Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Unicidade e não-degenerescência para problemas envolvendo p-laplaciano em anéis

Hugo Alex Carneiro Diniz

Doutorado em Matemática - Campinas -SP

Orientador: *Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo*

Agosto/2005

Unicidade e não-degenerescência para problemas envolvendo p-laplaciano em anéis

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Hugo Alex Carneiro Diniz** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de agosto de 2005.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC – UNICAMP)
2. Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (UFPB)
3. Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFV)
4. Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (IMECC – UNICAMP)
5. Prof. Dr. Pedro Ubilla Lopez (Universidade de Santiago – Chile)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR em MATEMÁTICA**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Diniz, Hugo Alex Carneiro

D416u Unicidade e não-degenerescência para problemas envolvendo p-laplaciano em anéis / Hugo Alex Carneiro Diniz -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2005.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Dirichlet, Problemas de. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Uniqueness and nondegeneracy for problems involving p-laplacian in annuli.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partial differential equations. 2. Partial differential elliptic. 3. Dirichlet problem.

Área de concentração: Análise – Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Titulação: Doutorado em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (UFPB)
Prof. Dr. Olímpio Miyagaki (UFV)
Prof. Dr. Pedro Ubilla Lopez (Universidade de Santiago – Chile)
Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 23/08/2005

Tese de Doutorado defendida em 23 de agosto de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Prof. (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

Prof. (a). Dr (a). JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó

Prof. (a). Dr (a). PEDRO EDUARDO UBILLA LOPEZ

Prof. (a) Dr. (a) OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

A você, Euna, meu amor, que me sustentou, apoiou e amou,

e

ao Vitor, meu tesouro, que sempre subia no meu colo enquanto eu digitava esta tese.

Meu querido mestre e amigo, Jesus, o Cristo de Israel, que sempre foi e será fiel para comigo. Seu cuidado e direção foram imprescindíveis nesta jornada. Bendito é o que vem em nome do Senhor.

Euna, você a cada dia me faz querer ser um homem melhor.

Vitor, tudo o que tenho é seu. Todos os dias lhe darei o meu melhor.

Pedro e Ruth, pai e mãe, eu os amo profundamente e reconheço toda dedicação e investimento em minha vida.

Pastores, irmãos e igreja, recebi o sustento enviado por vocês. Vocês sempre estiveram comigo.

Professor Djairo, sua atenção, conselho e exemplo, eu os levarei com muito carinho.

Meus queridos amigos, obrigado por confiarem em mim e deixarem que eu participasse de suas vidas.

Professores e funcionários do IMECC, seu trabalho e dedicação são de excelência.

Sumário

Resumo

Abstract

Notações **9**

Introdução **11**

1 Monotonicidade das Soluções **15**

1.1 Demonstração do Teorema 1.1 17

1.2 Demonstração do Teorema 1.2 20

2 Problema Linearizado **23**

2.1 Demonstração do Teorema 2.1 26

2.2 Demonstração do Teorema 2.2 30

2.3 Demonstração do Teorema 2.3 33

2.4 Demonstração dos Lemas 36

3 Caso Sublinear **41**

3.1 Não-degenerescência 43

3.2 Unicidade 45

4 Caso Superlinear e Positivo **47**

4.1 Não-Degenerescência 50

4.2 Unicidade 53

4.3 Demonstração dos Lemas 55

4.4 Problema com Limitação no Crescimento 58

5 Caso Superlinear com Parte Negativa **63**

5.1 Não-Degenerescência 68

5.2 Unicidade 73

5.3 Demonstração dos Lemas 74

6 Unicidade em Domínios Não-Simétricos **79**

6.1 Estimativas a priori 82

6.2 Unicidade 88

6.3 Exemplos de Domínios 92

A Soluções Radiais **97**

B Problema de Cauchy **99**

C Resultados Auxiliares **103**

Referências Bibliográficas **107**

Resumo

Neste trabalho estudamos a unicidade e a não-degenerescência de soluções positivas radiais para problemas não-autônomos envolvendo o p-laplaciano em anéis e bolas, com condição de Neumann na parte interna do anel, e condição de Dirichlet na parte externa. Quando o domínio é uma bola, temos apenas a condição de Dirichlet. Consideraremos três perfis diferentes para o problema: sublinear, superlinear e positivo, superlinear com parte negativa. Utilizando a técnica de Coffman, a qual consiste em estudar os zeros da solução do problema linearizado, através de argumentos de comparação de Sturm, provamos primeiramente a não-degenerescência. Pelo método de "shooting", obtemos a unicidade. Como aplicação, demonstramos um resultado de unicidade para o laplaciano em domínios não-simétricos (até mesmo não-convexos) "próximos" a uma bola.

Abstract

In this work, we study uniqueness and non-degeneracy of positive radial solutions for non-autonomous problems involving p-laplacian in annuli and balls, with Neumann condition in the inner part of annulus, and Dirichlet condition in the outer part. We consider three different problems: sublinear, superlinear and positive, superlinear with a negative part. Using the Coffman's technique, which consists in studying the zeros of the solution of the linearized problem, through Sturm comparison arguments. we prove non-degeneracy. By the "shooting" method, we prove uniqueness. As an application, we demonstrate a uniqueness result for laplacian in non-symmetric (even non-convex) domains "near" a ball.

Notações

B_R	- $\{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \|x\| < R\}$
$B_{r_0,R}$	- $\begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^N; \ r_0 < \|x\| < R\} & \text{se } r_0 > 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^N; \ \|x\| < R\} & \text{se } r_0 = 0. \end{cases}$
C^0	- espaço das funções contínuas
C^n	- espaço das funções n vezes diferenciáveis continuamente
C_0^n	- espaço das funções C^n com suporte compacto
$W^{1,p}$, H^1	- espaços de Sobolev
$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$	- derivada normal exterior
$\triangle u$	- laplaciano de u ($\triangle u = \mathrm{div}\nabla u$)
$\triangle_p u$	- p-laplaciano de u ($\triangle_p u = \mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$)

- Denotaremos por C uma constante qualquer positiva.

Introdução

Investigamos neste trabalho as questões de unicidade e não-degenerescência de soluções radialmente simétricas para o seguinte problema elíptico quasilinear:

$$(P) \quad \begin{cases} -\triangle_p u = f(|x|, u) & \text{em } B_{r_0,R} \subset \mathbb{R}^N, \ N \geq 2 \\ u > 0 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{para } |x| = r_0 \quad \text{se } r_0 > 0 \\ u(x) = 0 & \text{para } |x| = R, \end{cases}$$

onde $\triangle_p u$ denota o operador **p-laplaciano**, isto é,

$$-\triangle_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right), \ p > 1,$$

e

$$B_{r_0,R} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^N; \ r_0 < |x| < R\} & \text{se } r_0 > 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^N; \ |x| < R\} & \text{se } r_0 = 0. \end{cases}$$

Ao longo do trabalho tomaremos diferentes conjuntos de hipóteses para a função f. Uma solução radial $u(r)$, $r = |x|$, do problema (P) satisfaz ao seguinte problema envolvendo uma equação diferencial ordinária:

$$(P')\qquad \begin{cases} -\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right)' = r^{N-1}f(r,u), \quad r \in (r_0,R) \\ u > 0 \\ u'(r_0) = u(R) = 0. \end{cases}$$

A demonstração deste fato encontra-se no Apêndice A. Diremos que u é uma solução (P') se $u \in C^1[r_0,R]$ e

$$|u'|^{p-2}u' \in C^1(r_0,R).$$

Uma solução u de (P') é **não-degenerada** se o problema linearizado

$$(PL)\qquad \begin{cases} -(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega'\right)' = r^{N-1}f'(r,u)\omega, \quad r \in (r_0,R) \\ \omega'(r_0) = \omega(R) = 0 \end{cases}$$

possui **apenas** a solução trivial ($\omega \equiv 0$).

Nosso objetivo principal é provar que o problema (P) possui **no máximo** uma solução radial, sendo esta **não-degenerada**. Para isto utilizaremos a mesma técnica encontrada no artigo de Kwong-Zhang [19] (método de Coffman), que consiste em estudar os zeros da solução do problema linearizado, usando argumentos de comparação de Sturm, para obter a não-degenerescência. Por outro lado, estudando diferentes valores iniciais $\alpha = u(r_0)$ (método de "shooting") obtemos a unicidade.

Para o caso particular em que o domínio é uma bola ($r_0 = 0$), os trabalhos de Gidas-Ni-Nirenberg [14] (para $p = 2$) e Brock [4] (para $p > 1$) mostram hipóteses sobre f que garantem que as soluções positivas de (P) são radiais e radialmente decrescentes. Neste sentido podemos citar também os trabalhos de Kesavan-Pacella [18] ($p = N$) e Damascelli-Pacella [7, 8] ($1 < p < 2$). Estes resultados estão enunciados no Apêndice C.

No **Capítulo 1** estudaremos a monotonicidade de uma solução radialmente simétrica $u(r)$ de (P). Veremos que se f, f_r são contínuas e $f_r \leq 0$ então u é não-crescente. Mostraremos também condições suficientes para que u seja decrescente.

Provaremos no **Capítulo 2** a existência de uma única solução $\omega \in C^1[r_0, R) \cap C^0[r_0, R]$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} -(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega'\right)' = r^{N-1}f'(r,u)\omega, & r \in (r_0, R) \\ \omega(r_0) = 1 \\ \omega'(r_0) = 0. \end{cases}$$

Mostraremos também que a função ω é a derivada de u em relação a $\alpha = u(r_0)$. Este resultado é chave para a obtenção do resultado de unicidade.

No **Capítulo 3**, chamado de **Caso Sublinear**, estudaremos o problema (P) tendo como modelo para a não-linearidade a função $f(r,s) = a(r)s^q + C$, $0 < q < p-1$. Para $1 < p \leq 2$ consideraremos também uma classe de funções que inclui $f(s) = s^m - s^q$, $0 < m \leq p-1 \leq q$, $m \neq q$. Os resultados deste capítulo estendem os resultados em Ouyang-Shi [23] para o caso sublinear, que são restritos ao laplaciano com f autônoma em uma bola.

No **Capítulo 4**, chamado de **Caso Superlinear e Positivo**, teremos como modelo de não-linearidade a função $f(r,s) = a(r)s^q$, $q > p-1$. Os resultados deste capítulo estendem os resultados em Ouyang-Shi [23] para o caso superlinear e positivo, que são restritos ao laplaciano com f autônoma em uma bola. Generalizamos também os resultados em Aftalion-Pacella [1], pois provamos a unicidade inclusive para o caso não-autônomo e consideramos o problema em anéis.

No **Capítulo 5**, chamado de **Caso Superlinear com Parte Negativa**, nosso modelo para a não-linearidade será a função $f(r,s) = s^q - a(r)s^m - C$, $q > m \geq p-1$. A questão de unicidade e não-degenerescência para este tipo de não-linearidade, no caso particular do laplaciano, f autônoma e $f(0) = 0$, é estudado em Kwong-Zhang [19]. Neste capítulo, estendemos os resultados em Ouyang-Shi [23] para o caso superlinear e positivo, que são restritos ao laplaciano com f autônoma em uma bola. Generalizamos também o artigo de Aftalion-Pacella [1], provando a unicidade para o caso não-autônomo, permitindo que a potência m seja maior que $p-1$, permitindo o caso **semipositone** ($f(r_0, 0) < 0$) e considerando o problema em anéis.

No **Capítulo 6**, provamos um resultado de unicidade para o laplaciano em domínios próximos a uma bola (em um sentido apropriado), quando f é superlinear. Aqui, generalizamos o que foi provado em Zou [28] para o caso particular em que f é uma potência.

No **Apêndice A** mostraremos que, quando procuramos apenas soluções radiais, o problema (P) reduz-se a (P').

No **Apêndice B** estudamos a existência e unicidade do problema de Cauchy associado a (P'):

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right)' = r^{N-1}f(r,u), & r \in (r_0, R) \\ u(r_0) = \alpha \\ u'(r_0) = 0. \end{cases}$$

No **Apêndice C** enunciaremos teoremas auxiliares que são importantes ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Monotonicidade das Soluções

Sejam $N \geq 2$ e $p > 1$. Para $0 \leq r_0 < R < \infty$, consideremos o domínio

$$B_{r_0,R} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^N;\ r_0 < |x| < R\} & \text{se } r_0 > 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| < R\} & \text{se } r_0 = 0. \end{cases}$$

Suponhamos que $u \in C^1(\overline{B}_{r_0,R})$ é uma solução radialmente simétrica do problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f(|x|, u) & \text{em } B_{r_0,R} \\ u > 0 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{para } |x| = r_0, \ \ \text{se } r_0 > 0 \\ u(x) = 0 & \text{para } |x| = R, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde a função $f(r, s)$ satisfaz às hipóteses:

($\mathbf{M_1}$) $f \in C^0([0, \infty) \times [0, \infty))$ possui derivada em r contínua e $f_r(r, s) \leq 0$, $\forall s \geq 0$;

($\mathbf{M_2}$) Se para algum $(r, s) \in [r_0, R] \times [0, \sup u]$ temos $f(r, s) = 0$, então $F(r, s) \leq 0$, onde $F(r, s) := \int_0^s f(r, t)\, dt$.

Dizemos que $u \in C^1(\overline{B}_{r_0,R})$ satisfaz à equação

$$-\triangle_p u = f(|x|, u) \ \text{ em } \ B_{r_0,R}$$

se

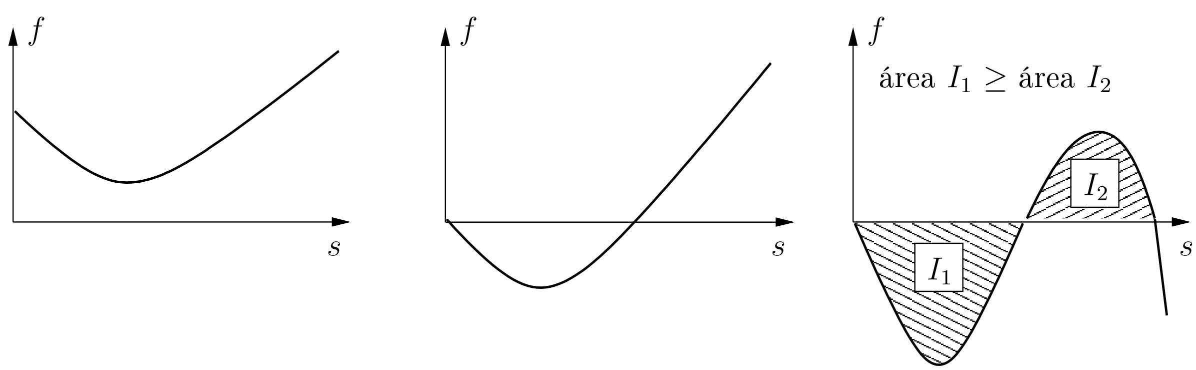
$$\int_{B_{r_0,R}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{B_{r_0,R}} f(|x|, u)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(B_{r_0,R}).$$

Provaremos os seguintes resultados:

Teorema 1.1 *Se f satisfaz $(\mathbf{M_1})$ então toda solução radial de* (1.1) *é radialmente não-crescente.*

Teorema 1.2 *Se $u \in C^1(\overline{B}_{r_0,R})$ é uma solução radial de* (1.1) *e f satisfaz $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ então u é radialmente decrescente.*

Para uma melhor visualização da hipótese $(\mathbf{M_2})$, os seguintes gráficos mostram exemplos de funções f que a satisfazem:



Quando restrito a soluções radiais, o problema (1.1) reduz-se ao seguinte problema que envolve uma equação diferencial ordinária (ver Apêndice A):

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)' = r^{N-1}f(r, u(r)), \quad r \in (r_0, R) \\ u > 0 \\ u'(r_0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $r = |x|$. A equação em (1.2) também pode ser escrita como

$$\left(|u'|^{p-2}u'\right)' + \frac{N-1}{r}|u'|^{p-2}u' + f(r,u) = 0, \quad r \in (r_0, R). \tag{1.3}$$

Para o caso particular em que o domínio é uma bola ($r_0 = 0$), existem resultados que dão condições suficientes para que **toda** solução de (1.1) seja radial e radialmente decrescente. Podemos citar os trabalhos de Gidas-Ni-Nirenberg [14] (para $p = 2$), Brock [4] (para $p > 1$), Kesavan-Pacella [18] (para $p = N$) e Damascelli-Pacella [7, 8] (para $1 < p < 2$), cujos enunciados encontram-se no Apêndice C. É importante notar que os Teoremas 1.1 e 1.2 não provam que uma determinada solução é radial, mas sim provam a monotonicidade de uma solução radial do problema (1.1) para uma classe de funções f, não incluída nos trabalhos citados, e também para o caso em que o domínio é um anel ($r_0 > 0$).

Baseamos as idéias deste capítulo nos artigos de Franchi-Lanconelli-Serrin [13] e Serrin-Tang [24], onde encontramos, para o problema autônomo (f não depende de r), um resultado de monotonicidade para soluções radiais do tipo "ground-state", isto é, $u(r) \to 0$ quando $r \to \infty$.

1.1 Demonstração do Teorema 1.1

Seja $u \in C^1[r_0, R]$ uma solução do problema em (1.2). Queremos demonstrar que $u'(r) \leq 0$ em $[r_0, R]$. Os seguintes lemas trazem informações importantes sobre o comportamento dessa solução, as quais serão úteis na demonstração do teorema.

Lema 1.3 *Seja $\psi(r) := |u'(r)|^{p-2}u'(r)$. Então $\psi \in C^1[r_0, R]$ e*

$$\psi'(r_0) = \begin{cases} -f(r_0, u(r_0)) & \textit{se } r_0 > 0, \\ -\dfrac{1}{N}f(0, u(0)) & \textit{se } r_0 = 0. \end{cases}$$

Demonstração: Por (1.2), temos que

$$-(r^{N-1}\psi(r))' = r^{N-1}f(r,u(r)), \quad r \in (r_0, R). \tag{1.4}$$

Assim, pela continuidade de f, ψ' existe e é contínua em r, se $r > 0$ e $r \in [r_0, R]$. Para o caso em que $r_0 > 0$, fazendo $r \to r_0$ em (1.3), obtemos a expressão de $\psi'(r_0)$ e terminamos a demonstração. Mas, se $r_0 = 0$, então precisamos provar a existência de $\psi'(0)$. Isto é o que faremos a seguir. Por (1.4), aplicando a Regra de l'Hôpital, obtemos

$$-\frac{1}{N}f(0,u(0)) = \lim_{r\to 0}\frac{(r^{N-1}\psi(r))'}{(r^N)'} = \lim_{r\to 0}\frac{\psi(r)}{r}.$$

Como $\psi(0) = 0$, pois $u'(0) = 0$, concluímos

$$\psi'(0) = -\frac{1}{N}f(0,u(0)).$$

■

Lema 1.4 *A função de energia* $E(r) := \dfrac{p-1}{p}|u'(r)|^p + F(r,u(r))$ *é não-crescente, com*

$$E'(r) = F_r(r,u(r)) - \frac{N-1}{r}|u'(r)|^p \le 0.$$

Demonstração: Escrevendo a função E na forma

$$E(r) = \frac{p-1}{p}\left||u'|^{p-2}u'\right|^{\frac{p}{p-1}} + F(r,u),$$

vemos, pelo Lema 1.3, que $E \in C^1[r_0, R]$. Temos que

$$\begin{aligned} E'(r) &= u'\left(|u'|^{p-2}u'\right)' + F_r(r,u) + f(r,u)u' \\ &= F_r(r,u) + u'\left[\left(|u'|^{p-2}u'\right)' + f(r,u)\right] \\ E'(r) &= F_r(r,u) - \frac{N-1}{r}|u'|^p \qquad \text{por (1.3)} \end{aligned}$$

Concluímos que $E'(r) \le 0$, pois $F_r(r,s) = \displaystyle\int_0^s f_r(r,t)\,dt$ e $f_r(r,u) \le 0$ (hipótese $(\mathbf{M_1})$). ■

Lema 1.5 *Se $u'(r_1) = 0$, para algum $r_1 \in [r_0, R)$, então $u(r_1) \geq u(r)$ para todo $r \geq r_1$.*

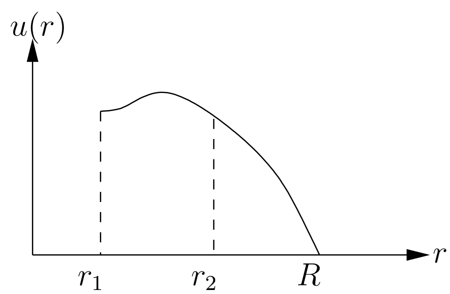
Demonstração: Suponhamos que o lema é falso. Afirmamos que existem $r_1 < r_2 \in [r_0, R)$ tais que

$$u'(r_1) = 0,\ u(r_1) = u(r_2),\ u(r) \geq u(r_1) \text{ para } r \text{ em } [r_1, r_2] \tag{1.5}$$

e

$$u \text{ não é constante em } [r_1, r_2]. \tag{1.6}$$

De fato, como o lema é falso, a função $u(r)$ possui um ponto crítico $\bar{r}_1 \in [r_0, R)$ e existe $\bar{r}_2 \in (r_1, R)$ tais que $u(\bar{r}_1) < u(\bar{r}_2)$. Seja $r_1 \geq \bar{r}_1$ o ponto crítico que é o mínimo de $u(r)$ em $[\bar{r}_1, \bar{r}_2]$. Como $u(r_1) > 0$ e $u(R) = 0$, existe $r_2 \in (\bar{r}_2, R)$ satisfazendo (1.5) e (1.6).



