



PEDRO NEL MALUENDAS PARDO

**ESTRUTURA LAGRANGIANA PARA FLUIDOS COMPRESSÍVEIS
NÃO BAROTRÓPICOS EM DIMENSÃO DOIS**

**CAMPINAS
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

PEDRO NEL MALUENDAS PARDO

ESTRUTURA LAGRANGIANA PARA FLUIDOS COMPRESSÍVEIS
NÃO BAROTRÓPICOS EM DIMENSÃO DOIS

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de Doutor em matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO PEDRO NEL MALUENDAS PARDO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCELO MARTINS DOS SANTOS.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, which appears to be "Marcelo Martins dos Santos", is written over a horizontal line.

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

M299e Maluendas Pardo, Pedro Nel, 1977-
Estrutura lagrangiana para fluidos compressíveis não barotrópicos em
dimensão dois / Pedro Nel Maluendas Pardo. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marcelo Martins dos Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Estruturas lagrangeanas. 2. Log-lipschitziano. 3. Fluido não barotrópico. I.
Santos, Marcelo Martins dos, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Lagrangian structure for a non-barotropic compressible fluid in two dimensions

Palavras-chave em inglês:

Lagrangian structures

Log-Lipschitz

Non-barotropic fluid

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Marcelo Martins dos Santos [Orientador]

Hermano Frid Neto

Wladimir Augusto das Neves

Ademir Pastor Ferreira

Oliváine Santana de Queiroz

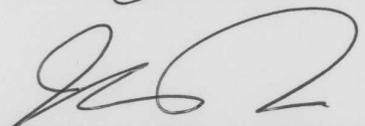
Data de defesa: 19-07-2013

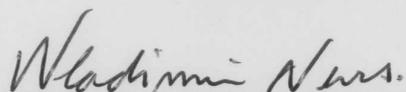
Programa de Pós-Graduação: Matemática

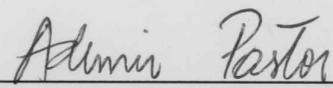
Tese de Doutorado defendida em 19 de julho de 2013 e aprovada

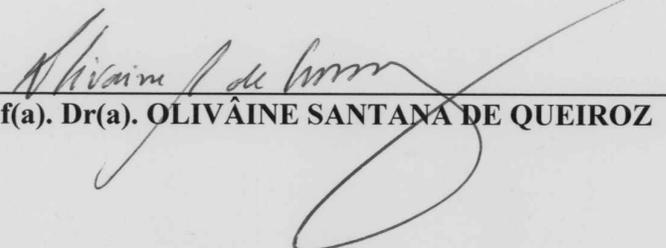
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS


Prof(a). Dr(a). HERMANO FRID NETO


Prof(a). Dr(a). WLADIMIR AUGUSTO DAS NEVES


Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA


Prof(a). Dr(a). OLIVÂINE SANTANA DE QUEIROZ

Aos meus pais Blanca e Pedro.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe pelo apoio constante, pela confiança e a paciência. E a minha família que sempre esteve atenta do desenvolvimento deste projeto .

Agradeço ao meu orientador, prof Marcelo Martins dos Santos quem apoiou incondicionalmente todo o trabalho e sempre ficou atento para responder as minhas perguntas com paciência.

A todos meus amigos tanto no Brasil quanto na Colombia que sempre estiveram atentos do meu caminho, especialmente aos meus amigos: David e Paulo que compartilharam o proceso, Ángela, Mónica, Eduardo, Rafael, Maria del Pilar e Diana que deram apoio nos momentos difíceis, a Isabel e Claudia na Colombia que fizeram possível acontecer e a Alda, Thais, Alyson, Ronaldo e Edinho que além de ser meus companheiros, compartilharam comigo sua amizade.

Agradeço também à comissão examinadora, por aceitarem o convite e pelas sugestões, comentários e correções que ajudaram a melhorar o trabalho e em geral a todos meus professores do IMECC, que ajudaram direta ou indiretamente na obtenção do mesmo.

Finalmente agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos a estrutura lagrangiana para soluções fracas das equações de Navier-Stokes para um fluido não barotrópico em dimensão dois, i.e., demonstramos a unicidade de trajetórias de partículas para fluidos compressíveis, incluindo a equação da energia, ou seja, com variações de temperatura. Isto estende os resultados de David Hoff e Marcelo Santos para o caso não barotrópico de dimensão dois.

Palavras-chave:

Estruturaa lagrangianas, Log-lipschitziano, Fluido não barotrópico.

Abstract

In this work we study the Lagrangian structure for weak solutions of Navier-Stokes equations for a non-barotropic compressible fluid in two dimensions, i.e., we prove the uniqueness of particle trajectories for two-dimensional compressible fluids, including the energy equation (temperature variations). It extends previous results in [19] for the barotropic two dimensional case.

Keywords:

Lagrangian structures, Log-Lipschitz, Non-barotropic fluid.

Conteúdo

Introdução	4
1 Preliminares	5
1.1 Interpretação física	7
1.1.1 Conservação da massa	8
1.1.2 Balanço do momento	9
1.1.3 Conservação da energia	10
1.2 Descrição do problema	12
1.2.1 Equações de Navier Stokes	12
1.2.2 Estrutura lagrangiana	14
1.3 Ferramentas Matemáticas	16
1.3.1 Desigualdades básicas e imersões	16
1.3.2 Interpolação	18
1.3.3 Equações básicas	21
2 Existência de soluções fracas	27
2.1 Soluções fracas	27
2.2 Estimativas a priori	29
2.2.1 Estimativas de energia	29
2.2.2 Estimativas pontuais	42
2.2.3 Estimativas dos termos convectivos	43
2.3 O problema aproximado	52
2.3.1 Existência	53
3 Resultados principais	55
3.1 Estrutura lagrangiana $t_0 > 0$	55
3.2 Estrutura lagrangiana	58
Referência Bibliográfica	66

Introdução

Uma forma (pouco precisa) de entender um fluido é pela sua incapacidade em resistir às forças de cisalhamento, o que tem como consequência que um fluido não tenha uma forma bem definida, sendo capaz de adotar a forma do seu entorno. Em particular, se o fluido está no interior de um recipiente ele tomará a forma do mesmo.

O presente texto está focado no estudo dos fluidos compressíveis, em cuja categoria, os gases são o exemplo por excelência. Diversas aplicações da mecânica dos fluidos compressíveis podem ser encontradas, especialmente na engenharia. Em particular, encontra-se aplicações em meteorologia, em aeronáutica, no desenho de compressores de ar, como aqueles usados em aparelhos dentais, em ferramentas de oficina, em tubos de pressão alta para transportar gases, entre outros.

O modelo usado aqui é obtido supondo o *princípio do contínuo* no qual se considera que o fluido ocupa em um tempo t , um domínio Ω do espaço euclidiano. Na mecânica contínua dos fluidos compressíveis distinguem-se dois pontos de vista. Em um deles, é considerado o movimento de cada partícula, isto é, o observador está seguindo a partícula e pode tomar nota da posição em um sistema de referência e da velocidade em cada instante de tempo. Esta forma de ver o fluido é chamada *lagrangiana*. No outro ponto de vista, chamado de forma *euleriana*, é considerado um ponto do espaço e são observadas as partículas que passam através do mesmo. Uma análise detalhada dos dois pontos de vista e as relações entre eles, pode ser consultada em [26].

No caso particular de um fluido no qual a pressão depende somente da densidade, as trajetórias de pressão constante e as trajetórias de densidade constante são as mesmas. Neste caso, o fluido é chamado barotrópico [9]. Alguns exemplos de fluidos barotrópicos são os isotérmicos ou de temperatura constante, e os isentrópicos ou de entropia constante. No presente texto a pressão vai depender da temperatura, e assim, da energia interna específica, de modo que os fluidos considerados são não barotrópicos.

Entendemos por *estrutura lagrangiana* justamente o "bom" comportamento matemático de certa equação diferencial ordinária associada ao movimento das partículas do ponto de vista lagrangiano. Nesta equação é assumido que a velocidade das partículas é conhecida, e a partir dela procura-se determinar a posição em cada instante de tempo de uma partícula específica sabendo sua posição em um instante dado.

Na descrição euleriana, é considerado um modelo dado por um sistema de equações diferenciais parciais conhecidas como *equações de Navier-Stokes* e das quais se dará uma descrição detalhada no Capítulo 1. Na literatura existem muitos livros considerando tais sistemas de equações. De fato, pode-se consultar [2], [3], [9], [10], [13], [25], [26] e as referências contidas nos mesmos. O modelo oferece, por exemplo, uma formulação matemática das leis de conservação da massa, do momento e da energia, considerando a densidade ρ , a velocidade \mathbf{u} e a energia total E , como as variáveis do sistema, e acompanhando estas com outras (ligadas às propriedades termodinâmicas do fluido), chamadas variáveis de estado como a pressão P e a temperatura ϑ , entre outras.

O objetivo principal do presente trabalho é mostrar a existência e unicidade de trajetórias (estrutura lagrangiana) para o campo de velocidade de uma certa solução do sistema de Navier-Stokes. Para tal fim, utilizaremos que a solução satisfaz algumas estimativas específicas, como as que podem ser vistas em [19] para o caso barotrópico em duas e três dimensões. A ideia é decompor o campo \mathbf{u} em duas partes, uma, denotada por \mathbf{u}_P , dependendo da pressão, e a outra, denotada por $\mathbf{u}_{F,w}$, dependendo do chamado *fluxo efetivo viscoso* e da vorticidade, e usar as propriedades de regularidade e algumas estimativas das soluções fracas e de suas derivadas materiais. Muito resumidamente, usando a limitação da pressão, estimativas das derivadas materiais, estimativas clássicas de Sobolev e argumentos da teoria elíptica, garantimos que a parte associada à pressão, \mathbf{u}_P , é um campo log-lipschitziano, em relação à variável espacial, e que a parte $\mathbf{u}_{F,w}$ é um campo lipschitziano, também em relação à variável espacial. Daí, para obtermos a unicidade de trajetórias do campo \mathbf{u} , mostramos que a "norma" log-lipschitziana de \mathbf{u}_P e a "norma" lipschitz de $\mathbf{u}_{F,w}$, em relação à variável espacial, são localmente integráveis no tempo. Neste ponto são essenciais as estimativas das derivadas convectivas, com "taxas de regularização" adequadas. Desenvolvemos este ponto com detalhes e, certamente, esta é a nossa principal contribuição neste trabalho.

No entanto, o nosso resultado principal, Teorema 3.2.1, restringe-se ao caso de dimensão (espacial) dois, devido à seguinte dificuldade técnica que não sabemos, até o momento, contornar em dimensão três: a obtenção das estimativas (2.2.38) (depois do Lema 2.2.16 desta Tese) para os termos convectivos, as quais são essenciais na demonstração do Teorema 3.2.1, depende de estimativas convenientes em L^4 para a pressão (e também para o gradiente da velocidade, mas quanto a este, podemos proceder de forma similar ao caso barotrópico). Mais precisamente, chegamos que na prova do Lema 2.2.17 aparece a norma em L^4 de $P - \tilde{P}$ (e de $\nabla \mathbf{u}$). Daí, pela desigualdade de interpolação (1.3.3), com $p = 4$, em dimensão dois, conseguimos controlar este termo, pois obtemos só norma em L^2 , no espaço e no tempo; v. (2.2.31). Observamos que o ponto crucial aqui é a integrabilidade (local) no tempo. Em dimensão três, seguindo o mesmo caminho, encontramos a integral, no tempo, de $\|\nabla e\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3$, e, esta integral não conseguimos estimar (de forma independente da solução suave/aproximada). Uma tentativa de tomar, na integral acima, por exemplo, o supremo de $\|\nabla e\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, usando a estimativa (1.26) de [16] (que é o caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg quando $n = 3$; v. Teorema 1.3.3 nesta Tese), nos leva a pedir que o expoente "r" em [16] seja menor do que $2/3$. No entanto, pela condição (1.18) de [16], temos que $r > 3/2$. No caso barotrópico, em dimensão dois ou três, como a pressão depende só da densidade (e não também da energia) e esta é limitada, podemos controlar a norma em L^4 de $P - \tilde{P}$, como pode ser visto na desigualdade (2.2.31) (desta Tese) supondo $e = \tilde{e} = 0$. Outro ponto

a ser ressaltado é que não conseguimos (mesmo em dimensão espacial dois) estimar a quantidade $\sqrt{\rho}e$ em L^2 e precisamos desta estimativa para demonstrar o Lema 2.2.16 no Capítulo 2. Assim, assumimos esta estimativa por hipótese. Esta hipótese é desnecessária assumindo que o gradiente da velocidade pertence ao L^4 ou que a energia é limitada (no espaço e no tempo), obtendo o Lema 2.2.16 com algumas modificações na demonstração, que não são mostradas nesta Tese.

A principal novidade em relação ao caso barotrópico [19] é que aqui a pressão depende também da energia e este fato cria dificuldades nas estimativas. No caso não barotrópico, o fato da pressão depender da energia faz com que $P - \tilde{P}$ não seja limitada no tempo, mas o Lema 4.4 de [16] que mostra, em particular, que a norma em L^∞ da energia específica menos uma constante é localmente integrável no tempo, implica que $\|P - \tilde{P}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ é localmente integrável no tempo, o que permite, como veremos, concluir que a norma log-lipschitziana da parte do campo associada à pressão é integrável. Quanto à parte associada ao fluxo efetivo viscoso, $\mathbf{u}_{F,\omega}$, como dissemos acima, obtemos estimativas para as derivadas materiais com taxas de regularização adequadas para mostrar que a sua seminorma de Lipschitz é localmente integrável no tempo. Mais precisamente, v. estimativas (2.1.8)-(2.1.9), no enunciado do Teorema 2.1.1 abaixo. Taxas de regularização similares para o caso barotrópico são provadas em [18], para duas e três dimensões mas com a velocidade no H^1 ; em [15] para um fluido no semiespaço $\{x_3 > 0\}$; em [20], para o caso barotrópico em dimensão três, mas na presença do vazio, isto é, a densidade inicial pode-se anular em um conjunto aberto e em [32], para o caso em que a viscosidade pode depender da densidade. Em [32], é mostrada também a estrutura lagrangiana.

A distribuição do texto é feita da seguinte forma: no Capítulo 1 são mostradas as ferramentas básicas necessárias para o restante do texto. Em primeiro lugar é feito um esboço da dedução das equações gerais de Navier-Stokes descrevendo o movimento de um fluido compressível não barotrópico e não isotérmico. Como a dedução não depende da dimensão, não é feita nenhuma restrição nesta parte. Também é feita uma breve descrição do problema, distinguindo entre a parte euleriana e a parte lagrangiana. Assim, é feita uma descrição das equações de Navier-Stokes que são usadas, assim como dos parâmetros e equações de estado associadas a eles. Também é feito um resumo das ferramentas básicas necessárias, especialmente das desigualdades, que são amplamente difundidas na literatura. Complementamos o capítulo com uma exposição da teoria de interpolação, só mencionando os tópicos requeridos mais na frente. O capítulo é finalizado fazendo uma breve descrição da teoria de equações diferenciais parciais, mostrando alguns resultados clássicos para as equações elípticas, e um resultado de existência local para um sistema parabólico-hiperbólico bem geral (ver (1.3.9)).

O Capítulo 2 está focado na existência de soluções para o sistema de Navier-Stokes (1.2.1)-(1.2.3). Apresentamos o resultado de existência (Teorema de D. Hoff [16]) no Teorema 2.3.2 e, quanto à sua demonstração completa, remetemos à [16]. No entanto, aqui, apresentamos a demonstração de várias estimativas usadas na demonstração do mesmo, com mais detalhes do que em [16]. Na Seção 2.2.3 são melhorados os resultados de [16], obtendo estimativas adequadas para os termos convectivos com peso, para obtermos a unicidade das trajetórias, o que é feito no Capítulo 3. A demonstração é feita descompondo o campo de velocidade em duas partes, cada uma, solução de uma certa equação "do momento linearizada", a primeira independentemente da pressão e

com dado inicial em um espaço de Sobolev, e a segunda dependendo da pressão mas com dado inicial zero. As estimativas são obtidas usando uma versão de interpolação conveniente para o caso dependente da pressão.

No Capítulo 3 são apresentados e demonstrados os resultados principais deste trabalho, a saber, a existência e unicidade das trajetórias associadas ao campo de velocidade obtido no Teorema 2.3.2. Os resultados são obtidos supondo que a densidade inicial ρ_0 satisfaz $\text{ess\,inf } \rho_0 \geq \underline{\rho}$ no espaço todo, onde $\underline{\rho}$ é uma constante estritamente positiva. No entanto, como feito em [19], poderíamos supor que esta condição é satisfeita em um certo conjunto limitado, concentrando o estudo no transporte desse conjunto e a porção de fluido contida nele. A questão da estrutura lagrangiana para fluidos compressíveis tem sido estudada por Hoff e Santos [19] e Hoff [17] no caso barotrópico. Eles provam que se um campo \mathbf{u} é solução das equações de Navier-Stokes para um fluido barotrópico satisfazendo estimativas com taxas de regularização convenientes, em dimensões 2 e 3, existe um fluxo (único) associado ao campo de velocidades, isto é, uma aplicação X que descreve a posição de cada partícula do fluido viajando com velocidade \mathbf{u} , em um instante de tempo determinado. De fato eles provam que a aplicação é Hölder contínua. A prova é baseada no fato que as soluções aproximadas satisfazem as estimativas do Teorema 2.1.1, independentemente do parâmetro de aproximação. A trajetória é obtida como o limite das trajetórias associadas às soluções aproximadas. Para a unicidade, o campo é decomposto novamente como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_{F,\omega}$ onde (abusando um pouco da notação) $\mathbf{u}_P = \nabla\Gamma * P$ e $\mathbf{u}_{F,\omega} = \nabla\Gamma * (F + \omega)$ sendo Γ a solução fundamental da equação de Laplace. Então é visto que \mathbf{u}_P é log-lipschitziano e $\mathbf{u}_{F,\omega}$ é lipschitziano, de modo que a desigualdade de Osgood pode ser aplicada. Adicionalmente são descritas algumas propriedades do fluxo.

Capítulo 1

Preliminares

Para apresentar um resumo das principais ferramentas matemáticas que usaremos nesta Tese, começamos este capítulo esclarecendo a notação que será usada ao longo do texto. Embora a mesma seja o mais próximo possível da notação padrão, usada em muitos textos atuais, a definimos precisamente, em primeiro lugar para evitar ambiguidades, e em segundo, para deixar um local na Tese onde o leitor ache os símbolos principais de forma rápida, sem precisar procurar a definição ao longo do texto. Neste Capítulo, os enunciados, definições, afirmações, etc, que são feitas sobre um espaço euclidiano \mathbb{R}^n não terão restrições na dimensão n , embora para os capítulos posteriores sejam necessárias somente as correspondentes a $n = 2$. Além disso, aquelas afirmações que sejam válidas em uma dimensão específica serão devidamente esclarecidas.

Em geral, as letras romanas minúsculas são usadas para variáveis, parâmetros e funções escalares. As funções vetoriais serão denotadas com negrito e os operadores entre espaços vetoriais abstratos com letras maiúsculas. Também denotaremos a variável temporal por t e as variáveis espaciais por \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{x}_i , etc. Os casos que não estão em conformidade com estas notações serão esclarecidos no momento.

Usaremos a letra C para denotar quaisquer constantes, estritamente positivas, nas desigualdades ou estimativas desta Tese, independentes das quantidades ou variáveis envolvidas. Escreveremos $C(a_1, \dots, a_k)$ para indicar que C depende de a_1, \dots, a_k , mas independe das demais variáveis presentes nas desigualdades. O símbolo de integral \int sozinho, i.e. sem especificar o domínio de integração, será usado para denotar a integral sobre todo o espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Multi-índices e símbolos especiais

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$; Multi-índice de comprimento n .

$|\alpha| = \sum \alpha_i$ Ordem do multi-índice.

$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

\mathbb{I} Tensor ou matriz identidade

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ Matriz de componentes $(a^i b^j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, onde $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$ e $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n)$ são vetores no \mathbb{R}^n .

Funções, aplicações e operadores

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Função escalar com domínio A .

$\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Campo vetorial com domínio A , $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)$ com f^i sendo funções escalares.

$f_{x_i} = \partial_{x_i} f = \frac{\partial}{\partial x_i} f$ Derivada parcial de f na variável x_i ou na direção \mathbf{e}_i .

$\operatorname{div} \mathbf{f} = \partial_{x_k} f^k$ Operador de divergência (os índices repetidos denotam somatório).

$\nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ Gradiente de uma função escalar.

$\nabla \mathbf{f} = (f_{x_j}^i)$ Gradiente (ou matriz jacobiana) de um campo vetorial.

$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ Derivada parcial de f de ordem α

Espaços de funções

$C^k(A)$	Espaço de funções k vezes continuamente diferenciáveis, de A em \mathbb{R} .
$C^{k,\alpha}(A)$	Funções de $C^k(A)$ com derivadas até ordem k Hölder contínuas com expoente α . Neste caso, α é um número real entre 0 e 1.
$L^p(A)$	Espaço de funções mensuráveis p -integráveis em A .
$W^{k,p}(A)$	Espaço de funções com derivada fraca até ordem k pertencendo ao $L^p(A)$.
$D^{k,p}(A)$	Espaço de funções com derivada fraca de ordem k pertencendo ao $L^p(A)$.
$H^k(A) = W^{k,2}(A)$	

Quando aparecer a notação sem especificar o espaço, L^p , $W^{k,p}$ etc, será entendido que o espaço é $A = \mathbb{R}^n$.

Normas e seminormas

$\ \cdot\ _B$	Norma no espaço B .
$\langle \cdot \rangle_A^\alpha$	Seminorma de Hölder com expoente α em A .
$\langle \cdot \rangle_{A,B}^{\alpha,\beta}$	Seminorma de Hölder com expoente α em A e β em B .
$\langle \cdot \rangle$	Seminorma de Lipschitz.
$\langle \cdot \rangle_{LL}$	Seminorma log-lipschitziana.

1.1 Interpretação física

A seguir apresentamos uma breve dedução das equações que descrevem o movimento de um fluido não compressível. Não daremos detalhes muito técnicos já que as considerações físicas não são o centro do trabalho, e também, porque existe uma vasta literatura que faz de forma rigorosa tais deduções. Para ver algumas considerações mais cuidadosas, pode-se consultar [9] ou [10]. Considerações mais profundas podem ser vistas em [2] ou [3].

O movimento de um corpo na *mecânica do contínuo* é descrito por uma família de difeomorfismos $X(t, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Em um instante t e para um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se uma partícula no instante $t_0 = 0$ se encontra no ponto \mathbf{x} , $X(t, \mathbf{x})$ representa a posição da partícula após um tempo t . Se \mathbf{u} denota a velocidade com que as partículas do fluido estão sendo transportadas, a posição X fica completamente determinada pelas relações

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} X(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}(X(t, \mathbf{x}), t) \\ X(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{x}\end{aligned}$$

Esta equação é fundamental no estudo das equações de Navier-Stokes, em particular por que exhibe uma relação direta entre a variável lagrangiana X e a variável euleriana \mathbf{u} .

