



MARIANA GESUALDI VILLOPOUCA

A Teoria do Índice de Conley Discreta para Conjuntos
Básicos Zero-Dimensionais

Campinas
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Mariana Gesualdi Villapouca

**A Teoria do Índice de Conley Discreta para Conjuntos
Básicos Zero-Dimensionais**

Orientadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de doutora em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da tese
defendida pela aluna Mariana Gesualdi Villapouca,
e orientada pela Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Assinatura da Orientadora

Ketty Abaroa de Rezende

Campinas

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

V712t Villapouca, Mariana Gesualdi, 1984-
A teoria do índice de Conley discreta para conjuntos básicos zero-dimensionais / Mariana Gesualdi Villapouca. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Ketty Abaroa de Rezende.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria do índice de Conley. 2. Matriz de conexão. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Teoria de homologia. 5. Difeomorfismos. I. Rezende, Ketty Abaroa de, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Discrete Conley's index theory for zero-dimensional basic sets

Palavras-chave em inglês:

Conley index theory

Connection matrix

Dynamical systems

Homology theory

Diffeomorphisms

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Ketty Abaroa de Rezende [Orientador]

Marco Antonio Teixeira

Oziride Manzoli Neto

Marcio Fuzeto Gameiro

Mariana Rodrigues da Silveira

Data de defesa: 07-06-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 07 de junho de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Ketty Abaroa de Rezende.

Prof(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE

[Signature]

Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA

[Signature]

Prof(a). Dr(a). GZIRIDE MANZOLI NETO

[Signature]

Prof(a). Dr(a). MARCIO FUZETO GAMEIRO

[Signature]

Prof(a). Dr(a). MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA

Dedico este trabalho aos meus pais Adriana e Carlos que me colocaram sobre os seus ombros de gigantes para que eu pudesse ver mais longe.
Ao meu amor Rafael por ter segurado a minha mão e enfrentado este desafio comigo, saiba que este doutorado também é seu.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."
(Nikolay Lobachevsky)

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante esta longa caminhada.

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, aos meus amados pais Adriana e Carlos Henrique que me fizeram ser quem eu sou e que me apoiaram, ampararam e instruíram em todos os momentos de minha vida, sem vocês eu não sou nada.

Às minhas adoradas irmãs Georgia, Julia e Gabriela eu agradeço o carinho e a compreensão de vocês. Especialmente, a Georgia pelos seus ouvidos e seu apoio, a Julia pela sua confiança e atenção e a Gabriela pela generosidade e afeto. Amo vocês demais.

Aos meus amigos, os de longe e os de perto, os do Rio de Janeiro e os de Campinas, a todos vocês o meu muito obrigada por fazerem parte da minha vida. Adoro todos vocês. Em especial, a Lilia, ao Eduardo (Dudu), ao Felipe (Popoto), a Juliana, ao Gustavo, ao Paulo Henrique (Ph), ao Igor, ao Matheus, ao Jamil, a Roberta, ao Luciano e à todos os outros que estiveram presentes e me apoiaram.

Um agradecimento, mais que especial, aos meus "irmãozinhos" de orientação, Dahisy, Ewerton e Mariana, que me aturaram durante todo esse processo do Doutorado.

Ao meu amado noivo Rafael, meu muito obrigada pela paciência, pelo incentivo, pela força, pelo carinho e principalmente por segurar em minhas mãos e percorrer este caminho junto comigo, nunca me deixando desistir. Sei que este caminho não foi fácil e que a distância foi um verdadeiro desafio. Esta vitória é muito mais sua do que minha. Te amo mais sempre!!!

Aos Professores e funcionários da Unicamp que me ajudaram e auxiliaram, meu muito obrigada. Em especial, a minha orientadora Professora Doutora Ketty Abaroa de Rezende pela paciência, pela confiança, pelos ensinamentos e por acreditar no nosso trabalho.

Às professoras Doutoradas Gioia Vago e Olga Pochinka pelo tempo e os ensinamentos.

À Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro durante os meus estudos.

À todos, muito obrigada.

Resumo

Este trabalho tem como foco o estudo do índice de Conley discreto e do par de matrizes de conexão para difeomorfismos fitted Smale em variedades compactas. Foi estabelecido um teorema que apresenta o cálculo do índice de Conley de conjuntos básicos zero-dimensionais usando a informação dinâmica contida nas matrizes de estrutura associadas. A classificação do índice de Conley homológico reduzido de conjuntos básicos zero-dimensionais, utilizando a sua forma de Jordan real foi apresentada. Estabelecemos uma caracterização de pares de matrizes de conexão para decomposições de Morse em conjuntos básicos zero-dimensionais para uma classe de difeomorfismos fitted Smale.

Palavras-chave: Teoria do índice de Conley, Matriz de conexão, Sistemas dinâmicos, Teoria de homologia e Difeomorfismos.

