



**CICERO ALFREDO DA SILVA FILHO**

**PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES  
ENVOLVENDO A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE COM  
RENOVAÇÃO**

**CAMPINAS**

**2013**





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

CÍCERO ALFREDO DA SILVA FILHO

PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES  
ENVOLVENDO A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE COM  
RENOVAÇÃO

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica da UNICAMP para  
obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA PELO ALUNO CÍCERO ALFREDO DA SILVA  
FILHO

E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ LUIZ BOLDRINI.

  
Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38p Silva Filho, Cicero Alfredo da, 1977-  
Problemas de controle ótimo com restrições envolvendo a equação de transporte com renovação / Cicero Alfredo da Silva Filho. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: José Luiz Boldrini.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização matemática. 2. Teoria do controle. 3. Mosquito. 4. Equações diferenciais parciais. I. Boldrini, José Luiz, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Optimal control problems with restriction involving the transport equation with renewal.

**Palavras-chave em inglês:**

Mathematical optimization

Control theory

mosquitoes

Partial differential equations

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

José Luiz Boldrini [Orientador]

Ademir Fernando Pazoto

Ma To Fu

Sônia Maria Gomes

Gabriela Del Valle Planas

**Data de defesa:** 14-06-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

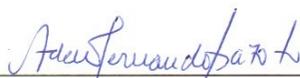
Tese de Doutorado defendida em 14 de junho de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



---

Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



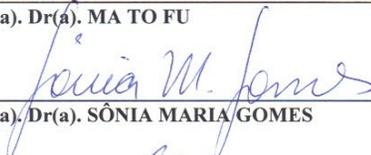
---

Prof(a). Dr(a). ADEMIR FERNANDO PAZOTO



---

Prof(a). Dr(a). MA TO FU



---

Prof(a). Dr(a). SÔNIA MARIA GOMES



---

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS



# AGRADECIMENTOS

---

Agradeço a Deus por tudo, absolutamente tudo e a Nossa Senhora Aparecida pela intercessão nos momentos mais difíceis. A UESC e a FAPESB pelo apoio financeiro, ao meu orientador, o professor Boldrini, pela excelente orientação, pela sua imensa paciência, motivação e comprometimento com este trabalho. A banca examinadora, pela disponibilidade e sugestões. A minha esposa Luciana, pelo seu apoio incondicional. A minha mãe, Francisca, pela sua força, amor e aos meus irmãos pela torcida e orações. Para finalizar, a todos os meus amigos, em particular, Adson, Cândida, Jaenes, Cláudia, Marcelo, Rinaldo, Ingrid, Flávio, Juçara, Eliana e Thadeu.



# RESUMO

---

O objetivo do trabalho é o de analisar de forma matematicamente rigorosa dois problemas de controle ótimo com restrições dadas por sistemas de equações diferenciais que incluem a equação de transporte com renovação, bem como um conjunto de restrições para a classe dos controles. Tais sistemas modelam as dinâmicas de populações de mosquitos (considerados em dois grupos: indivíduos jovens, em fase aquática, e adultos) e suas interações com os recursos do meio ambiente (alimentos, por exemplo); além disso, leva-se em conta o processo de maturação da população jovem, a qual fica portanto estruturada por idade e cuja dinâmica é governada por uma equação de transporte com renovação. Nestes problemas, as populações estão submetidas à atuação de um controle externo, um agente químico por exemplo, que afeta as respectivas taxas de mortalidade, modificando-as; no caso dos indivíduos jovens, tal atuação pode depender do nível de maturação (idade) do indivíduo. O primeiro problema considera apenas a variação no tempo da população de adultos, enquanto que o segundo problema leva em conta também a sua distribuição espacial.

Em cada um desses problemas, mostra-se, sob certas condições, a existência de controle ótimo, isto é, um controle que minimiza um dado funcional objetivo; obtém-se também as correspondentes condições de otimalidade que caracterizam tal controle ótimo.



# ABSTRACT

---

The objective of this work is to analyze in a mathematically rigorous way two optimal control problems with restrictions given by systems of differential equations including the transport equation with renewal, as well as, a restriction set for the controls. Such systems model the dynamics of mosquito populations (considered in two groups: young individual, in aquatic phase, and adults) and their interaction with the environmental resources (food material, for instance); moreover, the maturation process of the population of young individuals is taken in consideration, and thus it becomes age structured and its dynamics is governed by a transport equation with renewal. In these problems, the populations are submitted to the action of an external control, a chemical agent, for instance, which affects the respective mortality rates, changing them; in the case of the young individuals, such action may depend on the individual maturation level. The first problem considers only the time variation of the adult population; the second problem takes in consideration also its spatial distribution.

In each of those problems, it is shown that, under certain conditions, there exists optimal control, that is, a control minimizing a given objective functional; the associated optimality conditions characterizing such optimal controls are also obtained.



# ÍNDICE

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Notações e Resultados Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Notações e espaços funcionais . . . . .	7
1.2 Alguns resultados de análise funcional e convexa . . . . .	9
1.3 A desigualdade de Gronwall . . . . .	11
1.4 Regularidade parabólica . . . . .	12
1.5 Resultados sobre equações de transporte . . . . .	13
<b>2 Análise dos Sistemas Relacionados ao Problema 1</b>	<b>25</b>
2.1 O sistema das populações . . . . .	27
2.2 O sistema dual associado. . . . .	36
2.3 Estimativas envolvendo o controle . . . . .	42
<b>3 Um Problema de Controle Ótimo: Problema 1</b>	<b>55</b>
3.1 As derivadas das populações com respeito ao controle . . . . .	56
3.2 Existência de controle ótimo e condições de otimalidade . . . . .	61
<b>4 Análise dos Sistemas Relacionados ao Problema 2</b>	<b>75</b>
4.1 O sistema das populações . . . . .	77
4.2 O sistema dual associado . . . . .	88
4.3 Estimativas envolvendo o controle . . . . .	97

<b>5</b>	<b>Um Problema de Controle Ótimo: Problema 2</b>	<b>115</b>
5.1	As derivadas das populações com respeito ao controle . . . . .	116
5.2	Existência do controle ótimo e condições de otimalidade . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>139</b>

# INTRODUÇÃO

---

Nesse trabalho fazemos análises matemáticas rigorosas de dois problemas de controle ótimo associados a dois sistemas de equações diferenciais que modelam as **dinâmicas de certas populações** de mosquitos (indivíduos jovens, em fase aquática, e adultos) e sua interação com os recursos do meio ambiente (alimentos, por exemplo); além disso, a população jovem está submetida a um processo de maturação de tal forma que é **estruturada por idade**.

Nestes problemas, as populações estão submetidas à atuação de um **controle externo**, um agente químico por exemplo, que afeta as respectivas taxas de mortalidade, modificando-as; no caso dos indivíduos jovens, tal atuação pode depender do nível de maturação (idade) do indivíduo.

Nestas condições, para descrever matematicamente tais problemas, sejam dados um tempo final de interesse,  $T > 0$ , e a idade limite para a maturação na qual os indivíduos jovens se tornam adultos,  $l > 0$ ; denotemos  $Q = (0, l) \times (0, T)$ .

No primeiro problema de controle ótimo que consideraremos, e que neste trabalho será denominado de **Problema 1**, a população adulta depende apenas do tempo, isto é, ela não é estruturada por idade e nem se leva em conta sua distribuição espacial (ou seja, pode ser considerada igualmente distribuída no espaço). Assim, a questão é a de encontrar o controle externo, isto é, uma função  $c : Q \rightarrow R$ , e suas associadas populações jovem  $u : Q \rightarrow R$  e adulta  $v : (0, T) \rightarrow R$ , bem como a correspondente distribuição de recursos  $r : (0, T) \rightarrow R$ , que minimizam o seguinte funcional objetivo:

$$\min \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[ G(a, u) + \frac{1}{2} \rho_1 c^2 \right] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T v^2 dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T r^2 dt \right\}, \quad (1)$$

em que  $G : (0, l) \times R \rightarrow R$ ,  $G \geq 0$ ,  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 \geq 0$  e  $\rho_3 \geq 0$  são dados com as variáveis sujeitas ao

seguinte sistema de equações diferenciais, com condições de renovação e iniciais, que governam a dinâmica do problema e são análogas àquelas apresentadas em Calsina e Elidrisi [6]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + m_1(r(t))u(a, t) + \mu_1(c(a, t))u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v'(t) + m_2(r(t))v(t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\ r'(t) - (g(r) - h(L_2(u, v)))r = 0 & t \in (0, T), \\ u(0, t) = bv(t) & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(0) = v_0, \\ r(0) = r_0, \end{array} \right. \quad (2)$$

em que

$$\begin{aligned} L_1(c)(t) &= \int_0^l c(a, t)H_0(a, t)da, \\ L_2(u, v)(x, t) &= \int_0^l u(a, t)H_1(a, t) + v(t)H_2(a, t)da, \end{aligned}$$

e  $H_i : Q \rightarrow R, i = 0, 1, 2$ , funções dadas. Além disso, os controles externos são restritos ao conjunto:

$$U = \{v \in L^\infty(Q); \gamma_1(a) \leq v(a, t) \leq \gamma_2(a)\}, \quad (3)$$

em que  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow R$  são funções limitadas dadas.

No sistema (2), destacamos o seguinte:

- como já dissemos  $u, v$  e  $r$  representam, respectivamente, os indivíduos jovens, adultos e suas fontes de alimentos;
- $u_0, v_0$  e  $r_0$  são, respectivamente, as populações iniciais de jovens, adultos e sua fonte inicial de alimentos. Observe que os adultos não são estruturados por idade;
- $m_1(r(t))$  é a taxa de mortalidade dos jovens e  $m_2(r(t))$  dos adultos.
- $\mu_1(c(a, t))$  e  $\mu_2(L_1(c(a, t)))$  são respectivamente as taxas de mortalidade dos jovens e dos adultos causadas pelo controle externo.
- $b > 0$  é a taxa de fertilidade dos adultos;
- o funcional objetivo não é necessariamente convexo devido à função  $G$ .

No segundo problema de controle ótimo que consideraremos, neste trabalho denominado de **Problema 2**, a população adulta contínua a ser não estruturada por idade, mas agora levaremos em conta também os efeitos da sua distribuição espacial. Dessa forma, a questão agora é a de encontrar o controle externo, isto é, uma função  $c : Q \rightarrow R$ , e suas associadas populações jovem  $u : Q \rightarrow R$  e adulta  $v : \Omega \times (0, T) \rightarrow R$ , bem como a correspondente distribuição de recursos  $r : \Omega \times (0, T) \rightarrow R$  (observamos que de forma indireta  $r$  depende agora da posição espacial e do tempo), que minimizam o seguinte funcional objetivo:

$$\min \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[ G(a, u) + \frac{1}{2} \rho_1 c^2 \right] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} v^2 dx dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^2 dx dt \right\} \quad (4)$$

em que  $G$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $\rho_3$  são como antes, mas agora com as variáveis sujeitas ao seguinte sistema de equações diferenciais, com condições de renovação, iniciais e de contorno, que governam a dinâmica do problema e constituem uma generalização das equações apresentadas em Calsina e Elidrissi (ver [6]):

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + \int_{\Omega} [m_1(r) H_3(x, t) dx + \mu_1(c)] u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v_t(x, t) - \alpha \Delta v(x, t) + m_2(r) v(x, t) + \mu_2(L_1(c)) v(x, t) = u(l, t) & (x, t) \in \Omega_T, \\ r_t(x, t) - (g(r) - h(L_2(u, v))) r(x, t) = 0 & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \int_{\Omega} B(x, t) v(x, t) dx & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ r(x, 0) = r_0(x) & x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T. \end{array} \right. \quad (5)$$

Aqui  $Q$  é definido como antes e  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ ; além disso,

$$\begin{aligned} L_1(c)(t) &= \int_0^l c(a, t) H_0(a, t) da, \\ L_2(u, v)(x, t) &= \int_0^l u(a, t) H_1(a, t) + v(x, t) H_2(a, t) da, \end{aligned}$$

em que os  $H_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , são como antes e também os controles externos são restritos ao mesmo conjunto anterior:

$$U = \{v \in L^{\infty}(Q); \gamma_1(a) \leq v(a, t) \leq \gamma_2(a)\} \quad (6)$$

Observamos que em (5):

- estamos levando em conta a distribuição espacial dos indivíduos adultos,  $v$  através de uma equação de difusão com condições de contorno do tipo Dirichlet homogênea, por simplicidade;  $\alpha > 0$  é o correspondente coeficiente de difusão, o qual é considerado conhecido;
- a taxa de fertilidade  $B(x, t) \geq 0$  dos adultos pode depender agora do posição espacial e do tempo, como é realisticamente esperado.
- como antes, o funcional objetivo não é necessariamente convexo.

No presente trabalho, consideramos os problemas (1)-(3) e (4)-(6) do ponto de vista da análise matemática. Mais precisamente, sob hipóteses adequadas, dado um controle externo, provamos inicialmente a existência e a unicidade de soluções para os sistemas de equações diferenciais que governam as populações. Usando tais resultados, consideramos os correspondentes problemas de controle ótimo propostos e provamos rigorosamente a existência dos controles que minimizam os funcionais respectivos. Neste processo, também caracterizamos tais controles pelas respectivas condição necessária de otimalidade.

Antes, porém, de descrever mais detalhadamente tais resultados, enfatizamos que existem muitos trabalhos envolvendo a análise de modelos que governam a dinâmica de populações estruturadas por idade; porém, não há muitos trabalhos que consideram problemas de controle associados a tais modelos.

Comentamos brevemente a seguir apenas alguns trabalhos que têm relação mais direta com os problemas que consideramos aqui.

- Como já comentado o sistema (2) é basicamente o de Calsina e Elidrissi (ver [6]); porém, eles estudaram apenas a dinâmica das populações sem levar em consideração aspectos de controle ótimo e nem distribuição espacial da população. Tivemos que reanalisar o sistema e proceder de forma tecnicamente distinta das de [6] porque, para os objetivos do controle ótimo, diversas estimativas adicionais, inclusive algumas independentes dos controles considerados, tiveram que ser obtidas.
- Barbu e Iannelli (ver [4]) estudaram um problema controle ótimo com um funcional semelhante ao que consideramos, mas para um modelo de dinâmica do tipo Gurtin-MacCamy, constituído de uma equação escalar para população estruturada por idade. Não são considerados casos de interação entre populações, nem a possibilidade de distribuição

especial como nos sistemas do presente trabalho. Contudo, ressaltamos que as técnicas aqui empregadas são adaptações ao caso de sistemas daquelas utilizadas em [4].

- Anita et al (ver [2]) trabalharam em um modelo de controle ótimo para uma população estruturada por idade sem levar em conta, porém, a separação entre jovens e adultos.
- Em [3], Anita considera problemas de controle ótimo associados a modelos com estrutura de idade e difusão espacial ocorrendo na mesma equações escalar, isto é, ele não considera sistemas e, em particular, efeitos de estrutura e difusão ocorrendo em distintas equações.

Comentamos agora sobre os resultados matemáticos apresentados no presente trabalho.

Para as provas da existência e unicidade de soluções dos sistemas apresentados, bem como dos seus sistemas duais associados e que serão importantes para a análise dos problemas de controle ótimo, utilizamos o teorema do ponto fixo de Banach aplicado em operadores e espaços funcionais adequados. No caso dos sistemas do segundo problema, será também importante a utilização de alguns resultados de regularidade parabólica. Já para a análise do controle ótimo, será fundamental, além do teorema do ponto fixo de Banach, o chamado Princípio Variacional de Ekeland. Como já observamos, tanto para a obtenção da solução ótima quanto para as condições de otimalidade, adaptamos a metodologia utilizada por Barbu e Iannelli em [4].

A seguir descrevemos como este trabalho está organizado:

No Capítulo 1, apresentamos as notações, os espaços funcionais e os principais resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Dentre eles, destacamos o princípio variacional de Ekeland [8] e alguns resultados das teorias das equações diferenciais ordinárias, das equações diferenciais parciais de transporte e parabólicas.

A seguir, no Capítulo 2, estudamos o sistema de equações que governa a dinâmica das populações e o sistema dual associado ao nosso primeiro problema. Mais precisamente, nós mostramos a existência e a unicidade de soluções para tais sistemas; para isso, usamos o teorema do ponto fixo de Banach e alguns resultados acerca da teoria das equações diferenciais ordinárias e do transporte. Além disso, obtivemos estimativas que serão posteriormente úteis; em particular, provamos que as soluções são limitadas em uma certa norma de forma independente do controle tomado no conjunto de restrições do controle.

No Capítulo 3 provamos que o nosso primeiro problema, sobre certas hipóteses impostas ao tempo  $T$  e aos dados iniciais  $u_0$ , e  $r_0$  possui uma única solução ótima; também a caracterizamos por sua correspondente condição necessária de otimalidade. Para obter tais condições de otimalidade, usamos alguns resultados da análise convexa acerca de cones normais e cones tangentes. Para

existência de controle ótimo, utilizamos o teorema do ponto fixo de Banach e o Princípio Variacional de Ekeland. Observamos que a utilização deste último resultado se justifica devido ao fato do funcional que queremos minimizar não ser necessariamente convexo.

Passamos então, no Capítulo 4, ao estudo do sistema governando a dinâmica das populações e o sistema dual associado ao nosso segundo problema. Provamos para este problema propriedades análogas às aquelas obtidas no Capítulo 2, ou seja, existência, unicidade, limitação e estimativas em relação ao controle para as soluções do sistema de população e do sistema dual associado. Recorremos a um resultado de regularidade parabólica.

No Capítulo 6 provamos que o segundo problema de controle ótimo possui uma única solução e a caracterizamos com as respectivas condições de otimalidade. As técnicas usadas serão semelhantes às aquelas utilizadas no Capítulo 3, com a adaptação para equações diferenciais parciais parabólicas.

Para finalizar, no Capítulo 6, fizemos alguns breves comentários acerca dos resultados obtidos e trabalhos futuros.

# NOTAÇÕES E RESULTADOS

## PRELIMINARES

---

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar algumas definições e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Na maioria dos casos não apresentamos demonstrações, indicando apenas as respectivas referências bibliográficas.

### 1.1 Notações e espaços funcionais

Ao longo desse trabalho usamos as seguintes notações:

- $Q$  representa  $(0, T) \times (0, l)$ .  $\Omega$  é um aberto limitado, de classe  $C^2$  do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  com medida de Lebesgue  $|\Omega|$  e fronteira  $\partial\Omega$ .
- $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  representa o operador gradiente.
- $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  representa o operador Laplaciano.
- $|\nabla u|$  é a norma do vetor gradiente da função  $u = u(x)$ .

Necessitamos também dos seguintes espaços funcionais:

- $C[0, T]$  é o espaço das funções contínuas em  $[0, T]$  com valores em  $\mathbb{R}$ . Denotamos por  $C^+[0, T]$  o espaço das funções não negativas de  $C[0, T]$ .
- $C^m(\Omega)$  é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem  $\leq m$  contínuas em  $\Omega$ . Denotamos  $C^0(\Omega) = C^0(\Omega)$ .

- $L^p(\Omega)$  é o espaço de Banach das (classes de) funções  $u$  de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e  $p$ -integráveis ( $p \geq 1$ ) cuja norma é dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|, p = \infty.$$

- $L_{q,r}(Q)$  é o espaço de Banach consistindo de todas as funções mensuráveis em  $Q$  com norma finita

$$\|u\|_{q,r,Q} = \left( \int_0^T \left( \int_Q |u(x,t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

- $W^{m,p}(\Omega)$ , com  $m \in \mathbb{N}$ , é o espaço das funções  $u \in L^p(\Omega)$  com derivadas generalizadas de ordem  $\leq m$  que pertencem a  $L^p(\Omega)$  e cuja norma é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

- Se  $p = 2$ , denotaremos,  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ .

- $H_0^1(\Omega)$  representa o fecho de  $C_c^\infty(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$ .

- Seja  $B$  um espaço de Banach com norma  $\|\cdot\|_B$  e  $0 < T < \infty$ .  $L^p(0, T, B)$  é o espaço de Banach das funções  $u : [0, T] \rightarrow B$ , mensuráveis tal que  $t \in [0, T] \rightarrow \|u(t)\|_B$  é  $p$ -integrável ( $1 \leq p \leq \infty$ ) com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_B, p = \infty.$$

- $C([0, T]; B)$  é o espaço de Banach das funções  $u : [0, T] \rightarrow B$  contínuas, com norma dada por

$$\|u\|_{C([0,T];B)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_B. \tag{1.1}$$

- Dados dois espaços de Banach  $B_1, B_2$  com normas  $\|\cdot\|_{B_1}$  e  $\|\cdot\|_{B_2}$ , a norma do espaço produto  $B = B_1 \times B_2$  será dada por  $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|_{B_1} + \|\cdot\|_{B_2}$ .

Recordamos agora um teorema sobre imersões de espaços de Sobolev, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [1].

**Proposição 1.1** (Sobolev). *Sejam  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  de classe  $C^2$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Então as seguintes imersões são contínuas:*

- a)  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp} = p^*$ , se  $mp < n$ .
- b)  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ , se  $mp = n$ .
- c)  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ ,  $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$ , se  $mp > n$  onde  $k$  é um inteiro não negativo.

Obs.: Note que escolhendo  $k = 0$ ,  $m = 2$  e  $p = 2$  em **c**), obtemos que  $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\overline{\Omega})$ .

## 1.2 Alguns resultados de análise funcional e convexa

### O teorema do ponto fixo de Banach

A seguir, temos o teorema do ponto fixo de Banach, um outro resultado importante que usaremos no decorrer do nosso trabalho.

**Teorema 1.1** (Ponto Fixo de Banach). *Sejam  $X$  um espaço métrico completo e  $T : X \rightarrow X$  uma contração. Então  $T$  possui um único ponto fixo.*

### Princípio variacional de Ekeland

Agora enunciamos algumas definições e resultados a cerca de funcionais semicontínuos inferiormente. O principal deles é o **Princípio Variacional de Ekeland**, que será usado nos teoremas de existência de controle ótimo. Para mais detalhes, ver em Figueiredo [8], p. 24.

**Definição 1.1.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Um funcional  $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é dito semicontínuo inferiormente se  $\forall a \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $\{x \in X : \Psi(x) > a\}$  é aberto.*

**Proposição 1.2.** *Em um espaço métrico  $X$  um funcional  $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é semicontínuo inferiormente se e somente se para toda sequência  $(x_n)$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  tem-se  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(x_n) \geq \Psi(x_0)$ .*

**Teorema 1.2** (O Princípio Variacional de Ekeland). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $u_\epsilon \in X$  tal que*

$$\Phi(u_\epsilon) \leq \inf \Phi(u) + \epsilon, u \in X, \quad (1.2)$$

$$\Phi(u_\epsilon) < \Phi(u) + \epsilon d(u, u_\epsilon), \forall u \in X, \text{ com } u \neq u_\epsilon. \quad (1.3)$$

## Cones associados aos nossos problemas

Apresentamos algumas definições e proposições sobre cones. Lembramos que  $U$  é o conjunto dos controles (ver (3)).

**Definição 1.2** (ver em Barbu e Iannelli [4], p. 4). *O Cone Tangente a  $U$  em  $u$ , denotado por  $T_u(U)$ , é o conjunto de todos os  $v \in L^\infty(Q)$  tais que*

$$u + \lambda v \in U, \quad \forall \lambda \in (0, 1). \quad (1.4)$$

**Proposição 1.3** (ver em Barbu e Iannelli [4], p. 12). *O cone tangente possui a seguinte caracterização  $v \in T_u(U)$  se e somente se, q.t.p. em  $Q$ ,*

$$\begin{cases} v(a, t) \geq 0, & \text{se } u(a, t) = \gamma_1(a) \\ v(a, t) \leq 0, & \text{se } u(a, t) = \gamma_2(a). \end{cases} \quad (1.5)$$

**Definição 1.3** (ver em Barbu [5], p. 20). *O Cone Normal a  $U$  em  $u$ , denotado por  $N_u(U)$ , é o conjunto:*

$$N_u(U) = \left\{ w \in L^\infty(Q); \int_Q w v dx dt \leq 0, \forall v \in T_u(U) \right\}. \quad (1.6)$$

**Proposição 1.4** (ver em Barbu e Iannelli [4], p. 13). *O cone normal  $N_u(U)$  possui a seguinte*

caracterização:  $w \in N_u(U)$  se e somente se, q.t.p. em  $Q$ ,

$$\begin{cases} w(a, t) \geq 0, & \text{se } u(a, t) = \gamma_2(a) \\ w(a, t) = 0, & \text{se } \gamma_1(a) < u(a, t) < \gamma_2(a) \\ w(a, t) \leq 0, & \text{se } u(a, t) = \gamma_1(a). \end{cases} \quad (1.7)$$

**Proposição 1.5** (ver em Barbu e Iannelli [4], p. 13). *Seja  $U$  o conjunto dos controles e suponha que  $w \in L^1(Q)$  satisfaça*

$$\int_0^T \int_0^l w(a, t)v(a, t)dadt + \delta \|v\|_{L^1(Q)} \geq 0, \forall v \in T_u(U). \quad (1.8)$$

Então, existe  $\theta \in L^\infty(Q)$  tal que  $|\theta| \leq 1$  e  $-w + \delta\theta \in N_u(U)$ .

### 1.3 A desigualdade de Gronwall

Enunciamos a seguir a desigualdade de Gronwall. Esta desigualdade será muito útil no decorrer do nosso trabalho. Um demonstração pode ser encontrada em [10].

**Teorema 1.3** (Desigualdade de Gronwall). *Sejam  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas definidas num intervalo  $I = [a, b)$  com  $a < b \leq \infty$ . Suponha que  $\beta(t) \geq 0$ ,  $t \in I$ , e que  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que satisfaz*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds$$

para todo  $t \in I$ . Então,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr} ds.$$

**Corolário 1.1.** *Nas mesmas condições do Teorema 1.3, suponha além do mais que  $\alpha$  é crescente. Então,*

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

Revertendo o tempo, valem resultados similares:

**Teorema 1.4** (Desigualdade de Gronwall para  $t < a$ ). *Sejam  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas definidas num intervalo  $I = (b, a]$  com  $-\infty \leq b < \infty$ . Suponha que  $\beta(t) \geq 0$ ,  $t \in I$ , e que  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que satisfaz*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_t^a \beta(s)u(s)ds$$

para todo  $t \in I$ . Então,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_t^a \alpha(s)\beta(s)e^{\int_t^s \beta(r)dr} ds.$$

**Corolário 1.2.** *Nas mesmas condições do Teorema 1.4, suponha além do mais que  $\alpha$  é decrescente. Então,*

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_t^a \beta(s)ds}.$$

## 1.4 Regularidade parabólica

Agora enunciamos um resultado sobre regularidade parabólica, que é uma especialização de um resultado mais geral que pode ser encontrado em Ladyzenskaja [13], p.180.

**Teorema 1.5.** *Assuma*

$$g \in H_0^1(U), f \in L^2(0, T; L^2(U)).$$

em que  $U$  é um aberto, limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira suave. Suponha que  $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ , com  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ , é uma solução fraca de

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & U_T, \\ u = 0 & \partial U \times [0, T], \\ u = g & U \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (1.9)$$

em que  $L$  é o operador

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u$$

e os coeficientes  $a^{ij}$ ,  $b^i$ ,  $c$  satisfazem:

$$b^i, \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k} \in L_{q,r}(U_T), U_T = U \times (0, T), \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{1}{2}, \quad r < \infty, \quad \frac{\partial a^{ij}}{\partial t} \in L^1(0, T, L^\infty(U))$$

$$c \in L_{q,r}(U_T), \quad r < \infty \text{ com}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} &= 1, \text{ se } n \geq 4, \\ \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} &= 1, \quad q > 2 \text{ se } n = 3, \\ r &> 4, \quad q = 2, \text{ se } n = 3, \\ r &> 2, \quad q = 2, \text{ se } n = 2. \end{aligned}$$

Existem constantes positivas  $\nu$  e  $\theta$  tais que

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \theta \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(Desta última condição concluímos que o operador  $\frac{\partial}{\partial t} + L$  é uniformemente parabólico).