Pelo Lema 1.4 temos que

$$E(r_2) - E(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} F_r(t, u(t)) - \frac{N-1}{t}|u'(t)|^p \, dt.$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} F_r(t, u(t)) - \frac{N-1}{t}|u'(t)|^p \, dt &= \frac{p-1}{p}|u'(r_2)|^p + F(r_2, u(r_2)) - F(r_1, u(r_1)) \\
&= \frac{p-1}{p}|u'(r_2)|^p + \int_{r_1}^{r_2} F_r(t, u(r_1)) \, dt.
\end{aligned}$$

Logo, usando o Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
\frac{p-1}{p}|u'(r_2)|^p + \int_{r_1}^{r_2} \frac{N-1}{t}|u'(t)|^p \, dt &= \int_{r_1}^{r_2} F_r(t, u(t)) - F_r(t, u(r_1)) \, dt \\
&= \int_{r_1}^{r_2} f_r(t, \xi(t))[u(t) - u(r_1)] \, dt,
\end{aligned}$$

com $u(r_1) \leq \xi(t) \leq u(t)$. Por $(\mathbf{M_1})$ e (1.5),

$$\frac{p-1}{p}|u'(r_2)|^p + \int_{r_1}^{r_2} \frac{N-1}{t}|u'(t)|^p \, dt = \int_{r_1}^{r_2} f_r(t,\xi(t))[u(t)-u(r_1)] \, dt \ \leq 0.$$

Daí obtemos que $u' \equiv 0$ em $[r_1, r_2]$, o que contradiz (1.6). ■

Demonstração do Teorema 1.1: Se $u'(r) > 0$ para algum $r \in (r_0, R)$, então existe um ponto crítico $r_1 \in [r_0, r)$ com $u(r_1) < u(r)$, contrariando o Lema 1.5. ■

1.2 Demonstração do Teorema 1.2

Os próximos dois lemas estabelecem o comportamento de u próximo de r_0.

Lema 1.6 $F(r_0, u(r_0)) > 0$

Demonstração: Temos que

$$E(R) = \frac{p-1}{p}|u'(R)|^p + F(R, u(R)) = \frac{p-1}{p}|u'(R)|^p \geq 0.$$

Como E é não-crescente, pelo Lema 1.4, então

$$E(r_0) = \frac{p-1}{p}|u'(r_0)|^p + F(r_0, u(r_0)) = F(r_0, u(r_0)) \geq 0.$$

Afirmamos que $F(r_0, u(r_0)) > 0$. De fato, se $E(r_0) = F(r_0, u(r_0)) = 0$ então E é constante em $[r_0, R]$ e $E' \equiv 0$. Isto é uma contradição, pois implica, pelo Lema 1.4 e $(\mathbf{M_1})$, que $u' \equiv 0$. ■

Lema 1.7 $f(r_0, u(r_0)) > 0$

Demonstração: Se $f(r_0, u(r_0)) < 0$ então, pelo Lema 1.3,

$$\frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r))\Big|_{r=r_0} > 0.$$

Assim r_0 é um ponto de mínimo local estrito de $u(r)$, contrariando o Lema 1.5. Agora, se $f(r_0, u(r_0)) = 0$ então, pela hipótese $(\mathbf{M_2})$, $F(r_0, u(r_0)) \leq 0$, contrariando o Lema 1.6. Logo $f(r_0, u(r_0)) > 0$. ■

Demonstração do Teorema 1.2: Pelo Teorema 1.1, $u'(r) \leq 0$ em $[r_0, R]$. Pelos Lemas 1.3 e 1.7, $u'(r) < 0$ próximo a r_0. A seguir mostramos que de fato $u'(r) < 0$ para todo $r \in (r_0, R)$. Suponhamos por contradição que r_1 é o primeiro ponto crítico de u em (r_0, R). Temos três possibilidades:

- Se $f(r_1, u(r_1)) > 0$ então, por (1.2), r_1 é máximo local estrito (contradição com Lema 1.5);
- Se $f(r_1, u(r_1)) < 0$ então, por (1.2), r_1 é mínimo local estrito (contradição com Lema 1.5);
- $Se f(r_1, u(r_1)) = 0$ então, pela hipótese $(\mathbf{M_2})$,

  $$E(r_1) = \frac{p-1}{p}|u'(r_1)|^p + F(R, u(r_1)) = F(r_1, u(r_1)) \leq 0,$$

  contradizendo o Lema 1.4, pois $E(R) \geq 0$ e $E' \not\equiv 0$ em $[r_1, R]$.

■

Capítulo 2

Problema Linearizado

Sejam $N \geq 2$, $p > 1$ e $0 \leq r_0 < R < \infty$. Suponhamos que $u \in C^1[r_0, R]$ é uma solução de

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'(r)\right)' = r^{N-1}f(r,u), \quad r \in (r_0, R) \\ u > 0 \\ u'(r_0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde a função f satisfaz às hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ (ver Capítulo 1). Além disso, faremos dois diferentes conjuntos de hipóteses para f. Primeiramente, consideramos o caso em que $f(R, 0) \geq 0$, supondo que

$(\mathbf{H_1})$ $f \in C^1([0, \infty) \times (0, \infty))$, $f(R, 0) \geq 0$ e existem $C, s_0 > 0$ tais que $f(r, s) > -Cs^{p-1}$ para $0 < s < s_0$ uniformemente para r próximo de R;

$(\mathbf{H_2})$ Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $s^\gamma f'(r, s)$ é limitada para s próximo de 0 e uniformemente para r próximo de R, onde $f'(r, s) \equiv f_s(r, s)$.

A hipótese $(\mathbf{H_1})$ garante que $u'(R) < 0$, como veremos mais adiante na Seção 2.1. Neste caso, permitimos que a função $f'(r, u(r))$ seja ilimitada para r próximo de R, limitando apenas o seu crescimento pela hipótese $(\mathbf{H_2})$. Os seguintes exemplos de funções cumprem as hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ e $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_2})$:

- $f(r, s) = a(r)s^q + C$, com $a \in C^1$, $a \geq 0$, $a' \leq 0$, $q > 0$ e $C \geq 0$;
- $f(r, s) = s^q - a(r)s^m$, com $a \in C^1$, $a' \geq 0$ e $p - 1 \leq m < q$.

Alternativamente, visando estudar problemas do tipo **semipositone**, admitiremos que f satisfaz

$(\mathbf{H_1'})$ $f \in C^1([0, \infty) \times (0, \infty))$ e $f(R, 0) < 0$;

$(\mathbf{H_2'})$ $f'(r, s)$ é limitada para s próximo de 0 e uniformemente para r próximo de R.

Neste caso podemos ter $u'(R) = 0$. No entanto, a função $f'(r, u(r))$ deve ser limitada para r próximo de R. Citamos como exemplos de funções que satisfazem $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ e $(\mathbf{H_1'}) - (\mathbf{H_2'})$:

- $f(r, s) = a(r)s^q - C$, com $a \in C^1$, $a \geq 0$, $a' \leq 0$, $q > 1$ e $C > 0$;
- $f(r, s) = s^q - a(r)s^m - C$, com $a \in C^1$, $a' \geq 0$, $1 \leq m < q$ e $C > 0$.

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} -(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega'(r)\right)' = r^{N-1}f'(r, u)\omega(r), & r \in (r_0, R) \\ \omega(r_0) = 1 \\ \omega'(r_0) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

que está associado ao **problema linearizado** de (2.1):

$$\begin{cases} -(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega'(r)\right)' = r^{N-1}f'(r, u)\omega(r), & r \in (r_0, R) \\ \omega'(r_0) = \omega(R) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Diremos que a solução u é **não-degenerada** se o problema (2.3) possui **apenas** a solução trivial ($\omega \equiv 0$). O primeiro teorema é um resultado de existência e unicidade.

Teorema 2.1 *Suponhamos que f satisfaz às hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ e $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_2})$ (ou $(\mathbf{H'_1}) - (\mathbf{H'_2})$). Seja $u \in C^1[r_0, R]$ uma solução de (2.1). Então existe uma única solução $\omega \in C^1[r_0, R) \cap C^0[r_0, R]$ do problema (2.2).*

O próximo teorema estabelece a dependência contínua de u em relação ao parâmetro inicial $\alpha = u(r_0)$.

Teorema 2.2 *Suponhamos que $u \in C^1[r_0, R]$ é uma solução de (2.1), onde a função f satisfaz às hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ e $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_2})$ (ou $(\mathbf{H'_1}) - (\mathbf{H'_2})$). Sejam $\epsilon > 0$ e $\alpha = u(r_0)$. Então, para h suficientemente pequeno, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}|u_h'|^{p-2}u_h'(r)\right)' = r^{N-1}f(r, u_h) \\ u_h(r_0) = \alpha + h \\ u_h'(r_0) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

possui uma única solução u_h definida no intervalo $[r_0, R_h]$, onde $R_h \leq R$, $u_h(r) > 0$ em $[r_0, R_h)$ e, se $R_h < R$, $u_h(R_h) = 0$. E ainda,

$$|u_h(r) - u(r)| < \epsilon \quad e \quad |u_h'(r) - u'(r)| < \epsilon,$$

para todo $r \in [r_0, R_h]$.

O último teorema é chave para a obtenção dos resultados de unicidade nos próximos capítulos. Provaremos que a função ω é a derivada de u em relação ao parâmetro inicial $\alpha = u(r_0)$.

Teorema 2.3 *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, suponhamos que, para $h > 0$ suficientemente pequeno, $R_h = R$. Então a função*

$$\Phi_h(r) := \frac{u_h(r) - u(r)}{h}$$

converge uniformemente para $\omega(r)$ em $[r_0, R]$ quando h tende a zero, onde a função $\omega(r)$ é dada pelo Teorema 2.1.

2.1 Demonstração do Teorema 2.1

Notemos que o problema (2.2) é equivalente a encontrar um ponto fixo para a função $\Psi : C^0[r_0, R] \to C^0[r_0, R]$ dada por

$$\Psi(\omega)(r) = 1 - \int_{r_0}^{r} \frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}} \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} f'(t, u(t))\omega(t)\, dt\, ds. \tag{2.5}$$

Dividiremos a demonstração nos seguintes passos:

Passo 1 : A função Ψ está bem definida;

Passo 2 : Ψ^n é uma contração, para n suficientemente grande;

Passo 3 : Existe um único ponto fixo para Ψ.

Primeiramente, faremos as seguintes observações:

- As hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ garantem, pelo Lema 1.7 e o Teorema 1.2, que
$$f(r_0, u(r_0)) > 0 \text{ e } u'(r) < 0 \text{ em } (r_0, R). \tag{2.6}$$

- Se f satisfaz à hipótese $(\mathbf{H_1})$, então pelo resultado de Vazquez [27] (ver Apêndice C), temos $u'(R) < 0$. Com efeito, para r próximo de R, temos
$$\triangle_p u = -f(r, u) < \beta(u),$$
onde $\beta(s) = Cs^{p-1}$ e com isso
$$\int_0^1 (s\beta(s))^{-\frac{1}{p}}\, ds = C\int_0^1 s^{-1}\, ds = +\infty.$$
Por outro lado, se f satisfizer à $(\mathbf{H_1'})$ então podemos ter $u'(R) = 0$.

Passo 1 : A função Ψ está bem definida.

Para que (2.5) esteja bem definido, precisamos de estimativas para $u'(r)$ próximo de r_0 e R, quando $p > 2$. Precisamos também de uma estimativa para $f'(r, u(r))$ próximo de R, pois $f'(R, 0)$ não está definido, conforme $(\mathbf{H_1})$ ou $(\mathbf{H_1'})$. Os três próximos lemas garantirão as estimativas que precisamos.

Lema 2.4 *Existe $C > 0$ tal que para r próximo de r_0 temos*

$$|u'(r)|^{p-1} > C(r - r_0).$$

Demonstração: Por (2.1) e (2.6) temos que

$$|u'(r)|^{p-1} = -|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s, u(s))\, ds.$$

Por (2.6), existe $C > 0$ tal que $f(r_0, u(r_0)) > C$. Logo, para r suficientemente próximo de r_0, vale

$$|u'(r)|^{p-1} > \frac{C}{N}(r - r_0).$$

■

Lema 2.5 *Existe $C > 0$ tal que para r próximo de R temos*

$$|u'(r)|^{p-1} > C(R - r).$$

Demonstração: Existem duas possibilidades:

(i) Se f satisfaz $(\mathbf{H_1})$ então $u'(R) < 0$, concluindo assim a demonstração do Lema.

(ii) Se f satisfaz $(\mathbf{H_1'})$ e $u'(R) = 0$ então por (2.1) temos

$$|u'(r)|^{p-1} = -|u'(r)|^{p-2}u'(r) = -\int_{r}^{R} \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s, u(s))\, ds.$$

Por ($\mathbf{H_2'}$), existe $C > 0$ tal que $f(R, 0) < -C < 0$. Concluímos que para r próximo de R temos

$$|u'(r)|^{p-1} > C(R - r).$$

■

Lema 2.6 *Existe $q > 1$ tal que a integral $\int_{r_0}^{R} |f'(r, u(r))|^q \, dr$ é limitada.*

Demonstração: Devemos analisar duas possibilidades:

(i) Se f satisfaz ($\mathbf{H_1}$) então $u'(R) < 0$ e com isto $u(r) > C(R - r)$, para r próximo de R. Por ($\mathbf{H_2}$), existe $q > 1$ tal que $q \cdot \gamma < 1$. Novamente por ($\mathbf{H_2}$) teremos

$$|f'(r, u(r))|^q < \frac{C}{u(r)^{q \cdot \gamma}} < \frac{C}{(R - r)^{q \cdot \gamma}},$$

para r próximo de R. Como $f'(r, u(r))$ é contínua em $[0, R)$, concluímos a demonstração.

(ii) Se f satisfaz ($\mathbf{H_2'}$), então a função $f'(r, u(r))$ é limitada. ■

Pelos lemas anteriores concluímos que

$$\int_{r_0}^{R} \frac{1}{|u'(r)|^{p-2}} \, dr < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{r_0}^{R} |f'(r, u(r))| \, dr < \infty, \tag{2.7}$$

mostrando assim que a função Ψ está bem definida.

Passo 2 : Ψ^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Seja $q > 1$ dado pelo Lema 2.6. Afirmamos que, para todo ω_1, $\omega_2 \in C^0[r_0, R]$ e todo $n \geq 0$,

$$|\Psi^n(\omega_1)(r) - \Psi^n(\omega_2)(r)| \leq K^n \left(\frac{|r - r_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{q'}} \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty, \quad r \in [r_0, R], \tag{2.8}$$

onde

$$K = \left(\int_{r_0}^{R} \frac{1}{(p-1)|u'(r)|^{p-2}}\, dr \right) \left(\int_{r_0}^{R} |f'(r,u(r))|^q \, dr \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Verificaremos a desigualdade 2.8 por indução em n. Para $n = 0$, ela se verifica imediatamente. Suponhamos que é válida para k.

Então

$$\begin{aligned}
\left|\Psi^{k+1}(\omega_1)(r) - \Psi^{k+1}(\omega_2)(r)\right| &= \left|\Psi(\Psi^k(\omega_1))(r) - \Psi(\Psi^k(\omega_2))(r)\right| \leq \\
&\leq \left| \int_{r_0}^{r} \frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}} \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} f'(t,u(t)) \left[\Psi^k(\omega_1)(t) - \Psi^k(\omega_2)(t)\right] \, dt \, ds \right| \\
&\leq \int_{r_0}^{r} \frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}} \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} |f'(t,u(t))| \left|\Psi^k(\omega_1)(t) - \Psi^k(\omega_2)(t)\right| \, dt \, ds \\
&\leq \int_{r_0}^{r} \frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}} \, ds \cdot \int_{r_0}^{r} |f'(s,u(s))| \left|\Psi^k(\omega_1)(s) - \Psi^k(\omega_2)(s)\right| \, ds \\
&\leq K^k \int_{r_0}^{r} \frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}} \, ds \cdot \int_{r_0}^{r} |f'(s,u(s))| \left(\frac{|s-r_0|^k}{k!} \right)^{\frac{1}{q'}} \, ds \cdot \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left|\Psi^{k+1}(\omega_1)(r) - \Psi^{k+1}(\omega_2)(r)\right| &\leq K^{k+1} \left(\int_{r_0}^{r} \frac{|s-r_0|^k}{k!} \, ds \right)^{\frac{1}{q'}} \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty \\
&\leq K^{k+1} \left(\frac{|r-r_0|^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{q'}} \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|\Psi^n(\omega_1) - \Psi^n(\omega_2)\|_\infty \leq K^n \left(\frac{|R-r_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{q'}} \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty$$

e, para n grande,

$$K^n \left(\frac{|R-r_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{q'}} < 1.$$

Logo Ψ^n é uma contração para n suficientemente grande.

Passo 3 : Existe um único ponto fixo para Ψ.

Utilizando o Teorema de Ponto Fixo de Banach, podemos provar que se Ψ^n é uma contração, para algum $n > 1$, então Ψ possui um único ponto fixo (ver Sotomayor [26, Corolário I.4.1]). Logo existe uma única solução $\omega \in C^0[r_0, R] \cap C^1[r_0, R)$ para o problema (2.2).

2.2 Demonstração do Teorema 2.2

Sejam M, $N > 0$ tais que

$$|f(r,s)| < M, \quad \forall (r,s) \in [r_0, R] \times [0, \alpha + \epsilon]$$

e

$$|u'(r)| < N, \quad \forall r \in [r_0, R].$$

Tomemos $\delta > 0$ tal que

$$2^{\frac{1}{p-1}} \delta [N + (M\delta)^{\frac{1}{p-1}}] < \frac{\epsilon}{4}.$$

Seja h suficientemente pequeno tal que

$$f(r_0, \alpha + h) > 0.$$

Isto é possível pois $f(r_0, \alpha) > 0$, pelo Lema 1.7. Pela Proposição B.1, para $h < \dfrac{\epsilon}{4}$, existe uma solução u_h do problema em (2.4) definida em $[r_0, r_0 + \delta]$ e

$$|u_h(r) - u(r)| < \epsilon, \quad \forall r \in [r_0, r_0 + \delta]. \tag{2.9}$$

Afirmativa 1 : A função $u(r)$ é a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'(r)\right)' = r^{N-1} f(r,u), \quad r \in (r_0, R) \\ u(r_0) = \alpha \\ u'(r_0) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

De fato, pelas Proposições B.2 e B.3, não temos garantia de unicidade para $p > 2$ e nos pontos r onde $u'(r) = 0$ e $f(r, u(r)) = 0$. Como $f(r_0, u(r_0)) > 0$ e $u'(r) < 0$, $\forall r \in (r_0, R)$, então $u(r)$ está unicamente definida.

Afirmativa 2 : $u_h \to u$ uniformemente em $[r_0, r_0 + \delta]$ quando $h \to 0$.

Seja (h_n) tal que $h_n \to 0$. Por (2.9), a seqüência (u_{h_n}) é uniformemente limitada. Por (2.4), temos

$$|u_h'(r)|^{p-2} u_h'(r) = -\int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s, u_h(s))\, ds.$$

De onde segue

$$|u_h'(r)|^{p-1} \leq M\delta.$$

Logo (u_{h_n}) é eqüicontínua. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, a menos de uma subseqüência, $u_{h_n} \to \bar{u}$ uniformemente em $[r_0, r_0 + \delta]$. Por (2.4), a função u_{h_n} satisfaz à equação integral

$$u_{h_n}(r) = \alpha + h_n - \int_{r_0}^{r} A^{-1} \left(\int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} f(t, u_{h_n}(t))\, dt \right) ds.$$

Fazendo $n \to \infty$,

$$\bar{u}(r) = \alpha - \int_{r_0}^{r} A^{-1} \left(\int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} f(t, \bar{u}(t))\, dt \right) ds. \tag{2.11}$$

Mas (2.11) é equivalente à (2.10). Logo, pela Afirmativa 1, $\bar{u} \equiv u$. Repetindo o argumento anterior, para toda subseqüência de (u_{h_n}), obtemos que $u_{h_n} \to u$ uniformemente.

Afirmativa 3 : $u_h' \to u'$ uniformemente em $[r_0, r_0 + \delta]$ quando $h \to 0$.

Por (2.4), temos

$$\begin{aligned} \left| |u_h'(r)|^{p-2} u_h'(r) - |u'(r)|^{p-2} u'(r) \right| &= \left| \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} [f(s, u_h(s)) - f(s, u(s))]\, ds \right| \\ &\leq \int_{r_0}^{r} |f(s, u_h(s)) - f(s, u(s))|\, ds. \end{aligned}$$

Assim, pela Afirmativa 2, provamos a Afirmativa 3.

Afirmativa 4 : $u_h(r)$ é a única solução de (2.4) em $[r_0, r_0+\delta]$.

Pela Afirmativa 2 e Lema 1.7, existem $\delta_1 > 0$ e h_0 tais que

$$f(r, u_h(r)) > 0 \quad \text{em} \quad [r_0, r_0+\delta_1]$$

para $|h| < h_0$. Assim

$$|u_h'(r)|^{p-2}u_h'(r) = -\int_{r_0}^{r}\left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s, u_h(s))\, ds < 0$$

para $r \in (r_0, r_0+\delta_1]$. Assim, pela Afirmativa 3 e (2.6), para h suficientemente pequeno,

$$u_h'(r) < 0 \quad \text{em} \quad (r_0, r_0+\delta].$$

Pelas Proposições B.2 e B.3, demonstramos a Afirmativa 4.

Seja h suficientemente pequeno tal que

$$|u_h(r_0+\delta) - u(r_0+\delta)| < \frac{\epsilon}{4}$$

e

$$|u'(r_0+\delta)| < N.$$

Repetindo o argumento anterior, u_h está unicamente definida em $[r_0+\delta, r_0+2\delta]$, $u_h \to u$ e $u_h' \to u'$ uniformemente em $[r_0+\delta, r_0+2\delta]$. Depois de um número finito n_0 de etapas, teremos

$$r_0 + (n_0-1)\delta < R \leq r_0 + n_0\delta.$$

Se $u'(R) < 0$, para h pequeno, podemos estender unicamente $u_h(r)$ até $r = R$ ou até $r = R_h$ tal que $u_h(R_h) = 0$. Se por outro lado, $u'(R) = 0$, então podemos ter $u_h'(r) = 0$ para algum r próximo de R. Mas neste caso, pela hipótese $(\mathbf{H_1'})$, $f(r, u_h(r)) < 0$, para r próximo de R e h pequeno, garantindo que podemos estender unicamente a função $u_h(r)$ até $r = R_h \leq R$ com $u_h(R_h) = 0$ se $R_h < R$.

2.3 Demonstração do Teorema 2.3

Pelo Teorema 2.2 temos que

$$u_h(r) \to u(r) \quad \text{e} \quad u_h'(r) \to u'(r) \quad \text{quando} \quad h \to 0 \tag{2.12}$$

uniformemente em $[r_0, R]$. Os próximos dois lemas, cujas demonstrações encontram-se na Seção 2.4, fornecem estimativas cruciais para a demonstração do Teorema 2.3.

