

Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Superfícies em certos espaços
homogêneos tridimensionais**

TESE DE DOUTORADO

Irene Ignazia Onnis

Orientador: Prof. Dr. Francesco Mercuri

Co-orientador: Prof. Dr. Stefano Montaldo

Campinas, 23 de Junho de 2005

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Onnis, Irene Ignazia

On5s Superfícies em certos espaços homogêneos tridimensionais / Irene Ignazia Onnis -- Campinas, [S.P.:s.n.], 2005.

Orientadores: Francesco Mercuri; Stefano Montaldo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Espaços homogêneos. 2. Geometria diferencial. 3. Curvatura. 4. Invariantes. I. Mercuri, Francesco. II. Montaldo, Stefano. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Surfaces in some homogeneous tridimensional spaces

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Homogeneous spaces. 2. Differential geometry. 3. Curvature. 4. Invariants.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Titulação: Doutora em Matemática

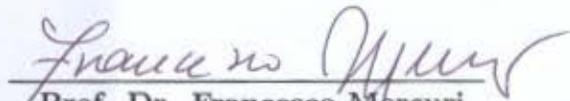
Banca examinadora: Prof. Dr. Stefano Montaldo (Cagliari, Itália)
Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa (UNICAMP)
Prof. Dr. Valério Ramos Batista (UNICAMP)
Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti (USP)
Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa (UFC)

Data da defesa: 23/06/2005

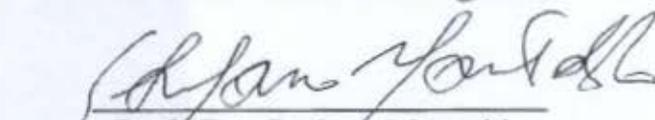
Superfícies em certos espaços homogêneos tridimensionais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Irene Ignazia Onnis** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de Junho de 2005.



Prof. Dr. Francesco Mercuri



Prof. Dr. Stefano Montaldo

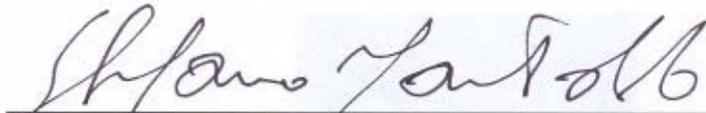
Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Stefano Montaldo (Presidente) - Università di Cagliari (Itália)
2. Prof. Dr. Valério Ramos Batista - IMECC - UNICAMP
3. Prof. Dr. Renato H.L. Pedrosa - IMECC - UNICAMP
4. Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti - IME - USP
5. Prof. Dr. João L.M. Barbosa - UFC

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR EM MATEMÁTICA**.

Tese de Doutorado defendida em 23 de junho de 2005 e aprovada

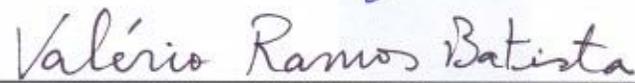
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



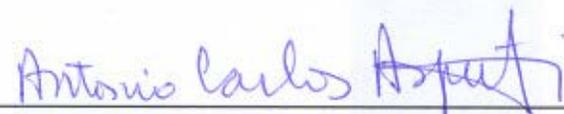
Prof. (a). Dr (a). STEFANO MONTALDO



Prof. (a). Dr(a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA



Prof. (a). Dr (a). VALÉRIO RAMOS BATISTA



Prof. (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI



Prof. (a) Dr. (a) JOÃO LUCAS MARQUES BARBOSA

*Salmo 118 (119)- La legge di Dio.
Beato l'uomo di integra condotta,
che cammina nella legge de Signore*

*“Quanto manca alla vetta?”; “Tu sali
e non pensarci!” (F.W. Nietzsche)*

À minha família e ao Guido

Agradecimentos

Ao Prof. Francesco Mercuri pela orientação, pela sincera amizade e pelos ensinamentos que me transmitiu nestes quatro anos. Quero agradecer também a toda a sua família por ter me recebido com tamanho carinho ao chegar ao Brasil.

Ao meu co-orientador Prof. Stefano Montaldo, por sua contribuição na realização deste trabalho, pelo incentivo e pela profunda amizade.

Um agradecimento especial ao Prof. Valério Ramos Batista, que fez uma leitura crítica e cuidadosa da versão preliminar desta tese. Muito obrigada pelas correções, pelas sugestões e pelo apoio.

Aos Professores Renzo Caddeo e M. Paola Piu da Universidade de Cagliari (Itália) por terem contribuído, decisivamente, para que vivesse esta experiência no Brasil.

Ao grupo dos seminários de geometria USP-UNICAMP pelos belos momentos compartilhados.

Aos sinceros amigos que fiz no IMECC, em particular ao Mercio, Paulo César, Eugenio, Roger, Bianca, Leonardo, Zé Carlos, Adonai e Juliana, Kelly e Odair, Rodolfo e Valéria, que me ajudaram cada um de sua forma e em épocas diferentes.

Ao pessoal da CPG do Imecc, em particular à Tânia, à Cidinha e Reinaldo pelo ótimo trabalho e pela compreensão nos momentos difíceis. Também agradeço aos Professores Luiz San Martin e Jorge Mujica pela ajuda na parte burocrática.

A Marcos, Alessandra e Giuliana, obrigada pela amizade.

A Guido que, com a sua alegria e com seu amor, não me deixou desanimar e me deu tranquilidade para trabalhar ao meu projeto.

Aos meus pais, às minhas irmãs, aos meus cunhados e à minha afilhada Laura, ficar longe de vocês e do seu carinho foi a maior dificuldade que tive que enfrentar neste período.

Por fim a todo o povo brasileiro pela hospitalidade.

Resumo

Neste trabalho estudamos superfícies em variedades Riemannianas homogêneas tridimensionais com condições sobre a geometria intrínseca e/ou extrínseca. Em particular:

1. Resolvemos o Problema de Björling para superfícies mínimas que contêm uma dada faixa analítica em grupos de Lie munidos de uma métrica invariante à esquerda.
2. Classificamos as superfícies de curvatura média constante no produto do plano hiperbólico com a reta real, que são invariantes pela ação de um subgrupo a um parâmetro do grupo das isometrias do espaço ambiente.
3. Classificamos as superfícies de curvatura Gaussiana constante em variedades Riemannianas homogêneas de dimensão três, com particular atenção ao caso do grupo de Heisenberg e do espaço dado pelo produto do plano hiperbólico com a reta real.

Abstract

In this work we study surfaces in homogeneous Riemannian manifolds of dimension three with conditions on the intrinsic and/or the extrinsic geometry. En particular:

1. We solve the Björling Problem for minimal surfaces which contain an analytical strip in Lie groups with a left invariant metric.
2. We classify constant mean curvature surfaces in the product of the hyperbolic plane with the real line, which are invariant under the action of a one-parameter subgroup of the isometries group of the ambient space.
3. We classify constant Gaussian curvature surfaces of homogeneous Riemannian manifolds of dimension three, with particular attention for the case of the Heisenberg group and for the product of the hyperbolic plane and the real line.

Conteúdo

Introdução	1
1 Conceitos preliminares	3
1.1 Generalidades sobre as imersões isométricas	3
1.2 Superfícies em variedades 3-dimensionais	6
1.3 As geometrias de dimensão três	7
1.3.1 Modelos para o plano hiperbólico	8
1.4 O espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	9
2 Superfícies mínimas e umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	13
2.1 Equação das superfícies mínimas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	13
2.2 Minimalidade e harmonicidade	24
2.3 Superfícies umbílicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	26
2.4 A aplicação normal de Gauss	32
3 O problema de Björling em grupos de Lie	39
3.1 Representação de Weierstrass	39
3.2 A Representação de Weierstrass em grupos de Lie	41
3.3 O problema de Björling em grupos de Lie	44
4 Superfícies invariantes de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	49
4.1 O grupo de Lie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	50
4.1.1 Isometrias do plano hiperbólico	50
4.1.2 O grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	52
4.2 Superfícies invariantes isométricas	55
4.2.1 Isometrias entre as superfícies invariantes de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	56

4.3	Superfícies invariantes pela ação do grupo G_{24}	62
4.3.1	Classificação das soluções	63
4.3.2	Superfícies invariantes por translações ao longo do eixo x	70
4.3.3	Superfícies invariantes por translações ao longo do eixo z	74
4.4	Superfícies de CMC invariantes pela ação do grupo G_{34}	77
4.4.1	Classificação das soluções	78
4.5	Superfícies helicoidais	92
4.5.1	Classificação das soluções	94
5	Superfícies invariantes de curvatura Gaussiana constante	105
5.1	Introdução	105
5.2	Superfícies invariantes de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	109
5.3	Superfícies invariantes do grupo de Heisenberg \mathbb{H}_3	112
A	Geometria Equivariante	115
A.1	Grupos de transformações	115
A.2	Subconjuntos invariantes e funções invariantes	116
A.3	Técnica de redução	119
A.3.1	Demonstração do Teorema de Redução	121
	Bibliografia	126

Introdução

A Geometria Diferencial clássica tem estudado exaustivamente as superfícies nas formas espaciais. Uma extensão natural desta problemática é o estudo de superfícies em espaços homogêneos. O estudo de tais superfícies tem atraído a atenção de vários pesquisadores nos últimos anos, especialmente no caso dos espaços homogêneos de dimensão três com quocientes compactos, as chamadas *geometrias tridimensionais*. Este estudo, também, foi motivado pela anunciada solução positiva à conjectura da geometrização de Thurston e, conseqüentemente, à conjectura de Poincaré.

Este trabalho se encaixa nesta linha, com ênfase no estudo das superfícies mínimas e de curvatura média constante do espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, dado pelo produto do plano hiperbólico com a reta real.

Um modelo de plano hiperbólico é o modelo do semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ com a métrica $g_{\mathbb{H}} = (dx^2 + dy^2)/y^2$, que tem curvatura constante -1 . Este modelo se identifica naturalmente com o grupo das transformações da reta real do tipo $\{T_{(x,y)}(t) = yt + x, y > 0\}$. Módulo esta identificação, o plano hiperbólico é um grupo de Lie e a métrica $g_{\mathbb{H}}$ é invariante à esquerda. Além disso, tendo $g_{\mathbb{H}}$ curvatura constante, o grupo de isometrias de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ é 3-dimensional.

O espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é, portanto, um grupo de Lie com a estrutura produto, e a métrica produto é invariante à esquerda. Seu grupo de isometrias tem dimensão 4, sendo gerado pelas isometrias de \mathbb{H}^2 e pelas translações de \mathbb{R} . Estas e outras propriedades deste espaço são tratadas no Capítulo 1 deste trabalho.

Um primeiro problema interessante é a classificação das superfícies umbílicas neste espaço. O caso das superfícies umbílicas nas formas espaciais é bem conhecido. O das superfícies umbílicas do grupo de Heisenberg foi estudado por A. Sanini ([S]), que demonstrou a não existência de tais superfícies. A não existência de superfícies totalmente geodésicas no grupo de Heisenberg é um resultado anterior devido a M. Goze e P. Piu, [GP].

Em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou, no caso mais geral, de produtos do tipo $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, as secções horizontais dadas por $\mathcal{M} \times \{t\}$ são claramente totalmente geodésicas. No segundo capítulo damos uma descrição completa das superfícies umbílicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja o Teorema 2.3.4). Além disso, neste capítulo apresentamos resultados gerais sobre as superfícies mínimas, em particular sobre os gráficos mínimos. Sendo um assunto relativamente novo, achamos

oportuno descrever uma série de exemplos, obtidos procurando soluções especiais da equação dos gráficos mínimos, alguns destes ainda não apareceram na literatura.

Sempre no âmbito da teoria das superfícies mínimas, consideramos, no terceiro capítulo, o Problema de Björling para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, aliás, para grupos de Lie 3-dimensionais. Dada uma curva analítica real e um campo de vetores ao longo da curva, unitário, analítico real e ortogonal à curva, o problema consiste em achar uma superfície mínima que contem a curva e cuja normal, ao longo da curva, seja o campo dado. Para mostrar existência e unicidade da solução do problema usamos a representação de Weierstrass que, neste contexto, foi obtida por Mercuri-Montaldo-Piu em [MMP], o Teorema de Cauchy-Kovaleskaya e um lema sobre a dependência das equações de holomorfia (que aparecem na representação), que é novo e de interesse independente (Lema 3.3.1).

No quarto capítulo estudamos superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, que são invariantes pela ação de um subgrupo a um-parâmetro do grupo das isometrias. Usando técnicas da geometria equivariante (Teorema de Redução [BCH]) obtemos uma classificação de tais superfícies, a menos de congruências. Esta técnica consiste essencialmente no estudo da curva obtida projetando a superfície no espaço das órbitas. A vantagem é que a solução é obtida resolvendo uma equação diferencial ordinária ao invés de uma equação diferencial parcial. Algumas destas equações são explicitamente resolvidas, outras depende de integrais elípticas. Para a representação gráfica das soluções foi usado o programa MATHEMATICA. Em particular, no caso de soluções envolvendo integrais elípticas obtivemos desenhos por integração numérica. Recentemente, resultados análogos foram obtidos por R. Sá Earp e E. Toubiana, usando técnicas diferentes (veja [ST] e [Sa]). Este mesmo problema para o caso das superfícies invariantes do grupo de Heisenberg foi tratado em [FMP].

No quinto capítulo estudamos como classificar as superfícies de curvatura Gaussiana constante que são invariantes para um subgrupo a um-parâmetro de isometrias, seja no caso do espaço ambiente ser $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, seja no caso do grupo de Heisenberg. Este problema foi considerado, para o caso das superfícies rotacionais do grupo de Heisenberg, em [CPR].

Por comodidade do leitor, apresentamos na Apêndice os resultados de geometria equivariante utilizados neste trabalho.

Observamos também que os resultados do quarto e do quinto capítulo são objetos de dois trabalhos já aceitos para publicação ([MO], [MO1]). Os resultados relativos ao Problema de Björling estão sendo enviados para publicação.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste primeiro capítulo introduzimos os conceitos e as notações básicas da teoria das subvariedades, em particular para superfícies de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou, mais em geral, das oito geometrias de Thurston.

1.1 Generalidades sobre as imersões isométricas

Seja $f : \mathcal{M}^m \rightarrow (\mathcal{N}^n, g)$ uma imersão de uma variedade \mathcal{M} de dimensão m em uma variedade Riemanniana \mathcal{N} de dimensão n . Denotamos por $g_f = f^* g$ a métrica induzida por g em \mathcal{M} , que faz da f uma imersão isométrica. Quando resultar claro do contexto, usaremos o mesmo símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para representar g_f e g .

Sendo que f é localmente um mergulho, podemos identificar localmente \mathcal{M} com $f(\mathcal{M})$ e cada campo $X \in T\mathcal{M}$ com a sua imagem $df(X)$. Usando esta identificação, para cada $p \in \mathcal{M}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} T_{f(p)}\mathcal{N} &= df_p(T_p\mathcal{M}) \oplus [df_p(T_p\mathcal{M})]^\perp \\ &= T_p\mathcal{M} \oplus (T_p\mathcal{M})^\perp. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Portanto, indicando por $T\mathcal{M}$ o fibrado tangente a \mathcal{M} e por $T\mathcal{M}^\perp$ o fibrado normal a \mathcal{M} , temos que

$$T\mathcal{N}|_{f(\mathcal{M})} = T\mathcal{M} \oplus T\mathcal{M}^\perp,$$

onde $T\mathcal{N}|_{f(\mathcal{M})} = \bigcup_{p \in f(\mathcal{M})} T_p\mathcal{N}$ é o fibrado induzido por f . Com respeito a esta decomposição podemos definir a *projeção tangente*

$$(\cdot)^\top : T\mathcal{N}|_{f(\mathcal{M})} \longrightarrow T\mathcal{M}$$

e a *projeção normal*

$$(\cdot)^\perp : T\mathcal{N}|_{f(\mathcal{M})} \longrightarrow T\mathcal{M}^\perp.$$

Denotamos por ∇' e ∇ as conexões de Levi-Civita de \mathcal{M} e \mathcal{N} , respectivamente, e por $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ e $\mathcal{X}(\mathcal{M})^\perp$ os espaços dos campos tangentes e normais a \mathcal{M} , i.e. as secções de $T\mathcal{M}$ e $(T\mathcal{M})^\perp$.

É fácil ver que, se $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ e $\xi \in \mathcal{X}(\mathcal{M})^\perp$, temos:

- $(\nabla_X Y)^\top = \nabla'_X Y$.
- $\nabla_X^\perp \xi := (\nabla_X \xi)^\perp$ é uma conexão no fibrado normal, compatível com a métrica.
- $\alpha(X, Y) := (\nabla_X Y)^\perp$ é um tensor, i.e. bilinear em relação às funções, que é também simétrico.
- $A_\xi X := -(\nabla_X \xi)^\top$ é linear em cada argumento em relação às funções.

Decorre dos itens anteriores que as aplicações dadas por

$$\alpha_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}^\perp$$

$$A_{\xi(p)} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$$

são simétricas e relacionadas por meio da seguinte identidade:

$$\langle \alpha_p(X, Y), \xi \rangle = \langle A_{\xi(p)}X, Y \rangle.$$

Resumindo, resulta

$$\nabla_X Y = \nabla'_X Y + \alpha(X, Y), \quad \text{fórmula de Gauss,} \tag{1.2}$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad \text{fórmula de Weingarten.}$$

A aplicação α é chamada de *segunda forma fundamental* da imersão. A aplicação A_ξ é chamada de *operador de Weingarten (ou operador de forma) na direção ξ* .

Definição 1.1.1. Seja $\{E_1, \dots, E_m\}$ uma base ortonormal de $T_p\mathcal{M}$. Chamaremos de vetor *curvatura média* da subvariedade \mathcal{M} em p o vetor dado por

$$\mathbf{H}(p) = \frac{1}{m} \operatorname{tr} \alpha = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha(E_i, E_i).$$

A subvariedade \mathcal{M} é dita *mínima* se \mathbf{H} é identicamente nulo.

Observação 1.1.2. É fácil ver que a definição de vetor curvatura média não depende da escolha da base ortonormal.

Definição 1.1.3. Dizemos que f é *totalmente umbílica* se para cada $\xi \in T\mathcal{M}^\perp$ temos que $A_\xi = \lambda(\xi) \operatorname{Id}$. No caso de $\lambda(\xi) = 0, \forall \xi$, diremos que f é *totalmente geodésica*.

Observação 1.1.4. É fácil ver que:

1. f é totalmente umbílica se, e somente se,

$$\alpha(X, Y) = g_f(X, Y) \mathbf{H}, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}).$$

2. A imersão f é totalmente geodésica se, e somente se, para toda geodésica γ de \mathcal{M} resultar que $f \circ \gamma$ é geodésica de \mathcal{N} .

Para o *tensor de curvatura* da conexão de Levi Civita e da conexão normal escolheremos o sinal dado por:

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}, \quad R^\perp(X, Y) = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp - \nabla_{[X, Y]}^\perp.$$

Em particular a *curvatura seccional* do subespaço 2-dimensional $\sigma \subseteq T_p \mathcal{N}$, $p \in \mathcal{N}$, gerado pela base ortonormal $\{X, Y\}$ é dada por:

$$K(\sigma) = K(X, Y) = -g(R(X, Y)X, Y).$$

O *tensor de Ricci* duma variedade Riemanniana (\mathcal{N}^n, g) é definido como

$$\text{Ric}(X, Y) = - \sum_{i=1}^n g(R(X, W_i)Y, W_i),$$

onde X, Y são tangentes a \mathcal{N} e $\{W_1, \dots, W_n\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente a \mathcal{N} . A *curvatura de Ricci* na direção de um campo unitário $Z \in T\mathcal{N}$ é

$$\text{Ric}(Z) = \text{Ric}(Z, Z) = \sum_{i=1}^n K(Z, W_i).$$

Observação 1.1.5. No caso de (\mathcal{N}, g) ser um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda, as componentes do tensor de curvatura são constantes nos campos invariantes à esquerda. Portanto as componentes do tensor de curvatura, a curvatura seccional e a curvatura de Ricci, todas podem ser calculadas na álgebra de Lie do grupo.

Se $f : \mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{N}, g)$ é uma imersão isométrica, indicando por R' e R os tensores de curvatura de \mathcal{M} e \mathcal{N} , respectivamente, temos as equações fundamentais:

$$\begin{aligned} \langle R'(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle, \end{aligned} \quad \text{equação de Gauss,}$$

$$(R(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z), \quad \text{equação de Codazzi,}$$

$$\langle R(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R'^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle, \quad \text{equação de Ricci,}$$

onde $X, Y, Z, W \in T\mathcal{M}$ e $\xi, \eta \in T\mathcal{M}^\perp$.

1.2 Superfícies em variedades 3-dimensionais

Estaremos interessados principalmente no caso em que $m = 2$ e $n = 3$. Neste caso, indicando por $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathcal{N}, g)$ uma parametrização regular da superfície \mathcal{M} , usaremos a notação clássica para a métrica induzida $g_f = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$, onde

$$\begin{aligned} E &= g(f_x, f_x), \\ F &= g(f_x, f_y), \\ G &= g(f_y, f_y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Se ξ é um campo unitário normal a \mathcal{M} , sendo que $\nabla_X^\perp \xi = 0$, a fórmula de Weingarten pode-se reescrever como

$$\nabla_X \xi = -A_\xi X, \quad X \in T_p \mathcal{M}.$$

Conseqüentemente temos que

$$g(A_\xi(X), Y) = g(-\nabla_X \xi, Y),$$

e portanto os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} L &= -g(\nabla_{f_x} \xi, f_x), \\ M &= -g(\nabla_{f_x} \xi, f_y), \\ N &= -g(\nabla_{f_y} \xi, f_y). \end{aligned} \tag{1.4}$$

A curvatura de Gauss de \mathcal{M} no ponto p , que é a única curvatura seccional, é dada por:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{1.5}$$

O vetor curvatura média da superfície \mathcal{M} pode-se calcular com a fórmula dada na Definição 1.1.1 e usando a seguinte base ortonormal:

$$E_1 = \frac{f_x}{\sqrt{E}}, \quad E_2 = \frac{E f_y - F f_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}}.$$

É fácil ver que:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h^{ij} \alpha(f_i, f_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \right) \xi, \tag{1.6}$$

onde

$$h^{ij} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

é a inversa da matriz associada à métrica g_f e $\{f_1, f_2\} = \{f_x, f_y\}$. Temos que $\mathbf{H} = H\xi$, onde H é chamada *função curvatura média* e o seu sinal depende da escolha do vetor normal ξ .

Como último conceito desta seção vamos introduzir o de *curvatura geodésica* k de uma curva em uma superfície.

Definição 1.2.1. Seja \mathcal{M}^2 uma superfície orientada munida de uma métrica g e seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva. Então, para todos os valores de t tais que $\alpha'(t) \neq 0$, a curvatura geodésica k de α é dada por

$$k(t) = \frac{g(\nabla_{\alpha'} \alpha', J\alpha')}{\|\alpha'\|^3}, \quad (1.7)$$

onde J denota a rotação em $T_{\alpha(t)}\mathcal{M}$ de $\pi/2$ no sentido da orientação.

Vamos agora enunciar uma proposição que será útil em cálculos futuros:

Proposição 1.2.2 (veja por exemplo [CG]). *Seja \mathcal{M} uma superfície abstrata orientada parametrizada por $f(x, y)$ e seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva regular. Denotamos por E, F, G os coeficientes da métrica de \mathcal{M} e tomamos $\alpha(t) = f(x(t), y(t))$, para $t \in (a, b)$. Então,*

$$\|\alpha'\| k = \sigma[\alpha, f_x]' + \frac{-\frac{F}{E}(E_x x' + E_y y') - E_y x' + G_x y' + 2F_x x'}{2\sqrt{EG - F^2}}, \quad (1.8)$$

onde $\sigma[\alpha, f_x]$ denota o ângulo entre α' e f_x .

Exemplo 1.2.3. Se temos $E = G = 1/y^2$ e $F = 0$, podemos escrever

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (y \|\alpha'\| \cos \sigma, y \|\alpha'\| \sin \sigma).$$

Logo, é fácil ver que

$$x' y'' - y' x'' = y^2 \|\alpha'\|^2 \sigma'.$$

Substituindo a expressão para σ' dada por esta última equação em (1.8) resulta que:

$$\|\alpha'\| k = \frac{x' y'' - y' x''}{y^2 \|\alpha'\|^2} + \frac{x'}{y}. \quad (1.9)$$

1.3 As geometrias de dimensão três

Lembramos que uma variedade Riemanniana (\mathcal{N}, g) é dita *homogênea* se, para cada $x, y \in \mathcal{N}$, existe uma isometria de \mathcal{N} que leva x em y . Uma *geometria* \mathbb{E}^n é uma variedade Riemanniana homogênea simplesmente conexa que possui um quociente compacto, ou seja, existe um subgrupo H do seu grupo de isometrias tal que \mathbb{E}^n/H é uma variedade compacta. Duas geometrias são ditas equivalentes se existe um difeomorfismo equivariante entre elas.

W. Thurston demonstrou (veja [T, T1]) que existem, a menos de equivalência, oito geometrias de dimensão três que agora vamos listar.

1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, com a métrica canônica $dx^2 + dy^2 + dz^2$ de curvatura constante 0.

2. A esfera $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$, com a métrica de curvatura constante 1, dada pela restrição da métrica canônica de \mathbb{R}^4 .
3. O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$, munido da métrica de curvatura constante -1 dada por $(dx^2 + dy^2 + dz^2)/z^2$.
4. O espaço produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, com a métrica produto.
5. O espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, com a métrica produto.
6. O grupo de Heisenberg \mathbb{H}_3 , definido como o grupo das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$, munido da métrica invariante à esquerda dada por

$$dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy\right)^2.$$

7. O espaço $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, ou seja o recobrimento universal do grupo de Lie $SL_2(\mathbb{R})$. Podemos identificar $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ com $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ com a métrica dada por

$$\left(dx + \frac{dy}{z}\right)^2 + \frac{(dy^2 + dz^2)}{z^2}.$$

8. O espaço Sol, definido como o grupo de Lie dado por \mathbb{R}^3 com o produto

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + e^{-x} y', z + e^x z'),$$

e munido da seguinte métrica invariante à esquerda:

$$dx^2 + e^{2x} dy^2 + e^{-2x} dz^2.$$

1.3.1 Modelos para o plano hiperbólico

Passamos agora a descrever três modelos do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

- 1) **O modelo do semi-plano superior.** Este modelo é dado por

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\},$$

munido da seguinte métrica

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{(dx^2 + dy^2)}{y^2}.$$

- 2) **O modelo do disco de Poincaré.** Neste caso o plano hiperbólico é representado pelo disco unitário aberto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

com a métrica

$$g_D = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

- 3) **O modelo do hiperbolóide.** Consideramos o espaço \mathbb{R}^3 com a métrica de Lorentz

$$g_L(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.$$

O modelo do hiperbolóide de \mathbb{H}^2 é representado pela folha superior do hiperbolóide dada por

$$\mathbb{H}_+^2 = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_L(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1 \text{ com } x > 0\},$$

munida da métrica Riemanniana dada pela restrição da métrica Lorentziana.

Introduzindo coordenadas complexas $z = x + iy$, com $i = \sqrt{-1}$, temos que

$$\mathbb{R}_+^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}, \quad g_{\mathbb{H}} = \frac{|dz|^2}{[\text{Im}(z)]^2}$$

e

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 < 1\}, \quad g_D = 4 \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}.$$

É fácil ver que a transformação

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}_+^2, g_{\mathbb{H}}) &\longrightarrow (D, g_D) \\ z &\longmapsto \frac{z - i}{z + i} \end{aligned}$$

representa uma isometria entre os primeiros dois modelos de \mathbb{H}^2 .

1.4 O espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Seja \mathbb{H}^2 o modelo do semi-plano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ do plano hiperbólico dotado da métrica $g_{\mathbb{H}} = (dx^2 + dy^2)/y^2$, cuja curvatura Gaussiana é constante e igual a -1 . O plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , com a estrutura de grupo que deriva da composição das transformações afins próprias¹:

$$(x, y) * (x', y') = (x'y + x, yy'),$$

¹Uma transformação afim própria é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = yt + x, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0.$$

é um grupo de Lie e a métrica $g_{\mathbb{H}}$ é invariante à esquerda. Portanto o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é também um grupo de Lie com a estrutura produto dada por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x'y + x, yy', z + z') \quad (1.10)$$

e dotado da métrica invariante à esquerda dada por

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2.$$

É importante observar que $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ é uma variedade homogênea e portanto completa. De fato, isto é verdade para qualquer grupo de Lie G munido de uma métrica invariante à esquerda, sendo que, dados $x, y \in G$, a translação à esquerda $L_{yx^{-1}}$ é uma isometria que leva x em y . Uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda em $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ é dada por

$$\begin{cases} E_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \\ E_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \\ E_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.11)$$

É fácil verificar que

$$[E_1, E_2] = -E_1, \quad [E_1, E_3] = 0 \quad \text{e} \quad [E_2, E_3] = 0.$$

Pode-se calcular a conexão de Levi-Civita ∇ de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ associada à métrica g usando a fórmula seguinte

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y),$$

onde X, Y, Z são campos invariantes à esquerda. Temos que:

$$\begin{cases} \nabla_{E_1} E_1 = E_2, \\ \nabla_{E_1} E_2 = -E_1, \\ \nabla_{E_2} E_1 = 0, \\ \nabla_{E_2} E_2 = \nabla_{E_3} E_3 = 0, \\ \nabla_{E_1} E_3 = \nabla_{E_3} E_1 = 0, \\ \nabla_{E_2} E_3 = \nabla_{E_3} E_2 = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

com os quais podemos determinar completamente a conexão de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, temos que os símbolos de Christoffel não nulos da conexão Riemanniana, calculados com respeito às coordenadas locais, são:

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}, \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Curvaturas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

No caso do espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ temos que:

$$R(E_1, E_2)E_1 = E_2 \quad \text{e} \quad R(E_1, E_2)E_2 = -E_1,$$

e portanto

$$K(E_1, E_2) = -1.$$

Além disso, sendo que

$$K(E_1, E_3) = K(E_2, E_3) = 0,$$

deduzimos que o $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é um espaço de curvatura não constante. Segue-se, também, que as curvaturas de Ricci calculadas na álgebra de Lie de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são:

$$\text{Ric}(E_1) = \text{Ric}(E_2) = -1 \quad \text{e} \quad \text{Ric}(E_3) = 0.$$

Geodésicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Para calcular as geodésicas da variedade produto $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, primeiramente observamos que, se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma geodésica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, então a curva $(x(t), y(t))$ é geodésica de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$, ou seja, satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{y^2} \right) = 0 \Rightarrow \dot{x} = a y^2, & a \in \mathbb{R}, \\ \ddot{y} y - \dot{y}^2 + \dot{x}^2 = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

e $\ddot{z} = 0$. Se a constante $a = 0$, então a geodésica tem a seguinte forma:

$$\gamma(t) = (b, e^{ct+d}, ft + h), \quad b, c, d, f, h \in \mathbb{R}, \quad c \geq 0.$$

Quando $c = 0$ a geodésica γ é uma reta paralela ao eixo z . Quando $f = 0$, γ é uma semi-reta do semi-plano totalmente geodésico $z = h$, $y > 0$, ortogonal ao bordo (veja a Figura 1.1). Se $c > 0$ e $f \neq 0$ temos que a geodésica é do tipo mostrado na Figura 1.2.

Se $a \neq 0$ então temos

$$\gamma(t) = \left(x_0 + r \tanh(at + b), \frac{r}{\cosh(at + b)}, ct + d \right),$$

onde $x_0, r, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente, quando $c = 0$ a curva γ é uma semi-circunferência no plano $z = d$ com centro $(x_0, 0, d)$ e raio r (veja a Figura 1.3). No caso $c \neq 0$, a geodésica γ é do tipo mostrado na Figura 1.4.

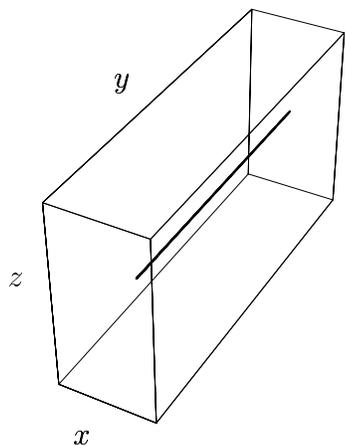


Figura 1.1. Geodésica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de equação $(1, e^{t+1}, 2)$.

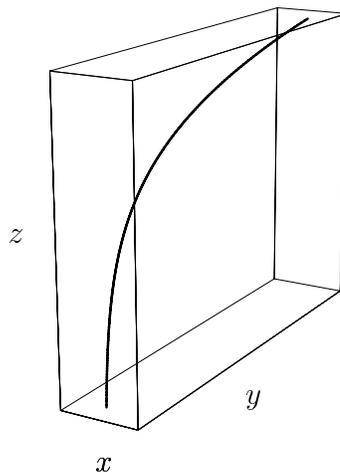


Figura 1.2. Geodésica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de equação $(2, e^{t+1}, 3t + 2)$.

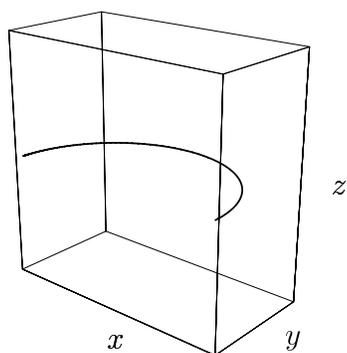


Figura 1.3. Geodésica de equação $(2 \tanh(t + 1), 2 / \cosh(t + 1), 2)$.

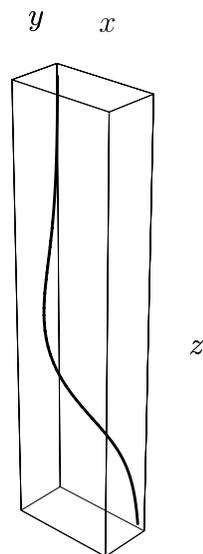


Figura 1.4. Geodésica de equação $(3 + 2 \tanh(t + 1), 2 / \cosh(t + 1), 2t + 1)$.

Capítulo 2

Superfícies mínimas e umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

2.1 Equação das superfícies mínimas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Como vimos no Capítulo 1, uma superfície que tem curvatura média zero em todos os seus pontos é chamada *superfície mínima*. A palavra mínima está relacionada ao problema proposto por J.L. Lagrange em 1760:

Dado um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitado e com fronteira suficientemente diferenciável e uma função $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, suficientemente diferenciável, achar, entre todas as funções suficientemente diferenciáveis $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f|_{\partial\Omega} = g$, aquela cujo gráfico tem área mínima.

Lagrange apresentou este problema como exemplo de um método por ele desenvolvido, hoje chamado Cálculo das Variações ([L]), que vamos usar para achar a equação das superfícies mínimas no caso do espaço $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$.