1.1.1 Conservação da massa

A suposição de que o fluido está fluindo em um contínuo permite assegurar a existência de uma função que descreve a razão entre a massa e o volume que o fluido ocupa. Tal função é chamada de densidade e denotada por ρ e depende da posição das partículas \mathbf{x} e do tempo t . A massa da porção de fluido em uma certa região $W \subset \mathbb{R}^n$ é dada por

$$M(t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

O princípio de conservação da massa pode ser enunciado como segue [6]:

A taxa de crescimento da massa em uma região $W \subset \mathbb{R}^n$ (chamada volume de controle) é igual a taxa na qual a massa cruza a fronteira ∂W do volume de controle, em direção ao interior.

O nome volume é genérico e independe da dimensão, ainda que no caso que será trabalhado nos próximos capítulos o domínio é o plano \mathbb{R}^2 e o volume de controle é na verdade uma área de controle.

Ou seja:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho d\mathbf{x} = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}),$$

onde \mathbf{n} é o *vetor normal exterior* a W . Usando o Teorema da Divergência e permutando os sinais de integração e derivação, a última equação pode ser escrita como

$$\int_W \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0$$

e, dado que W é um domínio arbitrário, concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1.1.1}$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

Intuitivamente, este princípio postula a invariância da massa ao longo do tempo, ou em uma linguagem mais simples, que a massa é constante, no sentido de que a matéria "não é criada nem destruída, só transformada".

1.1.2 Balanço do momento

De forma rigorosa, o princípio do balance do momento diz:

A taxa de variação do momento de um corpo em um volume de controle W é igual à força resultante exercida sobre o fluido.

Matematicamente, o princípio pode ser expressado usando a seguinte equação vetorial:

$$\frac{d}{dt} \int_{X(t,W)} (\rho \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{X(t,W)} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial X(t,W)} \mathbb{T} \mathbf{n} dS(\mathbf{x})$$

onde assumimos o princípio de stress de Euler-Cauchy, isto é, que a força resultante agindo sobre o volume de controle é a soma de uma força externa com densidade \mathbf{f} e uma pequena tração $\mathbb{T} \mathbf{n}$ determinada pelo tensor de stress \mathbb{T} . Como o interesse no presente texto está focado em um fluido isotrópico newtoniano, o tensor de stress tem a forma específica:

$$\mathbb{T} = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbb{I} - P \mathbb{I} \quad (1.1.2)$$

onde μ e λ são chamados os coeficientes de viscosidade e assumidos constantes [9], e a parte do stress denotada por P corresponde a pressão. Assumiremos que não há forças externas atuando no fluido, ou seja, $\mathbf{f} = 0$. Esta lei de balanço, quando a massa é constante, coincide com a mais familiar *segunda lei de Newton* [2], [6], [9], [26].

Antes de continuar enunciamos o seguinte teorema de convecção, conhecido também como *Teorema do Transporte*.

Teorema 1.1.1 ([26], pag. 10). Se W é um domínio de um fluido com fluxo $X(t, \mathbf{x})$ e $f(\cdot, t) \in C^1(X(t, W))$, então

$$\frac{d}{dt} \int_{X(t,W)} f d\mathbf{x} = \int_{X(t,W)} \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div} (f \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Com as observações feitas, e usando o Teorema do Transporte é possível concluir que para $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \int_W \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^j) + \operatorname{div} (\rho u^j \mathbf{u}) d\mathbf{x} &= \int_{\partial W} \mathbb{T}^j \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\partial W} [\mu(\nabla u^j + \mathbf{u}_{x_j}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{e}_j - P \mathbf{e}_j] \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

onde \mathbb{T}^j denota a linha j da matriz \mathbb{T} . Daí, pelo Teorema da Divergência segue que

$$\int_W \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^j) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} u^j) d\mathbf{x} = \int_W \operatorname{div}[\mu(\nabla u^j + \mathbf{u}_{x_j}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{e}_j - P \mathbf{e}_j] d\mathbf{x}.$$

A notação f_{x_j} representa a derivação parcial na componente j , ou seja, $f_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f$. Finalmente, como W é arbitrário, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^j) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} u^j) &= \mu(\Delta u^j + (\operatorname{div} \mathbf{u})_{x_j}) + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})_{x_j} - P_{x_j} \\ &= \mu \Delta u^j + (\mu + \lambda)(\operatorname{div} \mathbf{u})_{x_j} - P_{x_j}. \end{aligned}$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, que na forma vetorial escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \nabla P, \quad (1.1.3)$$

onde $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ é o tensor de componentes $a^i b^j$, para cada par de vetores $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$ e $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n)$ em \mathbb{R}^n . Observamos que se tivéssemos assumido que a força externa era uma força gradiente, em vez de nula, esta poderia ser incorporada ao gradiente da pressão em (1.1.3), ou seja, assumimos que a força externa era nula para simplificar a apresentação, mas a equação (1.1.3) inclui forças externas gradientes.

1.1.3 Conservação da energia

As considerações feitas até agora só envolvem conceitos mecânicos, mas o movimento de um fluido é também afetado pelas variações termodinâmicas. De acordo com a Primeira Lei da Termodinâmica,

A diferença entre as variações na energia total e o trabalho equivalem à transferência de calor (na forma de energia) em um sistema fechado.

Assim, em outras palavras

$$dE - W = Q$$

Considerando um volume de controle W_t , o trabalho tem duas componentes, a primeira devida a ação de forças externas

$$\int_{W_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}$$

e a segunda devida ao stress na fronteira

$$\int_{\partial W_t} (\mathbb{T} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x})$$

onde \mathbb{T} é como em (1.1.2). Quanto à transferência de calor, segundo a *Lei de Fourier*

$$\text{Fluxo de calor} = \kappa \nabla \vartheta$$

onde ϑ denota a função temperatura. Em geral, κ pode depender da temperatura ϑ e portanto da energia interna específica e . Assim, a energia devida à transferência de calor na fronteira do volume de controle é dada por

$$\int_{\partial W_t} \kappa \nabla \vartheta \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}.$$

Logo, na ausência de forças externas, a conservação da energia é expressada como

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} (\rho E) d\mathbf{x} = \int_{\partial W_t} (\mathbb{T}\mathbf{u} + \kappa \nabla \vartheta) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x})$$

e, usando o Teorema do Transporte e o Teorema da Divergência como antes,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \operatorname{div} (\rho E \mathbf{u}) + \operatorname{div} (\kappa \nabla \vartheta) = \operatorname{div} (\mathbb{T}\mathbf{u}).$$

Agora, por (1.1.2) e a identidade $\Delta |\mathbf{u}|^2 = 2 \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}^T) \mathbf{u})$ obtemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mathbb{T}\mathbf{u}) &= \mu \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) + \mu \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} (\mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}) - \operatorname{div} (P\mathbf{u}) \\ &= \mu \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) + \Delta \left(\frac{1}{2} \mu |\mathbf{u}|^2 \right) + \lambda \operatorname{div} (\mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}) - \operatorname{div} (P\mathbf{u}) \end{aligned}$$

e daí vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \operatorname{div} (\rho E \mathbf{u} + P\mathbf{u}) &= \operatorname{div} (\kappa \nabla \vartheta) + \Delta \left(\frac{1}{2} \mu |\mathbf{u}|^2 \right) \\ &\quad + \mu \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) + (\lambda - \mu) \operatorname{div} ((\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u}) \end{aligned}$$

e, de acordo com [16], redefinindo apropriadamente a temperatura, e dado que o fluido é considerado politrópico, isto é, $\vartheta = Ke$, onde e é a *energia interna específica* e K é uma constante; o balanço da energia total é descrito pela equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \operatorname{div} (\rho E \mathbf{u} + P\mathbf{u}) &= \Delta \left(Ke + \frac{1}{2} \mu |\mathbf{u}|^2 \right) \\ &\quad + \mu \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) + (\lambda - \mu) \operatorname{div} ((\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Levando em conta que a energia total é decomposta na energia cinética e na energia interna específica, i.e., $E = \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e$ ([9], [16]), é possível decompor a equação do balanço da energia em duas partes, representando o balanço da *energia cinética* e da *energia interna*. De fato, multiplicando (1.1.3) por \mathbf{u} e usando (1.1.1) obtemos o balanço da energia cinética,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) + \nabla P \cdot \mathbf{u} &= \mu \left[\Delta \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) - |\nabla \mathbf{u}|^2 \right] \\ &\quad + \lambda \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

e subtraindo a última equação de (1.1.4), obtemos a equação da energia interna específica,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \operatorname{div} (\rho e \mathbf{u}) + P \operatorname{div} \mathbf{u} = K \Delta e + \mu (|\nabla \mathbf{u}|^2 + u_{x_j}^k u_{x_k}^j) + (\lambda - \mu) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2. \quad (1.1.5)$$

1.2 Descrição do problema

Com as ideias expostas anteriormente, é natural perguntar: *como um fluido nestas condições vai fluir?* ou mais precisamente, *existe um fluxo para o fluido?* e caso ele exista, *é único?* Este problema é o que denominamos de "estrutura lagrangiana" e será o problema estudado neste texto. O problema é dividido em duas partes. A primeira, que corresponde à formulação euleriana, consiste em garantir a existência de soluções para o modelo, suficientemente regulares. A segunda corresponde à estrutura lagrangiana, e será respondidas afirmativamente as perguntas sobre a existência e a unicidade do fluxo para as soluções obtidas na primeira parte, sob certas hipóteses.

1.2.1 Equações de Navier Stokes

O interesse deste trabalho está centrado no sistema de equações de Navier-Stokes para um fluido compressível não barotrópico e politrópico em duas dimensões espaciais. As equações que modelam o fluido são dadas por (1.1.1), (1.1.3) e (1.1.4), ou seja, o sistema:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2.1)$$

$$(\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P = \mu \Delta \mathbf{u} + \lambda \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (1.2.2)$$

$$(\rho e)_t + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{u}) + P \operatorname{div} \mathbf{u} = K \Delta e + \mu \left(|\nabla \mathbf{u}|^2 + u_{x_j}^k u_{x_k}^j \right) + (\lambda - \mu) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2, \quad (1.2.3)$$

onde ρ , \mathbf{u} , e representam, respectivamente, a densidade, a velocidade e a energia interna específica do fluido, e P é a pressão. Assumimos que o fluido é ideal, ou seja, que $P \equiv P(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho e$, com $\gamma > 1$ sendo a constante adiabática. As constantes μ e λ , ambas estritamente positivas, são os coeficientes de viscosidade e K é uma constante, também estritamente positiva, associada à temperatura. O símbolo w_t será usado para simplificar $\frac{\partial}{\partial t} w$. As equações descrevem as leis de conservação da massa (1.2.1), do momento (1.2.2) e da energia (1.2.3), como mostrado na seção 1.1 (ver [2], [3] ou [9]).

A derivada material (ou ao longo das trajetórias) de uma função escalar w é definida por $\dot{w} := w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w$, e no caso de uma função vetorial \mathbf{w} , define-se analogamente $\dot{\mathbf{w}} := \mathbf{w}_t + (\nabla \mathbf{w}) \mathbf{u}$. Em termos da derivada material, as equações (1.2.1)-(1.2.3) podem ser reescritas como segue:

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (1.2.4)$$

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} + \lambda \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (1.2.5)$$

$$\rho \dot{e} = K \Delta e - P \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \left(|\nabla \mathbf{u}|^2 + u_{x_j}^k u_{x_k}^j \right) + (\lambda - \mu) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2. \quad (1.2.6)$$

Às equações (1.2.1)-(1.2.3), são acrescentadas as condições iniciais

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0, \quad \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0 \quad \text{e} \quad e(0, \cdot) = e_0, \quad (1.2.7)$$

as quais podem ser descontínuas. Sendo $\tilde{\rho}$ e \tilde{e} certas constantes associadas à densidade e à energia interna específica, definimos a energia inicial como

$$C_0 := \|\rho_0 - \tilde{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2 + \int \left[(\rho_0 - \tilde{\rho})^2 + |\mathbf{u}_0|^2 + |e_0 - \tilde{e}|^2 + |\nabla e_0|^2 + |\mathbf{u}_0|^4 \right] (1 + |\mathbf{x}|^2)^l d\mathbf{x} < \infty \quad (1.2.8)$$

onde s e l são constantes estritamente positivas, sendo que o índice s do espaço de Sobolev H^s será especificado adiante e l é arbitrário. Quanto às constantes de viscosidade, supomos que são também estritamente positivas e que

$$\lambda < (1 + \sqrt{2})\mu. \quad (1.2.9)$$

Estas condições sobre l , λ e μ são as usadas em [16]. Observamos que usamos a condição (1.2.9) na demonstração do Lema 2.2.8 (Capítulo 2).

Definição 1.2.1. Uma solução fraca de (1.2.1)-(1.2.3) é uma tripla (ρ, \mathbf{u}, e) de funções tais que, para qualquer função teste $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, \infty))$ e quaisquer $t_2 > t_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int \rho \varphi d\mathbf{x} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int (\rho \varphi_t + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi) d\mathbf{x} dt = 0 \\ & \int \rho w^j \varphi d\mathbf{x} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int (\rho w^j \varphi_t + \rho w^j \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + P \varphi_{x_j}) d\mathbf{x} dt \\ & \quad = - \int_{t_1}^{t_2} \int \mu \nabla w^j \cdot \nabla \varphi + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi_{x_j} d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

para $j = 1, 2$ e

$$\begin{aligned} & \int \rho e \varphi d\mathbf{x} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int (\rho e \varphi_t + \rho e \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - P \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi) d\mathbf{x} dt \\ & \quad = - \int_{t_1}^{t_2} \int [K \nabla e + \mu ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u})] \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} dt \\ & \quad \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int (\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2) \varphi d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

A seguinte versão do Teorema do Transporte vai ser útil no restante do texto, v. [18] página 229.

Lema 1.2.2. Suponhamos que (ρ, \mathbf{u}) sejam funções suaves e satisfaçam (1.2.1), g seja uma função $C^1((0, \infty))$ com $g(0) = 0$, e que f seja uma função suave. Então

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int (g'(\tau) \rho(\mathbf{x}, \tau) f(\mathbf{x}, \tau)^2 + g(\tau) \rho(\mathbf{x}, \tau) f(\mathbf{x}, \tau) \dot{f}(\mathbf{x}, \tau)) d\mathbf{x} d\tau = \frac{1}{2} \int g(\tau) \rho(\mathbf{x}, \tau) f(\mathbf{x}, \tau)^2 d\mathbf{x} \quad (1.2.10)$$

Para finalizar esta Seção, definimos duas quantidades importantes no estudo dos fluidos e associadas a um campo de velocidades satisfazendo as equações de Navier-Stokes. Suponhamos que (ρ, \mathbf{u}, e) satisfaçam (1.2.1)-(1.2.3). Como em alguns artigo de D. Hoff, chamaremos a quantidade

$$F = (\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{u} - (P - \tilde{P}) \quad (1.2.11)$$

de *fluxo efetivo viscoso* do campo \mathbf{u} , e a matriz $\omega = (\omega^{j,k})$ definida por

$$\omega^{j,k} = u_{x_k}^j - u_{x_j}^k$$

de *vorticidade*, onde $\tilde{P} = P(\tilde{\rho}, \tilde{e})$. Nesta Tese, frequentemente identificaremos os termos ω e $\omega^{1,2}$, já que em dimensão dois, cada um fica completamente determinado a partir do outro.

1.2.2 Estrutura lagrangiana

Dado um campo vetorial \mathbf{v} em \mathbb{R}^n , é natural perguntar-se quais condições garantem a existência de um (único) fluxo associado, isto é, de uma única aplicação $\psi : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $I \subset \mathbb{R}$ sendo um intervalo aberto e tal que $d\psi(t, \mathbf{x})/dt = \mathbf{v}(\psi(t, \mathbf{x}), t)$ e $\psi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \in I$. É conhecido que no caso em que \mathbf{v} é um campo lipschitziano, tal estrutura lagrangiana é assegurada. A existência é uma consequência da continuidade do campo (Teorema de Peano), e a unicidade do fluxo é obtida a partir da condição de Lipschitz e da desigualdade de Gronwall. Nesta Seção apresentamos uma versão mais geral deste resultado, assim como uma generalização do Lema de Gronwall, conhecida como Lema de Osgood. Para as demonstrações detalhadas pode-se consultar [5]. A versão contida no próximo lema é menos geral do que a que aparece em [5], mas é útil para facilitar a exposição, e em [11] é possível achar famílias mais gerais de funções onde o resultado é válido.

Seja $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua e crescente e satisfazendo $\mu(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. O símbolo $C_\mu(\mathbb{R}^n)$ denotará o conjunto das funções limitadas v de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n tais que

$$|v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})| \leq C\mu(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

para alguma constante positiva C e todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Intuitivamente, C_μ contém as funções que são "lipschitzianas módulo μ ". Adicionalmente definimos a função \mathcal{M} como

$$\mathcal{M}(s) = \int_s^1 \frac{dr}{\mu(r)}, \quad s \geq 0.$$

Proposição 1.2.3 (Lema de Osgood). Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, y uma função mesurável e não negativa e γ uma função não negativa e localmente integrável definidas em $[t_0, \infty)$. Suponhamos que, para um número real não negativo a tenhamos a desigualdade

$$y(t) \leq a + \int_{t_0}^t \gamma(s)\mu(y(s))ds \tag{1.2.12}$$

para todo $t \geq t_0$. Então, se $a > 0$ e $\mathcal{M}(s) = \int_s^1 \frac{dr}{\mu(r)}$, $s \geq 0$, temos que

$$\mathcal{M}(a) - \mathcal{M}(y(t)) \leq \int_{t_0}^t \gamma(s)ds$$

para todo $t \geq t_0$. Se $a = 0$ e $\mathcal{M}(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow 0$ ($s > 0$) então $y \equiv 0$.

Um primeiro lema descrevendo a estrutura lagrangiana de um campo vetorial não lipschitziano é o seguinte, o qual contém algumas das ideias principais da demonstração do resultado principal do Capítulo 3:

Lema 1.2.4. Sejam I um intervalo e $(t_0, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v} \in L^1_{\text{loc}}(I; C_\mu(\mathbb{R}^n))$ com $\mathcal{M}(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$ então existe um intervalo $J \subset I$ com $t_0 \in J$ tal que a equação

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(s, \mathbf{x}(s))ds \tag{1.2.13}$$

tem uma única solução definida no intervalo J .

Demonstração. A existência de uma trajetória $\mathbf{x}(t)$ resolvendo (1.2.13) é obtida usando o esquema iterativo de Picard. Quanto à unicidade, supondo que \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 são soluções de (1.2.13) definidas em J , temos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(s, \mathbf{x}_1(s)) - \mathbf{v}(s, \mathbf{x}_2(s))| ds \\ &= \int_{t_0}^t \mu(|\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)|) \frac{|\mathbf{v}(s, \mathbf{x}_1(s)) - \mathbf{v}(s, \mathbf{x}_2(s))|}{\mu(|\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)|)} ds \end{aligned}$$

e a função

$$\gamma(s) = \frac{|\mathbf{v}(s, \mathbf{x}_1(s)) - \mathbf{v}(s, \mathbf{x}_2(s))|}{\mu(|\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)|)}$$

é localmente integrável, já que $\mathbf{v} \in L^1_{\text{loc}}(I; C_\mu(\mathbb{R}^n))$, logo, pelo Lema de Osgood, concluímos que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, como desejado. □

Nesta Tese a nossa função μ será a função

$$\mu(r) = \begin{cases} r(1 - \ln r) & \text{se } 0 < r \leq 1 \\ r & \text{se } r > 1. \end{cases} \quad (1.2.14)$$

Notemos que μ é uma função contínua, crescente e não negativa, e satisfaz os limites descritos anteriormente, ou seja $\mu(r) \rightarrow 0$ e $\mathcal{M}(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$. Definimos o espaço $LL := C_\mu(\mathbb{R}^n)$ como o espaço das funções *log-lipschitzianas*, isto é, o espaço constituído das funções cuja norma

$$\|f\|_{LL} := \langle f \rangle_{LL} + \|f\|_{L^\infty}$$

é finita, onde a *seminorma log-lipschitziana*, $\langle \cdot \rangle_{LL}$, está definida por

$$\langle f \rangle_{LL} := \sup_{0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 1} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{\mu(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}$$

e μ é definida em (1.2.14). Observemos que LL é um espaço de Banach com esta norma. O próximo teorema contém a estrutura lagrangiana para as funções log-lipschitzianas, e exhibe um resultado de regularidade.

Teorema 1.2.5. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $\mathbf{v} \in L^1_{\text{loc}}(I; LL)$, então existe uma única aplicação $\psi : (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, tal que

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_0^t \mathbf{v}(\psi(s, \mathbf{x}), s) ds, \quad (t, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^n. \quad (1.2.15)$$

Além disso, ψ satisfaz a seguinte estimativa tipo Hölder: para cada $t > 0$, se $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \exp\left(1 - \exp\left(\int_0^t \langle \mathbf{v}(s, \cdot) \rangle_{LL} ds\right)\right)$ então

$$|\psi(t, \mathbf{x}) - \psi(t, \mathbf{y})| \leq C(t) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\exp\left(-\int_0^t \langle \mathbf{v}(s, \cdot) \rangle_{LL} ds\right)} \quad (1.2.16)$$

onde $C(t) = \exp\left(1 - \exp\left(-\int_0^t \langle \mathbf{v}(s, \cdot) \rangle_{LL} ds\right)\right)$.

Demonstração. Demonstraremos somente a parte da regularidade, pois tanto a existência quanto a unicidade das trajetórias $\psi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(t)$ se derivam do Lema 1.2.5. Sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} dois pontos do \mathbb{R}^n tais que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \exp\left(1 - \exp\left(\int_0^t \langle \mathbf{v}(s, \cdot) \rangle_{LL} ds\right)\right)$ e sejam $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ as respectivas trajetórias começando nesses pontos. Então de (1.2.15) segue-se que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| &\leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \int_0^t |\mathbf{v}(\mathbf{x}(s), s) - \mathbf{v}(\mathbf{y}(s), s)| ds \\ &\leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \int_0^t \langle \mathbf{v}(\cdot, s) \rangle_{LL} \mu(|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)|) ds. \end{aligned}$$

Daí, aplicando o Lema de Osgood para $|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| < 1$ em $[0, t]$ e levando em conta que para $r > 0$, $\mathcal{M}(r) = \ln(1 - \ln r)$, temos que

$$-\ln(1 - \ln|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|) + \ln(1 - \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \leq \int_0^t \langle \mathbf{v}(\cdot, s) \rangle_{LL} ds.$$

Passando o segundo somando para o lado direito, aplicando a exponencial e organizando os termos novamente obtemos

$$\ln|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq 1 + (\ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - 1) e^{\int_0^t \langle \mathbf{v}(\cdot, s) \rangle_{LL} ds}.$$

Então, tomando a exponencial novamente, obtemos o resultado. Quando $|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| > 1$, temos, pelo lema de Osgood, que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| e^{\int_0^t \langle \mathbf{v}(\cdot, s) \rangle_{LL} ds}$$

mas a hipótese sobre $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ implica que $\exp\left(\int_0^t \langle \mathbf{v}(\cdot, s) \rangle_{LL} ds\right) < 1$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < e$, portanto

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| &\leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \\ &= |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\exp\left(-\int_0^t \langle \mathbf{v}(s, \cdot) \rangle_{LL} ds\right)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{C(t)} \\ &\leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\exp\left(-\int_0^t \langle \mathbf{v}(s, \cdot) \rangle_{LL} ds\right)} e^{C(t)} \end{aligned}$$

□

1.3 Ferramentas Matemáticas

Os resultados mencionados aqui são facilmente encontrados na literatura, de modo que os apresentaremos sem demonstração, exceto nos casos em que a demonstração não seja amplamente divulgada ou contenha ideias úteis para o melhor entendimento do texto.

