq Cn^{(d-2\delta-1)r/2}\ln n + Cn^{(d-2\delta-1)r/2} \leq Cn^{(d-2\delta-1)r/2}\ln n.$$

Logo

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq Cn^{(d-2\delta-1)/2}\left(\ln n\right)^{1/r}. \tag{13}$$

Se $r<p<t$ então $d(p-1)>(d-2\delta-1)\,p/2$ e assim por (1), (5) e (9) obtemos

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq \left(Cn^{d(p-1)} + Cn^{(d-2\delta-1)p/2}\right)^{1/p} \leq Cn^{d(1-1/p)}. \tag{14}$$

Seja $p=t$. Como $t>2$ segue que $d(t-1)\geq(d-2\delta-1)\,t/2+1$. Então, como $\ln n\leq n$, por (1), (5) e (11) obtemos

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq \left(Cn^{d(p-1)} + Cn^{(d-2\delta-1)p/2}\ln n\right)^{1/p} \leq Cn^{d(1-1/p)}. \tag{15}$$

Seja $p>t$. Como $t>2>r$, então $(d-2\delta-1)\,p/2+(d-1)p/2-d\leq d(p-1)$ e assim por (1), (5) e (10) obtemos

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq Cn^{d(1-1/p)}. \tag{16}$$

Assim concluímos a demontração de (i).

4° Passo) Suponhamos $(d+1)\,/2\leq\delta<d$ e tomemos $u=d/\left(d-\delta\right)$. Segue por (i) e (ii) do Corolário 3.1.9 e do fato de $(d-2\delta-1)/2\leq 0\leq d(p-1)$ que para $1\leq p<\infty$ temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p\theta^{d-1}d\theta \qquad (17)\\ &\leq \int_0^{2/n} n^{dp}\theta^{d-1}d\theta + \int_{2/n}^{\pi/2} n^{(d-2\delta-1)p/2}\theta^{d-1}\theta^{-(d+2\delta+1)/2}d\theta\\ &\leq Cn^{d(p-1)} + Cn^{(d-2\delta-1)/2}\\ &\leq Cn^{d(p-1)}. \end{aligned}$$

Novamente pelo Corolário 3.1.9(i) obtemos

$$\int_{\pi-2/n}^{\pi}\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p(\pi-\theta)^{d-1}d\theta \leq Cn^{(d-1-\delta)p-d}. \tag{18}$$

e para $p\neq u$, pelo Corolário 3.1.9(iii) obtemos

$$\int_{\pi/2}^{\pi-2/n}\left|S_n^\delta(\cos\theta)\right|^p(\pi-\theta)^{d-1}d\theta \leq Cn^{-p}\int_{2/n}^{\pi/2}\theta^{-(d-\delta)p+d-1}d\theta \tag{19}$$

$$= \frac{C\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-(d-\delta)p+d}}{d-(d-\delta)p} n^{-p} - \frac{C2^{-(d-\delta)p+d}}{d-(d-\delta)p} n^{(d-\delta)p-d-p}.$$

Se $1 \leq p < u$ temos que $d - p(d-\delta) > 0$ e assim por (18) e (19)

$$I' \leq Cn^{-p} + Cn^{(d-1-\delta)p-d} \leq Cn^{-p}. \tag{20}$$

Se $p > u$ temos que $d - p(d-\delta) < 0$ e assim por (18) e (19) temos que

$$I' \leq Cn^{d(p-1)-p(\delta+1)}. \tag{21}$$

Se $p = u$ então $d - p(d-\delta) = 0$ e assim por (18) e pelo Corolário 3.1.9(iii) obtemos

$$I' \leq Cn^{-p} \int_{2/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} + C_d n^{-p} \leq Cn^{-p} \ln n. \tag{22}$$

Vamos agora obter a estimativa (ii). Se $1 \leq p < u$, então por (1), (17) e (20),

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq Cn^{d(1-1/p)}. \tag{23}$$

Se $p = u$, então por (1), (17) e (22) temos que

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq \left(Cn^{d(p-1)} + Cn^{-p+1}\right)^{1/p} \leq Cn^{d(1-1/p)}. \tag{24}$$

Seja $p > u$. Então por (1), (17) e (21) obtemos

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq Cn^{d(1-1/p)}. \tag{25}$$

Assim concluímos (ii).