Então  $u \in L^2(0, T; H^2(U)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(U))$ ,  $u' \in L^2(0, T; L^2(U))$  e temos a estimativa

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u\|_{L^2(0, T; H^2(U))} + \|u'\|_{L^2(0, T; L^2(U))} \\ \leq C(\|f\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)}), \end{aligned}$$

em que  $C$  é uma constante que depende apenas de  $U, T$  e dos coeficientes de  $L$ .

**Observação.:** O Teorema 1.5 também pode ser demonstrado adaptando a demonstração de Evans[7], p. 360.

## 1.5 Resultados sobre equações de transporte

Necessitamos de alguns importantes resultados acerca das equações diferenciais de transporte e de equações diferenciais ordinárias, as quais estão fortemente relacionadas com as primeiras.

Começamos recordando a definição de funções absolutamente contínuas.

**Definição 1.4** (Função absolutamente contínua). *Uma função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é absolutamente contínua se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo conjunto finito de intervalos finitos*

$(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N),$

$$\sum_{j=1}^N (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^N (F(b_j) - F(a_j)) < \epsilon. \quad (1.10)$$

Mais geralmente, dizemos que  $F$  é absolutamente contínua em  $[a, b]$  se esta condição é satisfeita quando todos os  $(a_j, b_j)$  estão contidos em  $[a, b]$ .

A prova do próximo teorema pode ser encontrada em Folland, p. 106 [9].

**Teorema 1.6** (O Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Lebesgue). *Se  $-\infty < a < b < \infty$  e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , então são equivalentes:*

- a)  $F$  é absolutamente contínua em  $[a, b]$ .
- b)  $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$  para algum  $f \in L^1[a, b]$ .
- c)  $F$  é diferenciável q.t.p. em  $[a, b]$ ,  $F' \in L^1[a, b]$  e  $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$ .

Seja  $D$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  não necessariamente contínua. O nosso objetivo é encontrar uma função  $x$  absolutamente contínua em um intervalo real  $I$  tal que  $(t, x(t)) \in D$  para todo  $t \in I$  e

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

q.t.p. em  $t \in [0, T]$ .

**Definição 1.5** (Condições de Carathéodory). *Seja  $D$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dizemos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz as condições de Carathéodory sobre  $D$  se  $f$  é mensurável em  $t$  para cada  $x$ , contínua em  $x$  para cada  $t$  e para cada conjunto compacto  $U$  de  $D$ , existe uma função integrável  $m_U(t)$  tal que*

$$|f(t, x)| \leq m_U(t), (t, x) \in U.$$

**Teorema 1.7.** *Suponha que  $D$  seja um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f$  satisfaça as condições de Carathéodory sobre  $D$  e que para cada conjunto compacto  $U$  em  $D$ , exista uma função integrável  $k_U(t)$  tal que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k_U(t)|x - y|, (t, x), (t, y) \in U.$$

Então, para todo  $(t_0, x_0)$ , existe uma única solução  $x(t)$  de (1.11) passando por  $(t_0, x_0)$ .

Mais detalhes sobre o Teorema 1.7 podem ser encontrados em Hale [10], p. 30.

## Um conceito de solução para a equação de transporte

Seja o problema

$$\begin{cases} u_t(a, t) + u_a(a, t) + \mu(a, t)u(a, t) = f(a, t) & (a, t) \in Q \\ u(0, t) = b(t) & t \in (0, T) \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l) \end{cases} \quad (1.12)$$

onde  $Q = (0, T) \times (0, l)$ .

**Definição 1.6** (Um conceito de solução para o problema(1.12)). *Dizemos que uma função  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução de (1.12) se:*

(I)  $u \in L^\infty(0, T, L^1(0, l))$ .

(II)  $u$  é uma função absolutamente contínua ao longo das retas características  $t = a + c$ , onde  $c$  é uma constante.

(III)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(a + \epsilon, t + \epsilon) - u(a, t)}{\epsilon} = f(a, t) - \mu(a, t)u(a, t)$ , q.t.p. em  $Q$ .

(IV)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(\epsilon, t + \epsilon) = b(t)$  q.t.p. em  $(0, T)$ .

(V)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(a + \epsilon, \epsilon) = u_0(a)$  q.t.p. em  $(0, l)$ .

**Teorema 1.8.** *Se  $b \in L^\infty(0, T)$ ,  $u_0 \in L^1(0, l)$ ,  $\mu \in L^1_{loc}([0, l] \times [0, T])$ ,  $f \in L^1(Q)$  e  $b, u_0, \mu, f \geq 0$ , então o problema (1.12) possui uma única solução não negativa.*

**Demonstração:** Observe que, se  $u$  for uma solução de (1.12), então, integrando ao longo das retas características, temos:

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a - t)e^{-\int_0^t \mu(a-t+s, s)ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t \mu(a-t+\tau, \tau)d\tau} f(a - t + s, s)ds, & \text{se } a \geq t \\ b(t - a)e^{-\int_0^a \mu(s, t-a+s)ds} + \int_0^a e^{-\int_s^a \mu(\tau, t-a+\tau)d\tau} f(s, t - a + s)ds, & \text{se } a < t. \end{cases} \quad (1.13)$$

Note que  $u \geq 0$ .

Mostraremos também que, se  $u$  for dada por (1.13), então  $u$  será uma solução de (1.12).

**a)**  $u$  é absolutamente contínua ao longo das retas características. De fato,

Se  $a < t$ , temos  $t(\xi) = \xi + t - a$  e

$$g_1(\xi) = u(\xi, \xi + t - a) = b(t - a)e^{-\int_0^\xi \mu(s, t - a + s)ds} + \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi \mu(\tau, t - a + \tau)d\tau} f(s, t - a + s)ds. \quad (1.14)$$

Por outro lado, se  $a \geq t$ , temos  $a(\xi) = \xi + a - t$  e

$$g_2(\xi) = u(\xi + a - t, \xi) = u_0(a - t)e^{-\int_0^\xi \mu(a - t + s, s)ds} + \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi \mu(a - t + \tau, \tau)d\tau} f(a - t + s, s)ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.6),  $g_1$  e  $g_2$  são funções absolutamente contínuas.

Isso mostra **(II)**.

**b)** Prova de **(IV)** e **(V)**.

Temos

$$\begin{aligned} u(\epsilon, t + \epsilon) &= b(t)e^{-\int_0^\epsilon \mu(s, t + s)ds} + \int_0^\epsilon e^{-\int_s^\epsilon \mu(\tau, t + \tau)d\tau} f(s, t + s)ds \\ &= b(t)e^{-\int_0^\epsilon \mu(s, t + s)ds} + e^{-\int_0^\epsilon \mu(\tau, t + \tau)d\tau} \int_0^\epsilon e^{-\int_s^0 \mu(\tau, t + \tau)d\tau} f(s, t + s)ds \end{aligned}$$

Agora, como essas integrais são funções absolutamente contínuas na variável  $\epsilon$ , segue que:

se  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon \mu(s, t + s)ds &\rightarrow 0, \\ \int_0^\epsilon \mu(\tau, t + \tau)ds &\rightarrow 0, \\ \int_0^\epsilon e^{-\int_s^0 \mu(\tau, t + \tau)d\tau} f(s, t + s)ds &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

mostrando **(IV)**. A prova de **(V)** é análoga.

**c)** Prova de **(III)**

Se  $a < t$ , então,

$$\frac{u(a + \epsilon, t + \epsilon) - u(a, t)}{\epsilon} = A_\epsilon + B_\epsilon,$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_\epsilon &= \frac{b(t-a)e^{-\int_0^{a+\epsilon} \mu(s,t-a+s)ds} - b(t-a)e^{-\int_0^a \mu(s,t-a+s)ds}}{\epsilon} \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \frac{d}{d\delta} \{e^{-\int_0^{a+\delta} \mu(s,t-a+s)ds} b(t-a)\} d\delta \\
 &= -\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \mu(a+\delta, t+\delta) b(t-a) e^{-\int_0^{a+\delta} \mu(s,t-a+s)ds} d\delta
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 B_\epsilon &= \frac{\int_0^{a+\epsilon} e^{-\int_s^{a+\epsilon} \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} f(s,t-a+s)ds - \int_0^a e^{-\int_s^a \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} f(s,t-a+s)ds}{\epsilon} \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \frac{d}{d\delta} \left\{ \int_0^{a+\delta} e^{-\int_s^{a+\delta} \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} f(s,t-a+s)ds \right\} d\delta \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon -\mu(a+\delta, t+\delta) e^{-\int_0^{a+\delta} \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} \int_0^{a+\delta} e^{\int_0^s \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} f(s,t-a+s)ds d\delta \\
 &+ \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon e^{-\int_0^{a+\delta} \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} e^{\int_0^{a+\delta} \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} f(a+\delta, t+\delta) d\delta \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon -\mu(a+\delta, t+\delta) \int_0^{a+\delta} e^{-\int_s^{a+\delta} \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} f(s,t-a+s)ds d\delta \\
 &+ \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon f(a+\delta, t+\delta) d\delta
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$A_\epsilon \rightarrow -\mu(a, t) b(t-a) e^{-\int_0^a \mu(s,t-a+s)ds}.$$

e

$$B_\epsilon \rightarrow -\mu(a, t) \int_0^a e^{-\int_s^a \mu(\tau,t-a+\tau)d\tau} f(s,t-a+s)ds + f(a, t)$$

Logo,

$$Du(a, t) = -\mu(a, t)u(a, t) + f(a, t), \text{ se } a < t.$$

Procedendo de maneira análoga, mostramos também que

$$Du(a, t) = -\mu(a, t)u(a, t) + f(a, t), \text{ se } a \geq t.$$

Portanto, (III) está provado.

**d) Prova de (I).**

Temos:

Se  $0 < t < l$

$$\int_0^t |u(a, t)| da \leq \|b\|_{L^1(0, l)} + \|f\|_{L^1(Q)}, \quad (1.15)$$

$$\int_t^l |u(a, t)| da \leq \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + \|f\|_{L^1(Q)}, \quad (1.16)$$

donde segue que

$$\int_0^l |u(a, t)| da \leq \|b\|_{L^\infty(0, l)} + \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + 2\|f\|_{L^1(Q)}.$$

Se  $l < t$ ,

$$\int_0^l |u(a, t)| da \leq \|b\|_{L^\infty(0, l)} + \|f\|_{L^1(Q)}.$$

Logo, temos (I).

Portanto, o problema (1.12) possui uma única solução, a qual é dada por (1.13).

□

**Observação.:** Outros problemas semelhantes a (1.12) podem ser encontrados em Anita [3].

## Conceitos de solução para as equações de populações e equações duais (ou adjuntas)

A seguir explicamos o conceito de solução para os sistemas que aparecem neste trabalho.

Definimos como solução do sistema (2) uma função  $(u, v, r) \in L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times C[0, T] \times C[0, T]$  tal que:

a)  $u$  é uma função absolutamente contínua ao longo das retas características  $t = a + c$ ,  $c$  constante com:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(a + \epsilon, t + \epsilon) - u(a, t)}{\epsilon} = -[m_1(r(t))u(a, t) + \mu_1(c(a, t))u(a, t)], \text{ q.t.p. em } Q,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(\epsilon, t + \epsilon) = bv(t) \text{ q.t.p. em } (0, T)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(a + \epsilon, \epsilon) = u_0(a) \text{ q.t.p. em } (0, l).$$

b)  $v$  é uma função absolutamente contínua e

$$\begin{cases} v'(t) + m_2(r(t))v(t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(t) = u(l, t) \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

q.t.p. em  $(0, T)$ .

c)  $r$  é uma função absolutamente contínua e

$$\begin{cases} r'(t) - (g(r) - h(L_2(u, v)))r = 0 \\ r(0) = r_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

q.t.p. em  $(0, T)$ .

A seguir consideramos as chamadas equações adjuntas ou duais associadas aos problemas.

## Equações duais:

Recordamos que o sistema dual (ou adjunto) associado é obtido reescrevendo o problema de minimização com restrição como um novo problema de minimização, agora sem restrições, utilizando a ideia de multiplicadores de Lagrange (que no nosso caso correspondem às variáveis duais (ou adjuntas ou variáveis de co-estado) e a introdução da Lagrangeana associada ao problema. As equações adjuntas são então obtidas igualando a derivada da Lagrangeana com respeito às variáveis originais (às populações no nosso caso) a zero e usando a seguir operadores adjuntos. Na prática esta última etapa se realiza através de integrações por partes. Para mais detalhes ver Anita [3], p. 66. Como este procedimento é tedioso e relativamente padrão não derivamos aqui tais equações; apenas colocamos os resultados finais.

O sistema dual associado ao Problema 1 é:

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_{1t}(a, t) + q_{1a}(a, t) - (m_1(r) + \mu_1(c))q_1(a, t) = h'(L_2(u, v))rH_1q_3 - G_y(a, u) & (a, t) \in Q, \\ q'_2(t) - [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]q_2(t) = -bq_1(0, t) + h'(L_2(u, v))r q_3 \int_0^t H_2(\theta, t)d\theta - \rho_2v & t \in (0, T), \\ q'_3(t) + [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]q_3(t) = \int_0^l m'_1(r)u(\theta, t)q_1(\theta, t)d\theta + m'_2(r)vq_2 - \rho_3r & t \in (0, T), \\ q_1(l, t) = q_2(t) & t \in (0, T), \\ q_1(a, T) = 0 & a \in (0, l), \\ q_2(T) = 0, \\ q_3(T) = 0. \end{array} \right. \quad (1.19)$$

**Observação:** Chamamos a atenção que o sistema anterior tem condições finais nulas no tempo  $T$ . Estas condições têm um papel relevante na análise do problema uma vez que será utilizada integração por partes no tempo e esta nulidade de condições finais das variaáveis duais permitirá a eliminação de termos não conhecidos a priori.

Definimos como solução do (1.19), uma função  $(q_1, q_2, q_3) \in L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times C[0, T] \times C[0, T]$  tal que:

a)  $q_1$  é uma função absolutamente contínua ao longo das retas características  $t = a + c$ ,  $c$  constante com:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q_1(a + \epsilon, t + \epsilon) - q_1(a, t)}{\epsilon} = (m_1(r) + \mu_1(c))q_1(a, t) + h'(L_2(u, v))rH_1q_3 - G_y(a, u)$$

q.t.p. em  $Q$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} q_1(l - \epsilon, t - \epsilon) = q_2(t) \text{ q.t.p. em } (0, T)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} q_1(a - \epsilon, T - \epsilon) = 0 \text{ q.t.p. em } (0, l).$$

b)  $q_2$  é uma função absolutamente contínua e

$$\begin{cases} q_2'(t) - [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]q_2(t) = -bq_1(0, t) + h'(L_2(u, v))rq_3 \int_0^l H_2(\theta, t)d\theta - \rho_2v \\ q_2(T) = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

q.t.p. em  $(0, T)$ .

c)  $q_3$  é uma função absolutamente contínua e

$$\begin{cases} q_3'(t) + [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]q_3(t) = \int_0^l m_1'(r)u(\theta, t)q_1(\theta, t)d\theta + m_2'(r)vq_2 - \rho_3r \\ q_3(T) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

q.t.p. em  $(0, T)$ .

Definimos como solução de (5), uma função  $(u, v, r) \in L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \times C([0, T], L^\infty(\Omega))$  tal que:

a)  $u$  é uma função absolutamente contínua ao longo das retas características  $t = a + c$ ,  $c$  constante com:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(a + \epsilon, t + \epsilon) - u(a, t)}{\epsilon} = -[\int_{\Omega} m_1(r(x, t))H_3(x, t)dx + \mu_1(c(a, t))]u(a, t), \text{ q.t.p. em } Q$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(\epsilon, t + \epsilon) = \int_{\Omega} B(x, t)v(x, t)dx \text{ q.t.p. em } (0, T)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(a + \epsilon, \epsilon) = u_0(a) \text{ q.t.p. em } (0, l).$$

b)  $v$  é uma solução fraca do problema:

$$\begin{cases} v_t(x, t) - \alpha \Delta v(x, t) + m_2(r(x, t))v(x, t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(x, t) = u(l, t) & (x, t) \in \Omega_T \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \\ v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T \end{cases} \quad (1.22)$$

Ou seja,  $v \in L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega))$  com  $v_t \in L^\infty([0, T], H^{-1}(\Omega))$  tal que

$$\begin{aligned} \langle v_t, \phi \rangle + \int_{\Omega} \nabla v_t(x, t) \nabla \phi(x) dx + \int_{\Omega} [m_2(r(x, t)) + \mu_2(L_1(c(a, t)))] v(x, t) \phi(x, t) dx \\ = \int_{\Omega} u(l, t) \phi(x, t) dx \end{aligned}$$

$\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$  e q.t.p. em  $[0, T]$ .

c)  $r$  é absolutamente contínua para cada  $x \in \Omega$  fixo e verifica:

$$\begin{cases} r_t(x, t) - (g(r(x, t)) - h(L_2(u(a, t), v(x, t))))r(x, t) = 0 & (x, t) \in \Omega_T \\ r(x, 0) = r_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.23)$$

q.t.p. em  $[0, T]$ .

Considere agora o sistema

$$\begin{cases} q_{1t}(a, t) + q_{1a}(a, t) - [\int_{\Omega} m_1(r) H_3 dx + \mu_1(c)] q_1(a, t) = \int_{\Omega} h'(L_2(u, v)) r H_2 q_3 dx \\ -G_y(a, u) & (a, t) \in Q \\ q_{2t}(x, t) + \alpha \Delta q_2(x, t) - [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))] q_2(t) = -B(x, t) q_1(0, t) \\ \int_0^l h'(L_2(u, v)) r q_3 H_2(\theta, t) d\theta - \rho_2 v & (x, t) \in \Omega_T \\ q_{3t}(x, t) + [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))] q_3(x, t) = \int_0^l m'_1(r) u(\theta, t) q_1(\theta, t) d\theta \\ + m'_2(r) v q_2 - \rho_3 r & (x, t) \in \Omega_T \\ q_1(l, t) = \int_{\Omega} q_2(x, t) dx & t \in (0, T) \\ q_1(a, T) = 0 & a \in (0, l) \\ q_2(x, T) = 0 & x \in \Omega \\ q_2(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T \\ q_3(x, T) = 0 & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.24)$$

Analogamente ao sistema anterior, definimos como solução de (1.24), uma tripla de funções  $(q_1, q_2, q_3) \in L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \times C([0, T], L^\infty(\Omega))$  satisfazendo:

a)  $q_1$  é uma função absolutamente contínua ao longo das retas características  $t = a + c$ ,  $c$  constante com:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q_1(a + \epsilon, t + \epsilon) - q_1(a, t)}{\epsilon} = \left[ \int_{\Omega} m_1(r) H_3 dx + \mu_1(c) \right] q_1(a, t) + \int_{\Omega} h'(L_2(u, v)) r H_2 q_3 dx - G_y(a, u)$$

q.t.p. em  $Q$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} q_1(l - \epsilon, t - \epsilon) = \int_{\Omega} q_2(x, t) dx \text{ q.t.p. em } (0, T)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} q_1(a - \epsilon, T - \epsilon) = 0 \text{ q.t.p. em } (0, l).$$

b)  $q_2$  é uma solução fraca do problema:

$$\begin{cases} q_{2t}(x, t) + \alpha \Delta q_2(x, t) - [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))] q_2(t) = -B(x, t) q_1(0, t) \\ q_2(x, T) = 0 \\ q_2(x, t) = 0 \end{cases} \begin{array}{l} x \in \Omega \\ (x, t) \in \partial\Omega_T \end{array} \quad (1.25)$$

c)  $q_3$  é absolutamente contínua para cada  $x \in \Omega$  fixo e verifica:

$$\begin{cases} q_{3t}(x, t) + [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))] q_3(x, t) = \int_0^l m'_1(r) u(\theta, t) q_1(\theta, t) d\theta \\ + m'_2(r) v q_2 - \rho_3 r \\ q_3(x, T) = 0 \end{cases} \begin{array}{l} (x, t) \in \Omega_T \\ x \in \Omega, \end{array} \quad (1.26)$$

q.t.p. em  $[0, T]$ .



# ANÁLISE DOS SISTEMAS RELACIONADOS AO PROBLEMA 1

---

Neste capítulo mostramos a existência, a unicidade e obteremos algumas estimativas para as soluções do sistema das populações:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u_t(a, t) + u_a(a, t) + m_1(r(t))u(a, t) + \mu_1(c(a, t))u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\
 v'(t) + m_2(r(t))v(t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\
 r'(t) - (g(r) - h(L_2(u, v)))r = 0 & t \in (0, T), \\
 u(0, t) = bv(t) & t \in (0, T), \\
 u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\
 v(0) = v_0, \\
 r(0) = r_0.
 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Também obtemos resultados análogos para o sistema dual associado (veja a Seção 1.5):

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_{1t}(a, t) + q_{1a}(a, t) - (m_1(r) + \mu_1(c))q_1(a, t) = h'(L_2(u, v))rH_1q_3 - G_y(a, u) & (a, t) \in Q, \\ q_2'(t) - [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]q_2(t) = -bq_1(0, t) + h'(L_2(u, v))r q_3 \int_0^l H_2(\theta, t)d\theta - \rho_2v & t \in (0, T), \\ q_3'(t) + [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]q_3(t) = \int_0^l m_1'(r)u(\theta, t)q_1(\theta, t)d\theta + m_2'(r)vq_2 - \rho_3r & t \in (0, T), \\ q_1(l, t) = q_2(t) & t \in (0, T), \\ q_1(a, T) = 0 & a \in (0, l), \\ q_2(T) = 0, \\ q_3(T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Os principais resultados que utilizamos são o teorema do ponto fixo de Banach e a desigualdade de Gronwall. No decorrer do texto, faremos uso das seguintes **hipóteses**:

**(H1)**  $r_0, v_0, \rho_2, \rho_3, \geq 0, b, \rho_1 > 0$  são constantes e  $u_0 \in L^\infty(0, l)$  com  $u_0 \geq 0$ .

**(H2)**  $m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  são funções de classe  $C^2$  com  $m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, h$  e suas derivadas até a segunda ordem limitadas. Suas respectivas constantes de Lipschitz são denotadas por  $k_{m_1}, k_{m_2}, k_{\mu_1}, k_{\mu_2}, k_h, k_{m_1'}, k_{m_2'}, k_{\mu_1'}, k_{\mu_2'}, k_{h'}$ .

**(H3)**  $L_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $L_2 : L^\infty([0, T], L^1(0, l)) \times C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_1(c)(t) = \int_0^l c(a, t)H_0(a, t)da, \quad (2.3)$$

$$L_2(u, v)(x, t) = \int_0^l u(a, t)H_1(a, t) + v(t)H_2(a, t)da, \quad (2.4)$$

em que  $H_1, H_2, H_3 \in L^\infty(Q)$  com  $H_1, H_2, H_3 \geq 0$ .

**(H4)**  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  com  $g, g', g''$  limitadas e existe uma constante  $d > 0$  com:  $g(r) \geq 0$ , se  $0 \leq r \leq d$  e  $g(r) < 0$ , se  $r > d$ . Denotamos por  $k_g, k_{g'},$  as constantes de Lipschitz de  $g, g', g''$ , respectivamente. Considere também que  $0 \leq r_0 \leq d$ .

**(H5)**  $G : (0, l) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável em  $a$ , de classe  $C^2$  em  $y$  com  $G \geq 0$  e  $G, G_y, G_{yy}$  limitadas.

**(H6)**  $c \in U$ , e  $\gamma_1, \gamma_2$  são funções mensuráveis com  $0 \leq \gamma_1(a) \leq \gamma_2(a) \leq \lambda_2$ , q.t.p. em  $(0, l)$ .

## 2.1 O sistema das populações

Nesta seção, mostramos que o sistema de populações (2.1) possui uma única solução; antes, porém, provamos alguns resultados preliminares:

**Teorema 2.1.** *Sejam  $\bar{r} \in C^+[0, T]$  e o sistema*

$$\begin{cases} u_t(a, t) + u_a(a, t) + m_1(\bar{r}(t))u(a, t) + \mu_1(c(a, t))u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v'(t) + m_2(\bar{r}(t))v(t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\ u(0, t) = bv(t) & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Com as hipóteses **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** e **(H6)**, o sistema (2.5) possui uma única solução  $(u, v) \in X = L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times C^+[0, T]$ .

**Demonstração:** Utilizamos o teorema do ponto fixo de Banach com o operador

$$\tau : X \rightarrow X,$$

em que

$$X = L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times C^+[0, T]$$

e  $\tau$  é definido por  $\tau(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$  em que  $(u, v)$  é a solução do sistema:

$$\begin{cases} u_t(a, t) + u_a(a, t) + m_1(\bar{r}(t))u(a, t) + \mu_1(c(a, t))u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v'(t) + m_2(\bar{r}(t))v(t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\ u(0, t) = b\bar{v}(t) & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Das hipóteses, segue que a equação em  $u$  possui uma única solução em  $L^\infty(0, T, L^1(0, l))$  com  $u \geq 0$  e absolutamente contínua ao longo das retas características  $t = a + c$  (ver o Teorema (1.8)). Substituindo essa solução na equação em  $v$ , temos que esta possui uma única solução  $v \in C^+[0, T]$ . Portanto o operador  $\tau$  está bem definido.

Agora, vamos mostrar que  $\tau$  possui um único ponto fixo para  $T = T_1$  com  $T_1$  suficientemente pequeno. Integrando as equações de (2.6), obtemos

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a - t)e^{-\int_0^t m_1(\bar{r}(t-\sigma)) + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma))d\sigma}, & \text{se } a \geq t \\ b\bar{v}(t - a)e^{-\int_0^a m_1(\bar{r}(t-\sigma)) + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma))d\sigma}, & \text{se } a < t. \end{cases} \quad (2.7)$$

$$v(t) = v_0 e^{-\int_0^t m_2(\bar{r}(\xi)) + \mu_2(L_1(c))d\xi} + \int_0^t u(l, \sigma) e^{-\int_\sigma^t m_2(\bar{r}(\xi)) + \mu_2(L_1(c))d\xi} d\sigma \quad (2.8)$$

Assim, dados  $\tau(\bar{u}_1, \bar{v}_1) = (u_1, v_1)$  e  $\tau(\bar{u}_2, \bar{v}_2) = (u_2, v_2)$ , temos

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| \leq b|\bar{v}_2(t - a) - \bar{v}_1(t - a)| \leq b\|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]}, \text{ se } a < t.$$

e

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| = 0, \text{ se } a \geq t.$$

Vamos considerar dois casos:

**(I)**  $0 < t < l$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &= \int_0^t |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da + \int_t^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da \\ &\leq \int_0^t b\|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]} da \leq bT_1\|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]} \end{aligned}$$

**(II)**  $0 < l < t$ .

Temos

$$\int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da \leq bT_1\|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]}.$$

Portanto,

$$\|u_2 - u_1\|_{L^\infty(0, T_1, L^1(0, l))} \leq bT_1\|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]}. \quad (2.9)$$

Por outro lado,

$$|v_2(t) - v_1(t)| \leq \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma \leq bT_1 \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]}.$$

Ou seja,

$$\|v_2 - v_1\|_{C[0, T_1]} \leq bT_1 \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]}. \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), temos

$$\|u_2 - u_1\|_{L^\infty(0, T, L^1(0, l))} + \|v_2 - v_1\|_{C[0, T_1]} \leq bT_1 \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{C[0, T_1]}.$$

Portanto,

$$\|\tau(\bar{u}_2, \bar{v}_2) - \tau(\bar{u}_1, \bar{v}_1)\|_X \leq bT_1 \|(\bar{u}_2, \bar{v}_2) - (\bar{u}_1, \bar{v}_1)\|_X.$$

Dessa forma, para  $T_1 = \frac{1}{2b}$ ,  $\tau$  possui um único ponto fixo que é a solução do sistema (2.5) em  $[0, T_1]$ . Repetindo este processo para intervalos do tipo  $[T_1, 2T_1]$ ,  $[2T_1, 3T_1]$ , ..., (observamos que a constante de contração em cada intervalo será a mesma), concluímos que o sistema (2.5) possui uma única solução  $(u, v)$  em  $[0, T]$ .

