Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Séries Condicionalmente Convergentes em Espaços de Banach

por

Fernando dos Santos Silva†
Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: **Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos**

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Séries Condicionalmente Convergentes em Espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Fernando dos Santos Silva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de Setembro de 2002.

Mário C. Matos

Prof. Dr. **Mário Carvalho de Matos.**

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço.

Prof. Dr. Ary O. Chiacchio.

Prof. Dra. Maria Sueli Roversi.**(suplente)**

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica.**(suplente)**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **IMECC**, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Silva, Fernando dos Santos

Si38s Séries condicionalmente convergentes em espaços de Banach / Fernando dos Santos Silva. -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Mário Carvalho de Matos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Análise funcional. 2. Banach, Espaços de. 3. Seqüências (Matemática). 4. Séries (Matemática). I. Matos, Mário Carvalho de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de setembro de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____
Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

____
Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

____
Prof (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

AGRADECIMENTOS

À Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, ao Instituto de Matemática, por ter permitido realizar meus estudos de Pós-Graduação.

Ao professor Dr. José Adonai Pereira Seixas por sua comunicatividade.

A meus colegas de sala, em especial Thiciany Matsudo Iwano, Fernando Múcio Bando, Gilmar Fernandes da Silva, Humberto Luiz Talpo, Karine Bobadilha, Kuo Po Ling e, é claro, a todos os alagoanos presentes neste instituto etc..

Da mesma forma, mas de maneira indireta, Rogério Casagrande o melhor companheiro do "Latex". Amizade e solicitude foram as características que sempre marcaram o nosso relacionamento.

Gostaria de agradecer carinhosamente a Ana Paula da C. Perovano minha futura esposa e a Cleusiane Vieira da Silva minha grande amiga.

A outras pessoas, talvez eu deva mais desculpas do que agradecimentos, principalmente por eu estar quase sempre ausente.

Finalmente, quero agradecer de maneira especial ao Professor Dr. Mário Carvalho de Matos, pela oportunidade, paciência e confiança depositada na minha vida acadêmica. Seu rigor e disciplina, propiciou-me incentivo e fascínio pela matemática.

À minha Mãe

Maria Luiza dos Santos

À minha Noiva

Ana Paula da C. Perovano

"Em toda ação humana, quase por necessidade, ocorrem erros; porém onde surgem mais facilmente e são mais numerosos e com diferentes formas, é na impressão dos livros; e não posso imaginar outra coisa onde possa haver mais. E parece-me com a luta de Hércules com a Hydra de cinqüenta cabeças: por um lado, assim como quando seu valor e força, cortava uma, nasciam duas, da mesma forma, no entanto com conhecimento e diligência se corrige um erro, quase sempre surgem não dois mas três ou quatro, com freqüência e maior importância do que tinha o primeiro."

Declaração extraída do tipógrafo Cavallo da obra de Achille Fazio Alessandro, impressa em Veneza em 1563.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o conjunto das somas dos rearranjamentos de séries condicionalmente convergentes num espaço de Banach.

Exibimos séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes em espaços de Banach de dimensão infinita. Relacionamos convergência fraca com convergência incondicional de séries. O conjunto das somas dos rearranjamentos de uma série condicionalmente convergente é linear nos espaços de Banach de dimensão finita.

Para um espaço de Banach de dimensão infinita isto pode não ser verdade. Damos exemplos de tais conjuntos que não são convexos.

ABSTRACT

In this work, we study the set of the all sums of the convergent rearranjaments of series in a Banach spaces.

For infinite dimensional Banach spaces we give examples of unconditionally convergent series that are not absolute summing. We study the relations between weak convergence and unconditional convergence of series. The set of the sums of the rearranjaments of a conditionally convergent series is linear in a finite dimensional Banach spaces.

For an infinite dimensional Banach spaces this is not true and we give examples of such sets that are non convex.

Conteúdo

Lista de Símbolos

- $\mathbb{N}$ — $\{1, 2, \cdots\}$
- $\mathbb{N}_0$ — $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{R}$ — Corpo dos números Reais.
- $\mathbb{C}$ — Corpo dos números complexos.
- E, F — Espaços de Banach reais.
- E' — Dual topológico de E.
- $\sigma(E, E')$ — Topologia fraca de E.
- $\overline{B}_r(a)$ — Bola fechada de raio r e com centro em a.
- $S_r(E)$, $S_r(a)$ — Esferas de raio r e com centro na origem e a respectivamente.
- ℓ_p — Espaço das seqüências p-somáveis.
- c_0 — Espaço das seqüências que tendem a zero.
- σ, τ — Permutações de $\mathbb{N}$.
- $span[A]$ — Todas as combinações lineares finitas de elementos de A
- $A \backslash B$ — A menos o conjunto B.
- $\cong$ — Isometricamente isomorfo.
- $\sup X$ — Indica o supremo do conjunto X. Se $X = \{x_1, x_2, ...\}$, indicamos o supremo de X por $\sup\limits_n x_n$.
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — Indica uma seqüência. Quando não houver dúvida com respeito ao índice indicamos simplesmente por (x_n).
- $C([a, b])$ — Conjunto das funções reais contínuas $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $\wp([a, b]; \mathbb{R})$ — Conjunto das funções polinomiais $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Introdução

O que acontece com o conjunto S das somas de todos os rearranjamentos convergentes de uma dada série condicionalmente convergente no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$? No caso $n = 1$, o Teorema de Riemann garante que esse conjunto é igual a $\mathbb{R}$. Esta propriedade não é verdade em geral para séries de números complexos. Podemos ter uma série condicionalmente convergente que nunca converge para um número real. Por exemplo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{k}i\right).$$

Ainda mais, no plano euclideano o conjunto das somas de todos os possíveis rearranjamentos convergentes pode ser um ponto, uma reta ou o plano. O resultado pode ser generalizado para $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, com a métrica euclideana. Este é o Teorema de Lèvy-Steinitz. Tal conjunto é um subespaço transladado de dimensão $k \geq 1$.

A demonstração do caso geral foi dada por Lèvy em 1905, [DJT, Cap. 1,p. 19-22], que fez uma demonstração não trivial para $n \geq 3$, mas contendo algumas falhas. E. Steinitz, em 1913, fez a prova correta. O resultado ficou conhecido como Teorema de Lèvy-Steinitz. Vamos desenvolver detalhadamente no primeiro capítulo o trabalho de P. Rosenthal [Rose] cuja demonstração é quase elementar, necessitando apenas conhecimentos rudimentares do espaço $\mathbb{R}^n$.

Muitos matemáticos poloneses gostavam de se reunir no "Scottish café" e discutir problemas de matemática. Os fundamentos da moderna análise funcional se basearam em muitas discussões no Scottish café. Na época eles escreveram notas, que se tornaram conhecidas com o nome de Scottish Book, onde apareceram diversos problemas difíceis, alguns deles não resolvidos até hoje.

No problema 106 desse "Scottish Book", S. Banach conjecturou que as possíveis somas de todos os rearranjamentos de uma série condicionalmente convergente num espaço de dimensão infinita seria um transladado de um subespaço, como no caso de dimensão finita. Quase que imediatamente Marcinkiewicz deu um contra-exemplo (vide página 53). Esse exemplo foi redescoberto por E. M. Nikishin em 1970. Aqui vamos apresentar um artigo de V.M. Kadets [Kade] sobre esse assunto.

Em qualquer espaço vetorial de Banach, convergência absoluta de séries implica em convergência incondicional. É uma das primeiras conseqüências das propriedades de espaços normados completos observadas por S. Banach em sua tese de doutorado em 1922. A validade da recíproca é indagada por Banach em 1932 numa monografia e esta questão está incluída no famoso Scottish Book. Um contra exemplo no espaço de Banach clássico ℓ_1 é dado em 1947 por M. S. Macphail. Em 1950 A. Dvoretzky e C. A. Rogers num artigo esclarecem: somente vale a recíproca se a dimensão do espaço for finita.

Ao contrário do que acontece no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, em qualquer espaço de dimensão infinita, existe uma série condicionalmente convergente onde o conjunto das somas de seus rearranjamentos convergentes é invariante. C.W MacArthur [Mcar], usando o trabalho do matemático H. Hadwiger, mostra que os seguintes espaços de seqüências em c_0 são diferentes:

1. O espaço das seqüências incondicionalmente somáveis;
2. O espaço das seqüências que são incondicionalmente fracamente somáveis e têm soma fraca;
3. O espaço das seqüências que são incondicionalmente fracamente somáveis e têm soma forte.

Muitos teoremas e proposições não foram demonstrados por considerarmos ser resultados clássicos e encontrados em qualquer bom livro de análise funcional. No Apêndice colocamos os teoremas de Hahn-Banach e algumas definições dos espaços de Banach clássicos.

O Teorema de Lèvy-Steinitz não pode ser estendido para espaços de Banach de dimensão infinita. Perdemos a linearidade e convexidade.

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Estabelecemos os principais resultados de análise real básica, tais como a definição de convergência de séries no espaço $\mathbb{R}^n$. São resultados que não terão demonstrações. Para maiores detalhes ver as referências ([Höni], [Lima],[Lang]). Vamos demonstrar o seguinte teorema:

TEOREMA **[Lèvy-Steinitz]**. *O conjunto de todas as somas dos rearranjamentos convergentes de uma série de vetores de $\mathbb{R}^n$ ou é vazio ou é um transladado de um subespaço.*

Para demonstrá-lo seguimos o artigo de Rosenthal [Rose]. Utilizamos e demonstramos os teoremas do Confinamento Poligonal e Rearranjamento.

- **Capítulo 2:** Aqui, começamos com as definições dos diferentes conceitos de somabilidade de séries em espaços de Banach. Estabelecemos relação entre somabilidade e somabilidade incondicional. Enunciamos o Teorema de Dvoretzky-Rogers. Damos algumas relações entre espaços de seqüências. Definimos espaços fracamente seqüêncialmente completos e demonstramos o teorema:

TEOREMA **[Orlicz]**. *Seja E fracamente completo, uma série fracamente incondicionalmente convergente é necessariamente incondicionalmente convergente.*

Introduzimos os conjuntos $B_w(E) = \{s \in \ell_1^w(E) : s \text{ tem uma soma fraca}\}$ e $B_s(E) = \{s \in \ell_1^w(E) : s \text{ tem uma soma}\}$. Relacionando-os da seguinte forma:

TEOREMA. Para o espaço de Banach c_0, $\ell_1^u(c_0) \subsetneq B_s(c_0) \subsetneq B_w(c_0) \subsetneq \ell_1^w(c_0)$.

- **Capítulo 3:** Exibimos séries condicionalmente convergentes em $L_2[0,1]$ cujos conjuntos das somas dos rearranjamentos convergentes são discretos e não convexos. Damos o exemplo de Nikishin. Depois provamos que existem exemplos semelhantes em qualquer espaço de Banach.

TEOREMA. *Em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita existe uma série cujo conjunto das somas dos rearranjamentos convergentes(domínio) não é linear.*

Por último temos um exemplo de uma série que, para todo rearranjamento convergente, tem um só valor e a série não é incondicionalmente convergente.

- **Apêndice A:** Damos alguns dos resultados mais importantes da Análise funcional, como o Teorema Gráfico Fechado e os Teorema de Hahn-Banach. Para detalhes ver ([CuPr, Tayl, Höni]).

CAPÍTULO 1

Convergência condicional em $\mathbb{R}^n$

Este capítulo tem como objetivo principal mostrar o Teorema de Lèvy-Steinitz. Antes, falaremos um pouco de séries numéricas e vetoriais, estabelecendo resultados, notações, etc.. Não nos preocupamos com demonstrações nas seções preliminares mas, aconselhamos as referências [Rudi] e [Lima].

1.1 Séries numéricas

Nesta seção, enunciaremos alguns fatos básicos dentro do contexto das séries numéricas reais, necessários ao perfeito entendimento do nosso trabalho. Daremos o conceito de convergência e, enunciaremos os teoremas de Riemann e Dirichlet.

Uma série de números reais é um par de seqüências $\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (s_k)_{k=1}^{\infty}\right)$ de números reais, tais que

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. É tradicional denotar tal série pelo símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Cada s_k é denominado soma parcial da série de ordem k. Se $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s$, diz-se que a série converge e que s é a **soma** da série. É tradicional escrever nesse caso $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

1.1.1 DEFINIÇÃO. Uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, é absolutamente convergente se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é convergente.

1.1.2 DEFINIÇÃO. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, é incondicionalmente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para cada bijeção σ de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$.

O seguinte resultado está demonstrado em [Lima].

1.1.3 TEOREMA. *Suponha que $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge para s. Então, para qualquer bijeção σ de $\mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente, e com soma igual a s.*

Para as demonstrações dos Teoremas de Riemann e Dirichlet, abaixo, consultar Lima [Lima, Cap. 3, §7], [KaKa, Cap. 1, §1.2] ou Distel [Dies, Cap. 1].

1.1.4 TEOREMA (*DIRICHLET). *Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de números reais é incondicionalmente convergente se, e somente se, é absolutamente convergente. Mais ainda,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

para qualquer permutação σ de $\mathbb{N}$.

1.1.5 DEFINIÇÃO. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente, mas não incondicionalmente convergente é denominada condicionalmente convergente.

1.1.6 TEOREMA (†RIEMANN). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série condicionalmente convergente de números reais. Então,*

1. *Para qualquer número $r \in \mathbb{R}$, existe uma permutação σ de $\mathbb{N}$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = r$;*
2. *Existe uma permutação π de $\mathbb{N}$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ é igual a $+\infty$ e outra permutação com soma igual a $-\infty$.*

---

*Devido a J.P.G.L Dirichlet, [1837] Mathematische Werke, Band I. reprinted Chelsea Publ. Comp. 1969.

†Devido a B. Riemann,Über die Darstellbarkeit einer Funktion duch eine trigonometrische Reihe. Universität Göttingen 1854(Dover Pulb. 1953). Este resultado estava esquecido até ser redescoberto pelo matemático U. Dini em 1968.

1.2 Séries em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção vamos definir e dar propriedades de séries no espaço $\mathbb{R}^n$ que não diferem, essencialmente, das definições e propriedades das séries em $\mathbb{R}$.

1.2.1 DEFINIÇÃO. Uma série de elementos de $\mathbb{R}^n$ é um par de seqüências $\left((v_n)_{n=1}^{\infty}, (s_k)_{k=1}^{\infty}\right)$ de vetores em $\mathbb{R}^n$, tais que

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} v_n$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Análogo ao caso real, é tradicional denotar tal série pelo símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Cada s_k é denominado soma parcial da série de ordem k. Se $\lim\limits_{k \to \infty} s_k = s$, diz-se que a série converge e que s é a **soma** da série. É tradicional escrever nesse caso

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \lim_{n \to \infty} s_n.}$$

Vemos que a definição de convergência das séries em $\mathbb{R}^n$ depende das norma utilizada. Formalmente, teríamos a seguinte definição.

1.2.2 DEFINIÇÃO. A série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, de vetores em $\mathbb{R}^n$, converge para v se, e somente se, para cada número real $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} v_k - v \right\| < \epsilon$$

para $n > n_0$.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é muito especial, pois, convergência de seqüências em uma norma implica que a seqüência converge para qualquer outra norma. Isto segue da proposição [1.2.4], que estabelece a equivalência de todas as normas em $\mathbb{R}^n$.

1.2.3 DEFINIÇÃO. Dizemos que duas normas, $\|\,.\,\|_1$ e $\|\,.\,\|_2$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes se existem constantes positivas a e b tais que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$a \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq b \|v\|_1 .$$

Em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, as normas mais comuns são:

$\rhd$ $\|x\|_\infty = \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \max\{\,|x_i|\,,\ i = 1, \cdots, n\}$,

$\rhd$ $\|x\|_p = \|(x_1, \cdots, x_n)\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, para $1 < p \leq \infty$,

$\rhd$ $|||x||| = |||(x_1, \cdots, x_n)||| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$,

onde a primeira e a última são conhecidas, respectivamente, por normas do **máximo** e da **soma**. Não é difícil provar as seguintes relações no espaço $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq |||x||| \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \leq |||x||| \leq n\,\|x\|_\infty.$$

1.2.4 TEOREMA. *Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Devido a este teorema, podemos usar quaisquer normas em $\mathbb{R}^n$. Por isto, *iremos sempre, salvo menção explícita em contrário, utilizar a **norma Euclideana***[i], isto é,

$$v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2},$$

Com esta escolha ganhamos, automaticamente, o produto interno associado a esta norma

$$\langle u, v\rangle = \langle (u_1, \cdots, u_n), (v_1, \cdots, v_n)\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$

1.2.5 PROPOSIÇÃO (CAUCHY-SCHWARZ). *Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

com igualdade se, e somente se, $v = \alpha u$ ou $u = 0$.

Estudar a convergência de seqüências em espaços euclideanos é, basicamente, estudar convergência de seqüências numéricas, pois uma seqüência (v_k) em $\mathbb{R}^n$, com $v_k = (v_{1k}, \cdots, v_{nk})$, converge a $v = (v_1, \cdots, v_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, \cdots, n$, a seqüência $(v_{ik})_{k=1}^{\infty}$ converge a v_i. Como resultados de seqüência refletem-se em séries, temos

1.2.6 TEOREMA. *Seja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ uma série de vetores em $\mathbb{R}^n$, com $v_k = (v_{1k}, \cdots, v_{nk})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, então*

[i] Quando não houver dúvidas, omitiremos o índice p=2 e representaremos apenas por $\|\,.\,\|$.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}, \cdots, \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}\right)$.

2. *A série* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *converge para* $s = (s_1, \cdots, s_n)$ *se, e somente se,*

$$s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}, \quad \ldots \quad , s_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}.$$

Em particular, este resultado implica que os testes usuais para convergências de séries numéricas, tais como: comparação, raiz, razão, etc.; podem ser usados para determinar se uma série em $\mathbb{R}^n$ converge ou não. É claro que teremos que testar em todas as componentes.

1.2.7 DEFINIÇÃO. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n \in \mathbb{R}^n$, é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$ é convergente.

Seja $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção. Dada a seqüência $(v_k) = \left(v_{1k}, \cdots, v_{nk}\right) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $v_{\sigma(n)}$ o vetor $\left(v_{1\sigma(k)}, \cdots, v_{n\sigma(k)}\right)$.

1.2.8 DEFINIÇÃO. A série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n \in \mathbb{R}^n$, é incondicionalmente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_{\sigma(n)}$ é convergente, para cada bijeção de σ de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$.

1.2.9 TEOREMA. *A série* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *no espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *é absolutamente convergente se, e somente se, é incondicionalmente convergente.*

Demonstração. Seja τ uma permutação de $\mathbb{N}$. Consideremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}, \cdots, \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}\right).$$

Como, para $j = 1, \cdots, n$,

$$|v_{jk}| \leq \sqrt{v_{1k}^2 + \cdots + v_{nk}^2} = \|v_k\|.$$

Temos que $\sum_{k=1}^{\infty} v_{jk}$ é absolutamente convergente para todo j. Usando o teorema [1.1.4], a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{j\tau(k)}$$

é convergente, para todo $j = 1, \cdots, n$, e toda permutação τ. Portanto, usando o teorema [1.2.6], a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{\tau(k)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_{1\tau(k)}, \cdots, \sum_{k=1}^{\infty} v_{n\tau(k)}\right) \text{ é convergente.}$$

Logo, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ é incondicionalmente convergente.

Suponha que a série $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge incondicionalmente. Então as séries das coordenadas também convergem incondicionalmente, para todo j. Daí, pelo teorema [1.1.4], a série $\sum_{k=1}^{\infty} v_{jk}$ é absolutamente convergente, para todo j. Sabemos que as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, usando a norma da soma, isto é, $|||v_k||| = |v_{1k}| + \cdots + |v_{nk}|$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} |||v_k||| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |v_{jk}|\right) < \infty,$$

e, portanto, a série $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge absolutamente. ▩

1.2.10 Observação. *Todo espaço vetorial real de dimensão n é isometricamente isomorfo ao espaço $\mathbb{R}^n$. Podemos dizer que cada espaço vetorial normado E de dimensão finita n é isomorfo isometricamente a $\mathbb{R}^n$ com a norma transportada de E. Portanto, este teorema é válido para qualquer espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ que tenha dimensão finita.*

1.2.11 Exemplo. Considere a série convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{(-1)^k}{k}\right)$$

que não é absolutamente convergente, e portanto, também não é incondicionalmente convergente. Fica claro que vetores da forma (α, β), com $\alpha \neq 0$, não podem ser somas de reordenações dessa série.

O exemplo [1.2.11] garante que não se pode dizer que uma série convergente, não incondicionalmente convergente em $\mathbb{R}^n$, tenha uma reordenação que seja convergente para um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Neste caso, o resultado que se tem é o Teorema de Lèvy-Steinitz, dado inicialmente por Lèvy em 1905, veja [DJT]. Neste capítulo, vamos apresentar uma demonstração de tal teorema, usando essencialmente o artigo de Rosenthal [Rose], mas procurando tornar tal demonstração compreensível para um aluno de graduação em matemática.

Dois resultados são essenciais para a demonstração do Teorema de Lèvy-Steinitz, o teorema do Confinamento Poligonal e o teorema do Rearranjamento.

1.3 Confinamento poligonal

Dados os vetores $u_1, \cdots, u_k$ de $\mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N}$, podemos considerar os pontos $P_0, P_1, \cdots, P_k$ de $\mathbb{R}^2$ dados por $P_0 = 0$, $P_1 = u_1$, $P_2 = u_1 + u_2$, $P_3 = u_1 + u_2 + u_3$, $\cdots$, $P_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$. Temos assim, a poligonal $P_0 P_1 \cdots P_k$ formada pela união dos segmentos $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \cdots, \overline{P_{k-1}P_k}$, cujos comprimentos são, respectivamente, $\|u_1\|, \cdots, \|u_k\|$. Além disso, o segmento $\overline{P_0P_k}$ tem comprimento $\|u_1 + \cdots + u_k\|$. Neste caso, vamos dizer que $P_0P_1 \cdots P_k$ é a poligonal determinada por $u_1, \cdots, u_k$. No caso em que a poligonal é fechada, ver figura 1.1, fica claro que $P_k = P_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^k u_i = 0$. O Teorema do Confinamento Poligonal, para o caso de $\mathbb{R}^2$, diz que existe uma constante $\mathcal{S} > 0$, tal que, para toda poligonal fechada $P_0' \cdots P_m'$ determinada por vetores $v_1, \cdots, v_m$ da bola unitária fechada, é possível achar uma permutação p de $\{2, \cdots, m\}$, de modo que a poligonal determinada por $v_1, v_{p(2)}, \cdots, v_{p(j)}$ tenha um ponto final em $\overline{B}_{\mathcal{S}}(0)$, para $j = 2, \cdots, m$. O menor valor para $\mathcal{S}$ é chamado **constante** de Steinitz no plano, o qual denotamos por C_2. Num trabalho de Wojciech [Wojc], é provado que, para uma norma qualquer, $\mathrm{C}_2 \leq \frac{3}{2}$, e, para a norma euclideana, $\mathrm{C}_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Nesse mesmo trabalho, estima-se a constante de Steinitz em $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{C}_n \leq n$.