Abstract

Our focus in this thesis was on the further development of the discrete Conley index theory with the aim of addressing questions on the pair of connection matrices for fitted Smale diffeomorphisms on compact manifolds. A theorem was established where the computation of the discrete Conley index for zero dimensional basic sets was given with respect to the dynamical information contained in the associated structure matrices. A classification of the reduced homology Conley index of a zero dimensional basic set in terms of its Jordan real form is presented. A characterization of a pair of connection matrices for a Morse decomposition of zero dimensional basic sets of a class of fitted Smale diffeomorphisms is established.

Keywords: Conley index theory, Connection matrix, Dynamical systems, Homology theory and Diffeomorphisms.

Conteúdo

Resumo	xiii
Introdução	xix
1 Difeomorfismos Smale	1
1.1 Conceitos da dinâmica de difeomorfismos	1
1.2 Difeomorfismos Smale	4
1.2.1 Difeomorfismos fitted	5
1.2.2 Matriz de estrutura	6
1.2.3 Difeomorfismos Morse-Smale	7
1.2.4 Exemplos	8
2 Índice de Conley discreto	13
2.1 Conjunto invariante isolado e vizinhança isolante	13
2.2 O índice de Conley na versão de Franks-Richeson	15
2.2.1 Par-filtração	16
2.2.2 Existência de bloco isolante e par-filtração	19
2.2.3 Aplicação espaço pontuado associada ao par-filtração	21
2.2.4 O índice de Conley	21
2.2.5 O índice de Conley cohomológico reduzido	23
2.3 O índice de Conley na versão de Mrozek	28
2.3.1 Preliminares	28
2.3.2 Par-índice	29
2.3.3 Aplicação-índice	32
2.3.4 Redução de Leray	33
2.3.5 O índice de Conley cohomológico	34
2.4 A relação entre as duas abordagens do índice de Conley	38
2.4.1 Par-filtração e par-índice	38
2.4.2 Índices de Conley	47

3	O índice de Conley para conjuntos básicos zero-dimensionais	51
3.1	O índice de Conley e a matriz de estrutura para difeomorfismos Smale	51
3.1.1	O índice de Conley e a forma de Jordan real da matriz de estrutura	58
3.2	O índice de Conley, a função Zeta e as desigualdades de Morse	66
3.2.1	Função Zeta	67
3.2.2	Desigualdades de Morse	72
4	Par de matrizes de conexão	75
4.1	Introdução a teoria de par de matrizes de conexão	75
4.1.1	Decomposição em par atrator-repulsor	75
4.1.2	Decomposição de Morse	77
4.1.3	Filtração de conjuntos de Morse	78
4.1.4	O par de matrizes de conexão para decomposição em par atrator-repulsor	79
4.1.5	O par de matrizes de conexão para decomposição de Morse	86
4.1.6	Exemplos	91
4.2	Par de matrizes de conexão para a decomposição de Morse em conjuntos básicos zero-dimensionais	101
4.2.1	O par de matrizes de conexão de uma aplicação tempo-um de um fluxo	109
4.2.2	O par de matrizes de conexão para difeomorfismos Smale	112
4.2.3	Continuação do par de matrizes de conexão	119
	Conclusão	123
	Apêndice	127

Introdução

A teoria do índice de Conley engloba várias ferramentas homológicas que estabelecem, tanto no caso de sistemas dinâmicos contínuos quanto no caso discreto, invariantes homotópicos que detectam propriedades dos conjuntos invariantes isolados e de suas órbitas conectantes [5], [24], [16] e [28].

Neste trabalho apresentaremos duas variações do índice de Conley para sistemas dinâmicos discretos: a versão de Franks-Richeson [7] e a versão de Mrozek [16]. Na literatura não está clara a relação entre estas duas abordagens, uma vez que as definições de par-filtração e par-índice não são equivalentes. Nesta tese fazemos um estudo destas diferenças e provamos no Teorema 2.13, a existência de um par de compactos e uma vizinhança que satisfazem as definições de par-filtração e de par-índice para um caso especial.

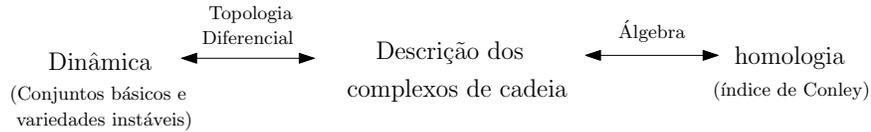
Uma das ferramentas de grande destaque advinda do índice de Conley é a matriz de conexão. Franzosa em [8],[9] e [10] desenvolveu a teoria de matriz de conexão para decomposições de Morse para fluxos. Esta teoria tem se mostrado muito útil para detectar a existência de conexões entre conjuntos de Morse. Mais tarde, simultaneamente, Bartiromiejczyk e Dzedzej em [1] e Richeson em [22] e [23], generalizaram, seguindo as ideias de Franzosa, esta teoria para sistemas dinâmicos discretos. Na generalização apresentada em [1], sua matriz de conexão Δ usa apenas a informação do espaço CH^* contida no índice de Conley discreto $Con^* = (CH^*, \chi^*)$, sem fazer uso do isomorfismo χ^* . Já na generalização apresentada em [22] e [23], a matriz de conexão é constituída de um par de matrizes de conexão (Δ, a) , onde Δ usa a informação do espaço CH^* como feito em [1], e a matriz de conexão a usa a informação do isomorfismo χ^* do índice de Conley discreto $Con^* = (CH^*, \chi^*)$. Desta maneira, a matriz de conexão em [1] só é capaz de detectar a existência de conexões de grau 1, enquanto que com o par de matrizes de conexão em [22] e [23] é possível detectar a existência de conexões de grau 1 e 0, sendo assim, dinamicamente mais rico.