1.3.1 Desigualdades básicas e imersões

Desigualdades aparecem constantemente no estudo de equações diferenciais. Por isto, a seção presente está focada em fazer um breve resumo daquelas que vão contribuir no restante do texto.

A primeira que mencionaremos é a bem conhecida desigualdade de Hölder generalizada, válida para quaisquer funções f_1, \dots, f_k , com $f_i \in L^{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ com $1 = \sum \frac{1}{p_i}$:

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}$$

Demostrações detalhadas podem ser encontradas em diversos textos, por exemplo [12], [23].

Uma consequência importante da desigualdade de Hölder é a seguinte versão de imersão em espaços L^p , a qual é uma desigualdade que é a primeira do tipo que chamaremos depois desigualdade de interpolação (ver [12])

Proposição 1.3.1. Se $0 < q < p < r \leq \infty$, então $L^p \cap L^r \hookrightarrow L^q$ com

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}^\lambda \|f\|_{L^r}^{1-\lambda}$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$

O expoente conjugado de Sobolev, para p e k dados, é definido como

$$q^* = \frac{np}{n - kp}.$$

O seguinte Teorema apresenta as bem conhecidas imersões de Sobolev. No caso em que o domínio é limitado, o mesmo pode ser encontrado em [1], [8], [9], [10], [21], [34] e nas citações contidas neles. No caso não limitado ou do espaço completo é preciso fazer algumas modificações no enunciado. A seguinte versão foi extraída de [33].

Teorema 1.3.2 (Imersões de Sobolev). 1. Se $kp < n$, então $W^{k,p} \hookrightarrow L^{q^*}$ e $W^{k,p} \hookrightarrow L^q$ compactamente para todo $1 \leq q < q^*$

2. Se $kp = n$, então $W^{k,p} \hookrightarrow L_{\text{loc}}^q$ compactamente para todo $1 \leq q < \infty$. A imersão contínua é válida ainda quando $p = 1$ e $q = \infty$.

3. Se $k - \frac{n}{p} = m + \alpha$ para $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0, 1)$, então $W^{k,p} \hookrightarrow C^{k,\alpha}(B)$ para cada conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^n$. Tem-se um caso adicional quando $n = k - m - 1$ (ou seja, $p = \alpha = 1$): neste caso, a imersão $W^{k,1} \hookrightarrow C^{k,1}(B)$ é válida para cada limitado $B \subset \mathbb{R}$, sendo a imersão compacta sobre $C^{k,\beta}(B)$ para cada $\beta \in [0, \alpha)$ e cada B limitado.

Uma desigualdade também importante é a chamada *desigualdade de Gagliardo-Nirenberg*, para a qual citamos [21], [33], ou para uma demonstração mais detalhada, [27]:

Teorema 1.3.3. Para inteiros j, k tais que $0 \leq j < k$, sejam $r, q \in [1, \infty]$ e $p \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n} \right) + (1 - \lambda) \frac{1}{q}.$$

Então para qualquer $w \in W^{k,r} \cap L^q$ existe uma constante positiva $C = C(n, k, j, q, r, \lambda)$ tal que

$$\|D^j w\|_{L^p} \leq C \|D^k w\|_{L^r}^\lambda \|w\|_{L^q}^{1-\lambda}.$$

No caso em que $m - j - \frac{n}{r}$ é não negativo para $r \in (0, \infty)$, a desigualdade é válida sempre que $\lambda \in [\frac{j}{k}, 1)$.

Ao longo do texto usaremos as seguintes estimativas para o caso $n = 2$, derivadas dos teoremas acima:

A desigualdade de Morrey para uma função $f \in L^p$ com $p > 2$ é

$$\langle f \rangle^\alpha \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (1.3.1)$$

onde $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$. Como consequência, temos que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^2} \right). \quad (1.3.2)$$

A desigualdade de interpolação para $p \geq 2$ é

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \leq C \|f\|_{L^2}^2 \|\nabla f\|_{L^2}^{p-2}. \quad (1.3.3)$$

Para o estudo das equações diferenciais, a transformada de Fourier é também uma ferramenta importante, em particular, o seguinte resultado de continuidade:

Teorema 1.3.4 (Hörmander-Mikhlin). Seja $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-\alpha}, \quad \xi \neq 0$$

para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq [n/2] + 1$ e seja o operador \mathcal{T} definido por

$$\widehat{\mathcal{T}v}(\xi) = m(\xi)\hat{v}(\xi).$$

Então, o operador \mathcal{T} é linear e limitado em L^p para qualquer $1 < p < \infty$. O símbolo $[\cdot]$ denota a parte inteira.

1.3.2 Interpolação

A teoria de interpolação tem evoluído muito desde sua criação. O primeiro resultado importante foi obtido por M. Riesz em 1926 e foi melhorado por G. O. Thorin quem deu uma formulação de operadores. Este resultado hoje em dia é conhecido como o *Teorema de interpolação de Riesz-Thorin*. Algumas generalizações importantes foram feitas depois, por Marcinkiewics em 1939 e posteriormente por E.M Stein e G Weiss, porém, sempre fazendo considerações sobre espaços L^p ou espaços similares. O desenvolvimento da teoria geral sobre espaços de Hilbert ou Banach começou de forma independente em vários países a partir de 1958. Entre os principais contribuidores encontram-se J.L Lions, E. Gagliardo, A. Calderon e S.G. Krein. Mas foi o trabalho de J. Petre que marcou o caminho a partir desse momento [22].

Apresentamos aqui um resumo simples da teoria básica de interpolação que usaremos na Seção 2.2.3. Para informação mais detalhada pode-se consultar [4], [7], [22] ou [31], assim como [30] para o caso específico dos espaços de medida com peso.

Para facilitar a leitura, primeiro enunciamos um teorema geral de interpolação, e depois alguns casos particulares, embora, historicamente tenham aparecido ao contrário. Primeiro introduzimos alguma notação. Se A e B são dois espaços de Banach imersos em um mesmo espaço de Banach (para fazer sentido a soma e a interseção), o par (A, B) é chamado *compatível*, ou simplesmente é dito que A e B são compatíveis. O símbolo $T : A \rightarrow B$ significa que o operador T é contínuo de A em B , e o conjunto dos operadores lineares limitados de A em B é denotado por $\mathcal{B}(A, B)$ o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|T\|_{A,B} = \sup_{x \in A, \|x\|_A=1} \|Tx\|_B$$

Sejam $\theta \in (0, 1)$ e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de interpolação real $(A, B)_{\theta,p}$ é definido como o subconjunto de $A + B$

$$(A, B)_{\theta,p} := \left\{ u \mid \exists v : \mathbb{R} \rightarrow A \cap B, u = \int v(t)dt \text{ e } v \text{ satisfaz a } (\theta, p)\text{-condição} \right\}$$

onde a integral é no sentido de Bochner e a (θ, p) -condição é definida por

$$(\theta, p) - \text{condição} \equiv \begin{cases} \int \|e^{-\theta t} v(t)\|_A^p dt < \infty; \\ \int \|e^{(1-\theta)t} v(t)\|_B^p dt < \infty; \end{cases}$$

(v. [7]). O espaço $(A, B)_{\theta,p}$ é munido da norma

$$\|u\|_{AB} = \inf \left\{ \|e^{-\theta t} v(t)\|_{L^p(A)}^{1-\theta} \|e^{(1-\theta)t} v(t)\|_{L^p(B)}^\theta \right\}$$

com o ínfimo tomado sobre todas as representações $u = \int v(t)dt$ de u satisfazendo a (θ, p) -condição. O resultado chave da teoria de interpolação é o seguinte teorema:

Teorema 1.3.5 (Teorema de Interpolação, [7], Teorema 1.1.5). Sejam (A_0, A_1) e (B_0, B_1) dois pares compatíveis de espaços de Banach e T um operador linear tal que $T : A_0 \rightarrow B_0$ e $T : A_1 \rightarrow B_1$. Então para $\theta \in (0, 1)$ e $1 \leq p \leq \infty$

$$T : (A_0, A_1)_{\theta,p} \rightarrow (B_0, B_1)_{\theta,p}$$

e denotando $A = (A_0, A_1)_{\theta,p}$ e $B = (B_0, B_1)_{\theta,p}$, temos que

$$\|T\|_{AB} \leq \|T\|_{A_0 B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 B_1}^\theta$$

Um exemplo simples e amplamente conhecido é o Teorema de Riesz-Thorin. Para enunciá-lo é necessário primeiramente lembrar que para um espaço de medida (Ω, μ) , onde a medida é assumida sempre positiva, o espaço das funções μ -mensuráveis e p integráveis é denotado por $L^p(\Omega, d\mu)$. Sejam (Ω, μ) e $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ dois espaços de medida, sendo as medidas positivas, para $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $A_0 = L^{p_0}(\Omega, \mu)$, $A_1 = L^{p_1}(\Omega, \mu)$, $B_0 = L^{q_0}(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ e $B_1 = L^{q_1}(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$. O Teorema de

interpolação de Riesz-Thorin corresponde ao enunciado no Teorema de Interpolação acima levando em conta que ([4],[7])

$$\begin{aligned} (L^{p_0}(\Omega, d\mu), L^{p_1}(\Omega, d\mu))_{\theta, p} &= L^p(\Omega, d\mu) \\ (L^{q_0}(\Omega, d\mu), L^{q_1}(\Omega, d\mu))_{\theta, p} &= L^q(\Omega, d\mu) \end{aligned}$$

com $\theta \in (0, 1)$ e $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

Em [30], demonstra-se um teorema de interpolação similar, mas no caso em que as medidas não são necessariamente iguais. A seguir enunciamos este teorema para um valor fixo de p .

Teorema 1.3.6 (Teorema de interpolação de Stein-Weiss). Sejam (Ω, μ) , $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$, espaços de medida (medidas positivas), w_0, w_1, \tilde{w}_0 , e \tilde{w}_1 funções escalares não negativas e mensuráveis, e $1 < p \leq \infty$. Então $(L^p(\Omega, w_0 d\mu), L^p(\Omega, w_1 d\mu))_{\theta, p} = L^p(\Omega, w d\mu)$ onde $w = w_0^{1-\theta} w_1^\theta$. Em particular, se $T : L^p(\Omega, w_0 d\mu) \rightarrow L^p(\tilde{\Omega}, \tilde{w}_0 d\tilde{\mu})$ e $T : L^p(\Omega, w_1 d\mu) \rightarrow L^p(\tilde{\Omega}, \tilde{w}_1 d\tilde{\mu})$, então $T : L^p(\Omega, w d\mu) \rightarrow L^p(\tilde{\Omega}, \tilde{w} d\tilde{\mu})$, onde $\tilde{w} = \tilde{w}_0^{1-\theta} \tilde{w}_1^\theta$.

Existem versões mais gerais de interpolação nos espaços L^p , mas o nível de generalidade dado até aqui, é mais que suficiente para o objetivo do texto. Além disso, um exemplo de espaços intermediários, também útil para o nosso objetivo é dado a seguir.

Lema 1.3.7 ([31]).

$$(H^{s_0}, H^{s_1})_{\theta, 2} = H^s$$

onde $s = s_0(1 - \theta) + s_1\theta$.

Para terminar esta seção demonstramos o seguinte resultado simples, mas que será usado posteriormente.

Proposição 1.3.8. Suponhamos que

$$\begin{aligned} T : L^2 &\rightarrow L^\infty(0, 1; L^2) \oplus L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2) \\ &\text{e} \\ T : H^1 &\rightarrow L^\infty(0, 1; L^2(t d\mathbf{x})) \oplus L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2, t d\mathbf{x} dt) \end{aligned}$$

então para $\beta \in (0, 1)$

$$T : H^\beta \rightarrow L^\infty(0, 1; L^2(t^{1-\beta} d\mathbf{x})) \oplus L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2, t^{1-\beta} d\mathbf{x})$$

Aqui, para $\alpha > 0$, o espaço $L^\infty(0, 1; L^2(t^\alpha d\mu))$ representa o espaço das funções f , mensuráveis e tais que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} t^\alpha \int |f|^2 d\mathbf{x} < \infty.$$

Demonstração. Dividimos esta demonstração em duas partes. Em primeiro lugar, observamos que se $T : L^2 \rightarrow L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2, t d\mathbf{x} dt)$ e $T : H^1 \rightarrow L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2)$, então, pelo Teorema 1.3.5 e os lemas acima, temos $T : H^\beta \rightarrow L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2, t^{1-\beta} d\mathbf{x} dt)$.

Para caso restante, seja $t \in (0, 1)$ fixo. Por hipótese, para $u \in H^1$

$$\|Tu(t, \cdot)\|_{L^2} \leq t^{-1} C_0 \|u\|_{L^2}$$

e

$$\|Tu(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C_1 \|u\|_{H^1}$$

ou seja, o operador $S_t u = Tu(t, \cdot)$ é tal que $S_t : L^2 \rightarrow L^2$ com norma menor do que $t^{-1} C_0$. Assim, novamente $S_t : H^1 \rightarrow L^2$ com norma menor do que C_1 , de novo pelo Teorema de Interpolação, 1.3.5, temos que $S_t : H^\beta \rightarrow L^2$ com constante menor do que $t^{-(1-\beta)} C_0^{1-\beta} C_1^\beta$, ou seja, se $C = C_0^{1-\beta} C_1^\beta$ então

$$t^{1-\beta} \|Tu(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^1}.$$

Com isto, concluímos a demonstração. \square

1.3.3 Equações básicas

No estudo das equações de Navier-Stokes, os resultados obtidos para as equações clássicas (onda, calor e Laplace) oferecem uma ferramenta valiosa, tanto para a obtenção de estimativas quanto para as demonstrações dos resultados de existência ou unicidade. Nesta Seção fazemos um resumo de alguns resultados elementares, porém importantes, e que terão relevância nos capítulos seguintes do texto.

Equações elípticas

A equação de Laplace

$$-\Delta w = 0 \tag{1.3.4}$$

constitui o exemplo mais simples de equação de tipo elíptico. Não é difícil ver que (1.3.4) admite uma solução radial, e que, no caso da dimensão n ser dois, a função

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \Gamma(|\mathbf{x}|) := \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

é uma de tais soluções [8], [14], que chamaremos *solução fundamental da equação de Laplace* (em \mathbb{R}^2). Tal solução está definida para $\mathbf{x} \neq 0$ e admite as estimativas

$$|\nabla\Gamma(\mathbf{x})| \leq C/|\mathbf{x}|, \quad \text{e} \quad |D^2\Gamma(\mathbf{x})| \leq C/|\mathbf{x}|^2. \tag{1.3.5}$$

Como pode ser visto em [14], se f é uma função limitada e Hölder contínua em um domínio limitado Ω , o *potencial newtoniano* de f , definido como a função

$$w(x) = \Gamma * f,$$

é de classe C^2 e satisfaz a equação de Poisson $-\Delta w = f$ em Ω . Além disso, se $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, então vale a estimativa

$$\|w\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

para toda função f definida em \mathbb{R}^2 com um decaimento conveniente no infinito. O desenvolvimento da teoria de existência, unicidade e regularidade das soluções da equação de Poisson, quando f é suficientemente regular, tem sido estudado amplamente; v., por exemplo [8], [14], [29], [13], [24].

Agora faremos uma observação sobre equações do tipo

$$-\Delta w(\mathbf{x}) = Df \tag{1.3.6}$$

onde D é um operador diferencial de primeira ordem, principalmente sobre a obtenção de p -estimativas que dependem da natureza da função f , e não da natureza das suas derivadas. Estimativas desse tipo podem ser encontradas em [17]. Considerando por exemplo $D = \partial_{x_k}$ para $k = 1, 2$ e aplicando a transformada de Fourier em (1.3.6), temos

$$|\xi|^2 \hat{w} = -i\xi_k \hat{f};$$

multiplicando por $i\xi_j$, e levando a conta que $(\partial_{x_j} w)^\wedge = -i\xi_j \hat{w}$, vem que

$$(\partial_{x_j} w)^\wedge = -\frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \hat{f},$$

e, pelo Teorema 1.3.4,

$$\|\partial_{x_j} w\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad 1 < p < \infty \tag{1.3.7}$$

para $j = 1, 2$. Assim

$$\|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad 1 < p < \infty. \tag{1.3.8}$$

Adicionalmente enunciamos dois resultados importantes para o análise da estrutura lagrangiana. Para isto, seja Γ a solução fundamental da equação de Laplace.

Lema 1.3.9. 1. Se $1 \leq p_1 < 2 < p_2 \leq \infty$ e $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$, então o campo $\nabla \Gamma * f \in L^\infty$ e

$$\|\nabla \Gamma * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(p_1, p_2) (\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^2)}).$$

2. Se $1 \leq p < 2$ e $f \in L^p \cap L^\infty$, então o campo $\nabla \Gamma * f \in LL$ e

$$\|\nabla \Gamma * f\|_{LL} \leq C (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}).$$

Demonstração. 1.

$$\begin{aligned} |\Gamma_{x_j} * f(x)| &= \left| \int \Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \int |\Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &= \int_{B_1(0)} |\Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} + \int_{B_1(0)^c} |\Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Pela estimativa (1.3.5) e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_{B_1(0)} \frac{|f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \\ &\leq \left(\int_{B_1(0)} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{p'_2}} \right)^{1/p'_2} \left(\int_{B_1(0)} |f(\mathbf{y})|^{p_2} d\mathbf{y} \right)^{1/p_2}, \end{aligned}$$

onde p'_2 é o expoente conjugado de p_2 . Assim, como $p_2 > 2$ a primeira integral na última desigualdade é finita e

$$I_1 \leq C \|f\|_{L^{p_2}}.$$

Quanto a I_2 ,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \int_{B_1(0)^c} \frac{|f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \\ &\leq \left(\int_{B_1(0)^c} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{p'_1}} \right)^{1/p'_1} \left(\int_{B_1(0)^c} |f(\mathbf{y})|^{p_1} d\mathbf{y} \right)^{1/p_1} \end{aligned}$$

como $p_1 < 2$ a primeira integral na última desigualdade é finita e

$$I_2 \leq C \|f\|_{L^{p_1}}.$$

2. Para \mathbf{x} e \mathbf{y} com $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 1$ em \mathbb{R}^2 definimos $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ e $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Então:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{x_j} * f)(\mathbf{x}) - (\Gamma_{x_j} * f)(\mathbf{y}) &= \int (\Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \xi) - \Gamma_{x_j}(\mathbf{y} - \xi)) f(\xi) d\xi \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} (\Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \xi) - \Gamma_{x_j}(\mathbf{y} - \xi)) f(\xi) d\xi \\ I_2 &= \int_{B_{2r}(\mathbf{x}_0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)} (\Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \xi) - \Gamma_{x_j}(\mathbf{y} - \xi)) f(\xi) d\xi \\ I_3 &= \int_{B_{2r}(\mathbf{x}_0)^c} (\Gamma_{x_j}(\mathbf{x} - \xi) - \Gamma_{x_j}(\mathbf{y} - \xi)) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Estimando cada integral usando (1.3.5), temos:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \|f\|_{L^\infty} \left(\int_{B_{2r}(\mathbf{x})} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} d\xi + \int_{B_{2r}(\mathbf{y})} \frac{1}{|\mathbf{y} - \xi|} d\xi \right) \\ &= 2C \|f\|_{L^\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2r} \frac{r}{2r} d\xi \\ &= 2C \|f\|_{L^\infty} r \\ |I_2| &\leq C \|f\|_{L^\infty} \int_{B_{2r}(\mathbf{x}_0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)} \left| \frac{x_j - \xi_j}{|\mathbf{x} - \xi|^2} - \frac{y_j - \xi_j}{|\mathbf{y} - \xi|^2} \right| d\xi \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty} r \int_0^1 \int_{B_{2r}(\mathbf{x}_0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)} \frac{1}{|\mathbf{x}_\theta - \xi|^2} d\xi d\theta, \end{aligned}$$

onde $x_\theta = \mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ para $0 < \theta < 1$. Levando em conta que $B_2(x_0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0) \subset B_3(x_\theta) \setminus B_{r/2}(\mathbf{x}_\theta)$ e pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C\|f\|_{L^\infty} r \int_0^1 \int_{B_3(\mathbf{x}_\theta) \setminus B_{r/2}(\mathbf{x}_\theta)} \frac{1}{|\mathbf{x}_\theta - \xi|^2} d\xi d\theta \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty} r (\ln 3 + \ln 2 - \ln r) \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty} r (1 - \ln r). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} I_3 &= Cr \int_0^1 \int_{B_1(\mathbf{x}_\theta)^c} \frac{f(\xi)}{|\mathbf{x}_\theta - \xi|^2} d\xi d\theta \\ &\leq C\|f\|_{L^p} r. \end{aligned}$$

Juntando as desigualdades temos que

$$\begin{aligned} |(\Gamma_{x_j} * f)(\mathbf{x}) - (\Gamma_{x_j} * f)(\mathbf{y})| &\leq C(\|f\|_{L^\infty} r (1 - \ln r) + \|f\|_{L^p} r) \\ &\leq Cr(1 - \ln r)(\|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^p}) \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\frac{|(\Gamma_{x_j} * f)(\mathbf{x}) - (\Gamma_{x_j} * f)(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|(1 - \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} \leq C(\|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^p}).$$

Obtemos o resultado calculando o supremo quando $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 1$. \square

Sistemas parabólico-hiperbólicos

Nesta Seção enunciaremos os resultados de existência local de soluções clássicas de sistemas quasilineares simétricos parabólico-hiperbólicos estudados por Shuishi Kawashima [21]. Uma versão resumida do caso local pode ser vista no Apêndice C de [28]. Os enunciados são apresentados como em [21], embora a generalidade dos resultados seja maior do que a necessária no restante do texto. A principal razão de enunciar os resultados desta forma é a importância dos resultados, assim como a facilidade para o uso da notação. O sistema considerado é dado pelas equações

$$\begin{cases} A_1^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{v}_t + \sum_{j=1}^n A_{11}^j(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{v}_{x_j} = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}), \\ A_2^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{w}_t - \sum_{j=1}^n B_2^{jk}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{w}_{x_j x_k} = \mathbf{f}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}), \end{cases} \quad (1.3.9)$$

onde $t > 0$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_2) \in \mathbb{R}^n$ e as incógnitas são $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, as quais são vetores de m' e m'' componentes respectivamente e o par (\mathbf{v}, \mathbf{w}) toma valores em um aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^m$, sendo $m = m' + m''$. Para cada $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in U$, $A_1^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $A_{11}^j(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ $j = 1, 2, \dots, n$ são matrizes quadradas de ordem m' e $A_2^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $B_{jk}^2(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ $j, k = 1, 2, \dots, n$ são matrizes quadradas de ordem m'' , enquanto que as funções \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 tomam valores em $\mathbb{R}^{m'}$ e $\mathbb{R}^{m''}$, respectivamente. Adicionalmente, as funções devem satisfazer uma condição inicial

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}, 0) = (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)(\mathbf{x}). \quad (1.3.10)$$

O sistema (1.3.9) é, por hipótese, *quasilinear simétrico, parabólico-hiperbólico*, no seguinte sentido:

Condição 1. As aplicações $A_1^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $A_2^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $A_{11}^j(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ($j = 1, \dots, n$), e $B_2^{jk}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ($j, k = 1, \dots, n$) são reais simétricas e suficientemente suaves em U e tais que

- (i) $A_1^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $A_2^0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e positivas definidas.
- (ii) Para cada $j, k = 1, \dots, n$, $B_2^{jk} = B_2^{kj}$ e;
- (iii) $\sum_{j,k=1}^n B_2^{jk}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \xi_j \xi_k$ é real simétrica e positiva definida para cada $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ com $\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} = 1$.