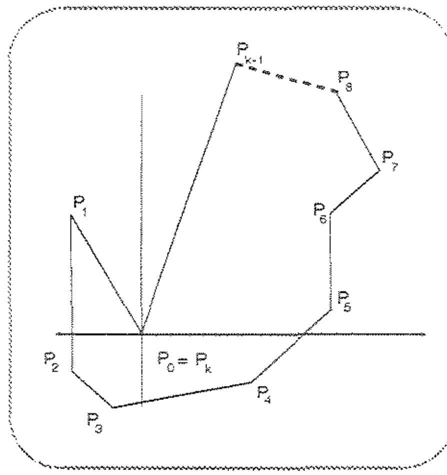

Fig. 1.1.: Poligonal Fechada

1.3.1 TEOREMA (CONFINAMENTO POLIGONAL). *Para cada espaço n-dimensional existe uma constante* C_n, *tal que, quando* $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ *é uma família finita de vetores na bola unitária fechada de* $\mathbb{R}^n$, *com soma* 0, *então, existe uma permutação* p *de* $\{2, \cdots, m\}$ *com a propriedade*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{p(i)} \right\| \leq \mathrm{C}_n, \text{ para todo } j \in \{2, \cdots, m\}.$$

Mais ainda, $\mathrm{C}_1 = 1$ *e* $\mathrm{C}_n \leq \sqrt{4\mathrm{C}_{n-1}^2 + 1}$, *para todo* n.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n. Para $n = 1$, consideremos a família S, satisfazendo a hipótese. Sem perda de generalidade, podemos supor $v_1 > 0$ e

$v_i \neq 0$, para cada $i = 2, \cdots, m$. Como $v_1 > 0$, podemos escolher um índice $p(2)$ tal que $v_{p(2)} < 0$. De fato, caso contrário teríamos $v_1 + \cdots + v_m > 0$, o que é um absurdo. Assim, podemos ter:

$$v_1 + v_{p(2)} > 0 \text{ ou } v_1 + v_{p(2)} \leq 0.$$

i. Se $v_1 + v_{p(2)} > 0$, tem-se, $|v_1 + v_{p(2)}| = v_1 + v_{p(2)} < v_1 = |v_1| \leq 1$.

ii. Se $v_1 + v_{p(2)} \leq 0$, neste caso, $|v_1 + v_{p(2)}| = -v_1 - v_{p(2)} < -v_{p(2)} = |v_{p(2)}| \leq 1$.

Portanto, em qualquer situação, $|v_1 + v_{p(2)}| \leq 1$. Na situação (i), podemos escolher um índice $p(3)$ tal que $v_{p(3)} < 0$, pois, se não existisse tal índice, $(v_1 + v_{p(2)}) + \cdots + v_m > 0$, o que contraria a hipótese. Em (ii), podemos escolher um índice $p(3)$ tal que $v_{p(3)} > 0$; se não, teríamos $(v_1 + v_{p(2)}) + \cdots + v_m < 0$, o que acarreta uma contradição. Daí,

$$v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)} > 0$$
$$\text{ou}$$
$$v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)} \leq 0.$$

No primeiro caso, temos

$$|v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)}| = v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)} < v_1 + v_{p(2)} \leq 1;$$

e no outro,

$$|v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)}| = -v_1 - v_{p(2)} - v_{p(3)} < -v_1 - v_{p(2)} \leq 1.$$

Portanto, em qualquer caso, $|v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)}| \leq 1$. Construímos, deste modo, indutivamente, o seguinte algoritmo: Escolhemos índices $p(2), \cdots, p(k)$, com $v_{p(i)} < 0$, para $i = 2, \cdots, k$, até que $v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)} + \cdots + v_{p(k)} \leq 0$, então, escolhemos $v_{p(k+1)}, v_{p(k+1)}, \cdots, v_{p(k+s)}$ positivos, até que $v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k)} + v_{p(k+1)} + \cdots + v_{p(k+s)} > 0$ e repetimos o processo. O conjunto S tem uma quantidade finita de vetores, assim, esse algoritmo tem um número finito de passos. Como, $|v_i| \leq 1$ para todo $i = 1, \cdots, m$; fica claro que qualquer soma parcial deste rearranjamento é menor ou igual a um. Donde, $C_1 = 1$ e o resultado está provado para $n = 1$.

Para $n > 1$, suponhamos que é verdade para $n-1$, consideremos $v_1, \cdots, v_m$, com $m \geq 3$, satisfazendo a hipótese. O caso $m = 2$ é trivial. Como $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ é finito, existe apenas um número finito de possíveis somas de elementos distintos que contém v_1 como parcela. Seja

L aquela soma cuja norma é a maior de todas. Temos, $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ para algum $s \in \{2, \cdots, m\}$ e $\{u_1 + \cdots + u_s\} \subset S$. Seja $\{w_1, \cdots, w_t\}$ o complementar de $\{v_1, u_1, \cdots, u_s\}$ em S. Temos imediatamente a propriedade $L + w_1 + \cdots + w_t = 0$. Afirmamos:

a) $\langle u_i, L\rangle \geq 0$, para todo $i = 1, \cdots, s$. Para ver isto, suponha que $\langle u_i, L\rangle < 0$, para algum i. Então,

$$\left\langle L - u_i, \frac{L}{\|L\|}\right\rangle = \left\langle L, \frac{L}{\|L\|}\right\rangle - \frac{1}{\|L\|}\langle u_i, L\rangle = \|L\| - \frac{1}{\|L\|}\langle u_i, L\rangle > \|L\|,$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\left\langle L - u_i, \frac{L}{\|L\|}\right\rangle \leq \|L - u_i\| \left\|\frac{L}{\|L\|}\right\| = \|L - u_i\|.$$

Assim, $\|L - u_i\| > \|L\|$, mas isto contradiz a escolha de L, visto que $L - u_i = v_1 + u_1 + \cdots + u_{i-1} + u_{i+1} + \cdots + u_s$ é uma soma que começa com v_1.

b) $\langle v_1, L\rangle \geq 0$. Caso contrário, $\langle v_1, L\rangle < 0$. Então

$$\left\langle -\frac{L}{\|L\|}, v_1 + w_1 + \cdots + w_t\right\rangle = \left\langle -\frac{L}{\|L\|}, v_1 - L\right\rangle = \|L\| - \frac{1}{\|L\|}\langle L, v_1\rangle > \|L\|,$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, $\|L - v_1\| > \|L\|$ e

$$v_1 - L = v_1 + w_1 + \cdots + w_t,$$

o que mais uma vez contradiz a escolha de L.

c) $\langle w_i, L\rangle \leq 0$, para todo $i = 1, \cdots, t$. Suponha que exista $\langle w_i, L\rangle > 0$, para algum i. Então,

$$\left\langle L + w_i, \frac{L}{\|L\|}\right\rangle = \|L\| + \frac{\langle w_i, L\rangle}{\|L\|} > \|L\|.$$

Por Cauchy-Schwartz, $\|L + w_i\| > \|L\|$, contradizendo a definição de L.

Consideremos o espaço vetorial $L^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n, \langle v, L\rangle = 0\}$, de dimensão $n - 1$, isto é, o hiperplano, pela origem, que é perpendicular a L. Seja v' a componente de v

em $L^{\perp}$, ver figura (1.2). Daí, como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ tem-se $v_1' + u_1' + \cdots + u_s' = 0$ e $w_1' + \cdots + w_t' = 0$. De fato,

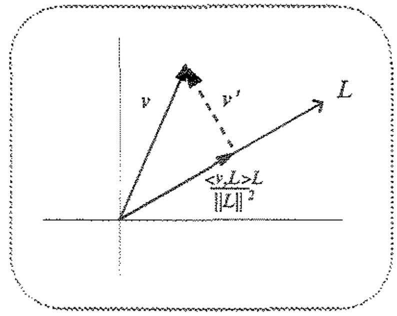

Fig. 1.2. : Projeção de v em L

$$\begin{aligned} v_1' + u_1' + \cdots + u_s' &= v_1 - \frac{\langle v_1, L\rangle}{\|L\|^2}L + \sum_{i=1}^{s}\Big(u_i - \frac{\langle u_i, L\rangle}{\|L\|^2}L\Big) \\ &= \Big(v_1 + \sum_{i=1}^{s} u_i\Big) - \frac{\langle v_1 + \sum_{i=1}^{s} u_i, L\rangle}{\|L\|^2}L \\ &= L - \frac{\langle L, L\rangle}{\|L\|^2}L = L - L = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, concluímos a outra igualdade. Observe que por construção

$$\overbrace{v - \frac{\langle v, L\rangle}{\|L\|^2}L}^{v'} \perp \frac{\langle v, L\rangle}{\|L\|^2}L \text{ e que } v = v' + \frac{\langle v, L\rangle}{\|L\|^2}L$$

o que implica

$$\left\| v - \frac{\langle v, L\rangle}{\|L\|^2}L \right\| = \|v'\| \leq \|v\|,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Em particular, para os vetores em $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$, temos, $\|v_i'\| \leq 1$, $\forall i$. Usando a hipótese de indução em $L^{\perp}$, nos conjuntos $\{v_1', u_1' \cdots, u_s'\}$ e $\{w_1', \cdots, w_t'\}$, existe uma permutação τ de $\{1, \cdots, s\}$ tal que

$$\left\| v_1' + \sum_{i=1}^{j} u_{\tau(i)}' \right\| \leq C_{n-1}, \text{ para } j = 1, \cdots, s;$$

e uma permutação σ de $\{1, \cdots, t\}$ tal que

$$\left\| w_1' + \sum_{i=2}^{k} w_{\sigma(i)}' \right\| \leq C_{n-1}, \text{ para } k = 2, \cdots, t;$$

definamos $\sigma(1) = 1$. Vamos construir uma ordenação de S a partir dos $u_i's$ e $w_i's$ e procederemos usando o algoritmo do caso $n = 1$. Seja

$$\alpha = \frac{\langle v_1, L\rangle}{\|L\|},\ \alpha_i = \frac{\langle u_i, L\rangle}{\|L\|},\ \beta_j = \frac{\langle w_j, L\rangle}{\|L\|},\ \text{e} \quad = \frac{L}{\|L\|}.$$

É fácil ver que $\alpha + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j = 0$ e $|\alpha|, |\alpha_i|, |\beta_j| \leq 1$. Das afirmações (a) e (c) temos $\alpha \geq 0$ e $\beta_j \leq 0$. Assim, escolha o menor r_1 tal que $\alpha + \sum_{j=1}^{r_1} \beta_{\sigma(j)} \leq 0$, depois escolha o menor s_1 tal que $\alpha + \sum_{j=1}^{r_1} \beta_{\sigma(j)} + \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_{\tau(i)} \geq 0$ e continuemos esse processo até findar todos os elementos de S, que é finito. Daí,

$$\alpha + \sum_{j=1}^{r_1} \beta_{\sigma(j)} + \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_{\tau(i)} + \sum_{j=r_1+1}^{r_2} \beta_{\sigma(j)} + \sum_{i=s_1+1}^{s_2} \alpha_{\tau(i)} + \cdots \leq 1, \text{ pelo caso } n = 1.$$

A escolha da reordenação p, para S, será

$$\{v_1, w_{\sigma(1)} \cdots, w_{\sigma(r_1)}, u_{\tau(1)}, \cdots, u_{\tau(s_1)}, w_{\sigma(r_1+1)}, \cdots, w_{\sigma(r_2)}, \cdots\}$$

ou visualizando as componentes ortogonais

$$\{v_1' + \alpha \quad , w_{\sigma(1)}' + \beta_{\sigma(1)} \quad , \cdots, w_{\sigma(r_1)}' + \beta_{\sigma(r_1)} \quad , u_{\tau(1)}' + \alpha_{\tau(1)} \quad , \cdots\}$$

Assim, tomando qualquer soma parcial, contendo $u's$ e $w's$, teremos após reordenar,

$$\begin{aligned}
\left\| v_1' + u_1' + \cdots + w_1' + \cdots + \left(\alpha + \sum_j \beta_{\sigma(j)} + \sum_i \alpha_{\tau(i)}\right) \right\|^2 &\leq \|v_1' + u_1' + \cdots + w_1' + \cdots\|^2 + 1 \\
&\leq \left\| v_1' + u_{\sigma(1)}' + \cdots + u_{\sigma(s_1)}' + \cdots + w_{\sigma(1)}' + \cdots + w_{\sigma(r_1)}' + \cdots \right\|^2 + 1 \\
&\leq \Big(\underbrace{\left\| v_1' + u_{\sigma(1)}' + \cdots + u_{\sigma(s_1)}' + \cdots \right\|}_{\leq \mathrm{C}_{n-1}} + \underbrace{\left\| w_{\sigma(1)}' + \cdots + w_{\sigma(r_1)}' + \cdots \right\|}_{\leq \mathrm{C}_{n-1}} \Big)^2 + 1 \\
&\leq 4\mathrm{C}_{n-1}^2 + 1
\end{aligned}$$

por hipótese de indução, qualquer soma parcial das componentes em $L^\perp$, tem norma menor ou igual a $\mathrm{C}_{n-1} + \mathrm{C}_{n-1}$ e as componentes em L têm, pelo caso $n = 1$, soma parcial menor ou igual a 1. Portanto, cada soma parcial da última reordenação será menor ou igual a $\sqrt{4\mathrm{C}_{n-1}^2 + 1}$. ▒

1.3.2 COROLÁRIO. *Se* $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$, $w = \sum_{i=1}^m v_i$, $0 < t < 1$, *e* $\|v_i\| \leq \epsilon$, *para todo* i. *Então ou* $\|v_1 - tw\| \leq \epsilon\sqrt{\mathrm{C}_{n-1}^2 + 1}$, *ou existem uma permutação* p *de* $\{2, \cdots, m\}$ *e* r *entre* 2 *e* m *tais que* $\left\| v_1 + \sum_{i=2}^r v_{p(i)} - tw \right\| \leq \epsilon\sqrt{\mathrm{C}_{n-1}^2 + 1}$. *Aqui* $\mathrm{C}_0 = 1$.

Demonstração. Se $w = 0$, não há nada a fazer. Suponha $w \neq 0$. Consideremos o caso $n = 1$. Sem perda de generalidade, vamos assumir $w > 0$, e, para cada $t \in]0, 1[$ fixo, denotemos por s o menor dos índices que satisfaz as duas condições a seguir

a) $v_1 + \cdots + v_s > tw$,

b) $v_1 + \cdots + v_{s-1} \leq tw$.

Desde que $|v_s| \leq \epsilon$, para $1 \leq s \leq m$, pela condição [b], $v_1 + \cdots + v_{s-1} - tw \leq 0$ acarreta

$$v_1 + \cdots + v_{s-1} - tw + v_s \leq |v_s| \leq \epsilon,$$

e usando a condição [a], $v_1 + \cdots + v_{s-1} + v_s - tw > 0 \geq -\epsilon$. Isto mostra que,

$$|v_1 + \cdots + v_s - wt| \leq \epsilon.$$

Assim, para $n = 1$ está demonstrado, onde $\mathrm{C}_0 = 1$. Para o caso geral, $n > 1$, vamos escolher uma reordenação dos vetores a partir das projeções v_i' de v_i sobre $w^{\perp}$, como na figura 1.2,

$$v_i' = v_i - \frac{\langle v_i, w\rangle}{\|w\|^2} w,$$

para $i = 1, \cdots, m$ e

$$\sum_{i=1}^{m} v_i' = \sum_{i=1}^{m} \left(v_i - \frac{\langle v_i, w\rangle}{\|w\|^2} w \right) = 0,$$

pois

$$\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle + \left\langle v_2, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle + \cdots + \left\langle v_m, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \|w\|.$$

Como, $\frac{\|v_i\|}{\epsilon} \leq 1$, para todo i, pelo teorema do Confinamento Poligonal, existe uma permutação p de $\{2, \cdots, m\}$ tal que

$$\left\| v_1' + v_{p(2)}' \cdots + v_{p(j)}' \right\| \leq \epsilon\, \mathrm{C}_{n-1}, \text{ para } j = 2, \cdots, m. \tag{1.1}$$

É óbvio que

$$\left| \left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle + \left\langle v_{p(2)}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle + \cdots + \left\langle v_{p(m)}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \right| = \|w\|.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, $\left|\left\langle v_i, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle\right| \leq \epsilon$, para todo i, e caímos no caso anterior($n = 1$). Logo, para $t \in (0, 1)$, existe $r \in \{2, \cdots, m\}$, tal que

$$\left| \left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle + \left\langle v_{p(2)}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle + \cdots + \left\langle v_{p(r)}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle - t\|w\| \right| \leq \epsilon. \tag{1.2}$$

Não é difícil ver que $(v_1' + v_{p(2)}' \cdots + v_{p(r)}') \perp w$. Logo,

$$\|v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(r)} - tw\|^2 =$$
$$= \left\|(v_1' + v_{p(2)}' + \cdots + v_{p(r)}') + \left(\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|^2}\right\rangle + \left\langle v_{p(2)}, \frac{w}{\|w\|^2}\right\rangle + \cdots + \left\langle v_{p(r)}, \frac{w}{\|w\|^2}\right\rangle - t\right)w\right\|^2$$
$$= \underbrace{\left\|v_1' + \sum_{i=2}^{r} v_{p(i)}'\right\|^2}_{\text{por [1.1]}} + \underbrace{\left|\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \sum_{i=2}^{r}\left\langle v_{p(i)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle - t\,\|w\|\right|^2}_{\text{por [1.2]}} \leq \epsilon^2 C_{n-1}^2 + \epsilon^2.$$

▩

1.3.3 COROLÁRIO. *Se* $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\left\|\sum_{i=1}^{m} v_i\right\| \leq \epsilon$, $\|v_i\| \leq \epsilon$, *para todo* i, *então existe uma permutação* $p : \{1, \cdots, m\} \longrightarrow \{1, \cdots, m\}$ *tal que*

$$\|v_{p(1)} + \cdots + v_{p(r)}\| \leq \epsilon(C_n + 1)$$

para $1 \leq r \leq m$.

Demonstração. Defina $v_{m+1} = -v_1 - \cdots - v_m$. Desta forma, $\sum_{i=1}^{m+1} v_i = 0$. Aplicando o teorema do Confinamento Poligonal em $\{\frac{v_1}{\epsilon}, \cdots, \frac{v_{m+1}}{\epsilon}\}$, existe uma permutação p de $\{2, \cdots, m+1\}$ tal que

$$\left\|v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{p(i)}\right\| \leq \epsilon\, C_n,$$

para $r = 2, \cdots, m+1$. Fixada a permutação p, com $p(1) = 1$, então existe i_0 tal que $p(i_0) = m+1$ e $\|v_{p(i_0)}\| = \|-v_1 - \cdots - v_m\| \leq \epsilon$. Usando a desigualdade triangular, temos que, se $i_0 \notin \{p(1), p(2), \cdots, p(r)\}$, o resultado segue. Agora, se $i_0 \in \{p(1), p(2), \cdots, p(r)\}$, tem-se

$$\left|\left\|\sum_{i \neq i_0}^{r} v_{p(i)}\right\| - \left\|v_{p(i_0)}\right\|\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{r} v_{p(i)}\right\| \leq \epsilon\, C_n$$

Logo, $\left\|\sum_{i \neq i_0}^{r} v_{p(i)}\right\| \leq \epsilon\, C_n + \epsilon$. (Note que p restrita a $\{1, \cdots, i_0 - 1, i_0 + 1, \cdots\}$ pode ser pensada como definida em $\{1, \cdots, m\}$ com valores em $\{1, \cdots, m\}$). ▩

1.4 O Teorema de Lèvy-Steinitz

Dada uma série convergente de números reais, o conjunto das somas de todos os rearranjamentos convergentes pode ser um conjunto unitário (a série é incondicionalmente convergente) ou toda reta (condicionalmente convergente). Este resultado é conhecido como teorema de Riemann. Quando trabalhamos com séries em $\mathbb{R}^m, m > 1$, temos um resultado semelhante, que é conhecido como Teorema de Lèvy-Steinitz, onde o conjunto das somas de todos os rearranjamentos convergentes pode ser: um único ponto ou um transladado de um subespaço. Este resultado dado inicialmente por Lèvy em 1905 tinha algumas falhas na demonstração e foi retificado por Steinitz em 1913.