Portanto, nesta tese trabalharemos com o par de matrizes de conexão (Δ, a) . Como o índice de Conley, a grande importância dinâmica do par de matrizes de conexão reside na propriedade de continuação, que lhe confere um caráter robusto, isto é, invariância por C^0 perturbações do sistema.

Neste trabalho queremos explorar propriedades do índice de Conley discreto e do par de matrizes de conexão para o caso particular de difeomorfismos fitted Smale, pois, por

um resultado de Shub e Sullivan em [27], estes difeomorfismos são densos no conjunto dos difeomorfismos em variedades compactas com a C^0 -topologia. Assim, nos interessa provar uma caracterização dos pares de matrizes de conexão para difeomorfismos fitted Smale em variedades compactas.

O espírito de investigação que adotamos nesta tese segue da abordagem descrita por Franks em [6] no seguinte diagrama ao qual acrescentamos a ferramenta principal utilizada neste trabalho, a teoria do índice de Conley.



Para isto, utilizaremos o índice de Conley discreto para conjuntos básicos zero-dimensionais, isto é, buscaremos relações entre a dinâmica e o índice de Conley. O comportamento das variedades instáveis serão codificadas no par de matrizes de conexão.

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados e definições sobre o comportamento de difeomorfismos com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e de difeomorfismos Smale. No Capítulo 2 definimos duas versões do índice de Conley discreto: a versão de Franks-Richeson em [7] e a versão do Mrozek em [16]. Na Seção 2.4, apresentamos exemplos onde as definições de par-filtração e de par-índice diferem. No Teorema 2.13 provamos a existência de uma classe de par de compacto que satisfaz estas definições.

No Capítulo 3 provamos no Teorema 3.1 uma relação entre o isomorfismo $\chi_u(\Omega)$ do índice de Conley homológico discreto e a matriz de estrutura do conjunto básico zero dimensional Ω de índice u e no Teorema 3.2 uma caracterização deste isomorfismo pela forma de Jordan. Na Seção 3.2, demonstramos resultados que caracterizam a função Zeta e as desigualdades de Morse via índice de Conley.

No Capítulo 4, aprofundamos o estudo da teoria de par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse em conjuntos básicos. Na Seção 4.2, apresentamos o par de matrizes de conexão (Δ, a) para difeomorfismos, e provamos no teorema 4.4, que sob certas condições, Δ e a assumem um caráter complementar. No Teorema 4.6 e na Proposição 4.8, fazemos um paralelo com a teoria de matriz de conexão para fluxos, destacando as suas limitações na detecção de conexões e as vantagens de se utilizar a teoria de par de matrizes de conexão no caso discreto. Posteriormente, provamos o Teorema 4.7 que caracteriza o par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse em conjuntos básicos zero-dimensionais e trabalhamos sob a hipótese de que os índices de Conley homológico e cohomológico coincidem nestes conjuntos. Verificamos que esta condição é satisfeita para os conjuntos básicos de difeomorfismos Morse-Smale. E no caso de difeomorfismos fitted com respeito aos conjuntos de alças $\bigcup_k H(k)$ é válido para conjuntos da forma $\Lambda(k) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k))$.

Capítulo 1

Difeomorfismos Smale

Apresentamos neste capítulo as definições e resultados sobre difeomorfismos Smale necessários para o estudo que desenvolvemos nos capítulos subsequentes. Nossa principal referência é [6].

1.1 Conceitos da dinâmica de difeomorfismos

Nesta seção expomos alguns resultados e definições sobre o comportamento dinâmico de difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ em uma variedade compacta M com métrica.

Definição 1.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Um ponto $x \in M$ é dito **recorrente por cadeia** se para todo $\varepsilon > 0$ existem pontos $x_1 = x, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ (com $n = n(\varepsilon)$) tais que:*

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon, \quad \forall 1 \leq i < n$$

onde $d(\cdot, \cdot)$ é uma métrica em M .

E, denominamos **conjunto recorrente por cadeia**, $\mathcal{R}(f)$, o conjunto formado por todos os pontos recorrentes por cadeia de f .