As funções \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 no lado direito de (1.3.9) (que contêm os termos de ordem inferior do sistema), são do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 : U \times \mathbb{R}^{nm''} &\rightarrow \mathbb{R}^{m'} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \zeta) &\mapsto \mathbf{f}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \zeta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 : U \times \mathbb{R}^{nm'} \times \mathbb{R}^{nm''} &\rightarrow \mathbb{R}^{m'} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \eta, \zeta) &\mapsto \mathbf{f}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \eta, \zeta), \end{aligned}$$

e satisfazem a condição seguinte.

Condição 2. \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 são suficientemente suaves em $U \times \mathbb{R}^{nm''}$ e $U \times \mathbb{R}^{nm'} \times \mathbb{R}^{nm''}$ respectivamente, e satisfazem $\mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}, 0) = \mathbf{f}_2(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}, 0, 0) = 0$ para alguma constante $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}) \in U$ chamada *constante de estado*.

Lembramos que dado $d > 0$ e um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, uma *d-vizinhança* de A é o conjunto $\bigcup_{\mathbf{x} \in A} B_d(\mathbf{x})$, onde $B_d(\mathbf{x})$ é a bola centrada em \mathbf{x} e com raio d .

Teorema 1.3.10 (Teorema de existência local [21]). Suponhamos que as condições 1 e 2 acima ocorram. Seja $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ inteiro e suponhamos que o dado inicial satisfaça $(\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_0 - \bar{\mathbf{w}}) \in H^k$ e, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)(\mathbf{x}) \in U_0$ onde U_0 é um conjunto aberto e convexo e $\bar{U}_0 \subset U$. Seja $d_1 > 0$ uma constante tal que $d_1 < \text{dist}(U_0, \partial U)$ e sejam

$$\begin{cases} U_1 \equiv d_1\text{-vizinhança de } U_0 \\ M = 2C_1 \|\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_0 - \bar{\mathbf{w}}\|_{H^k} \\ M_1 = 2C_2 M \end{cases}$$

onde C_1 e C_2 são certas constantes dependendo de U_1 e M . Então existe um tempo $T_1 > 0$, dependendo unicamente de U_0 , d_1 e $\|\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_0 - \bar{\mathbf{w}}\|_{H^k}$ tal que o sistema (1.3.9) com dado inicial (1.3.10) tem uma única solução (\mathbf{v}, \mathbf{w}) tal que $(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}, t) \in U_1$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \in [0, T_1]$, e além disso, temos a seguinte regularidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} &\in C(0, T_1; H^k) \cap C^1(0, T_1; H^{k-1}) \\ \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}} &\in C(0, T_1; H^k) \cap C^1(0, T_1; H^{k-2}) \cap L^2(0, T_1; H^{k+1}) \\ \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}} &\in H^1(0, T_1; H^{k-1}) \end{aligned}$$

e também a estimativa

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})(\tau)\|_{H^k}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}(\tau) - \bar{\mathbf{v}}\|_{H^k}^2 + \|\mathbf{w}(\tau) - \bar{\mathbf{w}}\|_{H^{k+1}}^2 d\tau \\ \leq \tilde{C} \|\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_0 - \bar{\mathbf{w}}\|_{H^k}^2, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} > 1$ é uma constante que depende de U_0 , d_1 e $\|\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_0 - \bar{\mathbf{w}}\|_{H^k}$.

O sistema de Navier-Stokes (1.2.1)-(1.2.3) pode ser escrito na forma do sistema (1.3.9) como será visto no Capítulo 2 a seguir.

Observação 1.3.11. Nos capítulos seguintes faremos, com muitíssima frequência, integrações por partes, no espaço todo (no nosso caso, o \mathbb{R}^2) e não aparecerão "termos de fronteira", pois faremos isso com soluções suaves, em que os dados iniciais são regularizados e pertencem a H^∞ ($= \cap_{s \in \mathbb{R}} H^s$). Pelo Teorema de Kawashima (teorema acima) isto é lícito, já que, pelo mesmo, essas soluções pertencerão a H^∞ , para qualquer tempo $t > 0$, logo com decaimento a zero, juntamente com todas as suas derivadas.

Capítulo 2

Existência de soluções fracas

O presente Capítulo está focado na existência de soluções fracas para o sistema de Navier-Stokes (1.2.1)-(1.2.3). O resultado de existência é enunciado no Teorema 2.3.2 mas a demonstração é remitida à [16]. Apresentamos os detalhes da obtenção das estimativas a priori complementando os que aparecem em [16] e enunciamos algumas estimativas pontuais. A primeira novidade com respeito ao artigo de Hoff [16] aparece na Seção 2.2.3 onde são melhorados os expoentes dos pesos para os termos convectivos, a fim de poder garantir a unicidade das trajetórias no Capítulo 3. Como já dissemos anteriormente (v. Introdução), a demonstração da unicidade de trajetórias é feita decompondo o campo de velocidade em duas partes, cada uma, solução de uma certa equação "do momento linearizada"; a primeira independentemente da pressão e com dado inicial num espaço de Sobolev, e a segunda dependendo da pressão mas com dado inicial nulo. As estimativas são obtidas usando uma versão de interpolação conveniente para o caso independente da pressão. Pelo Teorema de Kawashima, podemos integrar por partes as nossas soluções aproximadas (suaves) à vontade, sem nos preocuparmos com "termos de fronteira"; v. Observação 1.3.11, no final do Capítulo 1.

2.1 Soluções fracas

A seguir enunciamos o Teorema de D. Hoff [16] sobre a existência de soluções fracas do sistema (1.2.1)-(1.2.3), o qual apresenta uma regularidade melhor do que as soluções no sentido das distribuições, mas mais fraca do que as clássicas. Para obtermos a unicidade das trajetórias do campo de velocidade, seguindo a técnica desenvolvida em [19], para o caso barotrópico, precisamos de uma regularidade ainda melhor do que a apresentada em [16]. Mais precisamente, para obtermos a estrutura lagrangiana (unicidade de trajetórias), seguindo os passos de [19], precisamos obter estimativas dos termos convectivos da velocidade com um fator de peso adequado da variável temporal e com expoente fracionário, mas tais estimativas são obtidas em [16] apenas com expoentes inteiros para o caso em que a dimensão espacial é dois. Aqui obtemos estimativas adequadas; especificamente, as estimativas (2.1.8) e (2.1.9), que são obtidas aproveitando uma decomposição conveniente do campo \mathbf{u} e estimativas sobre o gradiente e a derivada material da

energia interna específica. No teorema seguinte resumimos o principal resultado de [16] e acrescentamos as estimativas adicionais que necessitamos nesta Tese, mencionadas acima, a saber, as estimativas (2.1.8)-(2.1.9) abaixo.

Teorema 2.1.1. (Existência de soluções fracas) Considerando as condições (1.2.8) com $s = 0$ e (1.2.9), e, dado $\rho_1 > 0$ com $\tilde{\rho} < \rho_1 < \bar{\rho}$, temos que existem números positivos C , ϵ e θ tais que se os dados iniciais $(\rho_0, e_0, \mathbf{u}_0)$ satisfazem

$$\begin{aligned} 0 < \text{essinf } \rho_0 \leq \text{esssup } \rho_0 \leq \rho_1 \\ C_0 \leq \epsilon, \end{aligned}$$

então o problema de valor inicial (1.2.1)-(1.2.3) tem uma solução fraca (ρ, \mathbf{u}, e) , no sentido da Definição 1.2.1 (v. Capítulo 1), definida até um tempo T com:

$$\begin{aligned} \rho - \tilde{\rho}, \rho \mathbf{u} &\in C([0, \infty); H^{-1}(\mathbb{R}^2)) \\ \rho(\cdot, t) - \tilde{\rho} &\in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^2), \quad t \geq 0 \\ \nabla \mathbf{u} &\in L^2(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)) \\ e - \tilde{e} &\in C([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \\ \mathbf{u}(\cdot, t), F(\cdot, t), \omega(\cdot, t), e(\cdot, t) - \tilde{e} &\in H^1, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

e que satisfaz as seguintes estimativas:

$$\underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}, \text{ q.t.p} \quad e(\cdot, t) > \underline{e}, \text{ q.t.p} \tag{2.1.2}$$

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \tau < t} \int [(\rho - \tilde{\rho})^2 + |\mathbf{u}|^2 + (e - \tilde{e})^2] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_0^t \int [|\nabla \mathbf{u}|^2 + |\nabla e|^2] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\tau \leq CC_0^\theta \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

para $t \in [0, T]$, onde $\varphi(\mathbf{x}) = (1 + |\mathbf{x}|^2)^t$;

$$\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^2 \times [t', T]}^{\alpha, \alpha/2}, \langle e \rangle_{\mathbb{R}^2 \times [t', T]}^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \leq C_\alpha(t') C_0^\theta \tag{2.1.4}$$

para todo $0 < t' < T$, $\alpha \in (0, 1)$ e certas constantes $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in (0, 1)$;

$$\|\nabla F(\cdot, t)\|_{L^2}, \|\nabla \omega(\cdot, t)\|_{L^2} \leq CC_0^\theta \tag{2.1.5}$$

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \sigma \int |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \sigma \rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} dt \leq CC_0^\theta \tag{2.1.6}$$

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \sigma^2 \int \rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \sigma^2 |\nabla \dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} dt \leq CC_0^\theta, \tag{2.1.7}$$

onde $\sigma = \sigma(t) = \min\{1, t\}$,

As soluções (ρ, \mathbf{u}, e) são obtidas como limite quando $\delta \rightarrow 0$ de soluções aproximadas suaves $(\rho^\delta, \mathbf{u}^\delta, e^\delta)$ que satisfazem (2.1.2)-(2.1.7) com constantes que não dependem de δ .

Teorema 2.1.2. Seja $s \in [0, 1]$. As seguintes estimativas adicionais sobre as soluções aproximadas valem sob a hipótese de que a velocidade inicial \mathbf{u}_0 pertença ao espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ e que $\sqrt{\rho} \dot{e}$ esteja em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

$$\sup_{0 < t < 1} t^{1-s} \int |\nabla \mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x} + \int_0^1 \int t^{1-s} \rho^\delta |\dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\mathbf{x} dt \leq CC_0^\theta \quad (2.1.8)$$

$$\sup_{0 < t < 1} t^{2-s} \int \rho^\delta |\dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\mathbf{x} + \int_0^1 \int t^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\mathbf{x} dt \leq CC_0^\theta. \quad (2.1.9)$$

Observação 2.1.3. As taxas em (2.1.8) e (2.1.9) nos permitem demonstrar a integrabilidade em relação ao tempo da norma log-lipschiziana, em relação a variável espacial, do campo de velocidade, em uma vizinhança de $t = 0$, o que implica na unicidade de trajetórias de partículas, como veremos. No entanto, as taxas em (2.1.6) e (2.1.7) são suficientes para demonstrar a unicidade das trajetórias iniciando em qualquer $t = t_0 > 0$.

Como já dissemos, o Teorema 2.1.1 é demonstrado em [16], e o teorema 2.1.2 é demonstrado na Seção 2.2.3 sendo o nosso primeiro resultado e a chave para a demonstração do teorema principal no Capítulo 3. Em [16] são demonstradas estimativas similares, porém, para nós não foram suficientes para obtermos a estrutura lagrangiana. Mais precisamente, em [16] são estimadas as quantidades $\sup \int \sigma |\nabla \mathbf{u}|^2$, $\sup \int \sigma^2 (|\dot{\mathbf{u}}|^2 + |\nabla e|^2)$, $\int \int \sigma |\dot{\mathbf{u}}|^2$ e $\int \int \sigma^2 (|\nabla \dot{\mathbf{u}}|^2 + |\dot{e}|^2)$, mas com as estimativas obtidas no mesmo não conseguimos estimar adequadamente o fluxo efetivo viscoso, i.e. a quantidade F definida em (1.2.11). Em [17] são demonstradas (2.1.8) e (2.1.9) no caso em que a pressão é uma função da densidade da forma $P(\rho) = A\rho^\gamma$, com $A > 0$ e $\gamma > 1$, , mas, também como já dissemos (v. Introdução), no nosso caso, como a pressão depende também da energia interna específica, precisamos trabalhar mais nessas estimativas.

2.2 Estimativas a priori

2.2.1 Estimativas de energia

Nesta Seção obteremos algumas estimativas a priori em L^2 para a densidade, a velocidade e a energia do sistema (1.2.1)-(1.2.3). Os resultados mostrados aqui foram obtidos por Hoff em [16], e daremos aqui mais detalhes das demonstrações em algumas partes específicas. Supomos ao longo da seção que (ρ, \mathbf{u}, e) são soluções suaves de (1.2.1)-(1.2.3) e satisfazendo todas as hipóteses do Teorema 2.1.1. A fim de simplificar a exposição, definimos algumas funções de energia. Em primeiro lugar, definimos a seguinte função relacionada à densidade: para constantes positivas $\underline{\rho} < \tilde{\rho} < \bar{\rho}$, e para $r \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$, seja

$$G(r) = r \ln \frac{r}{\tilde{\rho}} - r + \tilde{\rho}. \quad (2.2.1)$$

Observamos que $G(r) = r \int_{\tilde{\rho}}^r \frac{s-\tilde{\rho}}{s^2} ds$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $G'(r) = \ln \frac{r}{\tilde{\rho}}$, em particular $G(\tilde{\rho}) = G'(\tilde{\rho}) = 0$;

2. existe uma constante $M > 0$ tal que

$$M^{-1}(r - \bar{\rho})^2 \leq G(r) \leq M(r - \bar{\rho})^2$$

para todo $r \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$.

E, em segundo lugar, definimos as seguintes "funções de energia", com $\varphi(\mathbf{x})$ como em (2.1.3)

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int ((\rho - \bar{\rho})^2 + |\mathbf{u}|^2) \varphi d\mathbf{x} + \int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ E_2(t) &= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int (e - \bar{e})^2 \varphi d\mathbf{x} + \int_0^t \int |\nabla e|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ E_3(t) &= \sup_{0 \leq \tau \leq \sigma(t)} \int |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} + \int_0^{\sigma(t)} \int |\mathbf{u}|^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau. \end{aligned}$$

Nosso primeiro passo, para obter o nosso resultado principal, o Teorema 3.2.1, é mostrar a seguinte estimativa a priori para a "energia cinética", i.e. para $E_1 + E_2 + E_3$:

Proposição 2.2.1. Para todo $t \geq 0$ suficientemente próximo de zero, vale a seguinte estimativa:

$$E_1(t) + E_2(t) + E_3(t) \leq CC_0.$$

A demonstração da Proposição 2.2.1 será uma consequência direta de uma sequência de lemas. Antes de enunciar e demonstrar esses lemas, lembramos, como visto no Capítulo 1, que podemos derivar as equações da densidade da energia interna e da energia cinética multiplicando (1.2.1) por w^j e somando em j , obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2} \operatorname{div} (\rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) &= -\nabla P \cdot \mathbf{u} \\ &+ \frac{1}{2} \mu [\Delta (|\mathbf{u}|^2) - 2|\nabla \mathbf{u}|^2] + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Subtraindo esta última equação da equação do momento (1.2.2) obtemos a equação da energia interna (1.1.5). Antes de começarmos a sequência de lemas, enunciamos uma estimativa (pontual) inferior para a energia interna específica:

Teorema 2.2.2 ([16]). Existe um tempo \bar{t} tal que, para qualquer solução suave (ρ, \mathbf{u}, e) de (1.2.1)-(1.2.2) em $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$, com $\rho(\mathbf{x}, t) \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$ e com dado inicial $(\rho_0, \mathbf{u}_0, e_0)$ satisfazendo $e_0 \geq e_1 > \underline{e}$ para constantes positivas $\underline{\rho}, \bar{\rho}, e_1$ e \underline{e} , temos

$$e(\mathbf{x}, t) \geq \underline{e} \quad (2.2.3)$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $0 \leq t \leq \bar{t} \wedge T := \min\{\bar{t}, T\}$.

No que se segue \bar{t} denotará o tempo obtido no Teorema 2.2.2.

Lema 2.2.3. Denotemos a função $(1 + |\mathbf{x}|^2)^l$, presente em (1.2.8), por $\varphi(\mathbf{x})$ (como em (2.1.3)). Então

$$\int \left(G(\rho) + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 \right) \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + \int_0^t \int (\mu|\nabla\mathbf{u}|^2 + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})^2) \varphi d\mathbf{x}d\tau = \sum_{k=1}^6 I_k,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^t \int \rho|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\ I_2 &= (\gamma - 1) \int_0^t \int \rho(e - \tilde{e}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x}d\tau \\ I_3 &= (\gamma - 1) \tilde{e} \int_0^t \int G(\rho) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\ I_4 &= \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\ I_5 &= -\frac{1}{2} \int_0^t \int \mu \nabla(|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \end{aligned}$$

e

$$I_6 = - \int_0^t \int \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau.$$

Demonstração. Primeiro, multiplicando (2.2.2) por $\varphi(x)$ e integrando temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \rho|\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \int \operatorname{div} (\rho|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \varphi d\mathbf{x}d\tau &= - \int_0^t \int \nabla P \cdot \mathbf{u} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int [\mu [\Delta(|\mathbf{u}|^2) - 2|\nabla\mathbf{u}|^2] + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}] \varphi d\mathbf{x}d\tau. \end{aligned}$$

Mas pelo Teorema da Divergência, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int \operatorname{div} (\rho|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \varphi d\mathbf{x}d\tau &= - \int_0^t \int \rho|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau = -2I_1 \\ \int_0^t \int \nabla P \cdot \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x}d\tau &= - \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + (P - \tilde{P}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\ &= - \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x}d\tau - I_4 \\ \mu \int_0^t \int \Delta(|\mathbf{u}|^2) \varphi d\mathbf{x}d\tau &= -\mu \int_0^t \int \nabla(|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau = 2I_5 \\ \lambda \int_0^t \int \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x}d\tau &= -\lambda \int_0^t \int (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \varphi + \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\ &= -\lambda \int_0^t \int (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \varphi d\mathbf{x}d\tau + I_6, \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \rho|\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + \int_0^t \int \mu|\nabla\mathbf{u}|^2 + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \varphi d\mathbf{x}d\tau \\ = \int \int (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x}d\tau + I_1 + I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

Por outro lado, observamos que pela equação da massa (1.2.1),

$$\begin{aligned} G(\rho)_t + \operatorname{div} (G(\rho)\mathbf{u}) &= \ln \frac{\rho}{\tilde{\rho}} (\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho) + (\rho \ln \frac{\rho}{\tilde{\rho}} - \rho + \tilde{\rho}) \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \ln \frac{\rho}{\tilde{\rho}} (\rho_t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u})) - (\rho - \tilde{\rho}) \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= -(\rho - \tilde{\rho}) \operatorname{div} \mathbf{u}; \end{aligned}$$

multiplicando por $\varphi(x)$ e integrando, obtemos então que

$$\begin{aligned} \int G(\rho)\varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t &= - \int_0^t \int (\rho - \tilde{\rho}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi + G(\rho)\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ &= - \int_0^t \int (\rho - \tilde{\rho}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x} d\tau + \frac{1}{\tilde{e}(\gamma-1)} I_3. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Levando a conta que $P(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho e$ e usando (2.2.4), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x} d\tau &= (\gamma - 1) \tilde{e} \int_0^t \int (\rho - \tilde{\rho}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x} \\ &\quad + (\gamma - 1) \int_0^t \rho (e - \tilde{e}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ &= -(\gamma - 1) \tilde{e} \int G(\rho)\varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + (\gamma - 1) \tilde{e} \int_0^t G(\rho)\mathbf{u} \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ &\quad + (\gamma - 1) \int_0^t \rho (e - \tilde{e}) \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ &= -(\gamma - 1) \tilde{e} \int G(\rho)\varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + I_3 + I_2. \end{aligned}$$

□

Pelo Lema 2.2.3 e pela definição de E_1 , temos que $E_1(t) \leq CC_0 + \sum_{k=1}^6 |I_k|$, logo, para estimar E_1 basta estimar as integrais $I_k, k = 1, \dots, 6$. Em primeiro lugar (segundo [16]) obtemos uma estimativa de E_1 em termos de E_2 e E_3 . Depois, usando técnicas semelhantes, estimaremos as funções E_2 e E_3 em termos das mesmas, e também de E_1 . Então usaremos a condição de energia pequena para fechar o argumento e concluir o resultado da Proposição 2.2.1. Para começar, observamos que a função φ , definida no Lema 2.2.3, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\varphi^\beta \leq \varphi$ para $\beta \in [0, 1]$;
2. $|\nabla \varphi| \leq C\varphi$.