□

**Teorema 2.2.** *Seja o problema*

$$\begin{cases} r'(t) - (g(r) - h(L_2(u, v)))r = 0 & t \in [0, T], \\ r(0) = r_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde  $(u, v) \in X = L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times C^+[0, T]$  é dado.

Considere as hipóteses **(H1)**-**(H4)**. Então o problema (2.11) possui uma única solução  $r \in C[0, T]$  com  $0 \leq r \leq d$ .

**Demonstração:** Segue do Teorema 1.7.

□

A seguir temos um resultado auxiliar que usamos na demonstração da existência de solução para o sistema de população.

**Teorema 2.3.** Dado  $\bar{r} \in C[0, T]$ , com  $0 \leq \bar{r} \leq d$ , seja o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + m_1(\bar{r}(t))u(a, t) + \mu_1(c(a, t))u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v'(t) + m_2(\bar{r}(t))v(t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\ r'(t) - (g(r) - h(L_2(u, v)))r = 0 & t \in (0, T), \\ u(0, t) = bv(t) & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(0) = v_0, \\ r(0) = r_0. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Com as hipóteses **(H1)**-**(H4)** e **(H6)**, o sistema (2.12) possui uma única solução. Além disso, sua solução  $(u, v, r)$  satisfaz,  $\forall (a, t) \in Q$ , as seguintes estimativas:

$$|u(a, t)| \leq \delta_1, \quad (2.13)$$

$$|v(t)| \leq \delta_2, \quad (2.14)$$

$$0 \leq r(t) \leq d \quad (2.15)$$

onde

$$\delta_1 = (1 + bTe^T)\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + b(1 + bTe^T)v_0. \quad (2.16)$$

e

$$\delta_2 = (Te^{bT})\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + (1 + Tbe^{bT})v_0, \quad (2.17)$$

**Demonstração:** A existência segue dos Teoremas 2.1 e 2.2. Observamos que (2.15) segue do Teorema 2.2. Vamos provar as demais estimativas.

Usando as fórmulas integrais:

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a - t)e^{-\int_0^t [m_1(\bar{r}(t-\sigma)) + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma))]d\sigma}, & \text{se } a \geq t \\ bv(t - a)e^{-\int_0^a [m_1(\bar{r}(t-\sigma)) + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma))]d\sigma}, & \text{se } a < t, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$v(t) = v_0 e^{-\int_0^t m_2(\bar{r}(\xi)) + \mu_2(L_1(c))d\xi} + \int_0^t u(l, \sigma) e^{-\int_\sigma^t m_2(\bar{r}(\xi)) + \mu_2(L_1(c))d\xi} d\sigma \quad (2.19)$$

temos o seguinte

$$|u(l, t)| \leq bv_0 + b \int_0^t |u(l, \sigma)|, \text{ se } l < t$$

e

$$|u(l, t)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(0, l)}, \text{ se } l \geq t.$$

Consequentemente,

$$|u(l, t)| \leq bv_0 + \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + \int_0^t b|u(l, \sigma)|d\sigma, \forall t \in [0, T].$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|u(l, t)| \leq (bv_0 + \|u_0\|_{L^\infty(0, l)})e^{bT}, \forall t \in [0, T].$$

Daí, segue que

$$|v(t)| \leq v_0 + \int_0^t |u(l, \sigma)| \leq v_0 + (bv_0 + \|u_0\|_{L^\infty(0, l)})e^{bT}T, \forall t \in [0, T]. \quad (2.20)$$

Por outro lado,

$$|u(a, t)| \leq |bv(t - a)|, \text{ se } a < t \quad (2.21)$$

e

$$|u(a, t)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(0, l)}, \text{ se } a \geq t.$$

Usando (2.20) em (2.21), chegamos em (2.13).

□

Agora, temos o principal teorema desta seção:

**Teorema 2.4.** *Com as hipóteses (H1)-(H4) e (H6), o sistema (2.1) possui uma única solução.*

**Demonstração:** Considere o operador

$$\tau : X \rightarrow X,$$

em que

$$X = L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times C^+[0, T] \times M[0, T]$$

com  $M[0, T] = \{r \in C[0, T]; 0 \leq r \leq d\}$ , definido por  $\tau(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) = (u, v, r)$  onde  $(u, v, r)$  é a solução do sistema (2.12).

Vamos provar que  $\tau$  possui um único ponto fixo para  $T = T_1$  suficientemente pequeno. Para isso, além das hipóteses mencionadas, serão fundamentais as estimativas dadas no Teorema 2.3.

Observe que tais estimativas verificam  $\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} < \delta_1$  e  $v_0 < \delta_2$ .

Seja

$$\tau(\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{r}_i) = (u_i, v_i, r_i), i = 1, 2$$

Por (2.19) e do fato de que  $m_2$  é lipschitziana, temos

$$\begin{aligned}
 |v_2(t) - v_1(t)| &\leq v_0 \int_0^t |m_2(\bar{r}_2(\xi)) - m_2(\bar{r}_1(\xi))| d\xi + \int_0^t |u_1(l, \sigma)| \int_\sigma^t |m_2(\bar{r}_2(\xi)) - m_2(\bar{r}_1(\xi))| d\xi d\sigma \\
 &\quad + \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma \\
 &\leq v_0 k_{m_2} \int_0^t |\bar{r}_2(\xi) - \bar{r}_1(\xi)| d\xi + k_{m_2} \int_0^t |u_1(l, \sigma)| d\sigma \int_0^t |\bar{r}_2(\xi) - \bar{r}_1(\xi)| d\xi \\
 &\quad + \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma \\
 &\leq (v_0 k_{m_2} + k_{m_2} \int_0^t |u_2(l, \sigma)| d\sigma) T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]} \\
 &\quad + \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma \\
 &\leq (\delta_2 k_{m_2} + k_{m_2} \delta_1 T_1) T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]} \\
 &\quad + \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Agora vamos obter uma estimativa para  $u$ . Por (2.18) e como  $m_1$  é lipschitz, segue que: se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned}
 |u_2(a, t) - u_1(a, t)| &\leq b|v_2(t-a) - v_1(t-a)| + bk_{m_1}|v_1(t-a)| \int_0^a |\bar{r}_2(t-\sigma) - \bar{r}_1(t-\sigma)| d\sigma \\
 &\leq b|v_2(t-a) - v_1(t-a)| + bk_{m_1} \delta_2 \int_0^t |\bar{r}_2(\xi) - \bar{r}_1(\xi)| d\xi \\
 &\leq b|v_2(t-a) - v_1(t-a)| + bk_{m_1} \delta_2 T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, se  $a \geq t$ ,

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| \leq k_{m_1} \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]}. \tag{2.23}$$

Em particular, estas estimativas valem para  $a = l$ . Logo, se  $l < t$ ,

$$\begin{aligned}
 |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq b|v_2(t-l) - v_1(t-l)| + bk_{m_1} \delta_2 T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]}, \\
 &\leq (bd_1 + bk_{m_1} \delta_2) T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]} \\
 &\quad + \int_0^t |u(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma, \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

onde  $d_1 = k_{m_2}(\delta_1 + \delta_2 T_1)$ .

Portanto, de (2.24) e (2.23), temos,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$|u_2(l, t) - u_1(l, t)| \leq d_2 T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]} + \int_0^t |u(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma$$

onde

$$d_2 = b d_1 + k_{m_1} \delta_1 + b k_{m_1} \delta_2.$$

Pela desigualdade de Gronwall, segue que

$$|u_2(l, t) - u_1(l, t)| \leq d_2 e^T T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]}.$$

Como consequência, temos

$$|v_2(t) - v_1(t)| \leq d_3 T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]}, \quad (2.25)$$

onde  $d_3 = d_1 + d_2 e^T T$  e

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| \leq d_4 T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]}, \quad (2.26)$$

com  $d_4 = b d_3 + b k_{m_1} \delta_2 + k_{m_1} \|u_0\|_{L^\infty(0, t)}$ .

Por outro lado, como  $r(t) = r_0 e^{-\int_0^t (h(L_2(u, v)) - g(r(\xi))) d\xi}$  e  $h$  e  $g$  são lipschitz, temos

$$\begin{aligned} |r_2(t) - r_1(t)| &\leq r_0 k_h \int_0^t |L_2(u_2, v_2) - L_2(u_1, v_1)| d\xi + r_0 k_g \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &\leq r_0 k_h \int_0^t \int_0^l |u_2(\theta, \xi) - u_1(\theta, \xi)| |H_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi + r_0 k_g \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &\quad + r_0 k_h \int_0^t \int_0^l |v_2(\xi) - v_1(\xi)| |H_2(\theta, \xi)| d\theta d\xi. \end{aligned}$$

Assim, por (2.25), (2.26) e lembrando que  $r_0 \leq d$ , temos

$$|r_2(t) - r_1(t)| \leq d_5 T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]} + r_0 k_g \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi,$$

onde  $d_5 = d k_h d_4 \|H_2\|_{L^\infty(Q)} + d k_h d_3 \|H_3\|_{L^\infty(Q)}$ .

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|r_2(t) - r_1(t)| \leq d_6 T_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C[0, T_1]}, \quad (2.27)$$

onde  $d_6 = d_5 e^{dk_g T}$

De (2.25), (2.26) e (2.27), obtemos

$$\|\tau(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{r}_2) - \tau(\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{r}_1)\| \leq DT_1 \|(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{r}_2) - (\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{r}_1)\|, \quad (2.28)$$

onde

$$D = d_3 + d_4 + d_6. \quad (2.29)$$

Portanto, para  $T_1$  pequeno,  $\tau$  possui um único ponto fixo que é solução do nosso sistema em  $[0, T_1]$ . Note que a constante  $D$  depende apenas de

$$\delta_1, \delta_2, d, k_{m_1}, k_{m_2}, k_g, k_h, T, e^{r_0 k_g T}, e^{bT}, \|H_1\|_{L^\infty(Q)}, \|H_2\|_{L^\infty(Q)}$$

de forma polinomial. No segundo passo, buscamos uma solução no intervalo  $[T_1, 2T_1]$ . Neste caso, temos condições iniciais  $u(a, T_1)$ ,  $v(T_1)$  e  $r(T_1)$  e não mais  $u_0$ ,  $v_0$  e  $r_0$ . Mas

$$u(a, T_1) \leq \delta_1, v(T_1) \leq \delta_2 \text{ e } r(T_1) \leq d.$$

Como consequência, a constante  $D$  obtida no segundo passo será idêntica aquela dada por (2.19). Portanto, repetindo esse processo para intervalos do tipo  $[T_1, 2T_1]$ ,  $[2T_1, 3T_1]$ , ..., concluímos que existe uma única  $(u, v, r)$  que é solução do nosso sistema em  $[0, T]$ .  $\square$

**Teorema 2.5.** *A solução  $(u, v, r)$  do sistema (2.1) satisfaz as seguintes estimativas:*

$$|u(a, t)| \leq (1 + bTe^T) \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + b(1 + bTe^T)v_0, \forall (a, t) \in [0, l] \times [0, T].$$

$$|v(t)| \leq (Te^{bT}) \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + (1 + Tbe^{bT})v_0, \forall t \in [0, T],$$

e

$$0 \leq r(t) \leq d.$$

**Demonstração:** Análoga a do Teorema 2.3.

□

## 2.2 O sistema dual associado.

Nesta seção, nós tratamos a cerca de um resultado de existência e unicidade para o sistema dual associado. Além disso, também provamos uma importante estimativa para sua solução. Tal sistema será útil tanto para a caracterização (condições de otimalidade), quanto para a existência do controle ótimo.

**Teorema 2.6.** *Com as hipóteses (H1)-(H6), o sistema (2.2) possui uma única solução.*

**Demonstração:** Considere o operador

$$\tau : Y \rightarrow Y$$

em que

$$Y = L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times C[0, T] \times C[0, T]$$

definido por  $\tau(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) = (q_1, q_2, q_3)$  onde  $(q_1, q_2, q_3)$  é a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_{1t}(a, t) + q_{1a}(a, t) - (m_1(r) + \mu_1(c))q_1(a, t) = h'(L_2(u, v))rH_1\bar{q}_3 - G_y(a, u) & (a, t) \in Q, \\ q_2'(t) - (m_2(r) + \mu_2(L_1(c)))q_2(t) = -bq_1(0, t) + h'(L_2(u, v))r\bar{q}_3 \int_0^l H_2(\theta, t)d\theta - \rho_2v & t \in (0, T), \\ q_3'(t) + (g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v)))q_3(t) = \int_0^l m_1'(r)u(\theta, t)\bar{q}_1(\theta, t)d\theta + m_2'(r)v\bar{q}_2 - \rho_3r & t \in (0, T), \\ q_1(l, t) = q_2(t) & t \in (0, T), \\ q_1(a, T) = 0 & a \in (0, l), \\ q_2(T) = 0, \\ q_3(T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Vamos provar que  $\tau$  possui um único ponto fixo para  $T = T_1$  suficientemente pequeno. Usaremos mais uma vez o Teorema do Ponto Fixo de Banach. No que segue, denotaremos por

$k$  uma constante.

Se  $t \geq a + T - l$ ,

$$\begin{aligned} q_1(a, t) &= \int_0^{T_1-t} \{G_y[a + s, u(a + s, t + s)] - h'[L_2(u(a + s, t + s), v(t + s))]\} \\ &\times r(t + s)H_1\bar{q}_3(t + s)\}e^{-\int_0^s [m_1(r(t+\theta))+\mu_1(c(a+\theta,t+\theta))]d\theta} ds. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Se  $t < a + T - l$ ,

$$\begin{aligned} q_1(a, t) &= q_2(l + t - a)e^{-\int_0^{l-a} [m_1(r(t+\theta))+\mu_1(c(a+\theta,t+\theta))]d\theta} \\ &+ \int_0^{l-a} \{G_y[a + s, u(a + s, t + s)] - h'[L_2(u(a + s, t + s), v(t + s))]\} \\ &\times r(t + s)H_1\bar{q}_3(t + s)\}e^{-\int_0^s [m_1(r(t+\theta))+\mu_1(c(a+\theta,t+\theta))]d\theta} ds. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$q_2(t) = \int_t^{T_1} \{bq_1(0, \sigma) - h'(L_2(u, v))r\bar{q}_3 \int_0^l H_2(\theta, \sigma)d\theta + \rho_2v\}e^{-\int_t^\sigma m_2(r)+\mu_2(L_1(c))d\xi} d\sigma. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} q_3(t) &= \int_t^{T_1} \left\{ \int_0^l m'_1(r)u(\theta, \sigma)\bar{q}_1(\theta, \sigma)d\theta + m'_2(r)v\bar{q}_2 - \rho_3r \right\} \\ &\times e^{-\int_t^\sigma h(L_2(u,v))-g(r)-g'(r)rd\xi} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Agora, seja

$$\tau(Q_1^i, Q_2^i, Q_3^i) = (q_1^i, q_2^i, q_3^i), i = 1, 2.$$

Como  $0 \leq r \leq d$ ,  $H_1 \in L^\infty(Q)$  e  $h'$  é limitada, temos, se  $t \geq a + T - l$

$$\begin{aligned} |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq \int_0^{T_1-t} |h'(L_2(u, v))||r||H_1||Q_3^2(t + s) - Q_3^1(t + s)|ds \\ &\leq k \int_0^{T_1-t} |Q_3^2(t + s) - Q_3^1(t + s)|ds \\ &\leq k \int_t^{T_1} |Q_3^2(\theta) - Q_3^1(\theta)|d\theta \\ &\leq k \int_t^{T_1} d\theta \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}. \end{aligned}$$

Ou seja, se  $t \geq a + T - l$ ,

$$|q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)|_{C[0, T_1]} \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}. \quad (2.35)$$

Se  $t < a + T - l$ ,

$$\begin{aligned} |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq |q_2^2(l + t - a) - q_2^1(l + t - a)| + k \int_0^{l-a} |Q_3^2(t + s) - Q_3^1(t + s)| ds \\ &\leq |q_2^2(l + t - a) - q_2^1(l + t - a)| + k \int_0^{t+l-a} |Q_3^2(\theta) - Q_3^1(\theta)| d\theta \\ &\leq |q_2^2(l + t - a) - q_2^1(l + t - a)| + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq |q_2^2(l + t - a) - q_2^1(l + t - a)| \\ &\quad + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |q_2^2(t) - q_2^1(t)| &\leq b \int_t^{T_1} |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma \\ &\quad + \int_t^{T_1} |h'(L_2(u, v))| r \int_0^l |H_2(\theta, \sigma)| d\theta \|Q_3^2(\sigma) - Q_3^1(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq b \int_t^{T_1} |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma + k \int_t^{T_1} |Q_3^2(\sigma) - Q_3^1(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

Assim,

$$|q_2^2(t) - q_2^1(t)| \leq b \int_t^{T_1} |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}. \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.36) com  $a = l$ , chegamos a

$$|q_1^2(0, t) - q_1^1(0, t)| \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]} + k \int_t^{T_1} |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma. \quad (2.38)$$

se  $t < a + T - l$ .

Por (2.38) e (2.35),

$$|q_1^2(0, t) - q_1^1(0, t)| \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]} + k \int_t^{T_1} |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma.$$

$\forall t \in [0, T_1]$ .

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|q_1^2(0, t) - q_1^1(0, t)| \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}, \forall t \in [0, T]. \quad (2.39)$$

Por (2.39), (2.37), (2.36) e (2.35), temos

$$|q_2^2(t) - q_2^1(t)| \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}$$

e

$$|q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]}.$$

Como  $m'_1$  é limitada, por (2.34) e pelo Teorema 2.5, que

$$\begin{aligned} |q_3^2(t) - q_3^1(t)| &\leq \int_0^{T_1} \int_0^l |m'_1(r)| |u(\theta, \sigma)| |Q_1^2(\theta, \sigma) - Q_1^1(\theta, \sigma)| d\theta d\sigma \\ &\leq \int_0^{T_1} |m'_1(r)| |v(\sigma)| |Q_1^2(\theta, \sigma) - Q_1^1(\theta, \sigma)| d\theta d\sigma \\ &\leq kT_1 \|Q_1^2 - Q_1^1\|_{L^\infty([0, T_1], L^1(0, l))} + kT_1 \|Q_2^2 - Q_2^1\|_{C[0, T_1]}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|q_1^2 - q_1^1\|_{L^\infty([0, T_1], L^1(0, l))} \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]},$$

$$\|q_2^2 - q_2^1\|_{C[0, T_1]} \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C[0, T_1]},$$

$$\|q_3^2 - q_3^1\|_{C[0, T_1]} \leq kT_1 \|Q_1^2 - Q_1^1\|_{L^\infty([0, T_1], L^1(0, l))} + kT_1 \|Q_2^2 - Q_2^1\|_{C[0, T_1]}.$$

Logo,

$$\|\tau(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) - \tau(Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1)\| \leq kT_1 \|(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) - (Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1)\|$$

Enfatizamos que a constante  $k$  é análoga a constante  $D$  que aparece em (2.28). Portanto, procedendo como no Teorema 2.4, para  $T_1$  pequeno,  $\tau$  possui um único ponto fixo que é solução do nosso sistema em  $[0, T_1]$ . Repetindo esse procedimento para  $[T_1, 2T_1]$ ,  $[2T_1, 3T_1]$ ,  $\dots$ , obteremos uma única  $(q_1, q_2, q_3)$  que é solução do sistema em  $[0, T]$ .

□

A seguir temos:

**Teorema 2.7.** *Com as hipóteses do Teorema 2.6 valem as seguintes estimativas:*

$$|q_1(a, t)|, |q_2(t)|, |q_3(t)| \leq k[(T - t) + (T - t)^2], \forall (a, t) \in Q, \forall c \in U, \quad (2.40)$$

onde  $k$  é uma contante

**Demonstração:** Temos o seguinte:

Se  $t \geq a + T - l$ ,

$$\begin{aligned} q_1(a, t) &= \int_0^{T-t} \{G_y[a + s, u(a + s, t + s)] - h'[L_2(u(a + s, t + s), v(t + s))]\} \\ &\times r(t + s)H_1q_3(t + s)\} e^{-\int_0^s [m_1(r(t+\theta)) + \mu_1(c(a+\theta, t+\theta))]d\theta} ds. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Se  $t < a + T - l$ ,

$$\begin{aligned} q_1(a, t) &= q_2(l + t - a)e^{-\int_0^{l-a} [m_1(r(t+\theta)) + \mu_1(c(a+\theta, t+\theta))]d\theta} \\ &+ \int_0^{l-a} \{G_y[a + s, u(a + s, t + s)] - h'[L_2(u(a + s, t + s), v(t + s))]\} \\ &\times r(t + s)H_1q_3(t + s)\} e^{-\int_0^s [m_1(r(t+\theta)) + \mu_1(c(a+\theta, t+\theta))]d\theta} ds. \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$q_2(t) = \int_t^T \{bq_1(0, \sigma) - h'(L_2(u, v))r q_3 \int_0^l H_2(\theta, \sigma)d\theta + \rho_2 v\} e^{-\int_t^\sigma m_2(r) + \mu_2(L_1(c))d\xi} d\sigma. \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}
 q_3(t) &= \int_t^{T_1} \left\{ \int_0^l m'_1(r)u(\theta, \sigma)q_1(\theta, \sigma)d\theta + m'_2(r)vq_2 - \rho_3r \right\} \\
 &\times e^{-\int_t^\sigma h(L_2(u,v))-g(r)-g'(r)r d\xi} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Se  $t \geq T - l$

$$\begin{aligned}
 |q_1(0, t)| &\leq \int_0^{T-t} |G_y| + |H_1| |h'(L_2(u, v))| r |q_3(t + s)| d\sigma \\
 &\leq k \int_t^T 1 + |q_3(\sigma)| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Se  $t < T - l$

$$\begin{aligned}
 |q_1(0, t)| &\leq |q_2(l + t)| + k \int_0^l |G_y| + |H_1| |h'(L_2(u, v))| r |q_3(t + s)| ds \\
 &\leq |q_2(l + t)| + k \int_t^T 1 + |q_3(\sigma)| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 |q_2(l + t)| &\leq \int_t^T |h'(L_2(u, v))| |r| \int_0^l |H_2| d\theta |q_3(\sigma)| + \rho_2 |v| + |q_1(0, \sigma)| d\sigma \\
 &\leq k \int_t^T |q_3(\sigma)| + 1 d\sigma + k \int_t^T |q_1(0, \sigma)| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Por (2.47) e (2.46), se  $t < T - l$ , então,

$$|q_1(0, t)| \leq k \int_t^T |q_3(\sigma)| + 1 d\sigma + k \int_t^T |q_1(0, \sigma)| d\sigma. \tag{2.48}$$

Por (2.48) e (2.45),

$$|q_1(0, t)| \leq k \int_t^T |q_3(\sigma)| + 1 d\sigma + k \int_t^T |q_1(0, \sigma)| d\sigma, \forall t \in [0, T].$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|q_1(0, t)| \leq k \int_t^T |q_3(\sigma)| + 1 d\sigma. \tag{2.49}$$

Segue de (2.49) e (2.41)-(2.43) que

$$|q_2(t)| \leq k \int_t^T |q_3(\sigma)| + 1 d\sigma \quad (2.50)$$

e

$$|q_1(a, t)| \leq k \int_t^T |q_3(\sigma)| + 1 d\sigma. \quad (2.51)$$

Por outro lado, levando essas duas últimas estimativas em (2.44), obtemos

$$|q_3(t)| \leq k \int_t^T |q_3(\sigma)| + 1 d\sigma = k(T - t) + k \int_t^T |q_3(\sigma)| d\sigma.$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|q_3(t)| \leq k(T - t), \quad (2.52)$$

Por (2.52), (2.50) e (2.51),

$$|q_2(t)| \leq k(T - t) + k(T - t)^2,$$

$$|q_1(a, t)| \leq k(T - t) + k(T - t)^2.$$

□

**Observação:** Em particular, o Teorema 2.7 nos diz que,  $\forall(a, t) \in Q, \forall c \in U$ ,

$$|q_1(a, t)| \leq kT,$$

$$|q_2(t)| \leq kT,$$

$$|q_3(t)| \leq kT.$$

## 2.3 Estimativas envolvendo o controle

Nesta seção obtemos algumas estimativas do tipo  $L^1$  e  $L^\infty$  envolvendo o controle. Tais estimativas serão fundamentais para mostrarmos a existência do controle ótimo. Para obtê-las, procedemos como nos teoremas anteriores. Ou seja, usamos as formas integrais das soluções e a

desigualdade de Gronwall.

**Teorema 2.8.** *Dados os controles  $c_1, c_2$  e suas respectivas soluções  $(u_1, v_1, r_1)$ ,  $(u_2, v_2, r_2)$  do Sistema (2.1), temos,  $\forall t \in [0, T]$ , as seguintes estimativas :*

$$\int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)},$$

$$|v_2(t) - v_1(t)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)},$$

$$|r_2(t) - r_1(t)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)}.$$

**Demonstração:**

Enfatizamos que na obtenção das estimativas seguintes utilizaremos com frequência o fato de que as funções  $m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, h$  e  $g$  são lipschitzianas. Faremos essa demonstração em duas etapas:

**Etapa 1:** Provaremos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v_2(t) - v_1(t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |r_2(t) - r_1(t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

Usaremos mais uma vez as fórmulas integrais das soluções(ver p. 33 e 35). Se  $a < t$ , então,

$$\begin{aligned} |u_2(a, t) - u_1(a, t)| &\leq k|v_2(t - a) - v_1(t - a)| + k|v_1(t - a)| \int_0^a |r_2(t - \sigma) - r_1(t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k|v_1(t - a)| \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(a, t) - u_1(a, t)| &\leq k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |r_2(t - \sigma) - r_1(t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Por outro lado, pelo teorema 2.5

$$\begin{aligned} |v_2(t) - v_1(t)| &\leq kv_0 \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi + kv_0 \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |u_1(l, \sigma)| \int_\sigma^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi d\sigma \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma + k \int_0^t |u_1(l, \sigma)| \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi d\sigma \\ &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Usando (2.55) em (2.53) e novamente o teorema 2.5, obtemos:

Se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(a, t) - u_1(a, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma \end{aligned} \quad (2.56)$$

e se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(a, t) - u_1(a, t)| &\leq k \|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &+ k \|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Por (2.56),

$$\begin{aligned} \int_0^t |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi da \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi da \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma da \\ &+ k \int_0^t \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma da. \end{aligned}$$

Ou seja, se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^t |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma da \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Com a mudança de variável

$$(a_1, \sigma_1) = (a - \sigma, t - \sigma), a < t,$$

temos

$$\int_0^t \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma da = \int_M |c_2(a_1, \sigma_1) - c_1(a_1, \sigma_1)| d\sigma_1 da_1,$$

onde  $M \subseteq [0, T] \times [0, l]$ .

Como consequência,

$$\int_0^t \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma da \leq \int_0^T \int_0^l |c_2(a_1, \sigma_1) - c_1(a_1, \sigma_1)| d\sigma_1 da_1. \quad (2.59)$$

Segue de (2.59) e (2.58) que se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^t |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} \int_t^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &\leq k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_t^l \int_0^t |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)| d\sigma da \\ &+ k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &= \int_0^t |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da + \int_t^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da \\ &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$\forall t \in [0, T]$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} |r_2(t) - r_1(t)| &\leq k \int_0^t |g[r_2(\xi)] - g[r_1(\xi)]| d\xi + k \int_0^t |h[L_2(u_2 - u_1, v_2 - v_1)]| d\xi \\ &\leq k \int_0^t \int_0^l |u_2(\theta, \xi) - u_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi + k \int_0^t \int_0^l |v_2(\xi) - v_1(\xi)| d\theta d\xi \\ &+ k \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por (2.61), (2.60) e (2.55)

$$\begin{aligned}
 |r_2(t) - r_1(t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\
 &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma \\
 &+ k \int_0^t |r_2(\xi) - r_1(\xi)| d\xi
 \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T]$ . Pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned}
 |r_2(t) - r_1(t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^t \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\
 &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma,
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

$\forall t \in [0, T]$ .