Seja então $\mathcal{M} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície de área mínima dada como gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$ de classe C^2 , definida em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{H}^2$ relativamente compacto e com fronteira diferenciável. Consideremos a parametrização natural do gráfico:

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Das equações (1.11) temos

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{1}{y}E_1 + f_x E_3, \\ \phi_y &= \frac{1}{y}E_2 + f_y E_3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Logo, usando a equação (1.3), temos que os coeficientes da métrica induzida por g em \mathcal{M} são:

$$E = f_x^2 + \frac{1}{y^2}, \quad F = f_x f_y, \quad G = f_y^2 + \frac{1}{y^2},$$

e, portanto, o campo unitário normal à superfície é

$$\xi(x, y) = -\frac{f_x}{w y} E_1 - \frac{f_y}{w y} E_2 + \frac{1}{w y^2} E_3, \quad (2.2)$$

onde

$$w = \sqrt{EG - F^2} = \frac{\sqrt{y^2(f_x^2 + f_y^2) + 1}}{y^2}.$$

Consideremos a seguinte variação de \mathcal{M} :

$$\phi_t(x, y) = (x, y, f(x, y) + t h(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

com $\epsilon > 0$, $h \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ e $h|_{\partial\Omega} = 0$. Esta última condição significa dizer que as superfícies \mathcal{M}_t obtidas ao variar t , como gráficos das correspondentes funções $f(x, y) + t h(x, y)$, têm todas o mesmo bordo. Indicamos por $A(t)$ a área de \mathcal{M}_t sobre $\bar{\Omega}$. Temos

$$A(t) = \iint_{\bar{\Omega}} w(t) \, dx dy,$$

onde

$$w(t) = \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} = \frac{\sqrt{y^2[(f_x + t h_x)^2 + (f_y + t h_y)^2] + 1}}{y^2}.$$

Derivando com respeito a t temos que

$$A'(t) = \iint_{\bar{\Omega}} \frac{h_x(f_x + t h_x) + h_y(f_y + t h_y)}{y^2 w(t)} \, dx dy. \quad (2.3)$$

Avaliando esta expressão em zero deduzimos

$$A'(0) = \iint_{\bar{\Omega}} \left(h_x \frac{f_x}{w y^2} + h_y \frac{f_y}{w y^2} \right) \, dx dy.$$

Integrando por partes e lembrando que $h|_{\partial\Omega} = 0$, podemos escrever

$$A'(0) = - \iint_{\bar{\Omega}} h \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{w y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{w y^2} \right) \right] \, dx dy. \quad (2.4)$$

Como a área de \mathcal{M} é mínima, temos em particular que $A(t) \geq A(0)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Portanto, \mathcal{M} é ponto crítico de $A(t)$, ou seja $A'(0) = 0$, para qualquer função suave h que se anule na fronteira de Ω . Da equação (2.4), sendo a função h arbitrária, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{w y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{w y^2} \right) = 0, \quad (2.5)$$

ou, equivalentemente,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + y^2 |\nabla f|^2}} \right) = 0, \quad (2.6)$$

onde, por ∇ e div temos indicado, respectivamente, o gradiente e a divergência em \mathbb{R}^2 . Observamos que esta equação resulta na seguinte *equação dos gráficos mínimos* em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$:

$$(1 + y^2 f_y^2) f_{xx} - y (f_x^2 + f_y^2) f_y - 2y^2 f_x f_y f_{xy} + (1 + y^2 f_x^2) f_{yy} = 0, \quad (2.7)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$(\text{Hess})_{\text{adj}}(\nabla f) y^2 - f_y |\nabla f|^2 y + \Delta f = 0,$$

onde Δ denota o laplaciano em \mathbb{R}^2 e

$$(\text{Hess})_{\text{adj}}(\nabla f) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{yy} & -f_{xy} \\ -f_{xy} & f_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}.$$

Das fórmulas (1.4) resulta que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} L &= \frac{y f_{xx} - f_y}{w y^3}, \\ M &= \frac{y f_{xy} + f_x}{w y^3}, \\ N &= \frac{y f_{yy} + f_y}{w y^3}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e, portanto, temos que a função curvatura média H da superfície \mathcal{M} , representada como gráfico da função $f(x, y)$, é dada, usando a equação (1.6), por

$$H = \frac{y^2}{2} \text{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + y^2 |\nabla f|^2}} \right) = \frac{1}{2} \text{div}_{\mathbb{H}^2} \left(\frac{\nabla f}{w} \right), \quad (2.9)$$

onde $\text{div}_{\mathbb{H}^2}$ representa a divergência em $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$. Portanto, a equação (2.6) significa curvatura média nula e as superfícies de área mínima são mínimas no sentido da definição dada no começo.

Observação 2.1.1. A equação (2.6) é, naturalmente, a mesma achada por B. Nelli e H. Rosenberg ([NR]) para o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tomando como modelo para o plano hiperbólico o disco de Poincaré de raio 1:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)|^2 < 1\}.$$

De fato, munindo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ da métrica invariante à esquerda dada por

$$g_D = \frac{dx^2 + dy^2}{F^2} + dz^2,$$

onde $F = \frac{1-x^2-y^2}{2}$, a equação dos gráficos mínimos resulta em

$$\text{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + F^2 |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

Pelo que vimos, as superfícies com $H = 0$ são exatamente os pontos críticos da função área $A(t)$. Para determinar a natureza destes pontos precisamos estudar a segunda variação da função área $A''(0)$. Dizemos que uma superfície \mathcal{M} é *estável* se $A''(0) > 0$, para toda variação de \mathcal{M} que fixa a fronteira $\partial\mathcal{M}$ de \mathcal{M} . Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.2. *Todo gráfico mínimo \mathcal{M} em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é estável.*

Demonstração. Derivando a equação (2.3) e avaliando em $t = 0$, temos a seguinte expressão para a segunda variação da área:

$$A''(0) = \iint_{\bar{\Omega}} \frac{h_x^2 + h_y^2 + (yh_x f_y - yh_y f_x)^2}{(w y^2)^3} dx dy \geq 0.$$

Observamos que $A''(0) = 0$ se, e somente se, $h_x = h_y = 0$. Mas, como $h|_{\partial\Omega} = 0$, resulta que, neste caso, $h = 0$. Ou seja, \mathcal{M} é um mínimo local de área. \square

O teorema a seguir é um resultado mais forte da Proposição 2.1.2 e afirma que uma superfície mínima de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada como gráfico é um mínimo absoluto para a função área, entre as superfícies que são gráficos. Para a demonstração, vamos seguir de perto a idéia de R. Osserman para a prova deste teorema no caso do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 (veja [GDG], página 73).

Teorema 2.1.3. *Seja \mathcal{M} uma superfície mínima de $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ definida como gráfico de uma função $f(x, y)$ com $(x, y) \in \Omega$, domínio de \mathbb{H}^2 , que se estenda continuamente a $\bar{\Omega}$. Então, a área de \mathcal{M} é menor que a área de qualquer outra superfície $\tilde{\mathcal{M}}$ definida como gráfico de uma função $\tilde{f}(x, y)$ em Ω que assuma os mesmos valores de f na fronteira $\partial\Omega$.*

Demonstração. No domínio $\Omega \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, consideramos o campo de vetores unitário $V(x, y, z)$ dado por

$$V = -\frac{f_x}{w y} E_1 - \frac{f_y}{w y} E_2 + \frac{1}{w y^2} E_3,$$

onde

$$w = \frac{\sqrt{y^2(f_x^2 + f_y^2) + 1}}{y^2}.$$

Escrevendo $V = V^i (\partial/\partial x_i)$ e indicando por $\operatorname{div}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}$ a divergência em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, temos que

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} V = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{|g|} V^i) = y^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-f_x}{w y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-f_y}{w y^2} \right) \right],$$

onde $|g| = \det(g_{ij}) = 1/y^4$. Logo, como $f(x, y)$ satisfaz a equação (2.5), temos

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} V \equiv 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}.$$

As superfícies \mathcal{M} e $\widetilde{\mathcal{M}}$ têm o mesmo bordo e portanto $\mathcal{M} \cup \widetilde{\mathcal{M}}$ pode-se considerar como o bordo orientado de um dado conjunto aberto Θ em $\Omega \times \mathbb{R}$. Indicando por η o campo unitário normal correspondente à orientação positiva de $\mathcal{M} \cup \widetilde{\mathcal{M}}$ e usando o Teorema da Divergência, temos que:

$$0 = \int_{\Theta} \operatorname{div}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} V = \int_{\mathcal{M} \cup \widetilde{\mathcal{M}}} g(V, \eta) dA. \quad (2.10)$$

Da definição do vetor V segue que

$$V \equiv \eta \quad \text{em } \mathcal{M}$$

logo, da equação (2.10) resulta

$$A(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} g(V, \eta) dA = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g(V, -\eta) dA \leq \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} dA = A(\widetilde{\mathcal{M}}),$$

onde, na última desigualdade foi usado o fato de que V e η são campos ambos unitários. Além disso, vale a igualdade quando $g(V, -\eta) = 1$, ou seja, se:

$$\widetilde{f}_x = f_x \quad e \quad \widetilde{f}_y = f_y.$$

Como $f|_{\partial\Omega} = \widetilde{f}|_{\partial\Omega}$, isto implica:

$$\widetilde{f}(x, y) = f(x, y)$$

e o teorema fica assim demonstrado. \square

Observação 2.1.4. Queremos observar que este mesmo teorema pode-se demonstrar também no espaço de Heisenberg \mathbb{H}_3 com a métrica dada por:

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy \right)^2.$$

De fato, neste caso, temos que uma superfície dada como gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$, onde $(x, y) \in \Omega \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{H}_3 : z = 0\}$, é mínima se satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) = 0,$$

onde

$$w = \sqrt{1 + \left(f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2} \right)^2}.$$

Tomando como vetor V o campo normal unitário à superfície:

$$V = - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{1}{w} + \frac{y}{2} \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) - \frac{x}{2} \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) \right] \frac{\partial}{\partial z},$$

sendo que $|g| = \det(g_{ij}) = 1$, resulta:

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}_3} V = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) \equiv 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Isto basta para completar a demonstração.

Vamos agora apresentar alguns exemplos de gráficos mínimos. Devido à complexidade da equação (2.7), vamos verificar se existem soluções com propriedades adicionais que simplifiquem o problema.

Exemplo 2.1.5. Se procurarmos soluções da equação (2.7) na forma $f(x, y) = \varphi(x)$, onde φ depende apenas de x , temos que $\ddot{\varphi}(x) = 0$ e portanto $\varphi(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Estes são os únicos gráficos planos em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que são mínimos.

Exemplo 2.1.6. Se agora procurarmos solução do tipo $f(x, y) = \psi(y)$, onde ψ depende apenas de y , a equação (2.7) toma a forma

$$\ddot{\psi}(y) - y \dot{\psi}(y)^3 = 0,$$

cuja integração (se $\dot{\psi} \neq 0$) resulta em

$$\psi(y) = \arcsen(ay) + b, \quad 0 < y \leq 1/a, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

A Figura 2.1 mostra uma imagem de tal superfície.

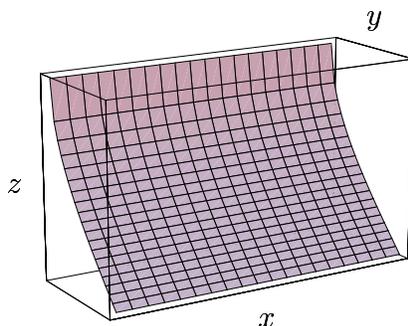


Figura 2.1. Superfície mínima em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.7. Impondo que a solução da equação (2.7) seja do tipo

$$f(x, y) = h\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

a condição de mínima se transforma na seguinte condição sobre a função real $h(z)$

$$h''(z) - z h'(z)^3 = 0.$$

Integrando a equação acima temos que:

$$h(z) = \arcsen(az) + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

e, portanto,

$$f(x, y) = \arcsen\left(\frac{ay}{x^2 + y^2}\right) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Parametrizando esta superfície em coordenadas cilíndricas temos:

$$X(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \arcsen\left(\frac{a \sin \theta}{r}\right) + b\right), \quad r \geq |a|, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Um desenho desta superfície é mostrado na Figura 2.2.

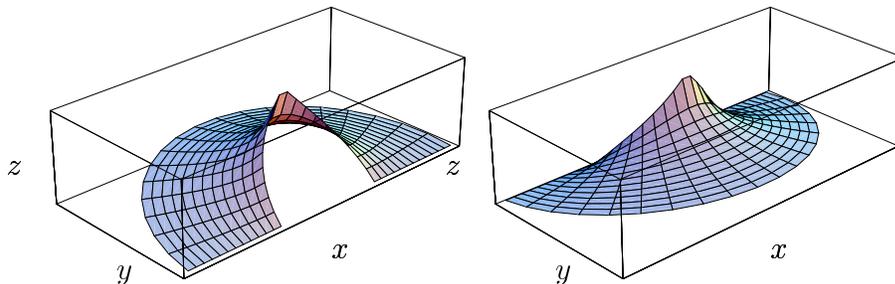


Figura 2.2.

Exemplo 2.1.8. Seja agora $f(x, y)$ uma solução da equação (2.7) do tipo

$$f(x, y) = \frac{a(x)}{x^2 + y^2},$$

onde $a(x)$ é uma certa função real. A condição de mínima nos dá

$$[(x^2 + y^2)^4 + 4y^4 a(x)^2] a''(x) - 4(x^2 + y^2)^3 [x a'(x) - a(x)] = 0.$$

Reescrevendo o lado esquerdo desta equação como um polinômio em y , cujos coeficientes são funções de x , obtemos que

$$a''(x) = 0 \quad \text{e} \quad x a'(x) - a(x) = 0.$$

Conseqüentemente $a(x) = cx$, com $c \in \mathbb{R}$ e

$$f(x, y) = \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Observe que esta função é harmônica em \mathbb{R}^2 . Na Figura 2.3 temos um desenho desta superfície parametrizada em coordenadas cilíndricas por:

$$X(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{c \cos \theta}{r} \right), \quad r > 0, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Exemplo 2.1.9. Impondo que a solução da equação (2.7) seja do tipo

$$f(x, y) = h\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right),$$

a condição de mínima simplesmente nos dá

$$h''(z) = 0.$$

Portanto, integrando a equação acima temos que

$$h(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

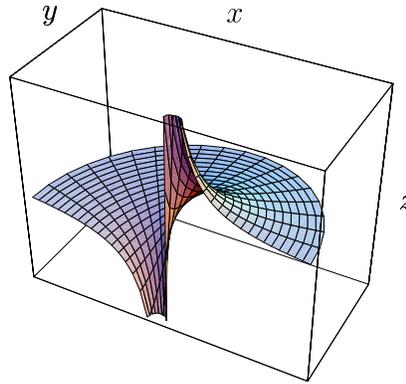


Figura 2.3.

e

$$f(x, y) = \frac{ax}{x^2 + y^2} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Observe-se que esta função $f(x, y)$ é harmônica em \mathbb{R}^2 e que a superfície correspondente é obtida transladando a superfície do Exemplo 2.1.8 na direção z .

Exemplo 2.1.10. A função

$$f(x, y) = a \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}\right) + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

é um gráfico mínimo e representa o *helicóide* de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja a Figura 2.4). O nome é devido ao fato de que esta superfície é regrada por geodésicas que giram em torno da reta vertical $(0, 1, z)$; este fato será esclarecido na página 24. É importante observar que também esta função é harmônica em \mathbb{R}^2 .

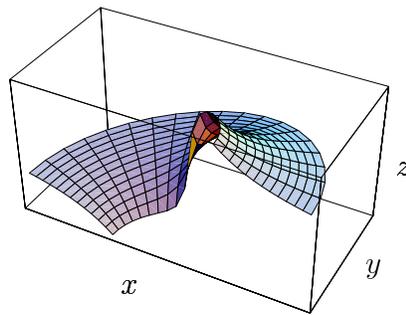


Figura 2.4. Helicóide de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.11. Vamos agora supor que a função f seja do tipo

$$f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right),$$

para uma certa função real $h(z)$. Substituindo na equação dos gráficos mínimos, resulta que

$$(1 + z^2)h''(z) - z(1 + z^2)h'(z)^3 + 2zh'(z) = 0.$$

Se $h'(z) \neq 0$, dividindo por $(1 + z^2)h'(z)^3$, temos

$$\left(\frac{1}{h'(z)^2}\right)' + 2z - \frac{4z}{(1+z^2)}\frac{1}{h'(z)} = 0.$$

Isto implica que

$$\frac{1}{h'(z)^2} = 1 + z^2 + c(1 + z^2)^2, \quad c \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$h(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2 + c(1 + z^2)^2}} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Se a constante $c = 0$, resulta

$$h(z) = \operatorname{arcsenh}(z) + c_1.$$

Na Figura 2.5 é dado um desenho da superfície

$$f(x, y) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{y}{x}\right) + c_1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

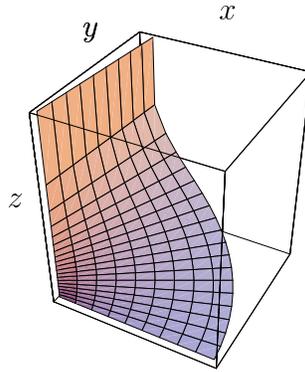


Figura 2.5.

Definição 2.1.12. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{H}^2$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gráfico da função f sobre Ω em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é $\Gamma(\Omega, f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$. Este gráfico é dito *completo* se $\Omega = \mathbb{H}^2$.

Em 1916, S. Bernstein demonstrou o seguinte resultado: se uma superfície mínima é um gráfico completo no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , então ela é um plano. Este teorema não vale para o espaço de Heisenberg (veja [F]), nem para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (o Exemplo 2.1.9 mostra este fato). Mais em geral, B. Nelli e H. Rosenberg mostraram o seguinte teorema:

Teorema 2.1.13 ([NR]). *Consideramos o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{H}^2 é o modelo do plano hiperbólico dado pelo disco de Poincaré de raio 1. Seja γ uma curva de Jordan contínua no bordo ideal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, dado por $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{x^2 + y^2 = 1\} \times \mathbb{R}$, que é também gráfico sobre $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Então existe um gráfico mínimo sobre \mathbb{H}^2 que tem γ como bordo ideal.*

Exemplo 2.1.14. Podemos obter um outro exemplo de gráfico mínimo completo procurando soluções da equação (2.7) do tipo

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2).$$

Neste caso a condição de mínima reduz-se a

$$z h''(z) + h'(z) = 0.$$

A solução geral desta equação é dada por

$$h(z) = a \ln z + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

e portanto

$$f(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

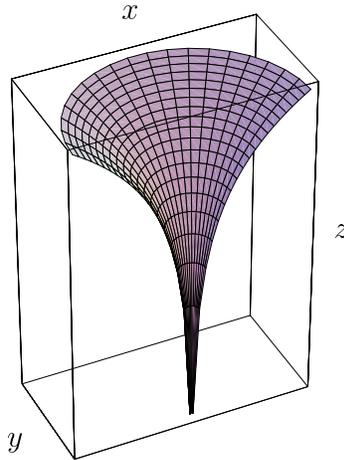


Figura 2.6. Superfície afunilada.

Esta superfície, chamada *superfície afunilada* (veja a Figura 2.6), fornece uma solução ao problema de determinar as soluções da equação (2.7) cuja curvas de nível $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, sejam geodésicas de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$. De fato, olhando uma imagem desta superfície pela direção do eixo z (cf. Figura 2.7), podemos ver que a curva $f(x, y) = c$ é a semi-circunferência

$$x^2 + y^2 = e^{\frac{(c-b)}{a}}, \quad y > 0.$$

Motivados por esta propriedade da superfície afunilada, vamos estudar o seguinte problema:

caracterizar os gráficos mínimos de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ do tipo:

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{H}^2,$$

cujas curvas de nível $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, são geodésicas de \mathbb{H}^2 .

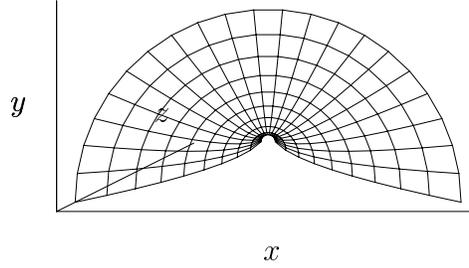


Figura 2.7. Curvas de nível da superfície afunilada.

Seja, portanto, $z = f(x, y)$ um gráfico mínimo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cujas curvas de nível $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ são geodésicas de \mathbb{H}^2 . Se a função $x(t)$ for constante, temos que $f_y = 0$ e, portanto, do Exemplo 2.1.5 segue-se que a superfície é um pedaço do plano $\phi(x, y) = (x, y, ax + b)$, onde $y > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ (veja a Figura 2.8).

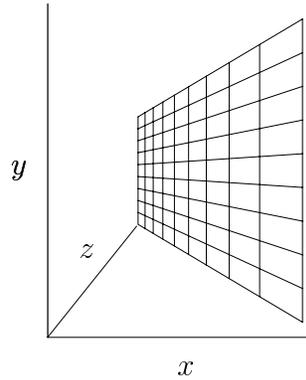


Figura 2.8. Curvas de nível do semi-plano $z = 3x + 1, y > 0$.

Caso contrário, existe um ponto t_0 tal que $\dot{x}(t) \neq 0$ em uma vizinhança de t_0 e, portanto, podemos representar γ da seguinte forma:

$$\gamma(x) = (x, y(x)), \quad y(x) > 0,$$

em uma vizinhança do ponto $\gamma(t_0)$. Temos que

$$\gamma'(x) = \frac{E_1}{y(x)} + \frac{y'(x)}{y(x)} E_2,$$

e

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = -\frac{2y'(x)}{y(x)^2} E_1 + \left(\frac{y(x)y''(x) - y'(x)^2 + 1}{y(x)^2} \right) E_2.$$

Portanto, usando a fórmula (1.8), a curvatura geodésica k_g da curva γ é dada por

$$k_g = \frac{y(x)y''(x) + y'(x)^2 + 1}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}.$$

Desta equação segue que $k_g = 0$ se, e somente se,

$$[y(x)y'(x)]' + 1 = 0,$$

ou seja,

$$y(x) = \sqrt{-x^2 + 2ax - b}, \quad \text{onde } b < a^2.$$

Conseqüentemente, $k_g = 0$ se, e somente se, a curva $\gamma(x)$ é uma semi-circunferência geodésica de \mathbb{H}^2 . Lembrando que

$$y''(x) = -\frac{f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}(y')^2}{f_y} \quad \text{com} \quad y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))},$$

resulta que a equação (2.7) dos gráficos mínimos pode ser reescrita como

$$f_{xx} + f_{yy} = y(x) k_g |\nabla f|_{\mathbb{R}^2}^3,$$

onde $\nabla f = (f_x, f_y)$. Portanto, temos demonstrado a seguinte proposição:

Proposição 2.1.15. *Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície mínima dada como gráfico de uma função diferenciável não constante $f(x, y)$, onde $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{H}^2$. Então as curvas de nível de f são geodésicas de \mathbb{H}^2 , i.e. $k_g \equiv 0$ se, e somente se, a função $f(x, y)$ é harmônica em \mathbb{R}^2 , ou seja,*

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

O helicóide do Exemplo 2.1.10 é um outro exemplo de gráfico mínimo cuja curva de nível $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, é a semi-circunferência de \mathbb{H}^2 dada por

$$(x - \tilde{c})^2 + y^2 = 1 + \tilde{c}^2, \quad y > 0.$$

Esta possui centro em $(\tilde{c}, 0)$ e raio $\sqrt{1 + \tilde{c}^2}$, onde $\tilde{c} = \cot\left(\frac{c-b}{a}\right)$, $a \neq 0$. Observe que todas as curvas de nível interceptam a reta vertical $(0, 1, z)$. Também o Exemplo 2.1.9 fornece uma solução ao problema tratado acima.

2.2 Minimalidade e harmonicidade

Neste parágrafo vamos estudar as relações que existem entre a minimalidade de uma superfície $\mathcal{M} \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ dada como gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$ e a harmonicidade da mesma f , com respeito à métrica induzida por g em \mathcal{M} . Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1. *Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície mínima dada como gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$, onde $(x, y) \in \Omega$, domínio de \mathbb{H}^2 , ou seja*

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Então \mathcal{M} é mínima se, e somente se, a função $f(x, y) : \Omega \subseteq \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica respeito à métrica induzida por g em \mathcal{M} .

Demonstração. A métrica que $g = (dx^2 + dy^2)/y^2 + dz^2$ induz em \mathcal{M} é dada por

$$h = \left(f_x^2 + \frac{1}{y^2} \right) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + \left(f_y^2 + \frac{1}{y^2} \right) dy^2.$$

A matriz inversa da matriz (h_{ij}) associada a esta métrica é dada por

$$(h^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1 + y^2 f_y^2}{y^2 w^2} & -\frac{f_x f_y}{w^2} \\ -\frac{f_x f_y}{w^2} & \frac{1 + y^2 f_x^2}{y^2 w^2} \end{pmatrix},$$

portanto, substituindo as relativas expressões na fórmula que define o operador de Beltrami-Laplace (calculado com respeito à métrica h),

$$\Delta_h = \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(h^{ij} \sqrt{|h|} \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \quad \text{onde} \quad |h| = \det(h_{ij}) = w^2,$$

temos que

$$w \Delta_h(f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{w y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{w y^2} \right).$$

Observe que, em termos da função curvatura média H de \mathcal{M} (veja a equação (2.9)), podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$y^2 w \Delta_h(f) = 2H,$$

ou equivalentemente

$$\Delta_h(f) = 2H^3, \tag{2.11}$$

onde $\mathbf{H} = H\xi = (H^1, H^2, H^3)$ é o vetor curvatura média. A proposição fica assim demonstrada. \square

Vamos dar, em seguida, algumas definições que nos ajudam a entender melhor o sentido desta proposição.

Definição 2.2.2. Uma aplicação diferenciável $\psi : (\mathcal{M}^m, h) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g)$ é harmônica se satisfaz as equações de Euler-Lagrange:

$$\tau_\psi^\alpha = \Delta_h \psi^\alpha + h^{ij} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^\gamma}{\partial x^j} = 0, \quad (\alpha = 1 \dots, n), \tag{2.12}$$

onde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita de \mathcal{N} e Δ_h é o operador de Beltrami-Laplace.

Lembremos que τ_ψ é dito *campo de tensão* de ψ e a (2.12) *Equação Harmônica*.

Teorema 2.2.3 ([ES]). *Seja $\psi : (\mathcal{M}^m, h) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g)$ uma imersão isométrica. Então*

$$\tau_\psi = m \mathbf{H}. \tag{2.13}$$

Em particular, ψ é mínima se, e somente se, for harmônica.

Observamos que a Proposição 2.2.1 é, portanto, uma consequência deste teorema. De fato, se $m = 2$ e $\mathcal{N} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, sendo que no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^3 = 0$, com $\beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$, usando o Teorema 2.2.3 temos que $\Delta_h \psi^3 = 2H^3$. Ou seja,

Proposição 2.2.4. *Seja $\psi : (\mathcal{M}^2, h) \rightarrow (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ uma imersão isométrica. Se a superfície \mathcal{M} é mínima então a função ψ^3 é harmônica, i.e. $\Delta_h \psi^3 = 0$.*

Observação 2.2.5. Se $m = 2$ e $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$, temos que a equação (2.13) se reduz à equação de E. Beltrami:

$$\Delta_h \psi^i = 2H^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$, $\mathbf{H} = (H^1, H^2, H^3)$ é o vetor curvatura média. Em particular, \mathcal{M} é uma superfície mínima se, e somente se, as funções ψ^i são harmônicas.

Usando o Teorema 2.2.3 podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.2.6. *Não existem superfícies mínimas compactas e sem bordo no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja \mathcal{M} uma superfície mínima compacta e sem bordo e

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M} &\longrightarrow (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g) \\ p &\mapsto (\psi^1(p), \psi^2(p), \psi^3(p)) \end{aligned}$$

uma imersão da mesma em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Vamos indicar por $g_\psi = \psi^*g$ a métrica induzida por g em \mathcal{M} , que faz de ψ uma imersão isométrica. Como \mathcal{M} é mínima, pela Proposição 2.2.4, temos que $\Delta_{g_\psi} \psi^3 = 0$, o que é absurdo, sendo \mathcal{M} compacta. Isto é consequência imediata do Princípio do Máximo de Hopf [Ho], que vamos lembrar: *se uma função de classe C^2 é harmônica ou sub-harmônica em uma variedade Riemanniana e possui um máximo local, então deve ser constante.* \square

2.3 Superfícies umbílicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Vamos começar este parágrafo estudando as superfícies totalmente geodésicas. Para a demonstração do resultado que segue necessitamos da seguinte lema, cuja prova é a mesma que no caso do espaço \mathbb{R}^3 .

Lema 2.3.1. *Seja \mathcal{M} uma superfície regular em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então, existe um aberto denso em \mathcal{M} , cujas componentes conexas podem ser parametrizadas em uma das seguintes formas:*

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, v, f(u, v)), & v > 0, \\ X(u, v) &= (u, a(u), v), & a(u) > 0, \\ X(u, v) &= (c, u, v), & u > 0. \end{aligned}$$

Estamos agora prontos para enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.3.2. *As únicas superfícies totalmente geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são os planos horizontais $z = c$, $c \in \mathbb{R}$, e os cilindros verticais sobre as geodésicas de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Começemos mostrando que o único gráfico totalmente geodésico do tipo $\Gamma(\Omega, f)$ é o plano horizontal $\phi(x, y) = (x, y, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Seja \mathcal{M} uma superfície totalmente geodésica parametrizada como gráfico de uma função diferenciável f . Das equações (2.8) temos

$$\begin{cases} f_{xx} = \frac{f_y}{y}, \\ f_{yy} = -\frac{f_y}{y}, \\ f_{xy} = -\frac{f_x}{y}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Primeiramente observamos que $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, satisfaz as condições acima e, portanto, o plano horizontal é totalmente geodésico. Segundo, já que

$$f_x = 0 \Leftrightarrow f_y = 0,$$

não existem gráficos totalmente geodésicos determinados por uma função $f(x, y)$ que dependa de só uma das variáveis, a não ser a função constante. Vamos, portanto, supor que $f_x \neq 0$ e $f_y \neq 0$. Da segunda equação do sistema (2.14) temos

$$(y f_y)_y = 0 \Rightarrow f_y = \frac{a(x)}{y},$$

e da terceira resulta que

$$(y f_x)_y = 0 \Rightarrow f_x = \frac{b(x)}{y},$$

para certas funções reais não-nulas $a(x)$ e $b(x)$. Como $f(x, y)$ deve satisfazer a primeira equação, isso nos leva à contradição

$$y b'(x) - a(x) = 0.$$

Para completar a demonstração, observemos que os cilindros verticais sobre as geodésicas de \mathbb{H}^2 são produtos de geodésicas. Portanto são superfícies totalmente geodésicas do espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Mostraremos em seguida que estes cilindros são as únicas superfícies verticais totalmente geodésicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Seja, portanto, \mathcal{M} uma superfície vertical. Do Lema 2.3.1 segue que ou ela é o plano totalmente geodésico $x = c$, com $y > 0$, ou pode-se parametrizá-la da seguinte forma

$$X(u, v) = (u, a(u), v), \quad a(u) > 0. \quad (2.15)$$

Neste último caso temos

$$X_u = \frac{1}{a} E_1 + \frac{\dot{a}}{a} E_2 \quad \text{e} \quad X_v = E_3,$$

e, portanto, a normal unitária à superfície \mathcal{M} é

$$\xi = \frac{\dot{a}}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} E_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} E_2. \quad (2.16)$$

Usando as equações (1.12) obteremos

$$\nabla_{X_u} \xi = \left[\left(\frac{\dot{a}}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} \right)_u + \frac{1}{a \sqrt{1 + \dot{a}^2}} \right] E_1 + \left[\frac{\dot{a}}{a \sqrt{1 + \dot{a}^2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} \right)_u \right] E_2,$$

$$\text{e } \nabla_{X_v} \xi = 0, \quad \text{portanto } M = N = 0.$$

Então a superfície \mathcal{M} é totalmente geodésica se, e somente se,

$$L = -g(\nabla_{X_u} \xi, X_u) = 0,$$

ou seja, a função $a(u)$ satisfaz a seguinte equação:

$$a \ddot{a} + \dot{a}^2 + 1 = 0.$$

Isto implica que

$$a(u) = \sqrt{-u^2 + 2c_1 u + c_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{com } c_1^2 + c_2 > 0,$$

e a curva $(u, a(u))$ é a geodésica de \mathbb{H}^2 dada pela semi-circunferência superior com centro em $(c_1, 0)$ e raio $\sqrt{c_1^2 + c_2}$. Isto conclui a prova do teorema. \square

Observação 2.3.3. Da demonstração anterior segue-se também que, se \mathcal{M} for uma superfície vertical, temos $F = M = N = 0$ e, portanto, a função curvatura média é dada por

$$H = \frac{L}{2E}.$$

Neste caso \mathcal{M} é uma superfície mínima se, e somente se, for totalmente geodésica, ou seja, se é um cilindro vertical sobre uma geodésica de \mathbb{H}^2 .

Teorema 2.3.4. *As superfícies umbílicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são exatamente as seguintes:*

1. as superfícies totalmente geodésicas;
2. as superfícies dadas como gráfico da função

$$f(x, y) = \arctan \left(\frac{\lambda(x, y)}{\sqrt{j - \lambda(x, y)^2}} \right) + c_4,$$

onde

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{y} \left[\frac{c}{2}(x^2 + y^2) + c_1 x - c_3 \right], \quad c, c_1, c_3, c_4 \in \mathbb{R},$$

$$j = 1 - c_1^2 - 2c c_3 > 0.$$

Demonstração. Seja \mathcal{M} uma superfície umbílica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada como gráfico de uma função diferenciável f , i.e. $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Seja $p \in \mathcal{M}$ e ξ um campo normal unitário em uma vizinhança U do ponto p . Sendo \mathcal{M} umbílica, existe uma função $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $A_\xi = \lambda I$ em U . A matriz que representa a segunda forma fundamental de \mathcal{M} em p na base $\{\phi_x, \phi_y\}$ é

$$A_\xi(p) = \begin{pmatrix} \left(\frac{f_x}{w}\right)_x - \frac{f_y}{yw} & y\left(\frac{f_x}{yw}\right)_y \\ \left(\frac{f_y}{w}\right)_x + \frac{f_x}{yw} & y\left(\frac{f_y}{yw}\right)_y \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é múltiplo da matriz identidade se, e somente se,

$$\begin{cases} \left(\frac{f_x}{wy}\right)_y = 0, \\ \left(\frac{f_y}{w}\right)_x = -\frac{f_x}{wy}, \\ \left(\frac{f_x}{w}\right)_x = \left(\frac{f_y}{w}\right)_y. \end{cases} \quad (2.17)$$

Da primeira equação de (2.17) temos que

$$\frac{f_x}{yw} = a(x)$$

para uma certa função $a(x)$. Portanto, usando a segunda equação resulta:

$$\frac{f_y}{w} = -\int a(x) dx + b(y),$$

para alguma função $b(y)$. A terceira equação do sistema nos permite concluir que $y \dot{a}(x) = \dot{b}(y)$ ou seja,

$$a(x) = cx + c_1, \quad b(y) = c\frac{y^2}{2} + c_2,$$

com $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente

$$\frac{f_y}{w} = \frac{c}{2}(y^2 - x^2) - c_1 x + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R},$$

e

$$\lambda(x, y) = y \left(\frac{f_y}{wy}\right)_y = \frac{1}{y} \left[\frac{c}{2}(x^2 + y^2) + c_1 x - c_3 \right].$$

Usando agora a equação de Codazzi para hipersuperfícies

$$(\mathbb{R}(\phi_x, \phi_y)\xi)^\top = (\nabla_{\phi_y} A_\xi)\phi_x - (\nabla_{\phi_x} A_\xi)\phi_y, \quad (2.18)$$

temos, para o caso umbílico, que

$$(\nabla_{\phi_x} A_\xi)\phi_y = \nabla_{\phi_x} A_\xi(\phi_y) - A_\xi(\nabla_{\phi_x} \phi_y) = \phi_x(\lambda)\phi_y,$$

e, portanto,

$$(\mathbb{R}(\phi_x, \phi_y)\xi)^\top = \phi_y(\lambda)\phi_x - \phi_x(\lambda)\phi_y.$$

Usando as equações (2.1) resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\phi_x, \phi_y)\xi &= \nabla_{\phi_x} \nabla_{\phi_y} \xi - \nabla_{\phi_y} \nabla_{\phi_x} \xi - \nabla_{[\phi_x, \phi_y]} \xi \\ &= \frac{f_y}{w y^3} E_1 - \frac{f_x}{w y^3} E_2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$g(\mathbb{R}(\phi_x, \phi_y)\xi, \xi) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{R}(\phi_x, \phi_y)\xi = (\mathbb{R}(\phi_x, \phi_y)\xi)^\top.$$

Substituindo na equação (2.18) temos

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{f_x}{w y^2}, \\ \lambda_y = \frac{f_y}{w y^2}. \end{cases} \quad (2.19)$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{w y^2}\right)_y &= -y \left[f_x \left(\frac{f_x}{w y}\right)_y + f_y \left(\frac{f_y}{w y}\right)_y \right] \\ &= -y [f_x (y\lambda_x)_y + f_y (y\lambda_y)_y] \\ &= -y (y\lambda_y)_y f_y = -\lambda f_y, \end{aligned}$$

onde foi usado o fato de que $y\lambda_x = (cx + c_1)$ e $\lambda = y(y\lambda_y)_y$. Logo,

$$\frac{(w y^2)_y}{(w y^2)^3} = \lambda \lambda_y$$

e, portanto, integrando com respeito a y , resulta

$$\lambda^2 = j(x) - \frac{1}{(w y^2)^2}, \quad (2.20)$$

para uma certa função positiva $j(x)$. Da mesma forma, usando (2.19), temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{w y^2}\right)_x &= - \left[f_x \left(\frac{f_x}{w}\right)_x + f_y \left(\frac{f_y}{w}\right)_x \right] \\ &= -y^2 [f_x \lambda_{xx} + f_y \lambda_{xy}] \\ &= -w y^4 (\lambda_x \lambda_{xx} + \lambda_y \lambda_{xy}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(w y^2)_x}{(w y^2)^3} = \frac{y^2}{2} (\lambda_x^2 + \lambda_y^2)_x$$

e portanto, integrando com respeito a x , temos

$$y^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) = k(y) - \frac{1}{(w y^2)^2}, \quad (2.21)$$

para uma certa função positiva $k(y)$. Além disso, de (2.19), temos que

$$y^2 (f_x^2 + f_y^2) = k(y) (w y^2)^2 - 1,$$

ou seja

$$(k(y) - 1) (w y^2)^2 = 0.$$

Portanto $k(y) = 1$ e, comparando as equações (2.20) e (2.21), segue-se

$$j(x) - k(y) = \lambda^2 - y^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) = -c_1^2 - 2c c_3,$$

ou seja, $j(x) = 1 - c_1^2 - 2c c_3 > 0$. De (2.20) resulta que:

$$y^2 w = \frac{1}{\sqrt{j - \lambda^2}}.$$

Substituindo esta expressão na primeira equação do sistema (2.19), temos que

$$f(x, y) = \int \frac{\lambda_x}{\sqrt{j - \lambda^2}} dx = \arctan \left(\frac{\lambda}{\sqrt{j - \lambda^2}} \right) + h(y),$$

para uma certa função $h(y)$. Usando a segunda equação do sistema (2.19), segue-se que $h(y) = c_4$, com $c_4 \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente, obtemos os gráficos do segundo item do teorema. Observe-se que se $c = c_1 = c_3 = 0$, então temos o plano totalmente geodésico $f(x, y) = c_4$. No caso em que $c = c_1 = 0$, obtemos a superfície

$$f(x, y) = \arcsen \left(-\frac{c_3}{y} \right) + c_4, \quad y \geq |c_3| > 0.$$

Na Figura 2.9 temos um desenho desta superfície para $c_3 = -1$.