Lema 2.7 *Seja a função*

$$Y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A^{-1}(x) - A^{-1}(y)}{x-y} & se\ x \neq y \\ (A^{-1})'(x) & se\ x = y \neq 0, \end{cases}$$

onde $A(s) = |s|^{p-2}s$. Para h pequeno, existe uma função $G(r)$ integrável em $[r_0, R]$ tal que

$$Y(A(u_h'(r)), A(u'(r))) < G(r), \quad r \in (r_0, R).$$

E mais, para $r \in (r_0, R)$,

$$\lim_{h\to 0} Y(A(u_h'(r)), A(u'(r))) = \frac{1}{(p-1)|u'(r)|^{p-2}}.$$

Lema 2.8 *Seja a função*

$$Z(r,x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(r,x) - f(r,y)}{x-y} & se\ x \neq y \\ f'(r,x) & se\ x = y. \end{cases}$$

Para h pequeno, existe uma função $H(r)$ integrável em $[r_0, R]$ tal que

$$|Z(r, u_h(r), u(r))| < H(r), \quad r \in [r_0, R).$$

E mais, para $r \in [r_0, R)$,

$$\lim_{h\to 0} Z(r, u_h(r), u(r)) = f'(r, u(r)).$$

Demonstração do Teorema 2.3: Seja $r_0 \leq r \leq R$. Temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_h(r) &= \frac{1}{h}\left[u_h(r) - u(r)\right] \\
&= 1 + \frac{1}{h}\int_{r_0}^{r} u_h'(s) - u'(s)\; ds \\
&= 1 + \frac{1}{h}\int_{r_0}^{r} A^{-1}\left(A(u_h'(s))\right) - A^{-1}\left(A(u'(s))\right)\; ds.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a equação (2.4) e pelos Lemas 2.7 e 2.8, obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi_h(r) &= 1 + \frac{1}{h}\int_{r_0}^{r} Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))\left[A(u_h'(s)) - A(u'(s))\right]\; ds \\
&= 1 - \int_{r_0}^{r} Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))\int_{r_0}^{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{N-1}\frac{f(t,u_h(t)) - f(t,u(t))}{h}\; dt\; ds \\
&= 1 - \int_{r_0}^{r} Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))\int_{r_0}^{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} Z(t,u_h(t),u(t))\Phi_h(t)\; dt\; ds.
\end{aligned}$$

Por (2.5) obtemos

$$\begin{aligned}
|\Phi_h(r) - \omega(r)| = \Bigg| &\int_{r_0}^{r}\frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}}\int_{r_0}^{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} f'(t,u(t))\omega(t)\; dt\; ds - \\
&- \int_{r_0}^{r} Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))\int_{r_0}^{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} Z(t,u_h(t),u(t))\Phi_h(t)\; dt\; ds\Bigg|
\end{aligned}$$

Com isso

$$|\Phi_h(r) - \omega(r)| \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\int_{r_0}^{r} Y(A(u_h'), A(u'))\int_{r_0}^{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} Z(t,u_h,u)\left(\Phi_h - \omega\right)(t)\; dt\; ds\right|, \\
I_2 &= \left|\int_{r_0}^{r}\left[Y(A(u_h'), A(u')) - \frac{1}{(p-1)|u'|^{p-2}}\right]\int_{r_0}^{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} Z(t,u_h,u)\omega(t)\; dt\; ds\right|, \\
I_3 &= \left|\int_{r_0}^{r}\frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}}\int_{r_0}^{s}\left(\frac{t}{s}\right)^{N-1}\left[Z(t,u_h(t),u(t)) - f'(t,u(t))\right]\omega(t)\; dt\; ds\right|.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{r_0}^{r} |Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))| \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} |Z(t, u_h(t), u(t))| \, |\Phi_h - \omega| \, (t) \; dt \; ds \\
&\leq \int_{r_0}^{r} |Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))| \int_{r_0}^{s} |Z(t, u_h(t), u(t))| \, |\Phi_h - \omega| \, (t) \; dt \; ds \\
&\leq \int_{r_0}^{r} |Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))| \int_{r_0}^{r} |Z(t, u_h(t), u(t))| \, |\Phi_h - \omega| \, (t) \; dt \; ds \\
&\leq \int_{r_0}^{r} |Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))| \; ds \cdot \int_{r_0}^{r} |Z(s, u_h(s), u(s))| \, |\Phi_h - \omega| \, (s) \; ds. \\
&\leq \int_{r_0}^{R} |Y(A(u_h'(s)), A(u'(s)))| \; ds \cdot \int_{r_0}^{r} |Z(s, u_h(s), u(s))| \, |\Phi_h - \omega| \, (s) \; ds.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando os Lemas 2.7 e 2.8, obtemos

$$I_1 \leq \int_{r_0}^{R} G(s) \; ds \cdot \int_{r_0}^{r} H(s) \, |\Phi_h - \omega| \, (s) \; ds.$$

Majorando I_2 e I_3 de maneira análoga temos

$$\begin{aligned}
|\Phi_h(r) - \omega(r)| \leq & \int_{r_0}^{R} G(s) \; ds \cdot \int_{r_0}^{r} H(s) \, |\Phi_h - \omega| \, (s) \; ds + \\
+ \; & \underbrace{C \int_{r_0}^{R} H(s) \; ds \cdot \int_{r_0}^{R} \left| Y(A(u_h'(s)), A(u'(s))) - \frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}} \right| \; ds}_{I_4} + \\
+ \; & \underbrace{C \int_{r_0}^{R} \frac{1}{(p-1)|u'(s)|^{p-2}} \; ds \cdot \int_{r_0}^{R} |Z(s, u_h(s), u(s)) - f'(s, u(s))| \; ds}_{I_5}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall (ver Apêndice C) obtemos

$$|\Phi_h(r) - \omega(r)| \leq (I_4 + I_5) e^{C \int_{r_0}^{R} H(s) \, ds}. \tag{2.13}$$

Por (2.12) e os Lemas 2.7 e 2.8, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada para obter que

$$I_4 \to 0 \quad \text{e} \quad I_5 \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Portanto, por (2.13), terminamos a demonstração. ■

2.4 Demonstração dos Lemas

Demonstração do Lema 2.7 : Se $1 < p \leq 2$ então a função $A^{-1}(s) = |s|^{\frac{2-p}{p-1}} s$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, temos

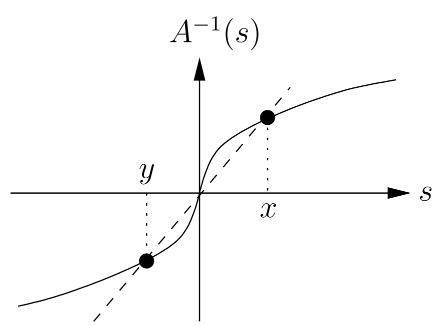
$$Y(A(u_h'(r)), A(u'(r))) = \frac{1}{p-1} |\xi(r)|^{2-p},$$

onde $\xi(r)$ está entre $u_h'(r)$ e $u'(r)$. Então, por (2.12), para h pequeno, existe $M > 0$ tal que

$$Y(A(u_h'(r)), A(u'(r))) < M,$$

demonstrando o lema para o caso $1 < p \leq 2$. Agora, para o caso $p > 2$, a função A^{-1} não é diferenciável em $s = 0$. No entanto, provaremos a seguir que, para $y \neq 0$, temos

$$Y(x, y) < \frac{2}{|y|^{\frac{p-2}{p-1}}}, \quad \forall x. \tag{2.14}$$



Sem perda de generalidade, suporemos $y < 0$. Consideremos as possibilidades para x:

- $\mathbf{x = y}$

$$Y(x, y) = \frac{1}{(p-1)|y|^{\frac{p-2}{p-1}}} < \frac{1}{|y|^{\frac{p-2}{p-1}}}.$$

- $\mathbf{x \leq 0}$ e $\mathbf{x \neq y}$

$$\begin{aligned} Y(x,y) &= \frac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}y}{x-y} \\ &= \frac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}x + |y|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}y}{x-y} \\ &= |y|^{\frac{2-p}{p-1}} + \frac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}} - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}}{x-y}x \\ &\leq \frac{1}{|y|^{\frac{p-2}{p-1}}}. \end{aligned}$$

- $\mathbf{0 < x < -y}$

$$\begin{aligned} Y(x,y) &= \frac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}y}{x-y} \\ &= \frac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}x + |y|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}y}{x-y} \\ &= |y|^{\frac{2-p}{p-1}} + \frac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}} - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}}{x-y}x \\ &< |y|^{\frac{2-p}{p-1}} + \frac{|x|^{\frac{1}{p-1}}}{x-y} \\ &< |y|^{\frac{2-p}{p-1}} + \frac{|y|^{\frac{1}{p-1}}}{|y|} \\ &< \frac{2}{|y|^{\frac{p-2}{p-1}}}. \end{aligned}$$

- $\mathbf{x \geq -y}$

$$\begin{aligned} Y(x,y) &= \frac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}y}{x-y} \\ &\leq \frac{|y|^{\frac{2-p}{p-1}}x - |y|^{\frac{2-p}{p-1}}y}{x-y} \\ &\leq \frac{1}{|y|^{\frac{p-2}{p-1}}}. \end{aligned}$$

Com isso provamos a estimativa (2.14). Utilizando (2.14), concluímos que

$$Y(A(u_h'(r)), A(u'(r))) < \frac{2}{|u'(r)|^{p-2}} \quad \text{em } (r_0, R).$$

Por (2.7), vemos que a função
$$\frac{1}{|u'(r)|^{p-2}}$$
é integrável em $[r_0, R]$, terminando a primeira parte da demonstração. Para concluir, por (2.12) e pela continuidade de Y, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} Y(A(u_h'(r)), A(u'(r))) &= \left(A^{-1}\right)'(A(u'(r))) \\
&= \frac{1}{(p-1)\left||u'(r)|^{p-2}u'(r)\right|^{\frac{p-2}{p-1}}} \\
&= \frac{1}{(p-1)|u'(r)|^{p-2}}.
\end{aligned}$$

■

Demonstração do Lema 2.8 : Devemos analisar duas possibilidades:

(i) Se f satisfaz $(\mathbf{H_1})$ então $u'(R) < -C < 0$, pela observação feita na demonstração do Teorema 2.1. Logo, por (2.12), existe $\epsilon > 0$ tal que

$$u_h'(r) < -C < 0 \quad \text{em} \quad [R-\epsilon, R],$$

para h suficientemente pequeno. Assim

$$u_h(r) > C(R-r) \quad \text{em} \quad [R-\epsilon, R].$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e $(\mathbf{H_2})$ temos

$$|Z(r, u_h(r), u(r))| = |f'(r, \xi(r))| < \frac{C}{|\xi(r)|^\gamma} < \frac{C}{(R-r)^\gamma} \quad \text{em} \quad [R-\epsilon, R],$$

onde $\xi(r)$ está entre $u_h(r)$ e $u(r)$. Por (2.12) e pela continuidade de $Z(r,x,y)$ para x, $y \neq 0$, concluímos a demonstração.

(ii) Se f satisfaz $(\mathbf{H_2'})$, então, por (2.12), para h pequeno, existe $M > 0$ tal que

$$|Z(r, u_h(r), u(r))| < M.$$

Em ambos os casos, por (2.12) e pela continuidade de Z, obtemos

$$\lim_{h \to 0} Z(r, u_h(r), u(r)) = f'(r, u(r)).$$

■

Capítulo 3

Caso Sublinear

Consideremos o problema

$$
\begin{cases}
-\triangle_p u = f(|x|, u) & \text{em } B_{r_0,R} \subset \mathbb{R}^N, \quad p > 1, \quad N \geq 2 \\
u > 0 & \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{para } |x| = r_0, \quad \text{se } r_0 > 0 \\
u(x) = 0 & \text{para } |x| = R,
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

onde a função $f(r, s)$ satisfaz às hipóteses

$(\mathbf{A_1})$ $f \in C^0([0, \infty) \times [0, \infty)) \cap C^1([0, \infty) \times (0, \infty))$ e $f_r(r, s) \leq 0$;

$(\mathbf{A_2})$ Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $s^\gamma f'(r, s)$ é limitada para s próximo de 0 e uniformemente para $r \leq R$, onde $f'(r, s) \equiv f_s(r, s)$;

$(\mathbf{A_3})$ $f(r, s) > 0$ para todo $r \geq 0$ e $s > 0$;

$(\mathbf{A_4})$ $sf'(r, s) - (p - 1)f(r, s) < 0$ para $s > 0$.

Neste capítulo mostramos que

Teorema 3.1 *Suponhamos que f satisfaz às hipóteses* $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_4})$. *Nestas condições, o problema* (3.1) *possui no máximo uma solução radial. Tal solução, se existir, é não-degenerada.*

Utilizando o resultado de Brock [4], no caso particular em que o domínio é uma bola ($r_0 = 0$), todas as soluções de (3.1) são radiais. Logo

Corolário 3.2 *Suponhamos que $r_0 = 0$ e f satisfaz às hipóteses* $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_4})$. *Nestas condições, o problema* (3.1) *possui no máximo uma solução.*

Como conseqüência da hipótese $(\mathbf{A_4})$ temos que

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{f(r,s)}{s^{p-1}} < \infty.$$

No caso particular do operador laplaciano ($p = 2$), a função $f(s) = s^q$, $0 < q < 1$, satisfaz às hipóteses do Teorema 3.1, motivando assim o nome deste capítulo: **Caso Sublinear**. As hipóteses $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_3})$ implicam nas hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ (ver Capítulo 1) e $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_2})$ (ver Capítulo 2).

O Teorema 3.1, para o caso particular do laplaciano com f autônoma na bola, foi provado Ouyang-Shi [23]. No artigo de Hai-Shivagi [17], a existência e unicidade de soluções são estabelecidas para uma classe de funções com $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0$. Para domínios limitados gerais, em Drábek-Hernandéz [10] encontramos um resultado de unicidade para o problema de Dirichlet com $f(r,0) = 0$, $\forall r$, e $\frac{f(r,s)}{s^{p-1}}$ decrescente em s. É importante notar que o Teorema 3.1 abrange o caso em que $f(r_0, 0) > 0$, $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} > 0$ e o domínio é um anel com condição mista de fronteira.

Os seguintes exemplos satisfazem às hipóteses do Teorema 3.1:

- $f(r,s) = a(r)s^q + c$, com $0 < q < p-1$, $c \geq 0$ e $a \in C^1[0,\infty)$ positiva e não-crescente. Neste caso temos que $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0$.

- $f(s) = (s^p + ps)^{\frac{p-1}{p}}$. Aqui temos $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 1$.

Quando $1 < p \leq 2$ podemos enfraquecer a hipótese $(\mathbf{A_3})$ para

$(\mathbf{A_3'})$ Se $f(r_0, s) > 0$ para algum $s > 0$, então $f(r,s) > 0$ para todo $r \geq r_0$.

Com isto a função f pode ter $f(r_0, s) = 0$ para algum $s > 0$. Por exemplo, $f(s) = s^m - s^q + c$, $m \leq p-1 \leq q$, $m \neq q$, $c \geq 0$.

3.1 Não-degenerescência

Seja $u(r)$ uma solução de

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(r,u), & r \in (r_0, R) \\ u > 0 \\ u'(r_0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

com f satisfazendo às hipóteses $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_4})$. Com isto f satisfaz também às hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ e $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_2})$. Logo podemos utilizar o Teorema 2.1 e estudar os zeros da função ω que é solução do problema de valor inicial associado à linearização de (3.2):

$$\begin{cases} L\omega \equiv (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')' + r^{N-1}f'(r,u)\omega = 0, & r \in (r_0, R), \\ \omega'(r_0) = 0, \\ \omega(r_0) = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Quando $1 < p \leq 2$ e f satisfaz à hipótese $(\mathbf{A_3'})$, precisamos provar que também neste caso temos $f(r_0, u(r_0)) > 0$, e com isso f satisfaz à hipótese $(\mathbf{M_2})$. De fato, pelo

Lema 1.7, $f(0,u(0)) \geq 0$. Podemos eliminar a possibilidade $f(0,u(0)) = 0$ pois, para $1 < p \leq 2$, temos a unicidade do problema de valor inicial associado a (3.2) inclusive quando $f(0,u(0)) = 0$ (ver Apêndice B), tendo assim somente a solução constante para este caso.

Proposição 3.3 *Seja $\omega(r)$ solução de* (3.3). *Então $\omega > 0$ em $[r_0, R]$.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que r_1 é o primeiro zero de ω em $[r_0, R]$. Notemos que

$$\begin{aligned} Lu &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + r^{N-1}f'(r,u)u \\ &= r^{N-1}\left[f'(r,u)u - (p-1)f(r,u)\right] \qquad \text{por (3.2).} \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \omega Lu &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'\omega + r^{N-1}f'(r,u)u\omega \qquad \text{e} \\ uL\omega &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')'u + r^{N-1}f'(r,u)\omega u \equiv 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\omega Lu = \omega Lu - uL\omega = (p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega u' - u\omega')]'.$$

Integrando de r_0 a r_1, obtemos uma contradição, pois por $(\mathbf{A_4})$

$$0 > \int_{r_0}^{r_1} \omega Lu \, dr = -(p-1)r_1^{N-1}|u'(r_1)|^{p-2}u(r_1)\omega'(r_1) \geq 0.$$

■

Corolário 3.4 *A solução radial $u(r)$ é não-degenerada.*

Demonstração: Pela linearidade do problema

$$\begin{cases} -(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega'(r)\right)' = r^{N-1}f'(r,u)\omega(r), \quad r \in (r_0, R) \\ \omega'(r_0) = \omega(R) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

vemos, pela Proposição anterior, que (3.4) possui apenas a solução trivial $\omega \equiv 0$. ∎

3.2 Unicidade

Demonstração do Teorema 3.1: Seja $u(r)$ uma solução de (3.2) e $\alpha_0 = u(r_0)$. Pelo Corolário 3.4, a solução u é não-degenerada. Mostraremos que esta solução é única. Denotaremos por u_α a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'_\alpha|^{p-2}u'_\alpha)' = r^{N-1}f(r,u_\alpha), \\ u'_\alpha(r_0) = 0, \\ u_\alpha(r_0) = \alpha \end{cases}$$

Passo 1: Existe $h > 0$ tal que para $\alpha_0 - h < \alpha < \alpha_0$, a função u_α possui um zero em $R_\alpha < R$.

Seja (h_n), $h_n > 0$, tal que $h_n \to 0$. Para n suficientemente grande, $u_{\alpha_0 - h_n}$ pode ser estendida até $r = R$ ou até $r = R_{\alpha_0-h_n}$ tal que $u_{\alpha_0-h_n}(R_{\alpha_0-h_n}) = 0$. Afirmamos que para n suficientemente grande, $u_{\alpha_0-h_n}$ **não** pode ser estendida até $r = R$. Com efeito se isto fosse possível, então $u_{\alpha_0}(R) - u_{\alpha_0-h_n}(R) \leq 0$. Pelo Teorema 2.3 teríamos $\omega(R) \leq 0$, o que contradiz a Proposição 3.3.

Passo 2: Para $\alpha < \alpha_0$, a função u_α não é solução de (3.2).

Afirmamos que

$$\inf\{\tilde{\alpha} > 0 \mid \text{Para } \tilde{\alpha} < \alpha < \alpha_0,\ u_\alpha \text{ possui um zero em } R_\alpha < R\} = \overline{\alpha} = 0.$$

Com efeito, se $\overline{\alpha} > 0$ então $u_{\overline{\alpha}}$, por continuidade, tem um zero em $R_{\overline{\alpha}} < R$, isto é, $u_{\overline{\alpha}}$ é solução de (3.2) mas com um raio diferente. Logo, pela Proposição 3.3, temos que $\omega_{\overline{\alpha}}(R_{\overline{\alpha}}) > 0$. Pelo Passo 1, existe $\alpha < \overline{\alpha}$ tal que u_α possui um zero em $R_\alpha < R_{\overline{\alpha}} < R$, o que é uma contradição.

Passo 3: A função u_{α_0} é a única solução de (3.2).

Seja u_{α_1} solução de (3.2). Pelo Passo 2, temos que $\alpha_1 \geq \alpha_0$. Mas se $\alpha_1 > \alpha_0$ então pelos Passos 1 e 2 temos que u_{α_0} não é solução de (3.2) (contradição). ■

Capítulo 4

Caso Superlinear e Positivo

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f(|x|, u) & \text{em } B_{r_0,R} \subset \mathbb{R}^N, \quad p > 1, \quad N \geq 2 \\ u > 0 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{para } |x| = r_0, \quad \text{se } r_0 > 0 \\ u(x) = 0 & \text{para } |x| = R, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde a função $f(r,s)$ satisfaz às hipóteses

($\mathbf{B_1}$) $f \in C^0([0,\infty) \times [0,\infty)) \cap C^1([0,\infty) \times (0,\infty))$ e $f_r(r,s) \leq 0$;

($\mathbf{B_2}$) Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $s^\gamma f'(r,s)$ é limitada para s próximo de 0 e uniformemente para $r \leq R$, onde $f'(r,s) \equiv f_s(r,s)$;

($\mathbf{B_3}$) $f(r,s) > 0$ para todo $s > 0$ e $r \geq 0$;

($\mathbf{B_4}$) $sf'(r,s) - (p-1)f(r,s) > 0$ para $s > 0$.

E mais, dada uma solução radial $u(r)$ de (4.1), $r = |x|$, temos

($\mathbf{B_5}$) A função

$$\frac{pf(r,u(r)) + rf_r(r,u(r))}{u(r)f'(r,u(r)) - (p-1)f(r,u(r))}$$

é não-crescente em (r_0, R);

($\mathbf{B_6}$) Existe $r_0 \leq \hat{r} \leq R$ tal que para a função

$$G(r) = NF(r,u(r)) - \frac{N-p}{p}u(r)f(r,u(r)) + rF_r(r,u(r))$$

temos $G(r) \geq 0$ em $[r_0, \hat{r}]$ e $G(r) \leq 0$ em $[\hat{r}, R]$.