Substituindo (2.62) em (2.60) e (2.55), obtemos,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\
 &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

e

$$\begin{aligned}
 |v_2(t) - v_1(t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\
 &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

**Etapa 2:** Provaremos que

$$\int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi.$$

Tomando  $a = l$  em (2.54) e usando (2.62) obtemos

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma, \end{aligned}$$

$\forall 0 \leq t \leq l$ .

Assim, pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t \int_0^s |c_2(l - \sigma, s - \sigma) - c_1(l - \sigma, s - \sigma)| d\sigma ds. \end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável

$$(a_1, s_1) = (l - \sigma, s - \sigma), 0 \leq s \leq t \leq l,$$

e procedendo como em (2.59), temos,  $\forall 0 \leq t \leq l$

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^t |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)| d\sigma. \quad (2.65) \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando  $a = l$  em (2.53), usando (2.64) e (2.62), segue que

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k \int_0^l |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma \\ &+ k \int_l^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma. \quad (2.66) \end{aligned}$$

Integrando (2.65) de 0 a  $l$  e substituindo em (2.66), obtemos

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k \int_l^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| d\sigma, \end{aligned}$$

$\forall l \leq t \leq T$ .

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_l^t \int_0^s |c_2(l - \sigma, s - \sigma) - c_1(l - \sigma, s - \sigma)| d\sigma ds \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

A mudança de variável

$$(a_1, s_1) = (l - \sigma, s - \sigma), l \leq s \leq t \leq T,$$

implica

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)| d\sigma \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$\forall l \leq t \leq T$ .

Segue de (2.65) e (2.67) que,  $\forall t \in [0, T]$

$$\int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0) \int_0^T \int_0^l |c_2(\theta, \xi) - c_1(\theta, \xi)| d\theta d\xi.$$

□

Como consequência imediata do Teorema 2.8, temos o seguinte:

**Teorema 2.9.** *Dados os controles  $c_1, c_2$  e suas respectivas soluções  $(u_1, v_1, r_1), (u_2, v_2, r_2)$  do*

Sistema (2.1), temos,  $\forall (a, t) \in [0, l] \times [0, T]$ , as seguintes estimativas :

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0)T\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|v_2(t) - v_1(t)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0)T\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|r_2(t) - r_1(t)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0)T\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}.$$

Vale também:

**Teorema 2.10.** *Dados os controles  $c_1, c_2$  e suas respectivas soluções  $(q_1^1, q_2^1, q_3^1)$ ,  $(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$  do sistema (2.2), temos,  $\forall (a, t) \in [0, l] \times [0, T]$ , as seguintes estimativas :*

$$|q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| \leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|q_2^2(t) - q_2^1(t)| \leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|q_3^2(t) - q_3^1(t)| \leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}.$$

**Demonstração:**

Usaremos mais uma vez as fórmulas (2.41)-(2.44) e a desigualdade de Gronwall. Além delas, também será de grande importância a hipótese das funções  $m_1, m_2, m'_1, m'_2, \mu_1, \mu_2, g, g'$  e  $G_y$  serem Lipschitzianas:

Se  $t \geq a + T - l$ ,

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq k \int_0^{T-t} |u_2(a + s, t + s) - u_1(a + s, t + s)| ds \\
 &+ k \int_0^{T-t} \int_0^l |u_2(\theta, t + s) - u_1(\theta, t + s)| |H_1(\theta, t + s)| d\theta ds \\
 &+ k \int_0^{T-t} \int_0^l |v_2(t + s) - v_1(t + s)| |H_2(\theta, t + s)| \theta ds \\
 &+ k \int_0^{T-t} |r_2(t + s) - r_1(t + s)| ds \\
 &+ k \int_0^{T-t} |q_3^2(t + s) - q_3^1(t + s)| ds \\
 &+ k \int_0^{T-t} \int_0^s |r_2(t + \theta) - r_1(t + \theta)| \theta ds \\
 &+ k \int_0^{T-t} \int_0^s |c_2(a + \theta, t + \theta) - c_1(a + \theta, t + \theta)| \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.9,

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| ds.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Analogamente, se  $t < a + T - l$ ,

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq |q_2^2(l + t - a) - q_2^1(l + t - a)| \\
 &+ kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_0^{l-a} |q_3^2(t + s) - q_3^1(t + s)| ds.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq |q_2^2(l + t - a) - q_2^1(l + t - a)| \\
 &+ kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 |q_2^2(t) - q_2^1(t)| &\leq k \int_t^T |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma \\
 &+ kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Agora, tomando  $a = 0$  em (2.70) e usando (2.71), obtemos:

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(0, t) - q_1^1(0, t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi \\
 &+ k \int_t^T |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

se  $t < T - l$ .

Segue de (2.72) e (2.68) que

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(0, t) - q_1^1(0, t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi \\
 &+ k \int_t^T |q_1^2(0, \sigma) - q_1^1(0, \sigma)| d\sigma,
 \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T]$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(0, t) - q_1^1(0, t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Agora, substituindo (2.73) em (2.71) e (2.70), obtemos,  $\forall (a, t) \in (0, l) \times (0, T)$ .

$$\begin{aligned}
 |q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi,
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
 |q_2^2(t) - q_2^1(t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 |q_3^2(t) - q_3^1(t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T \int_0^l |q_1^2(\theta, \xi) - q_1^1(\theta, \xi)| d\theta d\xi \\
 &+ k \int_t^T |q_2^2(\xi) - q_2^1(\xi)| d\xi.
 \end{aligned}$$

Assim, temos  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 |q_3^2(t) - q_3^1(t)| &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\
 &+ k \int_t^T |q_3^2(\xi) - q_3^1(\xi)| d\xi.
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|q_3^2(t) - q_3^1(t)| \leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \forall t \in [0, T]. \tag{2.76}$$

Levando (2.76) em (2.74) (2.75), obtemos

$$|q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| \leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \forall (a, t) \in [0, l] \times [0, T]$$

e

$$|q_2^2(t) - q_2^1(t)| \leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \forall t \in [0, T].$$

□

**Observação:** A constante  $k$  que aparece nos Teoremas 2.8, 2.9 e 2.10 é do mesmo tipo daquelas constantes  $D$  e  $k$  que aparecem nos Teoremas 2.4 e 2.6. Portanto, não depende do controle  $c \in U$ .



# UM PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO:

## PROBLEMA 1

---

Neste capítulo encontramos condições de otimalidade e provamos um resultado de existência e a unicidade de solução para o problema:

$$\min \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[ G(a, u(a, t)) + \frac{1}{2} \rho_1 c^2(a, t) \right] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T v^2 dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T r^2 dt \right\} \quad (3.1)$$

sujeito ao sistema de populações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + m_1(r(t))u(a, t) + \mu_1(c(a, t))u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q \\ v'(t) + m_2(r(t))v(t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(t) = u(l, t) & t \in (0, T) \\ r'(t) - (g(r) - hL_2(u, v))r = 0 & t \in (0, T) \\ u(0, t) = bv(t) & t \in (0, T) \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l) \\ v(0) = v_0 \\ r(0) = r_0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

e  $c \in U$ , em que o conjunto dos controles é definido por:

$$U = \{v \in L^\infty(Q); \gamma_1(a) \leq v(a, t) \leq \gamma_2(a)\}, \quad (3.3)$$

e  $Q = (0, l) \times (0, T)$ .

Os principais resultados que utilizamos são o teorema do ponto fixo de Banach e o Princípio Variacional de Ekeland. Observamos que a utilização deste último resultado se justifica devido ao fato do funcional que queremos minimizar não ser necessariamente convexo.

Começamos com um resultado acerca da derivada das populações com respeito ao controle; em seguida provamos uma condição necessária para o controle ótimo; por fim, provamos um resultado de existência e unicidade.

### 3.1 As derivadas das populações com respeito ao controle

Dado  $\omega$  pertencente ao cone tangente  $T_c(U)$  (ver Cones, Capítulo 2), considere o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{1t}(a, t) + z_{1a}(a, t) + [m_1(r) + \mu_1(c)]z_1(a, t) = -m'_1(r)uz_3 - \mu'_1(c)\omega u & (a, t) \in Q, \\ z'_2(t) + [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]z_2(t) = z_1(l, t) - m'_2(r)vz_3 - \mu'_2(L_1(c))L_1(\omega)v & t \in (0, T), \\ z'_3(t) - [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]z_3 = -h'(L_2(u, v))rL_2(z_1, z_2) & t \in (0, T), \\ z_1(0, t) = bz_2(t) & t \in (0, T), \\ z_1(a, 0) = 0 & a \in (0, l), \\ z_2(0) = 0, \\ z_3(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Observamos que este último sistema é obtido derivando formalmente o sistema de população (2.1).

Definimos

$$\begin{aligned} y_1(a, t) &= \frac{(u^{c+\epsilon\omega} - u^c)}{\epsilon}(a, t) - z_1(a, t), \\ y_2(t) &= \frac{(v^{c+\epsilon\omega} - v^c)}{\epsilon}(t) - z_2(t), \\ y_3(t) &= \frac{(r^{c+\epsilon\omega} - r^c)}{\epsilon}(t) - z_3(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $(u^c, v^c, r^c)$  e  $(u^{c+\epsilon\omega}, v^{c+\epsilon\omega}, r^{c+\epsilon\omega})$  correspondem, respectivamente, as soluções do sistema de populações correspondentes aos controles  $c$  e  $c + \epsilon\omega$ . Temos que  $(y_1, y_2, y_3)$  é a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1t}(a, t) + y_{1a}(a, t) + [m_1(r) + \mu_1(c)]y_1(a, t) = -m'_1(r)uy_3 + A_\epsilon(a, t) \quad (a, t) \in Q, \\ y'_2(t) + [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]y_2(t) = y_1(l, t) - m'_2(r)y_3 + B_\epsilon(t) \quad t \in (0, T), \\ y'_3(t) - [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]y_3 = -h'(L_2(u, v))rL_2(y_1, y_2) + C_\epsilon(t) \quad t \in (0, T), \\ y_1(0, t) = by_2(t) \quad t \in (0, T), \\ y_1(a, 0) = 0 \quad a \in (0, l), \\ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= \{[m_1(r^c) - m_1(r^{c+\epsilon\omega})] + [\mu_1(c) - \mu_1(c + \epsilon\omega)]\} \frac{(u^{c+\epsilon\omega} - u^c)}{\epsilon} \\ &\quad - \frac{m''_1(\theta)}{2} u^c \frac{(r^{c+\epsilon\omega} - r^c)}{\epsilon} (r^{c+\epsilon\omega} - r^c) - \frac{\mu''_1(\theta)\omega^2\epsilon}{2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} B_\epsilon &= \{[m_2(r^c) - m_2(r^{c+\epsilon\omega})] + [\mu_2(L_1(c)) - \mu_2(L_1(c + \epsilon\omega))]\} \frac{(v^{c+\epsilon\omega} - v^c)}{\epsilon} \\ &\quad - \frac{m''_2(\theta)}{2} v^c \frac{(r^{c+\epsilon\omega} - r^c)}{\epsilon} (r^{c+\epsilon\omega} - r^c) - \frac{\mu''_2(\theta)}{2} [L_1(\omega)]^2\epsilon, \end{aligned} \quad (3.8)$$

e

$$\begin{aligned} C_\epsilon &= \left\{ \left[ \frac{g''(\theta)\theta + 2g'(\theta)}{2} (r^{c+\epsilon\omega} - r^c) \right] - [h(L_2(u^{c+\epsilon\omega}, v^{c+\epsilon\omega})) - h(L_2(u^c, v^c))] \right\} \\ &\quad \times \frac{(r^{c+\epsilon\omega} - r^c)}{\epsilon} \\ &\quad - \frac{h'(\theta)}{2} r^c \left[ L_2\left( \frac{u^{c+\epsilon\omega} - u^c}{\epsilon}, \frac{v^{c+\epsilon\omega} - v^c}{\epsilon} \right) \right] [L_2(u^{c+\epsilon\omega} - u^c, v^{c+\epsilon\omega} - v^c)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observamos que em  $A_\epsilon, B_\epsilon$  e  $C_\epsilon$ , as constantes  $0 \leq \theta \leq d$  são obtidas, respectivamente, do desenvolvimento em série de Taylor das funções  $m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, h$  e  $g$ .

Os sistemas (3.4) e (3.6) também possuem, cada um, uma única solução. A prova é feita de maneira inteiramente análoga à do Teorema 2.4, e por essa razão será omitida.

Provamos agora o seguinte:

**Teorema 3.1.** *Com as hipóteses (H1)-(H6)(ver p. 25), temos*

$$\begin{aligned} z_1(a, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u^{c+\epsilon\omega}(a, t) - u^c(a, t)}{\epsilon}, \\ z_2(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v^{c+\epsilon\omega}(t) - v^c(t)}{\epsilon}, \\ z_3(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{r^{c+\epsilon\omega}(t) - r^c(t)}{\epsilon}. \end{aligned}$$

onde  $(z_1, z_2, z_3)$  é a solução do sistema (3.4).

**Demonstração:** Observe que, sendo  $(y_1, y_2, y_3)$  a solução do sistema (3.6), basta mostrarmos que  $y_1, y_2, y_3 \rightarrow 0$ , se  $\epsilon \rightarrow 0$ . Temos que

$$\begin{aligned} y_1(a, t) &= \int_0^t [A_\epsilon(a - \theta, t - \theta) - m'_1(r(t - \theta))u(a - \theta, t - \theta)y_3(t - \theta)] \\ &\quad \times e^{-\int_0^\theta [m_1(r(t-\sigma)) + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma))]d\sigma} d\theta \end{aligned}$$

e se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned} y_1(a, t) &= y_2(t - a)e^{-\int_0^a [m_1(r(t-\sigma)) + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma))]d\sigma} \\ &\quad + \int_0^a [A_\epsilon(a - \theta, t - \theta) - m'_1(r(t - \theta))u(a - \theta, t - \theta)y_3(t - \theta)] \\ &\quad \times e^{-\int_0^\theta [m_1(r(t-\sigma)) + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma))]d\sigma} d\theta. \end{aligned}$$

Temos também que

$$y_2(t) = \int_0^t \{y_1(l, \sigma) - m'_2(r)y_3(\sigma) + B_\epsilon(\sigma)\} e^{-\int_\sigma^t m_2(r) + \mu_2(L_1(c))d\xi} d\sigma$$

e

$$y_3(t) = \int_0^t \{C_\epsilon(\sigma) - h'(L_2(u, v))rL_2(y_1, y_2)\} e^{-\int_\sigma^t h(L_2(u, v)) - g'(r)r - g(r)d\xi} d\sigma.$$

Pelos Teoremas 2.9 e 2.5,

$$\begin{aligned}
 |A_\epsilon(a, t)| &\leq k\{\|c + \epsilon\omega - c\|_{L^\infty(Q)} + |c + \epsilon\omega - c|\} \frac{\|c + \epsilon\omega - c\|_{L^\infty(Q)}}{\epsilon} \\
 &+ k \frac{\|c + \epsilon\omega - c\|_{L^\infty(Q)}}{\epsilon} \|c + \epsilon\omega - c\|_{L^\infty(Q)} + k\|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2 \epsilon \\
 &\leq k\epsilon\|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Analogamente, temos que

$$|C_\epsilon(t)|, |B_\epsilon(t)| \leq k\epsilon\|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2. \tag{3.11}$$

Temos, se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned}
 |y_1(a, t)| &\leq \int_0^t |A_\epsilon| + |m'_1(r(t - \theta))| |u(a - \theta, t - \theta)| |y_3(t - \theta)| d\theta \\
 &\leq \int_0^t |A_\epsilon| d\theta + k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Analogamente, se  $a < t$ ,

$$|y_1(a, t)| \leq |y_2(t - a)| + \int_0^a |A_\epsilon| d\theta + k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma. \tag{3.13}$$

Assim, se  $l < t$ ,

$$|y_1(l, t)| \leq |y_2(t - l)| + k \int_0^l |A_\epsilon| d\sigma + k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma. \tag{3.14}$$

Segue também que

$$\begin{aligned}
 |y_2(t)| &\leq \int_0^t |y_1(l, \sigma)| d\sigma + \int_0^t |m'_2(r)| |y_3(\sigma)| d\sigma + \int_0^t |B_\epsilon| d\sigma \\
 &\leq k \int_0^t |y_1(l, \sigma)| d\sigma + k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma + k \int_0^t |B_\epsilon| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por (3.15), (3.14), (3.10) e (3.11), segue que, se  $l < t$ ,

$$\begin{aligned} |y_1(l, t)| &\leq k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma + k \int_0^l |A_\epsilon| d\sigma + k \int_0^t |B_\epsilon| d\sigma + \int_0^t |y_1(l, \sigma)| d\sigma \\ &\leq k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma + k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2 + \int_0^t |y_1(l, \sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

Além disso, se  $l \geq t$ ,

$$|y_1(l, t)| \leq k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma + k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2.$$

Portanto,

$$|y_1(l, t)| \leq k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma + k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t |y_1(l, \sigma)| d\sigma,$$

$\forall t \in [0, T]$ .

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|y_1(l, t)| \leq k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma + k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2, \quad (3.16)$$

$\forall t \in [0, T]$ .

Por (3.16) e (3.15), temos

$$|y_2(t)| \leq k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma. \quad (3.17)$$

Da mesma forma, segue também que

$$|y_1(a, t)| \leq k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma. \quad (3.18)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |y_3(t)| &\leq k \int_0^t |C_\epsilon(\sigma)| d\sigma + k \int_0^t |L_2(y_1, y_2)| d\sigma \\ &\quad + k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \int_0^l |y_1(\theta, \sigma)| d\theta d\sigma \\ &\quad + k \int_0^t \int_0^l |y_2(\sigma)| d\theta d\sigma. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por (3.17)-(3.19), obtemos

$$|y_3(t)| \leq k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t |y_3(\sigma)| d\sigma,$$

$\forall t \in [0, T]$ .

Consequentemente,

$$|y_3(t)| \leq k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2, \quad (3.20)$$

$\forall t \in [0, T]$ .

De (3.20), (3.17) e (3.18), temos

$$|y_2(t)| \leq k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2,$$

$$|y_1(a, t)| \leq k\epsilon \|\omega\|_{L^\infty(Q)}^2,$$

$\forall t \in [0, T]$ .

Portanto,

$$y_3, y_2, y_1 \rightarrow 0, \text{ se } \epsilon \rightarrow 0,$$

uniformemente em  $a$  e  $t$ .

□

## 3.2 Existência de controle ótimo e condições de otimalidade

Como consequência do Teorema 3.1, temos o

**Corolário 3.1.** *Com as hipóteses (H1)-(H6) (ver p. 25), se existir um controle ótimo  $c^*$ , então,  $\forall \omega \in T_{c^*}(U)$ , temos*

$$\Psi(c^*) = \int_0^T \int_0^t [G_y(a, u^{c^*}) z_1 + \rho_1 c^* \omega] da dt + \rho_2 \int_0^T v^{c^*} z_2 dt + \rho_3 \int_0^T r^{c^*} z_3 dt \geq 0 \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{aligned} z_1(a, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u^{c^* + \lambda \omega}(a, t) - u^{c^*}(a, t)}{\lambda}, \\ z_2(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{v^{c^* + \lambda \omega}(t) - v^{c^*}(t)}{\lambda}, \\ z_3(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{r^{c^* + \lambda \omega}(t) - r^{c^*}(t)}{\lambda}. \end{aligned}$$

**Demonstração:**

Dado  $\forall \omega \in T_{c^*}(U)$ , se  $c^*$  é o controle ótimo, então

$$\Psi(c^*) \leq \Psi(c^* + \lambda \omega), \forall 0 < \lambda < 1.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c^*}) + \frac{1}{2} \rho_1 (c^*)^2] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T (v^{c^*})^2 dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T (r^{c^*})^2 dt \\ & \leq \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c^* + \lambda \omega}) + \frac{1}{2} \rho_1 (c^* + \lambda \omega)^2] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T (v^{c^* + \lambda \omega})^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T (r^{c^* + \lambda \omega})^2 dt. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \left[ \frac{G(a, u^{c^* + \lambda \omega}) - G(a, u^{c^*})}{\lambda} + \rho_1 c^* \omega + \lambda \omega^2 \right] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \frac{(v^{c^* + \lambda \omega})^2 - (v^{c^*})^2}{\lambda} dt \\ & + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \frac{(r^{c^* + \lambda \omega})^2 - (r^{c^*})^2}{\lambda} dt \geq 0. \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G(a, u^{c^* + \lambda \omega}) - G(a, u^{c^*})}{\lambda} = G_y(a, u^{c^*}) z_1,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(v^{c^* + \lambda \omega})^2 - (v^{c^*})^2}{\lambda} = \rho_2 v^{c^*} z_2,$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(r^{c^* + \lambda \omega})^2 - (r^{c^*})^2}{\lambda} = \rho_3 r^{c^*} z_3.$$

Além disso, pelos Teoremas 2.9 e 2.5,

$$\left| \frac{G(a, u^{c^* + \lambda \omega}) - G(a, u^{c^*})}{\lambda} \right| \leq k \|w\|_{L^\infty(Q)},$$

$$\left| \frac{(v^{c^* + \lambda \omega})^2 - (v^{c^*})^2}{\lambda} \right| = \left| \frac{(v^{c^* + \lambda \omega} - v^{c^*})(v^{c^* + \lambda \omega} + v^{c^*})}{\lambda} \right| \leq k \|w\|_{L^\infty(Q)}$$

$$\left| \frac{(r^{c^* + \lambda \omega})^2 - (r^{c^*})^2}{\lambda} \right| = \left| \frac{(r^{c^* + \lambda \omega} - r^{c^*})(r^{c^* + \lambda \omega} + r^{c^*})}{\lambda} \right| \leq k \|w\|_{L^\infty(Q)}.$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\int_0^T \int_0^l [G_y(a, u^{c^*}) z_1 + \rho_1 c^* \omega] \, dadt + \rho_2 \int_0^T v^{c^*} z_2 dt + \rho_3 \int_0^T r^{c^*} z_3 dt \geq 0.$$

□

O próximo resultado caracteriza o controle ótimo, caso este exista, como uma projeção.

**Teorema 3.2.** *Seja  $c^*$  um controle ótimo para o Problema 1. Se  $(q_1^*, q_2^*, q_3^*)$  é a solução do sistema (2.2) correspondente a  $c := c^*$ , então*

$$c^*(a, t) = P \left\{ \frac{1}{\rho_1} [\mu'_1(c^*(a, t)) u^*(a, t) q_1^*(a, t) + \mu'_2(L_1(c^*(a, t))) H_0(a, t) v^*(t) q_2^*(t)] \right\} \quad (3.22)$$

onde  $P : L^1(Q) \rightarrow U$  dada por

$$P(f) = \begin{cases} f(a, t) & \text{se } \gamma_1(a) \leq f(a, t) \leq \gamma_2(a), \\ \gamma_1(a) & \text{se } f(a, t) \leq \gamma_1(a), \\ \gamma_2(a) & \text{se } f(a, t) \geq \gamma_2(a), \end{cases}$$

é a projeção de  $L^1(Q)$  sobre  $U$ .

**Demonstração:**

Primeiro vamos assumir o seguinte:

$$\int_0^T \int_0^l [\mu'_1(c^*)u^*q_1^* + \mu'_2(L_1(c^*))H_0v^*q_2^* - \rho_1c^*] \omega dadt \leq 0, \forall \omega \in T_{c^*}(U). \quad (3.23)$$

Daí, segue que

$$\mu'_1(c^*)u^*q_1^* + \mu'_2(L_1(c^*))H_0v^*q_2^* - \rho_1c^* \in N_{c^*}(U) \text{ (Ver cones, p.12).}$$

Mostraremos que (3.22) é uma consequência de (3.23). Sejam

$$\alpha = \frac{1}{\rho_1} [\mu'_1(c^*)u^*q_1^* + \mu'_2(L_1(c^*))H_0v^*q_2^*] \text{ e } \beta = \alpha - c^*.$$

Vamos provar que

$$P(\alpha) = c^*.$$

Visto que  $Pf$  é a projeção de  $f \in L^1(Q)$  sobre  $U$ , vamos mostrar que

$$\inf_{\delta \in U} \|\alpha - \delta\|_{L^1(Q)} = \|\alpha - c^*\|_{L^1(Q)} = \|\beta\|_{L^1(Q)}.$$

Assim, basta provarmos que

$$\|\beta\|_{L^1(Q)} = \|\alpha - c^*\|_{L^1(Q)} \leq \|\alpha - \delta\|_{L^1(Q)} = \|\beta + c^* - \delta\|_{L^1(Q)}, \forall \delta \in U. \quad (3.24)$$

Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{(a, t) \in Q; c^*(a, t) = \gamma_2(a)\}, \\ B &= \{(a, t) \in Q; \gamma_1(a) < c^*(a, t) < \gamma_2(a)\}, \\ C &= \{(a, t) \in Q; c^*(a, t) = \gamma_1(a)\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\beta \in N_{c^*}(U)$ ,

$$\beta(a, t) \begin{cases} \geq 0, & \text{se } c^*(a, t) = \gamma_2(a) \\ = 0, & \text{se } \gamma_1(a) < c^*(a, t) < \gamma_2(a) \\ \leq 0, & \text{se } c^*(a, t) = \gamma_1(a). \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_Q |\beta + c^* - \delta| dadt &= \int_A |\beta + c^* - \delta| dadt + \int_B |c^* - \delta| dadt \\ &\quad + \int_C |\beta + c^* - \delta| dadt \end{aligned} \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} \int_Q |\beta| dadt &= \int_A |\beta| dadt + \int_B |\beta| dadt + \int_C |\beta| dadt \\ &= \int_A \beta dadt - \int_C \beta dadt. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mas,

$$\int_A \beta dadt \leq \int_A |\beta + c^* - \delta| dadt \quad (3.27)$$

e

$$- \int_C \beta dadt \leq \int_C |\beta + c^* - \delta| dadt. \quad (3.28)$$

De (3.26)-(3.28), temos

$$\int_Q |\beta| dadt \leq \int_A |\beta + c^* - \delta| dadt + \int_C |\beta + c^* - \delta| dadt. \quad (3.29)$$

De (3.29) e (3.25) segue que

$$\int_Q |\beta| dadt \leq \int_Q |\beta + c^* - \delta| dadt, \forall \delta \in U,$$

mostrando (3.24). Portanto,

$$c^*(a, t) = P \left\{ \frac{1}{\rho_1} [\mu'_1(c^*(a, t)) u^*(a, t) q_1^*(a, t) + \mu'_2(L_1(c^*(a, t))) H_0(a, t) v^*(t) q_2^*(t)] \right\}.$$

Agora, provaremos (3.23). Voltemos ao sistema 3.4, com  $c = c^*$ . Multiplicando a primeira equação do sistema (3.4) por  $q_1^*$  e integrando por partes, obtemos,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^l -(q_{1t}^* + q_{1a}^*)z_1^* + [m_1(r^*) + \mu_1(c^*)]z_1^*q_1^*dadtdt = \\
& \int_0^T \int_0^l -m_1'(r^*)u^*z_3^*q_1^* - \mu_1'(c^*)\omega u^*q_1^*dadtdt + \int_0^T -q_1^*(l, t)z_1^*(l, t) + q_1^*(0, t)z_1^*(0, t)dt \\
& + \int_0^l -q_1^*(a, T)z_1^*(a, T) + q_1^*(a, 0)z_1^*(a, 0)da. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.2) por  $z_1^*$  e substituindo em (3.30), obtemos

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^l G_y(a, u^*)z_1^*dadtdt = \int_0^T \int_0^l m_1'(r^*)u^*z_3^*q_1^* + \mu_1'(c^*)\omega u^*q_1^*dadtdt \\
& - \int_0^T \int_0^l H_1h'(L_2(u^*, v^*))r^*q_3^*z_1^*dadtdt + \int_0^T z_1^*(l, t)q_2^*dt - b \int_0^T q_1^*(0, t)z_2^*dt. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (3.4) por  $q_2^*$  e integrando por partes, obtemos,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T -q_2^*z_2^* + [m_2 + \mu_2(L_1(c^*))]z_2^*q_2^*dt = \int_0^T z_1^*(l, t)q_2^* - m_2'(r^*)v^*z_3^*q_2^* \\
& - \mu_2'(L_1(c^*))L_1(\omega)v^*q_2^*dt - q_2^*(T)z_2^*(T) + q_2^*(0)z_2^*(0). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação de (2.2) por  $z_2$  e substituindo em (3.32), temos

$$\begin{aligned}
& - \rho_2 \int_0^T v^*z_2^*dt = b \int_0^T q_1^*(0, t)z_2^*dt - \int_0^T z_1^*(l, t)q_2^*dt + \int_0^T \mu_2'(L_1(c^*))L_1(\omega)v^*q_2^*dt \\
& + \int_0^T m_2'(r^*)v^*z_3^*q_2^*dt - \int_0^T \int_0^l H_2h'(L_2(u^*, v^*))r^*q_3^*z_2^*dadtdt. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Multiplicando a terceira equação do sistema (3.4) por  $q_3^*$  e integrando por partes, obtemos,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T -q_3^*z_3^* + [-g(r^*) - g'(r^*)r^* + h(L_2(u^*, v^*))]z_3^*q_3^*dt = -q_3^*(T)z_3^*(T) + q_3^*(0)z_3^*(0) \\
& - \int_0^T h'(L_2(u^*, v^*))r^*L_2(z_1^*, z_2^*)q_3^*dt. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Multiplicando a terceira equação de (2.2) por  $z_3$  e substituindo em (3.32), temos

$$\begin{aligned}
 -\rho_3 \int_0^T r^* z_3^* dt &= -\int_0^T \int_0^l m'_1(r^*) u^* q_1^* z_3^* da dt - \int_0^T m'_2(r^*) v^* q_2^* z_3^* dt \\
 + \int_0^T h'(L_2(u^*, v^*)) r^* L_2(z_1^*, z_2^*) q_3^* dt.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 -\rho_3 \int_0^T r^* z_3^* dt &= -\int_0^T \int_0^l m'_1(r^*) u^* q_1^* z_3^* da dt - \int_0^T m'_2(r^*) v^* q_2^* z_3^* dt \\
 + \int_0^T \int_0^l H_2 h'(L_2(u^*, v^*)) r^* z_1^* q_3^* da dt + \int_0^T \int_0^l H_2 h'(L_2(u^*, v^*)) r^* z_2^* q_3^* da dt.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim, somando (3.35), (3.33) e (3.31), obtemos

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_0^l \mu'_1(c^*) \omega u^* q_1^* da dt + \int_0^T \mu'_2(L_1(c^*)) L_1(\omega) v^* q_2^* dt = \\
 &-\int_0^T \int_0^l G_y(a, u^*) z_1^* da dt - \rho_2 \int_0^T v^* z_2^* dt - \rho_3 \int_0^T r^* z_3^* dt.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Adicionando  $-\rho_1 \int_0^T \int_0^l c^* \omega da dt$  a (3.36), usando o Corolário 3.1 e lembrando que

$$L_1(\omega) = \int_0^l H_0(a, t) \omega(a, t) da,$$

temos finalmente, pelo Corolário 3.1, que

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_0^l [\mu'_1(c^*) u^* q_1^* + \mu'_2(L_1(c^*)) H_0 v^* q_2^* - \rho_1 c^*] \omega da dt = \\
 &-\left[ \int_0^T \int_0^l G_y(a, u^*) z_1^* + \rho_1 c^* \omega da dt + \rho_2 \int_0^T v^* z_2^* dt + \rho_3 \int_0^T r^* z_3^* dt \right] \leq 0
 \end{aligned}$$

mostrando (3.23).