Definição 3.1.12. *Seja $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica. Definimos $\Delta^0\lambda_k = \lambda_k$, $\Delta^1\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ e definimos indutivamente*

$$\Delta^{n+1}\lambda_k = \Delta^n\lambda_k - \Delta^n\lambda_{k+1}.$$

Proposição 3.1.13. *Para qualquer $n, k \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\Delta^n\lambda_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \lambda_{k+j}. \tag{1}$$

Demonstração. Temos que

$$\Delta^2\lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2},$$

$$\Delta^3\lambda_k = \lambda_k - 3\lambda_{k+1} + 3\lambda_{k+2} - \lambda_{k+3}.$$

Suponhamos agora que (1) seja verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$ e mostremos que vale para $n+1$

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}\lambda_k &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} \lambda_{k+j} - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} \lambda_{k+j+1} \\ &= \lambda_k + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right] \lambda_{k+j} + (-1)^{n+1}\lambda_{k+n+1} \\ &= \lambda_k + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \binom{n+1}{j} \lambda_{k+j} + (-1)^{n+1}\lambda_{k+n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j \binom{n+1}{j} \lambda_{k+j}.\end{aligned}$$

Proposição 3.1.14. *Seja $f(x)$ uma função real definida para $x \geq 0$ e com derivadas até a ordem n. Se $\lambda_k = f(x+k)$, escrevemos $\Delta^1 f(x) = \Delta^1\lambda_0 = f(x) - f(x+1)$ e $\Delta^{n+1} f(x) = \Delta^n f(x) - \Delta^n f(x+1) = \Delta^n\lambda_0 - \Delta^n\lambda_1$. Então*

$$\Delta^n f(x) = (-1)^n \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n)}(x + t_1 + \cdots + t_n)dt_1 \dots dt_n \tag{1}$$

e

$$|\Delta^n f(x)| \leq \max_{0\leq t\leq n} \left|f^{(n)}(x+t)\right|. \tag{2}$$

Demonstração. Para $n = 1$, (1) é verdadeira pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pois

$$-\Delta^1 f(x) = f(x+1) - f(x) = \int_0^1 f'(x+t)dt.$$

Suponhamos agora que (1) seja verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$. Vamos demonstrar que (1) também é verdadeira para $n+1$. Novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} f(x) &= \Delta^n f(x) - \Delta^n f(x+1) \\ &= (-1)^n \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n)}(x + t_1 + \dots + t_n) dt_1 \dots dt_n \\ &- (-1)^n \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n)}(x + t_1 + \dots + t_n + 1) dt_1 \dots dt_n \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n+1)}(x + t_1 + \dots + t_{n+1}) dt_1 \dots dt_{n+1}\end{aligned}$$

e portanto obtemos (1) para $n+1$. De (1) segue que

$$|\Delta^n f(x)| \leq \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| f^{(n)}(x + t_1 + \dots + t_n) \right| dt_1 \dots dt_n \leq \max_{0 \leq t \leq n} \left| f^{(n)}(x+t) \right|.$$

Lema 3.1.15. *(A transformada de Abel) Sejam $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ duas sequências quaisquer e seja $U_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$. Então*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n. \tag{1}$$

Demonstração. Para $n = 1$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1} u_k v_k &= u_0 v_0 + u_1 v_1 = u_0(v_0 - v_1) + (u_0 + u_1) v_1 \\ &= \sum_{k=0}^{0} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_1 v_1.\end{aligned}$$