1.4.1 TEOREMA (DO REARRANJAMENTO). *Sejam $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ uma seqüência de vetores em $\mathbb{R}^n$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $(S_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a S e $\lim\limits_{i\longrightarrow\infty} v_i = 0$, então existe uma permutação $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{r=1}^{\infty} v_{p(i)} = S$.*

Demonstração. Tome $\delta_k = \|S_{m_k} - S\|$. Temos que (δ_k) converge a zero. Notemos que

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\| = \left\|S_{m_{k+1}} - S_{m_k} - v_{m_{k+1}}\right\| \leq \delta_{k+1} + \delta_k + \left\|v_{m_{k+1}}\right\|.$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\sup\limits_{i\geq m_k}\|v_i\|\right] = 0$. Consideremos $\epsilon_k = \max\left\{\delta_{k+1} + \delta_k, \sup\{\|v_i\| : i \geq m_k\}\right\}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. É claro que (ϵ_k) converge a zero. Daí,

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\| < \delta_{k+1} + \delta_k + \left\|v_{m_{k+1}}\right\| \leq 2\epsilon_k$$

Pelo Corolário [1.3.3], para cada k, existe uma bijeção p_k de $\{m_k + 1, \cdots, m_{k+1} - 1\}$ em $\{m_k + 1, \cdots, m_{k+1} - 1\}$ tal que

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{r} v_{p_k(i)}\right\| \leq 2\epsilon_k(\mathrm{C}_n + 1)$$

para $r = m_k + 1, \cdots, m_{k+1} - 1$. Vamos reordenar os v_i's em função das bijeções p_k's, construindo a permutação $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$p(j) = \begin{cases} m_k, & \text{se } j = m_k \ \forall\ k \in \mathbb{N} \\ p_k(j), & \text{se } j \in \{m_k + 1, \cdots, m_{k+1} - 1\} \forall\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $m_1 = 1$. É claro que a relação p, acima, define um função bijetiva e portanto uma permutação de $\mathbb{N}$. Definamos s_m por

$$s_m = S_{m_k} + \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{p_k(i)},$$

para $m_k + 1 \leq m \leq m_{k+1} - 1$. Desde que (ϵ_k) converge para zero, vamos mostrar que (s_m) converge para S. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que,

$$2\epsilon_k(\mathrm{C}_n + 1) < \frac{\epsilon}{2},$$

para $k \geq k_1$. Existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que, para $k \geq k_2$ temos, $\|S_{m_k} - S\| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, para $k \geq k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ e $m_k + 1 \leq m \leq m_{k+1} - 1$, tem-se

$$\|s_m - S\| \leq \|s_m - S_{m_k}\| + \|S_{m_k} - S\| \leq 2\epsilon_k(\mathrm{C}_n + 1) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Mas, dado $m \geq m_{k_0} + 1$, existe $k \geq k_0$, tal que $m_{k+1} - 1 \geq m \geq m_k + 1$, pois, a seqüência (m_k) é crescente. Logo, podemos garantir que

$$\|s_m - S\| < \epsilon,$$

para $m \geq m_{k_0}$. ▒

1.4.2 Teorema (Lèvy-Steinitz). *O conjunto de todas as somas dos rearranjamentos convergentes de uma série de vetores de $\mathbb{R}^n$ ou é vazio ou é um transladado de um subespaço.*

Demonstração. Seja S o conjunto de todas as somas dos rearranjamentos convergentes da série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v_i$. Suponhamos que $S \neq \varnothing$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $0 \in S$ e vamos mostrar que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Consideremos $s_1, s_2 \in S$ e $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de números reais estritamente positivos que convergem para zero.

1. Como $s_1 \in S$, existe alguma permutação $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_{\varphi(i)} = s_1$. Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_1$ implica

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} v_{\varphi(i)} - s_1 \right\| < \epsilon_1.$$

Se $1 = \varphi(i)$ para algum $i \in \{1, \cdots, n_1\}$, escolha $I_1 = \{\varphi(i), \cdots, \varphi(n_1)\}$. Se $1 = \varphi(i_1)$ com $i_1 > n_1$, escolha $I_1 = \{\varphi(1), \cdots, \varphi(i_1)\}$. Portanto, existe um conjunto de inteiros positivos $I_1 (\ni 1)$ tal que

$$\left\| \sum_{i \in I_1} v_i - s_1 \right\| < \epsilon_1.$$

2. Como $0 \in S$, existe uma permutação ψ de $\mathbb{N}$, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} v_{\psi(i)} = 0$. Logo, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$, tal que, $n \geq n_2$ implica

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} v_{\psi(i)} \right\| < \epsilon_1.$$

Portanto, existe $J_1 \supset I_1$ tal que, $\left\| \sum_{i \in J_1} v_i \right\| < \epsilon_1$. Pois, se $I_1 \subset \{\psi(1), \cdots, \psi(n_2)\}$, tome $J_1 = \{\psi(1), \cdots, \psi(n_2)\}$. Se $I_1 \not\subset \{\psi(1), \cdots, \psi(n_2)\}$, para cada $j \in I_1 \backslash \{\psi(1), \cdots, \psi(n_2)\}$ podemos achar $i(j) > n_2$ tal que $\psi(i(j)) = j$, neste caso, temos um número finito de $i(j)'$s. Seja j_1 o maior dos $i(j)'$s e tome $J_1 = \{\psi(1), \cdots, \psi(j_1)\}$. Assim,

$$\left\| \sum_{i \in J_1} v_i \right\| < \epsilon_1, J_1 \supset I_1 \text{ e } i_1 < j_1.$$

3. Como $s_2 \in S$, existe uma permutação β de $\mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} v_{\beta(i)} = s_2$. Logo, existe $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ tal que $n \geq n_3$ implica

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} v_{\beta(i)} - s_2 \right\| < \epsilon_1.$$

Se $J_1 \subset \{\beta(1), \cdots, \beta(n_3)\}$, tome $K_1 = \{\beta(1), \cdots, \beta(n_3)\}$. Se $J_1 \not\subset \{\beta(1), \cdots, \beta(n_3)\}$, para cada $k \in J_1 \backslash \{\beta(1), \cdots, \beta(n_3)\}$ podemos achar $i(k) > n_3$ tal que $\beta(i(k)) = k$. Seja k_1 o maior dos k's e tome $K_1 = \{\beta(1), \cdots, \beta(k_1)\}$ então,

$$\left\| \sum_{i \in K_1} v_i - s_2 \right\| < \epsilon_1, K_1 \supset J_1 \text{ e } k_1 > j_1 > i_1.$$

Para $\epsilon_2 > 0$, raciocinando analogamente, existe $I_2 \supset K_1 \cup \{2\}$ tal que,

$$\left\| \sum_{i \in I_2} v_i - s_1 \right\| < \epsilon_2$$

e construímos J_2 e K_2 tais que,

$$\left\| \sum_{i \in J_2} v_i \right\| < \epsilon_2$$

e

$$\left\| \sum_{i \in K_2} v_i - s_2 \right\| < \epsilon_2;$$

onde $I_2 \subset J_2 \subset K_2$ e obviamente $k_1 < i_2 < j_2 < k_2$ e construímos indutivamente os conjuntos I_m, J_m e K_m de inteiros positivos tais que, $\{1, \cdots, m_1\} \subset K_{m-1} \subset I_m \subset J_m \subset K_m$ e

$$\left\| \sum_{i \in I_m} v_i - s_1 \right\| < \epsilon_m, \quad \left\| \sum_{i \in J_m} v_i \right\| < \epsilon_m \text{ e } \left\| \sum_{i \in K_m} v_i - s_2 \right\| < \epsilon_m$$

com $i_m < j_m < k_m$. Por construção, existem uma permutação $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e seqüências crescentes $(i_m)_{m=1}^{\infty}, (j_m)_{m=1}^{\infty}$ e $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ tais que, $k_{m-1} < i_m < j_m < k_m$ com

$$\begin{array}{rlrl} I_1 &= \{p(1), \cdots, p(i_1)\} & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_1 \backslash I_1 &= \{p(i_1+1), \cdots, p(j_1)\} & I_m \backslash K_{m-1} &= \{p(k_{m-1}), \cdots, p(i_m)\} \\ K_1 \backslash J_1 &= \{p(j_1+1), \cdots, p(k_1)\} & J_m \backslash I_m &= \{p(i_m+1), \cdots, p(j_m)\} \\ I_2 \backslash K_1 &= \{p(k_1+1), \cdots, p(i_2)\} & K_m \backslash J_m &= \{p(j_m+1), \cdots, p(k_m)\} \end{array}$$

Donde,

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_m} v_{p(i)} - s_1 \right\| < \epsilon_m, \quad \left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} \right\| < \epsilon_m \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{i=1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2 \right\| < \epsilon_m, \text{ para cada } m.$$

E ainda,

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2 \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k_m} v_{p(i)} - \sum_{j=1}^{j_m} v_{p(j)} - s_2 \right\| < \epsilon_m + \epsilon_m.$$

Isto mostra que,

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_m} v_{p(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - (s_1 + s_2) \right\| < 3\,\epsilon_m, \text{ para cada } m \geq 1.$$

A partir daí, vamos construir um novo rearranjamento $q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que "troque as posições"dos blocos $A_m = \{p(i_m+1), \cdots, p(j_m)\}$ com $B_m = \{p(j_m+1), \cdots, p(k_m)\}$, para todo m, isto é,

$$\{i_m+1, \cdots, j_m, j_m+1, \cdots, k_m\} \xmapsto[\text{bijeção}]{q} \{p(j_m+1), \cdots, p(k_m), p(i_m+1), \cdots, p(j_m)\}.$$

Consideremos, para cada m, a aplicação bijetiva q_m que reordena o bloco B_m,

$$\{i_m+1, \cdots, j_m, j_m+1, \cdots, k_m\} \xmapsto{q_m} \{p(i_m+1), \cdots, p(j_m), p(j_m+1), \cdots, p(k_m)\}$$

onde,

$$\begin{array}{ccccccc} q_m(i_m+1), & q_m(i_m+2), & \cdots & , q_m(j_m), & \cdots & , q_m(k_m) \\ \| & \| & & & & \| \\ p(j_m+1)\,, & p(j_m+2)\,, & & \cdots & , & \cdots & , p(j_m) \end{array}$$

Portanto,

$$\sum_{i=i_m+1}^{k_m} v_{q_m(i)} = \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} + \sum_{i=i_m+1}^{j_m} v_{p(i)}.$$

Vamos definir $q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$q(i) = \begin{cases} q_m(i), & \text{se } i \in \{i_m+1, \cdots, k_m\}, \\ p(i), & \text{se } i \in \{k_m+1, \cdots, i_{m+1}\}\,, m \geq 1, \\ p(i), & \text{se } i \in \{1, \cdots, i_1\}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i_m} v_{q(i)} &= \sum_{i=1}^{i_1} v_{q(i)} + \left[\sum_{i=i_1+1}^{k_1} v_{q(i)} + \sum_{i=k_1+1}^{i_2} v_{q(i)}\right] + \left[\sum_{i=i_2+1}^{k_2} v_{q(i)} + \sum_{i=k_2+1}^{i_3} v_{q(i)}\right] + \\ &+ \cdots + \left[\sum_{i=i_{m-1}+1}^{k_{m-1}} v_{q(i)} + \sum_{i=k_{m-1}+1}^{i_m} v_{q(i)}\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{i_1} v_{p(i)} + \left[\left(\sum_{i=j_1+1}^{k_1} v_{p(i)} + \sum_{i=i_1+1}^{j_1} v_{p(i)}\right) + \sum_{i=k_1+1}^{i_2} v_{p(i)}\right] + \\ &+ \cdots + \left[\left(\sum_{i=j_{m-1}+1}^{k_{m-1}} v_{p(i)} + \sum_{i=i_{m-1}+1}^{j_{m-1}} v_{p(i)}\right) + \sum_{i=k_{m-1}+1}^{i_m} v_{p(i)}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{i_m} v_{p(i)} \end{aligned}$$

Temos $\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{p(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - (s_1+s_2)\right\| < 3\epsilon_m, \forall m$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i_m} v_{p(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} &= \sum_{i=1}^{i_m} v_{q(i)} + \sum_{i=i_m+1}^{i_m+(k_m-j_m)} v_{q(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{i_m+(k_m-j_m)} v_{q(i)} = R_{i_m+(k_m-j_m)}. \end{aligned}$$

Daí, $\left\|R_{i_m+(k_m-j_m)} - (s_1+s_2)\right\| < 3\,\epsilon_m$. Aplicando o teorema da reordenação, existe um reordenamento de $(v_{q(i)})$ tal que a série associada converge para s_1+s_2.

Para cada $s \in S$ e $t \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que $ts \in S$. É suficiente mostrar para $t \in (0,1)$ e $t = -1$. Pela construção acima, tem-se

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2 \right\| < 2\,\epsilon_m$$

para cada m. Seja $\delta_m = \sup\left\{\|v_{p(i)}\| : i = j_m+1, \cdots, k_m\right\}$ e $u_m = \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)} - s_2$, $\|u_m\| < 2\,\epsilon_m$ usando, o Corolário [1.3.3] em

$$u_m + s_2 = \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{p(i)},$$

onde, $\|v_{p(i)}\| \leq \delta_m$, existe uma permutação ρ_m de $\left\{p(j_m+1), \cdots, p(k_m)\right\}$ tal que,

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{\rho_m(p(i))} - t(s_2 - u_m) \right\| \leq \sqrt{\mathrm{C}_{n-1}^2 + 1}\,\delta_m.$$

Para $t \in (0,1)$,

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{\rho_m(p(i))} - ts_2 \right\| < M\,\delta_m + 2\epsilon_m$$

e

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{\rho_m(p(i))} - ts_2 \right\| < M\,\delta_m + 3\epsilon_m.$$

Mais uma vez construímos uma permutação $q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$q(i) = \begin{cases} p(i), & \text{se } i \in \{1, \cdots, j_1\} \\ q_m(i), & \text{se } i \in \{j_m+1, \cdots, k_m\}, \text{ para } m \geq 1. \\ p(i), & \text{se } i \in \{1, \cdots, i_1\} \end{cases}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{q_m(p(i))} = \sum_{i=1}^{j_m} v_{q(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{q(i)} = \sum_{i=1}^{r_m} v_{q(i)} = R_{r_m}$$

que converge para ts_2. Pelo teorema do rearranjamento existe uma subseqüência que converge para ts_2.

Para finalizar, tome $t = -1$; e verifiquemos que $-s_2 \in S$. Usando a construção anterior e o Corolário [1.3.3]. Tem-se,

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{p(i)} - \sum_{i=1}^{k_m} v_{p(i)} - (-s_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m, \text{ para todo } m \geq 1.$$

Donde,

$$\left\| \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{p(i)} - (-s_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m, \text{ para todo } m \geq 1.$$

Então,

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{p(i)} + \sum_{k_m+1}^{j_{m+1}} v_{p(i)} - (-s_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + 2\epsilon_m, \text{ para todo } m \geq 1.$$

Considere $q_m : \{j_m + 1, \cdots, k_m, \cdots, j_m\} \longrightarrow \{p(j_m + 1), \cdots, p(k_m)\}$ onde,

$$\begin{array}{cccccc} q_m(j_m+1), & q_m(j_m+2), & \cdots & , q_m(j_m), & \cdots & ,q_m(k_m) \\ \| & & & & & \| \\ p(k_m+1)\,, & p(k_m+2)\,, & & \cdots & , \cdots & , p(k_m) \end{array}$$

portanto, construímos uma subseqüência convergindo para $-s_2$. Pelo teorema do rearranjamento, $-s_2 \in S$. ▩

CAPÍTULO 2

Relações entre espaços de seqüências num espaço de Banach

Neste capítulo vamos estabelecer certas relações entre alguns espaços de seqüências de um espaço de Banach. Seguimos fielmente o artigo [Mcar] e, para isso, vamos precisar do conceito de convergência fraca para definir os espaços. Ao definir convergência fracamente incondicionalmente somante, veremos que basta que o espaço de Banach não contenha uma cópia de c_0 para que a convergência fracamente incondicional seja incondicionalmente convergente. Estabelecemos, nas primeiras seções, terminologias e resultados importantes de análise funcional no qual nos baseamos. Para maiores detalhes consultar [Dies, Tayl, Höni, Kade].

2.1 Somabilidade em espaços de Banach

Nesta seção veremos o conceito de **somabilidade** de séries. Enunciamos a condição de Cauchy e o critério de Cauchy para séries num espaço de Banach.

Em alguns espaços normados temos a necessidade de dar um sentido a somatórias da forma

$$\boxed{\sum_{i\in I} x_i}$$

quando o conjunto I dos índices não é necessariamente o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Quando $I = \mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{R}$ etc., podemos ordenar o conjunto dos índices de um modo conveniente, procurando cair em um caso familiar. Nesse caso a soma da série pode depender da ordem em que se efetuam as somas parciais. Por isso, precisamos dar um sentido a somatórias $\sum_{i \in I} x_i$ sentido esse que será independente da estrutura de ordem sobre o conjunto de índices I.

2.1.1 Definição. Seja E um espaço normado. Uma família $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de E é **somável** e tem por soma $x \in E$, denotamos

$$x = \sum_{i \in I} x_i,$$

se, dado $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito $F_\epsilon \subset I$ tal que, para todo subconjunto finito $F \subset I$ com $F \supset F_\epsilon$, tem-se

$$\left\| \sum_{i \in F} x_i - x \right\| < \epsilon.$$

Uma diferença entre família somável e soma de séries num espaço normado está em que, o conjunto dos índices da série é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e as somas parciais finitas que se tomam não são arbitrárias mas apenas as correspondentes a conjuntos do tipo $\{1, \cdots, n\}$. Quando uma família de vetores num espaço normado está indexada com o conjunto dos números naturais, que relações existem entre o fato desta família ser ou não somável e se ela define ou não uma série convergente. Mais geralmente temos:

2.1.2 Proposição. *Se uma família $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é somável então, a série associada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente.*

Demonstração. De fato, sendo x a soma da família, dado $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja a parte finita $F \subset \mathbb{N}$, contendo F_ϵ, se tenha

$$\left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \epsilon;$$

podemos então fixar um $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $F_\epsilon \subset \{1, \cdots, n_0\}$ e temos que, qualquer que seja $n \geq n_0$, a soma parcial

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

verifica

$$\|x - S_n\| < \epsilon.$$

▒

2.1.3 OBSERVAÇÃO. *Podemos ter uma série convergente sem que a família seja somável. Por exemplo, a família dos números reais* $(-1)^n \frac{1}{n}$, *com* $n \in \mathbb{N}$, *é uma série convergente que não é somável.*

A motivação para a definição de seqüência somável está no teorema abaixo, e para ver mais detalhes sugerimos consultar Hönig [Höni, Cap. 1,§1].

2.1.4 TEOREMA. *Seja* $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência de números reais*[i]. *Então, as afirmações abaixo, são equivalentes.*

1. *Dado* $\epsilon > 0$, *existe um subconjunto finito* $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ *tal que, para qualquer subconjunto finito* $F \subset \mathbb{N}$ *com* $F \supset F_\epsilon$, *temos* $\left|x - \sum_{i \in F} x_i\right| < \epsilon$, *isto é, a família* $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *é somável.*
2. *A série* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *é absolutamente convergente para* x.

Para facilitar a linguagem, denotemos por $\mathcal{F}(I)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos não vazios do conjunto I.

2.1.5 LEMA. *Seja* $(x_i)_{i \in I}$ *uma família de números reais. Se existe* $\lambda > 0$ *e* $\left|\sum_{i \in F} x_i\right| < \lambda$, *para todo* $F \in \mathcal{F}(I)$. *Então vale a inequação*

$$\sum_{i \in F} |x_i| \leq 2\lambda, \qquad \text{para todo } F \in \mathcal{F}(I).$$

Demonstração. Podemos dividir cada $A \in \mathcal{F}(I)$ em duas partes disjuntas:

$$A^+ = \{i \in A; x_i \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad A_- = \{i \in A; x_i < 0\}$$

Desde que $\sum_{i \in A^+} |x_i| = \sum_{i \in A^+} x_i \leq \lambda$ e $\sum_{i \in A_-} |x_i| = -\sum_{i \in A^+} x_i \leq \lambda$. Logo,

$$\sum_{i \in A} |x_i| = \sum_{i \in A^+} |x_i| + \sum_{i \in A_-} |x_i| \leq 2\lambda.$$

▒

[i]Pode, também, ser números complexos.

2.1.6 PROPOSIÇÃO. *Uma família $(x_i)_{i\in I}$ de números reais é somável se, e somente se, existe um número positivo λ tal que*

$$\sum_{i\in F}|x_i| \leq \lambda, \qquad \textit{para todo } F \in \mathcal{F}(I).$$

Demonstração. Suponha que $(x_i)_{i\in I}$ seja somável para x. Assim, para $\epsilon = 1$ existe F_ϵ finito tal que

$$\left|\sum_{i\in F} x_i - x\right| \leq 1, \qquad \text{para todo } F \supset F_\epsilon \text{ finito.}$$

Agora, para todo $F \subset I$ finito, vale a inequação

$$\left|\sum_{i\in F} x_i\right| = \left|\sum_{i\in F\cup F_\epsilon} x_i - x + x - \sum_{i\in F_\epsilon\setminus F} x_i\right| \leq 1 + |x| + \left|\sum_{i\in F_\epsilon} x_i\right|.$$

Tome $\lambda = 1 + |x| + \left|\sum_{i\in F_\epsilon} x_i\right| > 0$ e pelo Lema[2.1.5] vale a inequação

$$\sum_{i\in F}|x_i| < 2\lambda, \qquad \text{para todo } F \subset I \text{ finito.}$$

Reciprocamente, como $\sum_{i\in F}|x_i| < \infty$ para todo $F \subset I$ finito. Seja

$$y = \sup\left\{\sum_{i\in F}|x_i|\,; F \in \mathcal{F}(I)\right\} \leq \lambda < +\infty.$$

Então existe uma seqüência monótona crescente $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ de conjuntos em $\mathcal{F}(I)$ tal que

$$\sum_{i\in F_n}|x_i| \geq y - \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

Portanto, temos as inequações

$$\sum_{i\in F}|x_i| \leq \frac{1}{n}, \tag{2.2}$$

para todo $F \in \mathcal{F}(I)$ com $F \cap F_n = \varnothing$. Seja $x_n = \sum_{i\in F_n} x_i$. Logo, por [2.2], temos

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{i\in F_n\setminus F_m}|x_i| \leq \frac{1}{m},$$

para todo natural m e n com $n \geq m$. Conseqüentemente (x_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja x o seu limite. Podemos determinar para cada $\delta > 0$ um número natural n com $n \geq \frac{2}{\delta}$ e $|x_n - x| \leq \frac{\delta}{2}$. Então, para todo conjunto $F \in \mathcal{F}(I)$ com $F \supset F_n$ vale

$$\left|\sum_{i\in F} x_i - x\right| = \left|\sum_{i\in F\setminus F_n} x_i + x_n - x\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Portanto, $(x_i)_{i\in I}$ é somável para x. ▒

2.1.7 OBSERVAÇÕES.

1. *Pela proposição anterior, se uma família numérica é somável, então* $(|x_i|)_{i\in I}$ *é somável e vale* $\sum_{i\in I} |x_i| = \sup\left\{\sum_{i\in F} |x_i|\,; F \in \mathcal{F}(I)\right\}$.
2. *O Teorema* [2.1.4] *segue do Teorema* [2.1.6].