Neste capítulo mostramos que

Teorema 4.1 *Suponhamos que f satisfaz às hipóteses* $(\mathbf{B_1}) - (\mathbf{B_6})$. *Nestas condições, o problema* (4.1) *possui no máximo uma solução radial. Tal solução, se existir, é não-degenerada.*

Utilizando o resultado de Brock [4], no caso particular em que o domínio é uma bola ($r_0 = 0$), todas as soluções de (4.1) são radiais. Logo

Corolário 4.2 *Suponhamos que $r_0 = 0$ e f satisfaz às hipóteses* $(\mathbf{B_1}) - (\mathbf{B_6})$. *Nestas condições, o problema* (4.1) *possui no máximo uma solução.*

Quando f não depende r (caso autônomo), as hipóteses $(\mathbf{B_1}) - (\mathbf{B_6})$ se reduzem a:

($\bar{\mathbf{B}}_\mathbf{1}$) $f \in C^0[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$;

($\bar{\mathbf{B}}_\mathbf{2}$) Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $s^\gamma f'(s)$ é limitada para s próximo de 0;

$(\bar{\mathbf{B}}_3)$ $f(s) > 0$ para todo $s > 0$;

$(\bar{\mathbf{B}}_4)$ $sf'(s) - (p-1)f(s) > 0$ para $s > 0$;

$(\bar{\mathbf{B}}_5)$ A função $\dfrac{sf'(s)}{f(s)}$ é não-crescente em $(0, \infty)$.

Provaremos mais adiante (Lema 4.4) que as hipóteses $(\bar{\mathbf{B}}_1) - (\bar{\mathbf{B}}_5)$ implicam em $(\mathbf{B_6})$.

Como conseqüência da hipótese $(\mathbf{B_4})$ temos que

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{f(r,s)}{s^{p-1}} > 0.$$

No caso particular do operador laplaciano $(p = 2)$, temos que a função $f(s) = s^q$, $q > 1$, satisfaz às hipóteses do Teorema 4.1, motivando assim o nome deste capítulo: **Caso Superlinear e Positivo**.

O Teorema 4.1, para o caso particular do laplaciano com f autônoma na bola, foi provado em Ouyang-Shi [23]. Estendemos o trabalho de Aftalion-Pacella [1], provando a unicidade de soluções para o caso não-autônomo e considerando o problema em anéis.

A função $f(r, s) = a(r)s^q$, $q > p - 1$, $a \in C^1[0, \infty)$ positiva e não-crescente com $\dfrac{ra'}{a}$ não-crescente, satisfaz às hipóteses do Teorema 4.1. Com efeito,

- $sf'(r, s) - (p - 1)f(r, s) = [q - (p - 1)]a(r)s^q > 0$ (hipótese $(\mathbf{B_4})$);

- A função

$$\begin{aligned}\frac{pf(r,u(r)) + rf_r(r,u(r))}{u(r)f'(r,u(r)) - (p-1)f(r,u(r))} &= \frac{pa(r)u^q + ra'(r)u^q}{qa(r)u^q - (p-1)a(r)u^q}\\ &= \frac{p + \frac{ra'(r)}{a(r)}}{q-(p-1)}\end{aligned}$$

  é não-crescente (hipótese $(\mathbf{B_5})$).

- A função

$$
\begin{aligned}
G(r) &= NF(r,u(r)) - \frac{N-p}{p}u(r)f(r,u(r)) + rF_r(r,u(r)) \\
&= \frac{N}{q+1}a(r)u^{q+1} - \frac{N-p}{p}a(r)u^{q+1} + frac1q+1ra'(r)u^{q+1} \\
&= a(r)u^{q+1}\left[\frac{N}{q+1} - \frac{N-p}{p} + \frac{1}{q+1}\frac{ra'(r)}{a(r)}\right]
\end{aligned}
$$

satisfaz à hipótese $(\mathbf{B_6})$ pois o termo entre colchetes é não-crescente.

4.1 Não-Degenerescência

Seja $u(r)$ uma solução de

$$
\begin{cases}
-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(r,u), & r \in (r_0,R) \\
u > 0 \\
u'(r_0) = u(R) = 0.
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

Suponhamos que f satisfaz às hipóteses $(\mathbf{B_1}) - (\mathbf{B_6})$.

As hipóteses $(\mathbf{B_1}) - (\mathbf{B_3})$ implicam nas hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ e $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_2})$. Logo podemos utilizar os Teoremas 2.1 e 2.3. Conforme observado no Capítulo 2, pelo resultado de Vazquez [27] (ver Apêndice C), garantimos

$$u'(R) < 0. \tag{4.3}$$

Então pelo Teorema 1.2 temos que

$$u'(r) < 0 \text{ em } (r_0,R].$$

Logo $u \in C^3(r_0,R)$.

Com isto estudaremos os zeros da função ω que é solução do problema de valor inicial associado à linearização de (4.2):

$$\begin{cases} L\omega \equiv (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')' + r^{N-1}f'(r,u)\omega = 0, & r \in (r_0, R), \\ \omega'(r_0) = 0, \\ \omega(0) = 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Proposição 4.3 *Seja $\omega(r)$ solução de* (4.4)*. Então $\omega(R) < 0$.*

Os próximos lemas são necessários para provar este resultado. A demonstração dos lemas será feita na Seção 4.3.

Lema 4.4 *A função*

$$h(r) = -\frac{ru'(r)}{u(r)}$$

é crescente em $[r_0, R)$.

Lema 4.5 *Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $v(r) = ru'(r) + \beta u(r)$. Temos que*

$$Lv = r^{N-1}\left\{\beta[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)] - pf(r,u) - rf_r(r,u)\right\}.$$

Demonstração da Proposição 4.3: Dividiremos a demonstração nos seguintes passos:

Passo 1: A função $\omega(r)$ possui zero em $[r_0, R)$.

Suponhamos que $\omega > 0$ em $[r_0, R)$. Notemos que

$$\begin{aligned} Lu &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + r^{N-1}f'(r,u)u \\ &= r^{N-1}\left[f'(r,u)u - (p-1)f(r,u)\right] \qquad \text{por (4.2).} \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \omega Lu &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'\omega + r^{N-1}f'(r,u)u\omega \qquad \text{e} \\ uL\omega &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')'u + r^{N-1}f'(r,u)\omega u \equiv 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\omega Lu = \omega Lu - uL\omega = (p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega u' - u\omega')]'.$$

Integrando de r_0 a R, obtemos uma contradição, pois por $(\mathbf{B_4})$ temos

$$0 < \int_{r_0}^{R} r^{N-1}\omega\left[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)\right]\, dr = (p-1)R^{N-1}|u'(R)|^{p-2}\omega(R)u'(R) \leq 0.$$

Passo 2: A função $\omega(r)$ possui no máximo um zero em $[r_0, R]$.

Sejam $r_1 < r_2$ os dois primeiros zeros de ω em $[r_0, R]$. Seja

$$\beta = -\frac{r_1 u'(r_1)}{u(r_1)} > 0.$$

Pelo Lema 4.4, a função $v(r) = ru' + \beta u$ possui um único zero em $[r_0, R]$. Pela escolha de β temos $v(r_1) = 0$. Temos também, utilizando (4.3), que $v(r_2) < 0$. Agora, pelo Lema 4.5,

$$Lv = r^{N-1}\left\{\beta[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)] - pf(r,u) - rf_r(r,u)\right\}.$$

Podemos escrever

$$Lv = r^{N-1}\left[\beta - \frac{pf(r,u) + rf_r(r,u)}{uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)}\right]\left[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)\right].$$

Pela hipótese $(\mathbf{B_5})$, temos duas possibilidades:

- $Lv \geq 0$ em $[r_1, r_2]$

  Comparando v e ω, como no Passo 1, obtemos

  $$\omega Lv = (p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega v' - v\omega')]'.$$

  Integrando de r_1 a r_2 obtemos,

  $$0 \geq \int_{r_1}^{r_2} \omega Lv\, dr = -(p-1)r_2^{N-1}|u'(r_2)|^{p-2}v(r_2)\omega'(r_2) > 0 \text{ (contradição)},$$

  pois $\omega(r_1) = 0$, $\omega(r_2) = 0$ e $\omega'(r_2) > 0$, lembrando que $\omega < 0$ em (r_1, r_2).

- $Lv \leq (\not\equiv)\ 0$ em $[r_0, r_1]$;

  Por (4.2), temos

$$\begin{aligned} r^{N-1}|u'|^{p-2}v' &= r^{N-1}|u'|^{p-2}\left[ru'' + (\beta+1)u'\right] \\ &= (\beta+1)r^{N-1}|u'|^{p-2}u' + r^N|u'|^{p-2}u'' \\ &= (\beta+1)r^{N-1}|u'|^{p-2}u' - \frac{N-1}{p-1}r^{N-1}|u'|^{p-2}u' - \frac{1}{N-1}r^N f(r,u). \end{aligned}$$

  logo $\lim\limits_{r\to r_0} r^{N-1}|u'|^{p-2}v'(r) \leq 0$. Neste caso teríamos

$$0 > \int_{r_0}^{r_1} \omega Lv\, dr = \left[(p-1)r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega v' - v\omega')\right]_{r_0}^{r_1} \geq 0 \text{ (contradição)}.$$

■

Corolário 4.6 *A solução radial $u(r)$ é não-degenerada.*

Demonstração: Pela linearidade do problema

$$\begin{cases} -(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega'(r)\right)' = r^{N-1}f'(r,u)\omega(r), \quad r \in (r_0, R) \\ \omega'(r_0) = \omega(R) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

vemos, pela Proposição anterior, que (4.5) possui apenas a solução trivial $\omega \equiv 0$. ■

4.2 Unicidade

Demonstração do Teorema 4.1: Seja $u(r)$ uma solução de (4.2) e $\alpha_0 = u(0)$. Pelo Corolário 4.6, a solução u é não-degenerada. Mostraremos que esta solução é única. Denotaremos por u_α a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'_\alpha|^{p-2}u'_\alpha)' = r^{N-1}f(r,u_\alpha), \\ u'_\alpha(0) = 0, \\ u_\alpha(0) = \alpha. \end{cases}$$

Passo 1: Existe $h > 0$ tal que para $\alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + h$, a função u_α possui um zero em $R_\alpha < R$.

Seja (h_n), $h_n > 0$, tal que $h_n \to 0$. Para n suficientemente grande, $u_{\alpha_0+h_n}$ pode ser estendida até $r = R$ ou até $r = R_{\alpha_0+h_n}$ tal que $u_{\alpha_0+h_n}(R_{\alpha_0+h_n}) = 0$. Afirmamos que para n suficientemente grande, $u_{\alpha_0+h_n}$ **não** pode ser estendida até $r = R$. Com efeito se isto fosse possível, então $u_{\alpha_0+h_n}(R) - u_{\alpha_0}(R) \leq 0$. Pelo Teorema 2.3 teríamos $\omega(R) \geq 0$, o que contradiz a Proposição 4.3.

Passo 2: Para $\alpha > \alpha_0$, a função u_α não é solução de (4.2).

Afirmamos que

$$\sup \{\tilde{\alpha} > 0 \mid \text{Para } \alpha_0 < \alpha < \tilde{\alpha},\ u_\alpha \text{ possui um zero em } R_\alpha < R\} = \overline{\alpha} = \infty.$$

Com efeito, se $\overline{\alpha}$ é finito então $u_{\overline{\alpha}}$, por continuidade, tem um zero em $R_{\overline{\alpha}} < R$, isto é, $u_{\overline{\alpha}}$ é solução de (4.2) mas com um raio diferente. Logo, pela Proposição 4.3, temos que $\omega_{\overline{\alpha}}(R_{\overline{\alpha}}) < 0$. Pelo Passo 1, existe $\alpha > \overline{\alpha}$ tal que u_α possui um zero em $R_\alpha < R_{\overline{\alpha}} < R$, o que é uma contradição.

Passo 3: A função u_{α_0} é a única solução de (4.2).

Seja u_{α_1} solução de (4.2). Pelo Passo 2, temos que $\alpha_1 \leq \alpha_0$. Mas se $\alpha_1 < \alpha_0$ então pelos Passos 1 e 2 temos que u_{α_0} não é solução de (4.2) (contradição). ■

4.3 Demonstração dos Lemas

Demonstração do Lema 4.4: Para $r_0 < r < R$ temos

$$\begin{aligned} h'(r) &= \frac{1}{u^2}\left[r(u')^2 - u'u - ru''u\right] \\ &= \frac{1}{u^2}\left[r(u')^2 - u'u - ru\frac{1}{(p-1)|u'|^{p-2}}\left(-\frac{N-1}{r}|u'|^{p-2}u' - f(r,u)\right)\right] \\ &= \frac{1}{(p-1)|u'|^{p-2}u^2}\left[(p-1)r|u'|^p + (N-p)|u'|^{p-2}uu' + ruf(r,u)\right] \\ &= \frac{p}{(p-1)|u'|^{p-2}u^2}\left[H(r) + r\left(\frac{1}{p}uf(r,u) - F(r,u)\right)\right], \end{aligned}$$

onde $H(r)$ é definida por

$$H(r) = \frac{N-p}{p}|u'|^{p-2}uu' + \frac{p-1}{p}r|u'|^p + rF(r,u).$$

Basta provarmos que $H(r) \geq 0$ pois

$$\frac{1}{p}sf(r,s) - F(r,s) > 0$$

para $s > 0$ por ($\mathbf{B_4}$).

Afirmativa: $H(r) \geq 0$ para $r_0 \leq r \leq R$.

Notamos que $H(r_0) \geq 0$ e $H(R) > 0$. Vamos calcular

$$\begin{aligned} (r^{N-1}H(r))' &= (N-1)r^{N-2}H(r) + r^{N-1}H'(r) \\ &= r^{N-1}\left[\frac{N-1}{r}H(r) + H'(r)\right]. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} H'(r) &= \frac{N-p}{p}|u'|^p + \frac{N-p}{p}(p-1)|u'|^{p-2}uu'' + (p-1)r|u'|^{p-2}u'u'' + \\ &\quad + \frac{p-1}{p}|u'|^p + F(r,u) + rF_r(r,u) + rf(r,u)u' \\ H'(r) &= \frac{N-1}{p}|u'|^p + \frac{N-p}{p}(p-1)|u'|^{p-2}uu'' + (p-1)r|u'|^{p-2}u'u'' + \\ &\quad + F(r,u) + rF_r(r,u) + rf(r,u)u'. \end{aligned}$$

Com isto,

$$
\begin{aligned}
(r^{N-1}H(r))' &= \frac{N-p}{p}u \underbrace{|u'|^{p-2}\left[(p-1)u'' + \frac{N-1}{r}u'\right]}_{-f(r,u)} + \\
&\quad + ru' \underbrace{\left[(p-1)|u'|^{p-2}u'' + \frac{N-1}{r}|u'|^{p-2}u' + f(r,u)\right]}_{0} + \\
&\quad + NF(r,u) + rF(r,u).
\end{aligned}
$$

Logo

$$(r^{N-1}H(r))' = r^{N-1}G(r),$$

onde

$$G(r) = NF(r,u) - \frac{N-p}{p}uf(r,u) + rF_r(r,u).$$

Se $G(r)$ satisfaz à hipótese $(\mathbf{B_6})$ então $H(r) \geq 0$. Logo a demonstração está terminada para o caso **não-autônomo**.

Para o caso **autônomo** devemos analisar conforme a posição de p em relação a N:

- Se $\mathbf{p{=}N}$ então $G(r) = NF(u(r))$, que satisfaz à hipótese $(\mathbf{B_6})$.

- Se $\mathbf{p{>}N}$ então $G(r) \geq 0$ satisfazendo à hipótese $(\mathbf{B_6})$.

- Se $\mathbf{p{<}N}$ então, por $(\bar{\mathbf{B}}_\mathbf{5})$, existe $r_1 \in [r_0, R]$ tal que $G'(r) \leq 0$ para $r \in [r_0, r_1]$ e $G'(r) \geq 0$ para $r \in [r_1, R]$, pois

$$G'(r) = \frac{N-p}{p}u'f(u)\left[\frac{Np-N+p}{N-p} - \frac{uf'(u)}{f(u)}\right].$$

Como $G(R) = 0$ temos que $G(r)$ satisfaz à hipótese $(\mathbf{B_6})$. ∎

Demonstração do Lema 4.5 : Temos que

$$v'(r) = ru''(r) + (\beta+1)u'.$$

Logo

$$\begin{aligned} Lv &= (p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}v'\right)' + r^{N-1}f'(r,u)v \\ &= \underbrace{(p-1)\left(r^{N}|u'|^{p-2}u''\right)'}_{I_1} + (p-1)(\beta+1)\underbrace{\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right)'}_{I_2} + r^{N-1}f'(r,u)v. \end{aligned}$$

Por (4.2) temos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right)' \\ &= -r^{N-1}f(r,u). \end{aligned}$$

Podemos escrever (4.2) da seguinte maneira

$$\left[(p-1)u'' + \frac{N-1}{r}u'\right]|u'|^{p-2} + f(r,u) = 0.$$

Por isso

$$\begin{aligned} I_1 &= (p-1)\left(r^{N}|u'|^{p-2}u''\right)' \\ &= -(N-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right)' - \left(r^{N}f(r,u)\right)' \\ &= (N-1)r^{N-1}f(r,u) - Nr^{N-1}f(r,u) - r^{N}f'(r,u)u' - r^{N}f_r(r,u) \\ &= -r^{N-1}f(r,u) - r^{N}f'(r,u)u' - r^{N}f_r(r,u) \\ &= r^{N-1}\left[-f(r,u) - rf'(r,u)u' - rf_r(r,u)\right] \end{aligned}$$

Substituindo na expressão de Lv obtemos

$$\begin{aligned} Lv &= r^{N-1}\left[\beta uf'(r,u) - (\beta(p-1)+p)\, f(r,u) - rf_r(r,u)\right] \\ &= r^{N-1}\left\{\beta[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)] - pf(r,u) - rf_r(r,u)\right\}. \end{aligned}$$

■

4.4 Problema com Limitação no Crescimento

Quando consideramos a equação (4.2) no caso em que $1 < p \leq \min\{2, \frac{N+1}{2}\}$ e f não depende de r (caso autônomo), podemos substituir a hipótese $(\mathbf{\bar{B}_5})$ por

$(\mathbf{\bar{B}'_5})$ $\dfrac{sf'(s)}{f(s)} \leq \dfrac{N(p-1)}{N-p}$ para $s > 0$.

Teorema 4.7 *Suponhamos que* $1 < p \leq \min\{2, \frac{N+1}{2}\}$ *e a função* $f(s)$ *satisfaz às hipóteses* $(\mathbf{\bar{B}_1}) - (\mathbf{\bar{B}_4})$ *e* $(\mathbf{\bar{B}'_5})$*. Nestas condições, o problema* (4.2) *possui no máximo uma solução radial. Tal solução, se existir, é não-degenerada.*

O Teorema 4.7 generaliza o resultado de Ouyang-Shi [23], onde o caso $N \geq 3$ e $p = 2$ é considerado.

A função $f(s) = a_0 s^q + \sum_i a_i s^{q_i}$, com $a_0, a_i > 0$, $p - 1 \leq q_i < q \leq \frac{N(p-1)}{N-p}$ e $1 < p \leq \min\{2, \frac{N+1}{2}\}$, satisfaz às hipóteses do Teorema 4.7.

Demonstração do Teorema 4.7: Seja $u(r)$ uma solução de (4.2). Precisamos provar somente a não-degenerescência, pois a parte da unicidade segue a mesma demonstração do Teorema 4.1. Seja ω solução do problema de valor inicial (4.4). Afirmamos que $\omega(R) < 0$. Com efeito,

Passo 1: A função $\omega(r)$ possui zero em $[r_0, R)$.

Como na demonstração da Proposição 4.3.

Passo 2: A função $\omega(r)$ possui no máximo um zero em $[r_0, R]$.