Suponhamos agora que a equação (1) seja verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$. Vamos demonstrar que (1) também é verdadeira para $n+1$. Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} u_k v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n + u_{n+1} v_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n (v_n - v_{n+1}) + U_n v_{n+1} + u_{n+1} v_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_{n+1} v_{n+1}.\end{aligned}$$

Lema 3.1.16. *Para qualquer sequência de funções $(Z_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ e qualquer $N, n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$C_n^N S_n^N(x) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_N=0}^{k_{N-1}} \sum_{j=0}^{k_N} Z_j(x). \tag{1}$$

Demonstração. Vamos demonstrar (1) usando indução sobre N. Para $N = 0$ temos que

$$C_n^0 S_n^0(x) = \sum_{j=0}^{n} Z_j(x)$$

e como $C_m^1 = m + 1$ temos que

$$\begin{aligned}
C_n^1 S_n^1(x) &= \sum_{m=0}^{n} (n - m + 1) Z_m(x) \\
&= (n+1)Z_0(x) + nZ_1(x) + \cdots + 2Z_{n-1}(x) + Z_n(x) \\
&= Z_0(x) + (Z_0(x) + Z_1(x)) + \cdots + (Z_0(x) + \cdots + Z_n(x)) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} Z_j(x).
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que (1) seja verdadeira para $0, 1, \ldots, N$. Temos que

$$C_m^{N+1} = \frac{(m + N + 1)}{N + 1} C_m^N$$

e

$$(n - j + N + 1) = (n - k_1 + 1) + (k_1 - k_2 + 1) + \cdots + (k_{N-1} - k_N + 1) + (k_N - j + 1).$$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos a sequência

$$W_m(x) = \frac{(n - m) + N + 1}{N + 1} Z_m(x).$$

Então, usando a hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned}
C_n^{N+1} S_n^{N+1}(x) &= \sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^N W_m(x) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_N=0}^{k_{N-1}} \sum_{j=0}^{k_N} \frac{(n-j) + N + 1}{N+1} Z_j(x) \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k_1=0}^{n} (n - k_1 + 1) \sum_{k_2=0}^{k_1} \ldots \sum_{j=0}^{k_N} Z_j(x) + \cdots \\
&+ \frac{1}{N+1} \sum_{k_1=0}^{n} \cdots \sum_{k_N=0}^{k_{N-1}} \sum_{j=0}^{k_N} (k_N - j + 1) Z_j(x) \\
&= \sum_{k_1=0}^{n} \cdots \sum_{j=0}^{k_N} \sum_{l=0}^{j} Z_l(x).
\end{aligned}$$

Lema 3.1.17. *Para qualquer sequência de números* $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$, *qualquer sequência de funções* $(Z_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ *e quaisquer* $n, N \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ *temos que*

$$\sum_{m=0}^{n}\lambda_m Z_m(x) = \sum_{m=0}^{n-N-1} C_m^N S_m^N(x)\Delta^{N+1}\lambda_m + \sum_{m=0}^{N} C_{n-m}^m S_{n-m}^m(x)\Delta^m\lambda_{n-m}. \tag{1}$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.16 temos que

$$C_n^N S_n^N(x) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\dots\sum_{k_N=0}^{k_{N-1}}\sum_{j=0}^{k_N} Z_j(x) = \sum_{k_1=0}^{n} C_{k_1}^{N-1} S_{k_1}^{N-1}(x). \tag{2}$$

Utilizando a tranformada de Abel e (2) obtemos que

$$\begin{aligned} K_n = \sum_{m=0}^{n}\lambda_m Z_m(x) &= \sum_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{m} Z_j(x)\right)(\lambda_m - \lambda_{m+1}) + \left(\sum_{m=0}^{n} Z_m(x)\right)\lambda_n \qquad (3)\\ &= \sum_{m=0}^{n-1} C_m^0 S_m^0(x)\Delta^1\lambda_m + S_n^0(x)\Delta^0\lambda_n, \end{aligned}$$

isto é, obtemos (1) para $N = 0$.