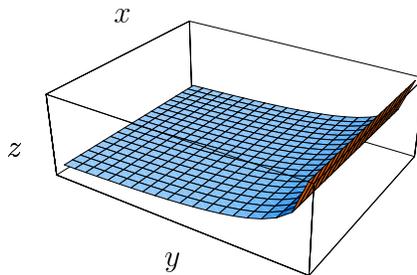


Figura 2.9. Superfície umbílica do espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Para terminar a demonstração, falta estudar o caso da superfície \mathcal{M} ser vertical. Neste caso, do Lema 2.3.1, segue-se que ou \mathcal{M} é o plano totalmente geodésico $x = c$, ou então pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$X(u, v) = (u, a(u), v), \quad a(u) > 0.$$

Neste segundo caso temos

$$A_\xi X_v = -\nabla_{X_v} \xi = 0$$

e portanto $\lambda = 0$. Conseqüentemente, do Teorema 2.3.2, \mathcal{M} é a superfície totalmente geodésica dada por um cilindro vertical sobre uma geodésica do plano \mathbb{H}^2 . Assim o teorema fica demonstrado. \square

2.4 A aplicação normal de Gauss

Seja G um grupo de Lie de dimensão $(n+1)$ com uma métrica g invariante à esquerda e \mathcal{M}^n uma hipersuperfície orientável de G . Sendo e o elemento neutro de G , definimos a aplicação normal de Gauss

$$\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^n \subset T_e G,$$

onde \mathbb{S}^n denota a esfera unitária com centro na origem de $T_e G$, da seguinte forma:

$$\gamma(p) = (dL_{p^{-1}})_p(\xi(p)), \quad p \in \mathcal{M},$$

onde $L_p : G \rightarrow G$ é a translação à esquerda $L_p(q) = pq$ e ξ é um campo unitário normal a \mathcal{M} em G . Observamos que L_p é uma isometria e que

$$\begin{aligned} d\gamma_p(T_p \mathcal{M}) &\subseteq T_{\gamma(p)} \mathbb{S}^n \\ &= \{\gamma(p)\}^\perp = (dL_{p^{-1}})_p(\xi(p)^\perp) \\ &= (dL_{p^{-1}})_p(T_p \mathcal{M}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Conseqüentemente

$$(dL_p)_e(d\gamma_p(T_p \mathcal{M})) \subseteq T_p \mathcal{M}$$

e, portanto, $(dL_{(\cdot)})_e \circ d\gamma$ é um tensor em $T\mathcal{M}$.

Seja agora $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda. Escrevendo

$$\xi = \sum_{i=1}^{n+1} n_i E_i,$$

observamos que

$$\gamma(p) = \sum_{i=1}^{n+1} n_i(p) E_i(e).$$

Decorre daí que se $v \in T_p\mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$, então

$$d\gamma_p(v) = \sum_{i=1}^{n+1} v(n_i)(p) E_i(e)$$

e

$$(dL_p)_e \circ d\gamma_p(v) = \sum_{i=1}^{n+1} v(n_i)(p) E_i(p). \quad (2.23)$$

Vamos ver o que acontece no nosso caso, ou seja, quando

$$\begin{cases} G = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \\ g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2, \\ \mathcal{M}^2 \text{ dada por } \phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \end{cases} \quad (2.24)$$

onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável definida em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{H}^2$. Da equação (2.2) temos que a aplicação normal de Gauss

$$\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$$

é dada por

$$\gamma(p) = \left(\frac{-f_x}{wy} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{-f_y}{wy} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{wy^2} \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Lembrando que as translações à esquerda são as transformações

$$\begin{aligned} L_p : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \\ L_p(q) &= (x, y, z) * (x', y', z') = (x'y + x, yy', z + z'), \end{aligned}$$

temos que

$$dL_p = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz que representa o operador

$$(dL_p)_e \circ d\gamma_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$$

na base $\{\phi_x, \phi_y\}$ de $T_p\mathcal{M}$ (veja equações (2.1)) é

$$(dL_p)_e \circ d\gamma_p = y \begin{pmatrix} \left(\frac{-f_x}{wy} \right)_x & \left(\frac{-f_x}{wy} \right)_y \\ \left(\frac{-f_y}{wy} \right)_x & \left(\frac{-f_y}{wy} \right)_y \end{pmatrix},$$

cujo determinante é

$$\begin{aligned} \det((dL_p)_e \circ d\gamma_p) &= \frac{y(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) + (f_y f_{xx} - f_x f_{xy})}{y^5 w^4} \\ &= \frac{(yf_y)_y f_{xx} - (yf_x)_y f_{xy}}{y^4 w^4}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde, lembramos,

$$w = \frac{\sqrt{y^2(f_x^2 + f_y^2) + 1}}{y^2}.$$

Teorema 2.4.1. *As superfícies conexas do espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cuja aplicação normal de Gauss tem posto 0 são:*

(i) *as superfícies do tipo*

$$\phi(x, y) = (x, y, c_1 \ln y + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

que incluem os planos horizontais.

(ii) *As do tipo*

$$\phi(x, y) = (x, c_1 x + c_2, y), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(iii) *Os planos verticais $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja \mathcal{M} uma superfície de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ localmente parametrizada como gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{H}^2,$$

e vamos supor também que $f_x \neq 0$. Se existir um ponto $p \in \mathcal{M}$ degenerado, ou seja tal que $d\gamma_p \equiv 0$, então $(dL_{p^{-1}})_p(T_p\mathcal{M})$ é uma subálgebra da álgebra de Lie de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja [R]). Mas é imediato verificar que

$$\begin{aligned} [(dL_{p^{-1}})_p \phi_x, (dL_{p^{-1}})_p \phi_y] &= \left[\frac{E_1(e)}{y} + f_x E_3(e), \frac{E_2(e)}{y} + f_y E_3(e) \right] \\ &= \frac{E_1(e)}{y^3} \notin (dL_{p^{-1}})_p(T_p\mathcal{M}). \end{aligned}$$

De fato, se existir

$$v = a \phi_x + b \phi_y = \frac{a}{y} E_1 + \frac{b}{y} E_2 + (af_x + bf_y) E_3 \in T_p\mathcal{M}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

tal que

$$(dL_{p^{-1}})_p(v) = \frac{E_1(e)}{y^3},$$

temos que $a = 1/y^2$, $b = 0$ e $af_x = 0$, logo obtemos uma contradição.

Vamos estudar agora o caso em que $f_x = 0$, ou seja a função $f(x, y) = a(y)$, onde $a(y)$ é uma certa função. O campo normal unitário a \mathcal{M}

$$\xi = -\frac{y\dot{a}}{\sqrt{1+y^2\dot{a}^2}} E_2 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2\dot{a}^2}} E_3$$

é constante se, e somente se, resulta

$$y\dot{a} = \text{cte} = c_1$$

o que implica

$$a(y) = c_1 \ln y + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, portanto, temos as superfícies do item (i) do teorema. No caso em que a superfície seja vertical do tipo

$$\phi(u, v) = (u, a(u), v), \quad a(u) > 0,$$

temos que a normal unitária à superfície (veja a equação (2.16)),

$$\xi = \frac{\dot{a}}{\sqrt{1+\dot{a}^2}} E_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\dot{a}^2}} E_2,$$

é constante se, e somente se,

$$\dot{a} = c_1, \quad \text{o que implica} \quad a(u) = c_1 u + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Logo, obtemos os planos do item (ii) do teorema. É simples ver que a normal unitária ao plano vertical $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, é constante e dada por $\xi = E_1$. Isto termina a demonstração. \square

Observação 2.4.2. Observemos que as superfícies de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, cuja aplicação normal de Gauss tem posto 0, são regradas. De fato, reparametrizando as superfícies do item (i) do Teorema 2.4.1 como

$$\phi(x, y) = (x, e^y, c_1 y + c_2),$$

as curvas $\phi(x_0, y)$ são geodésicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja o parágrafo 1.4). Os planos verticais do item (ii) são regrados pelas retas verticais $\phi(x_0, y)$ (veja Figura 2.10). Os planos $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, são regrados tanto por retas verticais, como por semi-retas horizontais do tipo $\gamma(x) = (c, e^x, y_0)$, que também são geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Corolário 2.4.3. *As únicas superfícies mínimas do espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, cujas aplicações normais de Gauss têm posto 0, são os planos verticais $x = c$ e os planos horizontais $z = c$, com $c \in \mathbb{R}$.*

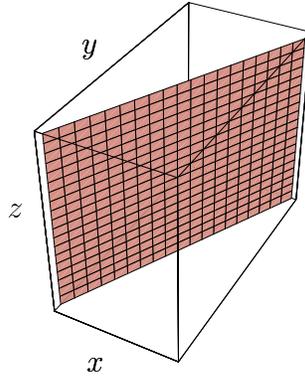


Figura 2.10. Plano vertical $y = 3x - 2$.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que a superfície

$$\phi(x, y) = (x, y, c_1 \ln y + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

é mínima se, e somente se, $c_1 = 0$. Ou seja, apenas se ela for o plano horizontal $z = c_2$. Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, temos

$$E = \frac{1}{y^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{1 + c_1^2}{y^2};$$

portanto, a curvatura média vale

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{E N + G L}{E G} \right).$$

Das equações (2.8) temos que

$$N = 0 \quad \text{e} \quad L = -\frac{c_1}{y^2 \sqrt{1 + c_1^2}},$$

portanto,

$$H = \frac{L}{2E} = -\frac{c_1}{2\sqrt{1 + c_1^2}} = 0 \iff c_1 = 0.$$

Vamos agora estudar a minimalidade dos planos dados por

$$\phi(x, y) = (x, c_1 x + c_2, y), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

Os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais são

$$E = \frac{1 + c_1^2}{(c_1 x + c_2)^2}, \quad F = 0, \quad G = 1;$$

$$L = -\frac{\sqrt{1 + c_1^2}}{(c_1 x + c_2)^2}, \quad M = N = 0.$$

Logo

$$H = \frac{L}{2E} = -\frac{1}{2\sqrt{1+c_1^2}} < 0.$$

Assim, podemos concluir que estes planos não são mínimos em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Por último, notamos que os planos verticais $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, são totalmente geodésicos e, portanto, mínimos. Isto termina a prova. \square

Observação 2.4.4. O plano $f(x, y) = ax + b$, com $a \neq 0$, a superfície afunilada do Exemplo 2.1.14 e os gráficos dos Exemplos 2.1.6 e 2.1.11 são superfícies mínimas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cuja aplicação normal de Gauss tem posto 1.

Na Figura 2.11 temos o desenho da curva que é a imagem da superfície afunilada através da aplicação normal de Gauss. Observe que nesta curva omite o pólo norte da esfera.

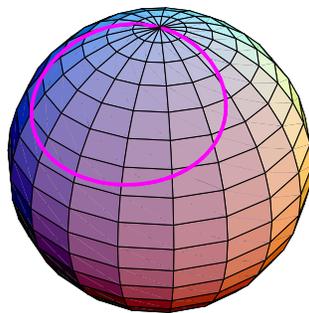


Figura 2.11.

Os gráficos mínimos estudados nos Exemplos 2.1.7, 2.1.9 e o helicóide têm aplicações de Gauss de posto 2.

Capítulo 3

O problema de Björling em grupos de Lie

Em [MMP] os autores acham uma representação (local) de tipo Weierstrass para superfícies mínimas em variedades Riemannianas que generaliza a representação de Weierstrass clássica para superfícies mínimas em \mathbb{R}^n . Neste capítulo vamos descrever rapidamente tal representação e aplicá-la para resolver o problema de Björling em grupos de Lie tridimensionais.

3.1 Representação de Weierstrass

Seja \mathcal{N}^n uma variedade Riemanniana munida da métrica $g = (g_{ij})$ e (x_1, \dots, x_n) coordenadas locais em um aberto $U \subseteq \mathcal{N}$. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo com coordenadas $z = u + iv$ e $f : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ uma imersão mínima conforme com $f(\Omega) \subseteq U$. Vamos indicar por $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a i -ésima função coordenada em relação às coordenadas locais fixadas. Usaremos as usuais notações para indicar as derivadas complexas:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Resulta que o vetor “complexo” tangente à imersão, dado por

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \phi := \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C},$$

verifica as seguintes propriedades:

- 1) $\sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \overline{\phi_k} \neq 0$, (f é imersão),
- 2) $\sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \phi_k = 0$, (f é conforme),

3)

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (f \text{ é mínima}), \quad (3.1)$$

onde Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana de \mathcal{N} .

Observação 3.1.1. A (3.1) é chamada de *condição de holomorfia* pois é a expressão em coordenadas locais da condição $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \phi = 0$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão induzida no fibrado $f^*(T\mathcal{N} \otimes \mathbb{C})$.

Como para o caso de \mathbb{R}^n , vale a recíproca:

Teorema 3.1.2 (Representação de Weierstrass [MMP]). *Dadas n funções $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, com Ω aberto simplesmente conexo, que verificam as três condições acima, então os diferenciais $\phi_i dz$ não têm períodos reais e a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ dada por*

$$f(z) = \left(2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_i dz \right)^1, \quad i = 1, \dots, n,$$

define uma imersão mínima conforme de Ω em \mathcal{N}^n .

Observamos que se $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$, temos o Teorema de Representação de Weierstrass clássico, pois $\Gamma_{jk}^i = 0$.

A fórmula de representação de Weierstrass é uma ferramenta importante na teoria das superfícies mínimas em \mathbb{R}^n por duas razões:

1. permite construir exemplos de superfícies mínimas a partir de funções holomorfas $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem as condições 1 e 2 do teorema;
2. permite englobar na teoria das superfícies mínimas os resultados poderosos da análise das funções holomorfas e conseqüentemente provar teoremas de caráter geral sobre as superfícies mínimas.

No caso de uma variedade Riemanniana qualquer, temos que o primeiro grande problema é o fato de que a equação (3.1) é bem mais complicada que a equação de Cauchy-Riemann $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} = 0$. De fato trata-se de uma equação as derivadas parciais *não linear e com coeficientes não constantes*. Isto torna difícil achar soluções explícitas. Porém, em alguns casos, podemos parcialmente superar esta dificuldade, como veremos na próxima seção.

¹O símbolo $\mathcal{R}e$ indica a parte real.

3.2 A Representação de Weierstrass em grupos de Lie

Seja agora (\mathcal{N}^n, g) um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda e $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{N}$ uma imersão mínima conforme. Indicando por $\{E_i\}$ uma base de campos ortonormais invariantes à esquerda, o vetor tangente complexo pode-se escrever como:

$$\phi := \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \psi_i E_i,$$

onde $\phi_i, \psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Além disso, existe uma matriz inversível $A = (A_{ij})$, cujas entradas são funções diferenciáveis a valores reais, tal que $\phi_i = \sum_j A_{ij} \psi_j$. Neste caso a condição de holomorfia para as ϕ_i 's dada por (3.1) resulta nas seguintes equações para as ψ_i 's:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k} L_{jk}^i \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

onde $L_{ij}^k := g(\nabla_{E_i} E_j, E_k)$ são constantes que dependem somente dos índices e podem ser escritas em termos das constantes de estrutura da álgebra de Lie.

Neste caso o Teorema 3.1.2 escreve-se como:

Teorema 3.2.1. *Sejam $\psi_j, j = 1, \dots, n$, funções a valores complexos definidas num aberto simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, que satisfazem as seguintes condições:*

- 1) $\sum_i \psi_i^2 = 0$,
- 2) $\sum_i \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0$,
- 3)

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k} L_{jk}^i \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

onde $L_{ij}^k := g(\nabla_{E_i} E_j, E_k)$. Então a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$, definida por

$$f_i(z) = 2 \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \sum_j A_{ij} \psi_j dz \right),$$

é uma imersão mínima conforme.

A vantagem desta situação é que a (3.3) é uma equação a coeficientes constantes. Mesmo assim, em geral, isto não facilita demais a construção de exemplos pois a matriz (A_{ij}) que aparece na fórmula deve-se calcular *em cima das soluções*.

Em alguns casos particulares conseguimos, porém, superar este obstáculo. Usando os argumentos que vamos a descrever a seguir, pode-se construir exemplos interessantes de superfícies mínimas (veja [MMP], [Kok]).

O caso do espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Vamos considerar o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com a métrica $g = (dx^2 + dy^2)/y^2 + dz^2$ e com a base de campos ortonormais invariantes à esquerda dada em (1.11). Neste caso a matriz A assume a forma

$$A = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e, portanto,

$$\phi_1 = y \psi_1, \quad \phi_2 = y \psi_2, \quad \phi_3 = \psi_3.$$

Logo, temos que:

$$f(z) = \left(2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_2 \psi_1 dz, 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_2 \psi_2 dz, 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz \right).$$

Da equação $f_2 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_2 \psi_2 dz$ resulta que, indicando por $\tilde{f}_2 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_2 dz$, a função $e^{\tilde{f}_2}$ é solução da equação. Portanto, uma solução em termos das ψ_i , $i = 1, 2, 3$, é dada por:

$$f(z) = \left(2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z e^{\tilde{f}_2} \psi_1 dz, e^{\tilde{f}_2}, 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz \right).$$

O caso do grupo de Heisenberg \mathbb{H}_3

Consideramos o grupo de Heisenberg

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

munido da métrica invariante à esquerda dada por

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz \right)^2.$$

Uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda é

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ E_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \end{cases} \quad (3.4)$$

e, portanto, a matriz A tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, resulta que:

$$\phi_1 = \psi_1, \quad \phi_2 = \psi_2, \quad \phi_3 = -\frac{y}{2}\psi_1 + \frac{x}{2}\psi_2 + \psi_3,$$

e conseqüentemente

$$\begin{cases} f_1(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_1 dz, \\ f_2(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_2 dz, \\ f_3(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\psi_3 - \frac{f_2}{2} \psi_1 + \frac{f_1}{2} \psi_2 \right) dz. \end{cases} \quad (3.5)$$

Tendo determinado f_1, f_2 por integração direta de ψ_1 e ψ_2 , podemos determinar f_3 .

O caso do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3

O espaço hiperbólico é um grupo de Lie de dimensão três representado em $Gl_4(\mathbb{R})$ pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ln z \\ 0 & z & 0 & x \\ 0 & 0 & z & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $z > 0$. A estrutura de grupo de \mathbb{H}^3 , derivante do produto de matrizes, é dada por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (z x' + x, z y' + y, z z').$$

Dotando este espaço da métrica invariante à esquerda

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2},$$

uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda é

$$\begin{cases} E_1 = z \frac{\partial}{\partial x}, \\ E_2 = z \frac{\partial}{\partial y}, \\ E_3 = z \frac{\partial}{\partial z}, \end{cases}$$

e, portanto, a matriz A tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Logo, resulta que:

$$\phi_1 = z \psi_1, \quad \phi_2 = z \psi_2, \quad \phi_3 = z \psi_3,$$

e conseqüentemente

$$\begin{cases} f_1(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_1 dz, \\ f_2(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_2 dz, \\ f_3(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_3 dz. \end{cases}$$

Indicando por

$$\tilde{f}_3 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz,$$

temos que

$$\begin{cases} f_1(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z e^{\tilde{f}_3} \psi_1 dz, \\ f_2(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z e^{\tilde{f}_3} \psi_2 dz, \\ f_3(z) = e^{\tilde{f}_3}. \end{cases}$$

3.3 O problema de Björling em grupos de Lie

O Problema de Björling para uma variedade Riemanniana (\mathcal{N}^3, g) de dimensão três pode-se formular como segue:

Seja $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ uma curva regular analítica real em \mathcal{N} e $V : I \rightarrow T\mathcal{N}$ um campo de vetores unitário e analítico real ao longo de β , tal que $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$. Determinar uma superfície mínima $f : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega_{(u,v)} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{N}$, tal que

- $f(u, 0) = \beta(u)$,
- $N(u, 0) = V(u)$.

para cada $u \in I$. Aqui temos indicado por Ω um domínio complexo que contem o intervalo I e por $N : \Omega \rightarrow T\mathcal{N}$ a aplicação de Gauss da superfície.

Observe-se que se β é parametrizada pelo comprimento de arco e $\tilde{\beta} := \nabla_{\dot{\beta}} \dot{\beta}$, temos que $V = \tilde{\beta}/|\tilde{\beta}|$ é um campo de vetores unitário ao longo da curva tal que $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$. Isto nos diz que o problema de Björling é uma generalização do seguinte problema:

Dada uma curva real e analítica em \mathcal{N} parametrizada pelo comprimento de arco, achar uma superfície mínima que a contem como geodésica².

²Neste caso, sendo que β é geodésica, resulta que $\tilde{\beta}(u)$ é collinear a $N(\beta(u))$ para cada $u \in I$.

Para o nosso fim precisamos de uma análise mais detalhada do Teorema 3.2.1. De fato, no teorema citado, temos genericamente³ quatro condições sobre as três funções ψ_i . Além das três equações diferenciais, temos a condição $\sum \psi_i^2 = 0$. O próximo lema nos diz que estas quatro condições não são independentes.

Lema 3.3.1. *Sejam $\psi_i : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, duas funções diferenciáveis e $\psi_3^2 = -\psi_1^2 - \psi_2^2$. Suponhamos que as ψ_i , $i = 1, 2$, satisfazem as primeiras duas equações de (3.3). Então ψ_3 verifica a terceira equação.*

Demonstração. Derivando com respeito a \bar{z} a equação

$$-\psi_3^2 = (\psi_1^2 + \psi_2^2),$$

e usando o fato de que valem as primeiras duas equações do sistema (3.3), temos que

$$\begin{aligned} -\psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} &= \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} \\ &= - \sum_{j,k=1}^3 (L_{jk}^1 \psi_1 + L_{jk}^2 \psi_2) \bar{\psi}_j \psi_k. \end{aligned}$$

Portanto, para provar o teorema é suficiente mostrar que

$$\sum_{j,k=1}^3 (L_{jk}^1 \psi_1 + L_{jk}^2 \psi_2 + L_{jk}^3 \psi_3) \bar{\psi}_j \psi_k = 0.$$

Para tanto, escrevemos a soma acima como:

$$\sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^k \bar{\psi}_j \psi_k^2 + \sum_{\substack{j,k,l=1 \\ k < l}}^3 (L_{jk}^l + L_{jl}^k) \bar{\psi}_j \psi_k \psi_l.$$

Usando as relações:

$$L_{jk}^l + L_{jl}^k = 0, \quad \forall j, k, l \in \{1, 2, 3\},$$

a conclusão segue imediatamente. \square

É, também, interessante observar o significado geométrico das funções ψ_i ou, melhor, de algumas suas combinações (veja [MMP], onde as notações são levemente diferentes). Sejam

$$g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2} \quad \text{e} \quad h = \psi_1 - i\psi_2.$$

Então g representa a aplicação normal de Gauss da f ou, mais precisamente, a aplicação:

$$(u, v) \mapsto g(u, v) = \pi \circ dL_{f(u,v)}^{-1} N(u, v)$$

³A condição $\sum |\psi_i|^2 \neq 0$ é “genericamente satisfeita”.

onde $N(u, v)$ é um vetor normal unitário (fixada uma orientação para a superfície) em $f(u, v)$, L_p é a translação à esquerda por $p \in \mathcal{N}$ e π é a projeção estereográfica da esfera unitária da álgebra de Lie em \mathbb{R}^2 , que é identificado com o plano complexo. Também temos que a métrica da superfície é dada por:

$$ds^2 = |h|^2 (1 + |g|^2)^2 (du^2 + dv^2).$$

Dadas as funções g e h , podemos recuperar as ψ_i 's:

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{h}{2} (1 - g^2), \\ \psi_2 = \frac{ih}{2} (1 + g^2), \\ \psi_3 = hg. \end{cases}$$

Claramente as fórmulas acima implicam que $\sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 0$. As condições (3.3) se traduzem em condições sobre g e h as quais, por sua vez, são equivalentes às (3.3), tendo em conta o Lema 3.3.1.

Antes de demonstrar a existência e a unicidade da solução do problema de Björling, lembramos o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya. Este teorema é uma generalização do teorema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias e se aplica à classe de sistemas de equações diferenciais parciais que têm a seguinte forma:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i \left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $u = (u_1, \dots, u_m)$. Além disso, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ a função F_i depende das derivadas das funções u_j somente até a ordem n_i , independe de $\partial^{n_i} u_i / \partial t^{n_i}$ e é analítica em todos os seus argumentos. O Problema de Cauchy consiste em construir uma solução do sistema (3.6), tal que

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}(0, x) = \varphi_{i,k}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.7)$$

onde $\varphi_{i,k}(x)$ são funções analíticas dadas numa vizinhança do ponto $x = 0$. Sob estas hipóteses, temos que:

Teorema 3.3.2 (Cauchy-Kovalevskaya). *O problema de Cauchy (3.6), (3.7), tem uma única solução $u(t, x)$ que é analítica numa vizinhança do ponto $t = 0$, $x = 0$.*

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema procurado:

Teorema 3.3.3. *Seja \mathcal{N} um grupo de Lie 3-dimensional munido de uma métrica invariante à esquerda, $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ uma curva analítica (real), I compacto e $V : I \rightarrow T\mathcal{N}$ um campo de vetores ao longo de β , unitário, analítico real e ortogonal à curva β . Então existe uma única imersão mínima conforme $f : I \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{N}$, tal que $f(u, 0) = \beta(u)$ e $N(u, 0) = V(u)$.*

Demonstração. Consideramos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^1 \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^2 \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $\psi_3 = [-\psi_1^2 - \psi_2^2]^{\frac{1}{2}}$.

O sistema (3.8) é claramente do tipo Cauchy-Kovalesvkaya portanto, fixadas as condições iniciais $\psi_i(u, 0)$, $i = 1, 2$, admite, localmente, uma única solução. Esta solução nos dá, através da Representação de Weierstrass, uma superfície mínima. Precisamos achar, portanto, as condições iniciais que garantam que esta superfície verifica a tese do teorema.

Observamos que, se f é solução do Problema de Björling, temos

$$\phi(u, 0) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) (u, 0) = \frac{1}{2} (\dot{\beta}(u) + i \dot{\beta}(u) \wedge V(u)),$$

portanto as condições iniciais para o nosso sistema são dadas por:

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u))\phi(u, 0).$$

Até aqui temos demonstrado a existência de uma solução local do nosso problema. Usando a compacidade do intervalo I e a unicidade da solução local do nosso problema, é imediato provar a existência e a unicidade da solução quando $\beta(I)$ está contido num aberto coordenado, para um ϵ suficientemente pequeno. Cobrindo I com um número finito de imagens inversas, via β , de abertos coordenado e usando, mais uma vez, a unicidade do problema local, temos o resultado para o caso geral. \square

Capítulo 4

Superfícies invariantes de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo daremos a classificação completa das superfícies de curvatura média constante (CMC) de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, que são invariantes pela ação de algum subgrupo a um parâmetro G do grupo das isometrias $\mathfrak{Isom}_0(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$. Para isto, usaremos os resultados e as técnicas da geometria equivariante expostos no Apêndice A.

Observamos que, neste caso, a parte regular do espaço das órbitas $\mathcal{B}_r = (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})_r/G$ é uma variedade de dimensão dois e a projeção de uma superfície G -invariante Σ em \mathcal{B}_r é uma curva $\gamma = \Sigma/G \subset \mathcal{B}_r$, chamada *curva perfil* de Σ . Denotaremos por u e v as duas funções G -invariantes que parametrizam \mathcal{B}_r (veja o Teorema A.2.6), que serão obtidas com o método das características descrito na página 118. De acordo com o Teorema A.3.1, podemos usar estas duas funções para dotar \mathcal{B}_r da métrica quociente \tilde{g} . Parametrizaremos $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ pelo comprimento de arco s e denotaremos por $\sigma(s)$ o ângulo entre o vetor tangente da curva γ , indicado por \mathbf{t} , e a direção positiva do eixo u (veja a Figura 4.1).

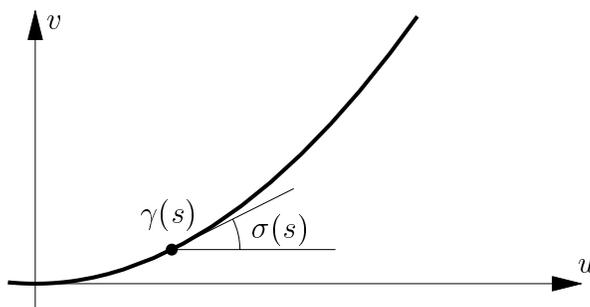


Figura 4.1. Definição do ângulo $\sigma = \angle(\partial_u, \mathbf{t})$.

Usaremos o Teorema de Redução (veja Apêndice A) que, neste caso, resulta em:

$$H(p) = k_g(\xi) - D_{\mathbf{n}} \ln(\omega(\xi)), \quad p \in \Sigma, \quad (4.1)$$

onde $\xi = G(p) \in \gamma$ é uma órbita principal, k_g é a curvatura geodésica da curva γ em ξ respeito a \tilde{g} e $D_{\mathbf{n}}$ representa a derivada direcional com respeito à normal unitária \mathbf{n} a γ .

Lembramos também que $\omega(\xi)$ é a função volume de uma órbita principal, cujo valor é definido como sendo zero nas órbitas singulares, ou seja, naquelas de dimensão menor.

Antes de começar o estudo das superfícies de curvatura média constante que são invariantes por algum subgrupo de dimensão um de $\mathfrak{Isom}_0(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$, recordemos alguns fatos descritos no Capítulo 1.

4.1 O grupo de Lie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Lembramos que o espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{H}^2 é o modelo do semi-plano superior do plano hiperbólico, é um grupo de Lie de dimensão três. Dotamos este espaço da seguinte métrica invariante à esquerda

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2.$$

Indicando por $*$ o produto respeito ao qual $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é grupo (veja a (1.10)), temos que $e = (0, 1, 0)$ representa a identidade do grupo e o inverso do elemento $(x, y, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é

$$(x, y, z)^{-1} = (-x/y, 1/y, -z).$$

Observamos também que as translações à esquerda são dadas por:

$$L_{(x,y,z)}(x', y', z') = (x, y, z) * (x', y', z') = (x'y + x, yy', z + z').$$

A seguir mostraremos explicitamente o grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

4.1.1 Isometrias do plano hiperbólico

A dimensão de $\mathfrak{Isom}(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ é três, sendo que \mathbb{H}^2 é uma variedade de dimensão dois que tem curvatura seccional constante. De fato temos:

Teorema 4.1.1 ([Ko], [V], [Y]). *Seja (\mathcal{N}^n, g) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 2$. Então a dimensão de $\mathfrak{Isom}(\mathcal{N}, g)$ é $r \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Temos que $r = \frac{n(n+1)}{2}$ se, e somente se, (\mathcal{N}, g) tem curvatura seccional constante.*

A proposição a seguir fornece uma descrição dos elementos de $\mathfrak{Isom}(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$. Para uma demonstração completa desta proposição se veja, por exemplo, [St] na página 88.

Proposição 4.1.2 (Poincaré [Po]). *Introduzindo em \mathbb{H}^2 coordenadas complexas $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, temos que as isometrias de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ que preservam a orientação são as transformações lineares e fracionais dadas por*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Aquelas que invertem a orientação são do tipo:

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = -1.$$

Demonstração. Para demonstrar, por exemplo, que φ é uma isometria basta apenas observar que em coordenadas complexas podemos escrever

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) > 0\} \quad \text{e} \quad g_{\mathbb{H}} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{-4 dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}.$$

Portanto, se $w = \varphi(z)$, temos que

$$\mathcal{I}m(w) = \frac{\mathcal{I}m(z)}{|cz + d|^2} > 0 \quad \text{e} \quad dw = \frac{dz}{(cz + d)^2}.$$

Conseqüentemente

$$\frac{dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2},$$

ou seja φ leva \mathbb{H}^2 nele mesmo e é uma isometria. \square

Proposição 4.1.3. *A álgebra de Lie das isometrias infinitesimais do espaço $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ admite a seguinte base de campos de Killing:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(x^2 - y^2)}{2} \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Demonstração. Este resultado é obtido através da integração da equação de Killing $L_X g_{\mathbb{H}} = 0$, onde X é um campo de vetores em $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$. De fato, expressando X da seguinte forma:

$$X = \sum_{i=1}^2 \xi^i \mathcal{E}_i, \quad \xi^i = \xi^i(x, y),$$

onde $\mathcal{E}_i = E_i(0, 1)$, temos que X é de Killing se, e somente se,

$$\begin{aligned} L_X g_{\mathbb{H}}(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k) &= X(g_{\mathbb{H}}(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k)) - g_{\mathbb{H}}([X, \mathcal{E}_j], \mathcal{E}_k) - g_{\mathbb{H}}(\mathcal{E}_j, [X, \mathcal{E}_k]) \\ &= X(g_{jk}) + \sum_{i=1}^2 g_{ik} \partial_j \xi^i + \sum_{i=1}^2 g_{ji} \partial_k \xi^i = 0, \quad j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais, lineares, homogêneas e de primeira ordem:

$$\begin{cases} \partial_y \xi^1 + \partial_x \xi^2 = 0, \\ y \partial_x \xi^1 - \xi^2 = 0, \\ y \partial_y \xi^2 - \xi^2 = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Notamos que das últimas duas equações temos que

$$\partial_x \xi^1 = \partial_y \xi^2. \quad (4.4)$$

Derivando com respeito a y a segunda equação do sistema e usando (4.4) temos que

$$\partial_{yx} \xi^1 = 0$$

e, conseqüentemente

$$\xi^1(x, y) = \int f(x) dx + g(y),$$

para certas funções $f(x)$ e $g(y)$. Portanto da (4.4) segue-se

$$\xi^2(x, y) = f(x) y + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Substituindo as expressões achadas para ξ^1 e ξ^2 na primeira equação do sistema (4.3) resulta que

$$f(x) = c_2 x + c_3, \quad \text{e} \quad g(y) = -\frac{c_2 y^2}{2} + c_4,$$

onde $c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\xi^1(x, y) = c_2 \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right) + c_3 x + c_4$$

e

$$\xi^2(x, y) = (c_2 x + c_3) y + c_1.$$

Usando a segunda (ou a terceira) equação de (4.3) temos que $c_1 = 0$. Conseqüentemente, a solução geral do sistema (4.3) é o campo de Killing dado por:

$$X = \left\{ c_2 \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right) + c_3 x + c_4 \right\} \frac{\partial}{\partial x} + (c_2 xy + c_3 y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Para particulares valores das constantes c_i obtemos a base dada em (4.2). \square

4.1.2 O grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Sabemos que a dimensão do grupo $\mathfrak{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ é quatro, portanto máxima para uma variedade de dimensão três que não tem curvatura seccional constante. Este fato é conseqüência do Teorema 4.1.1 e do seguinte resultado:

Teorema 4.1.4 (G. Fubini, [Fu]). *Seja (\mathcal{N}^n, g) uma variedade de dimensão $n > 2$. A dimensão do grupo de isometrias $\mathfrak{Isom}(\mathcal{N}, g)$ não pode ser $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.*

Proposição 4.1.5. *A álgebra de Lie das isometrias infinitesimais do espaço $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ admite a seguinte base de campos de Killing:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(x^2 - y^2)}{2} \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Demonstração. É consequência imediata da Proposição 4.1.3. \square

Denotaremos por G_i , para $1 \leq i \leq 4$, o subgrupo a um-parâmetro de isometrias gerado por X_i , por G_{ij} aquele gerado por uma combinação dos campos X_i e X_j , e assim por diante. Temos que:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\mathcal{L}_{(t,0,0,0)} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{com} \\ &\quad \mathcal{L}_{(t,0,0,0)}(x, y, z) = \left(\frac{-2[t(x^2 + y^2) - 2x]}{(tx - 2)^2 + t^2 y^2}, \frac{4y}{(tx - 2)^2 + t^2 y^2}, z \right); \\ G_2 &= \{\mathcal{L}_{(0,t,0,0)} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{com} \quad \mathcal{L}_{(0,t,0,0)}(x, y, z) = (x + t, y, z); \\ G_3 &= \{\mathcal{L}_{(0,0,t,0)} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{com} \quad \mathcal{L}_{(0,0,t,0)}(x, y, z) = (e^t x, e^t y, z); \\ G_4 &= \{\mathcal{L}_{(0,0,0,t)} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{com} \quad \mathcal{L}_{(0,0,0,t)}(x, y, z) = (x, y, z + t). \end{aligned}$$

Notamos que, para $t \in \mathbb{R}$ fixo, as isometrias dadas por

$$\mathcal{L}_{(0,t,0,0)} \equiv L_{(t,1,0)}, \quad \mathcal{L}_{(0,0,t,0)} \equiv L_{(0,e^t,0)}, \quad \mathcal{L}_{(0,0,0,t)} \equiv L_{(0,1,t)},$$

são translações à esquerda de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Compondo adequadamente os subgrupos a um-parâmetro gerados pelos X_i , $1 \leq i \leq 4$, obtemos a seguinte expressão para o genérico elemento $\phi \in \mathcal{I}\text{som}_0(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$:

$$\phi(w, z) = (\tilde{\phi}(w), z + d),$$

onde $\tilde{\phi}(w)$ é a transformação de Möbius dada por

$$\tilde{\phi}(w) = \frac{(2e^b - ac)w + 2c}{-aw + 2}, \quad w \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C} \quad \text{e} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Observação 4.1.6. É importante notar que a curva integral do campo X_1 pelo ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}_{(t,0,0,0)}(x_0, y_0, z_0) = (x(t), y(t), z_0)$, com

$$x(t)^2 + y(t)^2 - \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} \right) y(t) = 0.$$

Ou seja, é uma horocircunferência (veja a Definição 4.3.5) de raio $\frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}$ com centro $\left(0, \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}, z_0\right)$, no plano $z = z_0$. Na Figura 4.2 é dado o desenho das curvas integrais por três diferentes pontos do plano $z = 1$.