2.1.8 PROPOSIÇÃO. *Se as famílias* $(x_i)_{i\in I}$ *e* $(y_i)_{i\in I}$ *de um espaço normado* E *são somáveis, e têm por somas* x *e* y, *respectivamente, então, as famílias*

$$(x_i + y_i)_{i\in I} \text{ e } (\lambda x_i)_{i\in I}\,,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

são somáveis e têm por somas $x + y = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ *e* $\lambda x = \lambda \sum_{i\in I} x_i$, *respectivamente.*

Para séries de números reais ou complexos, temos o critério de Cauchy, que nos dá uma condição necessária e suficiente para que uma série seja convergente sem termos de conhecer a soma da mesma. Assim, vamos dar um critério análogo para famílias somáveis.

2.1.9 DEFINIÇÃO. Uma família $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de um espaço normado E satisfaz a **condição de Cauchy** se, dado $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset I$ tal que, para todo subconjunto finito $F' \subset I$ e disjunto de F_ϵ, tem-se

$$\left\|\sum_{i\in F'} x_i\right\| < \epsilon.$$

2.1.10 PROPOSIÇÃO. *Toda família somável* $(x_i)_{i\in I}$ *satisfaz a condição de Cauchy.*

Demonstração. De fato, seja

$$x = \sum_{i\in I} x_i,$$

Dado $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset I$ tal que, para todo subconjunto finito $F \supset F_\epsilon$ com $F \subset I$, temos

$$\left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \epsilon.$$

Tomando qualquer subconjunto finito $F' \subset I$ com $F' \cap F_\epsilon = \emptyset$, teremos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in F'} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i \in F' \cup F_\epsilon} x_i - x - \Big(\sum_{i \in F_\epsilon} x_i - x \Big) \right\| \le \\ &\le \left\| \sum_{i \in F' \cup F_\epsilon} x_i - x \right\| + \left\| \sum_{i \in F_\epsilon} x_i - x \right\| \le 2\epsilon \end{aligned}$$

▒

2.1.11 Proposição. *Se uma família $(x_i)_{i \in I}$ satisfaz a condição de Cauchy, então o subconjunto*

$$I^* = \{i \in I, x_i \neq 0\}$$

é enumerável.

Demonstração. De fato, temos

$$I^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

onde

$$I_n = \Big\{ i \in I \;\Big|\; \|x_i\| \ge \frac{1}{n} \Big\}.$$

Notemos que, $i \notin I^*$ então, $x_i = 0$. Vamos ver que I_n é finito. Por hipótese, para cada $\epsilon = \frac{1}{n}$, existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset I$ tal que, para todo subconjunto finito $F' \subset I$ e disjunto de F_ϵ, temos

$$\left\| \sum_{i \in F'} x_i \right\| < \frac{1}{n}.$$

Em particular, para cada $i \notin F_\epsilon$, tem-se $\|x_i\| < \frac{1}{n}$ e, portanto, $i \notin I_n$ Logo, $I_n \subset F_\epsilon$ e I_n é finito, para cada $n \in \mathbb{N}$. ▒

2.1.12 Observação. *Em outras palavras, a proposição acima diz que só as famílias que são, "essencialmente", enumeráveis é que podem ser somáveis.*

2.1.13 Teorema (critério de Cauchy). *Seja E um espaço de Banach. Uma família $(x_i)_{i \in I}$ é somável se e somente se, satisfaz a condição de Cauchy.*

Demonstração. Basta apenas demonstrar a recíproca. Se a família $(x_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy, então, usando a notação da proposição [2.1.11], tomemos

$$y_n = \sum_{i\in I_n} x_i.$$

Vamos demonstrar que a seqüência y_n é uma seqüência de Cauchy: pela condição de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset I^*$ [ii] tal que, para $F' \subset I^*$, com $F' \cap F_\epsilon = \varnothing$, temos $\|\sum_{i\in F'} x_i\| < \epsilon$. Observemos que o conjunto $\{x_n | n \in F_\epsilon\}$, todos os x_n tem norma positiva e, portanto maior que um certo $\frac{1}{n_0}$, donde $I_{n_0} \supset F_\epsilon$. Para $m > n \geq n_0$, temos $F' = I_m - I_n$ com

$$(I_m - I_n) \cap F_\epsilon = \varnothing.$$

Daí,

$$\|y_m - y_n\| = \left\|\sum_{i\in F'} x_i\right\| < \epsilon.$$

Sendo, pois, (y_n) uma seqüência de Cauchy em E, que é espaço de Banach, seja x seu limite. temos

$$\|x - y_n\| \leq \epsilon, \text{ para } n \geq n_0.$$

Vamos mostrar que

$$\sum_{i\in I} x_i = x.$$

De fato, para todo $F \supset I_{n_0}$, temos $F' = F - I_{n_0}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \left\|x - \sum_{i\in F} x_i\right\| &= \left\|x - \sum_{i\in I_{n_0}} x_i - \sum_{i\in F'} x_i\right\| \\ &= \left\|x - y_{n_0} - \sum_{i\in F'} x_i\right\| \\ &\leq \|x - y_{n_0}\| + \left\|\sum_{i\in F'} x_i\right\| < 2\epsilon. \end{aligned}$$

▒

2.1.14 COROLÁRIO. *Seja E um espaço de Banach e seja $(x_i)_{i\in I}$ uma família somável em E. Para cada subconjunto $I' \subset I$ a família $(x_i)_{i\in I'}$ é somável.*

[ii] para os índices $i \notin I^*$, temos $x_i = 0$.

Demonstração. Pela condição de Cauchy, para cada $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset I$ tal que, para cada parte finita F de I, disjunta de $F_\epsilon \subset I$, $\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| < \epsilon$; tem-se então que $I' \cap F_\epsilon$ é uma parte finita de I' tal que, para todo $F' \subset I'$, disjunta de $I' \cap F_\epsilon$, $\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| < \epsilon$ e usando, mais uma vez, a condição de Cauchy, a família $(x_i)_{i\in I'}$ é somável. ▒

2.1.15 PROPOSIÇÃO. *Sejam E um espaço de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ uma família somável de E e $I^* = \{i \in I;\ x_i \neq 0\}$. Então, a família $(x_i)_{i\in I}$ é somável se, e somente se, a subfamília $(x_i)_{i\in I^*}$ é somável e, nesse caso,*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I^*} x_i.$$

Demonstração. Já sabemos que, se $(x_i)_{i\in I}$ é somável, o mesmo ocorre com $(x_i)_{i\in I^*}$. Suponhamos que $(x_i)_{i\in I^*}$ é somável, e com soma x. Dados $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F'_\epsilon \subset I^*$ tal que, qualquer que seja a parte finita F' de I^*, contendo F'_ϵ, se tem

$$\left\|x - \sum_{i\in F'} x_i\right\| < \epsilon.$$

Se F é um subconjunto finito de I, contendo F'_ϵ, temos que $F = F' \cap I^*$ é uma parte finita de I^*, contendo F'_ϵ, e

$$\sum_{i\in F} x_i = \sum_{i\in F'} x_i$$

mais ainda,

$$\left\|x - \sum_{i\in F'} x_i\right\| < \epsilon.$$

▒

2.1.16 PROPOSIÇÃO. *Sejam E, F espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua. Dada uma família somável $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de E, cuja soma é x, então, a família $\big(T(x_i)\big)_{i\in I}$ é somável em F e tem por soma $T(x)$.*

Demonstração. Segue da definição de família somável e da desigualdade

$$\left\|T(x) - \sum_{i\in F} T(x_i)\right\| = \left\|T\big(x - \sum_{i\in F} x_i\big)\right\| \le \|T\| \left\|x - \sum_{i\in F} x_i\right\|,$$

para cada conjunto finito F. ▒

2.1.17 Teorema (critério de Cauchy para séries). *Uma série* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *converge se, e somente se,*

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \left\| \sum_{k=m}^{n} x_k \right\| = 0.$$

2.1.18 Proposição. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *uma série num espaço de Banach. Então,*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_{\tau(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, *se a série for incondicionalmente convergente.*

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *é convergente, se a série for absolutamente convergente.*

2.1.19 Teorema. *Um espaço normado E é um espaço de Banach se, e somente se, qualquer série absolutamente somável é somável.*

Demonstração. Para demonstrar a completude de E, basta mostrar que toda seqüência (x_n) de Cauchy é convergente. Para isso é suficiente que (x_n) possua uma subseqüência convergente. De fato, escolha uma seqüência de inteiros positivos (n_k) tal que,

$$y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \quad \text{e} \quad \|y_k\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Desta forma, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ é absolutamente convergente, e pela hipótese, é convergente em E. Da identidade

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_1}, \tag{2.3}$$

concluímos que a subseqüência (x_{n_k}) é convergente.

Reciprocamente, se E for Banach, mostremos que uma série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente. De fato, dada uma permutação σ de $\mathbb{N}$, temos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ e pelo Teorema de Dirichlet sabemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\|x_{\sigma(n)}\right\| < \infty$. Usando a desigualdade triangular temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} \right\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} x_{\sigma(j)} \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(j)}\right\|.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ satisfaz o critério de Cauchy. ∎

Não é difícil exibir exemplos de espaços de Banach, de dimensão infinita, que possuem séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes. Antes vamos assumir o seguinte resultado que caracteriza as séries incondicionalmente convergentes, para sua demonstração veja [Mart, Cap. 2,§1] ou [Kade].

2.1.20 TEOREMA. *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência num espaço de Banach E. Então as seguintes condições são equivalentes.*

1. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para qualquer permutação π de inteiros positivos.*
2. *A série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge para qualquer seqüência (n_i) estritamente crescente de inteiros positivos.*
3. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge para toda seqüência de sinais θ_n, isto é, $\theta_n = \pm 1$.*
4. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é somável, isto é, existe $x \in E$ tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ finito tal que para qualquer $F \subset \mathbb{N}$ finito, $F \supset F_\epsilon$ tem-se $\left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \epsilon$.*

Num espaço de Banach, como vimos na demonstração de [2.1.19], qualquer série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente. Daremos dois exemplos de séries num espaço de Banach de dimensão infinita que são incondicionais mas não absolutamente convergentes.

2.1.21 EXEMPLO. *Sejam $E = \ell_2$ e a seqüência (x_k), $x_k = \left(0, \cdots, \frac{1}{k}, \cdots\right)$. A série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge para $s = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ incondicionalmente, mas não é absolutamente convergente em E, pois,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

A série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge para s, desde que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - s \right\| = \left\| \left(0, \cdots, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots\right) \right\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

Para mostrar que a convergência é incondicional, vamos usar a caracterização 3 do teorema [2.1.20]. Seja $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\}$ uma função qualquer. Vamos mostrar que $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i e_i$ é convergente. De fato, para $n > m$ inteiros positivos,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i e_i - \sum_{i=1}^{m} \theta_i e_i \right\| = \left\| \left(0, \cdots, 0, \frac{\theta_{m+1}}{m+1}, \cdots, \frac{\theta_n}{n}, 0, \cdots \right) \right\| = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2} \longrightarrow 0,$$

satisfazendo o critério de Cauchy, portanto $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i$ *é convergente.*

2.1.22 EXEMPLO. *Sejam* $e_1 = (1, 0, \cdots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots)$, $\cdots$*; os vetores canônicos de* c_0. *A série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k \log(k+1)}$$

é incondicionalmente convergente em c_0, *mas não é absolutamente convergente. De fato, vamos usar a caracterização 2 do teorema* [2.1.20]. *Seja* (n_k) *uma seqüência estritamente crescente de inteiros. Então, para* $n > m$ *temos*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{e_{n_k}}{n_k \log(n_k+1)} - \sum_{k=1}^{m} \frac{e_{n_k}}{n_k \log(n_k+1)} \right\|_\infty &= \sup \left\{ \frac{1}{n_k \log(n_k+1)}, m+1 \leq k \leq n \right\} \\ &= \frac{1}{n_{m+1} \log(n_{m+1}+1)} \stackrel{m \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Logo, a série é incondicionalmente convergente. A norma em c_0 *de cada elemento é*

$$\left\| \frac{e_n}{n \log(n+1)} \right\|_\infty = \frac{1}{n \log(n+1)}. \tag{2.4}$$

Portanto a série não converge absolutamente.

2.1.23 OBSERVAÇÃO. *O exemplo acima fornece uma maneira de construir séries que são incondicionalmente convergentes mas, não são absolutamente convergentes em* c_0. *De fato, seja* $A = \{(a_i)_{i=1}^{\infty}, a_i \in \mathbb{R}, 0 < a_i < a_{i+1} \text{ e } a_i \leq \log(i+1)\}$. *A série procurada é*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_k}{i a_i}.$$

Basta notar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\| \frac{e_k}{i a_i} \right\|_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i a_i} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \log(i+1)} = \infty.$$

A incondicionalidade vem do fato da seqüência ser estritamente decrescente e positiva.

A relação entre série incondicional e série absoluta num espaço de Banach foi solucionado pelos matemáticos Dvoretzky and Rogers em 1950, veja as referências [KaKa, DJT].[iii]

[iii] Achar esta relação se tornou um dos problemas do célebre Scottisch Book.Mesmo no espaço ℓ_1, aparentemente simples, foi resolvido na década de 40 pelo matemático M. S. Macphail.

2.1.24 TEOREMA (DVORETZKY-ROGERS). *Se cada cada série incondicionalmente convergente no espaço de Banach E é absolutamente convergente, então E tem dimensão finita.*

2.2 Convergência fraca em espaços normados

O objetivo desta seção é dar pré-requesitos para o estudo da convergência fraca, estabelecendo seus principais teoremas. Sugerimos consultar a referência [Dies].

A topologia fraca em E, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia invariante sob translações que admite como base de vizinhanças da origem os conjuntos da forma

$$W\big(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n; \epsilon\big) = \big\{x \in E; |\varphi_j(x)| < \epsilon\big\},$$

para $1 \leq j \leq n$, com $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in E'$ e $\epsilon > 0$.

2.2.1 OBSERVAÇÃO. *Pode-se demonstrar que na topologia fraca existem abertos da topologia da norma de E que não são abertos da topologia fraca e as topologias coincidem se, e somente se, E tem dimensão finita.*

2.2.2 DEFINIÇÃO. Seja E um espaço normado. Uma seqüência (x_n) converge fracamente para $x \in E$, se $\varphi(x_n)$ converge para $\varphi(x)$, para cada $\varphi \in E'$. Dizemos apenas fracamente de Cauchy quando para todo $\varphi \in E'$ a seqüência $\big(\varphi(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy.

A convergência de seqüências na topologia fraca $\sigma(E, E')$ é equivalente à convergência fraca, cuja demonstração é muito simples. Usaremos a notação $x_n \xrightarrow{w} x$, significando que x_n converge fracamente para x e $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ significando $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0$.

2.2.3 PROPOSIÇÃO. *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ num espaço normado E, então:*

(i) O limite é único;

(ii) Toda subseqüência (x_{n_k}) converge fracamente para x;

2.2.4 PROPOSIÇÃO. *Seja (x_n) uma seqüência num normado E. Então,*

1. Se $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ então, $x_n \xrightarrow{w} x$;

2. *Se* $\dim E < \infty$, *então* $x_n \xrightarrow{w} x$ *implica* $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Demonstração. (1). Para cada $\varphi \in E'$ temos

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| = |\varphi(x_n - x)| \leq \|\varphi\| . \|x_n - x\| .$$

Logo, $\varphi(x_n)$ converge para $\varphi(x)$ e, portanto, $x_n \xrightarrow{w} x$.

(2) Suponha que $\dim E < \infty$. Seja $\{e_1, \cdots, e_k\}$ uma base de E. O conjunto $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\} \subset E'$, com $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$, é uma base de E'. Então, $x_n = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_n)e_i$ e $x = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)e_i$, para cada $n \geq 1$. Como $x_n \xrightarrow{w} x$, segue que, $\varphi_i(x_n)$ converge para $\varphi_i(x)$, para cada $i = 1, \cdots, k$. Logo,

$$\|x_n - x\| \leq \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x_n) - \varphi_i(x)| \, \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x_n) - \varphi_i(x)| \, \alpha,$$

onde, $\alpha = \max\big\{ \|e_i\| : 1 \leq i \leq k\big\}$. ▒

2.2.5 Observação. *A convergência fraca, em geral, não implica na convergência na norma.*

Para o exemplo a seguir, seja

$$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

2.2.6 Exemplo. *Seja* $E = \ell_p$, $1 < p < \infty$. *Considere a seqüência* (e_n) *tal que* $\|e_n\|_p = 1$ *para todo* n. *Logo,* $e_n \not\longrightarrow 0$. *Entretanto,* $\varphi(e_n) \longrightarrow 0$ *para cada* $\varphi \in E'$. *Seja* $\varphi \in \ell_q$, $\varphi = (y_i)$ *com* $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q$. *Logo,* y_i *converge a zero. Pela identificação do dual,* $\varphi(e_i) = y_i$ *converge a zero.*

2.2.7 Exemplo. *Seja* $E = c_0$ *e* $x_n = (1, 1, \cdots, 1, 0 \cdots)$ *onde* x_n *tem* n *coordenadas não nulas. Então* x_n *é fracamente de Cauchy, pois* $\varphi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0' = \ell_1$. *Nós temos que* $\varphi(x_n) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$ *quando* $n \to \infty$. *Mas* (x_n) *não é fracamente convergente em* E, *pois* $(1, 1, \cdots) \notin c_0$.

Para as demonstrações dos teoremas abaixo consultar [Mart, Cap. 3, §2] ou [DJT, Cap. 1].

2.2.8 Teorema (Mazur). *Se* A *é um conjunto fechado e convexo em* E *então,* A *é fracamente fechado.*

2.2.9 TEOREMA. *Se (x_n) é fracamente convergente para $x \in E$, então $x \in \overline{span[x_n,\, n \in \mathbb{N}]}^{\|\cdot\|}$ e $\|x\| \leq \sup\limits_n \|x_n\|$.*

2.2.10 TEOREMA. *Se E é separável então, a bola unitária $\mathbb{B} = \{\varphi;\ \varphi \in E', \|\varphi\| \leq 1\}$ é seqüêncialmente compacta na topologia fraca estrela.*

2.2.11 TEOREMA. *Se A é tal que $span[A]$ é denso em E' e (x_n) é uma seqüência em E tais que $\sup_n \|x_n\| < \infty$ e para algum $x \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$, $\varphi \in A$, então (x_n) converge para x fracamente.*

O próximo teorema é essencial na demonstração do Teorema de W. Orlicz [Orli].

2.2.12 TEOREMA ([iv]SCHUR-ℓ_1). *Em ℓ_1, convergência fraca de seqüência coincide com convergência na norma.*

Demonstração. Vide [DJT, Teorema 1.7, Cap. 1]. ▒

2.3 Relações entre espaços de seqüências

Nesta seção, nosso trabalho está concentrado em definir os espaços de seqüências $I\ell_1^u(E)$, $B_s(E)$, $B_w(E)$ e $\ell_1^w(E)$.

2.3.1 DEFINIÇÃO. Seja E um espaço vetorial normado.

a) $\ell_1^u(E)$ denota o espaço vetorial de todas as seqüência $(x_n) \subset E$ tais que, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ é convergente, para toda bijeção $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

b) $\ell_1^w(E)$ denota o espaço vetorial de todas as seqüência $(x_n) \subset E$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \infty$, para todo $\varphi \in E'$.

2.3.2 OBSERVAÇÃO. *A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em E se, e somente se, para cada $\varphi \in E'$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \infty.$$

[iv]L. Schur, 1921.

Desta forma, a cada elemento de $\ell_1^w(E)$ está associada uma série fracamente incondicionalmente de Cauchy.

2.3.3 PROPOSIÇÃO. *$\ell_1^w(E)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|(x_n)\|_w = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|\,;\ \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\right\}.$$

Demonstração. Cada $(x_n) \in \ell_1^w(E)$ define uma aplicação

$$T : \varphi \in E' \mapsto \big(\varphi(x_n)\big) \in \ell_1.$$

Claramente, T é linear. Para provar que T é contínua basta mostrar que o gráfico de T é fechado.

Suponhamos que φ_k converge a φ em E' e

$$T(\varphi_k) = \big(\varphi_k(x_n)\big)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{k\to\infty} (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Então, por um lado,

$$\varphi_k(x_n) \xrightarrow{k\to\infty} \eta_n$$

para qualquer n. Logo, $(\eta_n)_{n=1}^{\infty} = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Assim,

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|\,;\ \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\right\} = \sup\left\{\, \|T\varphi\|\,,\ \|\varphi\| \leq 1\right\} = \|T\| < \infty.$$

Desta forma, $\|(x_n)\|_w$ está bem definida e é fácil ver que é uma norma em $\ell_1^w(E)$. Para provar que $\ell_1^w(E)$ é completo, seja $(x_n^j)_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\ell_1^w(E)$. Em particular

$$\left\|x_m^j - x_m^k\right\| = \sup\left\{\, \left|\varphi(x_m^j - x_m^k)\right|,\ \|\varphi\| \leq 1\right\} \leq \left\|(x_n^j - x_n^k)_{n=1}^{\infty}\right\|_w.$$

Logo, $(x_m^j)_{j=1}^{\infty}$ converge a x_m para cada $m \in \mathbb{N}$. Provaremos que $(x_n) \in \ell_1^w(E)$ e que (x_n^j) converge a (x_n) em $\ell_1^w(E)$. Dado $\epsilon > 0$, existe j_0 tal que,

$$\left\|(x_n^j - x_n^k)\right\|_w = \sup\left\{\sum \left|\varphi(x_n^j - x_n^k)\right|, \varphi \in B_{E'}\right\} \leq \epsilon,$$

para $j, k \geq j_0$. Daí, $\sup\left\{\sum |\varphi(x_n^j - x_n)|\,,\ \|\varphi\| \leq 1\right\} \leq \epsilon$, para $j \geq j_0$. Logo, $x_n^j - x_n \in \ell_1^w(E)$ e $\|x_n^j - x_n\|_w \leq \epsilon$, para todo $j \geq j_0$. Portanto,

$$(x_n) = (x_n^j) - (x_n^j - x_n) \in \ell_1^w(E).$$

$\blacksquare$

Denotemos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos e não vazios de $\mathbb{N}$. Vamos mostrar mais tarde que $(x_i) \in \ell_1^w(E)$ se, e somente se, $\sup\left\{\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| : F \in \mathcal{F}\right\} < \infty$. Este supremo define uma nova norma em $\ell_1^w(E)$. Daí, para $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$,

$$\|x\|_1 = \sup\left\{\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| : F \in \mathcal{F}\right\}.$$

Quando nos referirmos ao espaço $\ell_1^w(E)$ estaremos sempre, *salvo menção explícita em contrário*, considerando a norma $\|\,.\,\|_1$. Veremos que $\ell_1^u(E)$ é um subespaço fechado de $\left(\ell_1^w(E), \|\,.\,\|_1\right)$.