□

## Existência e unicidade do controle ótimo

**Proposição 3.1.** *Seja  $\Psi : L^1(Q) \rightarrow (-\infty, \infty]$  definido por*

$$\Psi(c) = \begin{cases} \int_0^T \int_0^l [G(a, u(a, t)) + \frac{1}{2}\rho_1 c^2(a, t)] \, dadt + \frac{1}{2}\rho_2 \int_0^T v^2 dt + \frac{1}{2}\rho_3 \int_0^T r^2 dt, & c \in U \\ +\infty, & c \notin U. \end{cases}$$

*O funcional  $\Psi$  é semicontínuo e limitado inferiormente.*

### Demonstração:

A limitação inferior segue do fato de que  $\Psi \geq 0$ . Vamos provar a semicontinuidade.

Seja

$$c_n \rightarrow c \text{ em } L^1(Q).$$

Consideraremos os seguintes casos:

**Caso 1**  $c \notin U$ .

Como  $U$  é fechado,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow c_n \in L^1(Q) - U.$$

Logo,

$$\Psi(c_n) = \infty, \forall n > n_0.$$

e portanto

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Psi(c_n) = \infty = \Psi(c).$$

**Caso 2**  $c$  pertence ao interior de  $U$ .

Então  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que

$$c_n \in U, \forall n > n_0.$$

Pelo Teorema 2.8,  $\Psi$  é contínua em  $U$ . Ou seja,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Psi(c_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(c_n) = \Psi(c).$$

**Caso 3**  $c \in \partial U$ .

Ocorrerá necessariamente uma das seguintes situações:

a)  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow c_n \in L^1(Q) - U.$$

Assim,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Psi(c_n) = \infty \geq \Psi(c).$$

b)  $\exists c_{n_j} \in U$ , subsequência de  $c_n$ , com

$$c_{n_j} \rightarrow c.$$

Desse modo, pela continuidade de  $\Psi$  em  $U$ , temos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Psi(c_n) \geq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \Psi(c_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \Psi(c_{n_j}) = \Psi(c).$$

Portanto,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Psi(c_n) \geq \Psi(c),$$

mostrando a semicontinuidade de  $\Psi$ .

□

**Observação:** A proposição 3.1 nos garante que  $\Psi$  satisfaz as hipóteses do Princípio Variacional de Ekeland (ver Capítulo 1). Logo,  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $c_\epsilon \in U$  com

$$\begin{cases} \Psi(c_\epsilon) \leq \inf \Psi(c) + \epsilon, & c \in U, \\ \Psi(c_\epsilon) \leq \inf \{ \Psi(c) + \epsilon \|c - c_\epsilon\|_{L^1(Q)} \}, & c \in U, \text{ com } c \neq c_\epsilon. \end{cases} \quad (3.37)$$

O próximo Teorema nós diz que a sequência de controles  $c_\epsilon$  possui uma propriedade análoga aquela de um controle ótimo dada no Teorema 3.2.

**Teorema 3.3.** *Seja  $c_\epsilon$  dado por (3.37). Se  $(q_1^\epsilon, q_2^\epsilon, q_3^\epsilon)$  é a solução do sistema (2.2) correspondente a  $c := c_\epsilon$ , então*

$$c_\epsilon(a, t) = P \left\{ \frac{1}{\rho_1} [\mu_2'(c_\epsilon(a, t)) u^{c_\epsilon}(a, t) q_1^{c_\epsilon}(a, t) + \mu_2'(L_1(c_\epsilon(a, t))) H_0(a, t) v^{c_\epsilon}(t) q_2^{c_\epsilon}(t) + \epsilon \theta_\epsilon] \right\},$$

onde  $\theta_\epsilon$  é como na Proposição 1.5 (Capítulo 1).

**Demonstração:**

Sejam  $\omega \in T_{c_\epsilon}(U)$ , e  $\epsilon > 0$ . Temos

$$c_\epsilon + \lambda\omega \in U, \forall 0 < \lambda < 1.$$

Logo, Por (3.37),

$$\Psi(c_\epsilon) \leq \Psi(c_\epsilon + \lambda\omega) + \lambda\epsilon\|\omega\|_{L^1(Q)},$$

$\forall \epsilon > 0$  e  $\forall 0 < \lambda < 1$ .

Ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c_\epsilon}) + \frac{1}{2}\rho_1 c_\epsilon^2] dadt + \frac{1}{2}\rho_2 \int_0^T (v^{c_\epsilon})^2 dt + \frac{1}{2}\rho_3 \int_0^T (r^{c_\epsilon})^2 dt \\ & \leq \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c_\epsilon + \lambda\omega}) + \frac{1}{2}\rho_1 (c_\epsilon + \lambda\omega)^2] dadt + \frac{1}{2}\rho_2 \int_0^T (v^{c_\epsilon + \lambda\omega})^2 dt \\ & + \frac{1}{2}\rho_3 \int_0^T (r^{c_\epsilon + \lambda\omega})^2 dt + \lambda\epsilon\|\omega\|_{L^1(Q)}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \left[ \frac{G(a, u^{c_\epsilon + \lambda\omega}) - G(a, u^{c_\epsilon})}{\lambda} + \rho_1 c_\epsilon \omega + \lambda\omega \right] dadt + \frac{1}{2}\rho_2 \int_0^T \frac{(v^{c_\epsilon + \lambda\omega})^2 - (v^{c_\epsilon})^2}{\lambda} dt \\ & \frac{1}{2}\rho_3 \int_0^T \frac{(r^{c_\epsilon + \lambda\omega})^2 - (r^{c_\epsilon})^2}{\lambda} dt + \epsilon\|\omega\|_{L^1(Q)} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Passando limite de  $\lambda \rightarrow \infty$ , como no Corolário 3.1,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [G_y(a, u^{c_\epsilon}) z_1 + \rho_1 c_\epsilon \omega] dadt + \rho_2 \int_0^T v^{c_\epsilon} z_2 dt + \rho_3 \int_0^T r^{c_\epsilon} z_3 dt \\ & + \epsilon\|\omega\|_{L^1(Q)} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Usando (3.39) e procedendo como no Teorema 3.2, obtemos

$$\int_0^T \int_0^l [\rho_1 c^{c_\epsilon} - (\mu'_1(c_\epsilon) u^{c_\epsilon} q_1^{c_\epsilon} + \mu'_2(L_1(c_\epsilon)) H_0 v^{c_\epsilon} q_2^{c_\epsilon})] \omega dadt + \epsilon\|\omega\|_{L^1(Q)} \geq 0$$

Pela proposição 1.5,  $\exists \theta_\epsilon \in L^\infty(Q)$  com  $|\theta_\epsilon| \leq 1$  e

$$-\rho_1 c_\epsilon + (\mu'_1(c_\epsilon)u^{c_\epsilon} q_1^{c_\epsilon} + \mu'_2(L_1(c_\epsilon))H_0 v^{c_\epsilon} q_2^{c_\epsilon}) + \epsilon \theta_\epsilon \in N_{c_\epsilon}(U).$$

De modo análogo a demonstração do Teorema 3.2, obtemos

$$c_\epsilon(a, t) = P\left\{\frac{1}{\rho_1}[\mu'_2(c_\epsilon(a, t))u^\epsilon(a, t)q_1^\epsilon(a, t) + \mu'_2(L_1(c_\epsilon(a, t)))H_0(a, t)v^\epsilon(t)q_2^\epsilon(t) + \epsilon\theta_\epsilon]\right\}.$$

□

Finalmente, enunciamos um teorema de existência e unicidade, que é o nosso principal resultado para o problema (3.1)-(3.3). Para demonstrá-lo, nós usaremos as estimativas que obtivemos para o controle (Teoremas 2.5, 2.7, 2.9 e 2.10), O Teorema do Ponto Fixo de Banach e as propriedades da sequência  $c_\epsilon$  (Teorema 3.3 e (3.37)).

**Teorema 3.4** (Existência e Unicidade). *Suponhamos que as hipóteses (H1)-(H6) (ver p. 25) sejam satisfeitas. Então existe uma função  $C(M, T)$ , limitada para  $M$  e  $T$  limitados, tal que, para  $\|u_0\|_1, v_0 \leq M$  e*

$$\rho_1^{-1}(\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + v_0)C(M, T)T < 1,$$

o problema (3.1)-(3.3) tem uma única solução  $c^* \in U$ .

**Demonstração:**

A demonstração seguirá em duas etapas:

a) **Unicidade**

Mostraremos que o funcional

$$F : U \subset L^\infty(Q) \rightarrow U$$

definido por

$$F(c) = P\left(\frac{1}{\rho_1}J(c)\right)$$

onde

$$J(c)(a, t) = \mu'_1(c(a, t))u(a, t)q_1(a, t) + \mu'_2(L_1(c(a, t)))H_0(a, t)v(t)q_2(t),$$

possui um único ponto fixo.

Ora, dados  $c_2, c_1 \in U$ , temos

$$\begin{aligned} \rho_1 |F(c_2) - F(c_1)| &\leq |\mu'_1(c_2) - \mu'_1(c_1)| |u_2| |q_1^2| + |u_2 - u_1| |\mu'_1(c_1)| |q_1^2| \\ &\quad + |q_2^2 - q_1^2| |\mu'_1(c_1)| |u_1| + |\mu'_2(L_1(c_2)) - \mu'_2(L_1(c_1))| |v_2| |q_2^2| |H_0| \\ &\quad + |v_2 - v_1| |\mu'_2(L_1(c_1))| |q_2^2| |H_0| + |q_2^2 - q_1^2| |\mu'_2(L_1(c_1))| |v_1| |H_0| \end{aligned}$$

Pelos Teoremas 2.5, 2.7, 2.9 e 2.10, obtemos

$$|\mu'_1(c_2) - \mu'_1(c_1)| |u_2| |q_1^2| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + v_0)T \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|u_2 - u_1| |\mu'_1(c_1)| |q_1^2| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + v_0)T \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|q_2^2 - q_1^2| |\mu'_1(c_1)| |u_1| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + v_0)T \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|\mu'_2(L_1(c_2)) - \mu'_2(L_1(c_1))| |v_2| |q_2^2| |H_0| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + v_0)T \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|v_2 - v_1| |\mu'_2(L_1(c_1))| |q_2^2| |H_0| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + v_0)T \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

e

$$|q_2^2 - q_1^2| |\mu'_2(L_1(c_1))| |v_1| |H_0| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + v_0)T \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}.$$

Por outro lado, considerando  $M \in \mathbb{R}$  com  $\|u_0\|_{L^\infty(0,t)}, v_0 \leq M$ , teremos

$$k \leq C(M, T)$$

para alguma função  $C(M, T)$  limitada para  $M$  e  $T$  limitados. Portanto,

$$|F(c_2)(a, t) - F(c_1)(a, t)| \leq \rho_1^{-1} C(M, T) (\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + v_0)T \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}.$$

Isso mostra que  $F$  possui um único ponto fixo se  $\rho_1^{-1} C(M, T) (\|u_0\|_1 + v_0)T < 1$ .

Portanto, existe um único  $\bar{c} \in U$  tal que

$$\bar{c} = F(\bar{c}) = P\left(\frac{1}{\rho_1} J(\bar{c})\right). \quad (3.40)$$

Logo, por (3.40) e pelo Teorema 3.2, se existir um controle ótimo do Problema 1, este será um ponto fixo de  $F$  e portanto será único.

**b) Existência**

Pelo Teorema 3.3,

$$c_\epsilon = P\left[\frac{1}{\rho_1} (J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right].$$

Assim, temos

$$|F(c_\epsilon) - P\left[\frac{1}{\rho_1} (J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \leq |P\left(\frac{1}{\rho_1} J(c_\epsilon)\right) - P\left[\frac{1}{\rho_1} (J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \leq \frac{\epsilon|\theta_\epsilon|}{\rho_1} \leq \frac{\epsilon}{\rho_1}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} |\bar{c} - c_\epsilon| &= |F(\bar{c}) - P\left[\frac{1}{\rho_1} (J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \leq |F(\bar{c}) - F(c_\epsilon)| \\ &+ |F(c_\epsilon) - P\left[\frac{1}{\rho_1} (J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \leq \rho_1^{-1} C(M, T)(\|u_0\|_1 + v_0)T|\bar{c} - c_\epsilon| + \frac{\epsilon}{\rho_1}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|\bar{c} - c_\epsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq [1 - \rho_1^{-1} C(M, T)(\|u_0\|_1 + v_0)T]^{-1} \rho^{-1} \epsilon.$$

Logo,

$$c_\epsilon \longrightarrow \bar{c} \text{ em } L^\infty(Q).$$

Em particular,

$$c_\epsilon \longrightarrow \bar{c} \text{ em } L^1(Q).$$

Por outro lado, pelo Princípio Variacional de Ekeland

$$\Psi(c_\epsilon) \leq \inf \Psi(c) + \epsilon.$$

Assim,

$$\Psi(\bar{c}) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \Psi(c_\epsilon) \leq \inf \Psi(c) \leq \Psi(\bar{c}).$$

Portanto,

$$\Psi(\bar{c}) = \inf \Psi(c).$$

□

# ANÁLISE DOS SISTEMAS RELACIONADOS AO PROBLEMA 2

---

Neste capítulo, mostramos a existência, unicidade e algumas estimativas das soluções para o sistema de populações:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u_t(a, t) + u_a(a, t) + [\int_{\Omega} m_1(r(x, t))H_3(x, t)dx + \mu_1(c(a, t))]u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\
 v_t(x, t) - \alpha\Delta v(x, t) + m_2(r(x, t))v(x, t) + \mu_2(L_1(c(a, t)))v(x, t) = u(l, t) & (x, t) \in \Omega_T, \\
 r_t(x, t) - (g(r(x, t)) - h(L_2(u(a, t), v(x, t))))r(x, t) = 0 & (x, t) \in \Omega_T, \\
 u(0, t) = \int_{\Omega} B(x, t)v(x, t)dx & t \in (0, T), \\
 u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\
 v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\
 v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T, \\
 r(x, 0) = r_0(x) & x \in \Omega
 \end{array} \right. \quad (4.1)$$



derivadas até a segunda ordem limitadas. Suas respectivas constantes de Lipschitz são denotadas por  $k_{m_1}, k_{m_2}, k_{\mu_1}, k_{\mu_2}, k_h, k_{m'_1}, k_{m'_2}, k_{\mu'_1}, k_{\mu'_2}$  e  $k_{h'}$ .

**(H3)**  $L_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $L_2 : L^\infty([0, T], L^1(0, l)) \times L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_1(c)(t) = \int_0^l c(a, t)H_0(a, t)da, \quad (4.4)$$

$$L_2(u, v)(x, t) = \int_0^l u(a, t)H_1(a, t) + v(x, t)H_2(a, t)da, \quad (4.5)$$

em que  $H_0, H_1, H_2 \in L^\infty(Q)$  com  $H_0, H_1, H_2 \geq 0$ .

**(H4)**  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  com  $g, g', g''$  limitadas e existe uma constante  $d > 0$  com:  $g(r) \geq 0$ , se  $0 \leq r \leq d$  e  $g(r) < 0$ , se  $r > d$ . Denotamos por  $k_g, k_{g'}$  as constantes de Lipschitz de  $g, g', g''$ , respectivamente. Considere também que  $0 \leq \|r_0\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq d$ .

**(H5)**  $\rho_2, \rho_3, \geq 0$  e  $\alpha, \rho_1 > 0$  são constantes.

**(H6)**  $G : (0, l) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável em  $a$ , de classe  $C^2$  em  $y$ , com  $G, G_y, G_{yy}$  limitadas.

**(H7)**  $c \in U$  e  $\gamma_1, \gamma_2$  são funções mensuráveis, com  $0 \leq \gamma_1(a) \leq \gamma_2(a) \leq \lambda_2$ , q.t.p. em  $(0, l)$ .

**(H8)**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^2$  e  $n = 2, 3$ .

**(H9)**  $B, H_3 \in L^\infty(\Omega_T)$  e  $B, H_3 \geq 0$ .

## 4.1 O sistema das populações

Nesta seção mostramos que o sistema (4.1) possui uma única solução. Começamos com o:

**Teorema 4.1.** *Seja o sistema*

$$\begin{cases} u_t(a, t) + u_a(a, t) + [\int_\Omega m_1(\bar{r}))H_3(x, t)dx + \mu_1(c)]u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v_t(x, t) - \alpha\Delta v(x, t) + m_2(\bar{r})v(x, t) + \mu_2(L_1(c))v(x, t) = u(l, t) & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(0, t) = \int_\Omega B(x, t)v(x, t)dx = w(t) & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde

$$\bar{r} \in \{r \in C([0, T]; L^\infty(\Omega)); 0 \leq r(x, t) \leq d\} \text{ é dado .}$$

Com as hipóteses **(H1)-(H3)**, **(H5)** e **(H7)-(H9)**, o sistema (4.6) possui uma única solução  $(u, v)$  com  $u, v \geq 0$ .

**Demonstração:**

Considere o operador

$$\tau : X \rightarrow X,$$

com

$$X = L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times L_+^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))$$

definido por  $\tau(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$  onde  $(u, v)$  é a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + [\int_\Omega m_1(\bar{r})] H_3(x, t) dx + \mu_1(c) u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v_t(x, t) - \alpha \Delta v(x, t) + m_2(\bar{r}) v(x, t) + \mu_2(L_1(c)) v(x, t) = u(l, t) & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(0, t) = \int_\Omega B(x, t) \bar{v}(x, t) dx = \bar{w}(t) & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Das hipóteses, segue que a equação em  $u$  possui uma única solução em  $L^\infty(0, T, L^1(0, l))$  com  $u \geq 0$  e absolutamente contínua ao longo das retas caracaterísticas  $t = a + c$ . Substituindo essa solução na equação em  $v$ , temos que esta possui uma única solução  $v \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega))$ .

**Afirmção:**  $v \geq 0$ .

De fato, sejam  $v^+ = \max\{v, 0\}$  e  $v^- = -\min\{v, 0\}$ , respectivamente, as partes positiva e negativa de  $v$ . Temos que  $v = v^+ - v^-$ . Multiplicando a equação em  $v$  por  $-v^-$  e integrando em  $\Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega (v_t^+ - v_t^-) v^- dx + \alpha \int_\Omega \Delta (v^+ - v^-) v^- dx \\ & - \int_\Omega [m_2(\bar{r}) + \mu_2(L_1(c))] (v^+ - v^-) v^- dx = - \int_\Omega u(l, t) v^- dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_t^- v^- dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 dx + \int_{\Omega} [m_2(\bar{r}) + \mu_2(L_1(c))] |v^-|^2 dx \\ & = - \int_{\Omega} u(l, t) v^- dx \leq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v^-|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla v^-|^2 dx + \int_{\Omega} [m_2(\bar{r}) + \mu_2(L_1(c))] |v^-|^2 dx \leq 0.$$

Dáí,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v^-|^2 dx + \int_{\Omega} [m_2(\bar{r}) + \mu_2(L_1(c))] |v^-|^2 dx \leq 0.$$

Integrando de 0 a  $t$  e usando o fato de que  $v^-(\cdot, 0) = 0$ , temos

$$\|v^-(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq - \int_0^t \int_{\Omega} [m_2(\bar{r}) + \mu_2(L_1(c))] |v^-|^2 dx d\sigma \leq k \int_0^t \|v^-(\cdot, \sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma.$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\|v^-(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

mostrando que  $v \geq 0$ . Portanto o operador  $\tau$  está bem definido.

Agora, vamos mostrar que  $\tau$  possui um único ponto fixo para  $T = T_1$  com  $T_1$  suficientemente pequeno. Seja  $\tau(u_i, v_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Temos

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a-t) e^{-\int_0^t \int_{\Omega} m_1(\bar{r}(x, t-\sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma)) d\sigma}, & \text{se } a \geq t \\ \bar{w}(t-a) e^{-\int_0^a \int_{\Omega} m_1(\bar{r}(x, t-\sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma)) d\sigma}, & \text{se } a < t. \end{cases} \quad (4.8)$$

Dado  $t \in [0, T_1]$  e  $0 \leq s \leq t$ , segue que

$$\|v_2(\cdot, s) - v_1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k \int_0^t \|u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (4.9)$$

Por (4.8), temos:

(I) Se  $0 < t < l$ , então

$$\begin{aligned}
 \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da &= \int_0^t |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da + \int_t^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da \\
 &= \int_0^t \int_{\Omega} B(x, t) |\bar{v}_2(x, t - a) - \bar{v}_1(x, t - a)| dx da \\
 &\leq k\sqrt{t} \|B\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})} \left( \int_0^t \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0, T_1, H_0^1(\Omega))}^2 da \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq kt \|B\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})} \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0, T_1, H_0^1(\Omega))}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ou seja,

$$\int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da \leq \|B\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})} T_1 \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0, T_1, H_0^1(\Omega))}.$$

(II) Se  $0 < l < t$ , então

$$\int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| da \leq \|B\|_{L^\infty(\Omega_t)} T_1 \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0, T_1, H_0^1(\Omega))}.$$

Portanto,  $\forall t \in [0, T_1]$ ,

$$\|u_2 - u_1\|_{L^\infty(0, T_1, L^1(0, l))} \leq \|B\|_{L^\infty(\Omega_t)} T_1 \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0, T_1, H_0^1(\Omega))}. \tag{4.11}$$

Por outro lado, como

$$u_2(l, t) - u_1(l, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } l \geq t \\ (\bar{w}_2(t - l) - \bar{w}_1(t - l)) e^{-\int_0^l \int_{\Omega} m_1(\bar{r}(x, t - \sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(l - \sigma, t - \sigma)) d\sigma}, & \text{se } l < t. \end{cases}$$

Assim, por (4.9),

$$\begin{aligned}
 \|v_2(\cdot, s) - v_1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k|\Omega| \int_0^t \int_{\Omega} B(x, t)^2 |\bar{v}_2(x, \sigma - l) - \bar{v}_1(x, \sigma - l)|^2 dx da \\
 &\leq k|\Omega| \|B\|_{L^\infty(\Omega_t)}^2 \int_0^t \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0, T_1, H_0^1(\Omega))}^2 da \\
 &\leq k|\Omega| \|B\|_{L^\infty(\Omega_t)}^2 T_1 \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0, T_1, H_0^1(\Omega))}^2.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty([0,T]H_0^1(\Omega))} \leq \sqrt{k}\sqrt{|\Omega|}\|B\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})}\sqrt{T_1}\|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0,T_1,H_0^1(\Omega))}. \quad (4.12)$$

Portanto, de (4.11) e (4.12), segue que

$$\begin{aligned} \|u_2 - u_1\|_{L^\infty(0,T_1,L^1(0,l))} + \|v_2 - v_1\|_{L^\infty([0,T_1]H_0^1(\Omega))} &\leq (\|B\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})}T_1 + \sqrt{k}\|B\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})}\sqrt{|\Omega|}\sqrt{T_1}) \\ &\times \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_{L^\infty(0,T_1,H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Assim, para  $T_1$  suficientemente pequeno,  $\tau$  possui um único ponto fixo solução do sistema em  $[0, T_1]$ . Como no Problema 1, a solução também pode ser estendida de forma única para todo o intervalo  $[0, T]$ . □

A seguir temos:

**Teorema 4.2.** *Com as hipóteses (H1)-(H4), (H5) e (H7)-(H9), o sistema (4.1) possui uma única solução.*

**Demonstração:** Seja o operador

$$\tau : X \rightarrow X,$$

$$X = L^\infty(0, T, L^1(0, l)) \times L_+^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \times N[0, T]$$

com  $N[0, T] = \{r \in C([0, T], L^\infty(\Omega)); 0 \leq r \leq d\}$ , definido por  $\tau(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r}) = (u, v, r)$ , onde  $(u, v, r)$  é a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + [\int_\Omega m_1(\bar{r})H_3(x, t)dx + \mu_1(c)]u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q \\ v_t(x, t) - \alpha\Delta v(x, t) + m_2(\bar{r})v(x, t) + \mu_2(L_1(c))v(x, t) = u(l, t) & (x, t) \in \Omega_T \\ r_t(x, t) - (g(r(x, t)) - h(L_2(u, v)))r(x, t) = 0 & (x, t) \in \Omega_T \\ u(0, t) = \int_\Omega B(x, t)v(x, t)dx = w(t) & t \in (0, T) \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l) \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \\ v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T \\ r(x, 0) = r_0(x) & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Pelo Teorema 4.1, esse sistema possui uma única solução. Mostraremos que  $\tau$  possui um único ponto fixo para  $T = T_1$  com  $T_1$  pequeno. Para isso, serão fundamentais as estimativas:

$$\|v\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))}, |u(a, t)| \leq \delta_1 \text{ e } \|v\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq \delta_2 \quad (4.14)$$

onde  $\delta_1$  e  $\delta_2$  é dado no Teorema 4.3. A demonstração seguirá as seguintes etapas:

(I) Mostraremos que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma + kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0,T_1], L^\infty(\Omega))}^2.$$

Note que  $v = v_2 - v_1$  é solução do problema

$$\begin{cases} v_t(x, t) - \alpha \Delta v(x, t) + \mu_2(L_1(c))v(x, t) = u(l, t) + m_2(\bar{r}_1)v_1 - m_2(\bar{r}_2)v_2 & (x, t) \in \Omega_T \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \\ v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T. \end{cases} \quad (4.15)$$

Assim, dados  $t \in [0, T]$  e  $s \in [0, t]$ , por (4.14) e por regularidade parabólica (teorema 1.5, p. 14), temos

$$\begin{aligned} \|v_2(\cdot, s) - v_1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t \int_{\Omega} |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma) + m_2(\bar{r}_1)v_1 - m_2(\bar{r}_2)v_2|^2 dx d\sigma \\ &\leq k \int_0^t \int_{\Omega} |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 dx d\sigma \\ &+ k \int_0^t \|\bar{r}_2(\cdot, \sigma) - \bar{r}_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t \int_{\Omega} |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \|v_2(\cdot, s) - v_1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma + kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0,T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \\ &+ k \int_0^t \|v_2(\cdot, \sigma) - v_1(\cdot, \sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Em particular, podemos tomar  $s = t$ . Logo, pela desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned} \|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

(II) Mostrar que,  $\forall(a, t) \in [0, l] \times [0, T_1]$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)| &\leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}, \\ \|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

e

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| \leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.18)$$

Temos

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a-t)e^{-\int_0^t \int_\Omega m_1(\bar{r}(x, t-\sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma)) d\sigma}, & \text{se } a \geq t \\ w(t-a)e^{-\int_0^a \int_Q m_1(\bar{r}(x, t-\sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(a-\sigma, t-\sigma)) d\sigma}, & \text{se } a < t. \end{cases} \quad (4.19)$$

Se  $a < t$ ,

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 \leq k|w_2(t-a) - w_1(t-a)|^2 + kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2.$$

Em particular, para  $a = l$ , temos

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k \int_\Omega |v_2(x, t-l) - v_1(x, t-l)|^2 dx + kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \\ &\leq k \|v_2(\cdot, t-l) - v_1(\cdot, t-l)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &+ kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo (4.16) em (4.20), obtemos

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 \leq kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2,$$

ou seja,

$$|u_2(l, t) - u_1(l, t)| \leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.21)$$

Por (4.21) e (4.16),

$$\|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.22)$$

Por (4.22) e (4.19)

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| \leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.23)$$

**(III)** Vamos provar que

$$\|r_2 - r_1\|_{C([0, T], L^\infty(\Omega))} \leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.24)$$

Temos

$$r(x, t) = r_0(x) e^{-\int_0^t (h(L_2(u, v)) - g(r(\xi))) d\xi}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |r_2(x, t) - r_1(x, t)|^2 &\leq k \int_0^t |L_2(u_2, v_2) - L_2(u_1, v_1)|^2 \sigma + k \int_0^t |r_2(x, \sigma) - r_1(x, \sigma)|^2 d\sigma \\ &\leq k \int_0^t |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 d\sigma + k \int_0^t \int_0^l |u_2(\theta, \sigma) - u_1(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma \\ &+ k \int_0^t |r_2(x, \sigma) - r_1(x, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Assim, por (4.23), temos

$$\begin{aligned} |r_2(x, t) - r_1(x, t)|^2 &\leq k \int_0^t |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 d\sigma + kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \\ &\quad + k \int_0^t |r_2(x, \sigma) - r_1(x, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por outro lado, como  $v_2, v_1 \in L^2([0, T], H^2(\Omega))$  e  $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$  continuamente, segue que

$$\int_0^t |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 d\sigma \leq k \int_0^t \|v_2(\cdot, \sigma) - v_1(\cdot, \sigma)\|_{H^2(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (4.26)$$

Mas, como em (4.16), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|v_2(\cdot, \sigma) - v_1(\cdot, \sigma)\|_{H^2(\Omega)}^2 d\sigma &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\ &\quad + kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \\ &\leq kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim, por (4.27), (4.26) e (4.25),

$$\begin{aligned} |r_2(x, t) - r_1(x, t)|^2 &\leq kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \\ &\quad + k \int_0^t |r_2(x, \sigma) - r_1(x, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\|r_2 - r_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \leq kT_1 \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2.$$

Ou seja,

$$\|r_2 - r_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))} \leq k\sqrt{T_1} \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.28)$$

Portanto, por (4.28) (4.18) e (4.17), temos

$$\|\tau(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r})\|_X \leq k\sqrt{T_1} \|(\bar{u}, \bar{v}, \bar{r})\|_X.$$

Portanto, segue que para  $T_1$  suficientemente pequeno,  $\tau$  possui um único ponto fixo solução do sistema em  $[0, T_1]$ .

Com um argumento análogo àquele feito para o Problema 1, esta solução também se estende de forma única para todo o intervalo  $[0, T]$ .

□

**Teorema 4.3.** *Com as hipóteses do Teorema 4.2, temos,  $\forall(a, t) \in [0, l] \times [0, T]$ , as seguintes estimativas:*

$$|u(a, t)| \leq \delta_1,$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq \delta_2,$$

$$\|v\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} \leq \delta_2,$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)} (k\sqrt{|\Omega|}\sqrt{T}e^{\frac{1}{2}k^2\|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2|\Omega|T} + 1) \|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \\ &+ (k^2\sqrt{|\Omega|}\sqrt{T}\|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2e^{\frac{1}{2}k^2\|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2|\Omega|T} + k) \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= k\sqrt{|\Omega|}\sqrt{T}e^{\frac{1}{2}k^2\|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2|\Omega|T} \|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \\ &+ (k^2\sqrt{|\Omega|}\sqrt{T}\|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}e^{\frac{1}{2}k^2\|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2|\Omega|T} + k) \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

### Demonstração:

Temos

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a-t)e^{-\int_0^t \int_\Omega m_1(r(x,t-\sigma))H_3dx + \mu_1(c(a-\sigma,t-\sigma))d\sigma}, & \text{se } a \geq t \\ w(t-a)e^{-\int_0^a \int_Q m_1(r(x,t-\sigma))H_3dx + \mu_1(c(a-\sigma,t-\sigma))d\sigma}, & \text{se } a < t. \end{cases} \quad (4.29)$$

Sejam  $t \in [0, T]$  e  $s \in [0, t]$ . Então temos:

$$|u(a, s)| \leq \begin{cases} \|u_0\|_{L^\infty(0,l)}, & \text{se } a \geq s \\ |w(s-a)|, & \text{se } a < s \end{cases} \quad (4.30)$$

e

$$\|v\|_{L^\infty(0,t,H_0^1(\Omega))} \leq k \left[ \left( \int_0^t \|u(l, \sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right].$$

Assim, se  $l < s$

$$\begin{aligned} |u(l, s)|^2 &\leq \int_{\Omega} B(x, t)^2 |v(x, s-l)|^2 dx \leq \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 \|v(\cdot, s-l)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| \int_0^t |u(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Se  $l \geq s$ ,

$$|u(l, s)|^2 \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2.$$

Portanto,  $\forall s \in [0, t]$ ,

$$\begin{aligned} |u(l, s)|^2 &\leq \|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 + k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| \int_0^t |u(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Em particular, para  $s = t$ , temos

$$\begin{aligned} |u(l, t)|^2 &\leq \|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 + k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| \int_0^t |u(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} |u(l, t)|^2 &\leq \left( \|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 + k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) e^{(k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega|)T} \\ &\leq e^{k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| T} \left( \|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 + k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) e^{k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| T}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|u(l, t)| \leq e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + k \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)} e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))} &\leq k \sqrt{|\Omega|} \sqrt{T} e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} \\ &+ (k^2 \sqrt{|\Omega|} \sqrt{T} \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)} e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} + k) \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(0, T, H^2(\Omega))} &\leq k \sqrt{|\Omega|} \sqrt{T} e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} \\ &+ (k^2 \sqrt{|\Omega|} \sqrt{T} \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)} e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} + k) \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |u(a, t)| &\leq \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)} (k \sqrt{|\Omega|} \sqrt{T} e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} + 1) \|u_0\|_{L^\infty(0, l)} \\ &+ (k^2 \sqrt{|\Omega|} \sqrt{T} \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)} e^{\frac{1}{2}k^2 \|B\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 |\Omega| |T|} + k) \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

**Observação:** Este resultado mostra que a solução do sistema de população é limitada por uma constante independente de  $c \in U$ .

## 4.2 O sistema dual associado

**Teorema 4.4.** *Com as hipóteses (H1)-(H9), o sistema (4.2) possui uma única solução.*

**Demonstração:** Considere a mudança de variável

$$a = l - a_1 \text{ e } t = T - t_1 \text{ com } (a_1, t_1) \in [0, l] \times [0, T].$$

e

$$w_1(a_1, t_1) = q_1(a, t), w_2(x, t_1) = q_2(x, t) \text{ e } w_3(x, t_1) = q_3(x, t).$$

Esta mudança transforma o sistema (4.2) no sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 w_{1t}(a, t) + w_{1a}(a, t) + [\int_{\Omega} m_1(r)H_3dx + \mu_1(c)]w_1(a, t) = - \int_{\Omega} h'(L_2(u, v))rH_1w_3dx \\
 G_y(a, u) \\
 w_{2t}(x, t) - \alpha\Delta w_2(x, t) + [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]w_2(x, t) = B(x, t)w_1(l, t) \\
 - \int_0^l h'(L_2(u, v))rw_3H_2(\theta, t)d\theta + \rho_2v \\
 w_{3t}(x, t) - [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]w_3(x, t) = - \int_0^l m'_1(r)u(\theta, t)w_1(\theta, t)d\theta \\
 -m'_2(r)vw_2 + \rho_3r \\
 w_1(0, t) = \int_{\Omega} w_2(x, t)dx \\
 w_1(a, 0) = 0 \\
 w_2(x, 0) = 0 \\
 w_2(x, t) = 0 \\
 w_3(x, 0) = 0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (a, t) \in Q, \\
 \\
 (x, t) \in \Omega_T, \\
 \\
 (x, t) \in \Omega_T, \\
 t \in (0, T), \\
 a \in (0, l), \\
 x \in \Omega, \\
 (x, t) \in \partial\Omega_T, \\
 x \in \Omega.
 \end{array}$$

(4.31)

Para não carregar a notação, neste último sistema estamos denotando a variável  $(a_1, t_1)$  por  $(a, t)$ . Mostraremos que o sistema (4.31) possui uma única solução. Observamos que a demonstração deste fato seguirá as mesmas idéias que utilizamos para demonstrar o Teorema 4.2.

Considere o operador

$$\tau : X \rightarrow X,$$

$$X = L^{\infty}(0, T, L^1(0, l)) \times L^{\infty}([0, T], H_0^1(\Omega)) \times C([0, T], L^{\infty}(\Omega))$$

definido por  $\tau(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3) = (w_1, w_2, w_3)$ , onde  $(w_1, w_2, w_3)$  é a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{1t}(a, t) + w_{1a}(a, t) + [\int_{\Omega} m_1(r)H_3 dx + \mu_1(c)]w_1(a, t) = - \int_{\Omega} h'(L_2(u, v))rH_1\bar{w}_3 dx \\ G_y(a, u) \\ w_{2t}(x, t) - \alpha\Delta w_2(x, t) + [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]w_2(x, t) = B(x, t)w_1(l, t) \\ - \int_0^l h'(L_2(u, v))r\bar{w}_3 H_2(\theta, t)d\theta + \rho_2 v \\ w_{3t}(x, t) - [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]w_3(x, t) = - \int_0^l m'_1(r)u(\theta, t)w_1(\theta, t)d\theta \\ - m'_2(r)vw_2 + \rho_3 r \\ w_1(0, t) = \int_{\Omega} w_2(x, t)dx \\ w_1(a, 0) = 0 \\ w_2(x, 0) = 0 \\ w_2(x, t) = 0 \\ w_3(x, 0) = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} (a, t) \in Q, \\ (x, t) \in \Omega_T, \\ (x, t) \in \Omega_T, \\ t \in (0, T), \\ a \in (0, l), \\ x \in \Omega, \\ (x, t) \in \partial\Omega_T, \\ x \in \Omega. \end{array} \quad (4.32)$$

Como no Teorema 4.2, (4.32) possui uma única solução  $(w_1, w_2, w_3) \in X$ . Portanto, o operador  $\tau$  está bem definido. Vamos provar que  $\tau$  possui um único ponto fixo para  $T = T_1$  pequeno.

Sejam

$$\tau(Q_1^i, Q_2^i, Q_3^i) = (w_1^i, w_2^i, w_3^i), i = 1, 2$$

A demonstração seguirá as seguintes etapas:

(I) Mostrar que,  $\forall t \in [0, T_1]$ ,

$$\|w_2^2(\cdot, t) - w_2^1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2.$$

Sejam  $t \in [0, T_1]$  e  $s \in [0, t]$ . Então

$$\begin{aligned} \|w_2^2(\cdot, s) - w_2^1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t \int_{\Omega} |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 dx d\sigma \\ &+ k \int_0^t \int_{\Omega} \left| \int_0^l h'(L_2(u, v))r(Q_3^2 - Q_3^1)H_2 d\theta \right|^2 dx d\sigma \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|w_2^2(\cdot, s) - w_1^2(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2.$$

Em particular, esta última estimativa vale para  $s = t$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|w_2^2(\cdot, t) - w_1^2(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

(II) Mostrar que,  $\forall(a, t) \in [0, l] \times [0, T_1]$ ,

$$|w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)| \leq k\sqrt{T_1} \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))},$$

$$\|w_2^2(\cdot, t) - w_1^2(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq k\sqrt{T_1} \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}, \quad (4.34)$$

$$\|w_2^2 - w_1^2\|_{L^2([0, T], H^2(\Omega))} \leq k\sqrt{T_1} \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}, \quad (4.35)$$

e

$$|w_1^2(a, t) - w_1^1(a, t)| \leq k\sqrt{T_1} \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.36)$$

Temos o seguinte: se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned} w_1(a, t) &= w_1(0, t - a) e^{-\int_0^a [\int_\Omega m_1(r) H_3 dx + \mu_1(c)] d\xi} \\ &+ \int_0^a [G_y(\sigma, u) - \int_\Omega h'(L_2(u, v)) H_1 r \bar{w}_3 dx] \\ &\times e^{-\int_0^\sigma [\int_\Omega m_1(r) H_3 dx + \mu_1(c)] d\xi} d\sigma \end{aligned}$$

e se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} w_1(a, t) &= \int_0^t [G_y(\sigma, u) - \int_\Omega h'(L_2(u, v)) H_1 r \bar{w}_3 dx] \\ &\times e^{-\int_\sigma^t [\int_\Omega m_1(r) H_4 dx + \mu_1(c)] d\xi} d\sigma. \end{aligned}$$

Assim, se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned}
 |w_1^2(a, t) - w_1^1(a, t)|^2 &\leq k \int_{\Omega} |w_2^2(x, t - a) - w_2^1(x, t - a)|^2 dx + k \int_0^a \int_{\Omega} |Q_3^2 - Q_3^1|^2 dx d\sigma \\
 &\leq k \int_{\Omega} |w_2^2(x, t - a) - w_2^1(x, t - a)|^2 dx \\
 &\quad + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

e  $a \geq t$ ,

$$|w_1^2(a, t) - w_1^1(a, t)|^2 \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2.$$

Agora, usando (4.33) em (4.37), segue que se  $l < t$ ,

$$\begin{aligned}
 |w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)|^2 &\leq k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &\quad + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 |w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)|^2 &\leq k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 dx d\sigma \\
 &\quad + kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2.
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)|^2 \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2. \tag{4.38}$$

Usando (4.38) em (4.33) e (4.37), obtemos (4.34), e (4.36). Por outro lado, como em (4.33), também temos,

$$\begin{aligned}
 \|w_2^2 - w_2^1\|_{L^2([0, T_1], H^2(\Omega))} &\leq k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &\quad + k \int_0^t \int_{\Omega} |Q_3^2 - Q_3^1|^2 dx d\sigma,
 \end{aligned}$$

donde segue (4.35).

(III) Vamos provar que

$$\|w_3^2 - w_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))} \leq k\sqrt{T_1}\|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}. \quad (4.39)$$

Temos

$$w_3(x, t) = \int_0^t [\rho_3 r - m'_2(r)vw_2 + \int_0^l m'_1(r)uw_1 d\theta] d\sigma e^{-\int_0^t (g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))) d\xi}.$$

Logo, por (4.34)

$$\begin{aligned} |w_3^2(x, t) - w_3^1(x, t)|^2 &\leq k \int_0^t \int_0^l |w_1^2(\theta, \sigma) - w_1^1(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma + k \int_0^t |w_2^2(x, \sigma) - w_2^1(x, \sigma)|^2 d\sigma \\ &\leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2 \\ &\quad + k \int_0^t |w_2^2(x, \sigma) - w_2^1(x, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por outro lado, por (4.35) e como  $w_2^2, w_2^1 \in L^2([0, T_1], H^2(\Omega))$  e  $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$  continuamente, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^t |w_2^2(x, \sigma) - w_2^1(x, \sigma)|^2 d\sigma &\leq k \int_0^t \|w_2^2(\cdot, \sigma) - w_2^1(\cdot, \sigma)\|_{H^2(\Omega)}^2 d\sigma \\ &\leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Portanto, de (4.41) e (4.40), temos

$$|w_3^2(x, t) - w_3^1(x, t)|^2 \leq kT_1 \|Q_3^2 - Q_3^1\|_{C([0, T_1], L^\infty(\Omega))}^2,$$

mostrando (4.39).

Portanto,

$$\|\tau(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) - \tau(Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1)\|_X \leq k\sqrt{T_1}\|(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) - (Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1)\|_X.$$

Portanto, segue que para  $T_1$  suficientemente pequeno,  $\tau$  possui um único ponto fixo solução do sistema em  $[0, T_1]$ . Como no Problema 1, a solução também se estende de forma única para todo o intervalo  $[0, T]$ .

**Teorema 4.5.** *Dados o controle  $c$  e a solução  $(q_1, q_2, q_3)$  do Sistema (4.2), temos,  $\forall (a, t) \in$*

$[0, l] \times [0, T]$  e  $\forall c \in U$  as seguintes estimativas :

$$|q_1(a, t)|, \|q_2(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}, \|q_2\|_{L^2([0, T], H^2(\Omega))}, \|q_3\|_{C([0, T], L^\infty(\Omega))} \leq k\{(T-t) + (T-t)^2 + (T-t)^3 + (T-t)^4\}^{\frac{1}{2}},$$

onde  $k$  é uma contante que não depende de  $c \in U$ .

**Demonstração:**

Como no Teorema anterior, nós obteremos as estimativas para o sistema (4.31). Mostraremos o seguinte:

(I)  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$|w_1(l, t)|^2 \leq kt + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.$$

Temos que

Se  $a < t$

$$\begin{aligned} w_1(a, t) &= w_1(0, t-a) e^{-\int_0^a [\int_\Omega m_1(r) H_3 dx + \mu_1(c)] d\xi} \\ &+ \int_0^a [G_y(\sigma, u) - \int_\Omega h'(L_2(u, v)) H_1 r w_3 dx] \\ &\times e^{-\int_0^a [\int_\Omega m_1(r) H_3 dx + \mu_1(c)] d\xi} d\sigma \end{aligned}$$

e se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} w_1(a, t) &= \int_0^t [G_y(\sigma, u) - \int_\Omega h'(L_2(u, v)) H_1 r w_3 dx] \\ &\times e^{-\int_\sigma^t [\int_\Omega m_1(r) H_4 dx + \mu_1(c)] d\xi} d\sigma. \end{aligned}$$

Assim, se  $a < t$ , então

$$|w_1(a, t)|^2 \leq k \int_\Omega |w_2(x, t-a)|^2 dx + k \int_0^t [1 + \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2] d\sigma \quad (4.42)$$

e se  $a \geq t$ ,

$$|w_1(a, t)|^2 \leq k \int_0^t [1 + \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2] d\sigma. \quad (4.43)$$

Por outro lado,

$$\|w_2(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k \int_0^t |w_1(l, \sigma)|^2 d\sigma + k \int_0^t 1 + \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \quad (4.44)$$

e

$$\|w_2\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))} \leq k \int_0^t |w_1(l, \sigma)|^2 d\sigma + k \int_0^t 1 + \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (4.45)$$

Substituindo (4.44) em (4.42), obtemos

$$|w_1(l, t)|^2 \leq kt + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma + k \int_0^t |w_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \quad (4.46)$$

Além disso, se  $l \geq t$

$$|w_1(l, t)|^2 \leq kt + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (4.47)$$

Portanto, (4.46) vale para todo  $t \in [0, T]$ . Logo, pela desigualdade de Gronwall,

$$|w_1(l, t)|^2 \leq kt + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (4.48)$$

Por (4.48) e (4.42)-(4.45), temos:

**(II)**

$$\|w_2(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq kt + kt^2 + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma, \quad (4.49)$$

$$\|w_2\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))}^2 \leq kt + kt^2 + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \quad (4.50)$$

e

$$|w_1(a, t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq kt + kt^2 + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (4.51)$$

**(III)** Agora , provaremos que

$$\|w_3(\cdot, t)\|_{L^\infty(Q)}^2 \leq k(t + t^2 + t^3).$$

Temos

$$w_3(x, t) = \int_0^t [\rho_3 r - m'_2(r)vw_2 + \int_0^l m'_1(r)uw_1 d\theta] d\sigma e^{-\int_0^t (g(r)+g'(r)r-h(L_2(u,v)))d\xi}.$$

$$\begin{aligned} |w_3(x, t)|^2 &\leq kt + k \int_0^t |w_2(x, \sigma)|^2 d\sigma + k \int_0^t \int_0^l |w_1(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma \\ &\leq kt + k \|w_2\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))}^2 + k \int_0^t \int_0^l |w_1(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma. \end{aligned}$$

Por (4.50) e (4.51), temos

$$|w_3(x, t)|^2 \leq kt + kt^2 + kt^3 + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma$$

o

$$\|w_3(\cdot, t)\|_{L^\infty(Q)}^2 \leq kt + kt^2 + kt^3 + k \int_0^t \|w_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(Q)}^2 d\sigma.$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\|w_3(\cdot, t)\|_{L^\infty(Q)}^2 \leq k(t + t^2 + t^3). \quad (4.52)$$

De (4.52), (4.49)-(4.51), temos

$$\|w_2(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k(t + t^2 + t^3 + t^4),$$

$$\|w_2\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))}^2 \leq k(t + t^2 + t^3 + t^4)$$

e

$$|w_1(a, t)|^2 \leq k(t + t^2 + t^3 + t^4).$$

Portanto, o resultado desejado segue de:

$$|q_1(a, t)| = |w_1(a_1, t_1)|,$$

$$\|q_2\|_{L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega))} = \|w_2\|_{L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega))}$$

e

$$\|q_2\|_{L^\infty([0,T],H^2(\Omega))} = \|w_2\|_{L^\infty([0,T],H^2(\Omega))}.$$

□

**Observação.:** Em particular, pelo Teorema 4.5, temos

$$|q_1(a, t)|, \|q_2\|_{L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega))}, \|q_2\|_{L^\infty([0,T],H^2(\Omega))}, \|q_3\|_{C([0,T],L^\infty(\Omega))} \leq k\sqrt{T}.$$

□

### 4.3 Estimativas envolvendo o controle

Nesta seção nós obtemos algumas estimativa do tipo  $L^1$  e  $L^\infty$  envolvendo o controle. Tais estimativas são análogas aquelas que obtivemos no Capítulo 2.

**Teorema 4.6.** *Dados os controles  $c_1, c_2$  e suas respectivas soluções  $(u_1, v_1, r_1)$ ,  $(u_2, v_2, r_2)$  do Sistema (4.1), temos,  $\forall t \in [0, T]$ , as seguintes estimativas :*

$$\|u_2 - u_1\|_{L^\infty([0,T],L^2(0,l))} \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\|c_2 - c_1\|_{L^2(Q)}, \quad (4.53)$$

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega))} \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\|c_2 - c_1\|_{L^2(Q)}, \quad (4.54)$$

$$\|v_2 - v_1\|_{L^2([0,T],H^2(\Omega))} \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\|c_2 - c_1\|_{L^2(Q)}, \quad (4.55)$$

e

$$\|r_2 - r_1\|_{C([0,T],L^\infty(\Omega))} \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\|c_2 - c_1\|_{L^2(Q)}. \quad (4.56)$$

**Demonstração:**

A demonstração seguirá as seguintes etapas:

(I) Mostraremos que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 \|v_2 - v_1\|_{L^2([0,T],H^2(\Omega))} &+ \|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 & (4.57) \\
 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \int_{\Omega} |r_2(x, \sigma) - r_1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt.
 \end{aligned}$$

Sejam  $t \in [0, T]$  e  $s \in [0, t]$ . Então

$$\begin{aligned}
 \|v_2(\cdot, s) - v_1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma + k \int_0^t \int_{\Omega} |r_2(x, \sigma) - r_1(x, \sigma)|^2 |v_2|^2 dx d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \int_{\Omega} |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \int_{\Omega} |L_1(c_2) - L_1(c_1)|^2 |v_1|^2 dx d\sigma.
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.3,

$$\begin{aligned}
 \|v_2(\cdot, s) - v_1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \int_{\Omega} |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma \\
 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|v_2(\cdot, \sigma) - v_1(\cdot, \sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma. & (4.58)
 \end{aligned}$$

Em particular, para  $s = t$ , temos

$$\begin{aligned}
 \|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|v_2(\cdot, \sigma) - v_1(\cdot, \sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned}
 \|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

De (4.58) e (4.59), temos também que

$$\begin{aligned}
 \|v_2 - v_1\|_{L^2([0,T], H^2(\Omega))}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

**(II)** Mostraremos que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 da &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma
 \end{aligned}$$

Mais uma vez, usaremos

$$u(a, t) = \begin{cases} u_0(a - t)e^{-\int_0^t \int_{\Omega} m_1(r(x, t - \sigma))H_3 dx + \mu_1(c(a - \sigma, t - \sigma))d\sigma}, & \text{se } a \geq t \\ w(t - a)e^{-\int_0^a \int_{\Omega} m_1(r(x, t - \sigma))H_3 dx + \mu_1(c(a - \sigma, t - \sigma))d\sigma}, & \text{se } a < t. \end{cases} \quad (4.61)$$

Se  $a < t$ , pelo teorema 4.3

$$\begin{aligned} |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 &\leq k \int_{\Omega} |v_2(x, t - a) - v_1(x, t - a)|^2 dx \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^a \|r_2(\cdot, t - \sigma) - r_1(\cdot, t - \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Usando (4.59) e (4.62), obtemos

$$\begin{aligned} |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Além disso, se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 &\leq k\|u_0\|_{L^\infty(0, l)}^2 \int_0^t |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Consideraremos 2 casos:

a)  $0 < t < l$ .

Temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 da &= \int_0^t |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 da \\
 &+ \int_t^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 da \\
 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \\
 &\times \int_0^t \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma da \\
 &+ k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 \int_t^l \int_0^t |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma da \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

b)  $l < t$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 da &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \\
 &\times \int_0^l \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma da \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, com uma mudança de variável,

$$\int_0^l \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma da \leq \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt,$$

$$\int_0^t \int_0^a |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma da \leq \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt$$

e

$$\int_t^l \int_0^t |c_2(a - \sigma, t - \sigma) - c_1(a - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma da \leq \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt.$$

Assim, levando estas três últimas estimativas em (4.65) e (4.66), obtemos,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 da &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt. \\ &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.67)$$

**(III)** Mostraremos que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \|r_2(\cdot, t) - r_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt. \\ &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Temos

$$r(x, t) = r_0(x) e^{-\int_0^t (h(L_2(u,v)) - g(r(\xi))) d\xi}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |r_2(x, t) - r_1(x, t)|^2 &\leq k \int_0^t \int_0^l |u_2(\theta, \sigma) - u_1(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma \\ &+ k \int_0^t |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Por outro lado,

$$\int_0^t |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 d\sigma \leq k \int_0^t \|v_2(\cdot, \sigma) - v_1(\cdot, \sigma)\|_{H^2(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (4.70)$$

Por (4.60), (4.69) e (4.67), temos

$$\begin{aligned}
 |r_2(x, t) - r_1(x, t)|^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \|r_2(\cdot, t) - r_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned}
 \|r_2(\cdot, t) - r_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma.
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Levando (4.71) em (4.59) e (4.67), obtemos

**(IV)**

$$\begin{aligned}
 \|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\
 &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)|^2 da &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt. \\
 &+ k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

(V) Mostraremos que

$$\int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt.$$

Se  $l < t$ , por (4.63) e (4.71)

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &\quad + k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma \\ &\quad + k \int_0^l |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\ &\quad + k \int_l^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Se  $0 \leq t \leq l$ , por (4.64) e (4.71),

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &\quad + k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 \int_0^t |c_2(l - \theta, t - \theta) - c_1(l - \theta, t - \theta)|^2 d\theta \\ &\quad + k \int_0^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,  $\forall 0 \leq t \leq l$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &\quad + k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 \int_0^t |c_2(l - \theta, t - \theta) - c_1(l - \theta, t - \theta)|^2 d\theta \\ &\quad + k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 \int_0^t \int_0^s |c_2(l - \theta, s - \theta) - c_1(l - \theta, s - \theta)|^2 d\theta ds. \end{aligned}$$

Mais uma vez, segue que

$$\int_0^t \int_0^s |c_2(l - \theta, s - \theta) - c_1(l - \theta, s - \theta)|^2 d\theta ds \leq \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt.$$

Assim,  $\forall 0 \leq t \leq l$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &\quad + k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 \int_0^t |c_2(l - \theta, t - \theta) - c_1(l - \theta, t - \theta)|^2 d\theta. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Integrando (4.75) de 0 a  $l$  e substituindo em (4.74), chegamos em

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &\quad + k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma \\ &\quad + k\|u_0\|_{L^\infty(0,l)}^2 \int_0^l \int_0^\sigma |c_2(l - \theta, \sigma - \theta) - c_1(l - \theta, \sigma - \theta)|^2 d\theta d\sigma \\ &\quad + k \int_l^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Mas,

$$\int_0^l \int_0^\sigma |c_2(l - \theta, \sigma - \theta) - c_1(l - \theta, \sigma - \theta)|^2 d\theta d\sigma \leq \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt.$$

Portanto,  $\forall l \leq t \leq T$ , temos

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &\quad + k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma \\ &\quad + k \int_l^t |u_2(l, \sigma) - u_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} |u_2(l, t) - u_1(l, t)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &\quad + k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^l |c_2(l - \sigma, t - \sigma) - c_1(l - \sigma, t - \sigma)|^2 d\sigma \\ &\quad + k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_l^t \int_0^s |c_2(l - \theta, s - \theta) - c_1(l - \theta, s - \theta)|^2 d\theta ds. \end{aligned}$$

Resumindo, temos o seguinte:

Se  $l < \theta$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(l, \theta) - u_1(l, \theta)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^l |c_2(l - \sigma, \theta - \sigma) - c_1(l - \sigma, \theta - \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \quad (4.76) \end{aligned}$$

e se  $l \geq \theta$ ,

$$\begin{aligned} |u_2(l, \theta) - u_1(l, \theta)|^2 &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^\theta |c_2(l - \sigma, \theta - \sigma) - c_1(l - \sigma, \theta - \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt. \quad (4.77) \end{aligned}$$

Temos:

a) Se  $t \leq l$ , por (4.77),

$$\begin{aligned} \int_0^t |u_2(l, \theta) - u_1(l, \theta)|^2 d\theta &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \\ &\times \int_0^t \int_0^\theta |c_2(l - \sigma, \theta - \sigma) - c_1(l - \sigma, \theta - \sigma)|^2 d\sigma d\theta \\ &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt. \end{aligned}$$

b) Se  $t > l$ , por (4.76),

$$\begin{aligned} \int_0^t |u_2(l, \theta) - u_1(l, \theta)|^2 d\theta &= \int_0^l |u_2(l, \theta) - u_1(l, \theta)|^2 d\theta + \int_l^t |u_2(l, \theta) - u_1(l, \theta)|^2 d\theta \\ &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt \\ &+ k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \\ &\times \int_0^t \int_0^l |c_2(l - \sigma, \theta - \sigma) - c_1(l - \sigma, \theta - \sigma)|^2 d\sigma d\theta \\ &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 dadt. \end{aligned}$$

Logo,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^t |u_2(l, \theta) - u_1(l, \theta)|^2 d\theta \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})^2 \int_0^T \int_0^l |c_2(a, t) - c_1(a, t)|^2 da dt.$$

Portanto, substituindo esta estimativa em **(III)**, **(IV)** e **(I)**, obtemos (4.53)- (4.56).

□

**Teorema 4.7.** *Dados os controles  $c_1, c_2$  e suas respectivas soluções  $(u_1, v_1, r_1)$ ,  $(u_2, v_2, r_2)$  do Sistema (4.1), temos,  $\forall(a, t) \in [0, l] \times [0, T]$ , as seguintes estimativas :*

$$|u_2(a, t) - u_1(a, t)| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \quad (4.78)$$

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty([0,T], H_0^1(\Omega))} \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \quad (4.79)$$

$$\|v_2 - v_1\|_{L^2([0,T], H^2(\Omega))} \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \quad (4.80)$$

e

$$\|r_2 - r_1\|_{C([0,T], L^\infty(\Omega))} \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}. \quad (4.81)$$

**Demonstração:** É uma consequência imediata do Teorema 4.6. De fato, basta notar que, como  $c_2, c_1 \in L^\infty(Q)$ , (4.79)-(4.81) segue de (4.54)-(4.56). Já (4.78), é uma consequência de (4.76) , (4.77), (4.63), (4.64) e (4.81).

□

Agora temos:

**Teorema 4.8.** *Dados os controles  $c_1, c_2$  e suas respectivas soluções  $(q_1^1, q_2^1, q_3^1)$ ,  $(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$  do Sistema (4.2), temos,  $\forall(a, t) \in [0, l] \times [0, T]$ , as seguintes estimativas :*

$$|q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| \leq k\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \quad (4.82)$$

$$\|q_2^2 - q_2^1\|_{L^\infty([0,T], H_0^1(\Omega))} \leq k\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \quad (4.83)$$

$$\|q_2^2 - q_2^1\|_{L^2([0,T],H^2(\Omega))} \leq k\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \quad (4.84)$$

e

$$\|q_3^2 - q_3^1\|_{C([0,T],L^\infty(\Omega))} \leq k\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}. \quad (4.85)$$

### Demonstração:

Consideraremos novamente a mudança de variável

$$a = l - a_1 \text{ e } t = T - t_1 \text{ com } (a_1, t_1) \in [0, l] \times [0, T]$$

e

$$w_1(a_1, t_1) = q_1(a, t), w_2(x, t_1) = q_2(x, t) \text{ e } w_3(x, t_1) = q_3(x, t).$$

Como vimos antes, esta mudança de variável transforma o sistema (4.2) no sistema (4.31) Mais uma vez para não carregar a notação, neste último sistema estamos denotando a variável  $(a_1, t_1)$  por  $(a, t)$ . A idéia é obter estimativas para (4.31) e em seguida voltar para o sistema (4.2). Observamos que  $w_1, w_2$  e  $w_3$  satisfazem o Teorema 4.5.

Seguiremos as seguintes etapas:

(I) Mostraremos que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \|w_2^2(\cdot, t) - w_1^2(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Dados  $t \in [0, T]$  e  $s \in [0, t]$ , temos

$$\begin{aligned}
 \|w_2^2(\cdot, s) - w_1^2(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t \|r_2(\cdot, \sigma) - r_1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \int_\Omega \int_0^l |c^2(\theta, \sigma) - c_1(\theta, \sigma)|^2 d\theta dx d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \int_\Omega |w_2^2(x, \sigma) - w_2^1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \int_\Omega |v_2(x, \sigma) - v_1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma.
 \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 4.7,

$$\begin{aligned}
 \|w_2^2(\cdot, s) - w_2^1(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \int_\Omega |w_2^2(x, \sigma) - w_2^1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma \\
 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \|w_2^2(\cdot, \sigma) - w_2^1(\cdot, \sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma. \tag{4.86}
 \end{aligned}$$

Em particular, para  $s = t$ , temos

$$\begin{aligned}
 \|w_2^2(\cdot, t) - w_2^1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \|w_2^2(\cdot, \sigma) - w_2^1(\cdot, \sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} \|w_2^2(\cdot, t) - w_2^1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.87)$$

De (4.87) e (4.86), temos também que

$$\begin{aligned} \|w_2^2 - w_2^1\|_{L^\infty([0, T], H^2(\Omega))} &\leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.88)$$

**(II)** Mostraremos que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$|w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)|^2 \leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma$$

Temos o seguinte:

Se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned} w_1(a, t) &= w_1(0, t - a)e^{-\int_0^a [\int_\Omega m_1(r)H_3 dx + \mu_1(c)] d\xi} \\ &+ \int_0^a [G_y(\sigma, u) - \int_\Omega h'(L_2(u, v))H_1 r w_3 dx] \\ &\times e^{-\int_0^\sigma [\int_\Omega m_1(r)H_3 dx + \mu_1(c)] d\xi} d\sigma. \end{aligned}$$

Se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} w_1(a, t) &= \int_0^t [G_y(\sigma, u) - \int_\Omega h'(L_2(u, v))H_1 r w_3 dx] \\ &\times e^{-\int_\sigma^t [\int_\Omega m_1(r)H_3 dx + \mu_1(c)] d\xi} d\sigma. \end{aligned}$$

Assim, se  $a < t$ , temos

$$\begin{aligned} |w_1^2(a, t) - w_1^1(a, t)|^2 &\leq kT\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t \int_\Omega |w_2^2(x, t - a) - w_2^1(x, t - a)|^2 dx d\sigma. \end{aligned}$$

Em particular, para  $a = l$ , por (4.87),

$$\begin{aligned} |w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)|^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Analogamente, se  $a \geq t$ ,

$$|w_1^2(a, t) - w_1^1(a, t)|^2 \leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.$$

Assim,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)|^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\ &+ k \int_0^t |w_1^2(l, \sigma) - w_1^1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} |w_1^2(l, t) - w_1^1(l, t)|^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Por (4.90), (4.88) e (4.87), temos

**(III)**

$$\begin{aligned} \|w_2^2(\cdot, t) - w_2^1(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma, \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \|w_2^2 - w_2^1\|_{L^\infty([0, T], H^2(\Omega))} &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \end{aligned} \quad (4.92)$$

e

$$\begin{aligned} |w_1^2(a, t) - w_1^1(a, t)|^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (4.93)$$

(IV) Mostraremos que

$$\|w_3^2 - w_3^1\|_{C([0,T], L^\infty(\Omega))} \leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}. \quad (4.94)$$

Temos

$$w_3(x, t) = \int_0^t [\rho_3 r - m_2'(r) v w_2 + \int_0^l m_1'(r) u w_1 d\theta] d\sigma e^{-\int_0^t (g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))) d\xi}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |w_3^2(x, t) - w_3^1(x, t)|^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \int_0^t \int_\Omega |w_2^2(x, \sigma) - w_2^1(x, \sigma)|^2 dx d\sigma \\ &+ k \int_0^t \int_0^l |w_1^2(\theta, \sigma) - w_1^1(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma \\ &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \|w_2^2 - w_2^1\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))}^2 \\ &+ k \int_0^t \int_0^l |w_1^2(\theta, \sigma) - w_1^1(\theta, \sigma)|^2 d\theta d\sigma. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Substituindo (4.92) e (4.93) em (4.95)

$$\begin{aligned} |w_3^2(x, t) - w_3^1(x, t)|^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|w_3^2(\cdot, t) - w_3^1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &+ k \int_0^t \|w_3^2(\cdot, \sigma) - w_3^1(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\|w_3^2(\cdot, t) - w_3^1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq kT \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}^2. \quad (4.96)$$

mostrando (4.94) .

Substituindo (4.96) em (4.91)-(4.93), obtemos

$$|w_1^2(a_1, t_1) - w_1^1(a_1, t_1)| \leq k\sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$\|w_2^2 - w_2^1\|_{L^\infty([0,T], H_0^1(\Omega))} \leq k\sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}$$

e

$$\|w_2^2 - w_2^1\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))} \leq k\sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}.$$

Para finalizar, basta notar que

$$|q_1^2(a, t) - q_1^1(a, t)| = |w_1^2(a_1, t_1) - w_1^1(a_1, t_1)|,$$

$$\|q_2^2 - q_2^1\|_{L^\infty([0,T], H_0^1(\Omega))} = \|w_2^2 - w_2^1\|_{L^\infty([0,T], H_0^1(\Omega))}$$

e

$$\|q_2^2 - q_2^1\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))} = \|w_2^2 - w_2^1\|_{L^\infty([0,T], H^2(\Omega))}.$$

□



# UM PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO:

## PROBLEMA 2

Neste capítulo nós estudamos o problema:

$$\min \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[ G(a, u) + \frac{1}{2} \rho_1 c^2 \right] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} v^2 dx dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^2 dx dt \right\} \quad (5.1)$$

sujeito ao sistema de populações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + \left[ \int_{\Omega} m_1(r) H_3(x, t) dx + \mu_1(c) \right] u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v_t(x, t) - \alpha \Delta v(x, t) + m_2(r) v(x, t) + \mu_2(L_1(c)) v(x, t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\ r_t(x, t) - (g(r) - h(L_2(u, v))) r(x, t) = 0 & t \in (0, T), \\ u(0, t) = \int_{\Omega} B(x, t) v(x, t) dx & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T, \\ r(x, 0) = r_0(x) & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

com  $u \in U$  onde o conjunto dos controles é dado como antes por:

$$U = \{v \in L^{\infty}(Q); \gamma_1(a) \leq v(a, t) \leq \gamma_2(a)\}. \quad (5.3)$$

Lembramos também que  $Q = (0, l) \times (0, T)$  e  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ .

Basicamente seguimos os mesmos passos dados ao resolvermos o Problema 1, usando ideias similares. Ou seja, provamos uma condição de otimalidade e em seguida através do Princípio Variacional de Ekeland e do Teorema do Ponto Fixo de Banach mostramos a existência e a unicidade de um controle ótimo. Como antes, observamos que a utilização deste último resultado se justifica devido ao fato do funcional que queremos minimizar não ser necessariamente convexo.

Começamos também caracterizando as derivadas das populações com respeito ao controle.

## 5.1 As derivadas das populações com respeito ao controle

Dado  $w \in T_c(U)$ , considere o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{1t} + z_{1a} + \left[ \int_{\Omega} m_1(r) H_3 dx + \mu_1(c) \right] z_1 = - \int_{\Omega} m'_1(r) z_3 dx u - \mu'_1(c) w u & (a, t) \in Q, \\ z_{2t} - \alpha \Delta z_2 + [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))] z_2(t) = z_1(l, t) - m'_2(r) v z_3 - \mu'_2(L_1(c)) L_1(w) v & (x, t) \in \Omega_T, \\ z_{3t} - [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))] z_3 = -h'(L_2(u, v)) r L_2(z_1, z_2) & (x, t) \in \Omega_T, \\ z_1(0, t) = \int_{\Omega} B(x, t) z_2(x, t) dx & t \in (0, T), \\ z_1(a, 0) = 0 & a \in (0, l), \\ z_2(x, 0) = 0 & x \in \Omega, \\ z_2(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega_T, \\ z_3(x, 0) = 0 & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Definimos

$$\begin{aligned} y_1(a, t) &= \frac{(u^{c+\epsilon w} - u^c)}{\epsilon}(a, t) - z_1(a, t), \\ y_2(x, t) &= \frac{(v^{c+\epsilon w} - v^c)}{\epsilon}(x, t) - z_2(x, t), \\ y_3(x, t) &= \frac{(r^{c+\epsilon w} - r^c)}{\epsilon}(x, t) - z_3(x, t). \end{aligned}$$

Temos que  $(y_1, y_2, y_3)$  é a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{1t} + y_{1a} + [\int_{\Omega} m_1(r)H_3 dx + \mu_1(c)]y_1 = - \int_{\Omega} m'_1(r)y_3 dx u + A_{\epsilon}(a, t) & (a, t) \in Q, \\ y_{2t} - \alpha \Delta y_2 + [m_2(r) + \mu_2(L_1(c))]y_2(x, t) = y_1(l, t) - m'_2(r)v y_3(x) + B_{\epsilon}(x, t) & (x, t) \in \Omega_T, \\ y_{3t} - [g(r) + g'(r)r - h(L_2(u, v))]y_3 = -h'(L_2(u, v))r L_2(y_1, y_2) + C_{\epsilon}(x, t) & (x, t) \in \Omega_T, \\ y_1(0, t) = \int_{\Omega} B(x, t)y_2(x, t)dx, & t \in (0, T), \\ y_1(a, 0) = 0, & a \in (0, l), \\ y_2(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \\ y_2(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega_T, \\ y_3(x, 0) = 0 & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

onde

$$A_{\epsilon} = \left\{ \int_{\Omega} [m_1(r^c) - m_1(r^{c+\epsilon w})] dx + [\mu_1(c) - \mu_1(c + \epsilon w)] \right\} \frac{(u^{c+\epsilon w} - u^c)}{\epsilon} - \int_{\Omega} \left[ \frac{m_1''(\theta)}{2} u^c \frac{(r^{c+\epsilon w} - r^c)}{\epsilon} (r^{c+\epsilon w} - r^c) \right] dx - \frac{\mu_1''(\theta)w^2\epsilon}{2},$$

$$B_{\epsilon} = \left\{ [m_2(r^c) - m_2(r^{c+\epsilon w})] + [\mu_2(L_1(c)) - \mu_2(L_1(c + \epsilon w))] \right\} \frac{(v^{c+\epsilon w} - v^c)}{\epsilon} - \frac{m_2''(\theta)}{2} v^c \frac{(r^{c+\epsilon w} - r^c)}{\epsilon} (r^{c+\epsilon w} - r^c) - \frac{\mu_2''(\theta)}{2} [L_1(w)]^2 \epsilon$$

e

$$C_{\epsilon} = \left\{ \left[ \frac{g''(\theta)\theta + 2g'(\theta)}{2} (r^{c+\epsilon w} - r^c) \right] - [h(L_2(u^{c+\epsilon w}, v^{c+\epsilon w})) - h(L_2(u^c, v^c))] \right\} \times \frac{(r^{c+\epsilon w} - r^c)}{\epsilon} - \frac{h'(\theta)}{2} r^c \left[ L_2 \left( \frac{u^{c+\epsilon w} - u^c}{\epsilon}, \frac{v^{c+\epsilon w} - v^c}{\epsilon} \right) \right] [L_2(u^{c+\epsilon w} - u^c, v^{c+\epsilon w} - v^c)]$$

com  $0 \leq \theta \leq d$ .

Os sistemas (5.4) e (5.5) também possuem, cada um, uma única solução. A prova é feita de maneira inteiramente análoga a do Teorema 4.2 e por essa razão será omitida.

Provaremos o seguinte:

**Teorema 5.1.** *Com as hipóteses (H1)-(H5) e (H7)-(H9)(ver p.74), temos*

$$\begin{aligned} z_1(a, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u^{c+\epsilon w}(a, t) - u^c(a, t)}{\epsilon}, \\ z_2(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v^{c+\epsilon w}(x, t) - v^c(x, t)}{\epsilon}, \\ z_3(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{r^{c+\epsilon w}(x, t) - r^c(x, t)}{\epsilon}. \end{aligned}$$

**Demonstração:**

Note que, pelos Teoremas 4.7 e 4.3,

$$\begin{aligned} |A_\epsilon(a, t)| &\leq k\{\|c + \epsilon w - c\|_{L^\infty(Q)} + |c + \epsilon w - c|\} \frac{\|c + \epsilon w - c\|_{L^\infty(Q)}}{\epsilon} \\ &+ k \frac{\|c + \epsilon w - c\|_{L^\infty(Q)}}{\epsilon} \|c + \epsilon w - c\|_{L^\infty(Q)} + k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B_\epsilon\|_{L^2([0,T],L^2(\Omega))}^2 &\leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{v^{c+\epsilon w}(x, t) - v^c(x, t)}{\epsilon} \right|^2 dx dt \\ &+ k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 \int_0^T \int_\Omega |v^c(x, t)|^2 dx dt + k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 \\ &\leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4. \end{aligned}$$

Além disso,

$$C_\epsilon = D_\epsilon + E_\epsilon,$$

onde

$$\begin{aligned} D_\epsilon &= \left\{ \left[ \frac{g''(\theta)\theta + 2g'(\theta)}{2} (r^{c+\epsilon w} - r^c) \right] - [h(L_2(u^{c+\epsilon w}, v^{c+\epsilon w})) - h(L_2(u^c, v^c))] \right\} \\ &\times \frac{(r^{c+\epsilon w} - r^c)}{\epsilon} \end{aligned}$$

e

$$E_\epsilon = -\frac{h'(\theta)}{2} r^c [L_2\left(\frac{u^{c+\epsilon w} - u^c}{\epsilon}, \frac{v^{c+\epsilon w} - v^c}{\epsilon}\right)] [L_2(u^{c+\epsilon w} - u^c, v^{c+\epsilon w} - v^c)].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 |D_\epsilon| &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k\|w\|_{L^\infty(Q)} \int_0^l |u^{c+\epsilon w}(\theta, t) - u^c(\theta, t)| d\theta \\
 &+ k\|w\|_{L^\infty(Q)} \int_0^l |v^{c+\epsilon w}(x, t) - v^c(x, t)| d\theta \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k\|w\|_{L^\infty(Q)} \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k\|w\|_{L^\infty(Q)} \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T |D_\epsilon| dt &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k\|w\|_{L^\infty(Q)} \int_0^T \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} dt \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k\|w\|_{L^\infty(Q)} \left( \int_0^T \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2.
 \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
 |E_\epsilon| &\leq k\frac{1}{\epsilon} \left( \int_0^l |u^{c+\epsilon w}(\theta, t) - u^c(\theta, t)| d\theta \right)^2 \\
 &+ k\frac{1}{\epsilon} \left( \int_0^l |u^{c+\epsilon w}(\theta, t) - u^c(\theta, t)| d\theta \right) |v^{c+\epsilon w}(x, t) - v^c(x, t)| \\
 &+ k\frac{1}{\epsilon} |v^{c+\epsilon w}(x, t) - v^c(x, t)|^2 \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k\|w\|_{L^\infty(Q)} \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} \\
 &+ k\frac{1}{\epsilon} \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T |E_\epsilon| dt &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k\|w\|_{L^\infty(Q)} \int_0^T \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} dt \\
 &+ k\frac{1}{\epsilon} \int_0^T \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 \\
 &+ k\|w\|_{L^\infty(Q)} \left( \int_0^T \|v^{c+\epsilon w}(\cdot, t) - v^c(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T |C_\epsilon| dt \leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2.$$

Temos

Se  $a \geq t$ ,

$$\begin{aligned} y_1(a, t) &= \int_0^t [A_\epsilon(a - \theta, t - \theta) - \int_\Omega m'_1(r(x, t - \theta)) H_3 y_3(x, t - \theta) dx] u(a - \theta, t - \theta) \\ &\times e^{-\int_0^\theta [\int_\Omega m_1(r(x, t - \sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(a - \sigma, t - \sigma))] d\sigma} d\theta \end{aligned}$$

e se  $a < t$ ,

$$\begin{aligned} y_1(a, t) &= y_1(0, t - a) e^{-\int_0^a [\int_\Omega m_1(r(x, t - \sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(a - \sigma, t - \sigma))] d\sigma} \\ &+ \int_0^a [A_\epsilon(a - \theta, t - \theta) - \int_\Omega m'_1(r(x, t - \theta)) y_3(x, t - \theta) dx] u(a - \theta, t - \theta) \\ &\times e^{-\int_0^\theta [\int_\Omega m_1(r(x, t - \sigma)) H_3 dx + \mu_1(c(a - \sigma, t - \sigma))] d\sigma} d\theta. \end{aligned}$$

Assim, se  $a < t$ ,

$$|y_1(a, t)|^2 \leq k \int_\Omega |y_2(x, t - a)|^2 dx + k \int_0^a |A_\epsilon|^2 d\theta + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \quad (5.6)$$

e se  $a \geq t$ ,

$$|y_1(a, t)|^2 \leq k \int_0^t |A_\epsilon|^2 d\theta + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \quad (5.7)$$

Em particular, essas estimativas também valem para  $a = l$ . Além disso, dados  $t \in [0, T]$  e  $s \in [0, t]$ ,

$$\begin{aligned} \|y_2\|_{L^2([0, T], H^2(\Omega))} + \|y_2(\cdot, s)\|_{H^1_0(\Omega)}^2 &\leq k \int_0^t \int_\Omega |B_\epsilon|^2 dx d\sigma + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\ &+ \int_0^t |y_1(l, \sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por (5.8) e (5.6) e (5.7) temos,

se  $l < t$ ,

$$\begin{aligned}
 |y_1(l, t)|^2 &\leq k \int_0^t |A_\epsilon|^2 d\theta + k \int_0^t \int_\Omega |B_\epsilon|^2 dx d\sigma \\
 &+ k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma + k \int_0^t |y_1(l, \sigma)| d\sigma \\
 &\leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma \\
 &+ k \int_0^t |y_1(l, \sigma)| d\sigma.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Se  $l \geq t$ ,

$$|y_1(l, t)|^2 \leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.$$

Portanto, (5.9) vale para todo  $t \in [0, T]$ . Logo, pela desigualdade de Gronwall,

$$|y_1(l, t)|^2 \leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma. \tag{5.10}$$

Substituindo (5.10) em (5.8), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|y_2\|_{L^\infty([0, T], H^2(\Omega))} + \|y_2(\cdot, s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 \\
 &+ k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

De (5.11), (5.6) (5.7), temos

$$\begin{aligned}
 |y_1(a, t)|^2 &\leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 \\
 &+ k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Por outro lado,

$$y_3(x, t) = \int_0^t \{C_\epsilon - h'(L_2(u, v))rL_2(y_1, y_2)\} e^{-\int_\sigma^t h(L_2(u, v)) - g'(r)r - g(r)d\xi} d\sigma.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 |y_3(x, t)| &\leq k \int_0^t |C_\epsilon| d\sigma + k \int_0^t |L_2(y_1, y_2)| dx d\sigma \\
 &\leq k \int_0^t |C_\epsilon| d\sigma + k \int_0^t \int_0^l |y_1(\theta, \sigma)| d\theta d\sigma \\
 &\quad + k \int_0^t |y_2(x, \sigma)|^2 d\sigma \\
 &\leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2 + k \int_0^t \int_0^l |y_1(\theta, \sigma)| d\theta d\sigma \\
 &\quad + k \int_0^t \|y_2(\cdot, \sigma)\|_{H^2(\Omega)} d\sigma.
 \end{aligned}$$

Por (5.11) e (5.12), temos

$$|y_3(x, t)|^2 \leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma,$$

e portanto,

$$\|y_3(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4 + k \int_0^t \|y_3(\cdot, \sigma)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\sigma.$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\|y_3(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq k\epsilon^2 \|w\|_{L^\infty(Q)}^4,$$

e assim,

$$\|y_3\|_{C([0,T], L^\infty(\Omega))} \leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}. \tag{5.13}$$