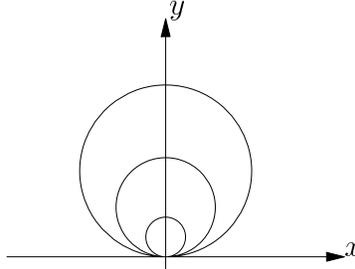


Figura 4.2. Curvas integrais do campo de Killing X_1 .

Observação 4.1.7. O campo de Killing $X_{12}^* = X_1 + X_2/2$ representa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma rotação ao redor do eixo pelo ponto $(0, 1, 0)$ e perpendicular a \mathbb{H}^2 . O subgrupo a um-parâmetro gerado por X_{12}^* é

$$\mathcal{L}_{(t,t/2,0,0)}(x, y, z) = (x(t), y(t), z),$$

onde

$$x(t) = \frac{(1 - x^2 - y^2) \operatorname{sen} t + 2x \cos t}{(1 - x^2 - y^2) \cos t - 2x \operatorname{sen} t + 1 + x^2 + y^2}$$

e

$$y(t) = \frac{2y}{(1 - x^2 - y^2) \cos t - 2x \operatorname{sen} t + 1 + x^2 + y^2}.$$

Temos que a curva integral do campo X_{12}^* pelo ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}_{(t,t/2,0,0)}(x_0, y_0, z_0) = (x(t), y(t), z_0)$, com

$$x(t)^2 + y(t)^2 - \beta y(t) + 1 = 0,$$

onde

$$\beta = \frac{1 + x_0^2 + y_0^2}{y_0}.$$

Ou seja, é a circunferência do plano $z = z_0$ de centro no ponto $(0, \beta/2)$ e raio $\frac{\sqrt{\beta^2 - 4}}{2}$. Um simples cálculo mostra que a distância hiperbólica $d_{\mathbb{H}}$ do genérico ponto da curva integral $P = (x(t), y(t), z_0)$ ao ponto $I = (0, 1, z_0)$ é constante. De fato, para $x(t) = 0$ temos os dois pontos correspondentes aos valores dados por

$$y(t) = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4}}{2}.$$

Em ambos os casos resulta que:

$$d_{\mathbb{H}}(P, I) = |\ln(y(t))| = \ln \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4}}{2} \right).$$

Se $x(t) \neq 0$, temos que a circunferência euclidiana que passa pelos pontos P e I tem equação

$$(x - c)^2 + y^2 = R^2, \quad z = z_0,$$

onde

$$c = \frac{x(t)^2 + y(t)^2 - 1}{2x(t)} \quad \text{e} \quad R^2 = c^2 + 1,$$

portanto

$$d_{\mathbb{H}}(P, I) = \left| \ln \left(\frac{x(t) - c + R}{-c + R} \frac{1}{y(t)} \right) \right| = \ln \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4}}{2} \right).$$

Portanto as curvas integrais do campo X_{12}^* são circunferências geodésicas. Na Figura 4.3 é mostrado o desenho das órbitas de cinco diferentes pontos do eixo y .

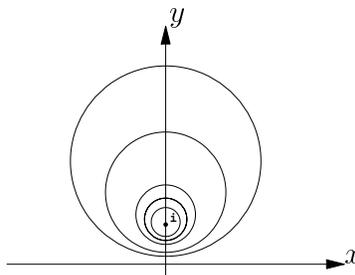


Figura 4.3. Curvas integrais do campo de Killing X_{12}^* .

4.2 Superfícies invariantes isométricas

No estudo das superfícies numa variedade \mathcal{N} , que são invariantes pela ação de um subgrupo a um-parâmetro de isometrias, surge naturalmente o problema de reduzir o número de casos. Para isso é necessário conhecer a existência de isometrias do espaço ambiente entre as diferentes superfícies invariantes. A seguinte proposição fornece uma solução para este problema.

Proposição 4.2.1. *Seja \mathcal{N} uma variedade, X_1 e X_2 campos de Killing. Se os subgrupos a um-parâmetro G_i gerados por X_i , $i \in \{1, 2\}$, são conjugados (notação, $G_1 \sim G_2$) por uma isometria φ do espaço ambiente \mathcal{N} , então as respectivas superfícies invariantes são isométricas através de φ , ou seja, são congruentes.*

Demonstração. Vamos supor que $G_1 \sim G_2$, ou seja, existe $\varphi \in \mathfrak{Isom}(\mathcal{N})$ tal que $\varphi G_1 \varphi^{-1} = G_2$. Seja M_1 uma superfície G_1 -invariante de \mathcal{N} e $M_2 = \varphi(M_1)$. Observamos que M_2 é G_2 -invariante, pois

$$G_2 M_2 = G_2 (\varphi(M_1)) = (\varphi G_1 \varphi^{-1})(\varphi(M_1)) = \varphi(G_1 M_1) = \varphi(M_1) = M_2.$$

Reciprocamente, se M_2 é uma superfície G_2 -invariante, então é isométrica à superfície G_1 -invariante dada por $\varphi^{-1}(M_2)$. \square

Portanto, podemos reduzir o número das possibilidades a serem estudadas por conjugação. Em alguns casos é mais útil usar o seguinte resultado.

Proposição 4.2.2. *Sejam X e Y dois campos de vetores completos e C^∞ numa variedade diferenciável \mathcal{N} . Indicamos por $G_X = \{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ e $G_Y = \{\psi_t : t \in \mathbb{R}\}$ os respectivos subgrupos a um-parâmetro e por $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ um difeomorfismo. Então φ conjugua G_X e G_Y se, e somente se,*

$$d\varphi_p X(p) = Y(\varphi(p)), \quad \forall p \in \mathcal{N}. \quad (4.6)$$

Demonstração. Se vale a equação (4.6) e $p \in \mathcal{N}$ é fixo, seja $\eta(t) = \varphi(\theta_t(p))$, $t \in \mathbb{R}$. Então

$$\dot{\eta}(t) = d\varphi(\theta_t(p)) \dot{\theta}_t(p) = d\varphi(\theta_t(p)) X(\theta_t(p)) = Y(\varphi(\theta_t(p))) = Y(\eta(t))$$

e $\eta(0) = \varphi(p)$. Portanto $\varphi(\theta_t(p)) = \psi_t(\varphi(p))$, ou seja, $\varphi G_X = G_Y \varphi$. Reciprocamente, seja φ uma conjugação e $p \in \mathcal{N}$, então temos $\varphi(\theta_t(p)) = \psi_t(\varphi(p))$, $t \in \mathbb{R}$. Derivando esta equação em relação a t e avaliando para $t = 0$ temos (4.6). \square

4.2.1 Isometrias entre as superfícies invariantes de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Usaremos as Proposições 4.2.1 e 4.2.2 para simplificar o estudo no caso de $\mathcal{N} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Proposição 4.2.3. *Toda superfície invariante pela ação de G_1 é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de G_2 , e vice-versa (i.e. $G_1 \sim G_2$).*

Demonstração. Primeiramente, observamos que

$$\mathcal{L}_{(t,0,0,0)}(w, z) = \left(\frac{2w}{-tw + 2}, z \right)$$

e

$$\mathcal{L}_{(0,t,0,0)}(w, z) = (w + t, z),$$

onde $(w, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Pela Proposição 4.2.1 é suficiente mostrar que os grupos G_1 e G_2 são conjugados por uma isometria φ de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Seja

$$\varphi_d(w, z) = \left(\frac{-2}{w + d\sqrt{2}}, z \right), \quad d \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, se $d = 0$ temos

$$\varphi_0 \circ \mathcal{L}_{(0,t,0,0)}(w, z) = \left(\frac{-2}{w + t}, z \right) = \mathcal{L}_{(t,0,0,0)} \circ \varphi_0(w, z).$$

\square

Corolário 4.2.4. *Toda superfície invariante pela ação de G_{14} é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de G_{24} , e vice-versa (i.e. $G_{14} \sim G_{24}$).*

Demonstração. Observe que $G_{14} \sim G_{24}$ através da isometria φ_d da Proposição 4.2.3. \square

Proposição 4.2.5. *Toda superfície invariante pela ação de*

$$G_{13} = \{\mathcal{L}_{(at,0,bt,0)} : t \in \mathbb{R}\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação do subgrupo

$$G_3 = \{\mathcal{L}_{(0,0,bt,0)} : t \in \mathbb{R}\}$$

e vice-versa (i.e. $G_{13} \sim G_3$).

Demonstração. Usaremos a Proposição 4.2.2. A isometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que conjuga os grupos é dada por

$$\varphi(w, z) = (\tilde{\varphi}(w), z), \quad (w, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R},$$

onde $\tilde{\varphi}(w)$ é a transformação de Möbius

$$\tilde{\varphi}(w) = \left(\frac{\frac{a}{b}w}{\frac{1}{2}w + \frac{b}{a}} \right), \quad w \in \mathbb{H}^2.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} d\varphi_p(X_{13}(p)) &= \frac{4a^2}{[(2b+ax)^2 + a^2y^2]^2} \begin{pmatrix} (2b+ax)^2 - a^2y^2 & 2ay(2b+ax) & 0 \\ -2ay(2y+ax) & (2b+ax)^2 - a^2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bx + \frac{a(x^2-y^2)}{2} \\ axy + by \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2a^2}{(2b+ax)^2 + a^2y^2} \begin{pmatrix} 2bx + a(x^2+y^2) \\ 2by \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= bX_3(\varphi(p)); \end{aligned}$$

onde

$$\varphi(p) = \left(\frac{2a^2[2bx + a(x^2+y^2)]}{b[(2b+ax)^2 + a^2y^2]}, \frac{4a^2y}{(2b+ax)^2 + a^2y^2}, z \right), \quad p \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}.$$

\square

Corolário 4.2.6. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo*

$$G_{134} = \{\mathcal{L}_{(at,0,bt,ct)} : t \in \mathbb{R}\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação do grupo

$$G_{34} = \{\mathcal{L}_{(0,0,bt,ct)} : t \in \mathbb{R}\},$$

e vice-versa (i.e. $G_{134} \sim G_{34}$).

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(at,0,bt,ct)} &= \mathcal{L}_{(at,0,bt,0)} \circ \mathcal{L}_{(0,0,0,ct)} \\ &= \varphi \circ \mathcal{L}_{(0,0,bt,0)} \circ \varphi^{-1} \circ \mathcal{L}_{(0,0,0,ct)} \\ &= \varphi \circ \mathcal{L}_{(0,0,bt,0)} \circ \mathcal{L}_{(0,0,0,ct)} \circ \varphi^{-1} \\ &= \varphi \circ \mathcal{L}_{(0,0,bt,ct)} \circ \varphi^{-1},\end{aligned}$$

onde φ é a mesma isometria dada na Proposição 4.2.5. □

Proposição 4.2.7. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo*

$$G_{23} = \{\mathcal{L}_{(0,at,bt,0)} : t \in \mathbb{R}\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de

$$G_3 = \{\mathcal{L}_{(0,0,-bt,0)} : t \in \mathbb{R}\},$$

e vice-versa (i.e. $G_{23} \sim G_3$).

Demonstração. Observamos que

$$\mathcal{L}_{(0,at,bt,0)}(w, z) = \left(e^{bt}w + \frac{a(e^{bt}-1)}{b}, z \right)$$

e

$$\mathcal{L}_{(0,0,ct,0)}(w, z) = (e^{ct}w, z), \quad (w, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}.$$

Temos que $G_{23} \sim G_3$ através da isometria $\varphi(w, z) = \left(\frac{aw+b}{-bw}, z \right)$. De fato,

$$\begin{aligned}\varphi \circ \mathcal{L}_{(0,0,-bt,0)}(x, y, z) &= \left(-\frac{a}{b} - \frac{xe^{bt}}{x^2 + y^2}, \frac{ye^{bt}}{x^2 + y^2}, z \right) \\ &= \mathcal{L}_{(0,at,bt,0)} \left(-\frac{a(x^2 + y^2) + bx}{b(x^2 + y^2)}, \frac{y}{x^2 + y^2}, z \right) \\ &= \mathcal{L}_{(0,at,bt,0)} \circ \varphi(x, y, z).\end{aligned}$$

□

Corolário 4.2.8. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo*

$$G_{234} = \{\mathcal{L}_{(0,at,bt,ct)} : t \in \mathbb{R}\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação do grupo

$$G_{34} = \{\mathcal{L}_{(0,0,-bt,ct)} : t \in \mathbb{R}\},$$

e vice-versa (i.e. $G_{234} \sim G_{34}$).

Demonstração. Note que

$$\mathcal{L}_{(0,at,bt,ct)}(w, z) = \left(e^{bt}w + \frac{a(e^{bt}-1)}{b}, z + ct \right),$$

portanto, pela Proposição 4.2.7 resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(0,at,bt,ct)} &= \mathcal{L}_{(0,at,bt,0)} \circ \mathcal{L}_{(0,0,0,ct)} \\ &= \varphi \circ \mathcal{L}_{(0,0,-bt,0)} \circ \varphi^{-1} \circ \mathcal{L}_{(0,0,0,ct)} \\ &= \varphi \circ \mathcal{L}_{(0,0,-bt,0)} \circ \mathcal{L}_{(0,0,0,ct)} \circ \varphi^{-1}, \end{aligned}$$

onde

$$\varphi(w, z) = \left(\frac{aw + b}{-bw}, z \right) \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}(w, z) = \left(\frac{-b}{bw + a}, z \right).$$

□

Proposição 4.2.9. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo*

$$G_{12}^- = \{ \mathcal{L}_{(t,at,0,0)} : t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a < 0 \}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de

$$G_3 = \{ \mathcal{L}_{(0,0,bt,0)} : t \in \mathbb{R} \},$$

onde $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = -2a$, e vice-versa (i.e. $G_{12}^- \sim G_3$).

Demonstração. Usaremos a Proposição 4.2.2, onde a isometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que conjuga os dois grupos é dada por

$$\varphi^-(w, z) = \left(\frac{\frac{1}{2b}w - \frac{1}{2}}{w + b}, z \right), \quad (w, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} d\varphi_p^-(X_{12}^-(p)) &= \frac{1}{[(b+x)^2 + y^2]^2} \begin{pmatrix} (b+x)^2 - y^2 & 2(b+x)y & 0 \\ -2(b+x)y & (b+x)^2 - y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x^2 + y^2 - b^2}{2[(b+x)^2 + y^2]} \\ \frac{by}{(b+x)^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = bX_3(\varphi(p)), \end{aligned}$$

onde

$$\varphi(p) = \left(\frac{x^2 + y^2 - b^2}{2b[(b+x)^2 + y^2]}, \frac{y}{(b+x)^2 + y^2}, z \right), \quad p \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}.$$

□

Corolário 4.2.10. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo G_{124}^- dado por*

$$\{\mathcal{L}_{(t,at,0,ct)} : t \in \mathbb{R} \quad e \quad a < 0\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação do subgrupo

$$G_{34} = \{\mathcal{L}_{(0,0,bt,ct)} : t \in \mathbb{R}\},$$

onde $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = -2a$, e vice-versa (i.e. $G_{124}^- \sim G_{34}$).

Proposição 4.2.11. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo G_{12}^+ dado por*

$$\{\mathcal{L}_{(t,at,0,0)} : t \in \mathbb{R} \quad e \quad a > 0\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação do subgrupo

$$G_{12}^* = \{\mathcal{L}_{(bt, \frac{b}{2}t, 0, 0)} : t \in \mathbb{R}\},$$

gerado por X_{12}^ , onde $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = 2a$, e vice-versa (i.e. $G_{12}^+ \sim G_{12}^*$).*

Demonstração. Usaremos a Proposição 4.2.2. A isometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que conjuga os grupos é dada por

$$\varphi^+(w, z) = \left(\frac{w}{\sqrt{2a}}, z \right), \quad (w, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} d\varphi_p^+(X_{12}^+(p)) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} a + \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy \\ 0 \end{pmatrix} = b X_{12}^*(\varphi(p)). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.2.12. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo G_{124}^+ dado por*

$$\{\mathcal{L}_{(t,at,0,ct)} : t \in \mathbb{R} \quad e \quad a > 0\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação do subgrupo

$$G_{124}^* = \{\mathcal{L}_{(bt, \frac{b}{2}t, 0, ct)} : t \in \mathbb{R}\},$$

gerado por $bX_{12}^ + cX_4$, onde $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = 2a$, e vice-versa (i.e. $G_{124}^+ \sim G_{124}^*$).*

Proposição 4.2.13. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo*

$$G_{123} = \{\mathcal{L}_{(t,at,bt,0)} : t \in \mathbb{R}\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de

$$G_{12} = \{\mathcal{L}_{(t,ct,0,0)} : t \in \mathbb{R}\},$$

onde $c = (2a - b^2)/2$, e vice-versa (i.e. $G_{123} \sim G_{12}$).

Demonstração. Usaremos a Proposição 4.2.2, com a isometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(w, z) = (w + b, z), \quad (w, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}.$$

De fato, sendo que $2a = 2c + b^2$, temos que

$$\begin{aligned} d\varphi_p(X_{123}(p)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bx + \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy + by \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(x+b)^2 - y^2}{2} + c \\ (x+b)y \\ 0 \end{pmatrix} = X_{12}(\varphi(p)). \end{aligned}$$

Observe que na última igualdade foi usado o fato que

$$X_{12}(p) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2} + c, xy, 0 \right).$$

□

Corolário 4.2.14. *Toda superfície invariante pela ação do subgrupo G_{1234} dado por*

$$\{\mathcal{L}_{(t,at,bt,dt)} : t \in \mathbb{R}\}$$

é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de

$$G_{124} = \{\mathcal{L}_{(t,ct,0,dt)} : t \in \mathbb{R}\},$$

onde $c = (2a - b^2)/2$, e vice-versa (i.e. $G_{1234} \sim G_{124}$).

Segue-se a lista completa dos subgrupos a um-parâmetro de isometrias que são conjugados em $\mathfrak{Isom}_0(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$:

$$\begin{array}{cccc} G_1 \sim G_2, & G_{14} \sim G_{24}, & G_{13} \sim G_3, & G_{134} \sim G_{34}, \\ G_{23} \sim G_3, & G_{234} \sim G_{34}, & G_{123} \sim G_{12}, & G_{1234} \sim G_{124}, \\ G_{12}^- \sim G_3, & G_{12}^+ \sim G_{12}^*, & G_{124}^- \sim G_{34}, & G_{124}^+ \sim G_{124}^*. \end{array}$$

Podemos, portanto, enunciar o seguinte resultado:

Proposição 4.2.15. *Uma superfície de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ invariante pela ação de um subgrupo a um-parâmetro de isometrias G_X gerado pelo campo de Killing $X = \sum_{i=1}^4 a_i X_i$ é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de um dos seguintes subgrupos:*

$$G_{24}, \quad G_{34}, \quad G_{124}^*,$$

onde G_{124}^* é o subgrupo helicoidal gerado por uma combinação linear da rotação X_{12}^* e da translação X_4 .

4.3 Superfícies invariantes pela ação do grupo G_{24}

Seja G_{24} o grupo a um-parâmetro de isometrias gerado pelo campo de Killing $X_{24} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial z}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Observamos que este grupo age livremente sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, portanto $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})_r = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. As funções G_{24} -invariantes $\zeta(x, y, z)$ satisfazem a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$a \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

cujo sistema característico é dado por

$$b dx = a dz.$$

Portanto, um conjunto completo de funções invariantes funcionalmente independentes é dado por

$$u(x, y, z) = bx - az \quad \text{e} \quad v(x, y, z) = y,$$

e o espaço das órbitas é $\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$. Sendo que os gradientes em $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$ das funções u e v são

$$\begin{aligned} \nabla u &= by^2 \frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla v &= y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

a matriz h (definida no Teorema A.3.1 do Apêndice A) e a sua inversa assumem a forma

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 v^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix}, \quad (h^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a^2 + b^2 v^2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}.$$

Então a métrica orbital é dada por

$$\tilde{g} = \frac{du^2}{a^2 + b^2 v^2} + \frac{dv^2}{v^2}.$$

Seja $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ a curva, parametrizada pelo comprimento de arco, no espaço \mathcal{B} geradora da superfície $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, quando submetida à ação de G_{24} . Se σ é o ângulo que γ faz com a direção $\frac{\partial}{\partial u}$, então o campo unitário tangente a $\gamma(s)$ é

$$\mathbf{t} = (\dot{u}, \dot{v}) = (\sqrt{a^2 + b^2 v^2} \cos \sigma, v \sin \sigma),$$

e o campo unitário normal a $\gamma(s)$ é

$$\mathbf{n} = (-\sqrt{a^2 + b^2 v^2} \sin \sigma, v \cos \sigma).$$

Da fórmula (1.8) segue que a curvatura geodésica de γ pode ser expressa como função de σ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}}} ((\tilde{g}_{22})_u \dot{v} - (\tilde{g}_{11})_v \dot{u}) + \dot{\sigma} \\ &= \frac{b^2 v^2}{a^2 + b^2 v^2} \cos \sigma + \dot{\sigma}. \end{aligned}$$

Sendo que a função volume de uma órbita principal ξ é dada por

$$\omega(\xi) = \sqrt{\langle X_{24}, X_{24} \rangle} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 v^2}{v^2}},$$

e

$$D_{\mathbf{n}} \ln(\omega(\xi)) = -\frac{a^2 \cos \sigma}{a^2 + b^2 v^2},$$

usando o Teorema de Redução (veja a equação 4.1), a curvatura média de Σ pode ser escrita como:

$$H = \cos \sigma + \dot{\sigma}.$$

Portanto γ gera uma superfície G_{24} -invariante de CMC se u e v satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{a^2 + b^2 v^2} \cos \sigma \\ \dot{v} = v \sin \sigma \\ \dot{\sigma} = H - \cos \sigma. \end{cases} \quad (4.7)$$

4.3.1 Classificação das soluções

De agora em diante, vamos supor que H seja constante em Σ . Antes de começar o estudo do sistema (4.7), faremos algumas observações elementares.

Proposição 4.3.1.

1. Toda translação de uma curva solução de (4.7) na direção u é também solução de (4.7).

2. Uma reflexão de uma curva γ solução de (4.7) com respeito à reta $u = u_0$ é uma curva $\tilde{\gamma}$ solução de (4.7) (para $-H$).

Demonstração. O item 1 é uma consequência imediata de que o sistema (4.7) independe de u . O item 2 segue observando que se $\gamma(s) = (u(s), v(s), \sigma(s))$, então $\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{u}(s), \tilde{v}(s), \tilde{\sigma}(s)) = (2u_0 - u(s), v(s), \pi - \sigma(s))$. Logo, resulta que:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} = \sqrt{a^2 + b^2 \tilde{v}^2} \cos \tilde{\sigma} \\ \dot{\tilde{v}} = \tilde{v} \operatorname{sen} \tilde{\sigma} \\ \dot{\tilde{\sigma}} = -H - \cos \tilde{\sigma}, \end{cases} \quad (4.8)$$

o que conclui a prova. \square

Corolário 4.3.2. *Seja $\gamma(s)$ uma solução de (4.7) definida em $(s_0 - \epsilon, s_0]$ com $\sigma(s_0) \in \{0, \pi\}$. Então $\gamma(s)$ pode ser estendida a uma curva solução de (4.7), definida no intervalo $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$, através de uma reflexão em relação à reta $u = u(s_0)$.*

Demonstração. Segue do segundo item da Proposição 4.3.1. \square

Proposição 4.3.3. *A função dada por*

$$J(s) = \frac{\dot{\sigma}}{v}$$

é constante ao longo de qualquer curva $\gamma(s)$ solução do sistema (4.7). Portanto, as soluções de (4.7) são caracterizadas pela equação

$$\frac{\dot{\sigma}}{v} = k, \quad (4.9)$$

para alguma constante $k \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Usando o sistema (4.7) temos que

$$\begin{aligned} \dot{J}(s) &= \frac{\ddot{\sigma}}{v} - \frac{\dot{\sigma}}{v^2} \dot{v} \\ &= \frac{\dot{\sigma}(\operatorname{sen} \sigma)}{v} - \frac{\dot{\sigma}}{v^2} v \operatorname{sen} \sigma = 0. \end{aligned}$$

\square

Podemos começar o estudo qualitativo das curvas perfil das superfícies G_{24} -invariantes. Para facilitar a leitura deste caso antecipamos o teorema que segue. Observe-se que neste teorema a indexação é a mesma que será depois usada na demonstração dos casos aos quais ela se refere.

Teorema 4.3.4. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície G_{24} -invariante de CMC e γ a respectiva curva perfil no espaço das órbitas. Então temos a seguinte caracterização de γ em termos de H e k :*

A) $H \equiv 0$ (*superfícies mínimas*). A curva perfil é

A_1) para $k = 0$, uma **reta vertical**;

A_2) para $k \neq 0$, uma curva do tipo **semi-circunferência**.

B) $H > 1$. Neste caso $k > 0$ e a curva perfil é do tipo **nodal**.

C) $H = 1$. A curva perfil é

C_1) para $k = 0$, uma **reta horizontal**;

C_2) para $k > 0$, uma curva do tipo **folium**.

D) $0 < H < 1$. A curva perfil é

D_1) para $k = 0$,

$$u(v) = \frac{H}{\sqrt{1-H^2}} \left[\sqrt{a^2 + b^2 v^2} - a \ln \left(\frac{2(a + \sqrt{a^2 + b^2 v^2})}{a^2 v} \right) \right] + c;$$

D_2) para $k > 0$, uma curva do tipo **folium limitado**;

D_3) para $k < 0$, uma curva do tipo **semi-circunferência**.

Demonstração. Podemos assumir, sem perder a generalidade, que $H \geq 0$. Trataremos cada um dos casos separadamente.

A) Superfícies mínimas ($H = 0$)

De (4.7) e (4.9) temos $kv = \dot{\sigma} = -\cos \sigma$. Portanto existem duas possibilidades dependendo de k .

A_1) $k = 0$. Temos que $\sigma = \pi/2$ e $du/dv = 0$, portanto $u = c$, para $c \in \mathbb{R}$. Então a superfície mínima Σ é o plano dado por $bx - az = c$.

A_2) $k \neq 0$. Neste caso $\cos \sigma = -kv$ e $\sin \sigma = \sqrt{1 - k^2 v^2}$, logo

$$\frac{du}{dv} = -k \sqrt{\frac{a^2 + b^2 v^2}{1 - k^2 v^2}}, \quad v < \frac{1}{|k|}. \quad (4.10)$$

Esta é uma integral elíptica do segundo tipo¹ e (4.10) vale para $v < 1/|k|$, onde a curva γ se torna paralela à direção u . Temos que

$$u(v) = -|a|E \left(\arcsen(kv), -\frac{b^2}{a^2 k^2} \right).$$

¹A integral elíptica do segundo tipo é definida por

$$E(\phi, m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sen^2 \theta} d\theta.$$

Podemos refletir a curva somente uma vez obtendo uma curva do tipo *semi-circunferência*. Um desenho da correspondente superfície mínima é mostrado na Figura 4.4.

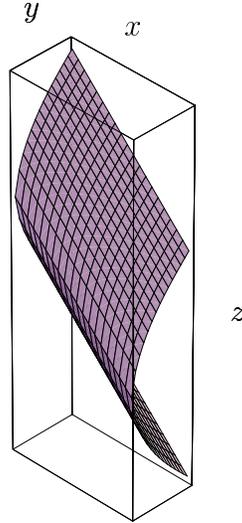


Figura 4.4. Superfície mínima para $k \neq 0$.

Superfícies de curvatura média $H > 0$

Das equações (4.7) e (4.9) obtemos $kv = \dot{\sigma} = H - \cos \sigma$.

- Se $k = 0$, então

$$\cos \sigma = H \quad \text{e} \quad \text{sen } \sigma = \sqrt{1 - H^2},$$

onde a função σ é constante. Em particular,

C_1) se $H = 1$ temos $\sigma = 0$ e $dv/du = 0$, portanto $v = c$, para $c > 0$. Neste caso a superfície é o plano $y = c$, para $c > 0$.

D_1) Se $H < 1$, a curva perfil γ é caracterizada pela equação diferencial

$$\frac{du}{dv} = \frac{H\sqrt{a^2 + b^2v^2}}{v\sqrt{1 - H^2}}. \quad (4.11)$$

Integrando a equação (4.11) temos que

$$u(v) = \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}} \left[\sqrt{a^2 + b^2v^2} - a \ln \left(\frac{2(a + \sqrt{a^2 + b^2v^2})}{a^2v} \right) \right] + c,$$

onde $v > 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Um desenho desta curva é dado na Figura 4.5. Substituindo as funções G_{24} -invariantes temos que a superfície Σ é

$$az = bx - \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}} \left[\sqrt{a^2 + b^2y^2} - a \ln \left(\frac{2(a + \sqrt{a^2 + b^2y^2})}{a^2y} \right) \right] + c,$$

com $y > 0$. Observamos que esta superfície fornece um exemplo de gráfico completo de curvatura média constante do tipo $z = f(x) + g(y)$.

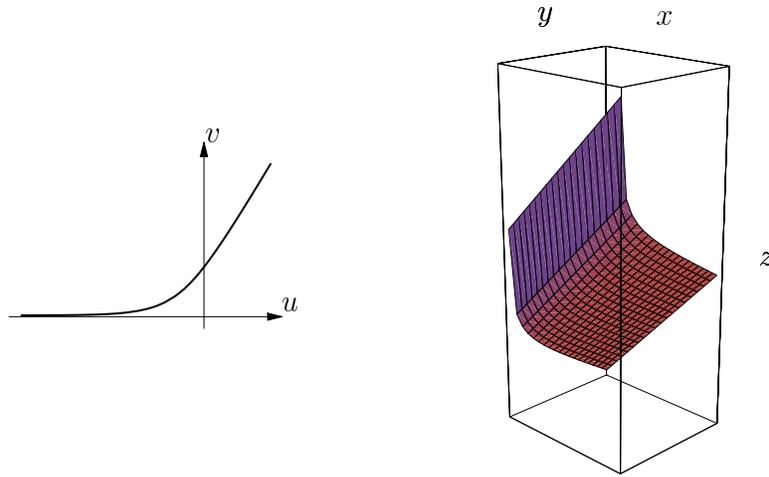


Figura 4.5. Curva perfil e superfície correspondente para $0 < H < 1$ e $k = 0$.

- Se $k > 0$, então

$$\cos \sigma = H - kv \quad \text{e} \quad \text{sen } \sigma = \sqrt{1 - (H - kv)^2}$$

logo,

$$\frac{du}{dv} = \frac{(H - kv)\sqrt{a^2 + b^2v^2}}{v\sqrt{1 - (H - kv)^2}}. \quad (4.12)$$

Dependendo do valor de H a curva perfil pode ser de três tipos diferentes. De fato, se $v \rightarrow 0^+$ então $\cos \sigma \rightarrow H$, logo:

- se $H > 1$, a curva γ dista positivamente da reta $v = 0$;
- se $H = 1$, a curva γ tende assintoticamente à reta $v = 0$;
- se $H < 1$, a curva γ tende à reta $v = 0$ com um ângulo $\sigma = \arccos(H)$.

B) Superfícies de curvatura $H > 1$

Neste caso é fácil ver que $v_m \leq v \leq v_M$, onde

$$v_m = \frac{H - 1}{k} \quad \text{e} \quad v_M = \frac{H + 1}{k}.$$

Escolhendo as condições iniciais $v(0) = v_m$ e $u(0) = 0$, temos $\sigma(0) = 0$ e $\dot{\sigma}(0) = H - 1 > 0$. Portanto, o ângulo $\sigma(s)$ rotaciona no sentido positivo. Além disso v_M satisfaz a equação $H - kv_M = -1$, logo $\cos \sigma(s_2) = -1$ (i.e. $\sigma(s_2) = \pi$), onde $v(s_2) = v_M$ por algum $s_2 > 0$. Isto significa que existe $s_1 \in (0, s_2)$ tal que $\sigma(s_1) = \pi/2$. Portanto $v(s_1) = H/k$ é um mínimo local para $u(v)$. De acordo com a Corolário 4.3.2, podemos refletir a curva infinitas vezes obtendo uma curva do tipo *nodal* (veja a Figura 4.6).

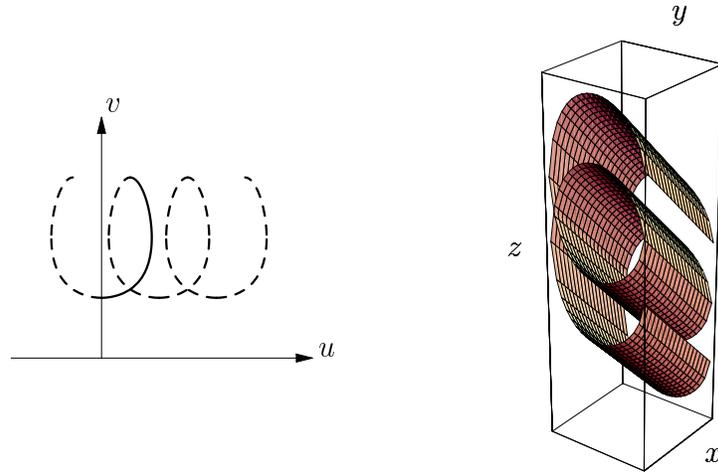


Figura 4.6. Curva perfil e superfície G_{24} -invariante para $H > 1$ e $k > 0$.

C_2) Superfícies de curvatura $H = 1$

Neste caso a curva $u(v)$ é definida para $0 < v \leq v_M$, onde $v_M = 2/k$. Se $v(s_1) = v_M$ temos que $\cos \sigma(s_1) = H - kv_M = -1$ e, portanto, $\sigma(s_1) = \pi$. Além disso, $du/dv > 0$ se, e somente se, $v < 1/k$. Logo $v_0 = 1/k$ é um máximo local para $u(v)$. Observamos que a curva γ tende assintoticamente à reta $v = 0$ e pode ser refletida só uma vez em relação à reta $u = u(s_1)$, gerando uma curva do tipo *folium* (veja a Figura 4.7).