2.3.4 DEFINIÇÃO. Dizemos que uma seqüência (x_n) num espaço de Banach E tem soma invariante quando existe $x \in E$ tal que, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e x é também a soma de cada rearranjamento convergente de (x_n). Desta forma,

$$I\ell_1^u(E) = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty};\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} \text{ sempre que } \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} \text{ converge}\right\}.$$

Se a dimensão de E for finita, utilizando o Teorema de Dirichlet, $I\ell_1^u(E) = \ell_1^u(E)$. No caso da dimensão de E ser infinita veremos que em qualquer espaço de Banach, $\ell_1^u(E)$ é um subconjunto próprio de $I\ell_1^u(E)$.

2.3.5 DEFINIÇÃO. Seja (x_i) uma seqüência num espaço de Banach E.

a) Dizemos que x é uma **soma** (forte) de (x_i) se, $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$;

b) Dizemos que x é uma **soma fraca** de (x_i) se $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i)$, para todo $\varphi \in E'$.

Com esta definição, dada uma seqüência em E, esta pode não ter uma soma fraca. Nós seguimos o trabalho de C. W. Macarthur [Mcar], o qual mostra que o espaço de Banach $E = c_0$, tem uma seqüência que está em $\ell_1^w(E)$ mas, não tem uma soma forte. Para isso, vamos introduzir dois novos subespaços de $\ell_1^w(E)$:

$$\boldsymbol{B}_w(E) = \{s \in \ell_1^w(E) : s \text{ tem uma soma fraca}\} \text{ e } \boldsymbol{B}_s(E) = \{s \in \ell_1^w(E) : s \text{ tem uma soma}\}.$$

Veremos que em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, é verdade que

$$\ell_1^u(E) \subset B_s(E) = I\ell_1^u(E) \cap \ell_1^w(E) \subset B_w \subset \ell_1^w(E).$$

No caso $E = c_0$, as inclusões acima são próprias.

2.4 Subespaços lineares fechados de $\ell_1^w(E)$

Vamos caracterizar a completude dos subespaços B_w, $B_s \subset \ell_1^w(E)$ e relacioná-los.

2.4.1 PROPOSIÇÃO. *Se (x_i) é fracamente incondicionalmente somável então,*

$$\begin{aligned}\sup\left\{\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| : F\in\mathcal{F}\right\} &\leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi(x_i)|\,;\,\varphi\in E' \text{ e } \|\varphi\|\leq 1\right\}\\ &\leq 2\sup\left\{\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| : F\in\mathcal{F}\right\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Na demonstração da proposição [2.3.3], construímos uma aplicação $T : \varphi\in E' \mapsto \big(\varphi(x_n)\big)\in\ell_1$ que é contínua. Daí, $(x_i)\in\ell_1^w(E)$ se, e somente se,

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi(x_i)|\,;\,\varphi\in E' \text{ e } \|\varphi\|\leq 1\right\}<\infty.$$

Sejam $I_n^+=\{i;\, i\leq n,\ \varphi(x_i)\geq 0\}$, $I_n^-=\{i;\, i\leq n,\ \varphi(x_i)<0\}$ e $I_n=I_n^+\cup I_n^-$. Assim, para cada $\varphi\in B_{E'}$ temos

$$\begin{aligned}\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi(x_i)|,\ \varphi\in B_{E'}\right\} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left\{\sup_n\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)|\right)\right\}=\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left\{\sup_n\left(\sum_{i\in I_n}|\varphi(x_i)|\right)\right\}\\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left\{\sup_n\left\{\sum_{i\in I_n^+}\varphi(x_i)+\sum_{i\in I_n^-}-\varphi(x_i)\right\}\right\}\\ &\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left\{\sup_n\left\{\sum_{i\in I_n^+}\varphi(x_i)\right\}+\sup_n\left\{\sum_{i\in I_n^-}-\varphi(x_i)\right\}\right\}\\ &\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left\{\sup_n\left\{\left|\sum_{i\in I_n^+}\varphi(x_i)\right|\right\}+\sup_n\left\{\left|\sum_{i\in I_n^-}\varphi(x_i)\right|\right\}\right\}\\ &\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\sup_n\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right|\right\}+\sup_{\varphi\in B_{E'}}\sup_n\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right|\right\}\\ &\leq \sup_n\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right|\right\}+\sup_n\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right|\right\}\\ &\leq 2\sup\left\{\left\|\sum_{i\in F}x_i\right\| : F\in\mathcal{F}\right\}.\end{aligned}$$

Quanto a segunda parte,

$$\begin{aligned}
\infty > \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi(x_i)|\,,\ \varphi\in B_{E'}\right\} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\sup\left\{\sum_{i\in F}|\varphi(x_i)|\,,\ F\in\mathcal{F}\right\}\\
&\geq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\sup\left\{\left|\sum_{i\in F}\varphi(x_i)\right|,\ F\in\mathcal{F}\right\}\\
&\geq \sup_{F\in\mathcal{F}}\sup\left\{\left|\sum_{i\in F}\varphi(x_i)\right|,\ \varphi\in B_{E'}\right\}\\
&\geq \sup_{F\in\mathcal{F}}\left\|\sum_{i\in F}x_i\right\|.
\end{aligned}$$

▒

2.4.2 COROLÁRIO. *O espaço vetorial normado* $(\ell_1^w(E), \|\,.\,\|_1)$ *é completo.*

Demonstração. Pela Proposição [2.4.1] as normas $\|\,.\,\|_1$ e $\|\,.\,\|_w$ são equivalentes em $\ell_1^w(E)$.

▒

2.4.3 TEOREMA. *Seja E um espaço de Banach. Então $B_w(E)$ e $B_s(E)$ são subespaços fechados de $\ell_1^w(E)$, e a aplicação $L : s\in B_w(E)\mapsto L(s)\in E$ dada por $L(s)$ igual a soma fraca de s, é uma aplicação linear contínua e tem norma 1.*

Demonstração. Para mostrar que $B_w(E)$ é fechado em $\ell_1^w(E)$, seja $(s_n)\subset B_w(E)$ uma seqüência em $B_w(E)$ que converge para $s\in\ell_1^w(E)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja x_n a soma fraca de s_n. Como (s_n) é uma seqüência de Cauchy em $\ell_1^w(E)$ então, para cada $\epsilon>0$, existe $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ tal que,

$$\|s_m - s_n\|_1 < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para } m,n\geq n_\epsilon.$$

Para esses valores de m, n e $\varphi\in E'$, com $\|\varphi\|\leq 1$, temos que,

$$|\varphi(x_m - x_n)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi(s_m^i - s_n^i)\right| \leq 2\,\|s_m - s_n\|_1 < \epsilon.$$

A segunda desigualdade provem da Proposição [2.4.1]. Portanto, por [A.4.4], (x_n) é uma seqüência de Cauchy em E e, assim, (x_n) tem um limite x. Agora, para $\epsilon>0$ e $\varphi\in E'$, não identicamente nula, existe um $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ tal que,

$$\|s_n - s\|_1 < \frac{\epsilon}{4\,\|\varphi\|},$$

para $n\geq n_\epsilon$, e desde que x_n converge para x, escolhamos n_ϵ tal que

$$\|x - x_n\| < \frac{\epsilon}{2\|\varphi\|}.$$

Aqui, se $n \geq n_\epsilon$, então

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(s^i)\right| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_n)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(s_n^i - s^i)| \\
&\leq \|\varphi\| \|x - x_n\| + 2\|\varphi\| \|s_n - s\|_1 \\
&\leq \|\varphi\| \frac{\epsilon}{2\|\varphi\|} + 2\|\varphi\| \|s_n - s\|_1 < \epsilon.
\end{aligned}$$

A segunda desigualdade vem da Proposição [2.4.1], x é a soma fraca de s. Logo, $B_w(E)$ é fechado em $\ell_1^w(E)$.

Mostremos que $B_s(E)$ é fechado em $\ell_1^w(E)$. Suponha que a seqüência $(s_n) \subset B_s(E)$ converge para $s \in \ell_1^w(E)$ e seja x_n a soma forte de s_n. Como $B_s(E) \subset B_w(E)$ e $B_w(E)$ é fechado em $\ell_1^w(E)$, segue que s tem uma soma fraca x e x_n converge fortemente para x. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $p = p(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|x - x_p\| < \frac{\epsilon}{3}$$

e

$$\|s_p - s\|_1 < \frac{\epsilon}{3};$$

como $x_p = \sum_{i=1}^{\infty} s_p^i$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que se $r \geq q$ então $\left\|x_p - \sum_{i=1}^{r} s_p^i\right\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Portanto, se $r \geq q$, então

$$\left\|x - \sum_{i=1}^{r} s_i\right\| \leq \left\|x - x_p\right\| + \left\|x_p - \sum_{i=1}^{r} s_p^i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{r} s_p^i - \sum_{i=1}^{r} s^i\right\| < \epsilon.$$

Logo, s tem soma x e $B_s(E)$ é fechado.

Agora vamos mostrar que L é linear e tem norma 1. Consideremos a bola unitária $B_{E'}$ em E' e fixe $s \in B_w(E)$. Seja $x = L(s)$ a sua soma fraca. Então,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sup\{\,|\varphi(x)|\,;\varphi\in B_{E'}\}\\
&= \sup\left\{\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi(s^i)\right|;\varphi\in B_{E'}\right\}\\
&\le \sup\left\{\sup\left\{\left|\varphi(\sum_{i=1}^{n}s^i)\right|;n\in\mathbb{N}\right\};\varphi\in B_{E'}\right\}\\
&= \sup\left\{\sup\left\{\left|\varphi(\sum_{i=1}^{n}s^i)\right|;\varphi\in B_{E'}\right\};n\in\mathbb{N}\right\}\\
&= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}s^i\right\|;n\in\mathbb{N}\right\}\le\|s\|_1.
\end{aligned}$$

A aplicação L é obviamente linear e contínua com $\|L\|\le 1$. Agora, qualquer que seja $x_0\in E\backslash\{0\}$, a seqüência $(x_0,0,\cdots)$ está em $B_w(E)$ e tem norma um, o que implica $\|L\|=1$.

2.5 Extensão do Teorema de Hardwiger

Veremos uma extensão do Teorema de Hardwiger para espaços de Banach. O Teorema de Hardwiger mostra que, se E é um espaço de Hilbert com dimensão infinita então, $\ell_1^u(E)$ é um subespaço próprio de $I\ell_1^u(E)$. C.W. Mcarthur [Mcar] estende o resultado de Hardwiger para um espaço de Banach qualquer. Antes veremos a definição de sistemas biortogonais.

2.5.1 Definição. Sejam (x_i) e (φ_i) seqüências, respectivamente, nos espaços normados E e E'. O par (x_i,φ_i) é chamado *sistema biortogonal* para E se $\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}$.

2.5.2 Definição. O *operador de expansão* U_n é definido por

$$U_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)x_i,$$

para todo $x\in E$.

2.5.3 Proposição. *Seja (x_i,φ_i) um sistema biortogonal para E tal que $\sup_n|\varphi(U_nx)|<\infty$, $x\in E$, $\varphi\in E'$. Então, (x_i) é uma base de Schauder*[v] *para o espaço $\overline{span[x_i,\ i\in\mathbb{N}]}$.*

[v] Ver Apêndice A, p. 66.

Demonstração. Por hipótese, $\sup_n |\varphi(U_n x)| < \infty$, $x \in E$, $\varphi \in E'$. Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhauss[vi], existe uma constante $M > 0$ tal que,

$$\sup_n \|U_n\| < M. \tag{2.5}$$

Tome $x \in \overline{span[x_i,\ i \in \mathbb{N}]}$. Então, para cada $\epsilon > 0$ existe um elemento $y_j \in span[x_1, \cdots, x_j]$ tal que,

$$\|x - y_j\| < \epsilon.$$

Mas,

$$\|x - U_n(x)\| \leq \|x - y_j\| + \|y_j - U_n(y_j)\| + \|U_n(y_j) - U_n(x)\|$$

e $U_n(y_j) = y_j$ para cada $n \geq j$, devido a biortogonalidade. Assim,

$$\|x - U_n(x)\| \leq (1 + M)\epsilon, \text{ para todo } n \geq j.$$

E também,

$$x = \lim_{n\to\infty} U_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) x_i.$$

É claro que os coeficientes da expansão de x são únicos, desde que,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) = 0, \tag{$*$}$$

com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots$, aplicando φ_k em $(*)$ e usando que $\varphi_k(x_j) = \delta_{kj}$, obtemos $\alpha_k = 0$, para todo k. ▒

2.5.4 Corolário. *Seja (x_i, φ_i) um sistema biortogonal para E. Então, $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Schauder, para $\overline{span[x_i,\ i \in \mathbb{N}]}$ se, e somente se, $1 \leq \sup_n \|U_n\| < \infty$.*

Apesar de todo espaço de Banach com uma base de Schauder ser separável a recíproca não é verdadeira. Esta afirmativa, proposta por S. Banach, ficou conhecida como o "Problema da Base". Esse problema foi resolvido em 1973 por P. Enflo. No teorema abaixo vemos que todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço com uma base. Usando a proposição [2.5.3], concluímos que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui um subespaço fechado com uma base.

[vi] Ver apêndice.

2.5.5 TEOREMA. *Cada espaço de Banach de dimensão infinita possui um subespaço com uma base.*

Para demonstração ver [Mart, p. 67].

2.5.6 TEOREMA. *Se E é um espaço de Banach, as afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) E tem dimensão infinita;

(ii) $I\ell_1^u(E) \setminus \ell_1^w(E) \neq \varnothing$;

(iii) $\ell_1^u(E)$ é um subconjunto próprio de $I\ell_1^u(E)$.

Demonstração. [(i)$\Rightarrow$(ii)] E contém um subespaço fechado de dimensão infinita

$$E_0 = \overline{span[x_i;\ i \in \mathbb{N}]}$$

tal que, $\|x_i\| = 1$. Daí, existe uma seqüência (φ_i) em E' tal que,

$$\begin{cases} \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}; \\ x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) x_i, \quad x \in E_0. \end{cases}$$

Consideremos B_k a seqüência finita definida por

$$B_k = \left(\frac{x_k}{k}, -\frac{x_k}{k}, \cdots, \frac{x_k}{k}, -\frac{x_k}{k} \right), \quad k = 1, 2, \cdots;$$

onde, B_k consiste de $2k^2$ elementos. Note que o termo $\dfrac{x_k}{k}$ ocorre k^2 vezes e a soma destes elementos(termos ímpares de B_k) de B_k tem norma k, pois,

$$\Bigg\| \overbrace{\frac{x_k}{k} + \frac{x_k}{k} + \cdots + \frac{x_k}{k}}^{k^2 \text{ parcelas}} \Bigg\| = \left\| k^2 \frac{x_k}{k} \right\| = \|k x_k\| = k$$

Seja a seqüência $s = (s_i)$ em E, construída da seguinte forma

$$\Big(\underbrace{\frac{x_1}{1}, \frac{-x_1}{1}}_{B_1}, \underbrace{\frac{x_2}{2}, -\frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2}, -\frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2}, -\frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2}, -\frac{x_2}{2}}_{B_2}, \underbrace{\frac{x_3}{3}, \cdots}_{\cdots} \Big)$$

isto é, colocamos o bloco B_2 adjacente ao bloco B_1, B_3 adjacente ao B_2, etc., e a norma dos termos ímpares em cada bloco é k. Segue-se daí que, $s \notin \ell_1^w(E)$. De fato, escolhendo,

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{1\} \\
F_2 &= \{3,5,7,9\} \\
F_3 &= \{11,13,15,\cdots,27\} \\
\vdots &= \vdots \\
F_n &= \text{Termos ímpares do bloco } B_n \text{ em } s. \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Big\|\sum_{i\in F_1} s_i\Big\| = 1,\ \Big\|\sum_{i\in F_2} s_i\Big\| = 2,\ \Big\|\sum_{i\in F_3} s_i\Big\| = 3,\ \cdots,\ \Big\|\sum_{i\in F_n} s_i\Big\| = n,\ \cdots;$$

donde, $\sup\left\{\Big\|\sum_{i\in F} s_i\Big\| : F\in\mathcal{F}\right\}$ não é finito e, pela Proposição [2.4.1], $s\notin \ell_1^w(E)$. É claro que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i = 0.$$

Falta mostrar que $s\in I\ell_1^w$. Suponha que $s' = (s_{\tau(i)})$ seja um novo rearranjamento convergente e tal que,

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} s_{\tau(i)}.$$

Desde que, E_0 é um subespaço fechado de E,

$$y = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{\tau(i)}\right)\in E_0.$$

Expressando y no sistema biortogonal

$$y = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(y)x_i. \tag{2.6}$$

Para cada $i\in\mathbb{N}$, tome n_0 suficientemente grande tal que, todos os termos do bloco B_i aparecem na soma $s_{\tau(1)}+\cdots+s_{\tau(n_0)}$.

Agora, se $n\geq n_0$ então,

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_i(s_{\tau(j)}) = \varphi_i\Big(\sum_{j\in F} s_{\tau(j)}\Big) + \sum_{j\in F'}\varphi_i(s_{\tau(j)})$$

onde, $F = \{j : j \leq n \text{ e } s_{\tau(j)} \in B_i\}$ e $F' = \{j : j \leq n \text{ e } j \notin F\}$. Assim, $\sum_{j\in F} s_{\tau(j)} = 0$, e pela biortogonalidade, $\varphi_i(s_{\tau(j)}) = 0$ se $j \in F'$. Daí, $\varphi_i(y) = 0$. Como $\varphi_i(y) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, usando a equação [2.6], temos que $y = 0$;

[(ii)⇒(iii)] É fácil ver que $\ell_1^u(E) \subset I\ell_1^u(E) \cap \ell_1^w(E)$ para todo espaço normado E; segue que $\ell_1^u(E) \subsetneq I\ell_1^u(E)$;

[(iii)⇒(i)] Desde que $\ell_1^u(E) = I\ell_1^u(E)$ se, e somente se, E tem dimensão finita então, (iii) implica (i). ▒

2.6 Comparações entre subespaços de $B_w(E)$

Nesta seção vamos comparar, segundo a inclusão, os subespaços $\ell_1^u(E), B_s(E), B_w(E)$ e $\ell_1^w(E)$. Concluiremos que $\ell_1^u(c_0) \subsetneq B_s(c_0) = I\ell_1^u(c_0) \cap \ell_1^w(c_0) \subsetneq B_w(c_0) \subsetneq \ell_1^w(c_0)$.

O próximo Corolário é uma conseqüência do Teorema de Hahn-Banach.[vii]

2.6.1 COROLÁRIO. *Se E é um espaço de Banach então,*

$$\ell_1^u(E) \subset B_s(E) = I\ell_1^u(E) \cap \ell_1^w(E) \subset B_w(E) \subset \ell_1^w(E).$$

Demonstração. Para qualquer espaço de Banach E, usando a Proposição [2.2.4],

$$\ell_1^u(E) \subset \ell_1^w(E).$$

É claro que $\ell_1^u(E) \subset B_s(E)$. Temos também que, $B_s(E) \subset I\ell_1^u(E)$, pois, se $s \in B_s(E)$ e s tem uma soma x e se, s' é um rearranjamento de s com soma x', pela definição de $\ell_1^w(E)$, $\varphi(x) = \varphi(x')$ para todo $\varphi \in E'$. Usando o Corolário [A.4.5], $x = x'$. Portanto, como é claro que $\ell_1^w(E) \cap I\ell_1^u(E) \subset B_s(E)$ temos

$$B_s(E) = I\ell_1^u(E) \cap \ell_1^w(E).$$

E pela Proposição [2.2.4], temos que $B_s(E) \subset B_w(E)$. ▒

2.6.2 DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach E é **fracamente seqüencialmente completo** se cada seqüência fracamente de Cauchy é fracamente convergente para um elemento[viii] de E.

[vii] Ver Apêndice A.

[viii] Uma seqüência (x_i) converge fracamente para x se, e somente se, (x_i) converge para x na topologia fraca. Para maiores detalhes ver [DJT].

A noção de convergência incondicional tem muitas aplicações, especialmente na teoria da integração. A demonstração do Lema abaixo, no espaço **fracamente seqüencialmente completo** E, é baseada no trabalho[ix] de W. Orlicz [Orli]. Para uma outra demonstração ver [Dies, Cap. IV, p. 6].

2.6.3 LEMA. *Seja E fracamente completo. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente incondicionalmente convergente então,*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} |\varphi(x_n)| = 0$$

uniformemente na bola unitária $B_{E'}$.