Observação 1.1. *O conjunto $\mathcal{R}(f)$ é f -invariante e compacto.*

Definição 1.2. *Dois difeomorfismos $f, g : M \rightarrow M$ são ditos **topologicamente conjugados** se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.*

O conceito de hiperbolicidade será importante no desenvolvimento subsequente dos resultados que apresentamos nesta tese. Mais especificamente, quando o conjunto recorrente por cadeia é hiperbólico, temos que este admite uma decomposição em conjuntos básicos como vemos no Teorema 1.1 da decomposição espectral.

Definição 1.3. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Um conjunto compacto f -invariante Λ possui uma **estrutura hiperbólica** se o espaço tangente de M restrito a Λ , pode ser escrito como uma soma direta $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$ de subespaços Df -invariantes e, se existem constantes $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que*

$$\|Df^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|, \forall v \in E^s, n \geq 0$$

e

$$\|Df^n(v)\| \geq C^{-1}\lambda^{-n}\|v\|, \forall v \in E^u, n \geq 0$$

Teorema 1.1 (Teorema da decomposição espectral, [25]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo tal que o seu conjunto recorrente por cadeia $\mathcal{R}(f)$ possui uma estrutura hiperbólica. Então $\mathcal{R}(f)$ é igual a união de conjuntos compactos f -invariantes $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, onde cada conjunto Ω_i contém uma órbita do sistema a qual é densa em Ω_i .*

Definição 1.4. *Os conjuntos Ω_i 's dados pelo Teorema 1.1 são chamados **conjuntos básicos** de f . E a dimensão da fibra de $E_{\Omega_i}^u$ é chamado de **índice** de Ω_i e será denotada por $u(i)$.*

Uma ferramenta de grande utilidade para analisar o comportamento de um difeomorfismo são os conceitos de variedades estável e instável.

Definição 1.5. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. A **variedade estável** de um ponto $p \in M$ é definido como,*

$$W^s(p) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0\}$$

e a **variedade instável** do ponto p como,

$$W^u(p) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) = 0\}.$$

Definição 1.6. *Um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico satisfaz a **condição de transversalidade** se, para todo $x, y \in \mathcal{R}$, $W^s(x)$ intercepta $W^u(y)$ transversalmente.*

O conceito de alças é bastante útil para construção de exemplos e é a base da definição de difeomorfismos fitted que constituem uma classe especial de difeomorfismos Smale.

Sejam M uma n -variedade e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Uma **k -alça** $h_i(k) = h_i$ em M é uma cópia de $D_i^k \times D_i^{n-k}$ mergulhada em M onde D_i^k e D_i^{n-k} são, respectivamente, o k -disco e o $(n - k)$ -disco unitários. Denotamos um conjunto finito de k -alças disjuntas por $H(k) = \bigcup_i h_i(k)$.

Denotamos por $W_i^u(x)$ o k -disco $D_i^k \times p$ em h_i tal que $x \in D_i \times p \subset h_i$. Analogamente, como também $x \in q \times D_i^{n-k} \subset h_i$, denotamos por $W_i^s(x)$ o $(n-k)$ -disco $q \times D_i^{n-k}$.

Definição 1.7. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é **hiperbólico** com respeito ao conjunto de alças H se

- (a) $x \in h_i, f(x) \in h_j$, então $\text{int}(f(W_i^u(x))) \supset W_j^u(f(x))$ e $f(W_i^s(x)) \subset \text{int}(W_j^s(f(x)))$,
- (b) $x \in h_i, f(x) \in H$ e $v \in T_x(W_i^s(x)), w \in T_x(W_i^u(x))$, então

$$\|D(f(v))\| \leq \lambda \|v\| \quad \text{e} \quad \|D(f(w))\| \geq \lambda^{-1} \|w\|$$

para algum $\lambda \in (0, 1)$ e com $\|*\|$ a métrica usual no espaço $D_j^k \times D_j^{n-k}$.

A dinâmica de um conjunto básico zero dimensional pode ser associada a um subshift de tipo finito como veremos no Teorema 1.2. A seguir apresentamos algumas definições e resultados sobre subshift.

Definição 1.8. O **subshift de tipo finito** determinado por um conjunto finito S e uma relação \rightarrow é o homeomorfismo $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, onde $\Sigma \subset \Pi_{-\infty}^{\infty} S$ é definido como $\Sigma = \{s = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \mid s_i \rightarrow s_{i+1} \text{ para todo } i\}$ e $\sigma(s) = s'$ onde $s'_i = s_{i-1}$, logo σ é um shift à direita.

O shift de tipo finito σ determinado por S e \rightarrow será chamado de **shift de vértices associado à matriz** A quando enumeramos os elementos de S de 1 a n (onde n cardinalidade de S) e a matriz $A_{n \times n}$ é dada da seguinte maneira

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } s_i \rightarrow s_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Proposição 1.1 afirma que se a matriz associada ao subshift é irredutível, então o subshift possui uma órbita densa.