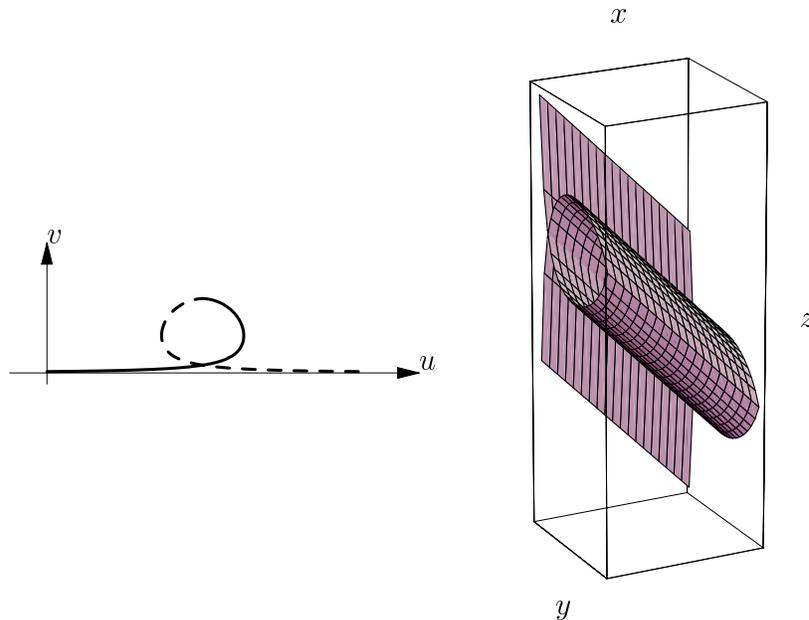


Figura 4.7. Curva perfil e superfície para $H = 1$ e $k > 0$.

D_2) Superfícies de curvatura $H < 1$

Se $H < 1$ a curva $u(v)$ é definida para $0 < v \leq v_M$, onde $v_M = (H + 1)/k$. Se $v(s_1) = v_M$ temos que $\cos \sigma(s_1) = H - kv_M = -1$, ou seja, $\sigma(s_1) = \pi$. Além disso, $du/dv > 0$ se, e somente se, $v < H/k$. Portanto $v_0 = H/k$ é um máximo local para $u(v)$. Neste caso a curva tende à reta $v = 0$ com um ângulo $\sigma = \arccos(H)$ e pode ser refletida só uma vez em relação à $u = u(s_1)$, gerando uma curva do tipo *folium limitado*.

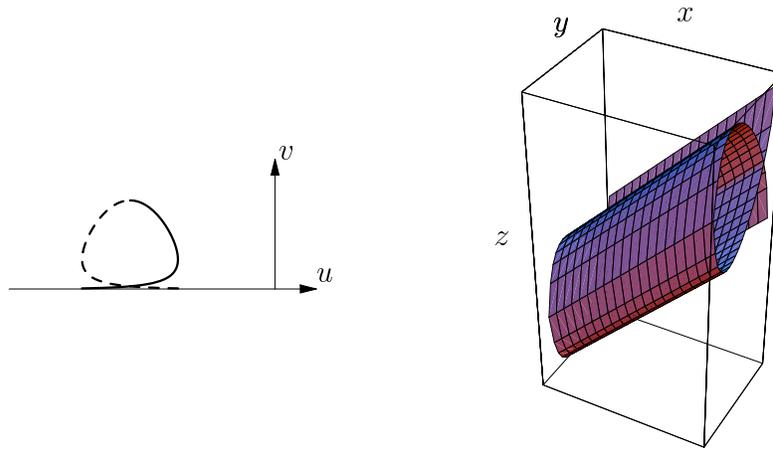


Figura 4.8. Curva perfil e superfície para $0 < H < 1$ e $k > 0$.

- D_3) Se $k < 0$, temos $0 < H < 1$ e, da equação (4.12), sendo que $du/dv > 0$, a curva $u(v)$ é sempre crescente. Esta curva é definida para $0 < v \leq v_M$, onde $v_M = (H - 1)/k$. Quando v assume o valor $v_M = v(s_1)$, sendo $\cos \sigma(s_1) = H - kv_M = 1$, a curva é paralela à direção u . Da primeira integral temos também $\dot{\sigma}(s) = kv < 0$, logo, $\sigma(s)$ é sempre decrescente. Refletindo a curva somente uma vez em relação à reta $u = u(s_1)$, obtemos uma curva do tipo *semi-circunferência*.

□

O caso G_{24} agora tratado tem dois sub-casos:

- quando $a = 1$ e $b = 0$, temos que o grupo $G_{24} = G_2$, ou seja, o grupo gerado pelas translações ao longo do eixo x ;
- quando $a = 0$ e $b = 1$, temos que o grupo $G_{24} = G_4$, ou seja, o grupo gerado pelas translações ao longo do eixo z .

Para complementar vamos dar uma descrição separada destes dois casos.

4.3.2 Superfícies invariantes por translações ao longo do eixo x

Neste caso o espaço das órbitas $\mathcal{B} = (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})/G_2$ e a métrica quociente são dados por:

$$\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\} \quad \text{e} \quad \tilde{g} = du^2 + \frac{dv^2}{v^2}.$$

Além disso, a curvatura geodésica de γ é $k_g = \dot{\sigma}$ e, da primeira integral, temos que $k_g = kv$, para $k \in \mathbb{R}$. Logo, se $k = 0$ a curvatura geodésica é também zero e γ é geodésica de (\mathcal{B}, \tilde{g}) .

Superfícies mínimas ($H = 0$)

- i) Se $k = 0$, como vimos no caso anterior, a curva perfil é a reta vertical $u = c$, $c \in \mathbb{R}$ e a superfície Σ é o plano horizontal $z = c$.
- ii) Se $k \neq 0$, integrando a equação

$$\frac{du}{dv} = \frac{-k}{\sqrt{1 - k^2v^2}}, \quad 0 < v < \frac{1}{|k|},$$

temos que a curva perfil é dada por:

$$u(v) = -\arcsen(kv) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Logo, substituindo as funções invariantes, a superfície mínima é

$$z = \arcsen(ky) + c, \quad 0 < y \leq \frac{1}{|k|}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Observe que esta superfície foi achada no Capítulo 2 procurando soluções da equação dos gráficos mínimos do tipo $f(x, y) = \psi(y)$ (veja o Exemplo 2.1.6). Notamos também que ela é conhecida por L. Hauswirth [H].

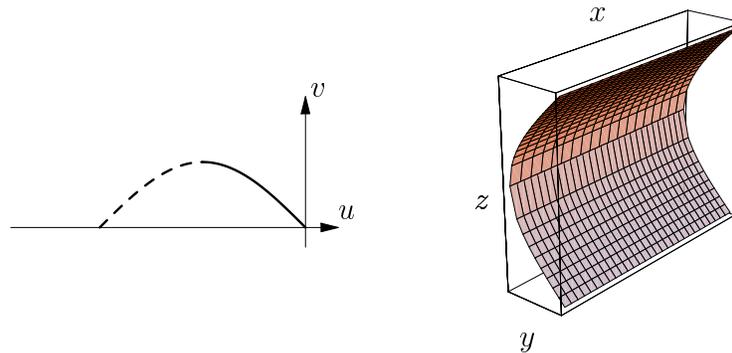


Figura 4.9. Curva perfil e superfície G_2 -invariante para $H = 0$ e $k \neq 0$.

Superfícies de curvatura média $H > 0$

- i) Se $k = 0$, dependendo do valor de H , a curva perfil pode ser de dois diferentes tipos. Quando $H = 1$, como no caso G_{24} , a curva γ é uma reta horizontal do espaço das órbitas e a superfície é o plano vertical $y = c$, para $c > 0$. Se $H < 1$, integrando a equação

$$\frac{du}{dv} = \frac{H}{v\sqrt{1-H^2}},$$

temos que γ é dada por

$$u(v) = \frac{H}{\sqrt{1-H^2}} \ln v + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

veja a Figura 4.10. Usando a expressão das funções G_2 -invariantes temos que Σ tem a seguinte equação:

$$z = -\frac{H}{\sqrt{1-H^2}} \ln y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esta superfície, que fornece um exemplo de gráfico completo regrado, foi também obtida por U. Abresch e H. Rosenberg em [AR].

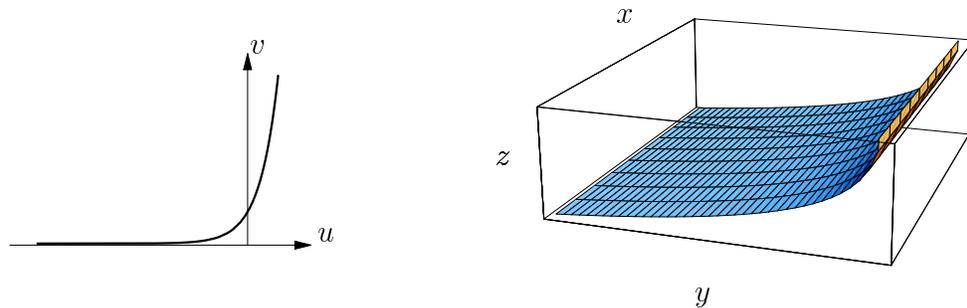


Figura 4.10. Curva perfil e superfície G_2 -invariante para $H = 1/2$ e $k = 0$.

- ii) Se $k > 0$, a integração da equação diferencial

$$\frac{du}{dv} = \frac{(H - kv)}{v\sqrt{1 - (H - kv)^2}} \quad (4.13)$$

fornece três diferentes tipos de curvas perfil, dependendo do valor de H .

Superfícies de curvatura $H > 1$

Neste caso a curva é dada por

$$u(v) = \arcsen(H - kv) - \frac{H}{\sqrt{H^2 - 1}} \tan^{-1} \left[\frac{H^2 - 1 - Hkv}{\sqrt{(H^2 - 1)(1 - (kv - H)^2)}} \right],$$

onde

$$\frac{(H-1)}{k} \leq v \leq \frac{(H+1)}{k}.$$

Esta curva pode ser refletida infinitas vezes e a curva resultante é do tipo *nodal* (veja a Figura 4.11).

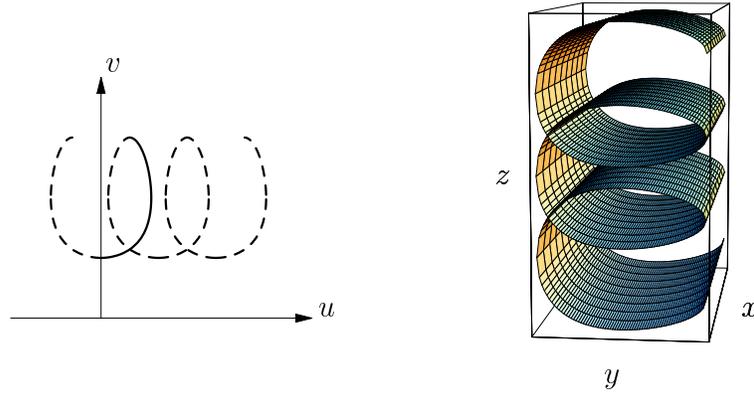


Figura 4.11. Curva perfil e superfície G_2 -invariante para $H > 1$ e $k > 0$.

Superfícies de curvatura $H = 1$

Neste caso

$$u(v) = \arcsen(1 - kv) - \sqrt{\frac{2 - kv}{kv}}, \quad 0 < v \leq \frac{2}{k}.$$

Podemos refletir a curva só uma vez obtendo uma curva do tipo *folium* (veja a Figura 4.12).

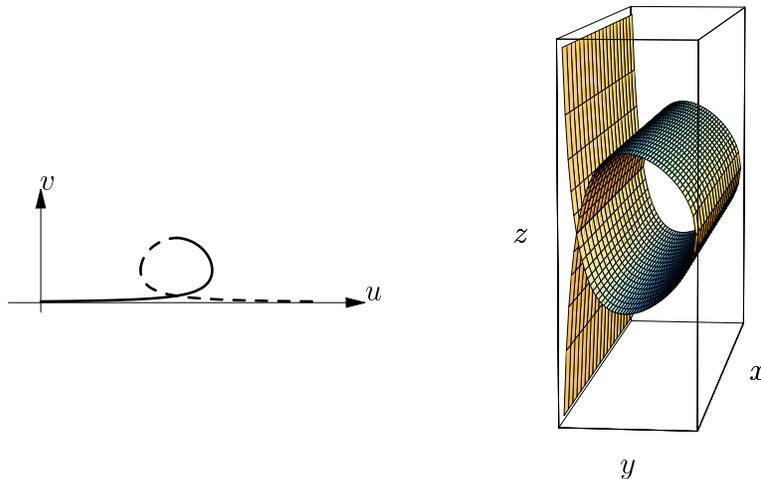


Figura 4.12. Curva perfil e superfície G_2 -invariante para $H = 1$ e $k > 0$.

Superfícies de curvatura $H < 1$

Neste caso a curva perfil é dada por

$$u(v) = \arcsen(H - kv) - \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}} \ln \left[\frac{2(1 - H^2 + Hkv + \sqrt{(1 - H^2)(1 - (kv - H)^2))}}{H\sqrt{1 - H^2}v} \right],$$

onde $0 < v \leq (H + 1)/k$. Esta curva pode ser refletida somente uma vez gerando, com a sua refletida, uma curva do tipo *folium*. Um esboço desta curva é dado na Figura 4.13.

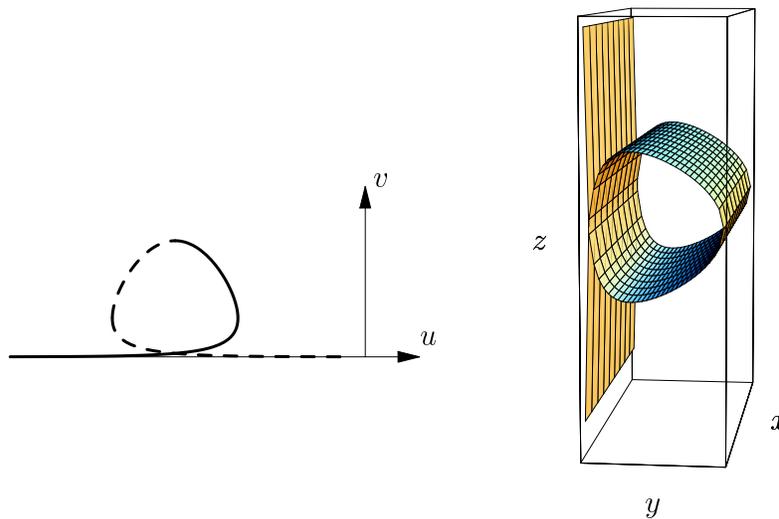


Figura 4.13. Curva perfil e superfície G_2 -invariante para $H < 1$ e $k > 0$.

iii) Se $k < 0$, da equação (4.13), temos que $H < 1$ e integrando obtemos

$$u(v) = \arcsen(H - kv) - \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}} \ln \left[\frac{2(1 - H^2 + Hkv + \sqrt{(1 - H^2)(1 - (kv - H)^2))}}{H\sqrt{1 - H^2}v} \right],$$

onde $0 < v \leq (H - 1)/k$. Esta curva pode ser refletida somente uma vez gerando uma curva do tipo *Gauss*, veja a Figura 4.14.



Figura 4.14. Curva perfil para $H < 1$ e $k < 0$.

4.3.3 Superfícies invariantes por translações ao longo do eixo z

Neste caso o espaço das órbitas $\mathcal{B} = (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})/G_4 = \mathbb{H}^2$ e

$$\tilde{g} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

Observamos que a curvatura média H de Σ é $H = k_g$, portanto as superfícies G_4 -invariantes de CMC são cilindros verticais sobre as curvas γ de curvatura geodésica constante.

Superfícies mínimas ($H = 0$)

Neste caso as curvas perfil são as geodésicas de \mathbb{H}^2 (veja a Figura 4.15) ou seja, semi-retas perpendiculares ao eixo u e semi-circunferências superiores com centro no eixo u . Logo, temos que as correspondentes superfícies são totalmente geodésicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Em particular:

- i) Se $k = 0$, γ é a reta $u = c$, $c \in \mathbb{R}$ e Σ é o plano vertical $x = c$.
- ii) Se $k \neq 0$, integrando a equação

$$\frac{du}{dv} = \frac{-kv}{\sqrt{1 - k^2v^2}}, \quad 0 < v < \frac{1}{|k|},$$

temos

$$u(v) = \frac{\sqrt{1 - k^2v^2}}{k} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esta curva, com a sua refletida, representa uma semi-circunferência superior ortogonal ao eixo u , com centro em $(c, 0)$ e raio $1/|k|$. A superfície Σ é um semi-cilindro vertical de raio $1/|k|$.

Superfícies de curvatura média $H > 0$

Neste caso as curvas perfil são circunferências, horocircunferências e hipercircunferências (também chamadas curvas equidistantes) de \mathbb{H}^2 . Lembramos as seguintes definições:

Definição 4.3.5. Uma *horocircunferência* do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ é ou uma reta paralela ao eixo u , ou uma circunferência tangente ao eixo u (veja a Figura 4.15).

Definição 4.3.6. Uma *curva equidistante* do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ é ou uma semi-reta que corta o eixo u segundo um ângulo agudo ou obtuso, ou um arco de circunferência que corta u , mas cujo centro não está em u (veja a Figura 4.15).

Das equações (4.7) e (4.9) temos que $kv = \dot{\sigma} = H - \cos \sigma$.

i) Se $k = 0$, então

$$\cos \sigma = H \quad \text{e} \quad \text{sen } \sigma = \sqrt{1 - H^2}.$$

Logo, se $H = 1$, a curva perfil é a horocircunferência $v = c$, para $c > 0$. Neste caso a superfície é o plano vertical $y = c$, para $c > 0$. Se $H < 1$, a equação (4.11) torna-se

$$\frac{du}{dv} = \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}},$$

e, integrando, obtemos que γ é a hipercircunferência

$$u = \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}}v + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

A superfície Σ é, portanto, o plano

$$\sqrt{1 - H^2}x - Hy = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se $k \neq 0$, a equação (4.12) assume a forma:

$$\frac{du}{dv} = \frac{H - kv}{\sqrt{1 - (H - kv)^2}}, \quad (4.14)$$

e, integrando, temos que

$$u = \frac{\sqrt{1 - (H - kv)^2}}{k} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pela Proposição 4.3.1 podemos assumir $c = 0$. Refletindo a curva obtemos

$$u^2 + \left(v - \frac{H}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2}, \quad v > 0.$$

Conseqüentemente:

ii) se $k > 0$, a curva γ , de acordo com o valor de H , pode ser de três tipos.

Superfícies de curvatura $H > 1$

Neste primeiro caso, temos que

$$\frac{(H - 1)}{k} \leq v \leq \frac{(H + 1)}{k} \quad \text{e} \quad \frac{H}{k} > \frac{1}{k}.$$

Portanto, γ é uma *circunferência* de raio $1/k$ e centro $(0, H/k)$ em \mathbb{H}^2 .

Superfícies de curvatura $H = 1$

Neste segundo caso, temos que

$$0 < v \leq \frac{2}{k}.$$

Portanto, a curva perfil é a *horocircunferência* dada por uma circunferência tangente ao eixo u com centro $(0, 1/k)$ e raio $1/k$.

Superfícies de curvatura $H < 1$

Neste terceiro caso, resulta que

$$0 < v \leq \frac{(H+1)}{k} \quad \text{e} \quad \frac{H}{k} < \frac{1}{k}.$$

Logo, a curva perfil é a *hipercircunferência* dada por um arco de circunferência com centro $(0, H/k)$ e raio $1/k$.

iii) Se $k < 0$, da equação (4.14), temos que

$$0 < v \leq \frac{(H-1)}{k} \quad \text{e} \quad H < 1.$$

Então a curva γ é a *hipercircunferência* dada por um arco de circunferência com centro $(0, H/k)$ e raio $1/|k|$.

Teorema 4.3.7. *As superfícies de curvatura média constante G_4 -invariantes em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são cilindros verticais sobre curvas de \mathbb{H}^2 com curvatura geodésica constante. Além disso, temos que estas curvas perfil são:*

- se $H = 0$, geodésicas de \mathbb{H}^2 . Em particular, se
 1. $k = 0$, a curva é uma semi-reta perpendicular ao eixo u ;
 2. $k \neq 0$, a curva é uma semi-circunferência superior com centro no eixo u .
- $H > 0$
 1. se $H > 1$ e $k > 0$, circunferências;
 2. se $H = 1$ e $k \geq 0$, horocircunferências;
 3. se $H < 1$, hipercircunferências.

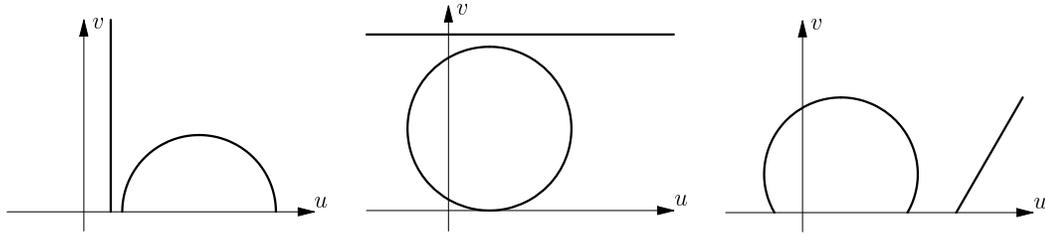


Figura 4.15. Geodésicas de \mathbb{H}^2 , horocircunferências e hipercircunferências.

4.4 Superfícies de CMC invariantes pela ação do grupo G_{34}

Seja G_{34} o subgrupo de isometrias gerado por $X_{34} = aX_3 + bX_4$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Observamos que, sendo a ação deste grupo sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ livre, então $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})_r = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Introduzindo coordenadas cilíndricas (r, θ, z) em $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, com $r > 0$ e $\theta \in (0, \pi)$, podemos escrever

$$g = \frac{dr^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{d\theta^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} + dz^2.$$

Também, temos que

$$X_{34} = ar \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{\partial}{\partial z},$$

e as funções G_{34} -invariantes são soluções da equação diferencial

$$ar \frac{\partial \zeta}{\partial r} + b \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

ou seja,

$$b \frac{dr}{r} = adz.$$

Conseqüentemente, temos o seguintes conjunto completo de invariantes funcionalmente independentes

$$u(r, \theta, z) = \theta \quad \text{e} \quad v(r, \theta, z) = az - b \ln r$$

e o espaço das órbitas é $\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in (0, \pi)\}$. Sendo que

$$\begin{aligned} \nabla u &= \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \nabla v &= -br \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} + a \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

a matriz h e a sua inversa têm a forma:

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 u & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 u \end{pmatrix}, \quad (h^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 u} \end{pmatrix}.$$

Logo, pelo Teorema A.3.1, temos que a métrica quociente é dada por

$$\tilde{g} = \frac{du^2}{\text{sen}^2 u} + \frac{dv^2}{a^2 + b^2 \text{sen}^2 u}.$$

Os campos de vetores unitários tangente e normal à curva $\gamma(s)$ são respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\text{sen } u \cos \sigma, \sqrt{a^2 + b^2 \text{sen}^2 u} \text{sen } \sigma), \\ \mathbf{n} &= (-\text{sen } u \text{sen } \sigma, \sqrt{a^2 + b^2 \text{sen}^2 u} \cos \sigma). \end{aligned}$$

A função volume de uma órbita principal ξ é

$$\omega(\xi) = \sqrt{\langle X_{34}, X_{34} \rangle} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \text{sen}^2 u}{\text{sen}^2 u}}$$

e

$$D_{\mathbf{n}} \ln \omega(\xi) = \frac{a^2 \cos u \text{sen } \sigma}{a^2 + b^2 \text{sen}^2 u}.$$

Depois de ter calculado a curvatura geodésica de γ

$$k_g = \frac{-b^2 \cos u \text{sen}^2 u \text{sen } \sigma}{a^2 + b^2 \text{sen}^2 u} + \dot{\sigma},$$

pelo Teorema de Redução, temos que a curvatura média H de Σ ao longo da órbita principal ξ pode ser escrita como

$$H = \dot{\sigma} - \cos u \text{sen } \sigma.$$

Isto implica que a curva $\gamma(s)$ deve satisfazer ao seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} \dot{u} = \text{sen } u \cos \sigma \\ \dot{v} = \sqrt{(a^2 + b^2 \text{sen}^2 u)} \text{sen } \sigma \\ \dot{\sigma} = H + \cos u \text{sen } \sigma. \end{cases} \quad (4.15)$$

4.4.1 Classificação das soluções

De agora em diante assumiremos que a curvatura média H seja constante e não negativa. Antes de começar o estudo das equações (4.15) vamos fazer algumas observações importantes.

Proposição 4.4.1.

1. Toda translação de uma curva solução de (4.15) na direção v é ainda solução de (4.15).
2. Uma reflexão de uma curva γ solução de (4.15) em relação à reta $v = v_0$, é uma curva $\tilde{\gamma}$ solução de (4.15) (para $-H$).

Demonstração. O primeiro item é uma consequência imediata de que o sistema (4.15) é independente de v . Para o segundo item observamos que se $\gamma(s) = (u(s), v(s), \sigma(s))$, então $\tilde{\gamma}(s) = (u(s), 2v_0 - v(s), 2\pi - \sigma(s))$. Logo, resulta

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} = \text{sen } \tilde{u} \cos \tilde{\sigma} \\ \dot{\tilde{v}} = \sqrt{(a^2 + b^2 \text{sen}^2 \tilde{u})} \text{sen } \tilde{\sigma} \\ \dot{\tilde{\sigma}} = -H + \cos \tilde{u} \text{sen } \tilde{\sigma}, \end{cases}$$

o que conclui a prova. \square

Corolário 4.4.2. *Seja $\gamma(s)$ uma solução de (4.15) definida em $(s_0 - \epsilon, s_0]$ com $\sigma(s_0) = \pm\pi/2$. Então $\gamma(s)$ pode ser estendida a uma curva definida no intervalo $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ com uma reflexão em relação à reta $v = v(s_0)$.*

Demonstração. Segue do segundo item da Proposição 4.4.1. \square

Proposição 4.4.3. *Se H é constante em Σ , então a função*

$$J(s) = \frac{H \cos u + \text{sen } \sigma}{\text{sen } u}$$

é constante ao longo de cada curva $\gamma(s)$ solução do sistema (4.15). Portanto, as soluções deste sistema são caracterizadas por

$$\frac{H \cos u + \text{sen } \sigma}{\text{sen } u} = k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Demonstração. Derivando a equação (4.16) e usando a primeira e a última equação do sistema (4.15) temos que

$$\dot{J}(s) = \frac{\dot{\sigma} \text{sen } u \cos \sigma - \dot{u}(H + \cos u \text{sen } \sigma)}{\text{sen}^2 u} = 0.$$

\square

Por último, vamos fazer uma observação que ajudará no estudo qualitativo das curvas perfil. Antes disso notamos que, usando (4.16), a última equação do sistema (4.15) reescreve-se como

$$\dot{\sigma} = \tan u (k - \text{sen } u \text{sen } \sigma). \quad (4.17)$$

Observação 4.4.4. Fixado $k \in \mathbb{R}$, indicamos por

$$\gamma_k(s) = (u(s), v(s), \sigma(s)), \quad s \in (s_1, s_2),$$

a curva perfil relativa ao caso k e $H > 0$. Então a curva perfil γ_{-k} é a refletida de γ_k com respeito à reta $u = \pi/2$, percorrida no sentido oposto. De fato, esta última curva é dada por

$$\gamma_{-k}(s) = (\tilde{u}(s), \tilde{v}(s), \tilde{\sigma}(s)) = (\pi - u(s_1 + s_2 - s), v(s_1 + s_2 - s), 2\pi - \sigma(s_1 + s_2 - s)),$$

com $s \in (s_1, s_2)$. Conseqüentemente, temos que

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} = \text{sen } \tilde{u} \cos \tilde{\sigma} \\ \dot{\tilde{v}} = \sqrt{(a^2 + b^2 \text{sen}^2 \tilde{u})} \text{sen } \tilde{\sigma} \\ \dot{\tilde{\sigma}} = -\tan \tilde{u} (k + \text{sen } \tilde{u} \text{sen } \tilde{\sigma}). \end{cases} \quad (4.18)$$

ou seja, ela satisfaz ao sistema (4.15) para $-k$ (veja (4.17)). Note-se que, como conseqüência deste fato, as curvas perfil das superfícies G_{34} -invariantes com curvatura média $H > 0$ relativas ao caso $k = 0$ são simétricas em relação à reta $u = \pi/2$.

Podemos agora começar o estudo. Para facilitar a leitura deste caso antecipamos o teorema que segue. Observe-se que neste teorema a indexação é a mesma que será depois usada na demonstração dos casos aos quais ela se refere.

Teorema 4.4.5. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície de CMC G_{34} -invariante e seja $\gamma = \Sigma/G_{34}$ a curva perfil no espaço das órbitas. Então temos a seguinte caracterização da γ de acordo com o valor da curvatura média H e de k .*

A) ($\mathbf{H} = 0$) - A curva perfil

A_1) para $k = 0$ é uma **reta horizontal** e gera a superfície afunilada;

A_2) para $|k| > 1$ é do tipo **semi-circunferência**;

A_3) para $|k| = 1$ é do tipo **hipérbole**;

A_4) para $0 < |k| < 1$ é do tipo dado na Figura 4.18;

B) ($\mathbf{H} > 1$) - A curva perfil

B_1) para $k = 0$ é do tipo **elipse**;

B_2) para $k \neq 0$ é do tipo **nodal**.

C) ($\mathbf{H} = 1$) - A curva perfil

C_1) para $k = 0$ é do tipo **parábola**;

C_2) para $k \neq 0$ é do tipo **folium**.

D) ($\mathbf{0} < \mathbf{H} < \mathbf{1}$) - A curva perfil

D_1) para $k = 0$ é do tipo **parábola limitada**;

D_2) para $|k| > \sqrt{1 - H^2}$ é do tipo dado na Figura 4.26;

D_3) para $|k| = \sqrt{1 - H^2}$ é do tipo dado na Figura 4.27;

D_4) para $0 < |k| < \sqrt{1 - H^2}$ é do tipo dado na Figura 4.28.

Demonstração. Começamos com o estudo das curvas perfil relativas às superfícies mínimas.

A) Superfícies mínimas ($H = 0$)

De (4.16) segue-se que $\sin \sigma = k \sin u$. Conseqüentemente, temos duas possibilidades dependendo de k :

A₁) Se $k = 0$ então $\sigma = 0$ e $dv/du = 0$, portanto $v = c$, com $c \in \mathbb{R}$. A correspondente superfície Σ , representada da Figura 2.6, é chamada *superfície afunilada* e tem equação

$$az = b \ln r + c.$$

Observe-se que esta superfície é completa e regrada pelas geodésicas correspondentes às curvas de nível, como vimos no Exemplo 2.1.14 do Capítulo 2. No caso $a = 1$ e $b = 0$, obtemos que a superfície G_3 -invariante é o plano $z = c$.

Se $k \neq 0$, então

$$\sin \sigma = k \sin u \quad \text{e} \quad \cos \sigma = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u},$$

portanto,

$$\frac{dv}{du} = k \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \sin^2 u}{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad \sin u < 1/k. \quad (4.19)$$

A integral para esta equação é elíptica do primeiro tipo². Em particular, quando $a = 1$ e $b = 0$ temos

$$v(u) = k F(u, k^2).$$

É importante observar que, devido à expressão (4.19), podemos estudar somente o caso $k > 0$. De fato, as curvas perfil para $k < 0$ são obtidas refletindo com respeito ao eixo u aquelas do caso $k > 0$. Notamos que

$$\dot{\sigma}(s) = \sin \sigma \cos u = k \sin u \cos u, \quad (4.20)$$

e que também

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0^+} \sin \sigma &= \lim_{u \rightarrow 0^+} k \sin u = 0, \\ \lim_{u \rightarrow \pi^-} \sin \sigma &= \lim_{u \rightarrow \pi^-} k \sin u = 0. \end{aligned}$$

A₂) Se $k > 1$, então $u \in (0, u_0] \cup [\pi - u_0, \pi)$, onde $u_0 = \arcsen(1/k)$. Se $u = u_0$ ou $u = \pi - u_0$, temos $\sin \sigma = 1$ e, portanto, a curva γ é paralela à direção v . Da equação (4.20) temos que $\dot{\sigma}(s) \neq 0$, em particular em $(0, u_0]$ a função $\sigma(s)$ é sempre crescente e no intervalo $[\pi - u_0, \pi)$ é sempre decrescente (veja Figura 4.16).

²A integral elíptica do primeiro tipo é definida por:

$$F(\phi, m) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}.$$

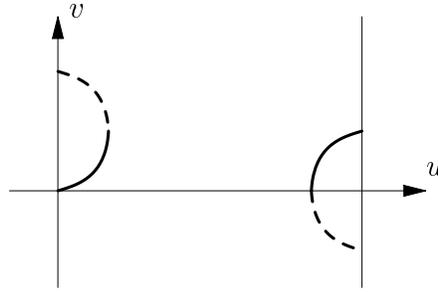


Figura 4.16. Curva perfil para $H = 0$ e $k > 1$.

A_3) Se $k = 1$, então $u \neq \pi/2$ e, integrando a equação (4.19) temos

$$v(u) = \frac{\cos u}{|\cos u|} \left[\sqrt{a^2 + b^2} \tanh^{-1} \left[\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 u}} \right] - \frac{ba}{|a|} \sinh^{-1} \left(\frac{b \sin u}{a} \right) \right].$$

Sendo que

$$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} v(u) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} v(u) = +\infty,$$

a reta $u = \pi/2$ é assíntota vertical para a curva $v(u)$ (veja Figura 4.17).

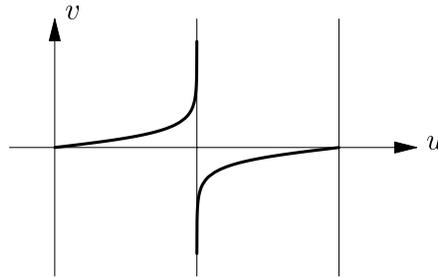


Figura 4.17. Curva perfil para $H = 0$ e $k = 1$.

No caso em que $a = 1$ e $b = 0$, integrando a equação

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{|\cos u|}, \quad u \neq \frac{\pi}{2},$$

temos

$$v(u) = \frac{\cos u}{|\cos u|} \tanh^{-1}(\sin u) + c, \quad u \in (0, \pi) \setminus \frac{\pi}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Substituindo as funções G_3 -invariantes obtemos a seguinte equação para a superfície Σ

$$z(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \tanh^{-1}(\sin \theta) + c, \quad \theta \in (0, \pi) \setminus \frac{\pi}{2}.$$

Observamos que para $\theta \in (0, \pi/2)$ obtemos a superfície mínima da Figura 2.5.

A_4) Se $0 < k < 1$, então $u \in (0, \pi)$. Analisando a expressão (4.20) e do fato de que em $u = \pi/2$ temos $\sin \sigma = k < 1$, segue-se que em $u = \pi/2$ a curva γ tem um ponto de inflexão com tangente oblíqua. O esboço desta curva é dado na Figura 4.18.

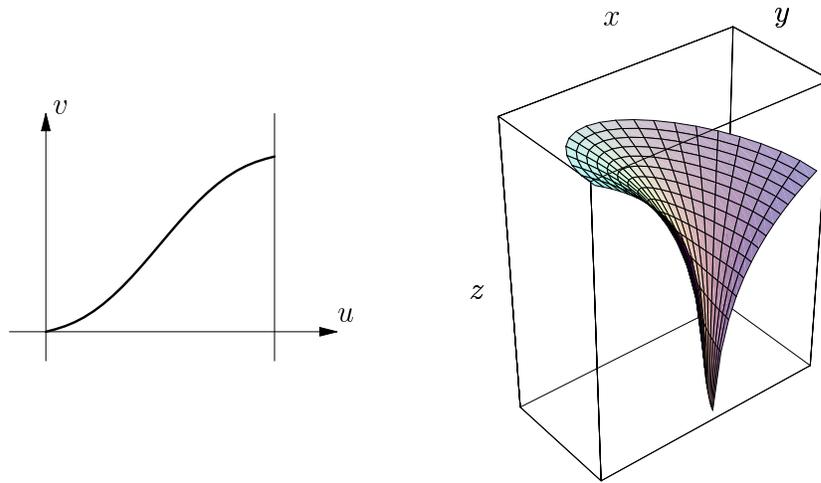


Figura 4.18. Curva perfil e superfície G_{34} -invariante para $H = 0$ e $k = 1/2$.