Substituindo (5.13) em (5.11) e (5.12), obtemos

$$|y_1(a, t)| \leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2,$$

$$\|y_2\|_{L^2([0,T], H^2(\Omega))} \leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2$$

e

$$\|y_2\|_{L^\infty([0,T],H_0^1(\Omega))} \leq k\epsilon \|w\|_{L^\infty(Q)}^2.$$

Portanto, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos o resultado desejado. □

## Condições de otimalidade para o Problema 2

**Corolário 5.1.** *Com as hipóteses do Teorema 5.1, se existir um controle ótimo  $c^*$ , então,  $\forall \omega \in T_{c^*}(U)$ , temos*

$$\Psi(c^*) = \int_0^T \int_0^l [G_y(a, u^{c^*})z_1 + \rho_1 c^* \omega] dadt + \rho_2 \int_0^T \int_\Omega v^{c^*} z_2 dxdt + \rho_3 \int_0^T \int_\Omega r^{c^*} z_3 dt \geq 0$$

onde

$$\begin{aligned} z_1(a, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u^{c^* + \lambda \omega}(a, t) - u^{c^*}(a, t)}{\lambda}, \\ z_2(x, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{v^{c^* + \lambda \omega}(x, t) - v^{c^*}(x, t)}{\lambda}, \\ z_3(x, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{r^{c^* + \lambda \omega}(x, t) - r^{c^*}(x, t)}{\lambda}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

### Demonstração:

Dado  $\forall \omega \in T_{c^*}(U)$ , se  $c^*$  é o controle ótimo, então

$$\Psi(c^*) \leq \Psi(c^* + \lambda \omega), \forall 0 < \lambda < 1.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c^*}) + \frac{1}{2}\rho_1(c^*)^2] dadt + \frac{1}{2}\rho_2 \int_0^T \int_\Omega (v^{c^*})^2 dxdt + \frac{1}{2}\rho_3 \int_0^T \int_\Omega (r^{c^*})^2 dxdt \\ & \leq \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c^* + \lambda \omega}) + \frac{1}{2}\rho_1(c^* + \lambda \omega)^2] dadt + \frac{1}{2}\rho_2 \int_0^T \int_\Omega (v^{c^* + \lambda \omega})^2 dxdt \\ & + \frac{1}{2}\rho_3 \int_0^T \int_\Omega (r^{c^* + \lambda \omega})^2 dxdt. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\int_0^T \int_0^l \left[ \frac{G(a, u^{c^*+\lambda\omega}) - G(a, u^{c^*})}{\lambda} + \rho_1 c^* \omega + \lambda \omega \right] da dt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{(v^{c^*+\lambda\omega})^2 - (v^{c^*})^2}{\lambda} dx dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{(r^{c^*+\lambda\omega})^2 - (r^{c^*})^2}{\lambda} dx dt \geq 0.$$

Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{(v^{c^*+\lambda\omega})^2 - (v^{c^*})^2}{\lambda} - 2v^{c^*} z_2 dx dt \right| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |(v^{c^*+\lambda\omega} + v^{c^*})| \left| \frac{(v^{c^*+\lambda\omega} - v^{c^*})}{\lambda} - z_2 \right| dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} |z_2| |(v^{c^*+\lambda\omega} - v^{c^*})| dx dt \\ &\leq \left( \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{(v^{c^*+\lambda\omega} - v^{c^*})}{\lambda} - z_2 \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \int_0^T \int_{\Omega} |(v^{c^*+\lambda\omega} + v^{c^*})|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left( \int_0^T \int_{\Omega} |z_2|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \int_0^T \int_{\Omega} |(v^{c^*+\lambda\omega} - v^{c^*})|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, pelos Teoremas 4.7 e 4.3,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{(v^{c^*+\lambda\omega})^2 - (v^{c^*})^2}{\lambda} - 2v^{c^*} z_2 dx dt \right| &\leq k \left( \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{(v^{c^*+\lambda\omega} - v^{c^*})}{\lambda} - z_2 \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ k \left( \int_0^T \int_{\Omega} |z_2|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^\infty(Q)} \lambda. \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{(v^{c^*+\lambda\omega})^2 - (v^{c^*})^2}{\lambda} - 2v^{c^*} z_2 dx dt \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow 0. \quad (5.15)$$

Por outro lado, pela regra da cadeia, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G(a, u^{c^*+\lambda\omega}) - G(a, u^{c^*})}{\lambda} = G_y(a, u^*) z_1$$



correspondente a  $c := c^*$ , então

$$c^*(a, t) = P\left\{\frac{1}{\rho_1}[\mu'_1(c^*(a, t))u^*(a, t)q_1^*(a, t) + \int_{\Omega} H_0(a, t)\mu'_2(L_1(c^*(a, t)))v^*(x, t)q_2^*(x, t)dx]\right\}$$

onde  $P : L^1(Q) \rightarrow U$  dada por

$$P(f) = \begin{cases} f(a, t) & \text{se } \gamma_1(a) \leq f(a, t) \leq \gamma_2(a), \\ \gamma_1(a) & \text{se } f(a, t) \leq \gamma_1(a), \\ \gamma_2(a) & \text{se } f(a, t) \geq \gamma_2(a), \end{cases} \quad (5.17)$$

é a projeção de  $L^1(Q)$  sobre  $U$ .

### Demonstração:

Como fizemos no Teorema 3.2, no Capítulo 3, basta provarmos que

$$\int_0^T \int_0^l [\mu'_1(c^*)u^*q_1^* + \int_{\Omega} H_0\mu'_2(L_1(c^*))v^*q_2^*dx - \rho_1c^*]\omega dadt \leq 0, \forall \omega \in T_{c^*}(U). \quad (5.18)$$

Voltemos ao sistema (5.4), com  $c = c^*$ . Multiplicando a primeira equação do sistema (5.4) por  $q_1^*$  e integrando por partes, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l -(q_{1t}^* + q_{1a}^*)z_1^* + \left[ \int_{\Omega} m_1(r^*)H_4dx + \mu_1(c^*) \right] z_1^*q_1^* dadt = \\ \int_0^T \int_0^l - \int_{\Omega} m'_1(r^*)z_3^*dxu^* - \mu'_1(c^*)\omega u^*q_1^* dadt \\ \int_0^T -q_1^*(l, t)z_1^*(l, t) + q_1^*(0, t)z_1^*(0, t) dt \\ + \int_0^l -q_1^*(a, T)z_1^*(a, T) + q_1^*(a, 0)z_1^*(a, 0) da. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (5.16) por  $z_1^*$  e substituindo em (5.19), obtemos

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_0^l G_y(a, u^*)z_1^* dadt = \int_0^T \int_0^l \int_{\Omega} m'_1(r^*)u^*z_3^*q_1^*dx + \mu'_1(c^*)\omega u^*q_1^* dadt \\ - \int_0^T \int_0^l \int_{\Omega} H_2h'(L_2(u^*, v^*))r^*q_3^*z_1^*dx dadt + \int_0^T \int_{\Omega} z_1^*(l, t)q_2^*(x, t) dx dt \\ - \int_0^T \int_{\Omega} B(x, t)q_1^*(0, t)z_2^*(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (5.4) por  $q_2^*$  e integrando por partes, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} -(q_2^{*'} + \alpha \Delta q_2) z_2^* + [m_2(r) + \mu_2(L_1(c^*))] z_2^* q_2^* dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} z_1^*(l, t) q_2^* - m_2'(r^*) v^* z_3^* q_2^* \\ &- \mu_2'(L_1(c^*)) L_1(\omega) v^* q_2^* dx dt + \int_{\Omega} -q_2^*(x, T) z_2^*(x, T) + q_2^*(x, 0) z_2^*(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Multiplicando a segunda equação de (5.16) por  $z_2$  e substituindo em (5.21), temos

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} v^* z_2^* dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} B(x, t) q_1^*(0, t) z_2^* dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} z_1^*(l, t) q_2^* dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \mu_2'(L_1(c^*)) L_1(\omega) v^* q_2^* dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} m_2'(r^*) v^* z_3^* q_2^* dx dt \\ &- \int_0^T \int_0^l \int_{\Omega} H_2 h'(L_2(u^* v^*)) r^* q_3^* z_2^* dx d\theta dt \end{aligned} \quad (5.22)$$

Multiplicando a terceira equação do sistema (5.4) por  $q_3^*$  e integrando por partes, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} -q_3^{*'} z_3^* - [g(r^*) + g'(r^*) r^* - h(L_2(u^*, v^*))] z_3^* q_3^* dx dt &= \int_{\Omega} -q_3^*(x, T) z_3^*(x, T) \\ &+ q_3^*(x, 0) z_3^*(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} h'(L_2(u^*, v^*)) r^* L_2(z_1^*, z_2^*) q_3^* dx dt. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Multiplicando a terceira equação de (5.16) por  $z_3$  e substituindo em (5.23), temos

$$\begin{aligned} -\rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^* z_3^* dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^l m_1'(r^*) u^* q_1^* z_3^* d\theta dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} m_2'(r^*) v^* q_2^* z_3^* dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} h'(L_2(u^*, v^*)) r^* L_2(z_1^*, z_2^*) q_3^* dx dt. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} -\rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^* z_3^* dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^l m_1'(r^*) u^* q_1^* z_3^* d\theta dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} m_2'(r^*) v^* q_2^* z_3^* dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^l H_1 h'(L_2(u^*, v^*)) r^* z_1^* q_3^* d\theta dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^l H_2 h'(L_2(u^*, v^*)) r^* z_2^* q_3^* d\theta dx dt. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Assim, somando (5.24), (5.22) e (5.20), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \int_{\Omega} \mu'_1(c^*) \omega u^* q_1^* dx dadt + \int_0^T \int_{\Omega} \mu'_2(L_1(c^*)) L_1(\omega) v^* q_2^* dx dt = \\ & - \int_0^T \int_0^l G_y(a, u^*) z_1^* dadt - \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} v^* z_2^* dt - \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^* z_3^* dt. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Adicionando  $-\rho_1 \int_0^T \int_0^l c^* \omega dadt$ , usando o Corolário 11.1 e lembrando que

$$L_1(\omega) = \int_0^l H_0(a, t) \omega(a, t) da, \quad (5.26)$$

temos finalmente que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l [\mu'_1(c^*) u^* q_1^* + \int_{\Omega} \mu'_2(L_1(c^*)) H_0 v^* q_2^* dx - \rho_1 c^*] \omega dadt &= - \left[ \int_0^T \int_0^l G_y(a, u^*) z_1^* + \rho_1 c^* \omega dadt \right. \\ &+ \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} v^* z_2^* dx dt \\ &+ \left. \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^* z_3^* dx dt \right] \leq 0, \end{aligned}$$

mostrando (5.18).

□

## 5.2 Existência do controle ótimo e condições de otimalidade

**Proposição 5.1.** *Seja  $\Psi : L^1(Q) \rightarrow (-\infty, \infty]$  definido por*

$$\Psi(c) = \begin{cases} \int_0^T \int_0^l [G(a, u(a, t)) + \frac{1}{2} \rho_1 c^2(a, t)] dadt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} v^2 dx dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^2 dx dt & c \in U, \\ +\infty & c \notin U. \end{cases}$$

*O funcional  $\Psi$  é semicontínuo e limitado inferiormente.*

**Demonstração:** Basta mostrarmos que o funcional  $\Psi$  é contínuo em  $U$ . O restante da demonstração seguirá os mesmos passos do que foi feito no Proposição 3.1, do Capítulo 3. Pelo Teorema 4.6,

a)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_0^l [G(a, u_2(a, t)) - G(a, u_1(a, t))] dadt \right| &\leq k \int_0^T \int_0^l |u_2(a, t) - u_1(a, t)| dadt \\ &\leq k \|c_2 - c_1\|_{L^2(Q)} \leq k \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho_1 c_2^2(a, t) - \frac{1}{2} \rho_1 c_1^2(a, t) \right] dadt \right| &\leq \int_0^T \int_0^l \frac{1}{2} \rho_1 |c_2(a, t) - c_1(a, t)| \\ &\quad \times |c_2(a, t) + c_1(a, t)| dadt \\ &\leq k \int_0^T \int_0^l \rho_1 |c_2(a, t) - c_1(a, t)| dadt \\ &\leq k \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2(x, t) - \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2(x, t) \right] dxdt \right| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_2 |v_2(x, t) - v_1(x, t)| \\ &\quad \times |v_2(x, t) + v_1(x, t)| dxdt \\ &\leq \left( \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_2 |v_2(x, t) - v_1(x, t)|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_2 |v_2(x, t) + v_1(x, t)|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k \left( \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_2 |v_2(x, t) - v_1(x, t)|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \rho_3 r_2^2(x, t) - \frac{1}{2} \rho_1 r_1^2(x, t) \right] dxdt \right| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_2 |r_2(x, t) - r_1(x, t)| \\ &\quad \times |r_2(x, t) + r_1(x, t)| dxdt \\ &\leq k \|r_2 - r_1\|_{C([0, T], L^{\infty}(\Omega))} \\ &\leq k \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por a), b), c) e d), temos

$$|\Psi(c_2) - \Phi(c_1)| \leq k \|c_2 - c_1\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.27)$$

Isso mostra a continuidade de  $\Psi$  em  $U$ . □

A Proposição 5.1 nós garante que  $\Psi$  satisfaz as hipóteses do Princípio Variacional de Ekeland. Logo,  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $c_\epsilon \in U$  com

$$\begin{cases} \Psi(c_\epsilon) \leq \inf \Psi(c) + \epsilon, & c \in U, \\ \Psi(c_\epsilon) \leq \inf \{\Psi(c) + \epsilon \|c - c_\epsilon\|_{L^1(Q)}\} & c \in U. \end{cases} \quad (5.28)$$

Passemos agora ao seguinte resultado.

**Teorema 5.3.** *Seja  $c_\epsilon$  dado por (5.28). Se  $q^\epsilon$  é a solução do problema (4.2) correspondente a  $c := c_\epsilon$ , então*

$$c_\epsilon(a, t) = P \left\{ \frac{1}{\rho_1} [\mu'_1(c_\epsilon(a, t)) u^{c_\epsilon}(a, t) q_1^{c_\epsilon}(a, t) + \int_{\Omega} \mu'_2(L_1(c_\epsilon(a, t))) H_0(a, t) v^{c_\epsilon}(x, t) q_2^{c_\epsilon}(x, t) dx + \epsilon \theta_\epsilon] \right\}$$

onde  $\theta$  é como na Proposição 1.5.

**Demonstração:**

Sejam  $\omega \in T_{c_\epsilon}(U)$ , e  $\epsilon > 0$ . Temos

$$c_\epsilon + \lambda \omega \in U, \forall 0 < \lambda < 1.$$

Logo, por (5.28),

$$\Psi(c_\epsilon) \leq \Psi(c_\epsilon + \lambda \omega) + \lambda \epsilon \|\omega\|_{L^1(Q)},$$

$\forall \epsilon > 0$  e  $\forall 0 < \lambda < 1$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c_\epsilon}) + \frac{1}{2} \rho_1 c_\epsilon^2] dadt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} (v^{c_\epsilon})^2 dxdt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} (r^{c_\epsilon})^2 dxdt \\ & \leq \int_0^T \int_0^l [G(a, u^{c_\epsilon + \lambda \omega}) + \frac{1}{2} \rho_1 (c_\epsilon + \lambda \omega)^2] dadt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} (v^{c_\epsilon + \lambda \omega})^2 dxdt \\ & + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} (r^{c_\epsilon + \lambda \omega})^2 dxdt + \lambda \epsilon \|\omega\|_{L^1(Q)}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \left[ \frac{G(a, u^{c_\epsilon + \lambda\omega}) - G(a, u^{c_\epsilon})}{\lambda} + \rho_1 c_\epsilon \omega + \lambda\omega \right] dadt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_\Omega \frac{(v^{c_\epsilon + \lambda\omega})^2 - (v^{c_\epsilon})^2}{\lambda} dxdt \\ & \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_\Omega \frac{(r^{c_\epsilon + \lambda\omega})^2 - (r^{c_\epsilon})^2}{\lambda} dxdt + \epsilon \|\omega\|_{L^1(Q)} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Passando limite de  $\lambda \rightarrow \infty$ , como no Corolário 5.1,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [G_y(a, u^{c_\epsilon}) z_1 + \rho_1 c_\epsilon \omega] dadt + \rho_2 \int_0^T \int_\Omega v^{c_\epsilon} z_2 dxdt + \rho_3 \int_0^T \int_\Omega r^{c_\epsilon} z_3 dxdt \\ & + \epsilon \|\omega\|_{L^1(Q)} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Usando (5.30) e procedendo como no Teorema 5.2, obtemos

$$\int_0^T \int_0^l [-(\mu'_1(c_\epsilon) u^{c_\epsilon} q_1^{c_\epsilon} + \int_\Omega \mu'_2(L_1(c_\epsilon)) H_0 v^{c_\epsilon} q_2^{c_\epsilon} dx) + \rho_1 c_\epsilon] \omega dadt + \epsilon \|\omega\|_{L^1(Q)} \geq 0.$$

Pela proposição 1.5,

$$-\rho_1 c_\epsilon + (\mu'_1(c_\epsilon) u^{c_\epsilon} q_1^{c_\epsilon} + \int_\Omega \mu'_2(L_1(c_\epsilon)) H_0 v^{c_\epsilon} q_2^{c_\epsilon} dx) \in N_{c_\epsilon}(U).$$

De modo análogo ao Teorema 5.2, obtemos

$$c_\epsilon(a, t) = P \left\{ \frac{1}{\rho_1} [\mu'_1(c_\epsilon(a, t)) u^{c_\epsilon}(a, t) q_1^{c_\epsilon}(a, t) + \int_\Omega \mu'_2(L_1(c_\epsilon(a, t))) H_0(a, t) v^{c_\epsilon}(x, t) q_2^{c_\epsilon}(x, t) dx + \epsilon \theta_\epsilon] \right\}.$$

□

Enunciamos a seguir o teorema de existência e unicidade para o Problema 2:

**Teorema 5.4** (Existência e Unicidade). *Suponhamos que as hipóteses (H1)-(H9) (ver p. 74) sejam satisfeitas. Então existe uma função  $C(M, T)$ , limitada para  $M$  e  $T$  limitado, tal que, para  $\|u_0\|_1, \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$  e*

$$\rho_1^{-1}(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})C(M, T)\sqrt{T} < 1,$$

o problema (5.1)-(5.3) terá uma única solução  $c^* \in U$ .

**Demonstração:**

A demonstração seguirá em três etapas:

a) **Unicidade**

Mostraremos que o funcional

$$F : U \subset L^\infty(Q) \rightarrow U$$

definido por

$$F(c) = P\left(\frac{1}{\rho_1}J(c)\right)$$

onde

$$J(c)(a, t) = \mu'_1(c(a, t))u(a, t)q_1(a, t) + \int_{\Omega} H_0(a, t)\mu'_2(L_1(c(a, t)))v(x, t)q_2(x, t)dx$$

possui um único ponto fixo.

Ora, dados  $c_2, c_1 \in U$ , temos

$$\begin{aligned} \rho_1|F(c_2) - F(c_1)| &\leq |\mu'_1(c_2) - \mu'_1(c_1)||u_2||q_1^2| + |u_2 - u_1||\mu'_1(c_1)||q_1^2| \\ &+ |q_1^2 - q_1^1||\mu'_1(c_1)||u_1| + |\mu'_2(L_1(c_2)) - \mu'_2(L_1(c_1))| \int_{\Omega} |v_2||q_2^2||H_0|dx \\ &+ \int_{\Omega} |v_2 - v_1||q_2^2|dx|H_0||\mu'_2(L_1(c_1))| + \int_{\Omega} |q_2^2 - q_2^1||v_1|dx|\mu'_2(L_1(c_1))| \end{aligned} \quad (5.31)$$

Passemos a estimar cada um dos termos à direita da expressão anterior.

Pelos Teoremas 4.7, 4.8, 4.3 e 4.5, segue que

$$|\mu'_1(c_2) - \mu'_1(c_1)||u_2||q_1^2| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\sqrt{T}\|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$\|u_2 - u_1\| \|\mu'_1(c_1)\| |q_1^2| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$|q_1^2 - q_1^1| \|\mu'_1(c_1)\| \|u_1\| \leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$\begin{aligned} |\mu'_2(L_1(c_2)) - \mu'_2(L_1(c_1))| \int_{\Omega} |v_2| |q_2^2| |H_0| dx &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \left( \int_{\Omega} |v_2 - v_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \int_{\Omega} |q_2^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq k \sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_2 - v_1| |q_2^2| dx |H_0| \|\mu'_2(L_1(c_1))\| &\leq k \left( \int_{\Omega} |v_2 - v_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |q_2^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |q_2^2 - q_2^1| |v_1| dx \|\mu'_2(L_1(c_1))\| &\leq k \left( \int_{\Omega} |v_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |q_2^2 - q_2^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando  $M \in \mathbb{R}$  com  $\|u_0\|_{L^\infty(0,t)}, \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$ , usando os resultados anteriores em (5.31), temos que

$$|F(c_2)(a, t) - F(c_1)(a, t)| \leq \rho^{-1} C(M, T) (\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \sqrt{T} \|c_2 - c_1\|_{L^\infty(Q)}.$$

para uma adequada função  $C(M, T)$  limitada para  $M$  e  $T$  limitados. Isso mostra que  $F$  possui um único ponto fixo se

$$\rho^{-1} C(M, T) (\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \sqrt{T} < 1.$$

Nestas condições, existe um único  $\bar{c} \in U$  tal que

$$\bar{c} = F(\bar{c}) = P\left(\frac{1}{\rho_1} J(\bar{c})\right).$$

Logo, por (3.40) e pelo Teorema 5.2, se existir um controle ótimo do Problema 1, este será um ponto fixo de  $F$  e portanto será único.

**b) Existência**

Note que

$$c_\epsilon = P\left[\frac{1}{\rho_1}(J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right].$$

Assim, temos

$$|F(c_\epsilon) - P\left[\frac{1}{\rho_1}(J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \leq |P\left[\frac{1}{\rho_1}J(c_\epsilon)\right] - P\left[\frac{1}{\rho_1}(J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \leq \frac{\epsilon|\theta_\epsilon|}{\rho_1}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} |\bar{c} - c_\epsilon| &= |F(\bar{c}) - P\left[\frac{1}{\rho_1}(J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \leq |F(\bar{c}) - F(c_\epsilon)| + |F(c_\epsilon) - P\left[\frac{1}{\rho_1}(J(c_\epsilon) + \epsilon\theta_\epsilon)\right]| \\ &\leq \rho^{-1}C(M, T)(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\sqrt{T}|\bar{c} - c_\epsilon| + \frac{\epsilon}{\rho_1}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ou seja,

$$\|\bar{c} - c_\epsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq [1 - \rho^{-1}C(M, T)(\|u_0\|_{L^\infty(0,t)} + \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)})\sqrt{T}]^{-1}\rho_1^{-1}\epsilon.$$

Logo,

$$c_\epsilon \longrightarrow \bar{c} \text{ em } L^\infty(Q).$$

Em particular,

$$c_\epsilon \longrightarrow \bar{c} \text{ em } L^1(Q).$$

Por outro lado, pelo Princípio Variacional de Ekeland

$$\Psi(c_\epsilon) \leq \inf \Psi(c) + \epsilon.$$

Assim,

$$\Psi(\bar{c}) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \Psi(c_\epsilon) \leq \inf \Psi(c) \leq \Psi(\bar{c}).$$

Portanto,

$$\Psi(\bar{c}) = \inf \Psi(c). \quad (5.33)$$

□



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Fizemos aqui alguns breves comentários acerca dos resultados obtidos e possíveis trabalhos futuros.

No capítulo 3, mostramos que o Problema 1 possui uma única solução. Para tanto, foi necessário impormos uma certa condição de pequenez (veja Teorema 3.4). Conjecturamos que tal condição é exigida devido a não convexidade do funcional lá considerado:

$$\int_0^T \int_0^l \left[ G(a, u) + \frac{1}{2} \rho_1 c^2 \right] dadt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T v^2 dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T r^2 dt. \quad (6.1)$$

Dessa forma esperamos que se tal funcional for trocado por outro funcional convexo do tipo

$$\int_0^T \int_0^l \left[ u^2 + \frac{1}{2} \rho_1 c^2 \right] dadt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T v^2 dt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T r^2 dt \quad (6.2)$$

preservando o mesmo sistema de populações, possamos obter um único controle ótimo, porém sem a necessidade de impor condição alguma de pequenez.

Para finalizar, enunciamos dois outros problemas que futuramente pretendemos analisar:

$$\min \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[ G(a, u) + \frac{1}{2} \rho_1 c^2 \right] dadt + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^T \int_{\Omega} v^2 dxdt + \frac{1}{2} \rho_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^2 dxdt \right\} \quad (6.3)$$

sujeito ao sistema de populações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + [\int_{\Omega} m_1(r)H_3(x, t)dx + \mu_1(c)]u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v_t(x, t) - \alpha\Delta v(x, t) + m_2(r)v(x, t) + \mu_2(L_1(c))v(x, t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\ r_t(x, t) - (g(r) - h(L_2(u, v)))r(x, t) = 0 & t \in (0, T), \\ u(0, t) = \int_{\Omega} B(x, t)v(x, t)dx & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ v(x, t) = \omega(x, t) & (x, t) \in \partial\Omega_T, \\ r(x, 0) = r_0(x) & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Note que agora temos uma condição de Dirichlet não-homogênea. Além destes, também pretendemos considerar o Problema 2 com condições de Newman. Ou seja, minimizar o funcional (6.3) sujeito ao sistema de populações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(a, t) + u_a(a, t) + [\int_{\Omega} m_1(r)H_3(x, t)dx + \mu_1(c)]u(a, t) = 0 & (a, t) \in Q, \\ v_t(x, t) - \alpha\Delta v(x, t) + m_2(r)v(x, t) + \mu_2(L_1(c))v(x, t) = u(l, t) & t \in (0, T), \\ r_t(x, t) - (g(r) - h(L_2(u, v)))r(x, t) = 0 & t \in (0, T), \\ u(0, t) = \int_{\Omega} B(x, t)v(x, t)dx & t \in (0, T), \\ u(a, 0) = u_0(a) & a \in (0, l), \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) = \omega(x, t) & (x, t) \in \partial\Omega_T, \\ r(x, 0) = r_0(x) & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

em que  $\nu$  é a normal em  $\Omega$ .

# BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Anita, S., Iannelli, M., Kim, M.-Y. and Park, E.-J., Optimal Harvesting for Periodic Age-Dependent Population Dynamics, SIAM J. Appl. Math, Vol 58, No 5, pp 1648-1666.
- [3] Anita, S., Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
- [4] Barbu, V. and Iannelli, M., Optimal control of populaton dynamics, Journal of Optimizaton and Aplications, 102, 1999, pp. 1-14.
- [5] Barbu, V., Mathematical Methods in the Optimization of Differential Systems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1995.
- [6] Calsina, A., and Elidrissi, O., Asymptotic Behaviour of a Semilinear Age-Structured Population Model with a Dynamics for the Resource, Mathematical and Computer Modelling, vol. 35, pp. 403-427, 2002.
- [7] Evans, Lawrence, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, USA 2008.
- [8] Figueiredo, D. G., Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours. Berlim: Springer, 1989. 97 p.
- [9] Folland, Gerald B., Modern Techniques and Their Applications, Second Edition, John Wiley & Sons, INC, New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 1999.
- [10] Hale, Jack K., Ordinary Differential Equations, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1980.

- [11] Iório, V., Um Curso de Graduação, 2.ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [12] Kreyszig, Erwin K., Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley Classics Library, 1989.
- [13] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N., Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, 1991.
- [14] Medeiros, L.A., Miranda, M.M., Espaços de Sobolev e Iniciação ao Problemas Elípticos Não Homogêneos, Rio de Janeiro, UFRJ. IM, 2000.
- [15] Medeiros, L.A., Rivera, P. H., Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos 9, Instituto de Matemática-UFRJ, 1975.
- [16] Medeiros, L.A., Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações, Textos de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática-UFRJ, 1983.