Definição 1.9. Uma matriz inteira não-negativa $A_{n \times n}$ é dita **irredutível** se para cada $1 \leq i, j \leq n$, existe um $k > 0$ tal que $(A^k)_{ij} \neq 0$.

Proposição 1.1 ([6]). Se $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um shift associado à matriz A , então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) A é irredutível.
- (b) O homeomorfismo σ tem uma órbita densa em Σ .

Se uma das afirmações é verdadeira, então os pontos periódicos de σ são densos em Σ .

Apresentamos no Teorema 1.2 um resultado de Bowen [3] que relaciona a dinâmica de um conjunto básico zero dimensional com um subshift de tipo finito.

Teorema 1.2 ([3]). *Se Ω é um conjunto básico zero dimensional de um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico, então $f|_{\Omega}$ é topologicamente conjugado a um subshift de tipo finito.*

Quando um difeomorfismo é hiperbólico com respeito ao conjunto de alças H , temos um análogo do Teorema 1.2 para o conjunto $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H)$, como vemos no Teorema 1.3 das alças hiperbólicas.

Definição 1.10. *A **matriz de interseção geométrica** G correspondente a f e ao conjunto de alças H é definida como*

$$G_{ij} = \text{número de componentes conexas de } h_i \cap f(h_j)$$

Uma alternativa para a Definição 1.10 é a seguinte: G_{ij} é o número de pontos de interseção de $W_i^s(y)$ com $f(W_j^u(x))$ para qualquer $x \in h_j$ e $y \in h_i$.

Teorema 1.3 (Alças hiperbólicas, [26]). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo o qual é hiperbólico com respeito ao conjunto de alças H e $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H)$, então f restrito a Λ é topologicamente conjugado ao subshift de tipo finito $\sigma(G) : \Sigma_G \rightarrow \Sigma_G$, onde G é a matriz de interseção geométrica correspondente a f e H .*

1.2 Difeomorfismos Smale

Nesta seção, vamos tratar de difeomorfismos Smale dando a devida atenção ao caso particular de difeomorfismos fitted. Em sequência, apresentamos a matriz de estrutura que é uma ferramenta muito útil e importante na descrição da dinâmica nos conjuntos básicos zero dimensionais de difeomorfismos com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico. E por último, descrevemos a dinâmica dos difeomorfismos Morse-Smale, que constituem a classe mais simples de difeomorfismos Smale.

Definição 1.11. *Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é chamado de **difeomorfismo Smale** se o conjunto recorrente por cadeia $\mathcal{R}(f)$ é hiperbólico e zero dimensional e f satisfaz a condição de transversalidade.*

1.2.1 Difeomorfismos fitted

Existe um modo de construir difeomorfismos Smale através de uma construção sistemática de maneira a podemos descrever os conjuntos básicos como subshifts de tipo finito usando o Teorema 1.3 das alças hiperbólicas.

Franks em [6] descreve esta construção feita em [27] por Shub e Sullivan da forma seguinte. Tome $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma **função de Morse auto-indexante** e g_t um fluxo do **tipo gradiente** com respeito a ϕ e coordenadas locais em torno de um ponto crítico p de índice k , então

$$h_i(k) = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid |\vec{x}|^2 \leq 2\varepsilon, |\vec{y}|^2 \leq \varepsilon\} = D_i^k \times D_i^{n-k}. \quad (1.1)$$

é uma k -alça em M .

Definição 1.12. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito **fitted** em relação aos conjuntos de alças $H(k) = \bigcup_i h_i(k)$ se

(a) Para cada k , o difeomorfismo é hiperbólico em relação ao conjunto de alças $H(k)$;

(b) Se $k < l$, $x \in h_i(l)$ e $y = f^n(x) \in h_j(k)$ para algum $n \geq 0$ então

$$f^n(W_i^u(x)) \supset W_j^u(y)$$

ou equivalentemente

$$f^{-n}(W_j^s(y)) \supset W_i^s(x)$$

(c) Se $M_{k-1} = \phi^{-1}((-\infty, k - \varepsilon])$ então $f(M_k) \subset \text{int}(M_{k-1} \cup H(k))$ para todo $k \geq 0$, onde ϕ é a função de Morse auto-indexante usada na Equação 1.1.

Em [6] é provado que os difeomorfismos fitted são difeomorfismos Smale.

Teorema 1.4 ([6]). Se f é um difeomorfismo fitted com respeito a $\{H(k)\}$, então f é um difeomorfismo Smale e nos conjuntos básicos de índice k , f é topologicamente conjugado ao shift $\sigma(G(k))$ restrito a este conjunto recorrente por cadeia, onde $G(k)$ é a matriz de interseção geométrica de f com respeito a $H(k)$.

Na demonstração deste Teorema 1.4 em [6], Franks prova que se $\Lambda(k) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k))$, então

$$\mathcal{R}(f) \subset \bigcup_k \Lambda(k). \quad (1.2)$$

e todos os conjuntos básicos de índice k de f estão contidos em $\Lambda(k)$.