Superfícies de curvatura média $H > 0$

Lembramos que neste caso, devido à Observação 4.4.4, é suficiente estudar as curvas perfil para $k \geq 0$.

i) Se $k = 0$, da primeira integral, temos que

$$\sin \sigma = -H \cos u \quad \text{e} \quad \cos \sigma = \sqrt{1 - H^2 \cos^2 u},$$

portanto:

$$\frac{dv}{du} = -H \cot u \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \sin^2 u}{1 - H^2 \cos^2 u}}. \quad (4.21)$$

Dependendo do valor de H , a curva γ pode ser de três tipos. De fato, temos

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \sin \sigma = -H \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow \pi^-} \sin \sigma = H,$$

ou seja:

- se $H > 1$, a curva γ tem distância positiva das retas $u = 0$ e $u = \pi$;
- se $H = 1$, a curva γ tende assintoticamente às retas $u = 0$ e $u = \pi$;
- se $H < 1$, a curva γ tende às retas $u = 0$ e $u = \pi$ com um ângulo $\sigma = \arcsen(-H)$ e $\sigma = \arcsen(H)$, respectivamente.

Da terceira equação do sistema (4.15) e de (4.16), temos que

$$\dot{\sigma}(s) = H \sin^2 u > 0,$$

ou seja, a função $\sigma(s)$ é sempre crescente.

B_1) Superfícies de curvatura $H > 1$

Neste caso é fácil ver que $u_m \leq u \leq u_M$, onde

$$u_m = \arccos\left(\frac{1}{H}\right) \quad \text{e} \quad u_M = \pi - u_m = \arccos\left(\frac{-1}{H}\right).$$

Escolhendo como condições iniciais $u(0) = u_m$ e $v(0) = 0$, temos

$$\sigma(0) = 3\pi/2, \quad \dot{\sigma}(0) = H + \cos u(0) \operatorname{sen} \sigma(0) = \frac{(H^2 - 1)}{H} > 0.$$

Portanto $\sigma(s)$ rotaciona no sentido positivo. Além disso, se $u_M = u(s_2)$ para algum $s_2 > 0$, temos $\operatorname{sen} \sigma(s_2) = -H \cos u_M = 1$, logo $\sigma(s_2) = \pi/2$ e existe $s_1 \in (0, s_2)$ tal que $\sigma(s_1) = 2\pi$. Portanto, em $u(s_1) = \pi/2$ existe um mínimo local. Sendo que a curva é simétrica com respeito à reta $u = \pi/2$ (veja Observação 4.4.4) temos que $v(s_2) = v(0) = 0$. Logo, podemos refletir a curva γ só uma vez em relação ao eixo u obtendo uma curva do tipo *ellipse* como mostra a Figura 4.19.

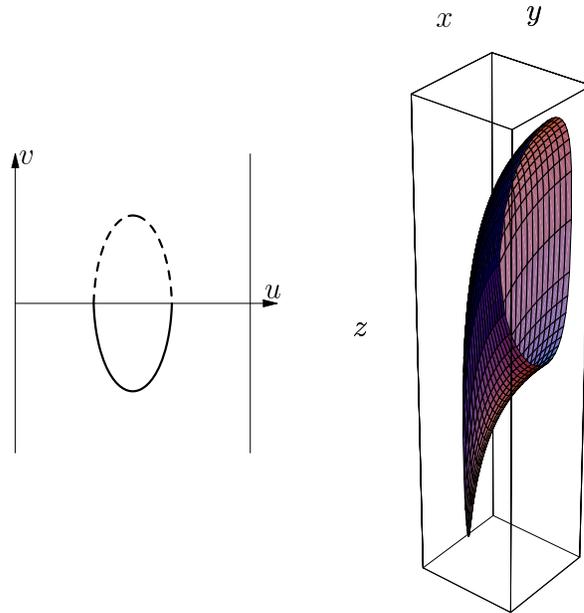


Figura 4.19. Curva perfil e superfície G_{34} -invariante para $H > 1$ e $k = 0$.

Quando $a = 1$ e $b = 0$, a equação (4.21) pode ser integrada explicitamente:

$$v(u) = -\frac{H}{\sqrt{H^2 - 1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{1 - H^2 \cos^2 u}{H^2 - 1}} \right] + c, \quad u \in [u_m, u_M],$$

e substituindo a expressão das funções invariantes obtemos a seguinte equação para Σ

$$z(r, \theta) = -\frac{H}{\sqrt{H^2 - 1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{1 - H^2 \cos^2 \theta}{H^2 - 1}} \right] + c,$$

com $\theta \in [\arccos(1/H), \arccos(-1/H)]$ e $c \in \mathbb{R}$. Um desenho desta superfície G_3 -invariante é dado na Figura 4.20.

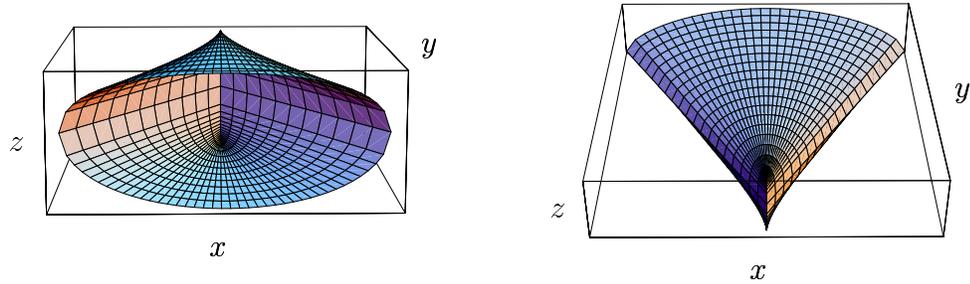


Figura 4.20. Superfície G_3 -invariante para $H > 1$ e $k = 0$.

C_1) Superfícies de curvatura $H = 1$

Neste caso as retas $u = 0$ e $u = \pi$ são assíntotas verticais e a curva $v(u)$ tem um mínimo local em $u = \pi/2$. Integrando a equação (4.21) temos que

$$v(u) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 u}}{\operatorname{sen} u} - b \tanh^{-1} \left[\frac{b \operatorname{sen} u}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 u}} \right] + c, \quad u \in (0, \pi),$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Logo a correspondente superfície é dada por:

$$az(r, \theta) = b \ln r + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{\operatorname{sen} \theta} - b \tanh^{-1} \left[\frac{b \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] + c,$$

com $\theta \in (0, \pi)$ e $a \neq 0$ (veja a Figura 4.21). Notamos que em coordenadas cartesianas temos a seguinte família a dois parâmetros de gráficos definidos em todo o plano hiperbólico

$$az(x, y) = \frac{\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2 y^2}}{y} - b \ln \left(\frac{\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2 y^2} + by}{|a|} \right) + c,$$

onde $y > 0$. Para $a = 1$ obtém-se a família de superfícies achada por R. Sá Earp em [Sa].

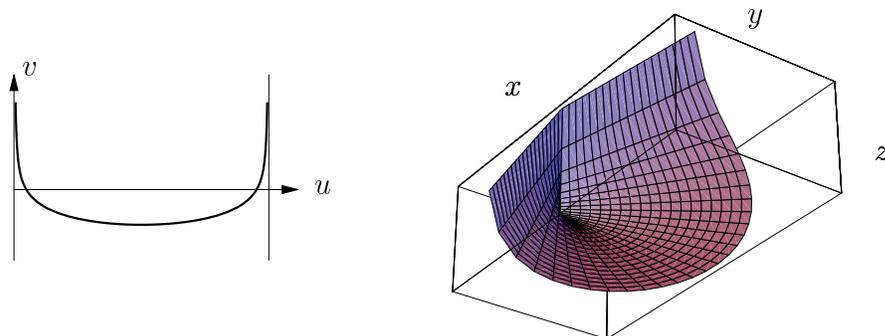


Figura 4.21. Curva perfil e superfície G_{34} -invariante para $H = 1$ e $k = 0$.

Se $a = 0$, integrando a equação diferencial

$$\frac{dv}{du} = -|b| \cot u,$$

obtemos a seguinte curva perfil (veja a Figura 4.22)

$$v(u) = -|b| \ln(\operatorname{sen} u) + c, \quad u \in (0, \pi), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Substituindo agora as funções G_4 -invariantes temos que a equação (em coordenadas cilíndricas) da correspondente superfície Σ é

$$b \ln r = |b| \ln(\operatorname{sen} \theta) - c, \quad \theta \in (0, \pi),$$

e portanto

$$\begin{cases} r = e^{-\frac{c}{b}} \operatorname{sen} \theta & \text{se } b > 0 \\ r = e^{-\frac{c}{b}} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} & \text{se } b < 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

No caso $b > 0$ a superfície Σ é um cilindro vertical sem a geratriz passando pela origem. No caso $b < 0$ a superfície é o plano $y = e^{-\frac{c}{b}}$.

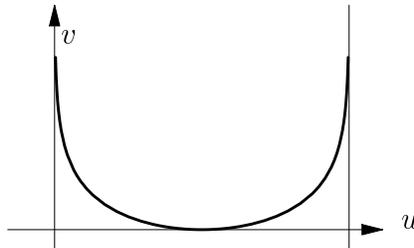


Figura 4.22. Curva perfil para $a = 0$, $b > 0$, $H = 1$ e $k = 0$.

Quando $a = 1$ e $b = 0$ temos

$$v(u) = \frac{1}{\operatorname{sen} u} + c, \quad u \in (0, \pi), \quad c \in \mathbb{R},$$

a correspondente superfície G_3 -invariante é dada por

$$z(r, \theta) = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + c, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Em coordenadas cartesianas esta superfície escreve-se como

$$z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} + c, \quad y > 0$$

e fornece um exemplo de gráfico completo de curvatura constante $H = 1$.

D_1) Superfícies de curvatura $H < 1$

Neste caso $0 < u < \pi$ e $u = \pi/2$ é um mínimo para a curva $v(u)$. Um desenho desta curva perfil é dado na Figura 4.23. Para $a = 1$ e $b = 0$ a equação (4.21) pode-se integrar explicitamente e nos dá a seguinte curva perfil:

$$v(u) = \frac{H}{\sqrt{1-H^2}} \ln \left(2 \frac{\sqrt{1-H^2} + \sqrt{1-H^2 \cos^2 u}}{\sin u} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

A correspondente superfície completa G_3 -invariante é dada por:

$$z(r, \theta) = \frac{H}{\sqrt{1-H^2}} \ln \left(2 \frac{\sqrt{1-H^2} + \sqrt{1-H^2 \cos^2 \theta}}{\sin \theta} \right) + c,$$

com $\theta \in (0, \pi)$.

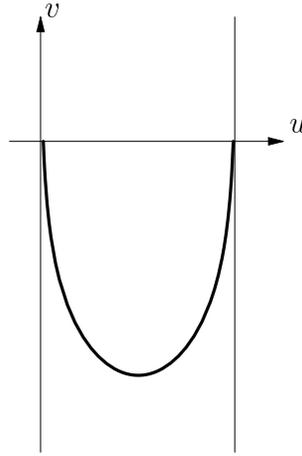


Figura 4.23. Curva perfil para $H < 1$ e $k = 0$.

ii) Se $k > 0$, então

$$\sin \sigma = k \sin u - H \cos u \quad \text{e} \quad \cos \sigma = \sqrt{1 - (k \sin u - H \cos u)^2},$$

logo

$$\frac{dv}{du} = \frac{(k \sin u - H \cos u) \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 u}}{\sin u \sqrt{1 - (k \sin u - H \cos u)^2}}. \quad (4.23)$$

Primeiramente, notamos que:

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \sin \sigma = -H \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow \pi^-} \sin \sigma = H,$$

portanto:

- se $H > 1$, a curva γ dista positivamente das retas $u = 0$ e $u = \pi$;
- se $H = 1$, a curva γ tende assintoticamente à reta $u = 0$ ou à reta $u = \pi$;

- se $H < 1$, a curva γ tende às retas $u = 0$ e $u = \pi$ com ângulos $\sigma = \arcsen(-H)$ e $\sigma = \arcsen(H)$, respectivamente.

Além disso, da terceira equação do sistema (4.15) e da primeira integral (4.16), resulta, para $\cos u \neq 0$, que

$$\dot{\sigma}(s) = \sen u (H \sen u + k \cos u).$$

Note-se que, sempre da terceira equação de (4.15), se $\cos u = 0$, então $\dot{\sigma} = H > 0$. Portanto, $\dot{\sigma} = 0$ implica $\cos u \neq 0$. Conseqüentemente

$$\dot{\sigma}(s) = 0 \Leftrightarrow u = \tilde{u} = \arctan\left(\frac{-k}{H}\right) = \pi - \arcsen\left(\frac{k}{\sqrt{H^2 + k^2}}\right), \quad (4.24)$$

e

$$\dot{\sigma}(s) > 0 \Leftrightarrow u \in (0, \tilde{u}). \quad (4.25)$$

B₂) Superfícies de curvatura $H > 1$

Neste caso $u_m \leq u \leq u_M$. Observamos que u_m e u_M satisfazem as seguintes equações:

$$k \sen u_m - H \cos u_m = -1, \quad k \sen u_M - H \cos u_M = 1,$$

logo, escolhendo as condições iniciais $u(0) = u_m$ e $v(0) = 0$, resulta que:

$$\sigma(0) = \frac{3\pi}{2} \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(0) = \frac{H(H^2 + k^2 - 1) - k\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2} > 0.$$

Conseqüentemente, o ângulo $\sigma(s)$ rotaciona no sentido positivo. Para $\tilde{u} > u_M$, a função $\sigma(s)$ é sempre crescente (veja (4.25)). Portanto, como para $u(s_2) = u_M$, $\sigma(s_2) = \pi/2$, existe $s_1 \in (0, s_2)$ tal que $\sigma(s_1) = 2\pi$, ou seja,

$$u(s_1) = \arctan\left(\frac{H}{k}\right) = \arcsen\left(\frac{H}{\sqrt{H^2 + k^2}}\right)$$

é um mínimo local da curva $v(u)$. Dependendo do valor de k temos a seguinte tabela:

	$k \geq 1$	$0 < k < 1$
u_m	$\arcsen\left(\frac{-k + H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2}\right)$	$\arcsen\left(\frac{-k + H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2}\right)$
u_M	$\arcsen\left(\frac{k + H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2}\right)$	$\pi - \arcsen\left(\frac{k + H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2}\right)$

A curva pode ser refletida infinitas vezes e a curva resultante é, portanto, do tipo *nodal* (veja a Figura 4.24).

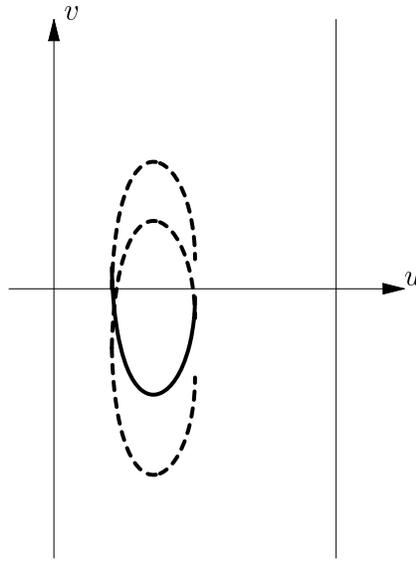


Figura 4.24. Curva perfil para $H > 1$ e $k = 1$.

C_2) Superfícies de curvatura $H = 1$

Neste caso resulta que $0 < u \leq u_M$, o eixo v é assíntota vertical para a curva $v(u)$ e quando $u = u_M$, sendo $k \operatorname{sen} u_M - \cos u_M = 1$, a curva torna-se paralela à direção v . É fácil ver que \tilde{u} , definido por (4.24), é sempre maior que u_M e, portanto, usando (4.25), deduzimos que a função $\sigma(s)$ é sempre crescente. O mínimo local para $v(u)$ é dado por $\arctan(1/k)$. Dependendo do valor de k temos a seguinte tabela:

	$k \geq 1$	$0 < k < 1$
u_M	$\arcsen\left(\frac{2k}{1+k^2}\right)$	$\pi - \arcsen\left(\frac{2k}{1+k^2}\right)$

A curva perfil pode ser refletida somente uma vez e a curva resultante é do tipo *folium* (veja Figura 4.25).

Superfícies de curvatura $H < 1$

Agora temos três casos diferentes dependendo do valor de k .

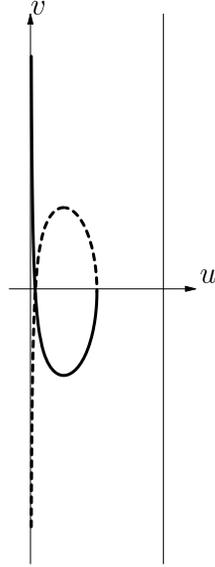


Figura 4.25. Curva perfil para $H = 1$ e $k = 1$.

D_2) Se $k > \sqrt{1 - H^2}$, da equação (4.23) segue-se que $u \in (0, u_m] \cup [u_M, \pi)$, onde:

	$k \geq 1$	$\sqrt{1 - H^2} < k < 1$
u_m	$\arcsen \left(\frac{k + H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2} \right)$	$\pi - \arcsen \left(\frac{k + H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2} \right)$
u_M	$\pi - \arcsen \left(\frac{k - H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2} \right)$	$\pi - \arcsen \left(\frac{k - H\sqrt{H^2 + k^2 - 1}}{H^2 + k^2} \right)$

Quando $u = u(s_1) = u_m$ ou $u = u_M$, tem-se $\sigma = \pi/2$. Logo, a curva γ torna-se paralela à direção v . Sendo que $u_m < \tilde{u} < u_M$ resulta que, no intervalo $(0, u_m]$, a função $\sigma(s)$ é sempre crescente e em $[u_M, \pi)$, sempre decrescente. Além disso, como $\sigma(s_1) = \pi/2$ e $u \rightarrow 0^+$ implica $\sin \sigma \rightarrow -H \in (-1, 0)$, segue-se a existência de $s_0 < s_1$ tal que $\sigma(s_0) = 2\pi$. Logo, em

$$u(s_0) = \arcsen \left(\frac{H}{\sqrt{H^2 + k^2}} \right)$$

a curva $v(u)$ tem um mínimo local. Na Figura 4.26 temos o esboço desta curva perfil.

D_3) Se $k = \sqrt{1 - H^2}$, então

$$\frac{dv}{du} = \frac{(k - H \cot u) \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 u}}{|k \cos u + H \sin u|}, \quad u \neq \tilde{u},$$

onde

$$\tilde{u} = \arctan\left(\frac{-k}{H}\right) = \arcsen(k).$$

Das equações (4.24) e (4.25) deduzimos que $\dot{\sigma}(s) \neq 0$; em particular, $\sigma(s)$ é crescente em $(0, \tilde{u})$ e decrescente em (\tilde{u}, π) . É fácil ver que

$$\lim_{u \rightarrow \tilde{u}} \text{sen } \sigma = 1$$

e, portanto, $u = \tilde{u}$ é assíntota vertical para a curva $v(u)$. Além disso, como

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \text{sen } \sigma = -H \in (-1, 0),$$

existe um mínimo local para a curva $v(u)$ dado por

$$\arctan(H/k) = \arcsen(H) \in (0, \tilde{u}).$$

Um desenho desta curva é dado na Figura 4.27.

D_4) Se $0 < k < \sqrt{1 - H^2}$, então $u \in (0, \pi)$. Da equação (4.24) temos que $\sigma(s)$ é crescente se, e somente se, $u \in (0, \tilde{u})$. Além disso, como para $u = \tilde{u}$ temos $\text{sen } \sigma = \sqrt{H^2 + k^2} < 1$, segue-se que em \tilde{u} a curva $v(u)$ tem um ponto de inflexão com tangente oblíqua. Também neste caso, como $u \rightarrow 0^+$ implica $\text{sen } \sigma \rightarrow -H$, o ponto $\arctan(H/k) \in (0, \tilde{u})$ é de mínimo local. Um desenho da curva é dado na Figura 4.28.

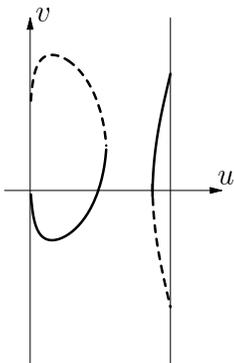


Figura 4.26. Curva perfil para $H < 1$ e $k > \sqrt{1 - H^2}$.

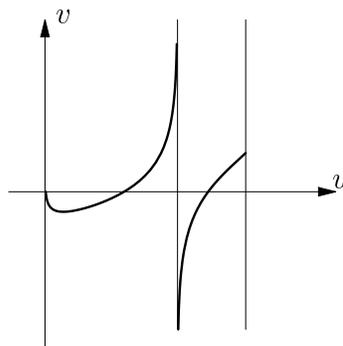


Figura 4.27. Curva perfil para $H < 1$ e $k = \sqrt{1 - H^2}$.

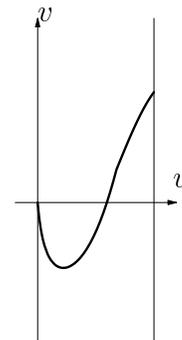


Figura 4.28. Curva perfil para $H < 1$ e $k < \sqrt{1 - H^2}$.

□

4.5 Superfícies helicoidais

Seja G_{124}^* o subgrupo de isometrias gerado pelo campo $X_{12}^* + aX_4$, com $a \in \mathbb{R}$. Como este grupo combina rotações ao redor do eixo $(0, 1, z)$ com translações verticais, será chamado *helicoidal* e, conseqüentemente, as superfícies G_{124}^* -invariantes serão ditas *superfícies helicoidais*. Introduzindo coordenadas cilíndricas (r, θ, z) em $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, com $r > 0$ e $\theta \in (0, \pi)$, podemos escrever

$$g = \frac{dr^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{d\theta^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} + dz^2.$$

Também temos que

$$X_{124}^* = \frac{(r^2 + 1)}{2} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(r^2 - 1)}{2r} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + a \frac{\partial}{\partial z}.$$

As funções invariantes são as soluções da equação

$$\frac{(r^2 + 1)}{2} \cos \theta \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{(r^2 - 1)}{2r} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + a \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{2dr}{(r^2 + 1) \cos \theta} = \frac{2r d\theta}{(r^2 - 1) \operatorname{sen} \theta} = \frac{dz}{a},$$

portanto, elas são dadas por:

$$u(r, \theta, z) = \frac{r^2 + 1}{r \operatorname{sen} \theta} \quad \text{e} \quad v(r, \theta, z) = z + a \arctan \left(\frac{2r \cos \theta}{r^2 - 1} \right).$$

Conseqüentemente o espaço das órbitas é

$$\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 2\},$$

módulo $u = 2$ no caso em que $a \neq 0$. Sendo que

$$\begin{aligned} \nabla u &= (r^2 - 1) \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(r^2 + 1)}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \nabla v &= \left(\frac{-2ar^2(1 + r^2) \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{2ar(r^2 - 1) \operatorname{sen}^3 \theta}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

usando o Teorema da Métrica Quociente, temos que a matriz h e a sua inversa assumem a forma

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} u^2 - 4 & 0 \\ 0 & \frac{u^2 + 4(a^2 - 1)}{(u^2 - 4)} \end{pmatrix}, \quad (h^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(u^2 - 4)} & 0 \\ 0 & \frac{(u^2 - 4)}{u^2 + 4(a^2 - 1)} \end{pmatrix}$$

Logo, a métrica quociente é dada por

$$\tilde{g} = \frac{du^2}{(u^2 - 4)} + \frac{u^2 - 4}{u^2 + 4(a^2 - 1)} dv^2.$$

Seja $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ uma curva em \mathcal{B} , parametrizada pelo comprimento de arco. Então os campos de vetores unitários tangente e normal à curva $\gamma(s)$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= (\sqrt{u^2 - 4} \cos \sigma, \sqrt{\frac{u^2 + 4(a^2 - 1)}{u^2 - 4}} \operatorname{sen} \sigma), \\ \mathbf{n} &= (-\sqrt{u^2 - 4} \operatorname{sen} \sigma, \sqrt{\frac{u^2 + 4(a^2 - 1)}{u^2 - 4}} \cos \sigma),\end{aligned}$$

onde σ representa o ângulo entre \mathbf{t} e a direção positiva do eixo u . O elemento de volume $\omega(\xi)$ de uma órbita principal ξ é dado por

$$\omega(\xi) = \sqrt{\langle X_{124}^*, X_{124}^* \rangle} = \frac{\sqrt{u^2 + 4(a^2 - 1)}}{2}$$

e a derivada direcional

$$D_{\mathbf{n}} \ln(\omega(\xi)) = -\frac{u\sqrt{u^2 - 4}}{u^2 + 4(a^2 - 1)} \operatorname{sen} \sigma.$$

Logo, após calcular a curvatura geodésica de γ

$$k_g = \dot{\sigma} + \frac{4a^2 u}{u^2 + 4(a^2 - 1)} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\sqrt{u^2 - 4}},$$

pelo Teorema de Redução, temos que a curvatura média H de Σ pode ser escrita como:

$$H = \dot{\sigma} - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}} \operatorname{sen} \sigma.$$

Isto significa que a curva perfil $\gamma(s)$ de uma superfície helicoidal de curvatura média constante H é caracterizada pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{u^2 - 4} \cos \sigma \\ \dot{v} = \sqrt{\frac{u^2 + 4(a^2 - 1)}{u^2 - 4}} \operatorname{sen} \sigma \\ \dot{\sigma} = H - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}} \operatorname{sen} \sigma. \end{cases} \quad (4.26)$$

Observação 4.5.1. No caso $a = 0$ (superfícies de rotação), a última equação diferencial deste sistema é singular no bordo $\{u = 2\}$ do espaço das órbitas \mathcal{B} . Os pontos do bordo representam G_{12}^* -órbitas singulares, ou seja, pontos fixos. Portanto, a função volume $\omega(\xi)$ se anula em todos estes pontos. Estas singularidades no bordo são do tipo regular. A Proposição 1 de [HH1] afirma que para cada ponto do bordo existe uma única curva solução, que começa (respectivamente, termina) em tal ponto singular. Além disso, ela é automaticamente perpendicular ao bordo e necessariamente analítica.

4.5.1 Classificação das soluções

De agora em diante, assumiremos que H seja constante e não negativa. Antes de começar o estudo das equações (4.26), vamos fazer algumas observações.

Proposição 4.5.2.

1. Toda translação de uma curva solução de (4.26) na direção v é também uma curva solução de (4.26).
2. A reflexão de uma curva γ solução de (4.26), em relação à reta $v = v_0$, é uma curva $\tilde{\gamma}$ solução de (4.26) (para $-H$).

Demonstração. O item 1 é uma consequência do fato de que o sistema (4.26) é independente de v . Para o item 2 observamos que se $\gamma(s) = (u(s), v(s), \sigma(s))$, então $\tilde{\gamma}(s) = (u(s), 2v_0 - v(s), 2\pi - \sigma(s))$. Logo, resulta

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{\tilde{u}^2 - 4} \cos \tilde{\sigma} \\ \dot{v} = \sqrt{\frac{\tilde{u}^2 + 4(a^2 - 1)}{\tilde{u}^2 - 4}} \sin \tilde{\sigma} \\ \dot{\sigma} = -H - \frac{\tilde{u}}{\sqrt{\tilde{u}^2 - 4}} \sin \tilde{\sigma}, \end{cases}$$

o que termina a demonstração. □

Corolário 4.5.3. *Seja $\gamma(s)$ uma solução do sistema (4.26) definida em $(s_0 - \epsilon, s_0]$ com $\sigma(s_0) = \pm\pi/2$. Então $\gamma(s)$ pode ser estendida a uma solução no intervalo $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$, através de uma reflexão em relação à reta $v = v(s_0)$.*

Demonstração. Segue do segundo item da Proposição anterior. □

Proposição 4.5.4. *Se H é constante em Σ , então a função*

$$J(s) = \sqrt{u^2 - 4} \sin \sigma - Hu$$

é constante ao longo de qualquer curva $\gamma(s)$ que seja solução do sistema (4.26). Portanto, as soluções deste sistema são dadas por

$$\sqrt{u^2 - 4} \sin \sigma - Hu = k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \dot{J}(s) &= \frac{u\dot{u}}{\sqrt{u^2 - 4}} \sin \sigma + \dot{\sigma} \sqrt{u^2 - 4} \cos \sigma - H\dot{u} \\ &= \frac{u\dot{u}}{\sqrt{u^2 - 4}} \sin \sigma + \dot{\sigma} \sqrt{u^2 - 4} - H\dot{u} = 0, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, foi usada a terceira equação do sistema (4.26). □

A) Superfícies helicoidais mínimas ($H = 0$)

Da primeira integral (4.27) segue-se que $\sqrt{u^2 - 4} \sin \sigma = k$. Conseqüentemente temos duas possibilidades dependendo de k .

A₁) Se $k = 0$, então $\sigma = 0$ e $dv/du = 0$, logo $v = c$, com $c \in \mathbb{R}$. A correspondente superfície mínima Σ é o *helicóide* (veja a Figura 4.29)

$$z(r, \theta) = -a \arctan \left(\frac{2r \cos \theta}{r^2 - 1} \right) + c.$$

A imersão $f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ deste helicóide em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (descrita em [MMP]) é dada por

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \frac{2 \sin(2u) \tan(v)}{\sin(2u)^2 \tan(v)^2 + (1 + \cos(2u) \tan(v))^2} \\ f_2(u, v) &= \frac{1 - \tan(v)^2}{\sin(2u)^2 \tan(v)^2 + (1 + \cos(2u) \tan(v))^2} \\ f_3(u, v) &= 2au + c, \end{aligned}$$

onde $v \in (-\pi/4, \pi/4)$.

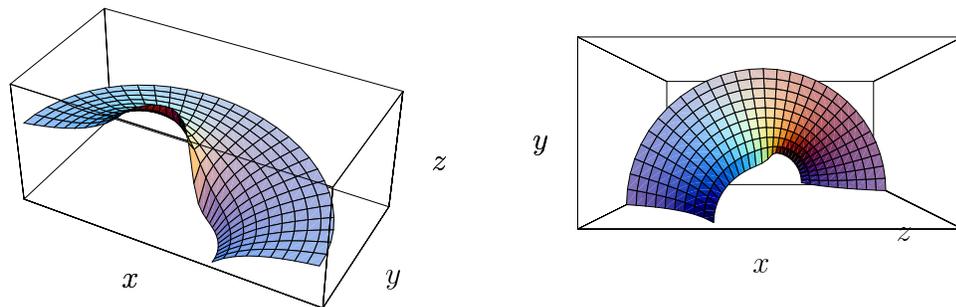


Figura 4.29. Duas visões do helicóide em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Quando $a = 0$, temos que a correspondente superfície é de rotação e coincide com o plano horizontal $z = c$.

A₂) Se $k \neq 0$, então

$$\sin \sigma = \frac{k}{\sqrt{u^2 - 4}}, \quad \cos \sigma = \sqrt{\frac{u^2 - 4 - k^2}{u^2 - 4}}.$$

Logo

$$\frac{dv}{du} = \frac{k}{u^2 - 4} \sqrt{\frac{u^2 + 4(a^2 - 1)}{u^2 - 4 - k^2}}, \quad u > \sqrt{k^2 + 4}. \quad (4.28)$$

A integral para esta equação é do tipo elíptico e a equação (4.28) vale para $u > u_m$, onde $u_m = \sqrt{k^2 + 4}$. Escolhendo as condições iniciais

$$u(0) = u_m \quad \text{e} \quad v(0) = 0$$

e observando que

$$\dot{\sigma}(s) = -\frac{ku}{u^2 - 4},$$

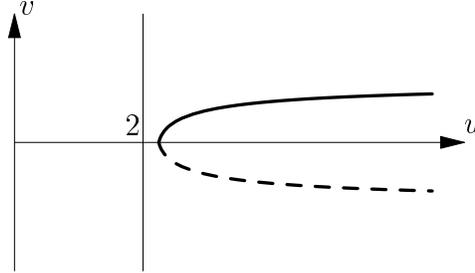
resulta que:

	$k > 0$	$k < 0$
$\sigma(0)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\dot{\sigma}(s)$	< 0	> 0

Notamos também que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \text{sen } \sigma(s) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{u^2 - 4}} = 0.$$

De acordo com o Corolário 4.5.3, podemos refletir a curva em relação à reta $v = 0$ obtendo uma curva do tipo *catenária* (veja a Figura 4.5.1).



Para alguma escolha de a , a equação (4.28) pode ser integrada explicitamente.

Por exemplo, se $a = 1$, obtemos a curva perfil dada por:

$$v(u) = \arctan\left(\frac{\sqrt{u^2 - 4 - k^2}}{k}\right) + c, \quad u \geq u_m, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Superfícies helicoidais com $H > 0$

Da equação (4.27) temos que

$$\text{sen } \sigma = \frac{k + Hu}{\sqrt{u^2 - 4}} \quad \text{e} \quad \cos \sigma = \sqrt{\frac{u^2 - 4 - (k + Hu)^2}{u^2 - 4}},$$

logo

$$\frac{dv}{du} = \frac{(k + Hu)}{u^2 - 4} \sqrt{\frac{u^2 + 4(a^2 - 1)}{u^2 - 4 - (k + Hu)^2}}. \quad (4.29)$$

- D_1) Se $k \geq 0$, a integral para esta equação é de tipo elíptico e esta equação vale para $H < 1$ e $u > u_m$, onde

$$u_m = \frac{kH + \sqrt{k^2 + 4(1 - H^2)}}{1 - H^2} > 2.$$

Escolhendo as condições iniciais

$$u(0) = u_m, \quad v(0) = 0,$$

como u_m satisfaz $\sqrt{u^2 - 4} = k + Hu$, resulta

$$\sigma(0) = \pi/2 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(0) = \frac{(H^2 - 1)\sqrt{4(1 - H^2) + k^2}}{k + H\sqrt{4(1 - H^2) + k^2}} < 0.$$

Também $\dot{\sigma}(s) = 0$ quando $\sin \sigma = (H\sqrt{u^2 - 4})/u$ ou, usando (4.27), se $ku + 4H = 0$. Esta equação não tem soluções em (u_m, ∞) , logo, $\sigma(s)$ é sempre decrescente. Observemos que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sin \sigma(s) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{k + Hu}{\sqrt{u^2 - 4}} = H < 1.$$

De acordo com o Corolário 4.5.3, podemos refletir a curva em relação à reta $v = 0$ obtendo uma curva do tipo *catenária* (veja a Figura 4.30).

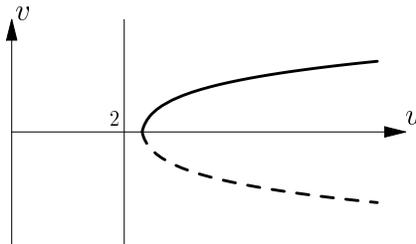


Figura 4.30. Curva perfil para $H = 1/2$ e $k = 0$.

Na Figura 4.31 podemos observar uma família de curvas perfil para diferentes valores da curvatura média $H \in [0, 1)$.

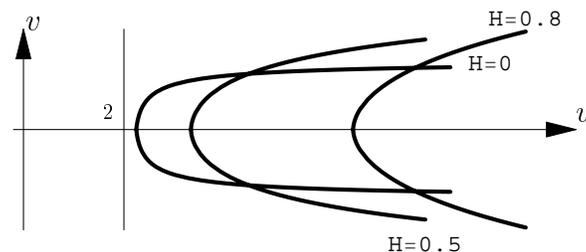


Figura 4.31. Curvas perfil de superfícies helicoidais do tipo catenoidal para $k = 1$.

Observemos que, se $k = 0$, podemos integrar explicitamente a equação (4.29). Por exemplo, se $a = 0$ (caso das superfícies de rotação) temos que a curva perfil é dada por

$$v(u) = \frac{-H}{2\sqrt{1-H^2}} \ln \left(2\sqrt{(u^2-4)[(1-H^2)u^2-4]} + 2\frac{(1-H^2)u^2-4+2H^2}{\sqrt{1-H^2}} \right),$$

onde

$$u \geq \frac{2}{\sqrt{1-H^2}}.$$

Se $a = 1$, então

$$v(u) = \frac{H}{\sqrt{1-H^2}} \ln \left(\frac{(1-H^2)u + \sqrt{(1-H^2)^2u^2 - 4(1-H^2)}}{H^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\frac{(1-H^2)u + 2}{H\sqrt{(1-H^2)u-4}} \right) + \arctan \left(\frac{(1-H^2)u - 2}{H\sqrt{(1-H^2)u-4}} \right) \right],$$

onde

$$u \geq \frac{2}{\sqrt{1-H^2}}.$$

- Se $k < 0$, então tem-se três casos diferentes dependendo do valor de H . Antes de tudo, notemos que, combinando a terceira equação do sistema (4.26) com a primeira integral, temos que

$$\dot{\sigma}(s) = -\frac{k u + 4H}{u^2 - 4}, \quad u > 2. \quad (4.30)$$

Logo, $\dot{\sigma}(s) = 0$ se, e somente se,

$$k u + 4H = 0 \quad (4.31)$$

e $\dot{\sigma}(s) > 0$ para $u > -4H/k$.