A primeira observação segue-se de $\varphi \geq 1$, e quanto à segunda temos que, $|\nabla \varphi| = 2l(1 + |\mathbf{x}|^2)^{l-1} |x| \leq 2l(1 + |\mathbf{x}|^2)^{l-1} (1 + |x|^2)^{1/2} \leq 2l(1 + |\mathbf{x}|^2)^l = 2l\varphi$

Lema 2.2.4. Para todo $t \geq 0$ suficientemente próximo de zero, temos que

$$E_1(t) \leq C(C_0 + E_3(t) + t^{1/2}E_2(t)).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.2.3 é suficiente estimar as integrais I_k , $k = 1, \dots, 6$. Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de interpolação (1.3.3) e as propriedades da φ e G , obtemos

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \int_0^t \left(\int \rho |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq Ct E_1(t)^{1/2} E_3(t)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \int_0^t \left(\int (e - \tilde{e})^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq Ct^{1/2} E_2(t)^{1/2} E_1(t)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \int_0^t \int (\rho - \tilde{\rho})^2 |\mathbf{u}| \varphi d\mathbf{x} \tau \\ &\leq C \int_0^t \left(\int (\rho - \tilde{\rho})^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq Ct (E_1(t) + E_2(t))^{1/2} E_1(t)^{1/2} \\ &\leq Ct E_1(t) + Ct E_1(t)^{1/2} E_2(t)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq C \int_0^t \left(\int ((e - \tilde{e})^2 + (\rho - \tilde{\rho})^2) \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq Ct (E_1(t) + E_2(t))^{1/2} E_1(t)^{1/2} \\ &\leq Ct E_1(t) + Ct E_1(t)^{1/2} E_2(t)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_5| + |I_6| &\leq C \int_0^t \left(\int |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq Ct^{1/2} E_1(t). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} E_1(t) &\leq C(C_0 + t^{1/2}E_1(t) + t^{1/2}E_1(t)^{1/2}E_2(t)^{1/2} + tE_1(t)^{1/2}E_3(t)^{1/2}) \\ &\leq C(C_0 + E_3(t) + t^{1/2}E_1(t) + t^{1/2}E_2(t)), \end{aligned}$$

e daí segue-se o resultado, passando o termo $Ct^{1/2}E_1(t)$ para o lado esquerdo da primeira desigualdade e tomando $t > 0$ e.g. tal que $Ct^{1/2} \leq 1/2$. \square

Lema 2.2.5.

$$\frac{1}{2} \int \rho (e - \tilde{e})^2 \varphi + \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + K \int_0^t \int |\nabla e|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau = \sum_{i=1}^{14} J_k,$$

onde

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^t \int \rho(e - \tilde{e})^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_2 &= \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \mathbf{u} \cdot \nabla e \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_3 &= \int_0^t \int (P - \tilde{P})(e - \tilde{e}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_4 &= -K \int_0^t \int (e - \tilde{e}) \nabla e \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_5 &= -\mu \int_0^t \int (e - \tilde{e}) ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_6 &= -\mu \int_0^t \int \nabla e \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}) \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_7 &= -\frac{1}{2} \int_0^t \int \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_8 &= -\frac{1}{2} \mu \int_0^t \int (e - \tilde{e}) \nabla (|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_9 &= -\frac{1}{2} (K + \mu) \int_0^t \int \nabla (|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla e \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_{10} &= -\int_0^t \int \operatorname{div} \mathbf{u} (e - \tilde{e}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_{11} &= -\int_0^t \int \operatorname{div} \mathbf{u} \nabla e \cdot \mathbf{u} \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_{12} &= -\frac{1}{2} \int_0^t \int P \operatorname{div} \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x}d\tau \\
 J_{13} &= \frac{1}{2} \int_0^t \int (\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + (u_j^k u_k^j - (\operatorname{div} \mathbf{u})^2)) |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x}d\tau
 \end{aligned}$$

e

$$J_{14} = -\frac{1}{2} K \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 \nabla e \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x}d\tau.$$

Demonstração. Lembrando que (1.2.6) pode ser escrita como

$$(\rho e)_t + \operatorname{div} (\rho e \mathbf{u}) + P \operatorname{div} \mathbf{u} = K \Delta e + \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \mu \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}),$$

e, multiplicando por $(e - \tilde{e})\varphi$, e usando a conservação da massa, chegamos em

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\rho(e - \tilde{e})^2 \varphi)_t + \frac{1}{2} [\operatorname{div} (\rho(e - \tilde{e})^2 \mathbf{u})] \varphi + P \operatorname{div} [(\mathbf{u}(e - \tilde{e}))] \varphi &= K \Delta e (e - \tilde{e}) \varphi \\
 + [\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \mu \operatorname{div} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u})] (e - \tilde{e}) \varphi &
 \end{aligned}$$

de modo que após integrar, temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int \rho(e - \tilde{e})^2 \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + K \int_0^t \int |\nabla e|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau = \int_0^t \int \rho(e - \tilde{e})^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad + \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \mathbf{u} \cdot \nabla e \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad + \int_0^t \int (P - \tilde{P})(e - \tilde{e}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad - K \int_0^t \int (e - \tilde{e}) \nabla e \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad - \mu \int_0^t \int (e - \tilde{e}) ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}) \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad - \mu \int_0^t \int \nabla e \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}) \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad + \int_0^t \int [\nabla P \cdot \mathbf{u} + \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2] (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 \\
 & \quad + \int_0^t \int [\nabla P \cdot \mathbf{u} + \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2] (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} d\tau.
 \end{aligned}$$

Agora, de (2.2.2) tem-se que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \int [\nabla P \cdot \mathbf{u} + \mu |\nabla \mathbf{u}|^2] (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} d\tau = - \int_0^t \int \left[\frac{1}{2} \partial_t (\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2} \operatorname{div} (\rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \mu (\Delta |\mathbf{u}|^2) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right] (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & = - \frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \int \rho \dot{e} |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau - \frac{1}{2} \mu \int_0^t \int (e - \tilde{e}) \nabla (|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad - \frac{1}{2} \mu \int_0^t \int \nabla (|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla e \varphi d\mathbf{x} d\tau - \lambda \int_0^t \int (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad - \lambda \int_0^t \int \operatorname{div} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla e) \varphi d\mathbf{x} d\tau - \lambda \int_0^t \int \operatorname{div} \mathbf{u} (e - \tilde{e}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau,
 \end{aligned}$$

e assim, pela equação (1.2.6),

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \int [\nabla P \cdot \mathbf{u} + \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2] (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &= -\frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + J_7 + J_8 + J_{10} + J_{11} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int (-P \operatorname{div} \mathbf{u} + K \Delta e + \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \\
 & \quad + \mu (u_{x_k}^j u_{x_j}^k - (\operatorname{div} \mathbf{u})^2)) |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau - \frac{1}{2} \mu \int_0^t \int \nabla(|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla e \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &= -\frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + J_7 + J_8 + J_{10} + J_{11} + J_{12} + J_{13} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int K \Delta e |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau - \frac{1}{2} \mu \int_0^t \int \nabla(|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla e \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &= -\frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + J_7 + J_8 + J_{10} + J_{11} + J_{12} + J_{13} \\
 & \quad - \frac{1}{2} K \int_0^t \int \nabla e \cdot \nabla(|\mathbf{u}|^2) \varphi d\mathbf{x} d\tau - \frac{1}{2} K \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 \nabla e \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 & \quad - \frac{1}{2} \mu \int_0^t \int \nabla(|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla e \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &= -\frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{u}|^2 (e - \tilde{e}) \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + J_7 + J_8 + J_9 + J_{10} + J_{11} + J_{12} + J_{13} + J_{14}.
 \end{aligned}$$

□

Lema 2.2.6. Para todo t como no Lema 2.2.4, temos que

$$E_2(t) \leq C(C_0 + E_3(t) + t^{1/2} E_1(t)^{1/2} E_2(t) + t^{1/2} E_2(t) E_3(t)^{1/2}).$$

Demonstração. Como na demonstração do Lema 2.2.4, tendo em vista aqui o Lema 2.2.5, para demonstrarmos o Lema 2.2.6 em questão, basta estimarmos as quantidades J_k , definidas no Lema 2.2.5, pelo lado direito da desigualdade dada no Lema 2.2.6. Assim procedemos:

$$\begin{aligned}
 |J_1| &\leq C \int_0^t \int \rho (e - \tilde{e})^2 |\mathbf{u}| \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \left(\int (e - \tilde{e})^4 \varphi d\mathbf{x} d\tau \right)^{1/2} \left(\int \rho |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\
 &\leq C E_1(t)^{1/2} \int_0^t \left[\left(\int (e - \tilde{e})^2 \varphi d\mathbf{x} \right) \left(\int |\nabla e|^2 \varphi \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (e - \tilde{e})^2 \varphi^{-3/2} |\nabla \varphi|^2 d\mathbf{x} \right) \right]^{1/2} d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq CE_1(t)^{1/2}E_2(t)^{1/2} \left[t^{1/2} \left(\int_0^t \int |\nabla e|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \right)^{1/2} \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + t \left(\int (e - \tilde{e})^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \right] \\
 &\leq CE_1(t)^{1/2}E_2(t)^{1/2} \left(t^{1/2}E_2(t)^{1/2} + tE_2(t)^{1/2} \right) \\
 &\leq Ct^{1/2}E_1(t)^{1/2}E_2(t).
 \end{aligned}$$

A estimativa em L^4 para a energia interna é obtida usando (1.3.3) e as propriedades de φ . Mais precisamente,

$$\begin{aligned}
 \|(e - \tilde{e})\varphi^{1/4}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \|(e - \tilde{e})\varphi^{1/4}\|_{L^2}^2 \|\nabla((e - \tilde{e})\varphi^{1/4})\|_{L^2}^2 \\
 &\leq C\|(e - \tilde{e})\varphi^{1/4}\|_{L^2}^2 \left(\|\nabla(e - \tilde{e})\varphi^{1/4}\|_{L^2}^2 + \|(e - \tilde{e})\varphi^{-3/4}\nabla\varphi\|_{L^2}^2 \right) \\
 &\leq C\|(e - \tilde{e})\varphi^{1/2}\|_{L^2}^2 \left(\|\nabla(e - \tilde{e})\varphi^{1/2}\|_{L^2}^2 + \|(e - \tilde{e})\varphi^{-3/4}\nabla\varphi\|_{L^2}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Levando em conta que $P - \tilde{P} = (\gamma - 1)\tilde{e}(\rho - \tilde{\rho}) + (\gamma - 1)\rho(e - \tilde{e})$ e aplicando a desigualdade de Young com η suficientemente pequeno, temos:

$$\begin{aligned}
 |J_2| &\leq C \int_0^t \int |\mathbf{u}||\nabla e|\varphi d\mathbf{x} d\tau + C \int_0^t \int |e - \tilde{e}||\mathbf{u}||\nabla e|\varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq Ct^{1/2}E_1(t)^{1/2}E_2(t)^{1/2} + \eta E_2(t) + C \int_0^t \int (e - \tilde{e})^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_3| &\leq C \int_0^t \int |e - \tilde{e}||\mathbf{u}|\varphi d\mathbf{x} d\tau + O(J_1) \\
 &\leq CtE_1(t)^{1/2}E_2(t)^{1/2} + Ct^{1/2}E_1(t)^{1/2}E_2(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_4| &\leq C \int_0^t \int |e - \tilde{e}||\nabla e|\varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \left(\int |e - \tilde{e}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int |\nabla e|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\
 &\leq Ct^{1/2}E_1(t)^{1/2}E_2(t)^{1/2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_5| &\leq C \int_0^t \int |e - \tilde{e}||\nabla \mathbf{u}||\mathbf{u}|\varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \left(\int |e - \tilde{e}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int |\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\
 &\leq Ct^{1/2}E_2(t)^{1/2}E_3(t)^{1/2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_6| &\leq C \int_0^t \int |\nabla e| |\nabla \mathbf{u}| |\mathbf{u}| \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C \left(\int_0^t \int |\nabla e|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \right)^{1/2} \\
 &\leq C E_2(t)^{1/2} E_3(t)^{1/2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_7| &\leq C \int_0^t \int |e - \tilde{e}| |\mathbf{u}|^3 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \int |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int (e - \tilde{e})^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C t E_3(t) + \int_0^t \int (e - \tilde{e})^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau,
 \end{aligned}$$

$$J_8 = O(J_{10}) = O(J_5),$$

$$J_9 = O(J_{11}) = O(J_6),$$

$$\begin{aligned}
 |J_{12}| &\leq C \int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}| |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau + C \int_0^t \int |e - \tilde{e}| |\nabla \mathbf{u}| |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C t^{1/2} \left(\int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \right)^{1/2} \left(\int |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\
 &\quad + C \int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}|^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau + C \int_0^t \int (e - \tilde{e})^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C t^{1/2} E_1(t)^{1/2} E_3(t)^{1/2} + C E_3(t) + C \int_0^t \int (e - \tilde{e})^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_{13}| &\leq C \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C E_3(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_{14}| &\leq C \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 |\nabla e|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C t^{1/2} E_2(t)^{1/2} E_3(t)^{1/2},
 \end{aligned}$$

onde $O(\cdot)$ denota o símbolo de Landau, e então

$$\begin{aligned}
 \int ((e - \tilde{e})^2 + \rho |\mathbf{u}|^2) \varphi d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int |\nabla e| \varphi d\mathbf{x} d\tau &\leq C(C_0 + E_3(t)) \\
 &\quad + (E_1(t)^{1/2} + E_2(t)^{1/2}) E_3(t)^{1/2} + t^{1/2} E_1(t)^{1/2} E_2(t)^{1/2} \\
 &\quad + t^{1/2} E_1(t)^{1/2} E_2(t) + \int_0^t \int (e - \tilde{e})^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau
 \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (em $L^2(\mathbb{R}^2)$), a definição de E_3 , a desigualdade de interpolação (1.3.3) com $p = 4$ e $f = (e - \tilde{e})\varphi^{1/4}$ e as propriedades da φ novamente, podemos estimar a última integral por:

$$CE_3(t)^{1/2} \int_0^t \left(\int (e - \tilde{e})^2 \varphi^{1/2} d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left[\left(\int |\nabla e|^2 \varphi^{1/2} d\mathbf{x} \right)^{1/2} + \left(\int (e - \tilde{e})^2 \varphi^{-3/2} |\nabla \varphi|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \right] d\tau \leq Ct^{1/2} E_2(t) E_3(t)^{1/2}.$$

Absorvendo do lado esquerdo os termos com $E_2(t)$ possíveis obtemos então que

$$\begin{aligned} E_2(t) &\leq C(C_0 + E_1(t) + E_3(t) + tE_1(t)^{1/2}E_2(t) + t^{1/2}E_2(t)E_3(t)^{1/2}) \\ &\leq C(C_0 + E_3(t) + t^{1/2}E_2(t) + tE_1(t)^{1/2}E_2(t) + t^{1/2}E_2(t)E_3(t)^{1/2}) \end{aligned}$$

logo, para todo $t > 0$ suficientemente próximo de zero, obtemos a estimativa desejada. \square

Observamos que, ao substituir E_2 no Lema 2.2.4 pela estimativa dada pelo Lema 2.2.6 temos que E_1 é limitado pelo mesmo termo que E_2 . A função E_3 pode ser estimada usando métodos similares detalhados a seguir.

Lema 2.2.7.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \rho |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \mu \int_0^t \int |\nabla(|\mathbf{u}|^2)|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau + \mu \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ + \lambda \int_0^t \int (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau = \sum_{k=0}^7 H_k, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

onde

$$\begin{aligned} H_1 &= -\lambda \int_0^t \int \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla(|\mathbf{u}|^2) \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ H_2 &= -\frac{1}{4} \int_0^t \int \rho |\mathbf{u}|^4 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ H_3 &= -\lambda \int_0^t \int \operatorname{div} \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ H_4 &= -\frac{1}{2} \mu \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 \nabla(|\mathbf{u}|^2) \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ H_5 &= \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ H_6 &= \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \mathbf{u} \cdot \nabla(|\mathbf{u}|^2) \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ H_7 &= \int_0^t \int (P - \tilde{P}) |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} d\tau \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação da energia cinética (2.2.2) por $|\mathbf{u}|^2$ e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \rho |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} \Big|_0^t + \frac{1}{4} \int_0^t \int \operatorname{div} (\rho |\mathbf{u}|^4 \mathbf{u}) \varphi d\mathbf{x} d\tau &= - \int_0^t \int \nabla P \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ &+ \int_0^t \int \left[\frac{1}{2} \mu [\Delta(|\mathbf{u}|^2) - 2|\nabla \mathbf{u}|^2] + \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right] |\mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \end{aligned}$$

então, pelo Teorema da Divergência, e organizando os termos de forma similar às demons-trações dos lemas 2.2.3 e 2.2.5, chegamos ao resultado. \square

Lema 2.2.8. Novamente para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, temos a seguinte estimativa:

$$E_3(t) \leq C(C_0 + E_3(t)^{3/2} + E_1(t)^{1/2} E_2(t) + E_2(t) E_3(t)^{1/2}).$$

Demonstração. Aqui, notamos que E_3 pode ser estimado pelo lado esquerdo da estimativa (2.2.5), no Lema 2.2.7, sem o último termo (na verdade sem o segundo também, mas não precisaremos levar isso em conta). Isto nos permite, graças à condição (1.2.9), eliminar o termo H_1 do lado direito dessa estimativa e ainda obter o resultado desejado nesta demonstração. De fato, para $\eta > 0$,

$$|H_1| \leq \frac{1}{2} \lambda \eta \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau + \frac{\lambda}{2\eta} \int_0^t \int |\nabla(|\mathbf{u}|^2)|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau.$$

Assim, para $\eta > 2$ arbitrariamente próximo de 2 temos um $\nu > 0$ arbitrariamente próximo de zero tal que $\frac{\lambda \eta}{2} = \lambda + \nu \mu$, de modo que $\frac{1}{2\eta} = \frac{\lambda}{4(\lambda + \nu \mu)}$ e assim,

$$\begin{aligned} |H_1| &\leq (\lambda + \nu \mu) \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau + \frac{\lambda^2}{4(\lambda + \nu \mu)} \int_0^t \int |\nabla(|\mathbf{u}|^2)|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ &\leq \lambda \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau + 2\nu \mu \int_0^t \int |\mathbf{u}|^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{4(\lambda + \nu \mu)} \int_0^t \int |\nabla(|\mathbf{u}|^2)|^2 \varphi d\mathbf{x} d\tau. \end{aligned}$$

Além disso, como $\nu < 1/2$ e, por (1.2.9), temos que $\mu/2 - \lambda^2/[4(\lambda + \nu \mu)] > 0$. De fato, levando em conta que

$$\mu/2 - \lambda^2/[4(\lambda + \nu \mu)] = \frac{(\mu(1 + \sqrt{1 + 2\nu}) - \lambda)(\lambda - \mu(1 - \sqrt{1 + 2\nu}))}{4(\lambda + \nu \mu)}$$

garantimos que ν pode ser escolhido para que o fator $\mu(1 + \sqrt{1 + 2\nu}) - \lambda$ seja positivo. As outras integrais podem ser estimadas como antes. Temos que:

$$\begin{aligned} |H_2| &\leq Ct E_3(t) + C \int_0^t \int |\mathbf{u}|^6 \varphi d\mathbf{x} d\tau \\ |H_3| + |H_4| &\leq Ct E_3(t) + C \eta_1 E_3(t) \\ |H_5| + |H_6| &\leq Ct E_1(t) + \eta_2 E_3(t) + Ct^{1/2} E_2(t) E_3(t)^{1/2} \\ |H_7| &\leq Ct E_1(t) + C \int_0^t \int |\mathbf{u}|^6 \varphi d\mathbf{x} d\tau, \end{aligned}$$

onde η_1 e η_2 são números positivos suficientemente pequenos, fixados abaixo. Assim só resta estimar a norma L^6 na última desigualdade. Lembrando as propriedades de φ e usando (1.3.3),

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int |\mathbf{u}|^6 \varphi d\mathbf{x} d\tau &= C \int_0^t \int (|\mathbf{u}|^2 \varphi^{1/3})^3 d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \left(\int (|\mathbf{u}|^2 \varphi^{1/3})^2 d\mathbf{x} \right) \left(\int |\nabla (|\mathbf{u}|^2 \varphi^{1/3})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \left(\int (|\mathbf{u}|^2 \varphi^{1/3})^2 d\mathbf{x} \right) \left[\left(\int |\mathbf{u}|^4 |\nabla(\varphi^{1/3})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int |\nabla(|\mathbf{u}|^2)|^2 \varphi^{2/3} d\mathbf{x} \right)^{1/2} \right] d\tau \\
 &\leq C \int_0^t \left(\int |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} \right)^{3/2} d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \left(\int |\mathbf{u}|^4 \varphi d\mathbf{x} \right) \left(\int |\mathbf{u}|^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi d\mathbf{x} \right)^{1/2} d\tau \\
 &\leq Ct^{1/2} E_3(t)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Então, com todas as estimativas acima e escolhendo $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$ suficientemente pequenos, obtemos que

$$E_3(t) \leq C(C_0 + t^{1/2} E_3(t)^{3/2} + tE_1(t) + t^{1/2} E_2(t)E_3(t)^{1/2}).$$

Daí, pelos lemas 2.2.4 e 2.2.6, segue-se que

$$E_3(t) \leq C(C_0 + E_3(t)^{3/2} + E_1(t)E_2(t)^{1/2}) + E_2(t)E_3(t)^{1/2}.$$

□

A demonstração da Proposição 2.2.1 segue-se dos lemas 2.2.4, 2.2.6 e 2.2.8 e da hipótese de energia pequena. A ideia do argumento é a seguinte: chamando $A(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)$, e juntando os lemas mencionados, temos

$$A(t) \leq C \left(C_0 + \sum_{p>1} A(t)^p \right), \quad (2.2.6)$$

onde a soma é finita. Daí, da continuidade de $A(t)$ e de $A(0) \leq C_0$, e para C_0 suficientemente pequeno, segue-se que $A(t) \leq CC_0$ para todo $t > 0$ tal que vale (2.2.6) (em particular, para todo t arbitrariamente pequeno), aumentando a constante C , se necessário. Por exemplo, tomando C_0 tal que $\sum_p 2^p C^p C_0^{p-1} < 1$ temos que $A(t) \leq 2CC_0$, para todo t tal que vale (2.2.6). Com efeito, se isso não ocorresse, pela continuidade, existiria um ponto t em que valeria a igualdade $A(t) = 2CC_0$. Neste ponto, de (2.2.6) teríamos $2CC_0 \leq CC_0 + C \sum_p 2^p C^p C_0^p$, donde $1 \leq \sum_p 2^p C^p C_0^{p-1}$.

Para finalizar esta Seção enunciamos um resultado que contém estimativas dos termos convectivos para soluções suaves, embora, como foi mencionado antes, tais estimativas não sejam suficientes para nos garantir a estrutura lagrangiana. Omitimos a demonstração do mesmo, pois obteremos adiante estimativas melhores para tais termos, ou seja, estimativas com pesos convenientes para a estrutura lagrangiana “não barotrópica” e que implicam as estimativas enunciadas a seguir.

Teorema 2.2.9 ([16]). Assumindo as hipóteses do Teorema 2.1.1, e sendo $\sigma = \sigma(\tau) = \min\{1, \tau\}$, valem as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int \sigma |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \sigma |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} d\tau &\leq CC_0 \\ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int \sigma^2 |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \sigma^2 |\nabla \dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} d\tau &\leq CC_0 \\ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int \tau^2 |\nabla e|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \sigma^2 \dot{e}^2 d\mathbf{x} d\tau &\leq CC_0 \\ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int \sigma^2 |\nabla \omega|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \sigma \nabla \omega d\mathbf{x} d\tau &\leq CC_0 \end{aligned}$$

Observamos que as duas primeiras correspondem justamente a (2.1.6) e (2.1.7) no Teorema 2.1.1.

2.2.2 Estimativas pontuais

Nesta seção apresentamos, sem demonstrações, estimativas pontuais, assim como estimativas para a Hölder continuidade para soluções suaves de (1.2.1), (1.2.2) e (1.1.5).

Teorema 2.2.10 ([16]). Suponhamos que as hipóteses dos teoremas 2.2.2 e 2.2.1 sejam satisfeitas. Então existem constantes C , q e θ tais que

$$\|\rho(\cdot, t) - \tilde{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq CC_0^\theta, \quad t \geq 0 \quad (2.2.7)$$

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq CC_0^\theta \sigma(t)^{-q}, \quad t > 0 \quad (2.2.8)$$

$$\|e(\cdot, t) - \tilde{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq CC_0^\theta \sigma(t)^{-q}, \quad t > 0. \quad (2.2.9)$$

Além disso, para $\alpha \in (0, 1)$, existe uma constante $C_\alpha = C(\alpha)$ tal que

$$\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^2 \times [t, T]}^{\alpha, \alpha/2} + \langle e \rangle_{\mathbb{R}^2 \times [t, T]}^{\alpha, \alpha/2} \leq C_\alpha C_0^\theta \sigma(t)^{-q}, \quad t > 0. \quad (2.2.10)$$

Os resultados enunciados no Teorema 2.2.10 permitem provar a unicidade das trajetórias começando em tempo positivo. Além disso, está colocado em evidência que a velocidade e a energia interna específica são funções Hölder contínuas em tempo positivo. Adicionalmente enunciamos o seguinte resultado em relação à integrabilidade da seminorma de Lipschitz da velocidade e da norma L^∞ da energia.

Lema 2.2.11 ([16]).

$$\int_0^1 \langle \mathbf{u}(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{R}^2}^\alpha dt \leq CC_0^\theta \quad (2.2.11)$$

$$\int_0^1 \|e(\cdot, t) - \tilde{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} dt \leq CC_0^\theta. \quad (2.2.12)$$

2.2.3 Estimativas dos termos convectivos

Nesta seção demonstraremos as estimativas (2.1.8)-(2.1.9) do Teorema 2.1.1 (o teorema de existência de soluções fracas do sistema (1.2.1)-(1.2.3)). Fixamos uma solução (ρ, \mathbf{u}, e) do sistema (1.2.1)-(1.2.3), satisfazendo (2.1.1)-(2.1.7), e a estimamos uniformemente, obtendo estimativas a priori para os termos convectivos, e algumas estimativas pontuais para a densidade e a energia interna específica.