Vamos supor que (1) seja verdadeira para um certo $N \in \mathbb{N}$. Então aplicando a transformada de Abel e (2),

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-N-1} C_m^N S_m^N(x)\Delta^{N+1}\lambda_m &= \sum_{m=0}^{n-N-2}\left(\sum_{k_1=0}^{m} C_{k_1}^N S_{k_1}^N(x)\right)\left(\Delta^{N+1}\lambda_m - \Delta^{N+1}\lambda_{m+1}\right) \qquad (4)\\ &+ \left(\sum_{m=0}^{n-N-1} C_m^N S_m^N(x)\Delta^{N+1}\lambda_{n-N-1}\right)\\ &= \sum_{m=0}^{n-N-2} C_m^{N+1} S_m^{N+1}(x)\Delta^{N+2}\lambda_m + C_{n-N-1}^{N+1} S_{n-N-1}^{N+1}(x)\Delta^{N+1}\lambda_{n-N-1}. \end{aligned}$$

Portanto o resultado desejado para $N+1$ segue pela hipótese de indução ((1) para N) e por (4).

Definição 3.1.18. *Seja* $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números complexos e seja* $1 \leq p, q \leq \infty$. *Se para todo* $\varphi \in L^p$ *existe uma função* $f = \Lambda\varphi \in L^q$ *com expansão formal em harmônicos esféricos*

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi$$

tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} = \sup\left\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in L^p, \|\varphi\|_p \leq 1\right\} < \infty,$$

dizemos que Λ *é um operador multiplicador de tipo-*(p,q) *com norma* $\|\Lambda\|_{p,q}$.

3.2 Teorema de multiplicadores

Teorema 3.2.1. *Seja*

$$N = \begin{cases} (d+1)/2; & d = 3, 5, \ldots, \\ (d+2)/2; & d = 2, 4, \ldots, \end{cases}$$

e seja $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números complexos. Sejam* $1 \leq r, p, q \leq \infty$ *tal que* $1 - 1/r = (1/p - 1/q)_+$ *. Suponhamos que*

$$\lim_{k\to\infty} |\Delta^s \lambda_k| \, k^s = 0, \quad 0 \leq s \leq N \tag{1}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)} < \infty. \tag{2}$$

Então existe uma constante positiva C tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} \leq |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)}. \tag{3}$$

Além disso, se $\varphi \in L^p(S^d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$ *e*

$$t_n(\varphi) = \lambda_0 c_{0,1}(\varphi) + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k\right) * \varphi,$$

temos que

$$\|\Lambda\varphi - t_n(\varphi)\|_q \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)}. \tag{4}$$

Demonstração. Se demonstrarmos que o teorema é válido para $p = q$, então ele também será válido para $q < p$ desde que $\|.\|_q \leq \|.\|_p$ quando $q < p$. Portanto, é suficiente considerarmos $p \leq q$.

Fixemos $\varphi_m \in \bigoplus_{j=0}^{m} \mathcal{H}_j$ com $\|\varphi_m\|_p \leq 1$, onde $\mathcal{H}_j$ é o espaço dos harmônicos esféricos de grau j. Seja

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \widetilde{Z}^{(k)}.$$

Pelo Lema 3.1.17 temos que

$$K_n * \varphi_m = \left(K^1_{n-N-1} + K^2_n\right) * \varphi_m,$$

onde

$$K_n^1 = \sum_{k=1}^{n} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k \qquad \text{e} \qquad K_n^2 = \sum_{k=0}^{N} C_{n-k}^k S_{n-k}^k \Delta^k \lambda_{n-k}.$$

Segue da Observação 3.1.7 e do Lema 3.1.11(ii) que

$$\left\|K_n^1\right\|_r \leq \sum_{k=1}^{n} C_k^N \left\|S_k^N\right\|_r \left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| \leq C \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)}. \tag{5}$$