B) Superfícies de curvatura $H > 1$

Se $k \neq -2H$, então $u \in [u_m, u_M]$, onde

$$u_m = \frac{kH + \sqrt{4(1-H^2) + k^2}}{1-H^2} \quad \text{e} \quad u_M = \frac{kH - \sqrt{4(1-H^2) + k^2}}{1-H^2}.$$

Escolhendo as condições iniciais

$$u(0) = u_m \quad \text{e} \quad v(0) = 0,$$

resulta que

$$\dot{\sigma}(0) = \frac{(H^2 - 1)\sqrt{4(1-H^2) + k^2}}{k + H\sqrt{4(1-H^2) + k^2}}.$$

Notamos que $k + H\sqrt{4(1 - H^2) + k^2} > 0$ se, e somente se, $k < -2H$. Temos, portanto, a seguinte tabela:

	$-2H < k < -2\sqrt{H^2 - 1}$	$k < -2H$
u_m satisfaz	$\sqrt{u^2 - 4} = k + Hu$	$\sqrt{u^2 - 4} = -(k + Hu)$
$\sigma(0)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\dot{\sigma}(0)$	< 0	> 0

Além disso, como u_M satisfaz $\sqrt{u^2 - 4} = k + Hu$, obtemos $\sigma(s_2) = \pi/2$, onde $u(s_2) = u_M$ para algum $s_2 > 0$. Conseqüentemente:

B_1) Se $-2H < k < -2\sqrt{H^2 - 1}$, a equação (4.31) admite a solução $u(s_1) = -4H/k$, para algum $s_1 \in (0, s_2)$. Isto implica que em s_1 existe um mínimo local para $\sigma(s)$ e, além disso, para $s > s_1$ a curva γ rotaciona no sentido positivo. Observe-se também que

$$\text{sen } \sigma(s_1) = \frac{k + H u(s_1)}{\sqrt{u(s_1)^2 - 4}} = \frac{\sqrt{4H^2 - k^2}}{2} < 1.$$

A curva pode ser refletida infinitas vezes, originando uma curva do tipo *ondularia* (veja a Figura 4.32).

B_2) Se $k = -2H$, então temos

$$u_m = 2 \quad \text{e} \quad u_M = \frac{2(1 + H^2)}{H^2 - 1}.$$

Escolhendo as condições iniciais $u(0) = u_m$ e $v(0) = 0$, resulta que

$$\lim_{u \rightarrow 2^+} \text{sen } \sigma(s) = \lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{H\sqrt{u-2}}{\sqrt{u+2}} = 0,$$

portanto, a curva é perpendicular ao bordo do espaço das órbitas. Para $s = s_1$, com $u(s_1) = u_M$, temos $\sigma(s_1) = \pi/2$. Além disso, $\dot{\sigma}(s) > 0$ em $(2, u_M]$. Podemos refletir a curva infinitas vezes. A curva resultante é do tipo *cicloidial* e um seu desenho é dado na Figura 4.32.

B_3) Se $k < -2H$, como

$$\sigma(0) = 3\pi/2, \quad \sigma(s_2) = \pi/2 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(0) > 0.$$

Observe-se também, que a equação (4.31) não tem soluções em $[u_m, u_M]$, logo $\dot{\sigma}(s) > 0$. Isto implica que existe um $s_1 \in (0, s_2)$ tal que $\sigma(s_1) = 2\pi$ e $u(s_1) = -k/H$ é mínimo para $v(u)$. A curva pode ser refletida infinitas vezes resultando num tipo *nodal* (Figura 4.32).

C) Superfícies de curvatura $H = 1$

Neste caso, a equação (4.29) equivale a

$$\frac{dv}{du} = \frac{k+u}{u^2-4} \sqrt{\frac{u^2+4(a^2-1)}{-(2ku+4+k^2)}}, \quad u > u_m,$$

onde $u_m = -(4+k^2)/2k$. A equação acima é do tipo elíptico mas, para alguma escolha de a , podemos integrá-la explicitamente. Por exemplo, se $a = 1$ temos

$$v(u) = -\frac{\sqrt{-(2ku+4+k^2)}}{k} + \arctan\left(\frac{-(2ku+4+k^2)}{k-2}\right) + \arctan\left(\frac{-(2ku+4+k^2)}{k+2}\right), \quad u \geq u_m.$$

C_1) Se $k > -2$, escolhendo as condições iniciais

$$u(0) = u_m \quad \text{e} \quad v(0) = 0,$$

segue-se que

$$\sigma(0) = \pi/2 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(0) = \frac{2k^2}{k^2-4} < 0.$$

Como (4.31) tem a solução $u(s_1) = -4/k$ para algum $s_1 > 0$, com

$$\text{sen } \sigma(s_1) = \frac{k+u(s_1)}{\sqrt{u(s_1)^2-4}} = \frac{\sqrt{4-k^2}}{2} < 1,$$

e

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \text{sen } \sigma(s) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u+k}{\sqrt{u^2-4}} = 1,$$

temos que $\sigma(s)$ tem um mínimo local em s_1 . Portanto, a curva perfil γ rotaciona no sentido positivo para $s > s_1$. Refletindo a curva em relação ao eixo u , obtemos uma curva do tipo *sino* (veja Figura 4.33).

C_2) Se $k = -2$, temos que $u(0) = u_m = 2$ e

$$\lim_{u \rightarrow 2^+} \text{sen } \sigma(s) = \lim_{u \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{u-2}{u+2}} = 0,$$

portanto, a curva perfil é perpendicular ao bordo $\{u = 2\}$ do espaço das órbitas. É importante observar que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \text{sen } \sigma(s) = 1,$$

e também

$$\dot{\sigma}(s) > 0 \quad \text{para } s > 0.$$

A curva, juntamente com sua reflexão pela reta $v = 0$, é do tipo *cônico* e o seu desenho é dado na Figura 4.33.

C_3) Se $k < -2$, escolhendo as seguintes condições iniciais

$$u(0) = u_m \quad \text{e} \quad v(0) = 0,$$

resulta que

$$\sigma(0) = 3\pi/2, \quad \dot{\sigma}(0) = \frac{2k^2}{k^2 - 4} > 0.$$

Isto significa que o ângulo $\sigma(s)$ rotaciona no sentido positivo. Observe que a equação (4.31) não tem soluções em $[u_m, +\infty)$ logo, a função $\sigma(s)$ é sempre crescente. Além disso, temos

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \text{sen } \sigma(s) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u + k}{\sqrt{u^2 - 4}} = 1.$$

Portanto existe $s_1 > 0$ tal que $\sigma(s_1) = 2\pi$ e $u(s_1) = -k$ é mínimo local para a curva. Depois de refletida, a curva perfil será do tipo *folium* como mostrado na Figura 4.33.

D) Superfícies de curvatura $0 < H < 1$

Neste caso a equação (4.29) é válida para $u > u_m$, onde

$$u_m = \frac{kH + \sqrt{4(1 - H^2) + k^2}}{1 - H^2}.$$

Observamos que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \text{sen } \sigma(s) = H < 1. \quad (4.32)$$

Escolhendo as condições iniciais

$$u(0) = u_m \quad \text{e} \quad v(0) = 0,$$

temos:

D_2) se $k > -2H$,

$$\sigma(0) = \pi/2, \quad \dot{\sigma}(0) = \frac{(H^2 - 1)\sqrt{4(1 - H^2) + k^2}}{k + H\sqrt{4(1 - H^2) + k^2}} < 0^3,$$

³ $k + H\sqrt{4(1 - H^2) + k^2} > 0 \Leftrightarrow k > -2H.$

portanto, o ângulo $\sigma(s)$ rotaciona no sentido negativo. Também, como (4.31) tem solução $u(s_1) = (-4H)/k$, para algum $s_1 > 0$, então para $s > s_1$ o ângulo σ rotaciona positivamente. Observe-se também que

$$\text{sen } \sigma(s_1) = \frac{k + H u(s_1)}{\sqrt{u(s_1)^2 - 4}} = \frac{\sqrt{4H^2 - k^2}}{2} < 1.$$

Refletindo a curva com respeito ao eixo u , obtemos uma curva do tipo *sino limitado*.

D_3) Se $k = -2H$, temos $u_m = u_0 = 2$ e

$$\lim_{u \rightarrow 2^+} \text{sen } \sigma(s) = 0,$$

portanto, a curva é perpendicular ao bordo do espaço das órbitas. Além disso, resulta que

$$\dot{\sigma}(s) = \frac{2H}{u+2} > 0,$$

ou seja, $\sigma(s)$ é sempre crescente. Podemos refletir a curva somente uma vez com respeito à reta $v = 0$, obtendo uma curva do tipo *cônico limitado*. Neste caso a equação (4.28) pode ser integrada explicitamente. Por exemplo, se $a = 0$ (caso das superfícies de rotação), temos

$$\frac{dv}{du} = \frac{H}{\sqrt{(u+2)[(1-H^2)u+2(1+H^2)]}},$$

e conseqüentemente

$$v(u) = \frac{H}{\sqrt{1-H^2}} \ln \left(\frac{4-2(H^2-1)u}{\sqrt{1-H^2}} + 2\sqrt{(u+2)[(1-H^2)u+2(1+H^2)]} \right).$$

D_4) Se $k < -2H$, obtemos

$$\sigma(0) = 3\pi/2 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(0) = \frac{(H^2-1)\sqrt{4(1-H^2)+k^2}}{k+H\sqrt{4(1-H^2)+k^2}} > 0,$$

logo, $\sigma(s)$ rotaciona no sentido positivo. Como (4.31) não tem soluções em $(u_m, +\infty)$, a função $\sigma(s)$ é sempre crescente. Somando este fato à equação (4.32), podemos concluir que existe um $s_1 > 0$ tal que $\sigma(s_1) = 2\pi$ e $u(s_1) = -k/H > u_m$ é mínimo local para a curva perfil. Podemos refletir a curva em relação à reta $v = 0$, obtendo uma curva do tipo *folium limitado*.

Acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.5.5. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície helicoidal de CMC e seja $\gamma = \Sigma/G_{124}^*$ a curva perfil no espaço das órbitas. Então temos a seguinte caracterização de γ de acordo com o valor da curvatura média H e da constante k :*

A) ($\mathbf{H} = 0$) - A curva perfil

A_1) para $k = 0$ é uma **reta horizontal**,

A_2) para $k \neq 0$ é do tipo **catenária**.

B) ($\mathbf{H} > 1$) - A curva perfil é do tipo *Delaunay*. Além disso, se

B_1) $-2H < k < -2\sqrt{H^2 - 1}$ é do tipo **ondularia**,

B_2) $k = -2H$ é do tipo **cicloidal**,

B_3) $k < -2H$ é do tipo **nodal**.

C) ($\mathbf{H} = 1$) - A curva perfil

C_1) para $-2 < k < 0$ é do tipo **sino**,

C_2) para $k = -2$ é do tipo **cônico**,

C_3) para $k < -2$ é do tipo **folium**.

D) ($0 < \mathbf{H} < 1$) - A curva perfil

D_1) para $k \geq 0$ é do tipo **catenária**,

D_2) para $-2H < k < 0$ é do tipo **sino limitado**,

D_3) para $k = -2H$ é do tipo **cônico limitado**,

D_4) para $k < -2H$ é do tipo **folium limitado**.

Observação 4.5.6. 1) Os desenhos das Figuras 4.32 e 4.33 são feitos seguindo o estudo qualitativo do ângulo σ com respeito à métrica quociente do espaço das órbitas.

2) Os desenhos das curvas perfil das superfície helicoidais com curvatura média $0 < H < 1$ são parecidos com aqueles do caso $H = 1$ mostrados na Figura 4.33. De fato, como em ambos os casos resulta que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \text{sen } \sigma(s) = H,$$

a única diferença é que, se $0 < H < 1$, o limite de σ , para u que tenda ao infinito, está entre 0 e $\pi/2$, em vez de $\pi/2$ como para o caso $H = 1$.

3) Em [MO] estudamos as superfícies helicoidais de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tomando como modelo para o plano hiperbólico o disco de Poincaré de raio $\sqrt{2}$.

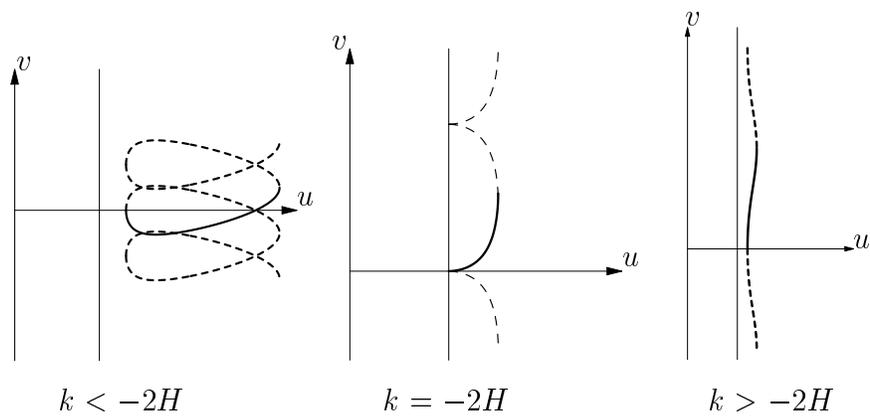


Figura 4.32. Curvas perfil para superfícies helicoidais de curvatura média $H > 1$.

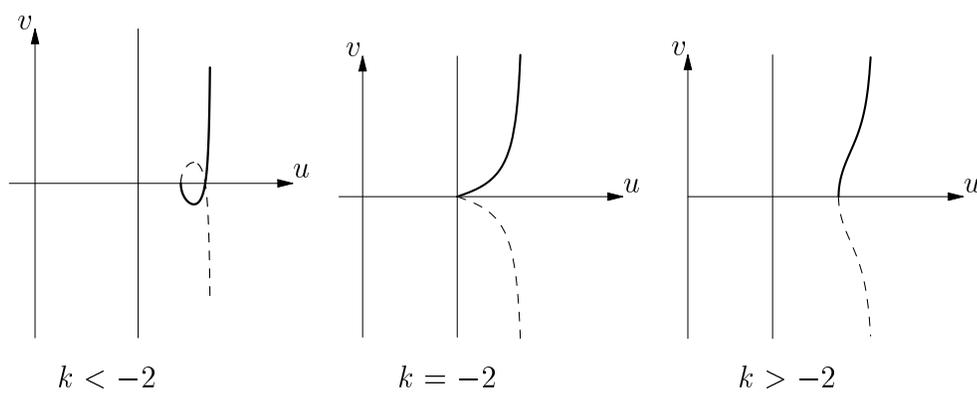


Figura 4.33. Curvas perfil para superfícies helicoidais de curvatura média $H = 1$.

Capítulo 5

Superfícies invariantes de curvatura Gaussiana constante

Neste capítulo mostraremos um procedimento de redução para determinar (localmente) as superfícies de curvatura Gaussiana constante numa variedade de dimensão três, que são invariantes pela ação de um subgrupo a um-parâmetro de isometrias do espaço ambiente (veja [MO1], [MO2]). Aplicaremos este método para descrever as superfícies invariantes de curvatura Gaussiana constante de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e do espaço de Heisenberg \mathbb{H}_3 .

5.1 Introdução

Seja (\mathcal{N}^3, g) uma variedade Riemanniana de dimensão três e seja X um campo de Killing em \mathcal{N} . Então X gera um subgrupo a um-parâmetro G_X do grupo de isometrias de (\mathcal{N}^3, g) .

Seja $f : \mathcal{M}^2 \rightarrow (\mathcal{N}^3, g)$ uma imersão duma superfície \mathcal{M} em \mathcal{N} . Dizemos que f é uma imersão G_X -equivariante e que $f(\mathcal{M})$ é uma superfície G_X -invariante de \mathcal{N} , se existir uma ação de G_X em \mathcal{M} , tal que

$$f(gx) = gf(x), \quad \forall x \in \mathcal{M}, \quad \forall g \in G_X.$$

Uma imersão G_X -equivariante $f : \mathcal{M}^2 \rightarrow (\mathcal{N}^3, g)$ induz em \mathcal{M}^2 uma métrica Riemanniana, a métrica “pull-back”, chamada *métrica induzida* G_X -invariante e denotada por g_f . Vamos supor que o espaço \mathcal{N}/G_X seja conexo, para poder usar o Teorema da Órbita Principal. Sabemos que f induz uma imersão $\tilde{f} : \mathcal{M}_r/G_X \rightarrow \mathcal{N}_r/G_X$ entre os espaços das órbitas. Dotaremos \mathcal{N}_r/G_X da métrica quociente \tilde{g} , que faz da aplicação

quociente $\pi : \mathcal{N}_r \rightarrow \mathcal{N}_r/G_X$ uma submersão Riemanniana. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_r^2, g_f) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{N}_r^3, g) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{M}_r^2/G_X & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathcal{N}_r^3/G_X, \tilde{g}) \end{array}$$

Daremos agora uma descrição local das superfícies G_X -invariantes da variedade \mathcal{N}^3 . Seja $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{N}_r^3/G_X, \tilde{g})$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\tilde{\gamma} : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}_r^3$ um levantamento de γ , tal que $d\pi(\tilde{\gamma}') = \gamma'$. Denotando por ϕ_r , $r \in (-\epsilon, \epsilon)$, o fluxo local do campo de Killing X , temos que, a aplicação

$$\psi : (a, b) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{N}^3, \quad \psi(t, r) = \phi_r(\tilde{\gamma}(t)), \quad (5.1)$$

define uma superfície G_X -invariante. Reciprocamente, se $f(\mathcal{M}^2)$ é uma superfície G_X -invariante imersa em \mathcal{N}^3 , então \tilde{f} define uma curva em $(\mathcal{N}_r^3/G_X, \tilde{g})$ que parametriza-se pelo comprimento de arco. A curva γ é chamada *curva perfil*. Vamos enunciar agora o seguinte resultado:

Lema 5.1.1. *Seja $ds^2 = E dt^2 + 2F dt dr + G dr^2$ uma métrica Riemanniana numa carta local (t, r) de uma superfície \mathcal{M}^2 . Vamos supor que os coeficientes E , F e G dependem somente de t . Então, a curvatura Gaussiana de \mathcal{M} pode-se escrever como:*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{G'}{\sqrt{EG - F^2}} \right\}', \quad (5.2)$$

onde a apóstrofe denota a derivada com respeito a t .

Vamos agora enunciar o resultado mais importante deste capítulo.

Teorema 5.1.2. *Seja $f : \mathcal{M}^2 \rightarrow (\mathcal{N}^3, g)$ uma imersão G_X -equivariante, $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{N}_r^3/G_X, \tilde{g})$ a parametrização pelo comprimento de arco de \tilde{f} e $\tilde{\gamma}$ um levantamento de γ . Então, a métrica induzida g_f é de curvatura Gaussiana constante K se, e somente se, a função $\omega(t) = \|X(\tilde{\gamma}(t))\|_g$ satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{d^2}{dt^2} \omega(t) + K\omega(t) = 0. \quad (5.3)$$

Demonstração. A superfície $f(\mathcal{M}^2)$ pode ser localmente parametrizada, usando (5.1), por $\psi(t, r) = \phi_r(\tilde{\gamma}(t))$. Portanto, a métrica induzida reescreve-se como $g_f = E dt^2 + 2F dt dr + G dr^2$, onde

$$\begin{cases} E = g(\psi_t, \psi_t) = g(d\phi(\tilde{\gamma}'), d\phi(\tilde{\gamma}')), \\ F = g(\psi_t, \psi_r) = g(d\phi(\tilde{\gamma}'), X), \\ G = g(\psi_r, \psi_r) = g(X, X) = \omega^2. \end{cases}$$

Como as curvas r -coordenadas são as órbitas da ação do grupo a um-parâmetro de isometrias G_X , os coeficientes da métrica não dependem de r . Observamos que, sendo $\tilde{\gamma}$ o levantamento de γ com respeito à submersão Riemanniana π , resulta que $d\pi(\psi_t) = \gamma'$ e $d\pi(\psi_r) = 0$. Seja e um campo unitário tangente à superfície e horizontal com respeito a π . Como $d\pi(\psi_t) = \gamma'$ tem norma 1 e π é uma submersão Riemanniana, então ψ_t pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\psi_t = g(\psi_t, \psi_r) \frac{\psi_r}{g(\psi_r, \psi_r)} + e = \frac{F}{G} \psi_r + e.$$

Calculando a norma temos que

$$EG - F^2 = G = \omega(t)^2.$$

Logo, do Lema 5.1.1, temos que a curvatura de Gauss da superfície $f(\mathcal{M})$ pode ser escrita como

$$K = -\frac{\ddot{\omega}(t)}{\omega(t)},$$

o que termina a prova. □

Integrando a (5.3) temos o seguinte corolário:

Corolário 5.1.3. *Seja $f : \mathcal{M}^2 \rightarrow (\mathcal{N}^3, g)$ uma imersão G_X -equivariante tal que a métrica g_f induzida em \mathcal{M}^2 seja de curvatura Gaussiana constante K . Então a norma $\omega(t)$ do campo de Killing X , ao longo do levantamento da curva perfil,*

- para $K = 0$ é dada por

$$\omega(t) = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

- para $K = 1/R^2 > 0$ é dada por

$$\omega(t) = c_1 \cos(t/R) + c_2 \sin(t/R), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

- para $K = -1/R^2 < 0$ é dada por

$$\omega(t) = c_1 \cosh(t/R) + c_2 \sinh(t/R), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Na próxima seção mostraremos que a curva perfil de uma superfície G_X -invariante pode ser parametrizada em função de ω . Logo, usando o Corolário 5.1.3, podemos dar uma parametrização explícita da curva perfil.

Observação 5.1.4. Seja $(\mathcal{N}^3, g) = \mathbb{R}^3$ munido da métrica canônica. Então os campos de Killing geram translações ou rotações. No caso das translações o espaço quociente \mathbb{R}^3/G_X é \mathbb{R}^2 com a métrica “flat” e a função volume ω é constante. Logo, da equação

(5.3), cada curva no espaço das órbitas gera um cilindro que tem curvatura Gaussiana zero.

No caso das rotações podemos assumir, sem perder a generalidade, que o eixo de rotação seja um eixo coordenado, por exemplo z . Logo, o campo de Killing é

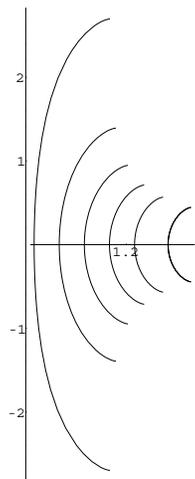
$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

e o espaço quociente é dado por

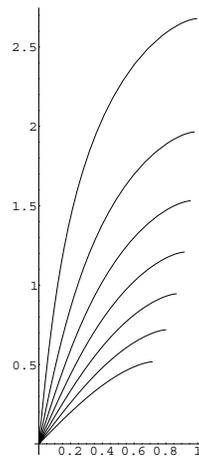
$$\mathbb{R}^3 / G_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$$

com a métrica “flat”. Seja $\gamma(t) = (u(t), 0, v(t)) \in \mathbb{R}_r^3 / G_X$ a curva perfil de uma superfície G_X -invariante, que vamos supor parametrizada pelo comprimento de arco. Então, a norma de X restrita à curva perfil é $\omega(t) = u(t)$. Usando o Corolário 5.1.3, achamos as parametrizações clássicas das superfícies de rotação de curvatura Gaussiana constante (veja por exemplo [CG]), ou seja:

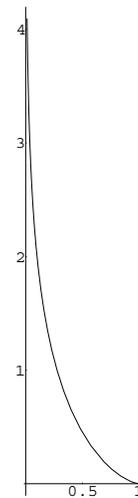
- se $K = 0$, então a superfície é parte de um plano, de um cilindro ou de um cone.
- Se $K < 0$, as curvas perfil são



Tipo hiperbólico

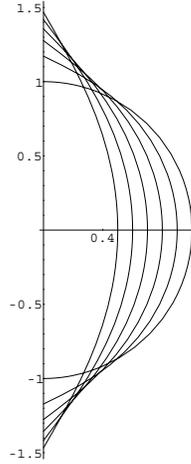


Tipo cônico

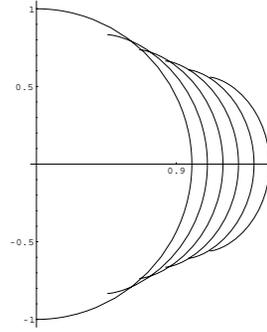


Tractriz

- Se $K > 0$, as curvas perfil são



Tipo fuso



Tipo barril

5.2 Superfícies invariantes de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção usaremos o Teorema 5.1.2 para descrever (localmente) todas as superfícies G -invariantes de curvatura Gaussiana constante do espaço $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, onde G é um grupo a um-parâmetro de isometrias. Seja portanto G um dos grupos entre aqueles descritos na Proposição 4.2.15 e seja $\gamma = (u(s), v(s))$ uma curva do espaço das órbitas $\mathcal{B} = (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})/G$, parametrizada pelo comprimento de arco. Portanto, munindo \mathcal{B} da métrica orbital \tilde{g} , temos que

$$\tilde{g}(\gamma', \gamma') = \tilde{g}_{11}u'^2 + 2\tilde{g}_{12}u'v' + \tilde{g}_{22}v'^2 = 1,$$

onde a apóstrofe denota a derivada com respeito a s .

Lembrando que ω denota a norma do campo de Killing X que gera o subgrupo a um-parâmetro G , podemos dar a seguinte descrição local das superfícies G -invariantes de $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$:

Teorema 5.2.1. *Seja $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ uma curva no espaço das órbitas $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}/G, \tilde{g})$ parametrizada pelo comprimento de arco, que é a curva perfil de uma superfície G -invariante de $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$. Então:*

- se $G = G_4$, o espaço das órbitas é $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ e, como $\omega = 1$, qualquer curva parametrizada pelo comprimento de arco é a curva perfil de um cilindro G_4 -invariante de curvatura Gaussiana zero;
- se $G = G_{24}$, o espaço das órbitas e métrica quociente são:

$$\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\} \quad e \quad \tilde{g} = \frac{du^2}{a^2 + b^2v^2} + \frac{dv^2}{v^2}.$$

Neste caso a curva perfil parametriza-se da seguinte maneira:

$$u(s) = \int_{s_0}^s \sqrt{\frac{a^2 \omega^2}{\omega^2 - b^2} \left[1 - \left(\frac{\omega \omega'}{\omega^2 - b^2} \right)^2 \right]} dt;$$

$$v(s) = |a|/\sqrt{\omega^2 - b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Para $a = 1$ e $b = 0$, temos as superfícies G_2 -invariantes.

- Se $G = G_{34}$, então o espaço das órbitas e métrica quociente são dado por:

$$\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \pi\} \quad e \quad \tilde{g} = \frac{du^2}{\sin^2(u)} + \frac{dv^2}{a^2 + b^2 \sin^2(u)}.$$

Neste caso a curva perfil parametriza-se da seguinte maneira:

$$u(s) = \arcsen \left(|a|/\sqrt{\omega^2 - b^2} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$v(s) = \int_{s_0}^s \sqrt{\frac{a^2 \omega^2}{\omega^2 - b^2} \left[1 - \frac{(\omega \omega')^2}{(\omega^2 - b^2)(\omega^2 - a^2 - b^2)} \right]} dt.$$

Quando $a = 1$ e $b = 0$, temos as superfícies G_3 -invariantes.

- Se $G = G_{124}^*$, então o espaço das órbitas é

$$\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 2\},$$

com métrica quociente dada por

$$\tilde{g} = \frac{du^2}{u^2 - 4} + \frac{(u^2 - 4) dv^2}{u^2 + 4(a^2 - 1)}.$$

A curva perfil pode ser parametrizada como:

$$u(s) = 2\sqrt{\omega^2 + 1 - a^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$v(s) = \int_{s_0}^s \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - a^2} \left[1 - \frac{(\omega \omega')^2}{(\omega^2 - a^2)(\omega^2 + 1 - a^2)} \right]} dt.$$

Quando $a = 0$, temos as superfícies G_{12}^* -invariantes.

Demonstração. A demonstração segue diretamente da expressão de ω e da métrica quociente. Faremos os cálculos explicitamente, apenas para o caso do grupo G_{24} . O campo de Killing que gera a álgebra de Lie do grupo G_{24} é

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial z}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Um conjunto de funções invariantes é dado por

$$\begin{cases} u = bx - az; \\ v = y > 0. \end{cases}$$

Conseqüentemente, temos que

$$\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\} \quad \text{e} \quad \tilde{g} = \frac{du^2}{a^2 + b^2v^2} + \frac{dv^2}{v^2}.$$

Seja $\gamma = (u(s), v(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no espaço \mathcal{B} . Então, o quadrado da norma (em relação à métrica g) do campo de Killing X ao longo do levantamento de γ é

$$\omega^2 = \|X\|_g^2 = \frac{a^2 + b^2v^2}{v^2}. \quad (5.4)$$

Logo, da equação (5.4) resulta

$$v(s) = \frac{|a|}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$$

e como

$$\frac{(u')^2}{a^2 + b^2v^2} + \frac{(v')^2}{v^2} = 1,$$

integrando, achamos a expressão desejada para $u(s)$. \square

Seja agora γ a curva perfil de uma superfície G -invariante de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana constante. Então podemos obter a parametrização explícita de γ substituindo no Teorema 5.2.1 a expressão correspondente da função ω , de acordo com o valor da curvatura de Gauss K , como foi descrito no Corolário 5.1.3.

Por exemplo, no caso das superfícies G_{12}^* -invariantes de $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, para alguma escolha de ω temos:

- 1) se $K = 0$, escolhendo $\omega(s) = s$, a curva perfil tem a seguinte parametrização:

$$\gamma(s) = (2\sqrt{s^2 + 1}, \sqrt{s^2 + 1});$$

- 2) se $K = 1$, escolhendo $\omega(s) = \cos s$, a correspondente curva perfil é

$$\gamma(s) = \left(2\sqrt{\cos^2 s + 1}, \frac{\sqrt{2\cos^2 s}}{\cos s} \arctan \left(\frac{\sin s}{\sqrt{\cos^2 s + 1}} \right) \right);$$

- 3) se $K = -1$, escolhendo $\omega(s) = \cosh s$, obtemos

$$\gamma(s) = \left(2\sqrt{\cosh^2 s + 1}, \int_0^s \sqrt{\frac{2}{\cosh^2 t + 1}} dt \right).$$

Na Figura 5.1 tem-se os desenhos (de uma parte) das correspondentes superfícies de rotação. Observamos que a superfície de curvatura Gaussiana $K = 1$ é compacta.

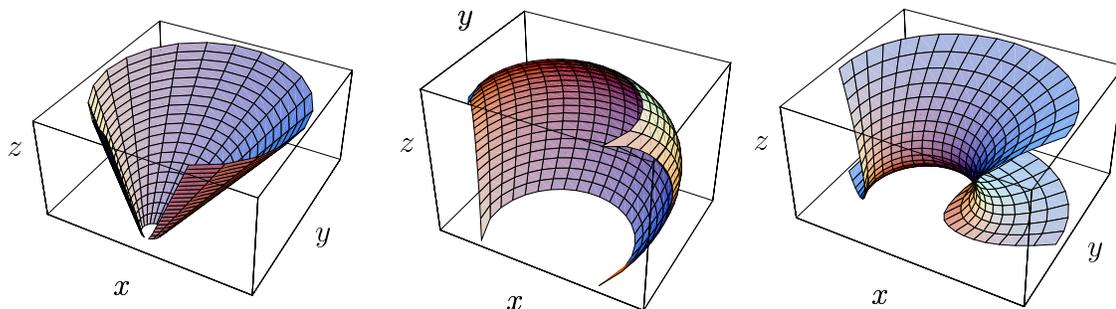


Figura 5.1. Superfícies de rotação para $K = 0$, $K = 1$ e $K = -1$, respectivamente.

5.3 Superfícies invariantes do grupo de Heisenberg

\mathbb{H}_3

O espaço de Heisenberg \mathbb{H}_3 é um grupo de Lie de dimensão três representado em $Gl_3(\mathbb{R})$ por

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$. A estrutura de grupo de \mathbb{H}_3 é dada por

$$h * h' = (x, y, z) * (x', y', z') = h + h' + L(h) \cdot h',$$

onde

$$L(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dotamos \mathbb{H}_3 da métrica invariante à esquerda dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz \right)^2.$$

O grupo das isometrias de (\mathbb{H}_3, ds^2) tem dimensão quatro e, como vimos no Capítulo 4, é máxima para uma variedade de dimensão três de curvatura seccional não constante. Em particular, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.3.1 ([FMP],[Pi]). *A álgebra de Lie das isometrias infinitesimais do grupo (\mathbb{H}_3, ds^2) admite a seguinte base de campos de Killing:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_4 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

De acordo com [FMP] os subgrupos a um-parâmetro do grupo de isometrias $\mathcal{I}\text{som}_0(\mathbb{H}_3, ds^2)$ podem ser divididos em duas famílias:

- 1) os subgrupos a um-parâmetro gerados por combinações lineares do tipo:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b X_4,$$

com $b \neq 0$. Estes subgrupos são de tipo *helicoidal*. Se $a_i = 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, obtemos o grupo compacto $SO(2)$ gerado por X_4 ;

- 2) os subgrupos a um-parâmetro gerados por combinações lineares dos campos X_1 , X_2 e X_3 . Estes são grupos de *translações*.

Uma superfície do espaço de Heisenberg é chamada *helicoidal* ou de *translação* se é invariante pela ação de um grupo helicoidal ou de um grupo de translações, respectivamente. Para descrever localmente as superfícies G -invariantes de curvatura Gaussiana constante de \mathbb{H}_3 , usaremos o seguinte Lema:

Lema 5.3.2 ([FMP]). *Uma superfície de \mathbb{H}_3 que é invariante pela ação de um subgrupo a um-parâmetro de isometrias G_X , gerado pelo campo de Killing $X = \sum_i a_i X_i$, é isométrica a alguma superfície invariante pela ação de um dos seguintes grupos:*

$$G_1, \quad G_3, \quad G_{43}.$$

Com o mesmo argumento usado no Teorema 5.2.1, podemos dar a seguinte descrição local das superfícies G -invariantes de \mathbb{H}_3 .

Teorema 5.3.3. *Seja $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ uma curva no espaço das órbitas $(\mathbb{H}_3/G, \tilde{g})$ parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos supor que ela seja a curva perfil de uma superfície G -invariante de \mathbb{H}_3 . Então:*

- se $G = G_1$, o espaço das órbitas e a métrica orbital são:

$$\mathcal{B} = \mathbb{R}^2 \quad e \quad \tilde{g} = du^2 + \frac{dv^2}{u^2 + 1}.$$

Logo, a curva perfil parametriza-se da seguinte forma

$$u(s) = \sqrt{\omega^2 - 1}$$

$$v(s) = \int_{s_0}^s \sqrt{\omega^2 \left[1 - \frac{(\omega\omega')^2}{(\omega^2 - 1)} \right]} dt.$$

- Se $G = G_3$, então o espaço das órbitas e a relativa métrica são dados por:

$$\mathcal{B} = \mathbb{R}^2 \quad e \quad \tilde{g} = du^2 + dv^2.$$

Como $\omega = 1$, temos que qualquer curva parametrizada pelo comprimento de arco é a curva perfil de um cilindro G_3 -invariante de curvatura Gaussiana nula.

- Se $G = G_{43}$ é o grupo gerado por $X_4 + aX_3$, então o espaço das órbitas é $\mathcal{B} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0\}$ e a métrica orbital é dada por:

$$\tilde{g} = du^2 + \frac{4u^2 dv^2}{4u^2 + (u^2 + 2a)^2}.$$

Conseqüentemente, a curva perfil parametriza-se como

$$u(s) = \sqrt{2(\sqrt{\omega^2 + 2a + 1} - a - 1)}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

$$v(s) = \int_{s_0}^s \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{2(\omega^2 + 2a + 1)^{\frac{3}{2}} - (2a + 1)\omega^2 - 4a^2 - 6a - 2 - \omega'^2}{(\omega^2 + 2a + 1)(\sqrt{\omega^2 + 2a + 1} - a - 1)^2}} dt.$$

Observe-se que para $a = 0$ temos as superfícies $SO(2)$ -invariantes.

Seja agora γ a curva perfil duma superfície G -invariante de \mathbb{H}_3 que tem curvatura Gaussiana constante. Então a parametrização explícita de γ pode ser obtida substituindo, no Teorema 5.2.1, a correspondente expressão da função ω , de acordo com o valor da curvatura de Gauss K , como descrito no Corolário 5.1.3.