Suponhamos, por contradição, que $r_1 < r_2$ são os dois primeiros zeros de ω em $[r_0, R]$. Seja

$$v_1(r) = ru'(r) + \frac{N-p}{p-1}u(r).$$

Pelo Lema 4.5 temos que

$$Lv_1 = r^{N-1}\left[\frac{N-p}{p-1}uf'(u) - Nf(u)\right].$$

Pela hipótese ($\bar{\mathbf{B}}'_5$) obtemos que $Lv_1 \leq 0$. Utilizando (4.2), vemos que

$$v_1'(r) = ru''(r) + \frac{N-1}{p-1}u'(r) = -\frac{1}{(p-1)|u'(r)|^{p-2}}rf(u(r)) < 0 \text{ em } (0,R).$$

Como $v_1(0) = \frac{N-p}{p-1}u(0) > 0$ e $v_1(R) = Ru'(R) < 0$, então existe um único zero $r_3 \in (0,R)$ tal que $v_1(r_3) = 0$. Temos que $r_3 \leq r_1$, caso contrário teríamos

$$0 \geq \int_0^{r_1} \omega L v_1 \, dr = \int_0^{r_1} \omega L v_1 - v_1 L\omega \, dr = -(p-1)r_1^{N-1}|u'(r_1)|^{p-2}v_1(r_1)\omega'(r_1) > 0,$$

pois

$$\omega L v_1 - v_1 L\omega = (p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega v_1' - v_1\omega')]'.$$

Agora, seja

$$v_2(r) = \frac{1}{r}v_1(r).$$

Provaremos mais adiante no Lema 4.8 que

$$Lv_2 = r^{N-2}\left[\frac{N-p}{p-1}(uf'(u) - (p-1)f(u)) - \frac{N-2p+1}{r^2}|u'|^{p-2}v_1 + \frac{(N-p)(p-2)}{(p-1)ru'}f(u)u\right].$$

Notemos que $Lv_2 > 0$ em $[r_3, R)$. Temos uma contradição pois

$$0 > \int_{r_1}^{r_2} \omega L v_2 \, dr = (p-1)\left[r_1^{N-1}|u'(r_1)|^{p-2}v_2(r_1)\omega'(r_1) - r_2^{N-1}|u'(r_2)|^{p-2}v_2(r_2)\omega'(r_2)\right] > 0.$$

Concluímos assim a demonstração. ■

Lema 4.8 *Sejam $v_1(r) = ru'(r) + \frac{N-p}{p-1}u(r)$ e $v_2(r) = \frac{1}{r}v_1(r)$. Temos que*

$$Lv_2 = r^{N-2}\left[\frac{N-p}{p-1}(uf'(u) - (p-1)f(u)) - \frac{N-2p+1}{r^2}|u'|^{p-2}v_1 + \frac{(N-p)(p-2)}{(p-1)ru'}f(u)u\right].$$

Demonstração : Como

$$v_2(r) = u'(r) + \frac{N-p}{(p-1)r}u(r), \tag{4.6}$$

então

$$v_2'(r) = u''(r) + \frac{N-p}{(p-1)r}u'(r) - \frac{N-p}{(p-1)r^2}u(r). \tag{4.7}$$

Temos que

$$\begin{aligned} Lv_2 &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}v_2')' + r^{N-1}f'(u)v_2 \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por (4.7) temos

$$\begin{aligned} I_1 &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'')' + (N-p)(r^{N-2}|u'|^{p-2}u')' - (N-p)(r^{N-3}|u'|^{p-2}u)' \\ &= I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned}$$

Utilizando (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} I_3 &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'')' \\ &= -(N-1)(r^{N-2}|u'|^{p-2}u')' - (r^{N-1}f(u))' \\ &= -(N-1)(N-2)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - (N-1)r^{N-2}(|u'|^{p-2}u')' - (r^{N-1}f(u))' \\ &= (N-1)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' + (N-1)r^{N-2}f(u) - (N-1)r^{N-2}f(u) - r^{N-1}f'(u)u' \\ &= (N-1)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - r^{N-1}f'(u)u', \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_4 &= (N-p)(r^{N-2}|u'|^{p-2}u')' \\ &= (N-p)(N-2)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' + (N-p)r^{N-2}(|u'|^{p-2}u')' \\ &= (N-p)(N-2)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - (N-p)(N-1)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - (N-p)r^{N-2}f(u) \\ &= -(N-p)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - (N-p)r^{N-2}f(u). \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
I_5 &= -(N-p)(r^{N-3}|u'|^{p-2}u)' \\
&= -(N-p)(N-3)r^{N-4}|u'|^{p-2}u - (N-p)(p-2)r^{N-3}|u'|^{p-4}u'u''u - \\
&\quad - (N-p)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' \\
&= -(N-p)(N-3)r^{N-4}|u'|^{p-2}u + \frac{(N-p)(p-2)(N-1)}{p-1}r^{N-4}|u'|^{p-2}u + \\
&\quad + \frac{(N-p)(p-2)}{(p-1)u'}r^{N-3}f(u)u - (N-p)r^{N-3}|u'|^{p-2}u'. \\
&= -\frac{N-p}{p-1}(N-2p+1)r^{N-4}|u'|^{p-2}u + \frac{(N-p)(p-2)}{(p-1)u'}r^{N-3}f(u)u - \\
&\quad - (N-p)r^{N-3}|u'|^{p-2}u'.
\end{aligned}$$

Por (4.6) temos

$$I_2 = r^{N-1}f'(u)u' + \frac{N-p}{p-1}r^{N-2}f'(u)u.$$

Substituindo em (4.8) concluímos que

$$\begin{aligned}
Lv_2 &= -(N-2p+1)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - (N-p)r^{N-2}f(u) + \frac{(N-p)(p-2)}{(p-1)u'}r^{N-3}f(u)u - \\
&\quad - \frac{N-p}{p-1}(N-2p+1)r^{N-4}|u'|^{p-2}u + \frac{N-p}{p-1}r^{N-2}f'(u)u.
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão de v_1 temos

$$Lv_2 = r^{N-2}\left[\frac{N-p}{p-1}(uf'(u) - (p-1)f(u)) - \frac{N-2p+1}{r^2}|u'|^{p-2}v_1 + \frac{(N-p)(p-2)}{(p-1)ru'}f(u)u\right].$$

$\blacksquare$

Capítulo 5

Caso Superlinear com Parte Negativa

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f(|x|, u) & \text{em } B_{r_0,R} \subset \mathbb{R}^N, \quad p > 1, \quad N \geq 2 \\ u > 0 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{para } |x| = r_0, \quad \text{se } r_0 > 0 \\ u(x) = 0 & \text{para } |x| = R, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde a função $f(r, s)$ satisfaz às hipóteses

($\mathbf{C_1}$) $f \in C^0([0, \infty) \times [0, \infty)) \cap C^1([0, \infty) \times (0, \infty))$ e $f_r(r, s) \leq 0$;

($\mathbf{C_2}$) $f(r, 0) = 0$, $\forall r \geq 0$, e existem $C, s_0 > 0$ tais que $f(r, s) > -Cs^{p-1}$ para $0 < s < s_0$ uniformemente para $r \leq R$;

($\mathbf{C_3}$) Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $s^\gamma f'(r, s)$ é limitada para s próximo de 0 e uniformemente para $r \leq R$, onde $f'(r, s) \equiv f_s(r, s)$;

$(\mathbf{C_4})$ Para cada $r \geq 0$ existe $\theta_r > 0$ tal que $f(r,s) < 0$ para $s \in (0, \theta_r)$ e $f(r,s) > 0$ para $s \in (\theta_r, \infty)$;

$(\mathbf{C_5})$ $sf'(r,s) - Kf(r,s) > 0$ para $s > 0$ com $K \geq p-1$;

E mais, dada uma solução radial $u(r)$ de (5.1), $r = |x|$, temos

$(\mathbf{C_6})$ Para $\gamma > 0$, consideremos a função

$$I_\gamma(r) := \frac{\gamma f(r,u(r)) + rf_r(r,u(r))}{u(r)f'(r,u(r)) - Kf(r,u(r))}.$$

Se $K = p-1$ então I_p é descrescente em (r_0, R). Se $K > p-1$ então I_γ é decrescente em (r_0, R) para todo $\gamma > 0$;

$(\mathbf{C_7})$ Se $K > p-1$, a função

$$\frac{pf(r,u(r)) + rf_r(r,u(r))}{u(r)f'(r,u(r)) - (p-1)f(r,u(r))}$$

é decrescente em $(r_0, \bar{r})$; sendo $r_0 < \bar{r} < R$ tal que $f(r,u(r)) > 0$ para $r \in (r_0, \bar{r})$ e $f(r,u(r)) < 0$ para $r \in (\bar{r}, R)$;

$(\mathbf{C_8})$ Existe $r_0 \leq \hat{r} \leq R$ tal que para a função

$$G(r) = NF(r,u(r)) - \frac{N-p}{p}u(r)f(r,u(r)) + rF_r(r,u(r))$$

temos $G(r) \geq 0$ em $[r_0, \hat{r}]$ e $G(r) \leq 0$ em $[\hat{r}, R]$.

Ao conjunto das hipóteses $(\mathbf{C_1}) - (\mathbf{C_8})$ chamaremos caso **(I)**.

Para incluir o caso **semipositone**, no qual $f(r,0) < 0$, consideraremos alternativamente as seguintes hipóteses:

$(\mathbf{C_2'})$ $f(r,0) < 0$, $\forall r \geq 0$;

($\mathbf{C_3'}$) $f'(r,s)$ é limitada para s próximo de 0 e uniformemente para $r \leq R$.

Ao conjunto das hipóteses ($\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{C_2'}$) $-$ ($\mathbf{C_3'}$) e ($\mathbf{C_4}$) $-$ ($\mathbf{C_8}$) chamaremos caso **(II)**.

Neste capítulo mostramos que

Teorema 5.1 *Suponhamos que f satisfaz ao caso* **(I)** *ou* **(II)**. *Nestas condições, o problema* (5.1) *possui no máximo uma solução radial. Tal solução, se existir, é não-degenerada.*

Quando f não depende r (caso autônomo), as seguintes hipóteses serão consideradas:

($\mathbf{\bar{C}_1}$) $f \in C^0[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$;

($\mathbf{\bar{C}_2}$) $f(0) = 0$ e existem $C, s_0 > 0$ tais que $f(r,s) > -Cs^{p-1}$ para $0 < s < s_0$;

($\mathbf{\bar{C}_3}$) Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $s^\gamma f'(s)$ é limitada para s próximo de 0;

($\mathbf{\bar{C}_4}$) Existe $\theta > 0$ tal que $f(s) < 0$ para $s \in (0,\theta)$ e $f(s) > 0$ para $s \in (\theta,\infty)$;

($\mathbf{\bar{C}_5}$) $sf'(s) - Kf(s) > 0$ para $s > 0$ com $K \geq p-1$;

($\mathbf{\bar{C}_6}$) A função

$$\frac{sf'(s)}{f(s)}$$

é não-crescente em (θ,∞).

Ao conjunto das hipóteses ($\mathbf{\bar{C}_1}$) $-$ ($\mathbf{\bar{C}_6}$) chamaremos caso **(III)**. A hipótese ($\mathbf{\bar{C}_6}$) é mais fraca que as hipóteses ($\mathbf{C_6}$) $-$ ($\mathbf{C_7}$) reduzidas ao caso autônomo. Provaremos mais adiante (Lema 4.4) que as hipóteses ($\mathbf{\bar{C}_1}$) $-$ ($\mathbf{\bar{C}_6}$) implicam em ($\mathbf{C_8}$).

Novamente, para incluir o caso **semipositone**, no qual $f(0) < 0$, alternativamente consideraremos:

$(\bar{\mathbf{C}}_2')$ $f(0) < 0$;

$(\bar{\mathbf{C}}_3')$ $f'(s)$ é limitada para s próximo de 0.

Ao conjunto das hipóteses $(\bar{\mathbf{C}}_1)$, $(\bar{\mathbf{C}}_2') - (\bar{\mathbf{C}}_3')$ e $(\bar{\mathbf{C}}_4) - (\bar{\mathbf{C}}_6)$ chamaremos caso **(IV)**.

Teorema 5.2 *Suponhamos que f satisfaz ao caso* **(III)** *ou* **(IV)**. *Nestas condições, o problema* (5.1) *possui no máximo uma solução radial. Tal solução, se existir, é não-degenerada.*

Utilizando o resultado de Brock [4], no caso particular em que o domínio é uma bola ($r_0 = 0$), todas as soluções de (5.2) são radiais. Logo

Corolário 5.3 *Suponhamos que $r_0 = 0$ e f satisfaz ao caso* **(I)**, **(II)**, **(III)** *ou* **(IV)**. *Nestas condições, o problema* (5.1) *possui no máximo uma solução.*

O Teorema 5.2, para o caso particular do laplaciano com f autônoma, pode ser encontrado em Kwong-Zhang [19] (em bolas e anéis) e Ouyang-Shi [23] (somente em bolas). Estendemos o trabalho de Aftalion-Pacella [1], pois permitimos $K > p-1$ e $f(0) < 0$, provamos a unicidade para o caso não-autônomo e consideramos o problema em anéis.

Seja a função $f(r,s) = s^q - a(r)s^m$ tal que $p-1 \leq m < q$ e, se $p < N$, $q+1 \leq \frac{Np}{N-p}$, com $a \in C^1[0,\infty)$ positiva, não-decrescente e $ra'(r)$ não-decrescente. A função $f(r,s)$ satisfaz às hipóteses do Teorema 5.1. Com efeito,

- $sf'(r,s) - mf(r,s) = (q-m)s^q > 0$ (hipótese $(\mathbf{C}_5)$);
- Dado $\gamma > 0$, a função

$$\begin{aligned}\frac{\gamma f(r,u(r)) + rf_r(r,u(r))}{u(r)f'(r,u(r)) - mf(r,u(r))} &= \frac{\gamma u^q - u^m(\gamma a(r) + ra'(r))}{(q-m)u^q} \\ &= \frac{1}{(q-m)}\left[\gamma - \frac{\gamma a(r) + ra'(r)}{[u(r)]^{q-m}}\right]\end{aligned}$$

é decrescente (hipótese $(\mathbf{C}_6)$), pois $u(r)$ é decrescente.

- A função

$$
\begin{aligned}
&\frac{pf(r,u(r)) + rf_r(r,u(r))}{u(r)f'(r,u(r)) - (p-1)f(r,u(r))} = \\
&= \quad \frac{pu^q - u^m(pa(r) + ra'(r))}{[q-(p-1)]u^q - [m-(p-1)]a(r)u^m} \\
&= \quad \frac{pu^{q-m} - (pa(r) + ra'(r))}{[q-(p-1)]u^{q-m} - [m-(p-1)]a(r)} \\
&= \quad \frac{pu^{q-m} - p\frac{m-(p-1)}{q-(p-1)}a(r) + p\frac{m-(p-1)}{q-(p-1)}a(r) - (pa(r) + ra'(r))}{[q-(p-1)]u^{q-m} - [m-(p-1)]a(r)} \\
&= \quad \frac{p}{q-(p-1)} + \frac{p\frac{m-(p-1)}{q-(p-1)}a(r) - (pa(r) + ra'(r))}{[q-(p-1)]u^{q-m} - [m-(p-1)]a(r)} \\
&= \quad \frac{p}{q-(p-1)} - \frac{pa(r)\frac{q-m}{q-(p-1)} + ra'(r)}{[q-(p-1)]u^{q-m} - [m-(p-1)]a(r)}
\end{aligned}
$$

é decrescente no intervalo em que $f(r,u(r)) > 0$ (hipótese $(\mathbf{C_7})$).

- A função

$$
\begin{aligned}
G(r) &= NF(r,u(r)) - \frac{N-p}{p}u(r)f(r,u(r)) + rF_r(r,u(r)) \\
&= N\left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a(r)u^{m+1}}{m+1}\right) - \frac{N-p}{p}\left(u^{q+1} - a(r)u^{m+1}\right) - \frac{ra'(r)u^{m+1}}{m+1} \\
&= u^{m+1}\left[\frac{N}{q+1}u^{q-m} - \frac{N}{m+1}a(r) - \frac{N-p}{p}u^{q-m} + \frac{N-p}{p}a(r) - \frac{ra'(r)}{m+1}\right] \\
&= u^{m+1}\left[u^{q-m}\left(\frac{N}{q+1} - \frac{N-p}{p}\right) - a(r)\left(\frac{N}{m+1} - \frac{N-p}{p}\right) - \frac{ra'(r)}{m+1}\right]
\end{aligned}
$$

satisfaz à hipótese $(\mathbf{C_8})$ pois o termo entre colchetes é não-crescente.

5.1 Não-Degenerescência

Seja $u(r)$ uma solução de

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(r,u), & r \in (r_0, R) \\ u > 0 \\ u'(r_0) = u(R) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Suponhamos que f satisfaz ao caso caso **(I)**, **(II)**, **(III)** ou **(IV)**. Assim as hipóteses $(\mathbf{M_1}) - (\mathbf{M_2})$ e $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_2})$ (ou $(\mathbf{H_1'}) - (\mathbf{H_2'})$) são satisfeitas, e podemos utilizar os Teoremas 2.1 e 2.3. Conforme observado no Capítulo 2, pelo resultado de Vazquez [27] (ver Apêndice C), garantimos

$$u'(R) < 0.$$

Então pelo Teorema 1.2 temos que

$$u'(r) < 0 \text{ em } (r_0, R]. \tag{5.3}$$

Logo $u \in C^3(r_0, R)$.

Com isso, estudaremos os zeros da função ω que é solução do problema de valor inicial associado à linearização de (5.2):

$$\begin{cases} L\omega \equiv (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')' + r^{N-1}f'(r,u)\omega = 0, & r \in (r_0, R), \\ \omega'(r_0) = 0, \\ \omega(r_0) = 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Proposição 5.4 *Seja $\omega(r)$ solução de* (5.4). *Então $\omega(R) \neq 0$.*

Os próximos lemas são necessários para provar este resultado. A demonstração dos lemas será feita na Seção 5.3.

Lema 5.5 *Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $v(r) = (r - r_0)u'(r) + \beta u(r)$. Temos que*

$$Lv = r^{N-1}\left[\beta[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)] - pf(r,u) - (r-r_0)f_r(r,u) - r_0\frac{N-1}{r^2}|u'|^{p-2}u'\right].$$

Lema 5.6 *A função*

$$h(r) = -\frac{ru'(r)}{u(r)}$$

é crescente em $[r_0, \bar{r}]$.

Lema 5.7 *Se $\omega(R) = 0$ então*

$$\int_{r_0}^{R} r^{N-1}[u(r)f'(r,u(r)) - (p-1)f(r,u(r))]\omega(r)\,dr = 0.$$

Lema 5.8 *Se $\omega(R) = 0$ então*

$$\int_{r_0}^{R} r^{N-1}[pf(r,u) + rf_r(r,u)]\omega(r)\,dr = (p-1)R^N u'(R)\lim_{r\to R}|u'|^{p-2}\omega'(r) - r_0^N f(r_0, u(r_0)).$$

Demonstração da Proposição 5.4: Dividiremos a demonstração nos seguintes passos:

- Passo 1: A função $\omega(r)$ possui zero em $[r_0, R)$;
- Passo 2: A função $\omega(r)$ possui no máximo um zero em $[r_0, \bar{r}]$;
- Passo 3: A função $\omega(r)$ possui no máximo um zero em $[\bar{r}, R]$;
- Passo 4: A função $\omega(r)$ não possui um segundo zero em R.

Passo 1: A função $\omega(r)$ possui zero em $[r_0, R)$.

Suponhamos que $\omega > 0$ em $[r_0, R)$. Quando $K = p - 1$ fazemos como no Passo 1 de Lema 4.3. Se $K > p - 1$ então tomemos a função $v(r) = (r - r_0)u'(r) + \beta u(r)$, onde $\beta = \frac{p}{K-(p-1)} > 0$. Com isso, pelo Lema 4.5 temos

$$Lv = r^{N-1}\left\{\beta[uf'(r,u) - Kf(r,u)] - (r-r_0)f_r(r,u) - r_0\frac{N-1}{r^2}|u'|^{p-2}u'\right\},$$

pois

$$\beta(p-1)+p=\beta K.$$

Como $v(r_0)=\beta u(r_0)>0$ e $v(R)=(R-r_0)u'(R)\leq 0$, existe $r_0<r_1\leq R$ tal que $v>0$ em $[r_0,r_1)$ e $v(r_1)=0$. Temos que

$$\begin{aligned}\omega Lv &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}v')'\omega+r^{N-1}f'(r,u)v\omega \qquad \text{e}\\ vL\omega &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')'v+r^{N-1}f'(r,u)\omega v\equiv 0.\end{aligned}$$

Logo

$$\omega Lv=\omega Lv-vL\omega=(p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega v'-v\omega')]'. \tag{5.5}$$

Pelas hipóteses $(\mathbf{C_1})$ e $(\mathbf{C_5})$ temos $Lv>0$. Escrevendo (5.2) como

$$\left[(p-1)u''+\frac{N-1}{r}u'\right]|u'|^{p-2}+f(r,u)=0,$$

temos

$$\begin{aligned}|u'|^{p-2}v' &= |u'|^{p-2}\left[(r-r_0)u''+(\beta+1)u'\right]\\ &= (\beta+1)|u'|^{p-2}u'+(r-r_0)|u'|^{p-2}u''\\ &= (\beta+1)|u'|^{p-2}u'-\frac{(N-1)(r-r_0)}{(p-1)r}|u'|^{p-2}u'-\frac{1}{p-1}(r-r_0)f(r,u).\end{aligned}$$

Integrando (5.5) de r_0 a r_1, obtemos uma contradição, pois

$$0<\int_{r_0}^{r_1}\omega Lv\,dr=(p-1){r_1}^{N-1}\omega(r_1)\lim_{r\to r_1}|u'(r)|^{p-2}v'(r)\leq 0.$$

Passo 2: A função $\omega(r)$ possui no máximo um zero em $[r_0,\bar{r}]$.

Sejam $r_1<r_2$ os dois primeiros zeros de ω em $[r_0,\bar{r}]$. Seja

$$\beta=-\frac{r_1u'(r_1)}{u(r_1)}>0.$$

Pelo Lema 5.6, a função $v(r)=ru'+\beta u$ possui um único zero em $[0,\bar{r}]$. Pela escolha de β temos $v(r_1)=0$. Agora, pelo Lema 4.5,

$$Lv=r^{N-1}\left\{\beta[uf'(r,u)-(p-1)f(r,u)]-pf(r,u)-rf_r(r,u)\right\}.$$

Podemos escrever

$$Lv = r^{N-1}\left[\beta - \frac{pf(r,u)+rf_r(r,u)}{uf'(r,u)-(p-1)f(r,u)}\right][uf'(r,u)-(p-1)f(r,u)].$$

Pela hipótese ($\mathbf{C_7}$) (ou ($\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{6}$), no caso autônomo), temos duas possibilidades:

- $Lv \geq 0$ em $(r_1, r_2]$

  Comparando v e ω, como no Passo 1, obtemos

$$\omega Lv = (p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega v' - v\omega')]'.$$

  Integrando de r_1 a r_2:

$$0 \leq \int_{r_1}^{r_2} \omega Lv\, dr = -(p-1)r_2^{N-1}|u'(r_2)|^{p-2}v(r_2)\omega'(r_2) > 0 \text{ (contradição)},$$

  pois $\omega(r_1) = 0$, $\omega(r_2) = 0$, $v(r_1) = 0$, $v(r_2) < 0$ e $\omega'(r_2) > 0$, lembrando que $\omega < 0$ em (r_1, r_2).

- $Lv < 0$ em $[r_0, r_1)$;

  Neste caso teríamos

$$0 > \int_{r_0}^{r_1} \omega Lv\, dr = \left[(p-1)r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega v' - v\omega')\right]_0^{r_1} = 0 \text{ (contradição)}.$$

Passo 3: A função $\omega(r)$ possui no máximo um zero em $[\bar{r}, R]$.

Sejam $r_1, r_2 \in [\bar{r}, R]$ dois zeros consecutivos de ω, tais que, sem perda de generalidade, $\omega < 0$ em (r_1, r_2). Tomemos $v(r) = ru'(r) \leq 0$. Como $f(r, u(r)) < 0$ em $(\bar{r}, R)$, temos que

$$Lv = -pf(r,u) - rf_r(r,u) > 0.$$

Comparando as equações para v e ω, como no Passo 1, obtemos

$$\omega Lv = (p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega v' - v\omega')]'.$$

Integrando de r_1 a r_2:

$$\begin{aligned}0 > \int_{r_1}^{r_2} \omega L v \, dr &= -(p-1) r_2^{N-1} |u'(r_2)|^{p-2} v(r_2) \omega'(r_2) + \\ &\quad + (p-1) r_1^{N-1} |u'(r_1)|^{p-2} v(r_1) \omega'(r_1) > 0.\end{aligned}$$

(contradição)

Passo 4: A função $\omega(r)$ não possui um segundo zero em R.