Sejam $s, k \in \mathbb{N}$ e

$$S_k^{s,m} = \frac{1}{C_k^s} \sum_{j=0}^{m} C_{k-j}^s \widetilde{Z}^{(j)}; \;\; k > m.$$

Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned} S_k^s * \varphi_m &= S_k^s * \left(\sum_{j=0}^{m} Y^{(j)} \right) = \sum_{j=0}^{m} \left(S_k^s * Y^{(j)} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \left(S_k^{s,m} * Y^{(j)} \right) = S_k^{s,m} * \varphi_m, \end{aligned}$$

pois $\widetilde{Z}^{(k)} * Y^{(j)} = 0$ para todo $m < k$. Portanto, usando a desigualdade de Young (Teorema 1.1.20) e 3.1.7, obtemos que

$$\begin{aligned} \left|\Delta^s \lambda_k\right| C_k^s \left\|S_k^s * \varphi_m\right\|_q &\leq \left|\Delta^s \lambda_k\right| C_k^s \left\|S_k^{s,m}\right\|_r \left\|\varphi_m\right\|_p \\ &\leq C k^s \left|\Delta^s \lambda_k\right| \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{C_{k-j}^s}{C_k^s} \left\|\widetilde{Z}^{(j)}\right\|_r \right) \\ &\leq C k^s \left|\Delta^s \lambda_k\right| \left(\sum_{j=0}^{m} \left\|\widetilde{Z}^{(j)}\right\|_r \right) \\ &\leq C_m \left|\Delta^s \lambda_k\right| k^s. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \left\|K_n^2 * \varphi_m\right\|_q &\leq \sum_{k=0}^{N} C_{n-k}^k \left|\Delta^k \lambda_{n-k}\right| \left\|S_{n-k}^k * \varphi_m\right\|_q \\ &\leq C_m \sum_{k=0}^{N} \left|\Delta^k \lambda_{n-k}\right| (n-k)^k. \end{aligned}$$

Agora, usando (1) obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K_n * \varphi_m - K^1_{n-N-1} * \varphi_m\right\|_q = \lim_{n\to\infty}\left\|K^2_n * \varphi_m\right\|_q \tag{6}$$
$$\leq C_m \sum_{k=0}^{N} \lim_{n\to\infty}\left|\Delta^k \lambda_{n-k}\right| (n-k)^k = 0.$$

Entretanto, pelo Lema 3.1.11, por 3.1.7 e por (2)

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K^1_{n+u} - K^1_n\right\|_r = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=n+1}^{n+u} C^N_k S^N_k \Delta^{N+1}\lambda_k\right\|_r$$
$$\leq C \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+u}\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)} = 0,$$

o que implica que $(K^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^r([-1,1],(1-t^2)^{(d-2)/2}\,dt)$. Seja então $K \in L^r([-1,1],(1-t^2)^{(d-2)/2}\,dt)$ tal que $(K^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para K em L^r. Então pela desigualdade de Young

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K * \varphi_m - K^1_n * \varphi_m\right\|_q \leq \lim_{n\to\infty}\left\|K - K^1_n\right\|_r \|\varphi_m\|_p = 0,$$

ou seja, $(K^1_n * \varphi_m)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $K * \varphi_m$ em $L^q(S^d)$. Logo, usando (6) podemos concluir que $(K_n * \varphi_m)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $K * \varphi_m$ em $L^q(S^d)$. Portanto, mostramos que para qualquer polinômio $\varphi_m \in \bigoplus_{j=0}^{m}\mathcal{H}_j$ com $\|\varphi_m\|_p \leq 1$, a sequência de funções $K^1_n * \varphi_m$ converge em $L^q(S^d)$ para a função

$$K * \varphi_m = \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \widetilde{Z}^{(k)}\right) * \varphi_m, \quad n \geq m.$$