Demonstração. Seja Π o conjunto de todas as seqüências crescentes de números naturais. Para cada $\pi \in \Pi$, $\pi = (n_k)_{k=1}^{\infty}$, sabemos que

$$\sum_{n\in\pi} |\varphi(x_n)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_{n_k})| < \infty.$$

Logo, $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_{n_k})\right)_{k=1}^{\infty}$ é fracamente de Cauchy em E e converge a $x_\pi \in E$ na topologia fraca, em virtude de E ser fracamente seqüencialmente completo. Podemos escrever

$$\sum_{n\in\pi} \varphi(x_\pi) = \varphi(x_\pi)$$

para cada $\varphi \in E'$. A aplicação

$$\begin{aligned} V : E' &\longrightarrow \ell_1 \\ \varphi &\longmapsto \big(\varphi(x_i)\big)_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

é linear. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, V é continua. Vamos mostrar que V é **compacta**. Seja $M = \overline{span[x_i,\ i \in \mathbb{N}]}$. Como, para cada $\pi \in \Pi$, x_π é o limite fraco de uma seqüência de elementos de $[x_i,\ i \in \mathbb{N}]$, temos , $x_\pi \in M$, Teorema [2.2.8]. Seja (φ_i) uma seqüência em $B_{E'}$ e, para cada i, seja ψ_i a restrição de φ_i ao subespaço M. Desde que, M é separável, pelo Teorema [2.2.10], existe uma subseqüência (ψ_{i_k}) que converge na topologia fraca estrela de M', para um funcional $\psi_0 \in M'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, seja φ_0 a extensão de ψ_0 a

[ix] Versões mais elaboradas podem ser encontradas no livro de Diestel[Dies].

E. Vamos mostrar que $V(\varphi_{i_k})$ converge fracamente para $V(\varphi_0)$ em ℓ_1. Como V é limitado, é suficiente mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} f(V(\varphi_{i_k})),$$

para cada funcional limitado em ℓ_1'. Seja $\mathbf{1}_\pi$ a função característica do conjunto $\pi \in \Pi$. É fácil ver que, $\mathbf{1}_\pi \in \ell_\infty$ estando associado[x] ao funcional f_π em ℓ_1' definido por

$$f_\pi(\alpha) = \sum_i \mathbf{1}_\pi(i)\alpha_i = \sum_{i\in\pi} \alpha_i,$$

para cada $\alpha = (\alpha_i) \in \ell_1$. Isto mostra que,

$$\lim_{k\to\infty} f_\pi(V(\varphi_{i_k})) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\pi} \varphi_{i_k}(x_n) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{i_k}(x_\pi) = \psi_0(x_\pi)$$

mas, $\psi_{i_k}(x_\pi) \longrightarrow \psi_0(x_\pi)$, e

$$\psi_0(x_\pi) = \varphi_0(x_\pi) = \sum_{n\in\pi} \varphi_0(x_n) = f_\pi(V(\varphi_0))$$

Donde,

$$f_\pi(V(\varphi_{i_k})) = f_\pi(V(\varphi_0))$$

Do fato do conjunto $[\mathbf{1}_\pi,\ \pi \in \Pi]$ ser denso em ℓ_∞ temos, pela identificação $\ell_1' \cong \ell_\infty$, que $[f_\pi, \pi \in \Pi]$ é denso em ℓ_1'. Pelo teorema [2.2.11], $V(\varphi_{i_k})$ converge fracamente para $V(\varphi_0)$. Pelo Teorema de Schur-ℓ_1 [2.2.12], convergência fraca e forte são equivalentes em ℓ_1, isto é, $\overline{V(B_{E'})}$ é compacto[xi] e $V(\varphi_{i_k})$ converge fortemente para $V(\varphi_0)$. Logo, $V(B_{E'})$ é relativamente compacto em ℓ_1.

Seja (T_k) uma seqüência de operadores de ℓ_1, definidos por $T_k(\alpha_k) = (0,\cdots,0,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots)$. É claro que $\|T_k\| = 1$, para todo k, e a seqüência (T_k) formam um conjunto de funções eqüicontínuas no espaço compacto $\overline{V(B_{E'})}$. Como $\lim_{k\to\infty} T_k(\alpha) = 0$ para cada $\alpha \in \overline{V(B_E)}$, pelo Lema [A.5.2],

$$0 = \limsup_{k\to\infty} \left\{ \|T_k(\alpha)\| \,;\, \alpha \in V(B_{E'})\right\} = \limsup_{k\to\infty} \left\{ \left\|T_k\big((\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty}\big)\right\|,\ \varphi \in B_{E'}\right\},$$

e portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} |\varphi(x_i)| = 0$$

uniformemente na bola unitária $B_{E'}$. ▩

[x] ℓ_∞ é isometricamente isomorfo a ℓ_1'.

[xi] Pois é fechado e seqüencialmente compacto num espaço métrico.

2.6.4 TEOREMA (ORLICZ). *Se E é fracamente seqüencialmente completo, uma série fracamente incondicionalmente convergente é necessariamente incondicionalmente convergente.*

Demonstração. Seja $\pi \in \Pi$. Por hipótese, existe $x_\pi \in E$ tal que

$$\sum_{n\in\pi} \varphi(x_n) = \varphi(x_\pi)$$

para cada $\varphi \in E'$. Então

$$\left\| \sum_{\substack{n\in\pi \\ n\leq N}} x_n - x_\pi \right\| \leq \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left\{ \sum_{\substack{n\in\pi \\ n\leq N}} |\varphi(x_n)| \right\} \leq \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left\{ \sum_{i=N}^{\infty} |\varphi(x_i)| \right\} \tag{2.7}$$

Pelo Lema [2.6.3] o último termo da equação [2.7] converge a zero para $N \to \infty$. Assim, basta usar o item (2) do Teorema [2.1.20] e o teorema está provado. ▒

2.6.5 PROPOSIÇÃO. *Se E é Banach reflexivo então, E é fracamente seqüencialmente completo.*

Muitos espaços de Banach clássicos são reflexivos e, portanto, são fracamente completos. O Teorema de Orlicz nos diz que se E é espaço de Banach fracamente seqüencialmente completo então, $\ell_1^u(E) = \ell_1^w(E)$. Com o propósito de estudar $E = c_0$, vejamos que $\ell_1^u(c_0) \subsetneqq \ell_1^w(c_0)$.

2.6.6 DEFINIÇÃO. Dizemos que o subespaço $M \subset E$ é uma cópia de F se existe uma bijeção linear T entre M e F, que é contínua e tem inversa T^{-1} contínua.

2.6.7 TEOREMA. *Se E é um espaço de Banach então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) Existe uma série fracamente incondicionalmente de Cauchy em E que é convergente, mas não é incondicionalmente convergente.

(b) Existe um série fracamente incondicionalmente de Cauchy em E que é fracamente convergente, mas não é convergente.

(c) Existe uma série fracamente incondicionalmente de Cauchy em E que não é fracamente convergente.

(d) O espaço E tem uma cópia de c_0.

Para a demonstração deste teorema ver [Dies, Cap. V]. Aqui vamos dar alguns exemplos no espaço c_0.

2.6.8 Exemplo. *Seja (e_n) a base canônica de c_0. Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, onde*

$$x_1 = \frac{1}{2}e_1, \quad x_k = e_{k-1} - \frac{1}{2}e_k, \qquad k > 1.$$

Esta série é fracamente incondicionalmente de Cauchy mas não é fracamente convergente.

De fato, consideremos o funcional $\varphi = (\varphi_n) \in c_0' = \ell_1$. Temos $|\varphi(x_1)| = \frac{1}{2}|\varphi_1|$, $|\varphi(x_k)| = \left|-\frac{1}{2}\varphi_k + \varphi_{k-1}\right|$, para $k > 1$. Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)| \leq \frac{1}{2}|\varphi_1| + \frac{1}{2}|\varphi_2| + |\varphi_1| + \frac{1}{2}|\varphi_3| + |\varphi_2| + \frac{1}{2}|\varphi_4| + |\varphi_3| + \cdots = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k| < \infty.$$

Portanto, a série é fracamente incondicionalmente de Cauchy. Vejamos que não é fracamente convergente para $x \in c_0$. Tomemos $(e_n')_{n=1}^{\infty}$ a base natural de ℓ_1. Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_n'(x_k) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & se\ n = 1, \\ \frac{1}{2}, & se\ n \neq 1. \end{cases}$$

Logo, a série não tem uma soma fraca.

2.6.9 Exemplo. *Seja (e_i) a base de canônica de c_0. Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, definida por*

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1, \\ x_2 &= \frac{1}{2}e_2, \\ x_{2k+1} &= -e_{2k-1} + e_{2k+1}, \qquad k \geq 1, \\ x_{2k} &= -\frac{1}{2k-2}e_{2k-2} + \frac{1}{2k}e_{2k}, \qquad k \geq 2, \end{aligned}$$

Esta série é fracamente incondicionalmente convergente e, é fracamente convergente para zero mas, não é convergente.

2.6.10 Exemplo. *Seja (e_i) a base de canônica de c_0. Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, definida por*

$$x_1 = e_1 \ \text{ e } x_i = e_k - e_{k-1}, \text{ para } k \geq 2.$$

Esta série é fracamente incondicionalmente convergente e, é fracamente convergente para zero mas não é convergente. É claro que a série não converge em c_0. De fato, tome $\varphi = (\varphi_i) \in c_0'$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) = \varphi_n$. Portanto, converge fracamente para zero. Em módulo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)| \leq |\varphi_1| + |\varphi_2| + |\varphi_1| + |\varphi_3| + |\varphi_2| + \cdots = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| < \infty.$$

2.6.11 EXEMPLO. *Seja (e_i) a base de canônica de c_0. Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, definida por*

$$x_{2k} = e_{2k} \quad e \quad x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} e_{2k+1}, \qquad k \geq 1.$$

A série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ não é fracamente convergente, mas é fracamente incondicionalmente de Cauchy.

2.6.12 TEOREMA. *Se E é fracamente seqüencialmente completo então,*

$$\ell_1^u(E) = B_s(E) = I\ell_1^u(E) \cap \ell_1^w = B_w(E) \subset I\ell_1^u.$$

Demonstração. Para qualquer espaço de Banach E, $\ell_1^u(E) \subset I\ell_1^u(E)$. Como E é fracamente seqüencialmente completo, pelo Teorema de Orlicz [2.6.4] $\ell_1^u(E) = \ell_1^w(E)$. Usando o Teorema [2.5.6], $\ell_1^w(E) \subset I\ell_1^u(E)$. Note que $B_w(E) \subset \ell_1^w(E) = \ell_1^u(E)$. Finalmente, usando o Corolário [2.6.1], concluímos que

$$\ell_1^u(E) = B_s(E) = I\ell_1^u(E) \cap \ell_1^w = B_w(E) \subset I\ell_1^u.$$

▒

2.6.13 COROLÁRIO. *Se para um espaço de Banach E, $\ell_1^u(E)$ é um subespaço próprio de $\ell_1^w(E)$ então, $\ell_1^u(E)$ é um subespaço próprio de $B_s(E)$.*

Demonstração. Suponha $(s_n) = s \in \ell_1^w(E) \setminus \ell_1^u(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja B_k uma seqüência finita de $2k$ termos,

$$B_k = \left(\frac{s_k}{k}, -\frac{s_k}{k}, \ldots, \frac{s_k}{k}, -\frac{s_k}{k}\right)$$

Construímos a seqüência $s' = (s_n')$ "justapondo"os B_k's, isto é,

$$\Big(\underbrace{\frac{s_1}{1}, -\frac{s_1}{1}}_{B_1}, \underbrace{\frac{s_2}{2}, -\frac{s_2}{2}, \frac{s_2}{2}, -\frac{s_2}{2}}_{B_2}, \underbrace{\frac{s_3}{3}, -\frac{s_3}{3}, \frac{s_3}{3}, -\frac{s_3}{3}, \frac{s_3}{3}, -\frac{s_3}{3}}_{B_3}, \underbrace{\frac{s_4}{1}, \cdots}_{\cdots}\Big).$$

Fica claro que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} s'_i = 0$$

e, para cada $\varphi \in E'$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(s'_i)| &= |\varphi(s_1)| + |\varphi(-s_1)| + \left|\frac{\varphi(s_2)}{2}\right| + \left|\frac{\varphi(-s_2)}{2}\right| + \left|\frac{\varphi(s_2)}{2}\right| + \left|\frac{\varphi(-s_2)}{2}\right| + \\
&+ \left|\frac{\varphi(s_3)}{3}\right| + \left|\frac{\varphi(-s_3)}{3}\right| + \left|\frac{\varphi(s_3)}{3}\right| + \left|\frac{\varphi(-s_3)}{3}\right| + \left|\frac{\varphi(s_3)}{3}\right| + \left|\frac{\varphi(-s_3)}{3}\right| + \cdots \\
&= 2|\varphi(s_1)| + 4\left|\frac{\varphi(s_2)}{2}\right| + 6\left|\frac{\varphi(s_3)}{3}\right| + \cdots \\
&= 2\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(s_i)| < \infty,
\end{aligned}$$

dessa forma, $s' \in B_s(E)$. Como $s \notin \ell_1^u(E)$ isto mostra que a série $\sum_{i=1}^{\infty} s'_i$ tem uma subsérie, a saber,

$$\sum_{i=1}^{\infty} s'_{2i-1},$$

que não converge. Portanto, $s' \notin \ell_1^u(E)$. ▒

2.6.14 Corolário. *O espaço de Banach $\ell_1^u(c_0)$ é um subespaço próprio de $B_s(c_0)$.*

Demonstração. Seja (e_n) a seqüência em c_0 onde para cada n, $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$. A seqüência (e_n) é um elemento de $\ell_1^w(c_0)$, pois, para $\varphi \in c'_0$ identificamos[xii] $(\varphi(e_n)) \in \ell_1$. É claro que a seqüência $(e_n) \notin \ell_1^u(c_0)$ e, também, (e_n) não tem uma soma forte. Logo, pelo Corolário [2.6.13], $\ell_1^u(c_0) \subsetneqq B_s(c_0)$. ▒

2.6.15 Lema. *Se E é um espaço de Banach tal que $\ell_1^u(E)$ é um subespaço próprio de $B_s(E)$, então $B_s(E)$ é um subespaço próprio de $B_w(E)$.*

Demonstração. Se $s = (s_n) \in B_s(E) \backslash \ell_1^u(E)$ então, existe uma permutação τ de $\mathbb{N}$ tal que, $(s_{\tau(n)})$ não tem uma soma. Seja x a soma forte de s,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n.$$

Então, x é a soma fraca de s, desde que, $s \in \ell_1^w(E)$. Portanto, x é a soma fraca de $(s_{\tau(i)}) \notin B_s(E)$. ▒

[xii] Ver [LiTz].

2.6.16 COROLÁRIO. *O espaço $B_s(c_0)$ é um subespaço próprio de $B_w(c_0)$.*

Demonstração. Aplicação imediata do Corolário [2.6.14] e do Lema [2.6.15]. ▒

2.6.17 LEMA. *Se para um espaço de Banach E, $\ell_1^u(E)$ é um subconjunto próprio de $\ell_1^w(E)$ então, $B_w(E)$ é um subespaço próprio de $\ell_1^w(E)$.*

Demonstração. Por hipótese, existe $s \in \ell_1^w(E) \backslash \ell_1^u(E)$. Pelo Teorema [2.1.20], existe uma subseqüência não decrescente (n_k) de $\mathbb{N}$ tal que a subseqüência (s_{n_k}) não tem uma soma fraca. ▒

2.6.18 COROLÁRIO. *O espaço $B_w(c_0)$ é um subespaço próprio de $\ell_1^w(c_0)$.*

Demonstração. De fato, sabemos que $\ell_1^w(c_0) \backslash \ell_1^u(c_0) \neq \emptyset$. Pelo Lema [2.6.17] $B_w(c_0)$ é um subespaço próprio de $\ell_1^w(c_0)$. ▒

2.6.19 TEOREMA. *Para o espaço de Banach c_0, $\ell_1^u(c_0) \subsetneqq B_s(c_0) \subsetneqq B_w(c_0) \subsetneqq \ell_1^w(c_0)$.*

Demonstração. Aplicação imediata dos Corolários [2.6.14],[2.6.16] e [2.6.18]. ▒

CAPÍTULO 3

Séries no espaço $L_p[0,1]$, com $1 \leq p \leq 2$

O Teorema de Lèvy-Steinitz estende o Teorema de Riemann para o espaço $\mathbb{R}^n$, claramente reformulado. A tentativa de estender esse resultado para espaços de dimensão infinita, mesmo reformulando, foi fracassada. No famoso livro "Scottish Book", no problema 106, S. Banach conjecturava que o conjunto das somas dos rearranjamentos convergentes de uma série num B-espaço[i] era um transladado de um subespaço vetorial.

A resposta à conjectura de Banach é ***falsa***. O primeiro exemplo, no espaço $L_p[0,1]$, foi dado por Marcinkiewicz e redescoberto, em 1971, pelo matemático Nikishin[ii].

Poderíamos esperar que este conjunto fosse ao menos convexo, numa tentativa de resgatarmos pelo menos uma propriedade do que acontece em $\mathbb{R}^n$. Este capítulo mostra que em todo espaço de Banach existe uma série cujo conjunto das somas dos rearranjamentos convergentes é não convexo e discreto.

A demonstração desta propriedade não é fácil. Seguimos, atentamente, os trabalhos de [Kade] e [Korn], cuja idéia foi provar primeiro nos espaços de funções mensuráveis e transferir esses resultados, via imersão, a um espaço de Banach qualquer.

Seja p um número real, com $1 \leq p < \infty$. O espaço vetorial $L_p[0,1]$ é o conjunto das classes de equivalências das funções $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que são mensuráveis[iii] com os módulos da $p-$ésima potência integráveis sobre $[0,1]$.

[i] Como era conhecido, originalmente, um espaço normado completo.

[ii] Veja E. M. NIKISHIN, *Mat. Sb.*, **85** No. 2, (273-271).

[iii] Estamos usando a medida de Lebesgue.

O espaço $L_p[0,1]$ é um espaço de Banach separável e fracamente seqüêncialmente completo[iv] com norma

$$\|f\|_{L_p} = \left[\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{dx}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

3.1 Exemplo de Nikishin

Considere $E = L_2\big([0,1),\mathcal{M}\big)$, onde $\mathcal{M}$ é a medida de Lebesgue. Considere os intervalos $[0,1), [0,\frac{1}{2}), [\frac{1}{2},1), [0,\frac{1}{4}), [\frac{1}{4},\frac{1}{2}), [\frac{1}{2},\frac{3}{4}), [\frac{3}{4},1), [0,\frac{1}{8}), [\frac{1}{8},\frac{1}{4}), [\frac{1}{4},\frac{3}{8}], [\frac{3}{8},\frac{1}{2}), \cdots$. Seja a seqüência de funções indicadoras construída pelos seguintes passos:

0. $f_0 = \mathbf{1}$

1. $f_1 = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2})}$, $f_2 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1)}$

2. $f_3 = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{4})}$, $f_4 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$, $f_5 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$, $f_6 = \mathbf{1}_{[\frac{3}{4},1)}$

3. $f_7 = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{8})}$, $f_8 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{8},\frac{1}{4})}$, $f_9 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{4},\frac{3}{8})}$, $f_{10} = \mathbf{1}_{[\frac{3}{8},\frac{1}{2})}$, $\cdots$, $f_{14} = \mathbf{1}_{[\frac{7}{8},1)}$

. . . .

j. $f_{2^j-1} = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2^j})}$, $f_{2^j} = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^j},\frac{1}{2^{j-1}})}$, $f_{2^j+1} = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^{j-1}},\frac{3}{2^j})}$, $f_{2^j+2} = \mathbf{1}_{[\frac{3}{2^j},\frac{1}{2^{j-2}})}$, $\cdots$, $f_{2^{j+1}-2} = \mathbf{1}_{[\frac{2^j-1}{2^j},1)}$

. . . .

Notemos que em cada passo j a medida do conjunto dos $t \in [0,1)$ onde as $f_{k's}$ não se anulam(e valem 1) tem medida $\frac{1}{2^j}$. Sendo assim, definamos $g_{2m} = f_m$ e $g_{2m+1} = -f_m$. Temos

$$\left\|\sum_{j=0}^{2m+1} g_j\right\|_{L_2} = \left[\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^{2m+1} g_j(t)\right|^2 \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \Big|\big(g_0(t)+g_1(t)\big)+\big(g_2(t)+g_3(t)\big)+\cdots+\big(g_{2m}(t)+\right.$$
$$\left.+g_{2m+1}(t)\big)\Big|^2 \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \Big|\big(f_0(t)-f_0(t)\big)+\big(f_1(t)-f_1(t)\big)+\cdots+\big(f_m(t)-f_m(t)\big)\Big|^2 \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

[iv] Para mais detalhes destas propriedades ver o livro de Distel [Dies] ou [Mart, cap. 1].

$= \left(\int_0^1 0 \text{ dt} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$, e a soma parcial dos $2m$ primeiros termos é

$\left\| \sum_{j=0}^{2m} g_j \right\|_{L_2} = \left[\int_0^1 \left| \sum_{j=0}^{2m} g_j(t) \right|^2 \text{dt} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 \left| \big(g_0(t) + g_1(t)\big) + \cdots + \big(g_{2m-2}(t) + +g_{2m-1}(t)\big) + \right.\right.$
$\left.\left. +g_{2m}(t) \right|^2 \text{dt} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |f_m|^2 \text{ dt} \right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{M}(\text{spt } f_m)$, onde $\text{spt} f_m = \{t \in [0,1);\ f_m(t) \neq 0\}$.
Vimos acima que $\mathcal{M}(\text{spt } f_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{k} g_j \right\|_{L_2} = 0$$

e $\sum\limits_{j=0}^{\infty} g_j = 0$ em $L_2\big([0,1), \mathcal{M}\big)$.

Vejamos um outro rearranjamento convergente: para cada $t \in [0,1)$, temos

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} g_{\sigma(j)} - h \right\|_{L_2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então, $\sum\limits_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h(t)$ q.t.p.. Seja $A = \big\{t \in [0,1), \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t) \text{ converge}\big\}$; fixado $t_0 \in A$, sabemos que existe k_0, tal que

$$\text{para } k \geq k_0 \text{ tem-se } \left| \sum_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_0) - h(t_0) \right| < \frac{1}{8}. \tag{3.1}$$

Logo, como $\sum\limits_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_0)$ é inteiro, temos

$$\sum_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_0) = \sum_{j=0}^{n_{k_0}} g_{\sigma(j)}(t_0), \text{ para todo } k \geq k_0 \text{ e}$$

$h(t_0) = \sum\limits_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_0)$, para $k \geq k_0$. Portanto, $h(t_0)$ é inteiro. Assim, sabemos que $h(t) \in \mathbb{Z}$ para cada $t \in [0,1)$. Por outro lado, como vimos acima, $h(t_0) = \sum\limits_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_0)$, para $k \geq k_0$. Se $h(t_0) \neq 0$, temos $\sum\limits_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_0) \neq 0$ e constante para $k \geq k_0$.