Sejam $r_1 < R$ os dois únicos zeros de ω em $[r_0, R]$. Pelo Passo 3, $r_1 < \bar{r}$. Logo $f(r_1, u(r_1)) > 0$. Façamos

$$\gamma = \frac{p[u(r_1) f'(r_1, u) - K f(r_1, u)] - [K - (p-1)] r_1 f_r(r_1, u)}{u(r_1) f'(r_1, u) - (p-1) f(r_1, u)} > 0$$

e

$$\beta = \frac{\gamma f(r_1, u) + r_0 f_r(r_1, u)}{u f'(r_1, u) - K f(r_1, u)}.$$

Notemos que se $K = p-1$ então $\gamma = p$. No caso autônomo teremos $\beta > 0$. Com estas escolhas temos que $\gamma + \beta[K - (p-1)] = p$. Pela hipótese $(\mathbf{C_6})$ (ou $(\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{6})$ no caso autônomo) teremos

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma f(r, u) + r f_r(r, u)}{u f'(r, u) - K f(r, u)} \geq \beta \text{ para } r < r_1 \text{ e} \\ &\frac{\gamma f(r, u) + r f_r(r, u)}{u f'(r, u) - K f(r, u)} \leq (\not\equiv) \beta \text{ para } r > r_1.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Logo, por (5.6),

$$\begin{aligned}&pf(r, u) + r f_r(r, u) - \beta[u f'(r, u) - (p-1) f(r, u)] \geq 0 \text{ para } r < r_1 \text{ e} \\ &pf(r, u) + r f_r(r, u) - \beta[u f'(r, u) - (p-1) f(r, u)] \leq (\not\equiv)\ 0 \text{ para } r > r_1.\end{aligned}$$

Com isto, utilizando o Lema 5.7, temos

$$\begin{aligned}&\int_{r_0}^{R} r^{N-1} \left\{ pf(r, u) + r f_r(r, u) - \beta \left[u f'(r, u) - (p-1) f(r, u) \right] \right\} \omega \, dr = \\ &\qquad = \int_{r_0}^{R} r^{N-1} \left[pf(r, u) + r f_r(r, u) \right] \omega \, dr > 0.\end{aligned}$$

Pelo Lema 5.8, obtemos uma contradição pois

$$0 < \int_{r_0}^{R} r^{N-1}[pf(r,u)+rf_r(r,u)]\omega\, dr = (p-1)R^N u'(R) \lim_{r\to R} \left(|u'|^{p-2}\omega'\right) - r_0^N f(r_0, u(r_0)) \leq 0.$$

■

Corolário 5.9 *A solução radial $u(r)$ é não-degenerada.*

Demonstração: Pela linearidade do problema

$$\begin{cases} -(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega'(r)\right)' = r^{N-1}f'(r,u)\omega(r), \quad r \in (r_0, R) \\ \omega'(r_0) = \omega(R) = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

vemos, pela Proposição anterior, que (5.7) possui apenas a solução trivial $\omega \equiv 0$. ■

5.2 Unicidade

Demonstração dos Teoremas 5.1 e 5.2 : Seja $u(r)$ uma solução de (5.2) e $\alpha_0 = u(0)$. Pelo Corolário 5.9, a solução u é não-degenerada. Mostraremos que esta solução é única. Denotaremos por u_α a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|u_\alpha'|^{p-2}u_\alpha')' = r^{N-1}f(r,u_\alpha), \\ u_\alpha'(0) = 0, \\ u_\alpha(0) = \alpha. \end{cases}$$

Passo 1: $\omega(R) < 0$.

Se $\omega(R) > 0$ então, pela demonstração do Teorema 3.1 (Seção 3.2), para $0 < \alpha < \alpha_0$ a função u_α possui um zero em $R_\alpha < R$. Pelo Teorema 1.2, $f(0,\alpha_0) > 0$. Por $(\mathbf{C_4})$, existe $0 < \alpha < \alpha_0$ tal que $f(0,\alpha) < 0$. Novamente pelo Teorema 1.2, a função u_α não possui zero, o que é uma contradição.

Passo 2: Para $\alpha > \alpha_0$, a função u_α não é solução de (5.2).

Como $\omega(R)$ podemos utilizar a demonstração do Teorema 4.1 (Seção 4.2).

Passo 3: A função u_{α_0} é a única solução de (5.2).

Seja u_{α_1} solução de (5.2). Pelo Passo 2, temos que $\alpha_1 \leq \alpha_0$. Mas se $\alpha_1 < \alpha_0$ então pelo Passo 2 temos que u_{α_0} não é solução de (5.2) (contradição). ■

5.3 Demonstração dos Lemas

Demonstração do Lema 5.5: Temos que

$$v'(r) = (r - r_0)u''(r) + (\beta + 1)u'.$$

Logo

$$\begin{aligned}
Lv &= (p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}v'\right)' + r^{N-1}f'(r,u)v \\
&= (p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}[(r-r_0)u'' + (\beta+1)u']\right)' + r^{N-1}f'(r,u)[(r-r_0)u' + \beta u] \\
&= \underbrace{(p-1)\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}[ru'' + (\beta+1)u']\right)' + r^{N-1}f'(r,u)(ru' + \beta u)}_{I_1} - \\
&\quad \underbrace{-\,(p-1)r_0\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u''\right)'}_{I_2} - r_0 r^{N-1}f'(r,u)u'.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.5 temos que

$$I_1 = r^{N-1}\left[\beta[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)] - pf(r,u) - rf_r(r,u)\right]. \tag{5.8}$$

Podemos escrever (5.2) da seguinte maneira

$$\left[(p-1)u'' + \frac{N-1}{r}u'\right]|u'|^{p-2} + f(r,u) = 0.$$

Por isso

$$\begin{aligned}
I_2 &= -(p-1)r_0\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u''\right)' \\
&= r_0\left[(N-1)\left(r^{N-2}|u'|^{p-2}u'\right)' + \left(r^{N-1}f(r,u)\right)'\right] \\
&= r_0\left[(N-1)(N-2)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' + (N-1)r^{N-2}\left(|u'|^{p-2}u'\right)' + \right. \\
&\quad \left. + (N-1)r^{N-2}f(r,u) + r^{N-1}f'(r,u)u' + r^{N-1}f_r(r,u)\right] \\
&= r_0\left[(N-1)(N-2)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - (N-1)^2 r^{N-3}|u'|^{p-2}u' - (N-1)r^{N-2}f(r,u) + \right. \\
&\quad \left. + (N-1)r^{N-2}f(r,u) + r^{N-1}f'(r,u)u' + r^{N-1}f_r(r,u)\right] \\
&= r_0\left[-(N-1)r^{N-3}|u'|^{p-2}u' + r^{N-1}f'(r,u)u' + r^{N-1}f_r(r,u)\right].
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão de Lv obtemos

$$Lv = r^{N-1}\left[\beta[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)] - pf(r,u) - (r-r_0)f_r(r,u) - r_0\frac{N-1}{r^2}|u'|^{p-2}u'\right].$$

■

Demonstração do Lema 5.6: Seguindo a demonstração do Lema 4.4, temos

$$h'(r) = \frac{p}{(p-1)|u'|^{p-2}u^2}\left[H(r) + r\left(\frac{1}{p}uf(r,u) - F(r,u)\right)\right]$$

onde $H(r)$ é definida por

$$H(r) = \frac{N-p}{p}|u'|^{p-2}uu' + \frac{p-1}{p}r|u'|^p + rF(r,u).$$

Basta provarmos que $H(r) \geq 0$ pois

$$\frac{1}{p}uf(r,u) - F(r,u) > 0 \text{ em } [0,\bar{r}]$$

por $(\mathbf{C_4})$.

Afirmativa: $H(r) \geq 0$ para $r_0 \leq r \leq R$.

Notamos que $H(r_0) \geq 0$ e $H(R) > 0$. E mais

$$(r^{N-1}H(r))' = r^{N-1}G(r),$$

onde

$$G(r) = NF(r,u) - \frac{N-p}{p}uf(r,u) + rF_r(r,u).$$

Se $G(r)$ satisfaz à hipótese $(\mathbf{C_8})$ então $H(r) \geq 0$. Logo a demonstração está terminada para o caso **não-autônomo**.

Para o caso **autônomo** devemos analisar conforme a posição de p em relação a N:

- Se **p=N** então $G(r) = NF(u(r))$, que satisfaz à hipótese $(\mathbf{C_8})$.

- Se **p>N** então $G(r) \leq 0$ em $[\bar{r}, R]$ (isto é, quando $f(u(r)) \leq 0$). Para $r \in [0, \bar{r}]$ (isto é, quando $f(u(r)) \geq 0$) temos

  $$G'(r) = u' \left\{ pf(u) - \frac{N-p}{p}\left[uf'(u) - (p-1)f(u)\right] \right\} \leq 0.$$

  Logo $G(r)$ satisfaz à hipótese $(\mathbf{C_8})$.

- Se **p<N** então $G'(r) \geq 0$ em $[\bar{r}, R]$. Por $(\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{5})$, existe $r_1 \in [r_0, R]$ tal que $G'(r) \leq 0$ para $r \in [r_0, r_1]$ e $G'(r) \geq 0$ para $r \in [r_1, R]$, pois

  $$G'(r) = \frac{N-p}{p}u'f(u)\left[\frac{Np-N+p}{N-p} - \frac{uf'(u)}{f(u)}\right].$$

  Como $G(R) = 0$ temos que $G(r)$ satisfaz à hipótese $(\mathbf{C_8})$. ■

Demonstração do Lema 5.7: Temos que

$$\begin{aligned} \omega Lu &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'\omega + r^{N-1}f'(r,u)u\omega = r^{N-1}\left[uf'(r,u) - (p-1)f(r,u)\right]\omega \\ uL\omega &= (p-1)(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')'u + r^{N-1}f'(r,u)\omega u \equiv 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\omega L u = \omega L u - u L \omega = (p-1)[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega u' - u\omega')]'\omega = r^{N-1}\left[u f'(r,u) - (p-1) f(r,u)\right]\omega.$$

Integrando de r_0 a R temos

$$\int_{r_0}^{R} r^{N-1}\left[u f'(r,u) - (p-1) f(r,u)\right]\omega \; dr = (p-1)\left[r^{N-1}|u'|^{p-2}(\omega u' - u\omega')\right]_{r_0}^{R} = 0.$$

$\blacksquare$

Demonstração do Lema 5.8: Temos que

$$\begin{aligned}&\int_{r_1}^{r_2} r^N \left[f(r,u)\right]' \omega \; dr = \\ &\quad = \left[r^N f(r,u)\omega\right]_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} r^N f(r,u)\omega' \; dr - N\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1} f(r,u)\omega \; dr\end{aligned}$$

com $0 < r_1 < r_2 < R$. Logo

$$\begin{aligned}&\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}\left[N f(r,u) + r f_r(r,u)\right]\omega \; dr = \\ &\quad = \left[r^N f(r,u)\omega\right]_{r_1}^{r_2} \underbrace{- \int_{r_1}^{r_2} r^N f(r,u)\omega' \; dr}_{I_1} \underbrace{- \int_{r_1}^{r_2} r^N f'(r,u)u'\omega \; dr}_{I_2}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Vamos desenvolver as parcelas do segundo membro. Por (5.2) temos

$$I_1 = -\int_{r_1}^{r_2} r^N f(r,u)\omega' \; dr = \int_{r_1}^{r_2} r(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'\omega' \; dr,$$

e integrando por partes obtemos

$$I_1 = \left[r^N|u'|^{p-2}u'\omega'\right]_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} r^N|u'|^{p-2}u'\omega'' \; dr - \int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\omega' \; dr.$$

Agora por (5.4) temos

$$I_2 = -\int_{r_1}^{r_2} r^N f'(r,u)u'\omega \; dr = (p-1)\int_{r_1}^{r_2} r(r^{N-1}|u'|^{p-2}\omega')'u' \; dr,$$

e novamente integrando por partes obtemos

$$I_2 = (p-1)\left(\left[\, r^N|u'|^{p-2}u'\omega' \right]_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} r^N|u'|^{p-2}u''\omega' \; dr - \int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\omega' \; dr\right).$$

Também é importante notar que

$$\int_{r_1}^{r_2} r^N|u'|^{p-2}u'\omega'' \; dr + (p-1)\int_{r_1}^{r_2} r^N|u'|^{p-2}u''\omega' \; dr = \int_{r_1}^{r_2} r^N \left(|u'|^{p-2}u'\omega'\right)' \; dr.$$

De onde, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_{r_1}^{r_2} r^N|u'|^{p-2}u'\omega'' \; dr + (p-1)\int_{r_1}^{r_2} r^N|u'|^{p-2}u''\omega' \; dr = \\ = \left[\, r^N|u'|^{p-2}u'\omega' \right]_{r_1}^{r_2} - N\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\omega' \; dr.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Substituindo I_1, I_2 e (5.10) em (5.9) obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}\left[Nf(r,u) + rf_r(r,u)\right]\omega \; dr = \\ &= \left[\, r^N f(r,u)\omega \right]_{r_1}^{r_2} + (p-1)\left[\, r^N|u'|^{p-2}u'\omega' \right]_{r_1}^{r_2} + (N-p)\underbrace{\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\omega' \; dr}_{I_3}.\end{aligned}$$

Mais uma vez integrando por partes e utilizando (5.2) temos

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[\, r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\omega \right]_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right)' \omega \; dr \\ &= \left[\, r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\omega \right]_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} f(r,u)\omega \; dr.\end{aligned}$$

Daí temos

$$\begin{aligned}&\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}\left[pf(r,u) + rf_r(r,u)\right]\omega \; dr = \\ &= \left[\, r^N f(r,u)\omega \right]_{r_1}^{r_2} + (p-1)\left[\, r^N|u'|^{p-2}u'\omega' \right]_{r_1}^{r_2} + (N-p)\left[\, r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\omega \right]_{r_1}^{r_2}.\end{aligned}$$

Fazendo $r_1 \to r_0$ e $r_2 \to R$ concluímos que

$$\int_0^R r^{N-1}\left[pf(r,u) + rf_r(r,u)\right]\omega \; dr = (p-1)R^N u'(R)\lim_{r\to R}|u'|^{p-2}\omega'(r) - r_0^N f(r_0, u(r_0)).$$

$\blacksquare$

Capítulo 6

Unicidade em Domínios Não-Simétricos

Neste capítulo estudaremos a questão da unicidade de soluções para problemas em domínios próximos de uma bola, em um sentido que será definido mais adiante.

Seja $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio limitado com fronteira C^1. Para $R_0 > 0$ fixado, façamos $B = B_{R_0}(0)$. Consideremos o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\triangle u & = & f(u) & \text{em } \Omega_\delta \\ u & > & 0 & \\ u & = & 0 & \text{em } \partial\Omega_\delta, \end{array} \right. \tag{6.1}$$

onde a função f satisfaz às hipóteses:

($\mathbf{S_1}$) $f \in C^1[0,\infty)$, $f(0) = 0$ e $f'(0) < \lambda_1(B)$, onde $\lambda_1(B)$ é o primeiro autovalor de $-\triangle$ em $H_0^1(B)$;

($\mathbf{S_2}$) Existe $\theta \geq 0$ tal que $f(s) < 0$ em $(0,\theta)$ e $f(s) > 0$ em (θ,∞);

($\mathbf{S_3}$) $sf'(s) - Kf(s) > 0$ para $s > 0$, com $K \geq 1$;

$(\mathbf{S_4})$ A função $\dfrac{sf'(s)}{f(s)}$ é não-crescente em (θ, ∞);

$(\mathbf{S_5})$ Temos $\lim_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s^q} = \alpha > 0$, com $1 < q < \dfrac{N+2}{N-2}$ (se $N = 2$ então consideramos $\dfrac{N+2}{N-2} = \infty$).

A fim de enunciar o resultado de unicidade, precisamos das seguintes definições:

Definição 6.1 *Diremos que uma família* $\{\Omega_\delta\}_{\delta>0}$ *de domínios* **converge** *para* B *quando* $\delta \to 0$, *se*

(i) Para todo compacto $K \subset B$, *temos* $K \subset \Omega_\delta$ *para* δ *suficientemente pequeno;*

(ii) Para todo aberto $A \supset \overline{B}$, *temos* $\Omega_\delta \subset A$ *para* δ *suficientemente pequeno.*

Definição 6.2 *Uma família* $\{\Omega_\delta\}_{\delta>0}$ *de domínios satisfaz à condição de fronteira* $(\mathbf{S_f})$, *se satisfaz uniformemente a condições de esfera interior e exterior. Isto é, existem* r_1, $r_2 > 0$ *tais que, para todo* $\delta > 0$ *e* $x_0 \in \partial\Omega_\delta$, *existem* y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^N$ *satisfazendo*

$$B_{r_1}(y_1) \subset \Omega_\delta, \quad x_0 \in \partial B_{r_1}(y_1) \quad e \quad \overline{B}_{r_2}(y_2) \cap \overline{\Omega}_\delta = \{x_0\}.$$

Agora enunciamos o teorema principal deste capítulo.

Teorema 6.3 *Seja* $\{\Omega_\delta\}_{\delta>0} \subset \mathbb{R}^N$ *uma família de domínios limitados com fronteira* C^1, *que satisfaz à condição de fronteira* $(\mathbf{S_f})$. *Suponhamos que* $\{\Omega_\delta\}$ *converge para uma bola* B *quando* $\delta \to 0$. *Então, sob as hipóteses* $(\mathbf{S_1}) - (\mathbf{S_5})$, *para* δ *suficientemente pequeno, o problema* (6.1) *possui no máximo uma solução* $u_\delta \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^1(\overline{\Omega}_\delta)$.

O ponto crucial na demonstração do Teorema 6.3 é a obtenção de uma estimativa a priori , que não depende de δ, da norma C^1 das soluções do problema (6.1). Isto faremos na seção 6.1, utilizando a técnica de "blow-up", adaptando as idéias contidas no artigo de Gidas-Spruck [15]. Para utilizar esta técnica, precisamos da hipótese ($\mathbf{S_5}$).

Provaremos o Teorema 6.3 na Seção 6.2. A unicidade será obtida através de um argumento de contradição. Chegaremos à uma contradição com o Teorema 4.1 (ou Teorema 5.1), que estabelecem a unicidade e a não-degenerescência radial de uma solução u do problema

$$\begin{cases} -\triangle u &= f(u) \quad \text{em } B \\ u &> 0 \\ u &= 0 \qquad \text{em } \partial B. \end{cases} \tag{6.2}$$

Por causa das hipóteses $(\mathbf{S_1}) - (\mathbf{S_4})$, poderemos utilizar os Teoremas 4.1 ou 5.1, dependendo se f possui ou não parte negativa.

Pelas hipóteses $(\mathbf{S_1})$ e $(\mathbf{S_5})$, o funcional $I_\delta : H_0^1(\Omega_\delta) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\delta(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\delta} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega_\delta} F(u),$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)\ dt$, está bem definido. Temos que $I_\delta \in C^1$ e que soluções fracas de (6.1) são pontos críticos de I_δ (ver Figueiredo [11]). Utilizaremos o fato de $f'(0) < \lambda_1(B)$ (hipótese $(\mathbf{S_1})$) para mostrar que $u = 0$ é ponto de mínimo local estrito do funcional I_δ, para Ω_δ suficientemente próximo de B.

Em Zou [28], prova-se um resultado de unicidade para o problema (6.1), no caso particular $f(s) = s^q$, com q próximo de 1, em domínios próximos a uma bola no sentido de Hausdorff. No entanto, não acreditamos que a condição de fronteira ali utilizada (apenas a condição da esfera interior uniforme) seja suficiente para obter a unicidade.

As seguintes funções satisfazem às hipóteses $(\mathbf{S_1}) - (\mathbf{S_5})$:

- $f(s) = s^q$, com $1 < q < \dfrac{N+2}{N-2}$;
- $f(s) = s^q - s^m$, com $1 \leq m < q < \dfrac{N+2}{N-2}$.

Uma aplicação interessante do Teorema 6.3 é mostrar que a convexidade do domínio **não** é necessária para que tenhamos unicidade de solução. Na Seção 6.3 construiremos um exemplo de família de domínios não-convexos satisfazendo às hipóteses do Teorema 6.3.

6.1 Estimativas a priori

Primeiramente enunciaremos algumas estimativas para o gradiente de uma solução de um problema elíptico. O seguinte resultado está demonstrado em Courant-Hilbert [5, vol. II, pág.343].

Proposição 6.4 *Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *uma solução de*

$$\begin{cases} -\triangle u = g & em \;\; \Omega \\ \quad u = 0 & em \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado com fronteira* C^1 *satisfazendo uma condição da esfera exterior em* $x_0 \in \partial\Omega$*, com* $\overline{B}_r(y) \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$*. Seja* $r' > r$*. Então existe uma constante* $C = C(r, r', \sup_\Omega |g|)$ *tal que*

$$|u(x)| \leq C|x - x_0|, \quad \forall x \in B_{r'}(y) \cap \Omega.$$

Em Han-Lin [20, Proposição 2.18, pág. 33] encontra-se a demonstração da próxima proposição.

Proposição 6.5 *Suponhamos que* $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$\begin{cases} -\triangle u = f(u) & em \;\; \Omega \\ \quad u > 0, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado e* $f \in C^1[0, \infty)$*. Então*

$$\sup_\Omega |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| + C$$

onde a constante $C > 0$ *depende somente de* $\mathrm{diam}(\Omega)$*,* $M = \|u\|_\infty$ *e* $\|f\|_{C^1[0,M]}$*.*

Agora provaremos nossa principal estimativa.