Agora, temos que

$$\varphi_m = \sum_{k=0}^{m} Y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} Y^{(k)}_j\right) = c_{0,1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j} Y^{(k)}_j\right),$$

e assim para todo $n \geq m$

$$\begin{aligned}
\Lambda\varphi_m &= \Lambda\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j}Y_j^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{m}\lambda_k\left(\sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j}Y_j^{(k)}\right) \qquad (7)\\
&= \lambda_0 c_{0,1} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(\sum_{j=1}^{a_k} c_{k,j}Y_j^{(k)}\right)\\
&= \lambda_0 c_{0,1} + \left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\widetilde{Z}^{(k)}\right) * \varphi_m = \lambda_0 c_{0,1} + K * \varphi_m\\
&= \lambda_0 c_{0,1} + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k\right) * \varphi_m = \lambda_0 c_{0,1} + K_n^1 * \varphi_m.
\end{aligned}$$

Então segue de $(5), (7)$, da desigualdade de Young e do fato que $|c_{0,1}| \leq \|\varphi_m\|_p \leq 1$ que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda\varphi_m\|_q &\leq |\lambda_0|\,|c_{0,1}| + \left\|K_m^1\right\|_r \|\varphi_m\|_p \qquad (8)\\
&\leq |\lambda_0| + \left\|K_m^1\right\|_r \leq |\lambda_0| + C\sum_{k=1}^{m}\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, 3.1.7 e o Lema 3.1.11(ii) obtemos, para $n < m$ que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda\varphi_m - t_n(\varphi_m)\|_q &= \left\|K_m^1 * \varphi_m - K_n^1 * \varphi_m\right\|_q = \left\|\left(\sum_{k=n+1}^{m} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k\right) * \varphi_m\right\|_q \qquad (9)\\
&\leq \left\|\sum_{k=n+1}^{m} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k\right\|_r \|\varphi_m\|_p \leq C\sum_{k=n+1}^{m}\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)}\\
&\leq C\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)}.
\end{aligned}$$

O caso $n \geq m$ é trivial, visto que $\Lambda\varphi_m = t_n(\varphi_m)$.

Como o conjunto formado por todas as funções $\varphi_m \in \overset{m}{\underset{j=0}{\oplus}}\mathcal{H}_j$, $m \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_m\|_p \leq 1$, é denso na bola unitária de $L^p(S^d)$, temos que (3) segue de (8). Finalmente seja $\varphi \in L^p(S^d)$ tal que $\|\varphi\|_p \leq 1$ e seja $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $\varphi_m \in \overset{m}{\underset{j=0}{\oplus}}\mathcal{H}_j$, uma sequência de $L^p(S^d)$ que converge para φ em $L^p(S^d)$. Temos que $\Lambda\varphi_m \longrightarrow \Lambda\varphi$ e $t_n(\varphi_m) = \lambda_0 c_{0,1}(\varphi_m) + K_n^1 * \varphi_m \longrightarrow t_n(\varphi)$ em $L^q(S^d)$. Assim por (9) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Lambda\varphi - t_n(\varphi)\|_q &= \lim_{m\to\infty}\|\Lambda\varphi_m - t_n(\varphi_m)\|_q\\
&\leq C\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)},
\end{aligned}$$

o que demonstra (4).

3.3 Aplicações

Definição 3.3.1. *Seja A um subconjunto convexo, compacto e radialmente simétrico de um espaço de Banach X com bola unitária B. A n-largura de Kolmogorov de A em X é definida por*

$$d_n(A, X) = \inf_{X_n} \sup_{f \in A} \inf_{g \in X_n} \|f - g\|,$$

onde X_n percorre todos os subespaços de X de dimensão n.