Shub e Sullivan mostram, em [27], que se trabalhamos na classe de difeomorfismos de uma variedade compacta, então sempre existe um difeomorfismo fitted C^0 -próximo de um difeomorfismo nesta classe.

Teorema 1.5 ([27]). *Se $f_0 : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de uma variedade compacta, então f_0 é isotópico a um difeomorfismo fitted $f : M \rightarrow M$. Além disso, f pode ser escolhido arbitrariamente próximo a f_0 na C^0 topologia.*

1.2.2 Matriz de estrutura

Nesta subseção apresentamos a matriz de estrutura de um conjunto básico zero dimensional, ver [6], e exibimos no Teorema 1.6 um resultado interessante de Bowen e Franks [4] que associa um invariante homológico à dinâmica do conjunto básico zero dimensional.

Definição 1.13. *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e seus conjuntos básicos são $\{\Omega_i\}_{i=0}^n$, então uma **filtração associada a f** é uma coleção de subvariedades $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ tais que*

$$(a) \quad f(M_i) \subset \text{int}(M_i);$$

$$(b) \quad \Omega_i = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(M_i \setminus M_{i-1}).$$

A existência de uma filtração segue facilmente da existência de uma função de Lyapunov suave $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ para o difeomorfismo f , [6].

Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e Ω um conjunto básico zero dimensional de f . Como os fibrados $E^u(\Omega)$ e $E^s(\Omega)$ são orientáveis, podemos definir a seguinte função localmente constante

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } Df_x : E_x^u \rightarrow E_{f(x)}^u \text{ preserva orientação,} \\ -1 & \text{se } Df_x : E_x^u \rightarrow E_{f(x)}^u \text{ reverte orientação.} \end{cases}$$

Pela demonstração do Teorema 1.2 encontrada em [6], podemos escolher convenientemente uma matriz G e uma conjugação $h : \Sigma_G \rightarrow \Omega$ de $\sigma(G)$ e $f|_{\Omega}$, de modo que $\sigma(G)$ é um shift de vértices (isto é, G é uma matriz de zeros e uns e $i \rightarrow j \Leftrightarrow G_{ij} = 1$) e, Δ é constante em $h(C(k))$ para cada k , onde $C(k) = \{c \in \Sigma_G \mid c_0 = k\}$. Para cada k , definimos Δ_k como sendo o valor de $\Delta(x)$ em $h(C(k))$.

E assim, definimos a matriz de estrutura de um conjunto básico zero dimensional.

Definição 1.14. *Definimos a matriz A por $A_{jk} = \Delta_k G_{jk}$ e a chamamos de **matriz de estrutura** para o conjunto básico Ω .*

Observe, pelo Teorema 1.2, que para definir a matriz de estrutura precisamos apenas que o difeomorfismo f tenha $\mathcal{R}(f)$ hiperbólico e o conjunto básico seja zero dimensional. Agora, se estamos sob as hipótese do Teorema 1.3 das alças hiperbólicas e $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H)$ é um conjunto básico zero dimensional, então a matriz de estrutura de Λ é igual a matriz de interseção geométrica munida com um sinal, isto é, $A_{jk} = \Delta_k G_{jk}$ onde G é a matriz de interseção geométrica correspondente a f e H .

Apresentamos, a seguir, o Teorema 1.6 que associa a matriz de estrutura a um invariante homológico e para isto, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.15. *Sejam $h : V \rightarrow V$ e $h' : V' \rightarrow V'$ dois endomorfismos onde V e V' são espaços vetoriais.*

(a) *Definimos a **parte não-nilpotente** h^+ de h como sendo a aplicação induzida por h no espaço quociente $\frac{V}{V_0}$ onde $V_0 = \{v \in V \mid h^k(v) = 0 \text{ para algum } k > 0\}$. Alternativamente, h^+ é a restrição de h ao subespaço de V gerado pelos autoespaços generalizados de h correspondentes aos autovalores não-nulos.*

(b) *Dizemos que h e h' são **conjugados** se existe um isomorfismo $\Psi : V \rightarrow V'$ tal que $h' \circ \Psi = \Psi \circ h$.*

Teorema 1.6 ([4]). *Suponha que o difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ tem conjunto recorrente por cadeia hiperbólico, $\{M_j\}$ é uma filtração associada a f e, Ω_i é um conjunto básico zero-dimensional de índice u . Se A é uma matriz de estrutura $n \times n$ para Ω_i e F é um corpo, então*

(a) *A parte não nilpotente A^+ de $A : F^n \rightarrow F^n$ é conjugada à parte não nilpotente f_{*u}^+ de $f_{*u} : H_u(M_i, M_{i-1}; F) \rightarrow H_u(M_i, M_{i-1}; F)$, e*

(b) *A aplicação $f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; F) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; F)$ é nilpotente para todo $k \neq u$.*

1.2.3 Difeomorfismos Morse-Smale

Nesta subseção definimos e exibimos alguns resultados de difeomorfismos Morse-Smale. Os difeomorfismos Morse-Smale são um subconjunto da classe de difeomorfismos Smale, que têm conjunto recorrente por cadeia consistindo de um número finito de pontos periódicos hiperbólicos.