Teorema 6.6 *Seja* $\{\Omega_\delta\}_{\delta>0}$ *uma família de domínios limitados com fronteira* C^1*, satisfazendo à condição de fronteira* $(\mathbf{S_f})$*. Suponhamos que* $f \in C^1[0,\infty)$ *satisfaz* $(\mathbf{S_5})$*. Então existe uma constante positiva* C*, que não depende de* δ*, tal que para toda solução* $u_\delta \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^1(\overline{\Omega}_\delta)$ *do problema* (6.1) *vale*

$$\|u_\delta\|_{C^1(\overline{\Omega}_\delta)} < C.$$

Demonstração : Suponhamos, por contradição, que o teorema é falso. Então existem uma seqüência de domínios $(\Omega_{\delta_n}) \subset \{\Omega_\delta\}$, que chamaremos apenas de (Ω_n), e uma seqüência de funções $(u_n) \subset C^2(\Omega_n) \cap C^1(\overline{\Omega}_n)$ tais que

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\triangle u_n &=& f(u_n) & \text{em } \ \Omega_n \\ u_n &>& 0 & \\ u_n &=& 0 & \text{em } \ \partial\Omega_n \end{array}\right. \tag{6.3}$$

e

$$\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega}_n)} \to \infty. \tag{6.4}$$

Afirmativa 1 : $\|u_n\|_\infty \to \infty$ (a menos de uma subsequência).

De fato, se $\|u_n\|_\infty < L$ então, pela Proposição 6.4,

$$\sup_{\partial\Omega_n} |\nabla u_n| < C(r_2, L). \tag{6.5}$$

Aqui utilizamos a condição da esfera exterior uniforme com $r_2 > 0$. Temos que $u_n \in C^3$ pois $f \in C^1$. Assim, pela Proposição 6.4 e por (6.5), obtemos

$$\sup_{\Omega_n} |\nabla u_n| < C(r_2, L). \tag{6.6}$$

Por (6.5) e (6.6), temos $\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega}_n)} < \infty$, o que contraria (6.4). Isto demonstra a Afirmativa 1.

Para cada n, seja $x_n \in \Omega_n$ tal que

$$M_n := \sup_{\Omega_n} u_n = u_n(x_n) \to \infty.$$

Definimos a função

$$\tilde{u}_n(x) := \frac{1}{M_n} u_n(\epsilon_n x + x_n), \tag{6.7}$$

onde

$$\epsilon_n^2 := \frac{1}{M_n^{q-1}} \to 0,$$

sendo q definido na hipótese ($\mathbf{S_5}$). Seja $d_n := \mathrm{dist}(x_n, \partial\Omega_n)$. Por (6.7) vemos que $\tilde{u}_n$ está bem definida em

$$\tilde{\Omega}_n := \frac{\Omega_n - x_n}{\epsilon_n},$$

$$\tilde{u}_n(0) = 1 \quad \text{e} \quad \|\tilde{u}_n\|_\infty = 1 \tag{6.8}$$

Temos também que

$$B_{\frac{d_n}{\epsilon_n}}(0) \subset \tilde{\Omega}_n. \tag{6.9}$$

Por (6.3), a função $\tilde{u}_n$ satisfaz

$$\begin{aligned} -\triangle \tilde{u}_n(x) &= -\frac{1}{M_n} \triangle (u_n(\epsilon_n x + x_n)) \\ &= -\frac{\epsilon_n^2}{M_n} \triangle u_n(\epsilon_n x + x_n) \\ &= \frac{1}{M_n^q} f(u_n(\epsilon_n x + x_n)) \\ &= \frac{1}{M_n^q} f(M_n \tilde{u}_n(x)). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Temos duas possibilidades a considerar.

Caso 1 : $\left(\dfrac{d_n}{\epsilon_n}\right) \to \infty$ (a menos de uma subseqüência).

Por (6.9), dado $r > 0$, a função $\tilde{u}_n$ está definida em $B_{r+1}(0)$ para n grande. Por (6.8), (6.10) e a hipótese ($\mathbf{S_5}$), utilizando argumentos de regularidade elíptica, temos que

$$\|\tilde{u}_n\|_{C^{1,\beta}(B_r)} < \infty.$$

Segue que, a menos de uma subseqüência,

$$\tilde{u}_n \to \tilde{u} \quad \text{em} \quad W^{2,m} \cap C^{1,\beta}(B_r),\ m > N.$$

Portanto, utilizando a hipótese $(\mathbf{S_5})$ e fazendo $n \to \infty$ em (6.10),

$$-\triangle \tilde{u} = \alpha \tilde{u}^q. \tag{6.11}$$

Por (6.8), temos também que

$$\tilde{u}(0) = 1. \tag{6.12}$$

Afirmativa 2 : $\tilde{u}$ está bem definida em todo $\mathbb{R}^N$ e $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ em $W^{2,m} \cap C^{1,\beta}$ nos compactos de $\mathbb{R}^N$.

De fato, considere $r' > r$. Repetindo o argumento acima com $B_{r'}(0)$, temos que $(\tilde{u}_n)$ possui uma subseqüência $(\tilde{u}_{n_k})$ que converge para $\tilde{u}'$ em $B_{r'}$. A função $\tilde{u}'$ satisfaz (6.11) e $\tilde{u}'|_{B_r} = \tilde{u}$. Por continuação única, $\tilde{u}_{n_k} \to \tilde{u}'$ para toda subseqüência de $(\tilde{u}_n)$. Logo $\tilde{u}_n \to \tilde{u}'$ em $B_{r'}$.

Assim $\tilde{u} \in C^2$ é uma solução não-negativa de

$$-\triangle \tilde{u} = \alpha \tilde{u}^q \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Pelo Teorema 1.2 de Gidas-Spruck [15] (ver Apêndice C), $\tilde{u} \equiv 0$. Isto é uma contradição, pois $\tilde{u}(0) = 1$, por (6.12). Logo, para o Caso 1, o teorema está provado.

Caso 2 : $\left(\dfrac{d_n}{\epsilon_n}\right) \to s \geq 0$ (a menos de uma subseqüência).

Seja $z_n \in \partial\tilde{\Omega}_n$ tal que

$$\operatorname{dist}(0, z_n) = \operatorname{dist}(0, \partial\tilde{\Omega}_n) = \frac{d_n}{\epsilon_n}. \tag{6.13}$$

Afirmativa 3: $s > 0$.

Com efeito, tomemos $r > 0$ tal que em z_n tenhamos a condição da esfera exterior com raio r, para todo n. Seja $r' > r + \dfrac{d_n}{\epsilon_n}$, $\forall n$. Pela Proposição 6.5, temos que

$$1 = |\tilde{u}_n(0)| < C|z_n| = C\frac{d_n}{\epsilon_n},$$

onde $C > 0$ depende apenas de r e r', pois $\|\tilde{u}_n\|_\infty = 1$. Provamos assim a Afirmativa 3.

Podemos supor, a menos de uma rotação, que o vetor z_n aponta na direção $-e_N$, onde $\{e_1, \cdots, e_N\}$ representa a base canônica do $\mathbb{R}^N$.

Pela condição de fronteira ($\mathbf{S_5}$), existem bolas B_n^i e B_n^e de raios $\dfrac{r_1}{\epsilon_n}$ e $\dfrac{r_2}{\epsilon_n}$, respectivamente, tais que

$$B_n^i \subset \tilde{\Omega}_n, \quad z_n \in \partial B_n^i \quad \text{e} \quad \overline{B}_n^e \cap \overline{\tilde{\Omega}}_n = \{z_n\}.$$

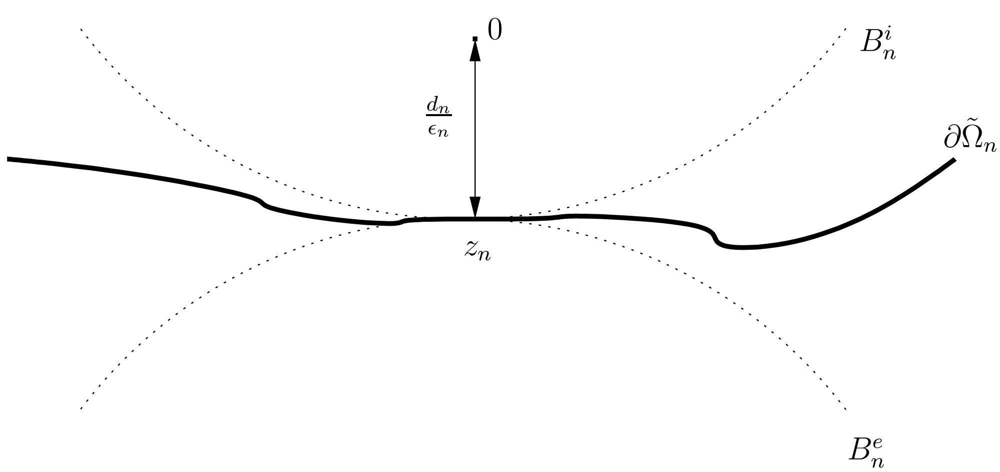


Figura 6.1: Vizinhança de z_n

Por (6.13) vemos que o conjunto

$$\mathbb{R}_s^N := \{x = (x^1, x^2, ..., x^N);\ x^N > -s\}$$

é coberto pela bolas B_n^i. Pelos mesmos argumentos de compacidade do caso anterior, existem uma função $\tilde{u}$ bem definida em $\mathbb{R}_s^N$ e uma subseqüência de $(\tilde{u}_n)$ (que ainda chamaremos de $(\tilde{u}_n)$) tal que

$$\tilde{u}_n \to \tilde{u} \quad \text{em} \quad W^{2,m} \cap C^{1,\beta}$$

nos compactos de $\mathbb{R}_s^N$. Fazendo $n \to \infty$ em (6.10), obtemos

$$-\triangle \tilde{u} = \alpha \tilde{u}^q \quad \text{em} \quad \mathbb{R}_s^N. \tag{6.14}$$

Por (6.8), temos que

$$\tilde{u}(0) = 1. \tag{6.15}$$

Afirmativa 4: $\tilde{u}$ é contínua em $\overline{\mathbb{R}}_s^N$ e $\tilde{u} \equiv 0$ em $\partial \mathbb{R}_s^N$.

Suponhamos, por contradição, que existe uma seqüência de pontos $y_n \subset \mathbb{R}_s^N$ que converge para $y_0 \in \partial \mathbb{R}_s^N$ e

$$\tilde{u}(y_n) > C_2 > 0, \quad \forall n. \tag{6.16}$$

Do fato de as bolas B_n^e cobrirem o conjunto $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{R}_s^N}$, segue que

$$\operatorname{dist}(y_0, \partial \overline{\Omega}_n) \to 0. \tag{6.17}$$

A menos de uma subseqüência, temos que $y_n \in B_n^i$, $\forall n$. Utilizando a Proposição 6.5, obtemos

$$0 < \tilde{u}(y_n) < C(r, r') \operatorname{dist}(y_n, \partial \overline{\Omega}_n)$$

Fazendo $n \to \infty$, por causa de (6.17), obtemos uma contradição com (6.16). Logo vale a Afirmativa 4.

Pela Afirmativa 4 e (6.14), utilizamos o Teorema 1.3 de Gidas-Spruck [15], para obter que $\tilde{u} \equiv 0$. Mas isto contradiz (6.15). Concluímos assim a demonstração do teorema.

6.2 Unicidade

Proposição 6.7 *Seja* $\{\Omega_\delta\}_{\delta>0}$ *uma família de domínios como no enunciado do Teorema 6.3. Suponhamos que para cada* $\delta > 0$, *existe uma solução positiva* u_δ *do problema* (6.1). *Então, quando* δ *tende a* 0, u_δ *converge para* u_0 *no sentido* C^2 *nos compactos de* B, *onde* u_0 *é a única solução positiva de* (6.2).

Demonstração : Seja (δ_n) tal que $\delta_n \to 0$. Para simplificar a notação, definimos $\Omega_n := \Omega_{\delta_n}$ e $u_n := u_{\delta_n}$. Tomemos $0 < R < R_0$ para que tenhamos $B_R \subset B_{R_0} = B$. Como (Ω_n) converge para B, então sem perda de generalidade, podemos supor que $B_R \subset \Omega_n$ para todo n.

Afirmativa 1: Existe $u_0 \in C^2(B)$ tal que, a menos de uma subseqüência, $u_n \to u_0$ em C^2 nos compactos de B.

Pelo Teorema 6.6 temos

$$\|u_n\|_{C^1(\Omega_n)} < C.$$

Utilizando (6.1), por regularidade elíptica, obtemos

$$\|u_n\|_{C^2(B_R)} < C.$$

Logo, a menos de uma subseqüência, por compacidade e utilizando um argumento do tipo bootstrap, temos

$$u_n \to u_0 \quad \text{em } C^2(B_R).$$

Podemos repetir o argumento acima para R cada vez mais próximo de R_0, e por continuação única, como no Teorema 6.6, mostramos que existe uma função $u_0 \in C^2(B)$ tal que $u_n \to u_0$ em C^2 nos compactos de B. A função u_0 satisfaz

$$-\triangle u_0 = f(u_0) \quad \text{em } B.$$

Para concluirmos a demonstração, devemos provar que $u_0 \equiv 0$ em ∂B e $u_0 > 0$ em B.

Afirmativa 2: $u_0 \equiv 0$ em ∂B.

Seja $\epsilon > 0$. Tomemos R próximo de R_0 tal que, para n suficientemente grande,

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_n, x) < \epsilon, \quad \forall x \in \partial B_R.$$

Como $|\nabla u_n| < C$ e $u_n \equiv 0$ em $\partial\Omega_n$, temos

$$|u_n(x)| < C\epsilon, \quad \forall x \in \bar{\Omega}_n \setminus \bar{B}_R.$$

Logo $|u_0(x)| \leq C\epsilon$ em $B \setminus B_R$.

Afirmativa 3: $\|u_n\|_{C^2(\Omega_n)} \geq C > 0$ para n suficientemente grande.

Pela hipótese $(\mathbf{S_1})$, temos que existem $\rho > 0$ e $0 < \epsilon < 1$ tais que

$$f'(0) < \rho < \epsilon\lambda_1(B) < \lambda_1(B).$$

Assim para n suficientemente grande (ver Courant-Hilbert [5, vol. I, pág. 409]),

$$\frac{\rho}{\lambda_1(\Omega_n)} < \epsilon < 1. \tag{6.18}$$

Pelas hipóteses $(\mathbf{S_1})$ e $(\mathbf{S_5})$ temos que

$$f(s) \leq \rho s + Cs^q, \quad \forall s \geq 0, \tag{6.19}$$

com $1 < q < 2^* - 1$. Por (6.1), vemos que

$$\int_{\Omega_n} \nabla u_n \cdot \nabla v = \int_{\Omega_n} f(u_n)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_n).$$

Fazendo $v = u_n$, segue que

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega_n} f(u_n)u_n.$$

Portanto, por (6.19),

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega_n)} = \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega_n} f(u_n)u_n \leq \rho\int_{\Omega_n} u_n^2 + C\int_{\Omega_n} u_n^{q+1}.$$

Utilizando a Desigualdade de Poincaré,

$$\|u_n\|^2 \leq \frac{\rho}{\lambda_1(\Omega_n)}\|u_n\|^2 + C\|u_n\|^{q+1}.$$

Logo, por (6.18),

$$\|u_n\|^{q-1} \geq C\left(1 - \frac{\rho}{\lambda_1(\Omega_n)}\right) > C(1-\epsilon).$$

Concluímos que

$$\|u_n\|_{C^2(\Omega_n)} \geq C(|\Omega_n|)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} > C > 0.$$

Afirmativa 4: A função u_0 é a única solução positiva do problema (6.2).

Pela Afirmativa 3, $u_0 \not\equiv 0$. Assim, pelo Princípio do Máximo, $u_0 > 0$ em B, pois $u_0 \geq 0$ em B. O Teorema 4.1 (ou Teorema 5.1) garantem que o problema (6.2) possui no máximo uma única solução positiva.

Assim concluímos a demonstração, pois podemos aplicar os argumentos acima a qualquer subseqüência de (u_n), e com isso a própria seqüência (u_n) converge para u_0 nos compactos de B. ∎

Observação : A Proposição 6.7 implica em um resultado de não-existência. De fato, se o problema (6.2) não possui solução positiva, então para δ suficientemente pequeno, não teremos solução positiva para o problema (6.1). Caso contrário, pela Proposição 6.7, teríamos uma seqüência de funções convergindo para uma solução positiva de (6.2).

Demonstração do Teorema 6.3 :

Suponhamos, por contradição, que existe uma seqüência (δ_n), com $\delta_n \to 0$, tal que existem u_n e v_n soluções positivas distintas de

$$\begin{cases} -\triangle u = f(u) & \text{em } \Omega_n \\ u > 0 & \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega_n, \end{cases} \tag{6.20}$$

onde $\Omega_n := \Omega_{\delta_n}$. Façamos

$$\omega_n := u_n - v_n.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$-\triangle\omega_n(x) = f'(\xi_n(x))\omega_n(x) \quad \text{em } \Omega_n, \tag{6.21}$$

com $\xi_n(x)$ entre $u_n(x)$ e $v_n(x)$, para todo $x \in \Omega_n$. Como $\omega_n \not\equiv 0$ para todo n, então podemos definir

$$\tilde{\omega}_n := \frac{\omega_n}{\|\omega_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}}.$$

Tomemos $R > R_0$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $\Omega_n \subset B_R$ para todo n. Se estendermos a função $\tilde{\omega}_n$ fora de Ω_n como sendo nula, teremos

$$\|\tilde{\omega}_n\|_{H_0^1(B_R)} = 1. \tag{6.22}$$

Pelo Teorema 6.6, a seqüência (ξ_n) é uniformemente limitada em L^∞. Assim, por (6.21) e (6.22),

$$\|\tilde{\omega}_n\|_{L_2(B_R)} > \epsilon > 0.$$

Por compacidade, existe uma função $\omega_0 \not\equiv 0$ em $H_0^1(B_R)$ tal que, a menos de uma subseqüência,

$$\tilde{\omega}_n \rightharpoonup \omega_0 \quad \text{em} \quad H_0^1 \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}_n \to \omega_0 \quad \text{em} \quad L^2.$$

Na verdade, como $\omega_0 \equiv 0$ fora de B então $\omega_0 \in H_0^1(B)$. Para $\varphi \in C_0^1(B)$, por (6.21), temos que

$$\int_B \nabla\tilde{\omega}_n \cdot \nabla\varphi = \int_B f'(\xi_n)\tilde{\omega}_n\varphi. \tag{6.23}$$

Pela Proposição 6.7, as seqüências (u_n) e (v_n) convergem uniformemente para u_0 em compactos de B, onde u_0 é a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\triangle u_0 &= f(u_0) \quad \text{em } B \\ u_0 &> 0 \\ u_0 &= 0 \qquad\quad \text{em } B. \end{cases}$$

Logo (ξ_n) também converge para u_0. Assim, passando o limite em (6.23) obtemos

$$\int_B \nabla\omega_0 \cdot \nabla\varphi = \int_B f'(u_0)\omega_0\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^1(B)$. Por regularidade elíptica obtemos que $\omega_0 \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ é uma solução não trivial de

$$\begin{cases} -\triangle\omega_0 &= f'(u_0)\omega_0 \quad \text{em } B \\ \omega_0 &= 0 \quad \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Pelo resultado de Lin-Ni [21] (também provado em Damascelli-Grossi-Pacella [6] e Aftalion-Pacella [1]), cujo enunciado encontra-se no Apêndice C, temos que ω_0 é radial. Mas o fato de ω_0 ser não trivial e radial implica que a solução u_0 é degenerada no sentido radial, o que contradiz o Teorema 4.1 (ou Teorema 5.1). Portanto o teorema é verdadeiro. ∎

6.3 Exemplos de Domínios

Para construir uma família de domínios satisfazendo às hipóteses do Teorema 6.3, tomemos $G(\delta, x) : [0, \infty) \times B_{R_0+\epsilon} \to \mathbb{R}$ tal que

(i) G é contínua em δ e $G(\delta, \cdot) \in C^2(B_{R_0+\epsilon})$;

(ii) Existem C_1 e C_2 tais que, para todo $\delta \geq 0$,

$$0 < C_1 < |\nabla_x G(\delta, x)| < C_2 \quad \text{e} \quad \|D_x^2 G(\delta, x)\| < C_2$$

para todo x tal que $G(\delta, x) = 0$;

(iii) $G(0, x) = 0$ para $x \in \partial B_{R_0}$, $G(0, x) > 0$ para $x \in B_{R_0}$ e $G(0, x) < 0$ para $x \notin \overline{B}_{R_0}$.