Antes de continuarmos, as seguintes observações sobre o fluxo efetivo viscoso são importantes. Em primeiro lugar, se $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$ é um campo qualquer então vale a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} \Delta u^j &= (u_{x_k}^k)_{x_j} + (u_{x_k}^j - u_{x_j}^k)_{x_k} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{u}_{x_j} + \omega_{x_k}^{j,k} \\ &= (\mu + \lambda)^{-1} F_{x_j} + \omega_{x_k}^{j,k} + (\mu + \lambda)(P - \tilde{P})_{x_j}, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

para $j = 1, \dots, n$. Substituindo (2.2.13) na equação do momento na forma convectiva (1.2.5), podemos escrever a mesma na forma

$$\rho \dot{u}^j = F_{x_j} + \mu \omega_{x_k}^{j,k}.$$

Derivando em relação a x_j , somando em j e usando a antisimetria da vorticidade obtemos a equação

$$\Delta F = \operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{u}}), \quad (2.2.14)$$

ou, usando notação vetorial, temos a equação $\rho \dot{\mathbf{u}} = \nabla F + \mu \operatorname{div} \omega$, e daí, tomando o divergente, obtemos (2.2.14), levando em conta que para uma função matricial $x \in \mathbb{R}^n \mapsto A(x)$, de classe C^2 , em que $A(x)$ é uma matriz quadrada e antisimétrica, vale a identidade vetorial $\operatorname{div} \operatorname{div} A = 0$. Analogamente, tomando agora o rotacional, e levando em conta que o operador $\operatorname{rot} \nabla$ é nulo e que $\operatorname{rot} \operatorname{div} \omega = \Delta \omega$, i.e. $\omega_{x_k x_j}^{i,k} - \omega_{x_k x_i}^{j,k} = \Delta \omega^{i,j}$, para cada $i, j = 1, \dots, n$ (um cálculo direto mostra isto), obtemos $\operatorname{rot}(\rho \dot{\mathbf{u}}) = \mu \operatorname{rot} \operatorname{div} \omega = \mu \Delta \omega$, i.e. $(\rho \dot{u}^i)_{x_j} - (\rho \dot{u}^j)_{x_i} = \mu \Delta \omega^{i,j}$, para cada $i, j = 1, \dots, n$. Em dimensão dois, ficamos simplesmente com

$$\mu \Delta \omega^{1,2} = \operatorname{rot}(\rho \dot{\mathbf{u}}), \quad (2.2.15)$$

onde $\operatorname{rot}(\rho \dot{\mathbf{u}}) = (\rho \dot{u}^1)_{x_2} - (\rho \dot{u}^2)_{x_1}$. Das equações anteriores, e usando a teoria elíptica clássica (cf. e.g. [18]-[15], e, em particular, [20, Lema 2.3]), derivamos o lema seguinte que será usado no que se segue.

Lema 2.2.12.

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|P - \tilde{P}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \right), \quad p > 1 \quad (2.2.16)$$

$$\|\nabla F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla \omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad p > 1 \quad (2.2.17)$$

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p + \|\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \leq C \left(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2 \right) \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{p-2}, \quad p \geq 2. \quad (2.2.18)$$

Demonstração. (2.2.16) é consequência direta de (2.2.13) e (1.3.8). Também por (1.3.8), de (2.2.14) e (2.2.15) temos (2.2.17). Para obter (2.2.18), usamos a desigualdade de interpolação (1.3.3), a definição de F e ω , e (2.2.17):

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p + \|\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p &\leq \|F\|_{L^2}^2 \|\nabla F\|_{L^2}^{p-2} + \|\omega\|_{L^2}^2 \|\nabla \omega\|_{L^2}^{p-2} \\ &\leq C \left(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2 \right) \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{p-2}. \end{aligned}$$

□

Estimativas com o dado em H^s

Para começar esta subseção, como em [17] e artigos posteriores, definimos

$$\mathcal{L}w^j = \rho \dot{w}^j - \mu \Delta w_1^j - \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)_{x_j}$$

e consideramos os seguintes problemas lineares

$$\begin{cases} \mathcal{L}w^j = 0 \\ w^j(0) = w_{1,0}^j \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (2.2.19)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}w^j = -P_{x_j} \\ w^j(0) = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (2.2.20)$$

Denotamos por \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 as soluções de (2.2.19) e (2.2.20), respectivamente, de modo que se $\mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_{1,0}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Tais soluções admitem as seguintes estimativas de energia:

Lema 2.2.13.

$$\sup_{0 \leq \tau \leq \infty} \int \rho |\mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} + \int_0^\infty \int |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau \leq C \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{L^2} \quad (2.2.21)$$

$$\sup_{0 \leq \tau \leq T} \int \rho |\mathbf{w}_2|^2 d\mathbf{x} + \int_0^T \int |\nabla \mathbf{w}_2|^2 d\mathbf{x} \leq CTC_0, \quad \text{para todo } T > 0. \quad (2.2.22)$$

Demonstração. Multiplicando (2.2.19) por w_1^j , integrando e somando em j , temos que

$$\frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 d\mathbf{x} d\tau = \frac{1}{2} \int \rho |\mathbf{w}_{1,0}|^2 d\mathbf{x}$$

obtendo diretamente (2.2.21). A demonstração de (2.2.22) é análoga, sendo que o termo

$$\int_0^T \int (-\nabla P) \cdot \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} d\tau = \int_0^T \int (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} d\tau = \int_0^T \int (\gamma - 1) [\rho(e - \tilde{e}) + (\rho - \tilde{\rho})\tilde{e}] \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} d\tau$$

é estimado, em módulo, por $C \int_0^T [\int (e - \tilde{e})^2 d\mathbf{x} + (\rho - \tilde{\rho})^2 d\mathbf{x}] d\tau + 1/2 \int_0^T \int |\nabla \mathbf{w}_2|^2 d\mathbf{x} d\tau \leq CC_0T + 1/2 \int_0^T \int |\nabla \mathbf{w}_2|^2 d\mathbf{x} d\tau$, onde usamos (2.1.3).

□

Lema 2.2.14. Para $k = 0, 1$ e $\sigma = \sigma(t) = \min\{t, 1\}$ temos a estimativa:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int \sigma^k \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau + \left(\sigma^k \int \frac{1}{2} \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 d\mathbf{x} \right) \Big|_0^t \\ = k \int_0^{\sigma(t)} \int \sigma^{k-1} \left[\frac{1}{2} \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 \right] d\mathbf{x} d\tau \\ + O \left(\int_0^t \int \sigma^k |\nabla \mathbf{w}_1|^2 |\nabla \mathbf{u}| d\mathbf{x} d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.2.19) por $\dot{\mathbf{w}}_1$,

$$(\rho \dot{w}_1^j) \dot{w}_1^j = (\mu \Delta w_1^j + \lambda \operatorname{div} \mathbf{w}_{1x_j}) \partial_t w_1^j + (\mu \Delta w_1^j + \lambda \operatorname{div} \mathbf{w}_{1x_j}) (\mathbf{u} \cdot \nabla w_1^j)$$

de modo que somando em j e integrando chegamos em

$$\int \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 d\mathbf{x} + \mathcal{O}_3, \quad (2.2.24)$$

onde \mathcal{O}_3 é qualquer termo limitado por

$$C \int |\nabla \mathbf{w}_1|^2 |\nabla \mathbf{u}| d\mathbf{x}.$$

Multiplicando (2.2.24) por σ^k ,

$$\begin{aligned} \sigma^k \int \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} &= -\sigma^k \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 d\mathbf{x} + \sigma^k \mathcal{O}_3 \\ &= -\frac{d}{dt} \left[\sigma^k \int \frac{1}{2} \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 d\mathbf{x} \right] \\ &\quad + k \sigma^{k-1} \sigma' \int \frac{1}{2} \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 d\mathbf{x} + \sigma^k \mathcal{O}_3. \end{aligned}$$

Finalmente, integrando em t , concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int \sigma^k \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau &= -\frac{1}{2} \sigma^k \int \mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2 d\mathbf{x} \Big|_0^t \\ &\quad + \frac{k}{2} \int_0^t \int \sigma^{k-1} \sigma' (\mu |\nabla \mathbf{w}_1|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_1)^2) d\mathbf{x} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \sigma^k \mathcal{O}_3 d\tau, \end{aligned}$$

e, como $\sigma' = 0$ para $t \geq 1$, concluímos a demonstração. \square

Definindo $F_1 = (\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{w}_1$ e $\omega_1^{jk} = w_{1x_k}^j - w_{1x_j}^k$, de forma análoga a (2.2.13)-(2.2.15), as seguintes equações são válidas (obteremos abaixo equações semelhantes em relação a \mathbf{w}_2):

$$\begin{aligned} \Delta w_1^j &= (w_{1x_k x_k}^j - w_{1x_k x_j}^k) + w_{1x_k x_j}^k \\ &= \omega_{1x_k}^{jk} + (\mu + \lambda)^{-1} F_{1x_j}. \end{aligned}$$

Usando a convenção da soma de índices repetidos, e, substituindo estas em (2.2.19), obtemos

$$\rho \dot{w}_1^j = F_{1x_j} + \omega_1^{jk},$$

chegando também às importantes relações:

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{w}}_1) \\ \mu \Delta \omega_1^{12} &= \operatorname{rot}(\rho \dot{\mathbf{w}}_1), \end{aligned}$$

lembrando que $\operatorname{rot} \mathbf{w} = w_{x_2}^1 - w_{x_1}^2$ para qualquer campo \mathbf{w} definido em \mathbb{R}^2 . Analogamente ao Lema 2.2.12, a definição de F_1 e ω_1 , junto com as estimativas elípticas (1.3.8), e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (1.3.3) permitem concluir, para $p \geq 2$, que

$$\|\nabla \mathbf{w}_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\|F_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \right) \quad (2.2.25)$$

$$\|\nabla F_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla \omega_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\rho \dot{\mathbf{w}}_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (2.2.26)$$

$$\|F_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p + \|\omega_1\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \leq C \|\nabla \mathbf{w}_1\|_{L^2}^2 \|\rho \dot{\mathbf{w}}_1\|_{L^2}^{p-2}. \quad (2.2.27)$$

Lema 2.2.15.

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} \int |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} + \int_0^1 \int \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau &\leq C \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 \\ \sup_{0 \leq t \leq 1} \int t |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} + \int_0^1 \int t \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau &\leq C \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Queremos estimar a quantidade

$$A_k(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int \tau^k |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \tau^k \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau$$

para $k = 0, 1$ e $t \in [0, 1]$. Pelo Lema 2.2.14, basta estimar o termo cúbico em (2.2.24). Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_0^t \int \tau^k |\nabla \mathbf{w}_1|^2 |\nabla \mathbf{u}| d\mathbf{x} d\tau \leq \left(\int_0^t \int \tau^{2k} |\nabla \mathbf{w}_1|^4 d\mathbf{x} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} d\tau \right)^{1/2}, \quad (2.2.28)$$

e, de (2.1.3), o segundo fator no lado direito é estimado por $CC_0^{\theta/2}$. Quanto ao primeiro fator, usando (2.2.25)-(2.2.27) e (1.3.3), temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int \tau^{2k} |\nabla \mathbf{w}_1|^4 d\mathbf{x} d\tau &\leq C \int_0^t \int \tau^{2k} (|F_1|^4 + |\omega_1|^4) d\mathbf{x} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \left(\tau^k \int |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} \right) \left(\tau^k \int \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} \right) d\tau \\ &\leq C \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \tau^k \int |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} \right) \int_0^t \int \tau^k \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau \\ &\leq CA_k(t)^2. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Então pelo Lema 2.2.13, e as desigualdades (2.2.28) e (2.2.29), chegamos a

$$A_k(t) \leq (1-k)C \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 + kC \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{L^2}^2 + CC_0^{1/2} A_k(t).$$

Portanto

$$A_k(t) \leq C \left((1-k) \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 + k \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{L^2}^2 \right)$$

se $C_0 \leq \frac{1}{4C^2}$.

□

Do Lema 2.2.15, concluímos que o operador

$$\begin{aligned} H^k(\mathbb{R}^2) &\rightarrow L^\infty(0, 1; L^2(\mathbb{R}^2), \tau^k d\mathbf{x}d\tau) \oplus L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2, \tau^k d\mathbf{x}d\tau) \\ \mathbf{w}_{1,0} &\mapsto (\nabla \mathbf{w}_1, \rho \dot{\mathbf{w}}_1), \end{aligned}$$

onde \mathbf{w}_1 é a solução correspondente ao dado inicial $\mathbf{w}_{1,0}$, é um operador linear contínuo, para $k = 0, 1$. Então, por interpolação (Proposição 1.3.8), temos que o operador é contínuo nos espaços intermediários,

$$H^s(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^\infty(0, 1; L^2(\mathbb{R}^2), t^{1-s} d\mathbf{x}dt) \oplus L^2((0, 1) \times \mathbb{R}^2, t^{1-s} d\mathbf{x}dt),$$

isto é,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \int t^{1-s} |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} + \int_0^1 \int t^{1-s} \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x}dt \leq C \|\mathbf{w}_{1,0}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \quad (2.2.30)$$

para $s \in [0, 1]$.

Uma estimativa útil nas estimativas posteriores é a seguinte estimativa da pressão, obtida a partir da estimativa de energia (2.1.3):

$$\begin{aligned} \int_0^t \|P - \tilde{P}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 d\tau &\leq C \int_0^t \|\rho - \tilde{\rho}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 d\tau + C \int_0^t \|e - \tilde{e}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|\rho - \tilde{\rho}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau + C \int_0^t \|e - \tilde{e}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\nabla e\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\leq CC_0 t + CC_0^2. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Como feito para \mathbf{w}_1 , se define $F_2 = (\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 - (P - \tilde{P})$ e $\omega_2^{jk} = w_{2x_k}^j - w_{2x_j}^k$ e a seguinte identidade é válida,

$$\Delta w_2^j = \omega_2^{jk}{}_{x_k} + (\mu + \lambda)^{-1} (F_{2x_j} + (P - \tilde{P})_{x_k}).$$

Substituindo esta relação em (2.2.20) obtemos a equação

$$\rho \dot{w}_2^j = F_{2x_j} + \omega_2^{jk}{}_{x_k}$$

e, após derivar convenientemente chegamos em

$$\begin{aligned} \Delta F_2 &= \operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{w}}_2) \\ \mu \Delta \omega_2^{12} &= \operatorname{curl}(\rho \dot{\mathbf{w}}_2). \end{aligned}$$

Também para \mathbf{w}_2 temos estimativas semelhantes às obtidas em (2.2.25)-(2.2.27) para \mathbf{w}_1 , que são

$$\|\nabla \mathbf{w}_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\|F_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|P - \tilde{P}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \right) \quad (2.2.32)$$

$$\|\nabla F_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla \omega_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\rho \dot{\mathbf{w}}_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (2.2.33)$$

$$\|F_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p + \|\omega_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \leq C \left(\|\nabla \mathbf{w}_2\|_{L^2}^2 + \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2 \right) \|\rho \dot{\mathbf{w}}_2\|_{L^2}^{p-2} \quad (2.2.34)$$

De forma análoga à Seção anterior definimos agora a seguinte função:

$$B_0(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int |\nabla \mathbf{w}_2|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \rho |\dot{\mathbf{w}}_2|^2 d\mathbf{x}d\tau.$$

Lema 2.2.16. Se $0 \leq t \leq 1$ e $\sqrt{\rho}\dot{e} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, então

$$B_0(t) \leq CC_0^\theta.$$

Demonstração. Multiplicando (2.2.20) por \dot{w}_2^j , temos

$$\begin{aligned} \rho(\dot{w}_2^j)^2 &= -P_{x_j}\dot{w}_2^j + \left(\mu\Delta w_2^j + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{w}_2)_{x_j}\right)w_{2t}^j \\ &\quad + \left(\mu\Delta w_2^j + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{w}_2)_{x_j}\right)\nabla w_2^j \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

e, integrando por partes e somando em j , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int \rho|\dot{\mathbf{w}}_2|^2 d\mathbf{x}d\tau + \frac{1}{2} \int \mu|\nabla \mathbf{w}_2|^2 + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{w}_2)^2 d\mathbf{x} &= \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \dot{\mathbf{w}}_2 d\mathbf{x} \\ + \int_0^t \int \left(\mu\Delta w_2^j + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{w}_2)_{x_j}\right) \nabla w_2^j \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}d\tau. \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

O termo com a pressão pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \dot{\mathbf{w}}_2 d\mathbf{x} &= \int_0^t \int (P - \tilde{P})\partial_t(\operatorname{div} \mathbf{w}_2) d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\ &= \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} - \int_0^t \int P_t \operatorname{div} \mathbf{w}_2 \\ &\quad - (P - \tilde{P})\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\ &= \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} - \int_0^t \int P_\rho \rho_t \operatorname{div} \mathbf{w}_2 \\ &\quad - P_e e_t \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\ &= \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int P_\rho \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int P_e (\dot{e} - \nabla e \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau + \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\ &= \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int P_\rho (\nabla \rho \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int P_\rho \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau - \int_0^t \int P_e \dot{e} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int P_e (\nabla e \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau + \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\ &= \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int (\nabla P \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int P_\rho \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau - \int_0^t \int P_e \dot{e} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\ &= \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} (\mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 - (\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int P_\rho \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 - P_e \dot{e} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \\ &= \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int (P - \tilde{P})\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2) d\mathbf{x}d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int P_\rho \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 - P_e \dot{e} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 d\mathbf{x}d\tau \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

e, pela identidade

$$\operatorname{div} ((\nabla \mathbf{w}_2)\mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2) = \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 - u_{x_j}^k w_{2x_k}^j,$$

temos que o módulo do segundo termo na última expressão é limitado por

$$C \int_0^t \int |P - \tilde{P}| |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \mathbf{w}_2| dx.$$

Além disso, o terceiro termo em (2.2.36) é decomposto como

$$\begin{aligned} \int_0^t \int P_\rho \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 dx d\tau &= (\gamma - 1) \int_0^t \int \rho e \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 dx d\tau \\ &= \int_0^t \int P \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 dx d\tau \\ &= \int_0^t \int (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int \tilde{P} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{w}_2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Isto, junto com o fato de que a segunda integral em (2.2.35) é estimada facilmente por $C \int \int |\nabla \mathbf{w}_2|^2 |\nabla \mathbf{u}| dx d\tau$, mostra que da igualdade (2.2.35) chegamos na desigualdade

$$\begin{aligned} \int_0^t \int \rho |\dot{\mathbf{w}}_2|^2 dx d\tau &+ \frac{1}{2} \int \mu |\nabla \mathbf{w}_2|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{w}_2)^2 dx \leq \int (P - \tilde{P}) \operatorname{div} \mathbf{w}_2 dx \\ &+ C \int_0^t \int |\nabla \mathbf{w}_2| |\nabla \mathbf{u}| dx d\tau + \int_0^t \int |\nabla \mathbf{w}_2|^2 |\nabla \mathbf{u}| dx d\tau \\ &+ C \int_0^t \int |P - \tilde{P}| |\nabla \mathbf{w}_2| |\nabla \mathbf{u}| dx d\tau \\ &- (\gamma - 1) \int_0^t \int \rho e \operatorname{div} \mathbf{w}_2 dx d\tau \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

A ideia é estimar cada integral no lado direito. As duas primeiras integrais em (2.2.37) são limitadas facilmente usando a desigualdade de Hölder e as estimativas de energia (2.1.3) para \mathbf{u} e (2.2.22) para \mathbf{w}_2 . A terceira integral é estimada, usando as desigualdade de Hölder, da energia para \mathbf{u} , i.e. (2.1.3), e (2.2.32), (2.2.34) e (2.2.31), por

$$\begin{aligned} C \left(\int_0^t \int |\nabla \mathbf{w}_2|^4 dx d\tau \right)^{1/2} &\left(\int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}|^2 dx d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq CC_0^{1/2} \left(\int_0^t \int |\nabla \mathbf{w}_2|^4 dx d\tau \right)^{1/2} \\ &= CC_0^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla \mathbf{w}_2\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq CC_0^{1/2} \left(\int_0^t (\|\nabla \mathbf{w}_2\|_{L^2}^2 + \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2) \|\rho \dot{\mathbf{w}}_2\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|P - \tilde{P}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq CC_0^{1/2} (B_0(t) + C_0)^{1/2} \left(\int_0^t \|\rho \dot{\mathbf{w}}_2\|_{L^2}^2 d\tau \right)^{1/2} + CC_0 \\ &\leq CC_0^{1/2} B_0(t) + CC_0^{1/2}. \end{aligned}$$

Usando que $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, a estimativa (2.2.12) e o Lema 2.2.15, temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int |P - \tilde{P}| |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \mathbf{w}_2| d\mathbf{x} d\tau &\leq C \int_0^t \int |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \mathbf{w}_2| d\mathbf{x} d\tau \\
 &\quad + C \int_0^t \int |e - \tilde{e}| |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \mathbf{w}_2| d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq CC_0 + C \int_0^t \|e - \tilde{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{w}_2\|_{L^2} d\tau \\
 &\leq CC_0 + C \int_0^t \|e - \tilde{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} d\tau \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left(\|\nabla \mathbf{w}_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{w}_2\|_{L^2}^2 \right) \\
 &\leq CC_0^\theta (C_0 + B_0(t)).
 \end{aligned}$$

Os termos nas duas primeiras integrais na última igualdade de (2.2.36) são facilmente limitados usando as estimativas de energia, ou são absorvidos do lado esquerdo de (2.2.35), e a última integral é limitada por $CC_0^{1/2}$ simplesmente usando a desigualdade de Hölder e pela hipótese de termos $\sqrt{\rho}e$ em L^2 . Portanto,

$$B_0(t) \leq CC_0^{1/2} (1 + B_0(t))$$

então, para C_0 suficientemente pequeno obtemos o Lema. \square

Agora, para todo t suficientemente pequeno e $\beta \in [s, 1]$, usando os lemas acima, podemos estimar

$$\begin{aligned}
 &\sup_{0 \leq \tau \leq t} \int \tau^{1-\beta} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \tau^{1-\beta} \rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int \tau^{1-\beta} |\nabla \mathbf{w}_1|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \tau^{1-\beta} \rho |\dot{\mathbf{w}}_1|^2 d\mathbf{x} d\tau \\
 &\quad + \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int |\nabla \mathbf{w}_2|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int \rho |\dot{\mathbf{w}}_2|^2 d\mathbf{x} d\tau \\
 &\leq CC_0^\theta,
 \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

desde que C_0 seja suficientemente pequeno.