Definição 1.16. *Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é chamado de **difeomorfismo Morse-Smale** se o seu conjunto recorrente por cadeia $\mathcal{R}(f)$ é um conjunto finito de pontos periódicos hiperbólicos e f satisfaz a condição de transversalidade.*

A Proposição 1.2 afirma que se as matrizes de interseção geométrica de um difeomorfismo fitted são matrizes de permutação virtual, então este difeomorfismo é Morse-Smale. Assim, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.17. *Uma matriz é chamada **matriz de permutação virtual** se é da forma*

$$\begin{pmatrix} P_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & P_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_r \end{pmatrix}$$

onde cada P_i tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Proposição 1.2 ([6]). *Um difeomorfismo fitted $f : M \rightarrow M$ é Morse-Smale, se cada uma de suas matrizes de interseção geométrica $G(k)$ é uma matriz de permutação virtual.*

1.2.4 Exemplos

Exemplo 1.1 (Difeomorfismo Morse-Smale). Seja f um difeomorfismo em S^2 com um ponto fixo repulsor F , um ponto fixo do tipo sela S e uma órbita periódica atratora de período 2 $P = \{P_1, P_2\}$ indicado na Figura 1.1.

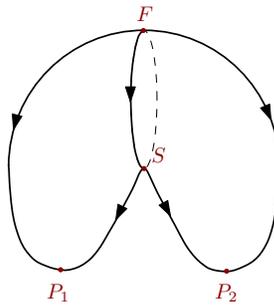


Figura 1.1: Difeomorfismo Morse-Smale na esfera S^2

Os conjuntos básicos de f são $\Lambda_0 = \{P_1, P_2\}$, $\Lambda_1 = \{S\}$ e $\Lambda_2 = \{F\}$, e os seus índices são 0, 1 e 2, respectivamente.

Tome uma filtração associada a f , $M_0 \subset M_1 \subset M_2 = S^2$, do seguinte modo

- M_0 é uma vizinhança compacta da órbita periódica atratora $\{P_1, P_2\}$ que não contém $\{F, S\}$,
- M_1 é uma vizinhança compacta da sela que contém M_0 e não contém o ponto fixo repulsor $\{F\}$,
- $M_2 = S^2$

como indicado na Figura 1.2.

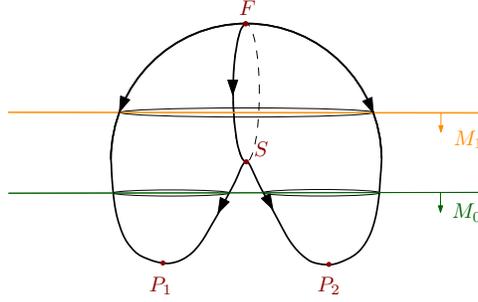


Figura 1.2: Filtração associada a f

Logo, $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_0}) = \{P_1, P_2\}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_1 \setminus M_0}) = \{S\}$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_2 \setminus M_1}) = \{F\}$.

Vejamos quem são os conjuntos de alças para cada índice $j = 0, 1, 2$ e suas respectivas matrizes de interseção geométrica.

- $H(0)$ é constituído de duas 0-alças $h_1 = D_1^0 \times D_1^2$ e $h_2 = D_2^0 \times D_2^2$ que contém P_1 e P_2 respectivamente. Logo, $G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $H(1)$ é constituído de uma 1-alça $D_1^1 \times D_1^1$ que contém S . Logo, $G_1 = (1)_{1 \times 1}$.
- $H(2)$ é constituído de uma 2-alça $D_1^2 \times D_1^0$ que contém F . Logo, $G_2 = (1)_{1 \times 1}$.

Como $\Lambda_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(i))$, para todo $i = 0, 1$ e 2 , temos, pelo Teorema 1.3 das alças hiperbólicas, que $f|_{\Lambda_i}$ é topologicamente conjugado ao $\sigma : \Sigma_{G_i} \rightarrow \Sigma_{G_i}$, para todo $i = 0, 1$ e 2 .

Note que neste exemplo as matrizes de estrutura são as próprias matrizes de interseção geométrica.

Temos que as matrizes de interseção geométrica

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = (1)_{1 \times 1}, \quad G_2 = (1)_{1 \times 1}$$

são matrizes de permutação virtual, e assim, pela Proposição 1.2, temos que f é um difeomorfismo Morse-Smale.

Exemplo 1.2 (Difeomorfismo Smale). O seguinte exemplo encontra-se em [6]. Considere o difeomorfismo $f : T^2 \rightarrow T^2$ ilustrado na Figura 1.3.