A família de domínios $\Omega_\delta = \{x \in B_{R_0+\epsilon} \mid G(\delta, x) > 0\}$ satisfaz à condição de fronteira $(\mathbf{S_f})$ e converge para B_{R_0} quando $\delta \to 0$. Com efeito, a continuidade de G implica na convergência para B_{R_0}. Para provarmos a condição de fronteira ($\mathbf{S_f}$), tomemos um ponto (δ_0, x_0) tal que $G(\delta_0, x_0) = 0$, isto é, x_0 está na fronteira do domínio Ω_{δ_0}. Sejam $y \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ e $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^N$ uma curva C^2 tal que $\gamma(0) = x_0$ e

$$\|\gamma(t) - y\| = r, \quad \forall t \in (-1, 1). \tag{6.24}$$

Consideremos a função

$$J(t) = G(\delta_0, \gamma(t)).$$

Queremos encontrar y e r tais que J tenha um mínimo (ou máximo) local estrito em 0. Eles não devem depender de x_0, δ_0 nem de γ, mas apenas de G. Calculando diretamente, temos

$$J'(t) = \nabla_x G(\delta_0, \gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

e

$$J''(t) = D_x^2 G(\delta_0, \gamma(t)) \cdot [\gamma'(t)]^2 + \nabla_x G(\delta_0, \gamma(t)) \cdot \gamma''(t).$$

Com isto,

$$J'(0) = \nabla_x G(\delta_0, x_0) \cdot \gamma'(0)$$

e

$$J''(0) = D_x^2 G(\delta_0, x_0) \cdot [\gamma'(0)]^2 + \nabla_x G(\delta_0, x_0) \cdot \gamma''(0). \tag{6.25}$$

Para $\lambda \neq 0$, façamos

$$y = x_0 + \lambda \frac{\nabla_x G(\delta_0, x_0)}{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}$$

e $r = |\lambda|$. Derivando em relação a t a expressão em (6.24), obtemos

$$(\gamma(t) - y) \cdot \gamma'(t) = 0. \tag{6.26}$$

Portanto para $t = 0$ temos

$$\nabla_x G(\delta_0, x_0) \cdot \gamma'(0) = 0,$$

ou melhor, $J'(0) = 0$. Agora, derivando em relação a t a expressão em (6.26),

$$\|\gamma'(t)\|^2 + (\gamma'(t) - y) \cdot \gamma''(t) = 0.$$

Segue que para $t = 0$ temos

$$\|\gamma'(0)\|^2 - \frac{\lambda}{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|} \nabla_x G(\delta_0, x_0) \cdot \gamma''(0) = 0.$$

Substituindo em (6.25),

$$J''(0) = D_x^2 G(\delta_0, x_0) \cdot [\gamma'(0)]^2 + \frac{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}{\lambda} \|\gamma'(0)\|^2$$

Para obter a condição da esfera interior basta tomar $\lambda > 0$ tal que $\dfrac{C_1}{\lambda} - C_2 > 0$ pois, pela condição (ii),

$$\begin{aligned}
J''(0) &= D_x^2 G(\delta_0, x_0) \cdot [\gamma'(0)]^2 + \frac{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}{\lambda} \|\gamma'(0)\|^2 \\
&\geq -\|D_x^2 G(\delta_0, x_0)\| \|\gamma'(0)\|^2 + \frac{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}{\lambda} \|\gamma'(0)\|^2 \\
&\geq \left(\frac{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}{\lambda} - \|D_x^2 G(\delta_0, x_0)\| \right) \|\gamma'(0)\|^2 \\
&\geq \left(\frac{C_1}{\lambda} - C_2 \right) \|\gamma'(0)\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Para obter a condição da esfera exterior basta tomar $\lambda < 0$ tal que $\dfrac{C_1}{\lambda} + C_2 < 0$ pois, pela condição (ii),

$$\begin{aligned}
J''(0) &= D_x^2 G(\delta_0, x_0) \cdot [\gamma'(0)]^2 + \frac{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}{\lambda} \|\gamma'(0)\|^2 \\
&\leq \|D_x^2 G(\delta_0, x_0)\| \|\gamma'(0)\|^2 + \frac{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}{\lambda} \|\gamma'(0)\|^2 \\
&\leq \left(\frac{\|\nabla_x G(\delta_0, x_0)\|}{\lambda} + \|D_x^2 G(\delta_0, x_0)\| \right) \|\gamma'(0)\|^2 \\
&\leq \left(\frac{C_1}{\lambda} + C_2 \right) \|\gamma'(0)\|^2 < 0.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

Vamos construir agora um exemplo de família de domínios não-convexos, satisfazendo às hipóteses do Teorema 6.3. Dado $y_0 \in \partial B_1$, tomemos

$$G(\delta, x) = 1 - |x|^2 - \delta\eta(|x - y_0|^2)$$

onde $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfaz $\eta(0) = 1$ e $\eta(s) = 0$ para $s \geq \frac{1}{2}$. Esta função deforma a bola como indicado na Figura 6.2.

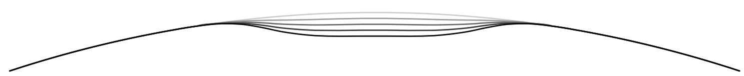


Figura 6.2: Família de domínios não-convexos

Apêndice A

Soluções Radiais

Sejam $p > 1$ e $B_{r_0,R} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Suponhamos que $u \in C^1(\overline{B}_{r_0,R})$ é radialmente simétrica e satisfaz, no sentido fraco, à equação

$$-\triangle_p u = f(|x|, u) \text{ em } B_{r_0,R} \subset \mathbb{R}^N,$$

onde f é uma função contínua. Isto significa que

$$\int_{B_{r_0,R}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{B_{r_0,R}} f(|x|, u)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(B_{r_0,R}). \tag{A.1}$$

Definamos a função $\bar{u}(r) := u(x)$ onde $r = |x|$. Afirmamos que

$$-\left(r^{N-1} |\bar{u}'(r)|^{p-2} \bar{u}'(r)\right)' = r^{N-1} f(r, \bar{u}(r)), \quad r \in (r_0, R). \tag{A.2}$$

Com efeito, pela definição de $\bar{u}$, vemos que

$$\nabla u(x) = \bar{u}'(r)\frac{x}{|x|}.$$

Assim, por (A.1), para $\varphi \in C_0^1(B_{r_0,R})$ radialmente simétrica, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0,R}} |\bar{u}'(r)|^{p-2}\,\bar{u}'(r)\bar{\varphi}'(r)\;dx &= \int_{B_{r_0,R}} f(r,\bar{u}(r))\bar{\varphi}(r)\;dx\\ \int_{r_0}^{R}\int_{\partial B_r} |\bar{u}'(r)|^{p-2}\,\bar{u}'(r)\bar{\varphi}'(r)\;dS\;dr &= \int_{r_0}^{R}\int_{\partial B_r} f(r,\bar{u}(r))\bar{\varphi}(r)\;dS\;dr.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{r_0}^{R} r^{N-1}\,|\bar{u}'(r)|^{p-2}\,\bar{u}'(r)\bar{\varphi}'(r)\;dr = \int_{r_0}^{R} r^{N-1} f(r,\bar{u}(r))\bar{\varphi}(r)\;dr, \quad \forall \bar{\varphi} \in C_0^1(r_0,R).$$

Isto mostra que, no sentido fraco, vale

$$-\left(r^{N-1}\,|\bar{u}'(r)|^{p-2}\,\bar{u}'(r)\right)' = r^{N-1} f(r,\bar{u}(r)).$$

Mas como f é contínua, temos (A.2) no sentido clássico (ver Brézis [3, Teorema VIII.2]).

Apêndice B

Problema de Cauchy

Vamos estudar o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} -\left(r^m A(u')\right)' = r^m f(r, u(r)), \quad m > 1 \\ u(r_0) = \alpha \\ u'(r_0) = \beta \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $A(s) = |s|^{p-2}s$ com $p > 1$. Dizemos que u é solução de (B.1) se $u \in C^1$ e $A(u') \in C^1$.

A Proposição B.3 foi provada em Franchi-Lanconelli-Serrin [13, Apêndice].

Proposição B.1 *Suponhamos que* $f : [r_0, r_0+\delta] \times [\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon] \to \mathbb{R}$ *é contínua e* $|f| < M$. *Seja* $0 < \delta_0 \leq \delta$ *tal que*

$$2^{\frac{1}{p-1}} \delta_0 \left[|\beta| + (M\delta_0)^{\frac{1}{p-1}} \right] < \epsilon. \tag{B.2}$$

Então existe uma solução de (B.1) *definida em* $[r_0, r_0 + \delta_0]$.

Demonstração: Integrando (B.1) no intervalo $[r_0, r] \subset [r_0, r_0 + \delta_0]$,

$$r^m A(u'(r)) - r_0^m A(\beta) = -\int_{r_0}^{r} s^m f(s, u(s))\, ds.$$

Segue que

$$A(u'(r)) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^m A(\beta) - \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^m f(s, u(s))\, ds.$$

Portanto

$$u'(r) = A^{-1}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^m A(\beta) - \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^m f(s, u(s))\, ds\right).$$

Integrando novamente,

$$u(r) = \alpha + \int_{r_0}^{r} A^{-1}\left(\left(\frac{r_0}{s}\right)^m A(\beta) - \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^m f(t, u(t))\, dt\right)\, ds. \tag{B.3}$$

Assim temos que (B.1) é equivalente ao problema de ponto fixo em (B.3). Seja $X = C^0\left([r_0, r_0+\delta_0], [\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon]\right)$ o espaço das funções contínuas $\phi : [r_0, r_0+\delta_0] \to [\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon]$. Definimos a função $I : X \to X$ dada por

$$I(\phi)(r) = \alpha + \int_{r_0}^{r} A^{-1}\left(\left(\frac{r_0}{s}\right)^m A(\beta) - \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^m f(t, u(t))\, dt\right)\, ds.$$

Afirmativa 1 : I está bem definida.

De fato,

$$\begin{aligned}
|I(\phi)(r) - \alpha| &\leq \int_{r_0}^{r} \left|\left(\frac{r_0}{s}\right)^m A(\beta) - \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^m f(t, u(t))\, dt\right|^{\frac{1}{p-1}}\, ds \\
&\leq 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{r_0}^{r} \left[\left|\left(\frac{r_0}{s}\right)^m A(\beta)\right|^{\frac{1}{p-1}} + \left|\int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^m f(t, u(t))\, dt\right|^{\frac{1}{p-1}}\right] ds \\
&\leq 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{r_0}^{r} |\beta| + \left(\int_{r_0}^{s} |f(t, u(t))|\, dt\right)^{\frac{1}{p-1}}\, ds \\
&\leq 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{r_0}^{r} |\beta| + (M\delta_0)^{\frac{1}{p-1}}\, ds \\
&\leq 2^{\frac{1}{p-1}} \delta_0 \left[|\beta| + (M\delta_0)^{\frac{1}{p-1}}\right].
\end{aligned}$$

Logo, por (B.2),

$$|I(\phi)(r) - \alpha| < \epsilon.$$

Afirmativa 2 : I é compacta.

De fato, $I : X \to C^1\left([r_0, r_0+\delta_0], [\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon]\right) \overset{compacto}{\hookrightarrow} X$.

Portanto, como $X \subset C^0[r_0, r_0+\delta_0]$ é limitado, aplicando o Teorema de Ponto Fixo de Schauder (ver Deimling [9, Teorema 8.8]), I possui um ponto fixo, e conseqüentemente, o problema (B.1) possui uma solução. ■

Proposição B.2 *Suponhamos que f é contínua e localmente lipschitziana na segunda variável. Então para o caso em que $p \leq 2$ ou $\beta \neq 0$, o problema* (B.1) *possui uma única solução definida nas proximidades de r_0.*

Demonstração: Temos que $A^{-1}(s)$ é localmente lipschitziana para s distante de 0. Para $p \leq 2$, A^{-1} é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}$. Então basta utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach na demonstração anterior. ■

Proposição B.3 *Suponhamos que f é contínua e localmente lipschitziana na segunda variável. Então para o caso em que $p > 2$ e $f(r_0, \alpha) \neq 0$, o problema* (B.1) *possui uma única solução definida nas proximidades de r_0.*

Demonstração: Pela proposição anterior, basta consideramos o caso $\beta = 0$. Sejam u e v duas soluções de (B.1). Suporemos, sem perda de generalidade, que $f(r_0, \alpha) > 0$. Assim $u'(r), v'(r) < 0$ para $r > r_0$ (r próximo de r_0). Façamos

$$\psi = A(u') - A(v').$$

Logo, por (B.1),

$$\psi(r) = -\int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^m [f(s,u) - f(s,v)]\ ds.$$

Temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
|\psi(r)| &\leq \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^m |f(s,u) - f(s,v)| \ ds \\
&\leq C \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^m |u(s) - v(s)| \ ds \\
&\leq C \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^m ds \cdot \sup_{s \in [r_0, r]} |u(s) - v(s)| \, . \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
u(s) - v(s) &= \int_{r_0}^{s} u'(t) - v'(t) \ dt \\
|u(s) - v(s)| &\leq \int_{r_0}^{s} |u'(t) - v'(t)| \ dt \\
&\leq \int_{r_0}^{s} \left|A^{-1}(A(u')) - A^{-1}(A(v'))\right| \ dt \\
&\leq \int_{r_0}^{s} \frac{1}{|\xi(t)|^{p-2}} \psi \ dt \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}$$

onde $\xi(s)$ está entre $u'(s)$ e $v'(s)$. Para s suficientemente próximo de r_0 temos $|u'(s)| < 1$ e $f(s, u(s)) > M > 0$. Com isso, por (B.1),

$$|u'(t)|^{p-2} > |u'(t)|^{p-1} > M \int_{r_0}^{s} \left(\frac{t}{s}\right)^m dt.$$

Da mesma maneira para v. Façamos

$$\rho(r) = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{s}{r}\right)^m ds.$$

Substituindo em (B.4) e (B.5) obtemos

$$\left|\frac{\psi(r)}{\rho(r)}\right| \leq \frac{C}{M} \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(s)}{\rho(s)} \ ds.$$

Por (B.4) a função $\dfrac{\psi(r)}{\rho(r)}$ é limitada próxima a r_0. Aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos que $\psi \equiv 0$. $\blacksquare$

Apêndice C

Resultados Auxiliares

Teorema (Brock [4]) *Sejam* B_R *uma bola no* $\mathbb{R}^N$ *e* $u > 0$ *uma solução fraca positiva em* $W_0^{1,p}(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$, $p > 1$, *de*

$$\triangle_p u + f(r,u) = 0 \text{ em } B_R. \qquad\qquad (r = |x|)$$

Suponhamos que $f(r,s) \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ *satisfaz*

(i) f *é decrescente em* r*;*

(ii) Se $f(r_0, s_0) = 0$ *para algum* $s_0 > 0$ *e* $r_0 \geq 0$ *então*

$$f(r,s) \leq \beta(s_0 - s) \text{ para } 0 \leq s \leq s_0 \text{ e } r \geq 0,$$

para alguma função $\beta \in C^0(\mathbb{R}_+)$ *tal que* $\beta(0) = 0$, β *é não-decrescente e*

- $\beta(s) = 0$ *para algum* $s > 0$ *ou*
- $\displaystyle\int_0^1 (s\beta(s))^{-\frac{1}{p}}\, ds = +\infty.$

Então u é radialmente simétrica e

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0 \text{ para } 0 < r < R.$$

Teorema (Damascelli-Pacella [7]) *Sejam B_R uma bola no $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ e $u > 0$ uma solução fraca positiva em $W_0^{1,p}(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$, $1 < p < 2$, de*

$$\triangle_p u + f(u) = 0 \text{ em } B_R.$$

Suponhamos que $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ é localmente lipschitziana. Então u é radialmente simétrica e

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0 \text{ para } 0 < r < R.$$

Teorema (Gidas-Ni-Nirenberg [14]) *Sejam B_R uma bola no $\mathbb{R}^N$ e $u > 0$ uma solução positiva em $C^2(\overline{B_R})$ de*

$$\begin{cases} \triangle u + f(r, u) = 0 & \text{em } B_R \qquad\qquad (r = |x|) \\ u = 0 & \text{em } |x| = R. \end{cases}$$

Suponhamos que $f(r, s) \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ satisfaz

(i) f é decrescente em r;

(ii) f admite a decomposição $f = f_1 + f_2$ onde

- *$f_1 = f_1(r, s)$ é lipschitziana em s e*
- *$f_2 = f_2(r, s)$ é não-decrescente em s.*

Então u é radialmente simétrica e

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0 \text{ para } 0 < r < R.$$

Teorema (Gidas-Spruck I [15]) *Seja* $u(x) \in C^2$ *uma solução não-negativa de*

$$\triangle u + u^\alpha = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2$$

com $1 < \alpha < \dfrac{N+2}{N-2}$ *(*$= \infty$*, se* $N = 2$*). Então* $u(x) \equiv 0$*.*

Teorema (Gidas-Spruck II [15]) *Seja o semi-espaço*

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N;\ x_N > 0\}, \quad N \geq 2.$$

Suponhamos que $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^N_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ *é uma solução não-negativa de*

$$\begin{aligned} \triangle u + u^\alpha &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N_+ \\ u &= 0 \quad \text{para} \quad x_N = 0 \end{aligned}$$

com $1 < \alpha < \dfrac{N+2}{N-2}$ *(*$= \infty$*, se* $N = 2$*). Então* $u(x) \equiv 0$*.*

Teorema (Gronwall, ver Figueiredo-Neves [12]) *Sejam* α*,* u *e* v *funções contínuas definidas em um intervalo* (a, b) *tais que* $v \geq 0$ *e*

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)\, ds.$$

Então

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} v(s)u(s)e^{\int_s^x v(t)\, dt}\, ds.$$

Em particular se $\alpha(x) = K =$ *constante, temos*

$$u(x) \leq K e^{\int_{x_0}^x v(s)\, ds}.$$

Teorema (Kesavan-Pacella [18]) *Sejam* B_R *uma bola no* $\mathbb{R}^N$ *e* $u > 0$ *uma solução fraca positiva em* $W_0^{1,p}(B)$*,* $p = N$*, de*

$$\triangle_p u + f(u) = 0 \text{ em } B_R.$$

Suponhamos que $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ *satisfaz* *(i)* $f(s) > 0$ *para* $s > 0$;

(ii) $f(s) \leq C(1 + s^q)$ *com* $q > 0$.

Então u *é radial e radialmente decrescente.*

Teorema (Lin-Ni [21]) *Seja* $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\bar{B}_R)$ *uma solução de*

$$\begin{cases} \triangle u + f(r,u) = 0 & \text{em } B_R \qquad\qquad (r = |x|) \\ u > 0 & \\ u = 0 & \text{em } |x| = R, \end{cases}$$

onde $f \in C^1$ *e* $f_r \leq 0$. *Suponhamos que* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ *em* ∂B_R. *Então toda solução de*

$$\begin{cases} \triangle \omega + f_u(r,u)\omega = \mu\omega & \text{em } B_R \\ \omega = 0 & \text{em } |x| = R, \end{cases}$$

com $\mu \geq 0$, *é radial.*

Teorema (Vazquez [27]) *Sejam* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^N$, $u \in L^\infty(\Omega)$, $\triangle_p u \in L^1_{loc}$ *no sentido das distribuições em* Ω,

$$u \geq 0, \quad -\triangle_p u + \beta(u) \geq 0 \quad \text{q.s. em} \quad \Omega$$

com $\beta \in C^0(\mathbb{R}_+)$ *tal que* $\beta(0) = 0$, β *é não-decrescente e*

- $\beta(s) = 0$ *para algum* $s > 0$ *ou*
- $\displaystyle\int_0^1 (s\beta(s))^{-\frac{1}{p}}\, ds = +\infty$.

Sejam x_0 *um ponto de* $\partial\Omega$ *satisfazendo a condição da esfera interior, sendo* B *tal esfera, e* ν *a normal exterior correspondente a* x_0. *Então*

$$\operatorname*{ess\,lim\,inf}_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} \frac{u(x)}{(x - x_0)\cdot\nu} < 0.$$

Referências Bibliográficas

[1] AFTALION, A. & PACELLA, F. *Uniqueness and nondegeneracity fo some nonlinear elliptic problems in a ball.* J. Diff. Equations, 195, 2003, p. 380-397.

[2] AMANN, H. *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach space.* SIAM Rev., 18, 1976, p. 620-709.

[3] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle.* Dunod, 1999.

[4] BROCK, F. *Radial symmetry for nonnegative solutions of semilinear elliptic equations envolving the p-laplacian.* Progress in Partial Differential Equations, vol. 1 (Pont-Mousson, 1997), Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 383, Longman, Harlow, 1998, p. 46-57.

[5] COURANT, R. & HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics.* Volumes I e II. Interscience, 1953, 1962.

[6] DAMASCELLI, L., GROSSI, M. & PACELLA, F. *Qualitative properties of positive solutions of semilinear elliptic equations in symmetric domains via the maximum principle.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 16(5), 1999, p. 631-652.

[7] DAMASCELLI, L. & PACELLA, F. *Monotonicity and symmetry of solutions of p-laplace equations,* $1 < p < 2$*, via the moving plane method.* Ann. Scuola Norm.

Sup. Pisa Cl. Sci., 26(4), 1998, p. 689-707.

[8] DAMASCELLI, L. & PACELLA, F. *Monotonicity and symmetry results for p-laplace equations and applications.* Adv. Diff. Equations, 5(7-9), 2000, p. 1179-1200.

[9] DEIMLING, K. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, 1985.

[10] DRÁBEK, P. & HERNANDÉZ, J. *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems.* Nonlinear Analysis, 44, 2001, p. 189-204.

[11] FIGUEIREDO, D.G. *Lectures on the Ekeland principle with applications and detours.* Springer-Verlag, 1989.

[12] FIGUEIREDO, D.G. & NEVES, A.F. *Equações Diferenciais Aplicadas.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Coleção Matemática Universitária), 1997.

[13] FRANCHI, B., LANCONELLI, E. & SERRIN, J. *Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in* $\mathbb{R}^N$. Adv. in Math., 118(2), 1996, p. 177-243.

[14] GIDAS, B., NI, W.M. & NIRENBERG, L. *Symmetry and related properties via the maximum principle.* Comm. Math. Phys., 68(3), 1979, p. 209-243.

[15] GIDAS, B. & SPRUCK, J. *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations.* Comm. in Partial Diff. Equations, 6(8), 1981, p. 883-901.

[16] HAI, D. *On a class of sublinear quasilinear elliptic problems.* Proc. Amer. Math Soc., 131(8), 2003, p. 2409-2414.

[17] HAI, D. & SHIVAGI, R. *Existence and uniqueness for a class of quasilinear elliptic boundary value problems.* J. Diff. Equations, 193, 2003, p. 500-510.

[18] KESAVAN, S. & PACELLA, F. *Symmetry of positive solutions of a quasilinear elliptic equation via isoperimetric inequalities.* Appl. Anal., 54(1-2), 1994, p. 27-37.

[19] KWONG, M.K. & ZHANG, L.Q. *Uniqueness of the positive solution of* $\triangle u + f(u) = 0$ *in a annulus*. Diff. Int. Equations, 4(3), 1991, p. 583-599.

[20] HAN, Q. & LIN, F. *Elliptic partial differential equations*. American Mathematical Society, 2001.

[21] LIN, C.S. & NI, W.M. *A counterexample to the nodal domain conjecture and a related semilinear equation*. Proc. Amer. Math Soc., 102(2), 1988, p. 271-277.

[22] OUYANG, T. & SHI, J. *Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problems*. J. Diff. Equations, 146(1), 1998, p. 121-156.

[23] OUYANG, T. & SHI, J. *Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problems II*. J. Diff. Equations, 158, 1999, p. 94-151.

[24] SERRIN, J. & TANG, M. *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations*. Indiana Univ. Math. J., 49(3), 2000, p. 897-923.

[25] SHI, J. & YAO, M. *On a singular nonlinear semilinear elliptic problem*. Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A, 128, 1998, p. 1389-1401.

[26] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides), 1979.

[27] VAZQUEZ, J. L. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*. Appl. Math. Optim., 12 (1984) 191-202.

[28] ZOU, H. *On the effect of the domain geometry on uniqueness of positive solutions of* $\triangle u + u^p = 0$. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 21(4), n. 3, 1994, p. 343-356.