Lema 2.2.17. Para $s \in (0, 1)$

$$\sup_{0 < t < 1} t^{2-s} \int \rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} + \int_0^1 \int t^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} d\tau \leq CC_0^\theta. \tag{2.2.39}$$

Demonstração. Aplicando o operador $\tau^{2-s} \dot{u}^j (\partial_t + \operatorname{div}(\cdot \mathbf{u}))$ na equação (1.2.5), vem que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \left(\tau^{2-s} (\dot{u}^j)^2 \right) &= \frac{2-s}{2} \rho \tau^{1-s} (\dot{u}^j)^2 - \tau^{2-s} \dot{u}^j \left(P_{tx_j} + \operatorname{div} P_{x_j} \mathbf{u} \right) \\
 &\quad + \mu \tau^{2-s} \dot{u}^j \left(\Delta u_t^j + \operatorname{div} \Delta u^j \mathbf{u} \right) \\
 &\quad + \tau^{2-s} \dot{u}^j \left((\operatorname{div} \mathbf{u})_{tx_j} + \operatorname{div} (\operatorname{div} \mathbf{u})_{x_j} \mathbf{u} \right)
 \end{aligned}$$

Integrando, segue que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int \rho \tau^{2-s} |\dot{u}^j|^2 &= \frac{2-s}{2} \int_0^t \int \rho \tau^{1-s} |\dot{u}^j|^2 d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad - \int_0^t \int \tau^{2-s} \dot{u}^j (P_{tx_j} + \operatorname{div} P_{x_j} \mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad + \mu \int_0^t \int \tau^{2-s} \dot{u}^j (\Delta u_t^j + \operatorname{div} \Delta u^j \mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \int \tau^{2-s} \dot{u}^j ((\operatorname{div} \mathbf{u})_{tx_j} + \operatorname{div} (\operatorname{div} \mathbf{u})_{x_j} \mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau.
 \end{aligned}$$

Somando em j obtemos uma soma de quatro integrais que passamos a estimar. Por (2.1.8) temos que a primeira integral é limitada por CC_0^θ . Quanto à segunda, integrando por partes e usando (1.2.1), chegamos em

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int \tau^{2-s} \dot{u}^j (P_{tx_j} + \operatorname{div} P_{x_j} \mathbf{u}) d\mathbf{x}d\tau &= - \int_0^t \int \tau^{2-s} \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} P_t d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad - \int_0^t \int \tau^{2-s} P_{x_j} \dot{u}_{x_k}^j u^k d\mathbf{x}d\tau \\
 &= - \int_0^t \int \tau^{2-s} \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} (P_\rho \rho_t + P_e e_t) d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \int \tau^{2-s} P (\dot{u}_{x_k x_j}^j u^k + \dot{u}_{x_k}^j u_{x_j}^k) d\mathbf{x}d\tau \\
 &= \int_0^t \int \tau^{2-s} P \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \int \tau^{2-s} \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} (\mathbf{u} \cdot \nabla P) d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad - (\gamma - 1) \int_0^t \int \tau^{2-s} \rho \dot{e} \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \int \tau^{2-s} P (\dot{u}_{x_k x_j}^j u^k + \dot{u}_{x_k}^j u_{x_j}^k) d\mathbf{x}d\tau \\
 &= \int_0^t \int \tau^{2-s} P \dot{u}_{x_k}^j u_{x_j}^k d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad - (\gamma - 1) \int_0^t \int \tau^{2-s} \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} \dot{e} d\mathbf{x}d\tau.
 \end{aligned}$$

Para os termos de viscosidade (duas últimas integrais acima) temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int \tau^{2-s} \dot{u}^j (\Delta u_t^j + \operatorname{div} (\Delta u^j \mathbf{u})) d\mathbf{x}d\tau &= - \int_0^t \int \tau^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x}d\tau \\
 &\quad + O \left(\int \int \tau^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}| |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_0^t \int \tau^{2-s} \dot{u}^j \left((\operatorname{div} \mathbf{u})_{tx_j} + \operatorname{div} \left((\operatorname{div} \mathbf{u})_{x_j} \mathbf{u} \right) \right) d\mathbf{x} d\tau = - \int_0^t \int \tau^{2-s} (\operatorname{div} \dot{\mathbf{u}})^2 d\mathbf{x} d\tau + O \left(\int \int \tau^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}| |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} d\tau \right).$$

Com as estimativas acima, temos

$$\begin{aligned} \tau^{2-s} \int \rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} + \int_0^1 \int \tau^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} d\tau &\leq CC_0^\theta \\ + C \int_0^t \int \tau^{2-s} |P - \tilde{P}| |\nabla \dot{\mathbf{u}}| |\nabla \mathbf{u}| d\mathbf{x} d\tau + C \int_0^t \int \tau^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}| |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} d\tau. \end{aligned}$$

Os termos com $\nabla \dot{\mathbf{u}}$ podem ser absorvidos na esquerda, e os outros termos são limitados como segue: primeiro,

$$\int_0^t \|P - \tilde{P}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq CC_0^\theta$$

usando (2.2.31), e segundo, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^{2-s} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} &\leq \int_0^t \tau^{2-s} \|F\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 + \|\omega\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 + \|P - \tilde{P}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 d\tau \\ &\leq \int_0^t \tau^{2-s} \|F\|_{L^2}^2 \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_{L^2}^2 \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 d\tau + CC_0^\theta \\ &\leq CC_0^\theta + \int_0^t \tau^{2-s} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2 + \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2 \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2 \right) d\tau \\ &\leq CC_0^\theta + \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \tau^{2-s} \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2 \right) \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\quad + \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2 \right) \int_0^t \tau^{2-s} \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\leq CC_0^\theta + CC_0^\theta \int_0^t \tau^{2-s} \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2 d\tau \end{aligned}$$

usando (2.1.3), (2.2.31) e (2.1.8). □

2.3 O problema aproximado

Em primeiro lugar, será regularizado o problema regularizando os dados iniciais. Para isto, simplesmente serão "mollificados" os dados iniciais convenientemente. Escolhendo uma função suave ψ , com suporte compacto em \mathbb{R}^2 e tal que $\int \psi d\mathbf{x} = 1$, definimos $\psi_\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta^2} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right)$ e as regularizações dos dados iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_0^\delta(\mathbf{x}) &= \psi_\delta * \rho_0(\mathbf{x}) \\ u_0^{j\delta}(\mathbf{x}) &= \psi_\delta * u_0^j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2 \\ e_0^\delta(\mathbf{x}) &= \psi_\delta * e_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

onde $*$ representa o operador de convolução clássica. A energia inicial (1.2.8) é então modificada também sendo agora

$$C_0^\delta := \|\rho_0^\delta - \tilde{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\mathbf{u}_0^\delta\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2 + \int [(\rho_0^\delta - \tilde{\rho})^2 + |\mathbf{u}_0^\delta|^2 + |e_0 - \tilde{e}|^2 + |\nabla e_0^\delta|^2] (1 + |\mathbf{x}|^2)^l d\mathbf{x} < \infty. \quad (2.3.1)$$

Observamos que pela desigualdade de Hölder, as parcelas em (2.3.1) são limitadas pelas normas dos correspondentes dados iniciais, de modo que temos

$$C_0^\delta \leq C_0. \quad (2.3.2)$$

2.3.1 Existência

Teorema 2.3.1 (Existência local). Assumindo as hipóteses do Teorema 2.1.1, existem constantes positivas C e ϵ tais que se

$$C_0 \leq \epsilon, \quad \text{essinf } e_0 \geq e_1,$$

onde e_1 é como no Teorema 2.2.2, então existe uma solução suave $(\rho^\delta, \mathbf{u}^\delta, e^\delta)$ de (1.2.1), (1.2.2), (1.1.5) com dados iniciais $(\rho_0^\delta, \mathbf{u}_0^\delta, e_0^\delta)$ definida em $\mathbb{R}^2 \times [0, T_\delta]$ para certo tempo T_δ (possivelmente dependendo de δ), que satisfaz (2.1.1) e as estimativas (2.1.2)-(2.1.4) e (2.1.8)-(2.1.9).

O teorema é uma consequência direta do Teorema de Kawashima, Teorema 1.3.10. De fato, o sistema (1.2.1)-(1.2.3) pode ser escrito na forma (1.3.9), pondo-se $\mathbf{v} \equiv \rho$, $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{u}, e)$ e coeficientes:

$$\begin{aligned} A_2^0(\rho, \mathbf{u}, e) &= \rho \mathbb{I}, & A_1^0(\rho, \mathbf{u}, e) &= 1, & A_{11}^j(\rho, \mathbf{u}, e) &= u^j \\ B_2^{11}(\rho, \mathbf{u}, e) &= \begin{bmatrix} \mu + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}, & B_2^{22}(\rho, \mathbf{u}, e) &= \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \\ B_2^{12}(\rho, \mathbf{u}, e) &= B_2^{21}(\rho, \mathbf{u}, e) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(\rho, \mathbf{u}, e, \nabla \mathbf{u}, \nabla e) &= -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} \\ f_2^1(\rho, \mathbf{u}, e, \nabla \rho, \nabla \mathbf{u}, \nabla e) &= -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla u^1 - P_{x_1} \\ f_2^2(\rho, \mathbf{u}, e, \nabla \rho, \nabla \mathbf{u}, \nabla e) &= -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla u^2 - P_{x_2} \\ f_2^3(\rho, \mathbf{u}, e, \nabla \rho, \nabla \mathbf{u}, \nabla e) &= -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla e + P \operatorname{div} \mathbf{u} + g(\nabla \mathbf{u}) \\ g(\nabla \mathbf{u}) &= \mu |\nabla \mathbf{u}|^2 + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \mu (u_{x_k}^j u_{x_j}^k - (\operatorname{div} \mathbf{u})^2). \end{aligned}$$

As condições 1 e 2 do Teorema de Kawashima são facilmente verificadas.

As estimativas (2.1.2)-(2.1.4) e (2.1.8)-(2.1.9) são justamente as estimativas a priori, ou seja, as estimativas dadas nos lemas estabelecidos anteriormente.

Teorema 2.3.2 (Existência global [16]). A solução obtida no Teorema 2.3.1 pode ser estendida no tempo, isto é, a solução está definida em $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$.

Como consequência das estimativas a priori, e usando argumentos de compacidade é mostrada em [16] a existencia de funções (ρ, \mathbf{u}, e) e de uma sequência $\{\delta_k\}$ tais que as soluções $(\rho^{\delta_k}, \mathbf{u}^{\delta_k}, e^{\delta_k})$ convergem em um sentido apropriado às funções (ρ, \mathbf{u}, e) (Teorema seguinte). Nesta seção serão denotados com o índice δ as funções auxiliares associadas às funções $(\rho^\delta, \mathbf{u}^\delta, e^\delta)$, ou seja, escrevemos: $P^\delta = P(\rho^\delta, e^\delta)$, $F^\delta = (\lambda + \mu)\text{div } \mathbf{u}^\delta - (P^\delta - \tilde{P})$ e $(\omega^\delta)^{jk} = (u^\delta)^j_{\mathbf{x}_k} - (u^\delta)^k_{\mathbf{x}_j}$. Enunciamos, sem demonstração, o seguinte resultado:

Teorema 2.3.3 (Soluções fracas). Consideramos a família de soluções $(\rho^\delta, \mathbf{u}^\delta, e^\delta)$ obtida no Teorema 2.3.2. Existem uma sequência $\delta_k \rightarrow 0$ e uma funções (ρ, \mathbf{u}, e) tais que:

$$\left. \begin{array}{l} \rho^\delta(\cdot, t) - \rho(\cdot, t) \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}^\delta(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t) \\ \mathbf{e}^\delta(\cdot, t) - e(\cdot, t) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ fracamente em } L^2(\mathbb{R}^2), t \geq 0 \quad (2.3.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^\delta \rightarrow \mathbf{u} \\ \mathbf{e}^\delta \rightarrow e \end{array} \right\} \text{ uniformemente sobre compactos em } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \quad (2.3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^\delta(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t) \\ \mathbf{e}^\delta(\cdot, t) - e(\cdot, t) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ em } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2), t \geq 0 \quad (2.3.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^\delta \rightarrow \mathbf{u} \\ \mathbf{e}^\delta - e(\cdot, t) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ em } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)) \quad (2.3.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho^\delta - \rho \rightarrow 0 \\ \nabla \mathbf{u}^\delta \rightarrow \nabla \mathbf{u} \\ \nabla e^\delta - \nabla e \rightarrow 0 \\ P^\delta - P \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ fracamente em } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)) \quad (2.3.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} F^\delta(\cdot, t) \rightarrow F(\cdot, t) \\ \omega^\delta(\cdot, t) \rightarrow \omega(\cdot, t) \end{array} \right\} \text{ em } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2), t > 0 \quad (2.3.8)$$

Adicionalmente, as funções (ρ, \mathbf{u}, e) satisfazem as conclusões (2.1.1)-(2.1.4) e (2.1.6)-(2.1.7). Finalmente, (ρ, \mathbf{u}, e) é a solução fraca de (1.2.1)-(1.2.3) no sentido da definição 1.2.1.

Como observado em [16], a tripla (ρ, \mathbf{u}, e) também satisfaz no sentido fraco as equações da energia cinética (2.2.2) e do balanço da energia total (1.1.4). A demonstração é dada em [16], e consiste em escrever as formulações fracas para as funções $(\rho^\delta, \mathbf{u}^\delta, e^\delta)$ e passar o limite quando $\delta \rightarrow 0$.

Capítulo 3

Resultados principais

Neste capítulo apresentamos e concluímos a demonstração do resultado principal deste trabalho, a saber, a existência e unicidade das trajetórias, e mais algumas propriedades, associadas a um campo de velocidade \mathbf{u} , como descrito no Teorema 2.3.2. Os resultados são obtidos supondo $\text{ess\,inf } \rho_0(\mathbf{x}) \geq \underline{\rho} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, mas como feito em [19], pode-se supor que esta condição é satisfeita num conjunto aberto arbitrário, concentrando o estudo no transporte desse conjunto e na porção de fluido contida nele. A questão da estrutura lagrangiana para fluidos compressíveis foi estudada por Hoff e Santos [19] e Hoff [17] no caso barotrópico. Eles demonstram que se um campo \mathbf{u} é solução das equações de Navier Stokes para um fluido barotrópico satisfazendo estimativas com taxas de regularização convenientes, em dimensões 2 e 3, então existe um fluxo (único) associado ao campo de velocidades, isto é, uma aplicação X que descreve a posição de cada partícula do fluido viajando com velocidade \mathbf{u} , em um instante de tempo determinado; além disso, eles também demonstram que a aplicação X é Hölder contínua. A demonstração é baseada no fato de que as soluções aproximadas satisfazem as estimativas do Teorema 2.1.1, independentemente do parâmetro de aproximação. A trajetória é obtida como o limite das trajetórias associadas às soluções aproximadas. Para a unicidade, o campo é decomposto, como já mencionamos nos capítulos anteriores, como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_{F,\omega}$ onde (abusando um pouco da notação) $\mathbf{u}_P = \nabla\Gamma * P$ e $\mathbf{u}_{F,\omega} = \nabla\Gamma * (F + \omega)$ sendo Γ a solução fundamental da equação de Laplace. Então é visto que \mathbf{u}_P é log-lipschitziano e $\mathbf{u}_{F,\omega}$ é lipschitziano, de modo que a desigualdade de Osgood pode ser aplicada. Adicionalmente descrevemos algumas propriedades do fluxo.

3.1 Estrutura lagrangiana $t_0 > 0$

Tentando introduzir a ideia central do resultado principal, apresentamos nesta seção o resultado da estrutura lagrangiana quando o tempo inicial é estritamente positivo.

Teorema 3.1.1. Admitamos as hipóteses do Teorema 2.1.1. Então, para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ e $t_0 > 0$, existe uma única curva $X(\cdot, \mathbf{x}_0; t_0) \in C([0, \infty); \mathbb{R}^2) \cap C^1((0, \infty); \mathbb{R}^2)$ tal que

$$X(t, \mathbf{x}_0; t_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{x}_0), \tau) d\tau. \quad (3.1.1)$$

Demonstração. A Hölder continuidade de \mathbf{u} em $\mathbb{R}^2 \times [\tau, \infty)$ garante a existência das trajetórias $X(t, \mathbf{x}_0; t_0)$ satisfazendo (3.1.1). Quanto à unicidade, o argumento é semelhante ao que usaremos na seguinte seção para o caso $t_0 = 0$, porém, daremos aqui uma ideia geral da demonstração, e os detalhes rigorosos podem ser vistos na seguinte seção, na prova para o caso $t_0 = 0$. A ideia nesta parte é mostrar que a existência das trajetórias para $t_0 > 0$ é garantida sem supor que a velocidade inicial está em algum espaço de Sobolev. Suponhamos então que X_1 e X_2 são duas funções satisfazendo (3.1.1). Temos que

$$\begin{aligned} |X_1(t, \mathbf{x}_0; t_0) - X_2(t, \mathbf{x}_0; t_0)| &\leq \int_{t_0}^t |\mathbf{u}(X_1(\tau, \mathbf{x}_0), \tau) - \mathbf{u}(X_2(\tau, \mathbf{x}_0; t_0), \tau)| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}\|_{LL} \mu(|X_1(\tau, \mathbf{x}_0; t_0) - X_2(\tau, \mathbf{x}_0; t_0)|) d\tau, \end{aligned}$$

assim, pelo Lema de Osgood, é suficiente demonstrar que $\int_{t_0}^t \|\mathbf{u}\|_{LL} < \infty$. Para isto, consideramos a decomposição $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{F,\omega} + \mathbf{u}_P$ onde $\mathbf{u}_P = \nabla\Gamma * (P - \tilde{P})$ e $\mathbf{u}_{F,\omega}$ é uma combinação linear de $\nabla\Gamma * F$ e $\nabla\Gamma * \omega$. A notação $\nabla\omega * f$ é um abuso de notação, e é entendida como a convolução das componentes. A matriz ω pode ser vista como uma função escalar em dimensão dois. Da mesma forma que foram obtidas as estimativas (2.2.32)-(2.2.34), obtemos estimativas relacionadas com o campo $\mathbf{u}_{F,\omega}$.

Como $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ para $p > 2$, e usando (1.3.8) junto com o fato de que $\Delta u_{F,\omega}^j = (\mu + \lambda)^{-1} F_{x_j} + \omega_{x_k}^{j,k}$, $j = 1, 2$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}_{F,\omega}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C \|\nabla \mathbf{u}_{F,\omega}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|D^2 \mathbf{u}_{F,\omega}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C (\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla \omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}) \end{aligned}$$

e assim, por (2.2.17) e (2.2.18) e usando (1.3.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}_{F,\omega}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2)^{1/2} \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/p} \\ &\quad + \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{2/p} + \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^{2/p}) \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/p} \\ &\quad + \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{2/p} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/p}. \end{aligned}$$

Agora, integrando e usando as estimativas (2.1.3), (2.1.6) e (2.1.7) em cada parcela do lado direito na última desigualdade, temos que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|\rho \dot{\mathbf{u}}(\cdot, t)\|_{L^2}^{2/p} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/p} &\leq C \left(\int_{t_0}^t \tau^{-2(p-1)/p} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^t \tau \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2 d\tau \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_{t_0}^t \tau^2 \|\nabla \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2 d\tau \right)^{(p-2)/2p} \\ &\leq C C_0^{\theta/2} \left(\int_{t_0}^t \tau^{-2(p-1)/p} \right)^{1/2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^{2/p} \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/p} d\tau &\leq C \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2 \right)^{1/p} \int_{t_0}^t \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/p} d\tau \\
 &= C \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|P - \tilde{P}\|_{L^2}^2 \right)^{1/p} \int_{t_0}^t (\tau \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2)^{(p-2)/2p} \tau^{-(p-2)/2p} d\tau \\
 &\leq CC_0^\theta \left(\int_{t_0}^t \tau^{-(p-2)/(p+2)} \right)^{(p+2)/2p} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^{2/p} \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/p} d\tau &\leq C \left(\int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 d\tau \right)^{1/p} \left(\int_{t_0}^t \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^{(p-2)/(p-1)} d\tau \right)^{(p-1)/p} \\
 &= C \left(\int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 d\tau \right)^{1/p} \\
 &\quad \times \left(\int_{t_0}^t (\tau \|\rho \dot{\mathbf{u}}\|_{L^2}^2)^{(p-2)/2(p-1)} \tau^{-(p-2)/2(p-1)} d\tau \right)^{(p-1)/p} \\
 &\leq CC_0^\theta \left(\int_{t_0}^t \tau^{-(p-2)/p} \right)^{p/2(p-1)} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Isso mostra que a seminorma Lipschitz $\langle \mathbf{u}_{F,\omega} \rangle$ é localmente integrável em (t_0, ∞) .

A componente associada à pressão \mathbf{u}_P é mais simples e apresentamos os detalhes a seguir. Em primeiro lugar, pela definição de P e por (2.2.7) e (2.2.9) temos que

$$\begin{aligned}
 \|P - \tilde{P}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C(\|\rho - \tilde{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|e - \tilde{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}) \\
 &\leq CC_0^\theta(1 + \sigma(t)^{-q})
 \end{aligned}$$

e assim para cada $t > 0$, $P - \tilde{P}(\cdot, t) \in L^\infty$. Por outro lado, escolhendo $p \in (\frac{2}{1+l}, 2)$, onde l é como na definição de φ em (1.2.8), e usando (2.1.3) e o fato de ser $P - \tilde{P} = (\gamma - 1)(\rho(e - \tilde{e}) + \tilde{e}(\rho - \tilde{\rho}))$, temos que

$$\begin{aligned}
 \int |P - \tilde{P}|^p d\mathbf{x} &= \int (|P - \tilde{P}|^2 \varphi)^{p/2} \varphi^{-p/2} d\mathbf{x} \\
 &\leq CC_0^{p\theta/2} \left(\int \varphi^{-p/(2-p)} \right)^{(2-p)/2} \\
 &= CC_0^{p\theta/2} \left(\int \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^{p/(2-p)}} \right)^{(2-p)/2} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

de modo que pelo Lema 1.3.9, $\mathbf{u}_P = \nabla \Gamma * P \in LL$, e pelas desigualdades acima, temos que $\|\mathbf{u}_P\|_{LL}$ é localmente integrável no tempo.

Finalmente, com todas as estimativas acima, obtemos, $\|\mathbf{u}\|_{LL} \leq \langle \mathbf{u}_{F,\omega} \rangle + \|\mathbf{u}_P\|_{LL}$ é localmente integrável no tempo, e, portanto, pela desigualdade de Osgood, $X_1(t, \mathbf{x}_0; t_0) = X_2(t, \mathbf{x}_0; t_0)$ para todo $t > t_0$ como queríamos demonstrar. \square

3.2 Estrutura lagrangiana

Começamos esta seção enunciando o nosso principal resultado, i.e., a existência e unicidade de trajetórias, e mais algumas propriedades, do campo de velocidade \mathbf{u} dado no Teorema 2.1.1, solução do sistema (1.2.1)-(1.2.3) com dados iniciais (1.2.7). Este resultado, como já mencionamos antes, é o que justifica o termo "estrutura lagrangiana". Precisamente, o resultado é o seguinte, similar ao caso barotrópico:

Teorema 3.2.1. Admitamos as hipóteses do Teorema 2.1.1, com a velocidade inicial \mathbf{u}_0 em H^s , para algum $s > 0$, e suponhamos que $\sqrt{\rho}e$ seja uma função em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Então:

1. Para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ existe uma única curva $X(\cdot, \mathbf{x}_0) \in C([0, \infty); \mathbb{R}^2) \cap C^1((0, \infty); \mathbb{R}^2)$ tal que

$$X(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{x}_0), \tau) d\tau. \quad (3.2.1)$$

2. Para cada $t > 0$, a aplicação $\mathbf{x} \mapsto X(t, \mathbf{x})$ é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 .
3. Para cada $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\Psi(X(t_1, \mathbf{x})) \mapsto X(t_2, \mathbf{x})$ é Hölder contínua.
4. Se \mathcal{C} é uma curva de classe C^α , $\alpha \in [0, 1)$, então para $t > 0$, $\mathcal{C}^t = X(t, \mathcal{C})$ é uma curva de classe $C^{\alpha e^{-Lt}}$, onde L é uma constante que depende de ρ e s .