Notação 3.3.2. *Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, denotamos $\Lambda^\gamma = (\mu_k^\gamma)_{k \in \mathbb{N}}$ onde $\mu_k^\gamma = (k\,(k + d - 1))^{\gamma/2}$.*

Definição 3.3.3. *O espaço de Sobolev W_p^γ, $\gamma > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, é definido por*

$$W_p^\gamma = \{\varphi \in L_p : \Lambda^\gamma \varphi \in L_p\}$$

com norma

$$\|\varphi\|_{W_p^\gamma} = \|\Lambda^\gamma \varphi\|_p .$$

Aqui identificamos funções que diferem por uma constante, isto é, se $f - g =$constante, então $f = g$ sobre W_p^γ. A classe de Sobolev $\overline{W}_p^\gamma$, $\gamma > 0$, é definida como sendo a bola unitária de W_p^γ, isto é,

$$\overline{W}_p^\gamma = \left\{\varphi \in W_p^\gamma; \;\; \|\varphi\|_{W_p^\gamma} \leq 1\right\}.$$

Observação 3.3.4. *Observamos que*

$$\overline{W}_p^\gamma = \left\{c + \Lambda^{-\gamma}\varphi : c \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi \in L^p(S^d), \|\varphi\|_p \leq 1 \right\}.$$

De fato, denotemos $A = \left\{c + \Lambda^{-\gamma}\varphi : c \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi \in L^p(S^d), \|\varphi\|_p \leq 1 \right\}$. Se $f \in A$, então $f = C + \Lambda^{-\gamma} g$, $g \in L^p$ e $\|g\|_p \leq 1$. Logo

$$\|f\|_{W_p^\gamma} = \left\|\Lambda^\gamma \left(c + \Lambda^{-\gamma} g\right)\right\|_p = \left\|\Lambda^\gamma \left(\Lambda^{-\gamma} g\right)\right\|_p = \|g\|_p \leq 1,$$

o que implica que $f \in \overline{W}_p^\gamma$. Agora, se $h \in \overline{W}_p^\gamma$, então $\Lambda^\gamma h = \varphi \in L_p$ e $\|h\|_{W_p^\gamma} \leq 1$. Assim

$$\Lambda^{-\gamma}\left(\Lambda^\gamma h\right) = h = \Lambda^{-\gamma}\varphi \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_p = \|h\|_{W_p^\gamma} \leq 1,$$

o que implica que $h \in A$.

Observação 3.3.5. *Suponhamos que a sequência $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaça a condição (1) do teorema de multiplicadores e que existe uma constante positiva C e $\eta > 1$, tal que*

$$\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| \leq Ck^{-d(1-1/r)-N-\eta}, \quad k \geq 1.$$

Então

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)} \leq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\eta} < \infty.$$

Portanto, de acordo com o teorema de multiplicadores temos que

$$\|\Lambda\|_{p,q} \leq |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)} \leq |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\eta} \leq |\lambda_0| + C\left(1+\frac{1}{\eta-1}\right)$$

e se $\varphi \in L^p(S^d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$

$$\|\Lambda\varphi - t_n(\varphi)\|_q \leq C\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)} \leq C\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\eta} \leq \frac{C}{(\eta-1)n^{\eta-1}}.$$

Observação 3.3.6. *Consideremos agora a sequência $\lambda_k^{-\gamma} = (k(k+d-1))^{-\gamma/2}$ onde $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Denotando $f(k) = \lambda_k^{-\gamma}$, pela Proposição 3.1.14 temos que*

$$\begin{aligned}\left|\Delta^s\lambda_k^{-\gamma}\right| &= |\Delta^s f(k)| \leq \max_{0\leq t\leq s}\left|f^{(s)}(k+t)\right| \\ &= \max_{k\leq t\leq k+s}\left|f^{(s)}(t)\right| = \max_{k\leq t\leq k+s}C_{\gamma,s}t^{-\gamma-s} \\ &= C_{\gamma,s}k^{-\gamma-s}\end{aligned} \tag{1}$$

para $s, k \in \mathbb{N}$. Logo

$$\left|\Delta^s\lambda_k^{-\gamma}\right| k^s \leq C_{\gamma,s}k^{-\gamma}$$

e então

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Delta^s\lambda_k^{-\gamma}\right| k^s = 0, \quad 0 \leq s \leq N, \tag{2}$$

isto é, a condição (1) do teorema de multiplicadores é satisfeita.