Dado $t_1 \neq t_0$, pelo mesmo raciocínio acima, existe $k_1 (\geq k_0)$ tal que

$$\text{para } k \geq k_1 \text{ tem-se } \left| \sum_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_1) - h(t_1) \right| < \frac{1}{8} \text{ e } h(t_1) = \sum_{j=0}^{n_k} g_{\sigma(j)}(t_1) \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Logo, para $k \geq k_1$ temos

$$\left|h(t_1) - h(t_0)\right| \le \left|h(t_1) - \sum_{j=0}^{n_{k_1}} g_{\sigma(j)}(t_1)\right| + \left|h(t_0) - \sum_{j=0}^{n_{k_1}} g_{\sigma(j)}(t_0)\right| < \frac{1}{4}$$

e $h(t_1) = h(t_0)$. Segue que $h(t)$ =constante e inteiro sobre A.

Assim, as somas de todos os rearranjamentos da série $\sum g_j$ estão contidas no conjunto das funções constantes e inteiras q.t.p. sobre $[0,1)$. Esse conjunto, portanto, não é nem mesmo convexo, que dirá um subespaço afim. Note que

$$f_0 + f_1 - f_1 + f_2 - f_2 + f_3 - f_3 + \cdots \tag{3.3}$$

tem soma parciais diferentes de 1.

1. $f_0 - \mathbf{1} = 0$
2. $f_0 + f_1 - \mathbf{1} = f_0 - \mathbf{1} + f_1 = 0 + f_1 = f_1$
3. $f_0 + f_1 - f_1 - \mathbf{1} = f_1 - f_1 = 0$
4. $f_0 + f_1 - f_1 + f_2 - \mathbf{1} = f_2$
5. $f_0 + f_1 - f_1 + f_2 - f_2 - \mathbf{1} = f_2 - f_2 = 0$
6. $f_0 + f_1 - f_1 + f_2 - f_2 + f_3 - \mathbf{1} = f_3$
7. ....

Portanto, as normas dessas diferenças são $\int_0^1 0\,\mathrm{dt} = 0$, $\int_0^1 |f_1|^2\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}, 0$, $\int_0^1 |f_2|^2\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}, 0$, $\int_0^1 |f_3|^2\,\mathrm{dt} = \frac{1}{4}, 0$, $\frac{1}{4}, 0$, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{8}, 0$, $\frac{1}{8}, 0$, $\cdots$. Desta forma a série [3.3] converge para 1.

3.1.1 Teorema. *Em $L_p[0,1]$, $1 \le p \le 2$, existe uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ $(*)$ em $L_p[0,1]$ e duas permutações σ_1 e σ_2 tais que,*

1. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\sigma_1(n)}(x)$ converge para a função constante igual a zero na norma de $L_p[0,1]$, para todo $1 \le p \le 2$,*
2. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\sigma_2(n)}(x)$ converge para a função constante igual a 1 na norma de $L_p[0,1]$, para todo $1 \le p \le 2$, e*

3. *Para $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ não existe um rearranjamento σ da série $(*)$ com $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\sigma(n)}(x)$ convergindo para a função constante λ na norma de $L_p[0,1]$, para todo $1 \leq p \leq 2$.*

Demonstração. Seja (δ_k) uma seqüência monótona decrescente para zero e tal que $\delta_k < 1$, para todo k. Escolhamos uma seqüência (N_k) de números naturais satisfazendo duas condições:

a) $N_k \geq \dfrac{1}{\delta_k^2}$ para $k = 1, 2, \cdots$;

b) $N_{k+1} = d_{k+1}N_k$, com $d_{k+1} \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ para $k = 1, 2, \cdots$.

A construção da série procurada será dada por adjunção de seqüências finitas de funções características que chamaremos de blocos. O k-ésimo bloco I_k, contém $2N_k$ funções, onde N_k é número de funções não-negativas, e o denotaremos por I_k^+; analogamente definimos I_k^- como o sub-bloco de I_k dos simétricos aditivos das funções em I_k^+.

Vamos definir os conjuntos $\Delta_{k,i}$ no intervalo $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \triangle_{k,i} &= \left[\frac{i-1}{N_k}, \frac{i}{N_k}\right), \ i = 1, 2, \cdots, N_k - 1; \\ \triangle_{k,N_k} &= \left[1 - \frac{1}{N_k}, 1\right], \ k = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

É fácil ver que $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{N_k} \Delta_{k,i}$, e essa união é, claramente, disjunta.

A i-ésima função em I_k^+ é definida da seguinte maneira:

$$\varphi_{k,i}^+(x) = \mathbf{1}_{\triangle_{k,i}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \triangle_{k,i}, \\ 0, & \text{se } i \in [1,0]\backslash\triangle_{k,i}. \end{cases}$$

A i-ésima função correspondente em I_k^- é:

$$\varphi_{k,i}^-(x) = -\varphi_{k,i}^+(x) = -\mathbf{1}_{\triangle_{k,i}}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \triangle_{k,i}, \\ 0, & \text{se } i \in [1,0]\backslash\triangle_{k,i}. \end{cases}$$

Fica evidente que estas funções estão bem definidas em $[0,1]$ e tem as seguintes propriedades:

(α) $\sum_{i=1}^{N_k} \varphi_{k,i}^+(x) = -\sum_{i=1}^{N_k} \varphi_{k,i}^-(x) = \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{1}_{\triangle_{k,i}}(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = 1$, para $k = 1, 2, \cdots$;

(β) $\varphi^+_{k,i}(x) + \sum\limits_{j=(i-1)d_{k+1}+1}^{id_{k+1}} \varphi^-_{k+1,j}(x) = 0$, para $i = 1, \cdots, N_k$, $k = 1, 2, \cdots$. De fato, temos dois casos a considerar: ou $x \in \triangle_{k,i}$ ou $x \in [0,1]\backslash\triangle_{k,i}$. No primeiro caso, $\frac{i-1}{N_k} \leq x \leq \frac{i}{N_k}$ como $N_{k+1} = d_{k+1}N_k$. Logo, $x \in \left[\frac{(i-1)d_{k+1}}{N_{k+1}}, \frac{id_{k+1}}{N_{k+1}}\right]$. O segundo caso é análogo ao primeiro;

(γ) $\left\|\varphi^{\pm}_{k,i}\right\|_{L_p} = \left\{\int_0^1 \left|\varphi^{\pm}_{k,i}\right|^p \mathrm{dx}\right\}^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{N_k}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Usando (a) e (γ), para $1 \leq p \leq 2$, temos que $(\varphi^{\pm}_{k,i})_{k=1}^{\infty}$ converge a zero em $L_p[0,1]$, pois

$$\left\|\varphi^{\pm}_{k,i}\right\|_{L_p} = \left(\frac{1}{N_k}\right)^{\frac{1}{p}} \leq ({\delta_k}^2)^{\frac{1}{p}} \leq \delta_k.$$

Vamos mostrar que a série procurada é

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \mathrm{I}_1^+ + \mathrm{I}_1^- + \mathrm{I}_2^+ + \mathrm{I}_2^- + \mathrm{I}_3^+ + \mathrm{I}_3^- + \cdots} \tag{3.4}$$

1. Rearrange cada I_k da seguinte forma:

$$\varphi^+_{k,1}(x) + \varphi^-_{k,1}(x) + \varphi^+_{k,2}(x) + \varphi^-_{k,2}(x) + \varphi^+_{k,3}(x) + \varphi^-_{k,3}(x) + \cdots + \varphi^+_{k,N_k}(x) + \varphi^-_{k,N_k}(x).$$

Assim, toda soma parcial de índice par deste novo rearranjamento é identicamente nulo. Como $\left\|\varphi^{\pm}_{k,i}\right\|_p \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, este novo rearranjamento converge, em $L_p[0,1]$, para zero.

2. Na série [3.4], agrupe os blocos da seguinte forma:

$$\mathrm{I}_1^+ + \left[\mathrm{I}_1^- + \mathrm{I}_2^+\right] + \left[\mathrm{I}_2^- + \mathrm{I}_3^+\right] + \left[\mathrm{I}_3^- + \mathrm{I}_4^+\right] + \cdots.$$

Agora, a ordem das funções em I_1^+ é arbitrária; em cada grupo $\left[I_k^- + I_{k+1}^+\right]$ estabeleça a seguinte ordem:

$$\varphi^-_{k,1}(x) + \sum_{j=1}^{d_{k+1}} \varphi^+_{k+1,j}(x) + \varphi^-_{k,2}(x) + \sum_{j=d_{k+1}+1}^{2d_{k+1}} \varphi^+_{k+1,j}(x) + \cdots + \varphi^-_{k,N_k}(x) + \sum_{j=(N_k-1)d_{k+1}+1}^{N_{k+1}} \varphi^+_{k+1,j}(x)$$

para $i = 1, \cdots, N_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Pelas propriedades (α) e (β) a soma parcial de índice igual a

$$2\sum_{i=1}^{k-1} N_i + N_k + j(d_{k+1}+1), \text{ para } j = 1,2,\cdots,N_k,\ k = 1,2,\cdots,$$

deste novo rearranjamento, é identicamente igual a 1 para $x \in [0,1]$. Usando o fato de que $\left\|\varphi_{k,i}^{\pm}\right\|_p \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, este rearranjamento converge para 1 em $L_p[0,1]$.

3. Suponha que para algum não inteiro λ_0 e algum p, $1 \leq p \leq 2$, exista um rearranjamento σ de [3.4] tal que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\sigma(n)}(x)$$

converge para λ_0, identicamente, na norma de $L_p[0,1]$. Seja

$$\delta_0 = \min_{n\in\mathbb{Z}} \{\, |\lambda_0 - n|\,\} > 0.$$

Observe que para qualquer rearranjamento de [3.4], pela propriedade (α), a soma parcial S_k só toma valores inteiros. Portanto,

$$\int_0^1 |S_k(x) - \lambda_0|^{\frac{1}{p}}\, \mathrm{dx} = \|S_k - \lambda_0\|_p \geq \delta_0 > 0.$$

▒

Vamos usar a idéia de Nikishin e estender este resultado para qualquer espaço de Banach.

3.2 Sistemas de Haar

O sistema de Haar tem várias aplicações em espaços de Banach clássicos. Veremos apenas o essencial para o entendimento da próxima seção.

O sistema de Haar (h_n) em $L_2[0,1]$ é definido por $h_0 \equiv 1$, e para $j = 1,2,\cdots$ e $k = 0,1,\cdots,2^{j-1}$, por

$$h_n = h_{2^j+k} = \mathbf{1}_{[\frac{2k-2}{2^{j+1}},\frac{2k-1}{2^{j+1}}]} - \mathbf{1}_{(\frac{2k-1}{2^{j+1}},\frac{2k}{2^{j+1}}]}.$$

O sistema de Haar é uma base ortogonal para $L_2[0,1]$. Para normalizá-la, é muito fácil, $(2^{\frac{j}{2}}h_{2^j+k})$ é o sistema de Haar normalizada.

Seja $A_j = \left\{\mathbf{1}_{[\frac{k-1}{2^{j+1}},\frac{k}{2^{j+1}}]},\ k = 1,\cdots,2^{j+1}\right\}$. É fácil perceber que $span[h_0,\cdots,h_{2^{j+1}-1}]$ é o conjunto de todas as funções baseadas em intervalos pertencentes a A_j, isto é,

$$span[h_0, \cdots, h_{2^{j+1}-1}] = span[g_n,\ g_n \in A_j].$$

De fato, $h_n \in span[g_i,\ g_i \in A_j]$ para $n < 2^{j+1}$ e $span[g_i,\ g_i \in A_j]$ tem dimensão 2^{j+1} e, portanto, os dois espaços coincidem.

Abaixo mostramos os gráficos de $h_1, \cdots, h_6$ para termos uma visão geométrica das mesmas.

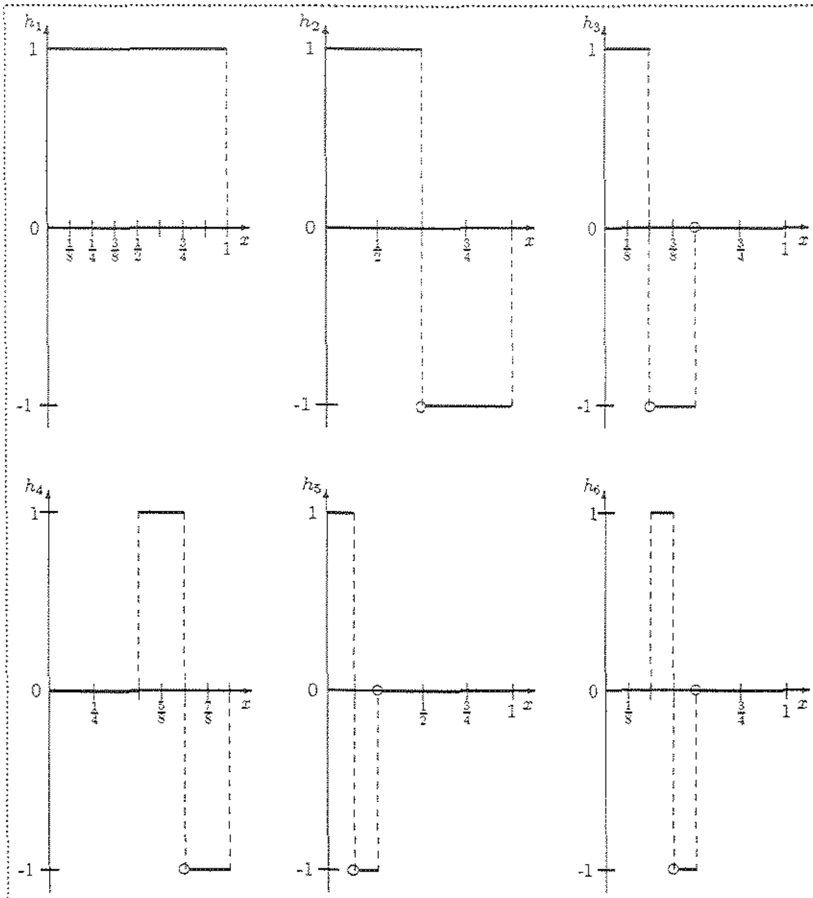

Figure 1: Gráficos das seis primeiras funções do Sistema de Haar

1

3.2.1 EXEMPLO. *Consideremos o espaço $L_2[0,1]$, a seqüência de elementos*

$$g_n = g_{2^j+k} = \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n};\, \frac{k+1}{2^n}\right]}$$

em intervalos diádicos de $[0,1]$, $0 \leq j < \infty$, e $0 \leq k \leq 2^j - 1$. Então

$$
\begin{array}{ll}
g_1 = \mathbf{1}_{[0;\,1]} & g_2 = \mathbf{1}_{[0;\,\frac{1}{2}]} \\
g_3 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};\,1]} & g_4 = \mathbf{1}_{[0;\,\frac{1}{4}]} \\
g_5 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{4};\,\frac{1}{2}]} & g_6 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};\,\frac{3}{4}]} \\
g_7 = \mathbf{1}_{[\frac{3}{4};\,1]} & g_8 = \mathbf{1}_{[0;\,\frac{1}{8}]}
\end{array}
$$

Considere a série

$$g_1 - g_1 + g_2 - g_2 + g_3 - g_3 + \cdots,$$

Esta soma converge, claramente, em norma, para a função identicamente nula. Se mudarmos a ordem da série para $g_1 + g_2 + g_3 - g_1 + g_4 + g_5 - g_2 + g_6 + g_7 - g_3 + \cdots$ *, a soma deste novo rearranjamento é* g_1*. Ao mesmo tempo, esta série, dado um rearranjamento arbitrário, pode somente convergir para funções constantes com valores inteiros, isto é, o conjunto da somas dos rearranjamentos convergentes não é convexo, pois, é discreto.*

3.2.2 LEMA. *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e (v_n) uma seqüência de vetores. Suponha que para qualquer $m \geq 1$ vale a inequação*

$$\left(\sum_{k=1}^{m}(t_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{k=1}^{m} t_k v_k\right\| \leq (12 + \log_2 m)\left(\sum_{k=1}^{m}(t_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para toda coleção finita $(t_k)_{k=1}^{m}$ de números reais. Então existe uma série no espaço $F = span[v_k,\, k \in \mathbb{N}]$, com domínio[v] *da soma não linear.*

Demonstração. Seja (h_k) o sistema de Haar ortonormal no espaço $L_2[0,1]$. Consideremos o operador $F \xrightarrow{T} L_2[0,1]$ definido por $T(v_k) = h_k$, $k = 1, 2, \cdots$. É claro que T está bem definida, pois, sabemos seu valor em uma base(algébrica). Mais ainda, T é contínua e tem núcleo trivial. Observe que todo elemento $g_k \in L_2[0,1]$ pertence a imagem do operador T. Introduzimos os elementos $\overline{g_k} \in F$, $T(\overline{g_k}) = g_k$. Sabemos que $g_k = \sum\limits_{i=1}^{2^j} \alpha_i h_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Assim, $\overline{g_k} = \sum\limits_{i=1}^{2^j} \alpha_i v_i$. Além disso, $\sum\limits_{i=1}^{2^j} \alpha_i \leq \frac{1}{2^j}$. Usando a hipótese,

$$\frac{1}{2^j} \leq \left\|\sum_{k=1}^{2^j} \alpha_i v_k\right\| \leq (12 + \log_2 2^j)\frac{1}{2^j}.$$

[v]Entende-se como o conjunto das somas dos rearranjamentos convergentes da série.

Portanto, $\overline{g_k}$ converge a zero. Pelo exemplo acima, a série $\overline{g_1} - \overline{g_1} + \overline{g_2} - \overline{g_2} + \overline{g_3} + \overline{g_3} - \overline{g_4} + \overline{g_4} + \overline{g_5} - \overline{g_5} + \cdots$, converge a zero quase todo ponto. Outro rearranjamento é $\overline{g_1} + \overline{g_2} + \overline{g_3} - \overline{g_1} + \overline{g_4} + \overline{g_5} - \overline{g_2} + \overline{g_6} + \overline{g_7} - \overline{g_3} + \cdots$, que converge para 1 em quase todo ponto. Pela injetividade de T e pelo resultado de Nikishin, a série só converge para valores inteiros em quase todo ponto. ▒

3.2.3 LEMA. *Em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita podemos escolher uma seqüência* (e_k) *tais que para todo* $m \in \mathbb{N}$ *e todo elemento* $x = \sum_{k=1}^{m} t_k e_k$ *tem-se*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m}(t_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big\|\sum_{k=1}^{m} t_k e_k\Big\| \le (12 + \log_2 m)\Big(\sum_{k=1}^{m}(t_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Vamos usar o Teorema de Dvoretzky, veja [KaKa], que diz: em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, e para qualquer $\epsilon > 0$, e qualquer n inteiro positivo podemos escolher vetores $(y_k)_{k=1}^{n}$ tais que, para toda coleção de números $(t_k)_{k=1}^{n}$ vale

$$(1-\epsilon)\Big(\sum_{k=1}^{n}(t_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big\|\sum_{k=1}^{n} t_k y_k\Big\| \le (1+\epsilon)\Big(\sum_{k=1}^{n}(t_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Definamos a seqüência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, onde $n_1 = 0$; $n_k = 2^{2k+4}$. Dado $\epsilon = \frac{1}{10}$, pelo Teorema de Dvoretzky podemos escolher uma seqüência (r_k) em E, com as seguintes propriedades:

1. Para toda seqüência numérica (t_k) vale

$$(1-\epsilon)\Big(\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}(t_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big\|\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} t_k r_k\Big\| \le (1+\epsilon)\Big(\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}(t_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Se denotarmos $t_k^m = t_k$ para $k \le m$ e $t_k^m = 0$ para $k > m$, então para qualquer m vale

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} t_k r_k\Big\| \ge \frac{1}{2}(1-\epsilon)\max_i \Big\|\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} t_k^m r_k\Big\|.$$

Agora vamos construir a seqüência (e_k) de vetores por: para $n_i < k \le n_{i+1}$ seja $e_k = r_k 2^{i+2}$. Então, usando as propriedades (1) e (2) temos,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} t_k e_k\Big\| \ge \frac{1}{2}(1-\epsilon)^2 \max_i 2^{i+2}\Big(\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}(t_k^m)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ge \Big(\sum_{k=1}^{m}(t_k^m)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Para $m \leq n_2$, pela propriedade (1),

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} t_k e_k \right\| \leq 12 \Big(\sum_{k=1}^{m} (t_k)^{\frac{1}{2}} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

Se $n_{i_0} < m \leq n_{i_0}$, para $i_0 > 1$, então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m} t_k e_k \right\| \leq \sum_{i=1}^{i_0} \left\| \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} t_k^m e_k \right\| &\leq (1+\epsilon) \sum_{i=1}^{i_0} 2^{i+2} \Big(\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} (t_k^m)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{i_0+3}(1+\epsilon) \Big(\sum_{k=1}^{m} (t_k)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\log_2 m) \Big(\sum_{k=1}^{m} (t_k)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

∎

3.2.4 Teorema. *Em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita existe uma série com domínio da soma não linear.*

Demonstração. Segue dos Lemas [3.2.3] e [3.2.2] ∎

3.2.1 Série condicionalmente convergente com soma invariante em ℓ_2

O exemplo abaixo foi retirado do livro [KaKa, exemplo 2.2.1]. A construção no espaço Hilbertiano ℓ_2 é muito simples.

Seja a base canônica ortonormal $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$. Agora escreva a série

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_4 + \cdots - \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{16}e_5 - \cdots \tag{3.5}$$

esta série converge para e_1. Mas, a série

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_4 + \cdots + \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{16}e_5 + \cdots$$

é divergente. Dessa forma, a equação [3.5] não converge incondicionalmente. Além disso, para todo rearranjamento convergente, ela só converge para e_1.

3.2.2 Série condicionalmente convergente com soma invariante em $C([0,1])$

Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência r é finito e positivo. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ converge, então a série converge uniformemente em $[0,r]$. Para a demonstração deste resultado ver [Lima, Cap. X].