Como foi mencionado na Introdução, a demonstração está baseada no fato de que as soluções aproximadas satisfazem as estimativas do Teorema 2.1.1, independentemente do parâmetro de aproximação.

De forma semelhante ao feito com \mathbf{u} , temos a decomposição $\mathbf{u}^\delta = \mathbf{u}_P^\delta + \mathbf{u}_{F,\omega}^\delta$ para as soluções aproximadas, e adotaremos a notação $\mathbf{u}_P^\delta = \mathbf{u}_{P\delta}^\delta$ para simplificar a redação.

Demonstração do Teorema 3.2.1. Consideremos as curvas integrais para os campos aproximados \mathbf{u}^δ começando em \mathbf{x}_0 ,

$$X^\delta(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{u}^\delta(X^\delta(\tau, \mathbf{x}_0), \tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Fixemos $T < 1$, a aplicação $X^\delta(\cdot, \mathbf{x}_0)$ é Hölder contínua em $[0, T]$ uniformemente em δ . Para ver isto, observamos que pela desigualdade (1.3.2),

$$\begin{aligned} |X^\delta(t_1, \mathbf{x}_0) - X^\delta(t_2, \mathbf{x}_0)| &\leq \int_{t_2}^{t_1} \|\mathbf{u}^\delta(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\leq C \int_{t_2}^{t_1} \|\mathbf{u}^\delta(\cdot, \tau)\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}^\delta(\cdot, \tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau, \end{aligned}$$

e podemos estimar as normas L^2 e L^p aqui presentes. Quanto à primeira, usando as desigualdades de Hölder e Cauchy, junto com (2.1.3) e (1.3.3), temos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho} \|\mathbf{u}^\delta\|_{L^2}^2 &= \tilde{\rho} \int |\mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x} \\
 &= \int \rho^\delta |\mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x} + \int (\tilde{\rho} - \rho^\delta) |\mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x} \\
 &\leq \|\rho^\delta \mathbf{u}^\delta\|_{L^2}^2 + \|\rho - \tilde{\rho}\|_{L^2} \|\mathbf{u}^\delta\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^2 \\
 &\leq CC_0^\theta + CC_0^{\theta/2} \|\mathbf{u}^\delta\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^\delta\|_{L^2} \\
 &\leq CC_0^\theta + CC_0^{\theta/2} (1 + \|\nabla \mathbf{u}^\delta\|_{L^2}^2) + \frac{\tilde{\rho}}{2} \|\mathbf{u}^\delta\|_{L^2}^2,
 \end{aligned}$$

obtemos que

$$\|\mathbf{u}^\delta(\cdot, t)\|_{L^2} \leq CC_0^\theta (1 + \|\nabla \mathbf{u}^\delta(\cdot, t)\|_{L^2}). \quad (3.2.3)$$

Integrando (3.2.3) e usando (2.1.3)

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}^\delta\|_{L^2} d\tau &\leq CC_0^\theta \int_{t_1}^{t_2} (1 + \|\nabla \mathbf{u}^\delta\|_{L^2}) d\tau \\
 &\leq CC_0^\theta [(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^{1/2}].
 \end{aligned}$$

Quanto à norma em L^p , é importante lembrar que $\Delta \mathbf{u}^\delta = C(\nabla F^\delta + \nabla \omega^\delta + \nabla P^\delta)$, onde F^δ , ω^δ e P^δ são definidas como F , ω e P , respectivamente, com \mathbf{u}^δ no lugar de \mathbf{u} , justamente como no parágrafo antes do Teorema 2.3.3. De (1.3.8),

$$\|\nabla \mathbf{u}^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|F^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|P^\delta - \tilde{P}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

As estimativas para F e ω são similares, assim que mostramos somente as estimativas para F . Da equação do momento deduzimos que

$$\Delta F^\delta = \operatorname{div} (\rho^\delta \dot{\mathbf{u}}^\delta)$$

de modo que, para $1 < q < \infty$,

$$\|\nabla F^\delta\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|\rho^\delta \dot{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$$

assim, por (1.3.3) e a definição de F^δ

$$\begin{aligned}
 \|F^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\leq \|F^\delta\|_{L^2}^{1-\eta} \|\nabla F^\delta\|_{L^2}^\eta \\
 &\leq C \left(\|P^\delta - \tilde{P}\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}^\delta\|_{L^2} \right)^{1-\eta} \|\rho^\delta \dot{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2}^\eta
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 \|\nabla \mathbf{u}^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\leq \|F^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|P^\delta - \tilde{P}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq CC_0^\theta \left(1 + \int |\nabla \mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{(1-\eta)/2} \left(\int \rho^\delta |\dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{\eta/2} \\
 &\quad + C\|\rho^\delta - \tilde{\rho}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + C\|e^\delta - \tilde{e}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq CC_0^\theta \left(1 + \int |\nabla \mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{(1-\eta)/2} \left(\int \rho^\delta |\dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{\eta/2} \\
 &\quad + C\|\rho^\delta - \tilde{\rho}\|_{L^2} + C\|e^\delta - \tilde{e}\|_{L^2}^{1-\eta} \|\nabla e^\delta\|_{L^2}^\eta \\
 &\leq CC_0^\theta \left(1 + \int |\nabla \mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{(1-\eta)/2} \left(\int \rho^\delta |\dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{\eta/2} \\
 &\quad + CC_0^\theta (1 + \|\nabla e^\delta\|_{L^2}^\eta).
 \end{aligned}$$

onde $\eta = 1 - \frac{2}{p}$, como em (1.3.3). Integrando e usando a desigualdade de Hölder, (2.1.3) e (2.1.8) obtemos então que

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \mathbf{u}^\delta(\cdot, \tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau &\leq CC_0^\theta \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \int |\nabla \mathbf{u}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{(1-\eta)/2} \left(\int \rho^\delta |\dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\mathbf{x}\right)^{\eta/2} d\tau \\
 &\quad + CC_0^\theta \int_{t_1}^{t_2} (1 + \|\nabla e^\delta\|_{L^2}^\eta) \\
 &\leq CC_0^\theta [(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^\gamma]
 \end{aligned}$$

onde γ é uma constante positiva independente de δ . Em particular, temos a desigualdade

$$\int_0^T \|\mathbf{u}^\delta(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} d\tau \leq CC_0^\theta (T + T^\gamma).$$

Isto mostra que $X^\delta(\mathbf{x}_0, \cdot)$ é Hölder contínua em $[0, T]$, uniformemente em δ e equilimitada (com respeito a δ), o que garante a existência de uma seqüência $X^n(\mathbf{x}_0, t) = X^{\delta_n}(\mathbf{x}_0, \cdot)$ e uma aplicação Hölder contínua $X(\mathbf{x}_0, \cdot)$ tal que $X^n(\mathbf{x}_0, t) \rightarrow X(\mathbf{x}_0, t)$ quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente em $[0, T]$. A convergência uniforme da \mathbf{u}^n sobre compactos dada no Teorema 2.3.3 e a desigualdade acima garantem a convergência de $\mathbf{u}^n(X^n(\cdot, \mathbf{x}_0))$ para $\mathbf{u}(X(\cdot, \mathbf{x}_0))$ uniformemente em $[0, T]$. Com isto e a convergência uniforme de X^n , e calculando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (3.2.2) obtemos (3.2.1). \square

Para demonstrar a unicidade, sejam $X_1(\mathbf{y}_1, \cdot)$ e $X_2(\mathbf{y}_2, \cdot)$ duas curvas integrais começando em \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 respetivamente. Definimos a função

$$g(t) := \frac{|\mathbf{u}(X_2(t, \mathbf{y}_2), t) - \mathbf{u}(X_1(t, \mathbf{y}_1), t)|}{\mu(|X_2(t, \mathbf{y}_2) - X_1(t, \mathbf{y}_1)|)},$$

onde μ é a função definida em (1.2.14). Primeiro provaremos o seguinte lema:

Lema 3.2.2. Existe uma constante C tal que

$$\int_0^t g(\tau) d\tau \leq C, \quad t \leq 1.$$

Demonstração. Pelo Lema de Fatou basta provar o Teorema para g^δ , que é definida como g mas com \mathbf{u}^δ no lugar de \mathbf{u} e com as curvas integrais X_1^δ e X_2^δ associadas.

Começamos lembrando a decomposição $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{F,\omega} + \mathbf{u}_P$, onde $\mathbf{u}_{F,\omega} = \nabla\Gamma * (F + \omega)$ e $\mathbf{u}_P = \nabla\Gamma * (P - \tilde{P})$, e observando que $g^\delta(t) \leq \langle \mathbf{u}_P^\delta \rangle_{LL} + \langle \mathbf{u}_{F,\omega}^\delta \rangle$.

Para $t \in (0, 1]$ temos por (2.1.3) e (2.2.9) que $P(\cdot, t) - \tilde{P} \in L^p \cap L^\infty$ para $2/(1+l) \leq p \leq 2$, e assim $\mathbf{u}_P \in LL$. Além disso, por (2.2.12)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle \mathbf{u}_P^\delta \rangle_{LL} d\tau &\leq C \int_0^1 \|P^\delta - \tilde{P}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|P^\delta - \tilde{P}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Quanto à parte correspondente ao fluxo efetivo viscoso, vamos mostrar que é lipstchitziana. Denotamos por $\langle \cdot \rangle$ a seminorma de Lipstchiz. Pelo fato de ser $\langle f \rangle \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ ([8], pág 279) válida para funções suaves, pela imersão $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ válida para $p > 2$, e as estimativas elípticas aplicadas à equação $\Delta F^\delta = \operatorname{div}(\rho^\delta \dot{\mathbf{u}}^\delta)$ e $\Delta \omega^\delta = \operatorname{rot}(\rho \dot{\mathbf{u}}^\delta)$, e por (1.3.3), temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_{F,\omega}^\delta \rangle &\leq \|\nabla \mathbf{u}_{F,\omega}^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C(\|\mathbf{u}^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|D^2 \mathbf{u}_{F,\omega}^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}) \\ &\leq C(\|F^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla F^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla \omega^\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}) \\ &\leq C(\|\nabla \mathbf{u}^\delta\|_{L^2}^{1-\eta} + \|P^\delta - \tilde{P}\|_{L^2}^{1-\eta}) \|\rho^\delta \dot{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2}^\eta \\ &\quad + \|\rho^\delta \dot{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2}^{1-\eta} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2}^\eta \end{aligned}$$

onde $\eta = \frac{p-2}{p}$. Agora integramos, e é nesta parte que as estimativas (2.1.8) e (2.1.9) são relevantes. Demonstraremos a estimativa da última parcela. As outras são similares, usando argumentos análogos aos usados na demonstração correspondente no Teorema 3.1.1.

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\rho^\delta \dot{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2}^{1-\eta} \|\nabla \dot{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2}^\eta &\leq C \left(\int_0^t \tau^{-(1-s+\eta)} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int \tau^{1-s} \rho^\delta |\dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\tau \right)^{1-\eta} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \int \tau^{2-s} |\nabla \dot{\mathbf{u}}^\delta|^2 d\tau \right)^\eta \\ &\leq C(t) C_0^\theta. \end{aligned}$$

Resumindo

$$\begin{aligned} \int_0^t g(\tau) d\tau &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t g^\delta(\tau) d\tau \\ &\leq C(t). \end{aligned}$$

□

Unicidade de trajetórias: Voltando às curvas integrais X_1 e X_2 , por (3.2.1) temos que

$$|X_2(t, \mathbf{y}_2) - X_1(t, \mathbf{y}_1)| \leq |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1| + \int_0^t g(\tau) \mu(|X_2(t, \mathbf{y}_2) - X_1(t, \mathbf{y}_1)|) d\tau$$

assim pelo Lemma de Osgood 1.2.3 e pelo lema 3.2.2

$$|X_2(t, \mathbf{y}_2) - X_1(t, \mathbf{y}_1)| \leq \exp(1 - e^{-\int_0^t g d\tau}) |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^{\exp(-\int_0^t g d\tau)} \quad (3.2.5)$$

em particular, se $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$ então $X_1 = X_2$ obtendo a unicidade. □

Homeomorfismo. Para provar 2 no Teorema 3.2.1, consideraremos três etapas. Primeiro provaremos que para $t > 0$ fixo, a aplicação $X(t, \cdot) : \mathbf{x} \mapsto X(t, \mathbf{x})$ é injetora, depois que é sobrejetora e finalmente que é aberta.

i (Injetora): Para começar, supomos que $X(t, \mathbf{y}_1) = X(t, \mathbf{y}_2)$ para algum par de pontos \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 no plano. Para $t' \in (0, t)$ temos que

$$\begin{aligned} X(t', \mathbf{y}_1) - X(t', \mathbf{y}_2) &= X(t', \mathbf{y}_1) - X(t, \mathbf{y}_1) + X(t, \mathbf{y}_2) - X(t', \mathbf{y}_2) \\ &= \int_{t'}^t \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_2), \tau) - \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_1), \tau) d\tau, \end{aligned}$$

assim, como antes, temos

$$|X(t', \mathbf{y}_1) - X(t', \mathbf{y}_2)| \leq \int_{t'}^t g(\tau) \mu(X(\tau, \mathbf{y}_1) - X(\tau, \mathbf{y}_2)) d\tau$$

e por tanto, concluímos que $X(t', \mathbf{y}_1) = X(t', \mathbf{y}_2)$ para todo $0 < t' \leq t$. Usando a continuidade das aplicações $X(\cdot, \mathbf{y}_1)$ e $X(\cdot, \mathbf{y}_2)$ em $t = 0$ temos que $\mathbf{y}_1 = X(0, \mathbf{y}_1) = X(0, \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_2$.

ii (Sobrejetora): É consequência da unicidade das trajetórias. De fato, dado $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, existe uma curva $Y(s) = X(s; \mathbf{z}, t)$ com $Y(t) = \mathbf{y}$, $s \in [0, t]$. As curvas $Y(s)$ e $X(s, Y(0))$ satisfazem o problema

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} Z(s) &= \mathbf{u}(Z(s), s) \\ Z(0) &= Y(0) \end{cases}$$

de modo que $Y(s) = X(s, Y(0))$, em particular, $\mathbf{y} = X(t, Y(0))$.

iii (Aberta): Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto, o objetivo agora é ver que $X(t, A)$ é aberto. Fixemos $\mathbf{z}_1 = X(t, \mathbf{y}_1)$ com $\mathbf{y}_1 \in A$. Para qualquer $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$, existe uma curva $Y(s) = X(s; \mathbf{x}, t)$ definida para $s \in [0, t]$ e tal que $Y(t) = \mathbf{z}$. De fato, Y pode ser obtida como solução da equação

$$Y(s) = \mathbf{z} + \int_s^t \mathbf{u}(X(\tau; \mathbf{z}, t), \tau) d\tau = \mathbf{z} + \int_s^t \mathbf{u}(Y(\tau), \tau) d\tau \quad (3.2.6)$$

Como feito antes, pode ser visto que

$$\int_0^{t'} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} d\tau \leq CC_0^\theta t'^{\gamma_1}$$

e fixando $r > 0$ de modo que $B_r(\mathbf{y}_1) \subset A$, podemos escolher $t' \leq [(r - r_1)/(2CC_0^\theta)]^{1/\gamma_1}$ com $0 < r_1 < r$ para obter

$$\int_0^{t'} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} d\tau \leq \frac{r - r_1}{2}. \quad (3.2.7)$$

Por outro lado, como

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau, \mathbf{y}_1) = \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_1), \tau); \quad X(t, \mathbf{y}_1) = \mathbf{z}_1$$

temos que

$$X(s, \mathbf{y}_1) = \mathbf{z}_1 - \int_s^t \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_1), \tau) d\tau \quad (3.2.8)$$

e assim subtraindo (3.2.6) de (3.2.8)

$$\begin{aligned} |X(s, \mathbf{y}_1) - Y(s)| &\leq |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}| + \int_s^t |\mathbf{u}(Y(\tau), \tau) - \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_1), \tau)| d\tau \\ &\leq |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}| + \int_s^t g(\tau) |\mu(Y(\tau) - X(\tau, \mathbf{y}_1))| d\tau \end{aligned}$$

e usando novamente o Lema de Osgood

$$|X(s, \mathbf{y}_1) - Y(s)| \leq \exp\left(1 - e^{-\int_s^t g(\tau) d\tau}\right) |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}| e^{\int_s^t g(\tau) d\tau}$$

para todo $s \in [t', t)$. Escolhemos $a \leq \left(r_1 \exp\left(1 - e^{-\int_{t'}^t g(\tau) d\tau}\right)\right)^{1/\gamma_t}$ onde γ_t é uma constante conveniente dependendo possivelmente de t , obtemos

$$|X(t', \mathbf{y}_1) - Y(t')| \leq r_1.$$

Com isto junto com (3.2.7) mostramos que

$$|\mathbf{y}_1 - Y(0)| \leq r$$

garantindo que $Y(0) \in B_r(\mathbf{y}_1)$ quando $\mathbf{z} \in B_a(\mathbf{z}_1)$. Finalmente, a unicidade das trajetórias garante que $\mathbf{z} = Y(t) = X(t, Y(0))$, de modo que $B_a(\mathbf{z}_1) \subset X(t, A)$, como queríamos demonstrar.

□

Hölder continuidade. A prova de 3 é de novo uma aplicação do Lema de Osgood. Sejam $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^2$ e consideremos a função

$$\tilde{g}(\tau) = \frac{|\mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_2), \tau) - \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_1), \tau)|}{\mu(|X(\tau, \mathbf{y}_2) - X(\tau, \mathbf{y}_1)|)}.$$

Como no Lema 3.2.2,

$$\int_0^t \tilde{g}(\tau) d\tau \leq Ct^\gamma.$$

Para $t \in [t_1, t_2]$ temos que

$$X(t, \mathbf{y}_2) - X(t, \mathbf{y}_1) = X(t_1, \mathbf{y}_2) - X(t_1, \mathbf{y}_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_2), \tau) - \mathbf{u}(X(\tau, \mathbf{y}_1), \tau) d\tau,$$

assim

$$|X(t, \mathbf{y}_2) - X(t, \mathbf{y}_1)| \leq |X(t_1, \mathbf{y}_2) - X(t_1, \mathbf{y}_1)| + \int_{t_1}^t \tilde{g}(\tau) \mu(|X(\tau, \mathbf{y}_2) - X(\tau, \mathbf{y}_1)|) d\tau$$

obtendo

$$\begin{aligned} |X(t, \mathbf{y}_2) - X(t, \mathbf{y}_1)| &\leq \exp\left(1 - e^{-\int_{t_1}^t \tilde{g}(\tau) d\tau}\right) |X(t_1, \mathbf{y}_2) - X(t_1, \mathbf{y}_1)| e^{-\int_{t_1}^t \tilde{g}(\tau) d\tau} \\ &\leq C(t) |X(t_1, \mathbf{y}_2) - X(t_1, \mathbf{y}_1)| e^{-Lt^\gamma}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Em particular para $t = t_2$ obtemos o resultado desejado. \square

Ação sobre curvas Hölder contínuas. Agora supomos que a curva \mathcal{C} é parametrizada por uma função Hölder contínua $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leq C|s_2 - s_1|^\alpha$$

Definindo $\psi_t(s) = X(t, \varphi(s))$, e usando (3.2.9) concluímos que

$$|\psi_t(s_2) - \psi_t(s_1)| \leq C(t) |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| e^{-Lt^\gamma} \leq C(t) |s_2 - s_1|^{\alpha e^{-Lt^\gamma}}$$

\square

Bibliografia

- [1] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press New York, 1975.
- [2] John D. Anderson. *Modern compressible flow with historical perspective, 3rd ed.* Mc Graw Hill, 2003.
- [3] George Keith Batchelor. *An introduction to fluids dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [4] Joran Bergh e Jorgen Lofstrom. *Interpolation spaces*. Springer, 1976.
- [5] Jean Yves Chemin. *Perfect incompressible fluids*. Oxford University Press, 1998.
- [6] Alexandre J. Chorin e Jerrold E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer, 1992.
- [7] Fernando Cobos. *Propiedades geométricas de los espacios de interpolación*. Imecc, Unicamp, 1989.
- [8] Lawrence Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [9] Eduard Feireisl. *Dynamics of viscous compressible fluids*. Oxford University Press, 2004.
- [10] Eduard Feireisl e Antonín Novotný. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*. Birkhäuser Verlag, 2009.
- [11] T. M. Flett. *Differential analysis: differentiation, differential equations and differential inequalities*. Cambridge University Press, 1980.
- [12] Gerald B. Folland. *Real analysis, modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 1984.
- [13] Giovanni Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*. Springer, 1994.
- [14] David Gilbarg e Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Reprint of the 1998, 2001.
- [15] David Hoff. “Compressible flow in a half-space with Navier boundary conditions”. Em: *J. Math. Fluid Mech.* 7 (2005), pp. 315–338.
- [16] David Hoff. “Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for a multidimensional flows of heat-conducting fluids”. Em: *Arch. Rational Mech. Anal* 139 (1997), pp. 303–354.

- [17] David Hoff. “Dynamics of singularity surfaces for compressible, viscous flows in two space dimensions”. Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 55 (2002), pp. 1365–1407.
- [18] David Hoff. “Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data”. Em: *Journal of Differential Equations* 120 (1995), pp. 215–254.
- [19] David Hoff e Marcelo M. Santos. “Lagrangian structure and propagation of singularities in multidimensional compressible flows”. Em: *Arch. Rational Mech. Anal* 188 (2008), pp. 509–543.
- [20] Xiangdi Huang, Jing Li e Zhouping Xin. “Global well-posedness of classical solutions with large oscillations and vacuum to the three-dimensional isentropic compressible Navier-Stokes equations”. Em: *Comm. Pure Appl. Math.* 65 (4) (2012), pp. 549–585.
- [21] Shuichi Kawashima. *System of a hyperbolic-parabolic composite type with applications to the equations of magnetohydrodynamics*. Tese doutoral, Kyoto University, 1983.
- [22] S. G. Krein, Ju. I. Petunin e E.M. Semenov. *Interpolation of linear operators*. American Mathematical Society, 1982.
- [23] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley e sons, 1978.
- [24] Olga Aleksandrovna Ladyzenskaja. *Equations aux derivees partielles de type elliptique*. Dunod, 1968.
- [25] Olga Aleksandrovna Ladyzenskaja. *The mathematical theory of viscous incompressible flow, mathematics and its applications*. Gordon e Breach, 1969.
- [26] Richard E. Mayer. *Introduction to mathematical fluid dynamics*. Wiley-Interscience, 1971.
- [27] L. Nirenberg. “On elliptic partial differential equations”. Em: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* 13 (1959), pp. 115–162.
- [28] Reinhard Racke. *Lectures on nonlinear evolution equations*. Vieweg Verlag, 1992.
- [29] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1970.
- [30] Elias M. Stein e G. Weiss. “Interpolation of operators with change of measures”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 87 (1958), pp. 159–172.
- [31] Hans Triebel. *Theory of function spaces II*. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [32] Ting Zhang e Daoyuan Fang. “Compressible flows with a density-dependent viscosity coefficient”. Em: *Siam Journal of Mathematical Analysis* 41 (2010), pp. 2453–2488.
- [33] Songmu Zheng. *Nonlinear evolution equations*. Chapman & Hall CRC, 2004.
- [34] William P. Ziemer. *Weakly differential equations*. Springer-Verlag, 1989.