Seja $\gamma = \varepsilon + d(1/p - 1/q)_+$, $\varepsilon > 0$ e $1 \leq r, p, q \leq \infty$ tal que $1 - 1/r = (1/p - 1/q)_+$. Temos por (1) que

$$\left|\Delta^{N+1}\lambda_k^{-\gamma}\right| \leq C_\gamma k^{-d(1-1/r)-N-(1+\varepsilon)}$$

e segue de (2) e da Observação 3.3.5 que

$$\left\|\Lambda^{-\gamma}\varphi - t_n(\varphi)\right\|_q \leq \frac{C}{\varepsilon n^\varepsilon} = \frac{C}{\varepsilon}n^{-\gamma+d(1/p-1/q)_+}$$

se $\varphi \in L^p(S^d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$. Logo temos que

$$\sup_{f\in \overline{W}_p^\gamma} \inf_{t_n \in \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k} \|f - t_n\|_q \leq \sup_{f\in \overline{W}_p^\gamma} \|f - t_n(\varphi)\|_q \leq C n^{-\gamma + d(1/p - 1/q)_+}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

onde $f = \Lambda^{-\gamma}\varphi$.

Teorema 3.3.7. *Para a n-largura de Kolmogorov da classe de Sobolev temos para* $1 \leq p, q \leq \infty$ *e* $\gamma > 0$,

$$d_N\left(\overline{W}_p^\gamma, L_q\right) \leq C N^{-\gamma/d + (1/p - 1/q)_+}.$$

Demonstração. Seja $N = \dim \left(\bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k \right)$. Fazendo algumas contas podemos mostrar que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que $C_1 n^d \leq N \leq C_2 n^d$. Então pela Observação 3.3.6, obtemos que

$$d_N\left(\overline{W}_p^\gamma, L_q\right) \leq \sup_{f\in \overline{W}_p^\gamma} \inf_{t_n \in \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k} \|f - t_n\|_q \leq C n^{-\gamma + d(1/p - 1/q)_+} \leq C N^{-\gamma/d + (1/p - 1/q)_+}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bonami e J. $-$ *L.* Clerc, *Sommes de Cesàro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques*, Trans. Amer. Math. Soc. 183(1973) $223-263$.

[2] B. Bordin, A. K. Kushpel, J. Levesley e S. A. Tozoni, *Estimates of n-widths of Sobolev's classes on compact globally symmetric spaces of rank one*, J. Funct. Anal. 202(2003) $307-326$.

[3] R. R. Coifman e G. Weiss, *"Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes"*, Lecture Notes in Math. 242, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[4] G. B. Folland, *"Real Analysis"*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[5] E. Hewitt e K. A. Ross, *"Abstract Harmonic Analysis I"*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[6] E. Kogbetliantz, *Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques*, J. Math. Pures Appl. 3(1924) $107-187$.

[7] A. K. Kushpel e S. A. Tozoni, *"Entropy Numbers of Sobolev and Besov Classes on Homogeneous Spaces"*, Advances in Analysis, Proceedings of the 4th International ISAAC Congress, York University, Toronto, Canada, 2003.

[8] E. L. Lima, *"Curso de Análise"*, Vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, 2000.

[9] C. Müller, *"Spherical Harmonics"*, Lecture Notes in Math. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[10] A. Pinkus, *"n-Widths in Aproximation Theory"*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[11] E. M. Stein, *"Singular Integrals and Differentiability Properteis of Functions"*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

[12] E. M. Stein e G. Weiss, *"Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces"*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.

[13] G. Szegö, *"Orthogonal Polynomials"*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[14] S. A. Tozoni, *"Análise Harmônica na Esfera S^d"*, Notas de aula, IMECC-UNICAMP, 1998.