O exemplo abaixo só utiliza conhecimentos de análise real de séries de potências.

3.2.5 Exemplo. *A expansão em série de potências de Taylor da função* $\log(x+1)$ *é uma série condicionalmente convergente no espaço normado das funções contínuas* $C([0,1])$ *com a norma da convergência uniforme. O conjunto das somas dos rearranjamentos convergente é unitário em* $C([0,1])$.

De fato, observe que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots .$$

Seja $f_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Sabemos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ converge uniformemente em $C([0,1])$ para $\log(1+x)$. Agora, a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ não converge absolutamente em $C([0,1])$, pois

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\text{sup}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,1]} \frac{|(-1)^{i-1}x^i|}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty.$$

Esta série também não converge incondicionalmente em $C([0,1])$.

Suponha o contrário. Então, para cada bijeção $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}(x)$ é uniformemente convergente em $C([0,1])$. Assim, para todo $x \in [0,1]$, ela é pontualmente convergente. Desta forma, para $x = 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ é incondicionalmente convergente e portanto absolutamente convergente. Mas isto é um absurdo. Logo, a série não é incondicionalmente convergente.

Suponha que para alguma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{\sigma(i)}$ seja uniformemente convergente. Vamos mostrar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{\sigma(i)}(x) = \log(1+x), \text{ para todo } x \in [0,1].$$

De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$, f_i é derivável em $[0,1]$. Ainda mais,

$$\int_0^x \sum_{i=1}^{\infty} f'_{\sigma(i)}(t)\mathrm{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{\sigma(i)}(x), \qquad \forall x \in [0,1].$$

Sabemos que $\log(1+x) = \int_0^x \sum_{i=1}^{\infty} f'_i(t)\,\mathrm{dt}$ e que para cada $x \in [0,1)$ a série $\sum_{i=1}^{\infty} f'_{\sigma(i)}(t)$ é absolutamente convergente. Logo, $\sum_{i=1}^{\infty} f'_{\sigma(i)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f'_i(t)$, para todo $t \in [0,1)$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{\sigma(i)}(x) = \int_0^x \sum_{i=1}^{\infty} f'_{\sigma(i)}(t)\mathrm{dt} = \int_0^x \sum_{i=1}^{\infty} f'_i(t)\mathrm{dt} = \log(1+x) \text{ para } x \in [0,1).$$

Se $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\sigma(i)}$ converge uniformemente a g sobre $[0,1]$ devemos ter sua soma g contínua em $[0,1]$. Como $g(x) = \log(1+x)$ para $x \in [0,1)$. Vamos ter $g(2) = \log(1+1)$ pela continuidade de $\log(1+x)$ no ponto x=1. Logo, $g(x) = \log(1+x)$.

APÊNDICE A

Conceitos básicos de análise funcional

Neste apêndice revemos resultados importantes de análise funcional e fixamos algumas notações. As noções básicas de análise funcional são apenas enunciadas e sem a preocupação em demonstrá-las. Em análise funcional os primeiros exemplos de espaços de Banach estudados são c_0 e ℓ_p. E são deles que extraímos os exemplos de espaços reflexivos, séries incondicionais que não são absolutamente convergentes, etc..

A.1 Espaços normados de seqüências

Vamos definir algumas propriedades de espaços normados, conceito de base, etc..

A.1.1 DEFINIÇÃO. Uma seqüência (x_n) num espaço normado E, converge(fortemente[i]) para $x \in E$ se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Denotaremos tal limite por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ou simplesmente, $x_n \to x$.

A.1.2 PROPOSIÇÃO. *Num espaço linear normado E, temos*

1. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *então,* $\lim \|x_n\| = \|x\|$,
2. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim \lambda_n = \lambda$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, *então,* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.

[i]O adjetivo **forte** foi introduzido para distinguir da convergência fraca.

A.1.1 Bases em espaços normados

A noção de base algébrica[ii] num espaço vetorial de dimensão infinita não traz propriedades topológicas. Por isso faz-se necessário uma outra noção de base. Aqui definiremos o conceito de Base de Schauder ou simplesmente base.

A.1.3 DEFINIÇÃO (SCHAUDER,1927). Uma seqüência $x_1, x_2, \cdots$ num espaço normado E é uma base (de Schauder) se, para cada $x \in E$, existe uma única expansão $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, onde $a_n \in \mathbb{R}$.

É claro que uma base para E é obviamente um conjunto linearmente independente. Qualquer base contem um subespaço linear denso, a saber

$$span[x_n,\, n \in \mathbb{N}] = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i,\, a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R},\, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Também não é difícil mostrar que o conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{q} r_i x_i,\, r_1, \cdots, r_q \in \mathbb{Q},\, m \in \mathbb{N} \right\}$$

é enumerável e denso em E.

O conceito de base de Schauder é uma parte fundamental na teoria dos espaços de Banach, por exemplo, os espaços de Banach clássicos, tais como c_0, ℓ_p; admitem bases. É fácil ver que qualquer espaço de Banach que admite uma base é separável.

Vamos apenas enunciar o teorema abaixo, que serve como um critério para checar quando uma seqüência é uma base de Schauder num espaço de Banach.

A.1.4 TEOREMA. *Seja (x_n) uma seqüência de vetores num espaço de Banach E. Então (x_n) é uma base de Banach de E se, e somente se, valem as afirmações:*

1. *$x_n \neq 0$ para todo n,*

2. *Existe uma constante λ tal que, para qualquer seqüência (λ_j) e inteiros $n < m$, temos*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \right\|$$

[ii] Uma aplicação do lema de Zorn garante a existência de base algébrica(no sentido de Hamel) em qualquer espaço vetorial, não necessariamente espaço de Banach.

3. $\overline{span[x_n,\ n \in \mathbb{N}]} = E$.

Cuidado! Uma base de Schauder não é uma base no sentido de ***Hamel*** (base algébrica). Uma base de Hamel $\mathcal{B} = \{v_\alpha,\ \alpha \in L\}$ para um espaço vetorial E é um conjunto linearmente independente de vetores em E satisfazendo $span[v_\alpha,\ \alpha \in L] = E$. Isto é, cada $x \in E$ é unicamente representado por uma combinação linear finita dos $v'_\alpha s$. Como conseqüência do Teorema de Baire é fácil mostrar que uma base de Hamel é não enumerável num ***espaço de Banach*** de dimensão infinita. De fato, suponha que $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hamel para um espaço de Banach E. Seja $X_n = span[x_i,\ 1 \leq i \leq n]$ subespaço fechado de E, é claro que $E = \bigcup_n^\infty X_n$. Mas E tem dimensão infinita então cada X_n tem interior vazio, contradizendo o Teorema de Baire. Assim, base de Hamel também não é interessante do ponto de vista de manuseabilidade.

Uma grande vantagem de uma base de Schauder normalizada num espaço de Hilbert é que ela é sempre ortonormal. A demonstração que veremos é elementar baseada no livro de [Dies]. Suponha que (x_n) é uma base para o espaço de Hilbert H associado aos funcionais biortogonais (φ_n) satisfazendo $\|x_n\| = \|\varphi_n\| = 1$, e suponha que $\langle x_m, x_n\rangle \neq 0$ para $m \neq n$. Desta forma existe um vetor unitário $e \in span[x_m, x_n]$ que é ortogonal a x_m. Daí, $|\langle x_n, e\rangle| > 0$. Conseqüentemente, $x_n = \langle x_n, e\rangle\, e + \langle x_n, x_m\rangle\, x_m$. Então $1 = |\langle x_n, e\rangle|^2 + |\langle x_n, x_m\rangle|^2$, e daí, $|\langle x_n, e\rangle| < 1$. Observe que $1 = |\varphi_n(x_n)| = |\varphi_n(\langle x_n, e\rangle\, e + \langle x_n, x_m\rangle\, x_m)| = |\langle x_n, e\rangle|\, |\varphi_n(e)|$, mas isto implica que $|\varphi_n(e)| = \frac{1}{|\langle x_n, e\rangle|} > 1$ contradizendo o fato de $\|\varphi_n\| = 1$.

Apesar de todo espaço de Banach com uma base ser separável a recíproca não é verdadeira. Esse problema ficou conhecido como o "Problema da Base"e foi resolvido por Enflo.

Uma seqüência (x_n) é uma seqüência básica se (x_n) é uma base para o fecho de $span[x_n, \in \mathbb{N}]$. Em outras palavras, (x_n) é uma seqüência básica se (x_n) for uma base de Schauder para o subespaço $\overline{span[x_n,\ n \in \mathbb{N}]}$.

A.2 Espaços de seqüências

Nesta seção, vamos considerar espaços de seqüências especificando algumas de suas propriedades. Um exemplo típico de espaços de seqüência é derivado de espaço de Banach E

com base de Schauder normalizada (e_i), onde a cada elemento $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_n e_n \in E$, corresponde a seqüência, única, dos coeficientes $(a_1, \cdots, a_n, \cdots)$.

A.2.1 O Espaço ℓ_∞

A.2.1 DEFINIÇÃO. $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ denota o espaço vetorial das seqüências (x_n) reais limitadas, isto é, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$. Esse espaço munido da norma

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

é um espaço de Banach.

A.2.2 Alguns subespaços importantes de ℓ_∞

Os subespaços tem extrema importância na teoria dos espaços de Banach. Eles são considerados clássicos e são, na maioria das vezes, os espaços prediletos dos analistas para exemplos e contra-exemplos.

a) $c = c(\mathbb{N}) = \{(x_n) \in \ell_\infty, \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\}$;

b) $c_0 = c_0(\mathbb{N}) = \{(x_n) \in \ell_\infty, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$;

c) $c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) = \{(x_n) \in \ell_\infty, \text{ existe } j = j(x) \text{ tal que } x_n = 0, \forall n > j\}$;

d) $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N}) = \{(x_n) \in \ell_\infty, \sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.

A.2.2 OBSERVAÇÃO. *O espaço ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, munido da norma*

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{A.1}$$

é um espaço de Banach.

Para demonstrar que [A.1] é uma norma quando $p = 1$ é fácil; quando $p > 1$ necessitamos da desigualdade de Minkovsky, para mais detalhes veja [Höni].

A.2.3 PROPOSIÇÃO.

a) c *e* c_0 *são subespaços fechados de* ℓ_∞.

b) c_{00} *não é fechado.*

Não é difícil verificar que esses subespaços de ℓ_∞ satisfazem:

1. $\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$;
2. $\|x\|_1 \geq \|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty$;

para quaisquer $1 < p < q < \infty$.

A.2.3 Dual dos espaços clássicos

Para se estudar análise funcional faz-se necessário conhecermos alguns espaços duais. Chamamos aqui de espaço dual de um espaço normado E ao espaço de todos os funcionais lineares **contínuos** definido sobre E, o qual denotaremos por E'. Em particular o espaço dual[iii] E' sempre é um espaço de Banach independentemente do espaço E . Aqui veremos apenas os duais dos espaços clássicos.

- $\ell_1 \cong c_0'$,
- $\ell_p' \cong \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A.3 Bidual de um espaço normado

Seja E um espaço normado com dual E'. Denotaremos o dual de $(E')'$ por E'', sendo chamado de bidual de E. Para cada $x \neq 0$, seja a aplicação

$$\begin{aligned} \delta_x = \widehat{x} : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

[iii]O conjunto de todos os funcionais lineares é o dual algébrico. Em álgebra linear também se estuda os funcionais lineares, mas no contexto algébrico, não topológico. Além do mais, por conseqüência do Teorema de Hahn-Banach o dual algébrico $E^* \neq E'$ para espaços de Banach de dimensão infinita.

e defina δ_0 como o funcional nulo. Claro que a aplicação acima está bem definida e, δ_x é linear e contínua. Daí, $\delta_x \in E''$. Desta forma, a seja aplicação

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Isto é, $J(x)\varphi = \varphi(x), \forall \varphi \in E'$.

J está bem definida, é linear, injetora e $\|Jx\| = \|x\|$. Podemos considerar E como subespaço de E'' via aplicação J.

Observação: É comum nos textos atuais de análise moderna interpretar o espaço dual de forma mais "geométrica"pois, como cada elemento $x \in E$ induz um funcional linear $\widehat{x}$ em E' onde $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$. Usando uma notação de "produto interno" $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ denota a ação do funcional φ sobre o vetor x, note que o funcional $\widehat{x}$ satisfaz

$$\langle \varphi, \widehat{x} \rangle = \langle x, \varphi \rangle .$$

A.3.1 DEFINIÇÃO. E é reflexivo quando a aplicação J é sobrejetora, $J(E) = E''$. Neste caso E'' é isometricamente isomorfo a E''.

Abaixo damos uma tabela com alguns espaços reflexivos clássicos e, também, os espaços não reflexivos, separáveis e não separáveis.

Reflexivos	Separáveis	não Separáveis	não Reflexivos
• ℓ_p, $1 < p < \infty$	• ℓ_p, $1 \leq p < \infty$	• ℓ_∞, $\ell_\infty(X, \mathbb{R})$	• ℓ_∞, ℓ_1
• E, $\dim E < \infty$	• E, $\dim E < \infty$		• c_0, c_{00}, c
	• $c_0 = \overline{c_0}$, $C([a, b]; \mathbb{R})$		• $C([a, b]; \mathbb{R})$, $\wp([a, b]; \mathbb{R})$
	• c, c_{00}, $\wp([a, b]; \mathbb{R})$		

A.4 Teoremas de Hahn-Banach

Nesta seção vamos apenas enunciar o Teorema de Hahn-Banach, para espaços normados reais e suas conseqüências. As demonstrações são encontradas em qualquer livro de análise funcional. Podemos citar as referências [Höni, Lang, Tayl] para uma consulta rápida.

A.4.1 TEOREMA. *Seja E um espaço vetorial normado, M um subespaço de E e $\varphi_0 \in M'$. Então, existe $\varphi \in E'$ tal que*

1. $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, *para todo* $x \in M$;

2. $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

Demonstração. Vide [Höni, Teorema 8.5, Cap. II]. ▒

A.4.1 Conseqüências do Teorema de Hahn-Banach

É mais freqüente o uso das conseqüências do Teorema de Hahn-Banach e a essas conseqüências chamaremos ora por teorema de Hahn-Banach ora conseqüência de Hahn-Banach. Para maiores detalhes consultar [Lang, Tayl, Höni, LiTz].

A.4.2 PROPOSIÇÃO. *Sejam E um espaço normado e $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Então, existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ e ainda $\|\varphi\| = 1$.*

A.4.3 COROLÁRIO. *Se $E \neq \{0\}$. Então $E' \neq \{0\}$.*

A.4.4 COROLÁRIO. *Se $E \neq \{0\}$ então para cada $x \in E$ temos*

$$\|x\| = \sup\left\{\, |\varphi(x)|\,,\ \varphi \in E',\ \|\varphi\| = 1\right\}.$$

A.4.5 COROLÁRIO. *Seja E um espaço de Banach. Se $\varphi(x) = \varphi(y)$, para todo $\varphi \in E'$ então, $x = y$.*

A.4.6 PROPOSIÇÃO. *Sejam M um subespaço fechado de E e $x_0 \in E$ tal que $d_0 = dist(x_0, M) > 0$. Então existe $\varphi \in E'$ tal que*

1. $\varphi(x_0) = d_0$,

2. $\varphi(x) = 0, \forall x \in M$,

3. $\|\varphi\| = 1$.

A.5 O Espaço $\mathcal{C}(K;E)$

Seja K um espaço métrico compacto e E um espaço de Banach. O espaço vetorial $\mathcal{C}(K;E)$, sobre $\mathbb{R}$, de todas as funções contínuas $f : C \longrightarrow E$ com a norma $\sup\{\, \|f(x)\|\, ; x \in K\}$ é um espaço de Banach separável.

Um subconjunto $B \subset \mathcal{C}(K;E)$, pode ser fechado e limitado sem ser compacto. O objetivo desta seção é dar uma condição necessária para que um subconjunto limitado seja **relativamente compacto**, isto é, seu fecho seja compacto.

A.5.1 DEFINIÇÃO. Um subconjunto $A \subset \mathcal{C}(K;E)$ é eqüicontínuo se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ e qualquer $x \in K$ existe uma vizinhança V de x em K tal que

$$\sup\{\, \|f(x) - f(s)\|\, ; s \in V\} < \epsilon,$$

seja qual for $f \in A$.

A.5.2 LEMA. *Seja (f_n) uma seqüência eqüicontínua de aplicações em $\mathcal{C}(K;E)$. Se f_n converge pontualmente em E para uma função f em $\mathcal{C}(K;E)$, então f_n converge uniformemente para f.*

Demonstração. Supondo $f_n \longrightarrow f$ pontualmente em K, seja dado $\epsilon > 0$. Para cada $x \in K$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_x$, tem-se

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

O conjunto $\{f, f_1, \cdots, f_n, \cdots\}$ é eqüicontínuo. Logo, cada $x \in K$ pertence a uma bola aberta B_x tal que, $y \in B_x$ implica

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|f(y) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Da cobertura aberta

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$$

extraímos uma subcobertura finita $K \subset B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_m}$. Seja $n_0 = \max\{n_{x_1}, \cdots, n_{x_m}\}$. Afirmamos que se $n > n_0$, $\|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in K$. Com efeito, se $n > n_0$ e $x \in K$, existe i, com $1 \leq i \leq m$, tal que $x \in B_{x_i}$. Logo, temos

$$\|f_n(x) - f_n(x_i)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim,

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x) - f_n(x_i)\| + \|f_n(x_i) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(x)\| < \epsilon.$$

▩

A.6 Teoremas principais

Resultados como o teorema da limitação uniforme e o teorema do gráfico fechado são conseqüências importantes do Teorema de Baire (ver [Höni]), ocupando lugar de destaque dentro da análise funcional.

A.6.1 Teorema (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam E, F espaços normados, e seja $\{T_i\}_{i\in J}$ uma família de transformações lineares contínuas de E em F, tal que $\sup_{i\in J}\{\ \|T_i(x)\|\ \} < \infty$ para cada $x \in G$. Então $\sup_{i\in J}\{\ \|T_i\|\ \} < \infty$.*

Demonstração. Vide [Höni, Teorema 11.1, Cap. II]. ▩

Temos a seguinte conseqüência simples do Teorema [A.6.1]:

A.6.2 Teorema (Banach-Steinhaus). *Seja $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de aplicações lineares contínuas de E em F, onde E espaço de Banach e F espaço normado, e para cada $x \in E$ o limite $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ exista. Então,*

a) T é uma aplicação linear contínua de E em F;

b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$;

c) $||T|| \leq \liminf_n ||T_n||$.

O gráfico de uma aplicação $T : E \longrightarrow F$ é o conjunto $G_T = \{(x, T(x)) \in E\times F \mid x \in E\}$. Evidentemente, se T linear, então G_T é um subespaço vetorial de $E \times F$.

Dizemos que uma aplicação linear T tem o **gráfico é fechado** ou é **fechada** quando G_T é fechado em $E \times F$, para a topologia produto cartesiano[iv]. É claro que o gráfico de

[iv] Ver [Tayl].

toda aplicação linear contínua é fechado, pois uma seqüência $(x_n, y_n) \in E \times F$ converge para (x, y), se e somente se, x_n converge para x e y_n converge para y; mas, se $(x_n, y_n) \in G_T$ então $y_n = T(x_n)$ e pela continuidade de T, segue-se que $y = T(x)$, isto é, $(x, y) \in G_T$.

A.6.3 TEOREMA (GRÁFICO FECHADO). *Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear fechada. Então T é contínua.*

Demonstração. Vide [CuPr]. ▩

Bibliografia

⋆[BoTe] BOTELHO, G., *Séries Incondicionamente Convergentes de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers*, Matemática Universitária, 30 (2001), 103-110.

⋆[CuPr] CURTAIN, R.F., PRITCHARD., *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*, Academic Press, 1958.

⋆[Dies] DIESTEL, J., *Sequences and Series in Banach Space*, Springer-Verlag New York, 1984.

⋆[DJT] DIESTEL, J., JARCHOW, H., TONGE, A., *Absolutely Summing Operators*. Cambridge University Press, 1995.

⋆[HiPl] HILLE, E., PLILLIPS, R.S., *Functional Analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc., 1957.

⋆[Höni] HÖNIG, C. S., *Análise Funcional e aplicações*, Vol. 1, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da USP, 1970.

⋆[Kade] KADETS, V.M., *On a Problem of Banach*, "Problem 106 in the Scottish Book. Funktsional Anal. i Prilozhen **20** (1986) 74-75; Engl. transl.: Funct. Anal. Appli. **20** (1986) 317-319.

⋆[KaKa] KADETS, V.M., KADETS, M.I., *Rearrangement of Series in Banach Space.* Amer. Math. Soc., 1991.

⋆[Korn] KORNILOV, P.A., *On Rearrangements of Conditionally Convergent Function Series*, Mat. Sbornik **113** (1980) 598-616; Engl. transl.: Math. USSR Sb. **41** (1982).

⋆[Lang] LANG, S., *Analysis I*, Addison-Wesley, Reading Massachussets, 1969.

⋆[Lima] *Analise Real*, vol. **1**. (6ª edição) Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides , Rio de Janeiro, 1989.

⋆[LiTz] LINDENSTRAUSS, J. and TZAFRIRI, L., *Classical Banach Space I*, Springer-Verlag New York, 1977.

⋆[Mart] MARTI, J.T., *Introduction to the Theory of Bases.* Springer-Verlag New York Inc. 1969.

⋆[Mcar] MCARTHUR, C.W, *On Relations Amongst Certain of Sequences in an Arbitrary Bananch Space*, Canad. Journ. Math. **8** (1956) 192-197.

⋆[Orli] ORLICZ, W., *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklugen II*, Studia Math. **1** (1929) 241-255.

⋆[Rose] ROSENTHAL, P., *The Remarkable Theorem of Lèvy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly **94** (1987) 342-351.

⋆[Rudi] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*,1ª ed., New york, International Student Edition, 1970.

⋆[Tayl] TAYLOR, A. end LAY, D. C., *Introduction to Funtional Analysis*, Jonh Wiley, 1958.

⋆[Wojc] BANASZCZYK, W, *The Steinitz of the Plane*, Institute of Mathematics, Lodz University, Banach **22** (1986), 218-220.

Índice Alfabético