Observação 5.3.4. O caso das superfícies $SO(2)$ -invariantes de curvatura Gaussiana constante foi estudado por Caddeo-Piu-Ratto em [CPR].

Apêndice A

Geometria Equivariante

A.1 Grupos de transformações

Definição A.1.1. Um *grupo de transformações* (G, \mathcal{M}, ϕ) que age numa variedade diferenciável \mathcal{M} é determinado por um grupo de Lie G e uma aplicação diferenciável

$$\phi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

denotado por $\phi(g, x) = g \cdot x$, que satisfaz as duas condições seguintes:

i) Se e é a identidade do grupo G , então

$$e \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathcal{M};$$

ii) Se $g, h \in G$, então

$$g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x, \quad \forall x \in \mathcal{M}.$$

Nesta definição assumimos que a ação do grupo seja *global*, isto é que $g \cdot x$ seja definido para cada $g \in G$ e cada $x \in \mathcal{M}$. Nas aplicações, porém, a ação de um grupo pode ser definida só *localmente*, ou seja, para $x \in \mathcal{M}$, a transformação $g \cdot x$ é definida somente para elementos g do grupo suficientemente próximos à identidade. Observamos que a ação de G sobre \mathcal{M} fornece a seguinte relação em \mathcal{M}

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g \cdot x.$$

É fácil ver que \sim é uma *relação de equivalência* e que as classes de equivalência coincidem com as órbitas de G (veja a Definição A.1.5). Denotamos por \mathcal{M}/G o espaço das órbitas, que será dotado da topologia quociente. Com esta topologia a projeção canônica $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$ (que leva cada $x \in \mathcal{M}$ na sua órbita) é contínua, e sendo ϕ contínua, π é também aberta. Observamos que o espaço das órbitas não é, em geral, uma variedade, e nem sempre é um espaço de Hausdorff.

Definição A.1.2. Dada uma ação de um grupo de Lie G numa variedade \mathcal{M} , o *subgrupo de isotropia* do ponto $x \in \mathcal{M}$ é

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G,$$

ou seja, consiste de todos os elementos do grupo que fixam x .

Sendo G_x um subgrupo fechado de G , G_x é um subgrupo de Lie. Se $g \cdot x = y$, então o grupo de isotropia de y é conjugado ao de x , ou seja, $G_y = g \cdot G_x \cdot g^{-1}$. Um grupo de transformações age *livremente* em \mathcal{M} se todos os subgrupos de isotropia são triviais, $G_x = \{e\}$ para cada $x \in \mathcal{M}$. Isto significa que, para $e \neq g \in G$, temos $g \cdot x \neq x$ para cada $x \in \mathcal{M}$. A ação é *localmente livre* se isto vale para todos os $g \neq e$ em uma vizinhança da identidade e .

Definição A.1.3 ([P]). Uma ação ϕ de um grupo de Lie G sobre \mathcal{M} é chamada *própria* se a aplicação

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M} \\ (g, x) &\mapsto (g \cdot x, x) \end{aligned}$$

é própria (isto é as imagens inversas de subconjuntos compactos são conjuntos compactos).

Observação A.1.4. Se G é compacto, então ϕ é uma ação própria. Também as ações Riemannianas (G subgrupo fechado de $\mathcal{I}\text{som}(\mathcal{M}, g)$) são próprias.

Definição A.1.5. Para uma ação global, a *órbita* do ponto $x \in \mathcal{M}$ é o conjunto de todas as imagens de x :

$$G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Observamos que se G é conexo, as suas órbitas são conexas.

A.2 Subconjuntos invariantes e funções invariantes

Definição A.2.1. Seja G um grupo (local) de transformações numa variedade \mathcal{M} . Um subconjunto $S \subset \mathcal{M}$ é dito *G -invariante* se $g \cdot x \in S$ para $\forall g \in G$ e $\forall x \in S$ (supondo que $g \cdot x$ seja definido no caso de uma ação local).

Uma órbita de um grupo de transformações é o menor subconjunto não vazio e invariante. Claramente, um subconjunto $S \subset \mathcal{M}$ é G -invariante se, e somente se, é união de órbitas. A ação do grupo é chamada *transitiva* se existe só uma órbita; portanto, assumindo que o grupo aja globalmente, para cada $x, y \in \mathcal{M}$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Um ponto fixo é uma órbita de dimensão zero; para ações de grupos conexos é também verdade a recíproca: cada órbita zero-dimensional é um ponto fixo. A ação de um grupo é *semi-regular* se todas as suas órbitas têm a mesma dimensão.

Proposição A.2.2 ([O1]). *Um grupo de Lie r -dimensional age localmente livremente numa variedade \mathcal{M} se, e somente se, as suas órbitas têm a mesma dimensão r , igual a de G .*

Um *invariante* de um grupo de transformações é uma função a valores reais cujos valores não são afetados pelo grupo. Mais precisamente, temos a seguinte definição geral:

Definição A.2.3. Seja G um grupo de transformações que age sobre \mathcal{M} . Um *invariante* de G é uma função a valores reais $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\zeta(g \cdot x) = \zeta(x)$ para cada $x \in \mathcal{M}$ e $g \in G$. Ou seja, ζ é constante nas órbitas de G .

Definição A.2.4. Seja $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ um conjunto de funções diferenciáveis a valores reais em uma variedade \mathcal{M} , com um domínio de definição comum. O conjunto é dito *funcionalmente dependente* se para cada $x_0 \in \mathcal{M}$ existe uma vizinhança U de x_0 e uma função diferenciável $F(y_1, \dots, y_k)$, não identicamente nula em qualquer subconjunto aberto de \mathbb{R}^k , tal que

$$F(\zeta_1(x), \dots, \zeta_k(x)) = 0, \quad \forall x \in U.$$

As funções são chamadas *funcionalmente independentes* se não forem funcionalmente dependentes, restritas a qualquer subconjunto aberto de \mathcal{M} .

Temos o seguinte resultado:

Teorema A.2.5 ([O]). *As funções $\zeta_1, \dots, \zeta_k : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$ são funcionalmente dependentes se, e somente se, a matriz $(k \times m)$ dada por $(\partial\zeta_i/\partial x_j)$ tem posto $\leq k - 1$ para cada $x \in \mathcal{M}$.*

Um problema fundamental é a determinação de *todos* os invariantes de um grupo de transformações. Note que, se $\zeta_1(x), \dots, \zeta_k(x)$ são invariantes e $F(y_1, \dots, y_k)$ é uma função qualquer, então $\zeta(x) = F(\zeta_1(x), \dots, \zeta_k(x))$ é também invariante. Portanto, basta achar um conjunto completo de invariantes funcionalmente independentes, pois qualquer outro invariante pode ser escrito como uma função destes invariantes fundamentais. O número de invariantes (locais) independentes é completamente determinado pela dimensão das órbitas, como mostra o seguinte resultado:

Teorema A.2.6. *Seja G um grupo de Lie que age semi-regularmente numa variedade \mathcal{M}^m de dimensão m , tal que suas órbitas são s -dimensionais. Para cada $x \in \mathcal{M}$, existem $m - s$ invariantes locais funcionalmente independentes $\zeta_1, \dots, \zeta_{m-s}$, definidos em uma vizinhança U de x , com a propriedade que qualquer outro invariante local ζ definido em U pode ser escrito como função dos invariantes fundamentais, ou seja $\zeta = F(\zeta_1, \dots, \zeta_{m-s})$.*

Demonstração. Para a demonstração veja [O] na página 86. □

Assim como um grupo a um-parâmetro de transformações é gerado pelo fluxo de um campo de vetores, em geral um grupo de Lie G de transformações que age numa variedade \mathcal{M} é gerado por um conjunto de campos de vetores em \mathcal{M} , chamados *geradores infinitesimais* do grupo (veja por exemplo [O1]). Precisamente, se $\hat{\mathbf{V}} \in \mathfrak{g}$ gera o subgrupo a um-parâmetro $\{exp(t \hat{\mathbf{V}}) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset G$, então identificamos $\hat{\mathbf{V}}$ com o gerador infinitesimal \mathbf{V} do grupo a um-parâmetro de transformações:

$$x \in \mathcal{M} \mapsto exp(t \hat{\mathbf{V}}) \cdot x.$$

Os geradores infinitesimais da ação do grupo são obtidos por diferenciação:

$$\mathbf{V}(x) = \frac{d}{dt}(exp(t \hat{\mathbf{V}}) \cdot x)|_{t=0}, \quad x \in \mathcal{M}, \quad \hat{\mathbf{V}} \in \mathfrak{g},$$

onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G . Notamos que, caso G seja um subgrupo fechado de $\mathcal{I}so\mathfrak{m}(\mathcal{M}, g)$, os geradores infinitesimais são campos de Killing em \mathcal{M} . Daremos agora o seguinte critério para a invariância de uma função a valores reais:

Teorema A.2.7 ([O1]). *Seja G um grupo de transformações conexo que age numa variedade \mathcal{M} . Uma função $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é G -invariante se, e somente se,*

$$\mathbf{V}(\zeta) = 0, \quad \text{para todos os } x \in \mathcal{M}, \quad (\text{A.1})$$

e cada gerador infinitesimal $\mathbf{V} \in \mathfrak{g}$ de G .

Portanto, de acordo com este teorema, os invariantes $\zeta(x)$ de um grupo a um-parâmetro com gerador infinitesimal

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad x = (x^1, \dots, x^m),$$

satisfazem a seguinte equação diferencial parcial linear, homogênea, de primeira ordem:

$$\sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0. \quad (\text{A.2})$$

As soluções de (A.2) são obtidas com o método das características. Substituímos a EDP (A.2) pelo *sistema característico* de equações diferenciais ordinárias dado por

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}. \quad (\text{A.3})$$

A solução geral de (A.3) é da forma

$$\zeta_1(x) = c_1, \dots, \zeta_{m-1}(x) = c_{m-1},$$

onde c_i são constantes de integração e as funções $\zeta_1, \dots, \zeta_{m-1}$ formam um conjunto completo de funções invariantes funcionalmente independentes do grupo a um-parâmetro gerado por \mathbf{V} .

A.3 Técnica de redução

Consideremos uma variedade Riemanniana (\mathcal{M}, g) sobre a qual age um subgrupo fechado G (não necessariamente compacto) do grupo das isometrias de (\mathcal{M}, g) . Como o grupo das isometrias $\mathfrak{Isom}(\mathcal{M}, g)$ é um grupo de Lie (veja [MS]), e G é fechado, temos que G é um grupo de Lie que age sobre \mathcal{M} por isometrias. Para $x \in \mathcal{M}$, o grupo de isotropia G_x é compacto ([KN]) e o espaço quociente G/G_x é difeomorfo à órbita $G(x)$. Sejam x e y pontos de \mathcal{M} . A órbita $G(y)$ é do *mesmo tipo* da $G(x)$ se os correspondentes subgrupos de isotropia são conjugados em G , ou seja, se existe um elemento $g \in G$ tal que $G_y = gG_xg^{-1}$. Uma órbita $G(x)$ é dita *principal* se existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathcal{M}$ de x tal que todas as órbitas $G(y)$, $y \in U$, sejam do mesmo tipo de $G(x)$. Denotamos por \mathcal{M}_r o conjunto dos *pontos regulares*, ou seja, dos pontos que pertencem às órbitas principais. Se \mathcal{M}/G é conexo, usando o fato de que as ações Riemannianas são próprias, do *Teorema da órbita principal* ([P], [PT]) temos que as órbitas principais são todas difeomorfas e o conjunto \mathcal{M}_r é aberto e denso em \mathcal{M} . Além disto, o espaço quociente \mathcal{M}_r/G é uma variedade diferenciável conexa e a aplicação quociente $\pi : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{M}_r/G$ é uma submersão. O espaço \mathcal{M}_r/G pode ser dotado de uma métrica Riemanniana, a *métrica quociente*, que faz da aplicação quociente π uma submersão Riemanniana. Sabemos (veja por exemplo [O]) que a parte regular do espaço das órbitas \mathcal{M}_r/G pode ser localmente parametrizada por funções invariantes obtidas a partir dos campos de Killing da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Teorema A.3.1 (Teorema da Métrica Quociente [HH1]). *Seja $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$, $d = \dim(\mathcal{M}_r/G)$, um conjunto completo de funções invariantes (locais) que parametrizam $U/G \subset \mathcal{M}_r/G$, onde U é um conjunto aberto G -invariante de \mathcal{M}_r . A métrica quociente \tilde{g} em \mathcal{M}_r/G é dada por*

$$\tilde{g} = \sum_{i,j=1}^d h^{ij} d\zeta_i \otimes d\zeta_j,$$

onde

$$(h^{ij}) = (h_{ij})^{-1}, \quad h_{ij} = g(\nabla\zeta_i, \nabla\zeta_j),$$

e ∇ é o operador gradiente em (\mathcal{M}, g) .

Lembramos a seguinte:

Definição A.3.2. Sejam (G, \mathcal{M}, μ) e (G, \mathcal{N}, ν) grupos de transformações. Então a aplicação

$$\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

é chamada G -equivariante se $\varphi(gx) = g\varphi(x)$, para cada $x \in \mathcal{M}$ e $g \in G$.

Vamos supor agora que $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ e $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ sejam duas variedades Riemannianas e G um subgrupo fechado do grupo das isometrias de \mathcal{M} e \mathcal{N} . Seja

$$\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

uma imersão isométrica G -equivariante e vamos supor também que o tipo de órbita principal seja o mesmo para as duas ações. Isso nos garante que φ induz uma imersão isométrica $\tilde{\varphi}$ nas partes regulares dos espaços quocientes, se \mathcal{M}_r/G e \mathcal{N}_r/G possuem a métrica da submersão. Temos então o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_r & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{N}_r \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \quad \leftarrow \text{Sub. Riem.} \\ \mathcal{M}_r/G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{N}_r/G \end{array}$$

De agora em diante, sendo que a análise é local, identificaremos \mathcal{M} com a sua imagem $\varphi(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$. Para um dado ponto $x \in \mathcal{M}_r \subset \mathcal{N}_r$, seja $H = G_x$ o subgrupo de isotropia de x . Então cada órbita principal é uma variedade Riemanniana G -homogênea difeomorfa a G/H . Fixada uma métrica Ad_H -invariante na álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , consideremos a seguinte decomposição ortogonal de \mathfrak{g} com respeito a esta métrica:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp,$$

onde \mathfrak{h} é a álgebra de Lie de H e \mathfrak{h}^\perp é identificado com $T_H(G/H)$ através da bijeção

$$X \in \mathfrak{h}^\perp \mapsto X_H := \frac{d}{dt} \{ \exp(tX) \cdot H \} |_{t=0}.$$

Isto nos permite introduzir uma métrica G -invariante em G/H . Consideremos uma base ortonormal $\{\widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_c\}$ do espaço \mathfrak{h}^\perp , $c = \dim(G) - \dim(H)$. Estes vetores induzem os seguintes campos de Killing linearmente independentes

$$V_i(y) = \frac{d}{dt} \{ \exp(t \widehat{V}_i) y \} |_{t=0}, \quad i = 1, \dots, c,$$

que geram o espaço tangente à órbita no ponto $y \in U$, onde U é uma vizinhança aberta de x em \mathcal{N}_r . Seja $A(y)$ a matriz simétrica com entradas $a_{ij} = g_{\mathcal{N}}(V_i, V_j)$ e $\omega(y) = \sqrt{\det(A(y))}$ a função volume da órbita $G(y)$. O vetor curvatura média de φ pode ser expresso em termos do vetor curvatura média de $\tilde{\varphi}$ e da função $\omega(y)$ como mostra o seguinte resultado:

Teorema A.3.3 (Teorema de Redução [BCH]). *Sejam \mathbf{H} e $\tilde{\mathbf{H}}$ os vetores curvaturas médias de $\mathcal{M}_r \subset \mathcal{N}_r$ e $\mathcal{M}_r/G \subset \mathcal{N}_r/G$, respectivamente. Então*

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}} - \text{grad}(\ln \omega).$$

Se o grupo G é compacto, as órbitas são compactas e temos:

Corolário A.3.4 ([HH1],[HL]). *Seja $V(y)$ o elemento volume de $G(y)$, \mathbf{n} um campo de vetores G -invariante unitário e normal a \mathcal{M}_r , que deve ser horizontal. Seja $\tilde{\mathbf{n}}$ o correspondente campo normal unitário a \mathcal{M}_r/G em \mathcal{N}_r/G . Então*

$$H(\mathbf{n}) = H(\tilde{\mathbf{n}}) - D_{\tilde{\mathbf{n}}}(\ln V).$$

Vamos dar a demonstração do Teorema A.3.3 de acordo com [FMP].

A.3.1 Demonstração do Teorema de Redução

Seja $\pi : E \rightarrow B$ uma submersão Riemanniana. Os tensores de O'Neill de π são definidos por

$$\mathcal{A}(X, Y) = (\nabla_{X^h} Y^h)^v + (\nabla_{X^h} Y^v)^h \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{T}(X, Y) = (\nabla_{X^v} Y^h)^v + (\nabla_{X^v} Y^v)^h, \quad (\text{A.5})$$

onde h e v denotam a projeção horizontal e vertical, respectivamente. Lembramos que um vetor tangente de E , tangente em alguma fibra $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, é chamado *vetor vertical* da submersão e um vetor é *horizontal* se ele é ortogonal à fibra. O campo Y é dito *projetável* se é horizontal e se para $x, y \in \pi^{-1}(b)$ temos

$$d\pi_x(Y(x)) = d\pi_y(Y(y)).$$

No caso em que π seja a aplicação quociente dada por uma ação Riemanniana (G, \mathcal{M}, ϕ) na parte regular, então projetável significa horizontal e G -invariante. De fato, para cada $x \in \mathcal{M}$ e $g \in G$ sendo que $\pi \circ g = \pi$, resulta

$$d\pi_{g(x)}(Y(g(x))) = d\pi_x(Y(x)) = d\pi_{g(x)}(dg_x(Y(x))).$$

Portanto, lembrando que $d\pi$ é isomorfismo se restrito à parte horizontal, podemos concluir que $Y(g(x)) = dg_x(Y(x))$.

Temos o seguinte:

Lema A.3.5. *Se X é um campo de vetores vertical e Y um campo projetável, então*

- 1) $[X, Y]$ é vertical.
- 2) Se X for um campo de Killing, então $[X, Y] = 0$.

Demonstração. A demonstração do item 1) deriva do fato que

$$d\pi[X, Y] = [d\pi(X), d\pi(Y)] = 0,$$

sendo que X é vertical. Para o item 2) temos que, indicando por φ_t o fluxo de X (que é uma isometria local), a derivada de Lie de Y em relação a X é

$$(L_X Y)(p) = [X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p) - (d\varphi_t)_q Y(q)}{t} = 0, \quad \varphi_t(q) = p$$

pois o numerador é zero. De fato, temos que

$$\begin{aligned} d\pi_p(Y(p) - (d\varphi_t)_q Y(q)) &= d\pi_p(Y(p)) - d(\pi \circ \varphi_t)_q(Y(q)) \\ &= d\pi_p(Y(p)) - d\pi_q(Y(q)) = 0, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de X ser um campo vertical e na última o fato de Y ser projetável. Sendo $Y(p) - (d\varphi_t)_q Y(q)$ horizontal e $d\pi$ um isomorfismo quando é restrito à parte horizontal, pode-se concluir. \square

A seguir as propriedades básicas dos tensores de O'Neill.

Lema A.3.6 ([FMP]).

- 1) \mathcal{A} e \mathcal{T} são 2-tensores.
- 2) Eles intercambiam os espaços verticais e horizontais em cada ponto.
- 3) $\mathcal{A}(X, \cdot)$ e $\mathcal{T}(X, \cdot)$ são operadores anti-simétricos em T_pE em relação ao produto interno Riemanniano. Ou seja,

$$\langle \mathcal{A}(X, Y), Z \rangle = - \langle Y, \mathcal{A}(X, Z) \rangle$$

e similarmente para \mathcal{T} .

- 4) Se X e Y são projetáveis então $\mathcal{A}(X, Y) = -\mathcal{A}(Y, X)$.
- 5) Se X e Y são verticais então $\mathcal{T}(X, Y) = \mathcal{T}(Y, X)$.

Vamos supor agora que G seja um grupo de isometrias que age numa variedade \mathcal{M} de dimensão m , e sejam H_1, \dots, H_d uma base ortonormal de campos projetáveis da parte horizontal da submersão $\pi : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{M}_r/G$, em alguma vizinhança G -invariante do ponto $x \in \mathcal{M}_r$. Sejam também V_1, \dots, V_c , $c = m - d$, uma base local de campos de Killing da parte vertical, no entorno de x . Os tensores de O'Neill, em termos desta base numa vizinhança de x , são descritos pelo seguinte resultado:

Proposição A.3.7.

- 1) $\mathcal{A}(H_i, H_j) = \frac{1}{2}[H_i, H_j]^v$.
- 2) $\langle \mathcal{T}(V_i, V_j), H_k \rangle = -\frac{1}{2}H_k \langle V_i, V_j \rangle$.

Demonstração. Para demonstrar o item 1) observemos que

$$\mathcal{A}(H_i, H_j) = (\nabla_{H_i} H_j)^v = [H_i, H_j]^v + (\nabla_{H_j} H_i)^v = [H_i, H_j]^v + \mathcal{A}(H_j, H_i),$$

e pelo item 4) do Lema A.3.6 temos também

$$\mathcal{A}(H_i, H_j) = -\mathcal{A}(H_j, H_i),$$

donde o afirmado.

Para o segundo item, usando o item 2) do Lema A.3.5 temos

$$\begin{aligned} H_k \langle V_i, V_j \rangle &= \langle \nabla_{H_k} V_i, V_j \rangle + \langle V_i, \nabla_{H_k} V_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{V_i} H_k, V_j \rangle + \langle V_i, \nabla_{V_j} H_k \rangle \\ &= - \langle H_k, \nabla_{V_i} V_j + \nabla_{V_j} V_i \rangle \\ &= -2 \langle H_k, \nabla_{V_i} V_j \rangle = -2 \langle H_k, \mathcal{T}(V_i, V_j) \rangle, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a equação (A.5). □

A próxima proposição fornece as relações entre as conexões ∇ de \mathcal{M} , ∇^v das órbitas, ∇^h de \mathcal{M}_r/G e os tensores de O'Neill, em termos da base especial usada acima. Identificaremos os campos horizontais com as suas respectivas projeções.

Proposição A.3.8. *Temos que:*

- 1) $\nabla_{V_i} V_j = \mathcal{T}(V_i, V_j) + \nabla_{V_i}^v V_j.$
- 2) $\nabla_{V_i} H_j = \nabla_{H_j} V_i = \mathcal{T}(V_i, H_j) + \mathcal{A}(H_j, V_i).$
- 3) $\nabla_{H_i} H_j = \mathcal{A}(H_i, H_j) + \nabla_{H_i}^h H_j.$

Demonstração. A demonstração é consequência direta das definições. Para o segundo item usamos o fato de $[V_i, H_j] = 0.$ □

Aplicaremos estas equações ao nosso caso, resumido pelo seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_r & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{N}_r \\
 \pi' \downarrow & & \pi \downarrow \leftarrow \text{Sub. Riem.} \\
 \mathcal{M}_r/G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{N}_r/G
 \end{array}$$

onde, lembramos, φ é uma imersão isométrica G -equivariante, G é um subgrupo fechado do grupo das isometrias de \mathcal{M}^m e \mathcal{N}^n , os espaços \mathcal{M}_r/G e \mathcal{N}_r/G possuem a métrica que faz das projeções π' e π (respectivamente) submersões Riemannianas. No que segue consideraremos sempre a restrição à parte regular \mathcal{M}_r e \mathcal{N}_r . Denotaremos por:

- α e $\tilde{\alpha}$ a segunda forma fundamental de φ e $\tilde{\varphi}$, respectivamente.
- \mathcal{A}, \mathcal{T} os tensores de O'Neill para π .
- $\mathcal{A}', \mathcal{T}'$ os tensores de O'Neill para π' .
- ∇' a conexão de \mathcal{M}^m .
- ∇ a conexão de \mathcal{N}^n .
- $\tilde{\nabla}'$ a conexão de \mathcal{M}_r/G .
- $\tilde{\nabla}$ a conexão de \mathcal{N}_r/G .

Também denotaremos por X^\top e X^\perp as projeções tangente e ortogonal ao longo das duas imersões. Trataremos \mathcal{M}_r e \mathcal{M}_r/G como subvariedades contidas no espaço ambiente, sendo que os argumentos são locais. Sejam agora $\{V_1, \dots, V_c\}$ uma base vertical de campos de Killing, que serão os mesmos para ambas as ações, pois elas possuem o mesmo tipo de órbita. A base de campos projetáveis horizontais será decomposta em

dois subconjuntos: o primeiro $\{H_1, \dots, H_f\}$ é constituído por $f = m - c$ campos ortonormais tangentes à subvariedade $\mathcal{M}_r \subset \mathcal{N}_r$. Observamos que as projeções destes campos também serão tangentes a $\mathcal{M}_r/G \subset \mathcal{N}_r/G$. O segundo subconjunto $\{H_{f+1}, \dots, H_d\}$ completa a parte horizontal, sendo que é constituído por campos ortogonais a \mathcal{M}_r (e \mathcal{M}_r/G). Daremos a seguir uma proposição que relaciona a segunda forma fundamental com os tensores de O'Neill.

Proposição A.3.9.

- 1) Para $1 \leq i, j \leq f$, $\mathcal{A}(H_i, H_j) = \mathcal{A}'(H_i, H_j)$.
- 2) $\alpha(V_i, V_j) = \mathcal{T}(V_i, V_j) - \mathcal{T}'(V_i, V_j)$.
- 3) Para $1 \leq i, j \leq f$, $\alpha(H_i, H_j) = \tilde{\alpha}(H_i, H_j)$.
- 4) Para $1 \leq i \leq f$, $\alpha(H_i, V_j) = \alpha(V_j, H_i) = \mathcal{A}(H_i, V_j) - \mathcal{A}'(H_i, V_j)$.

Demonstração.

- 1) Pela Proposição A.3.7 temos que $\mathcal{A}(H_i, H_j) = \frac{1}{2}[H_i, H_j]^v$. Como a parte vertical é a mesma devemos ter também $\mathcal{A}'(H_i, H_j) = \frac{1}{2}[H_i, H_j]^v$.
- 2) Calculamos, usando a Proposição A.3.8,

$$\begin{aligned} \alpha(V_i, V_j) &= (\nabla_{V_i} V_j)^\perp = \nabla_{V_i} V_j - \nabla'_{V_i} V_j \\ &= \mathcal{T}(V_i, V_j) + \nabla_{V_i}^v V_j - \mathcal{T}'(V_i, V_j) - \nabla_{V_i}^{lv} V_j \\ &= \mathcal{T}(V_i, V_j) - \mathcal{T}'(V_i, V_j), \end{aligned}$$

pois as conexões verticais coincidem.

- 3) O terceiro item deriva do fato de $d\pi$ ser uma isometria restrita à distribuição horizontal e os tensores da segunda forma fundamental serem horizontais e normais para campos de vetores horizontais e tangentes às subvariedades.
- 4) Usando a Proposição A.3.8,

$$\begin{aligned} \alpha(H_i, V_j) &= (\nabla_{H_i} V_j)^\perp = \nabla_{H_i} V_j - \nabla'_{H_i} V_j \\ &= \mathcal{T}(V_j, H_i) + \mathcal{A}(H_i, V_j) - \mathcal{T}'(V_j, H_i) - \mathcal{A}'(H_i, V_j) \\ &= \mathcal{A}(H_i, V_j) - \mathcal{A}'(H_i, V_j). \end{aligned}$$

Para esta última igualdade, observamos que $\mathcal{T}(V_j, H_i)$ e $\mathcal{T}'(V_j, H_i)$ são verticais e

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}(V_j, H_i), V_k \rangle &= - \langle H_i, \mathcal{T}(V_j, V_k) \rangle, \\ \langle \mathcal{T}'(V_j, H_i), V_k \rangle &= - \langle H_i, \mathcal{T}'(V_j, V_k) \rangle. \end{aligned}$$

Mas, pelo item 2) desta Proposição, como H_i é tangente a \mathcal{M} e $\alpha(V_j, V_k)$ é ortogonal a \mathcal{M} , então \mathcal{T} e \mathcal{T}' coincidem.

□

Estamos agora prontos para demonstrar o Teorema de Redução.

Demonstração. Seja $\{X_1, \dots, X_c\}$ uma base (local) vertical e ortonormal. Então

$$\text{tr } \alpha = \sum_{i=1}^c \alpha(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^f \alpha(H_i, H_i),$$

onde $\{H_i\}$ é a base horizontal descrita acima. Pelo item 3) da Proposição A.3.9, o segundo termo desta equação é $\text{tr } \tilde{\alpha}$, logo basta calcular o primeiro termo. Observamos que os tensores da segunda forma fundamental são ortogonais às subvariedades quando calculados nos campos tangentes, de forma que é suficiente calcular a projeção de $\sum_{i=1}^c \alpha(X_i, X_i)$ na direção do campo normal H_k , para $k > f$. Lembramos a definição da matriz $A = (a_{ij})$ com componentes $a_{ij} = g_{\mathcal{N}}(V_i, V_j)$ e $\omega = (\det A)^{1/2}$. Seja agora $V_i = \sum_{s=1}^c \alpha_{is} X_s$, então $a_{ij} = \sum_{s=1}^c \alpha_{is} \alpha_{js}$. Seja $X_i = \sum_{j=1}^c \alpha^{ij} V_j$, onde $(\alpha^{ij}) = (\alpha_{ij})^{-1}$. Logo

$$\sum_{i=1}^c \alpha(X_i, X_i) = \sum_{i,j,r=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} \alpha(V_j, V_r).$$

Calculando a projeção na direção H_k , para $k > f$, e usando a Proposição A.3.7, temos:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^c \alpha(X_i, X_i), H_k \right\rangle &= \sum_{i,j,r=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} \langle \alpha(V_j, V_r), H_k \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j,r=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} H_k \langle V_j, V_r \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,r=1}^c H_k a_{jr} \sum_{i=1}^c \alpha^{ij} \alpha^{ir} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,r=1}^c a^{jr} H_k a_{jr} \\ &= -\frac{1}{2} H_k (\ln \det(a_{ij})) \\ &= - \langle \text{grad } \ln(\sqrt{\det(a_{ij})}), H_k \rangle, \end{aligned}$$

donde o afirmado. □

Bibliografia

- [AR] U. Abresch, H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, to appear in *Acta Math.*
- [BC] J.L. Barbosa, A.G. Colares, Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3 , *Lecture Notes Math.*, 1195, Springer-Verlag, (1986).
- [BCH] A. Back, M.P. do Carmo, W.Y. Hsiang, On the fundamental equations of equivariant geometry, (unpublished manuscript).
- [CG] R. Caddeo, A. Gray, Curve e Superfici, Traduzione italiana ampliata del libro **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA**, di A. Gray, CRC Press, (1998).
- [CPR] R. Caddeo, P. Piu, A. Ratto, Rotational surfaces in \mathbb{H}_3 with constant Gauss curvature, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) (1996), 341-357.
- [D] C. Delaunay, Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pures et Appl.* 1 (1841), 309-320.
- [DD] M.P. do Carmo, M. Dajczer, Helicoidal surfaces with constant mean curvature, *Tôhoku Math. J.* 34 (1983), 425-435.
- [ES] J. Ells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* 86 (1964), 109-160.
- [F] C.B. Figueroa, Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg, Ph.D. thesis, Unicamp (1996).
- [FMP] C.B. Figueroa, F. Mercuri, R.H.L. Pedrosa, Invariant surfaces of the Heisenberg groups, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 177, (1999), 173-194.
- [Fu] G. Fubini, Sugli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti, *Ann. di Matem.* Tomo 8, serie III, (1903), 39-82.
- [GDG] Global Differential Geometry, *Studies in Mathematics*, vol. 27 (1989).

- [GP] M. Goze, P. Piu, Distributions totalement géodésiques pour des métriques nilpotentes, *Rendiconti Sem. Fac. Scienze Università di Cagliari*, Supplemento al vol. 58 (1988).
- [H] L. Hauswirth, Generalized Riemann examples in three-dimensional manifold, (2003), preprint.
- [HH] W.T. Hsiang, W.Y. Hsiang, On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in non-compact symmetric spaces, *Invent. Math.* 89 (1989), 39-58.
- [HH1] W.T. Hsiang, W.Y. Hsiang, On the existence of codimension one minimal spheres in compact symmetric spaces of rank 2, II *J. Diff. Geom.* 17 (1982), 583-594.
- [HL] W.Y. Hsiang, H.B. Lawson Jr., Minimal submanifold of low cohomogeneity, *J. Diff. Geom.* 5 (1971), 1-38.
- [Ho] E. Hopf, Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wissensch Berlin, Math.-Phys. Kl.* 19 (1927), 147-152.
- [HOS] D. Hoffman, R. Osserman, R. Schoen, On the Gauss map of complete constant mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 , *Comm. Math. Helvetici* 57 (1982), 519-531.
- [Hs] W.Y. Hsiang, On soap bubbles and isoperimetric regions in non-compact symmetric spaces, *Tôhoku Math. J.* 44 (1992), 151-175.
- [Ke] K. Kenmotsu, Surfaces with Constant Mean Curvature, Translations of Mathematical Monographs, v. 221 (2003).
- [KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry I/II, Tracts in Mathematics 15, Interscience, New York (1963).
- [Ko] S. Kobayashi, Transformation groups in differential geometry, Springer Verlag, (1972).
- [Kok] M. Kokubu, Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space, *Tôhoku Math. J.* 49 (1997), 367-377.
- [L] J.L. Lagrange, Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima e les minima des formules intégrales indéfinies, *Miscellanea Taurinensia* 2 (1760), 173-195.
- [MMP] F. Mercuri, S. Montaldo, P. Piu, Weierstrass representation formulae of minimal surfaces in \mathbb{H}_3 and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Acta Math. Sinica*, to appear.

- [MO] S. Montaldo, I.I. Onnis, Invariant CMC surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Glasg. Math. J.* 46 (2004), 311-321.
- [MO1] S. Montaldo, I.I. Onnis, Invariant surfaces in a three-manifold with constant Gaussian curvature, *J. Geom. Phys.* (2004), to appear.
- [MO2] S. Montaldo, I.I. Onnis, Invariant surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with constant (mean or Gauss) curvature, *Publ. de la RSME* (2005), to appear.
- [MS] S. Myers, N. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold, *Ann. of Math.* 40 (1939).
- [NR] B. Nelli, H. Rosenberg, Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Bull Braz. Math. Soc.* 33 (2002), 263-292.
- [O] P.J. Olver, Application of Lie Groups to Differential Equations, GTM 107, Springer-Verlag, New York (1986).
- [O1] P.J. Olver, Equivalence, Invariants and Symmetry, Cambridge University Press (1995).
- [Ot] T. Otsuki, Stability of harmonic maps and standard minimal immersions, *Tôhoku Math. J.* 38 (1986), 259-267.
- [P] R.S. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Ann. of Math.* 73 (1961), 295-323.
- [Pi] P. Piu, Sur certains types de distributions non-intégrables totalement géodésiques, Thèse de Doctorat, Université de Haute-Alsace, Mulhouse (1988).
- [Po] H. Poincaré, Théorie de groupes Fuchsien, *Acta Math.* 1 (1882), 1-62.
- [PT] R.S. Palais, C.L. Terng, Critical Point Theory and Submanifold Theory, LNM 1353, Springer-Verlag, New York (1980).
- [R] J.B. Ripoll, On hypersurfaces of Lie groups, *Tôhoku Math. J.* 44 (1992), 151-175.
- [S] A. Sanini, Gauss map of a surface of the Heisenberg group, *Boll. Un. Mat. Ital.* B (7) 11 (1997), 79-93.
- [Sa] R. Sá Earp, Parabolic and hyperbolic screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, (2005), preprint.
- [ST] R. Sá Earp, E. Toubiana, Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Illinois J. Math.* (2004), to appear.

- [St] J. Stillwell, *Geometry of Surfaces*, Springer Verlag (1992).
- [T] W.P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifold*, Mimeographed Notes, Princeton University, Princeton, NJ (1978).
- [T1] W.P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology of 3-manifold*, vol. 1. Princeton University Press, Princeton, NJ (1997).
- [To] P. Tompter, Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group, *Illinois J. Math.*, 35 (1991), 47-55.
- [V] G. Vranceanu, *Leçons de Géométrie Différentielle*, *Ed. Ac. Rep. Roum.*, vol. I, Bucarest (1957).
- [Y] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland (1955).