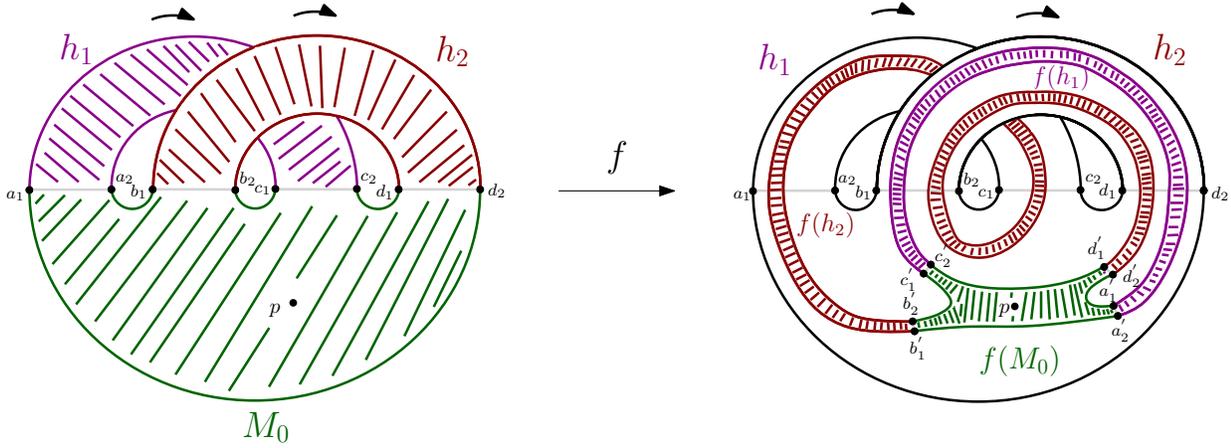


Figura 1.3: Difeomorfismo Smale no toro

O difeomorfismo f tem um ponto fixo atrator p , um ponto fixo repulsor ∞ que está no disco deletado D_∞ e é construído de maneira que as 2 faixas $H = h_1 \cup h_2$ formem um conjunto de alças hiperbólicas para f .

Temos que

$$\mathcal{R}(f) = \{p\} \cup \Lambda \cup \{\infty\}$$

são os conjuntos básicos de f , onde $\Lambda_0 = \{p\}$ é um conjunto básico de índice 0, $\Lambda_1 = \Lambda$ é um conjunto básico de índice 1 e $\Lambda_2 = \{\infty\}$ é um conjunto básico de índice 2, pois p é um ponto fixo atrator, Λ tem variedade instável de dimensão 1 e ∞ é um ponto fixo repulsor.

Tome uma filtração associada a f , $M_0 \subset M_1 \subset M_2 = T^2$, tal que M_0 está indicado na Figura 1.3 e $M_1 = M_0 \cup (h_1 \cup h_2)$. Assim, temos que

- $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_0}) = \{p\}$
- $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_1} \setminus M_0) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(h_1 \cup h_2) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H) = \Lambda$
- $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_2} \setminus M_1) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D_\infty) = \{\infty\}$

Vejamos quem são as j -alças para $j = 0, 1, 2$ e quem são as suas respectivas matrizes de interseção geométrica.

- Temos que $H(0)$ é constituído de apenas uma 0-alça $D_0^0 \times D_0^2$ que contém o ponto atrator p . Logo, $G_0 = (1)_{1 \times 1}$, pois a imagem pela f desta 0-alça intercepta ela mesma uma vez, pois f contrai o disco $D_0^0 \times D_0^2$.

Capítulo 2

Índice de Conley discreto

Nas três primeiras seções deste capítulo apresentamos as definições e propriedades do índice de Conley discreto. Vamos expor duas importantes abordagens do índice de Conley: a versão de Franks-Richeson [7] e a versão do Mrozek [16]. Existem outras abordagens como a apresentada por Robbin e Salamon [24] que usa a Teoria Shape e a apresentada por Szymczak [28] que usa a Teoria de Categorias. Franks e Richeson provaram em [7] que a sua versão é equivalente a versão do Szymczak [28]. Na última Seção 2.4 provamos no Teorema 2.13 a existência de um par de compactos e uma vizinhança que satisfazem as definições de par-índice e par-filtração, e assim podemos garantir a igualdade destas duas versões neste caso.

2.1 Conjunto invariante isolado e vizinhança isolante

Nesta seção, temos que U é um subconjunto aberto de um espaço métrico localmente compacto X e $f : U \rightarrow X$ é uma aplicação contínua.

Os índices de Conley discreto que vamos apresentar são definidos para um conjunto invariante isolado. Abaixo faremos as definições básicas para definirmos ambos os índices de Conley discreto.

Definição 2.1. *O subconjunto invariante maximal de N , $Inv(N)$ é o conjunto dos pontos $x \in N$ tal que existe uma órbita completa $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty} \subset N$ com $x_0 = x$ e $f(x_n) = x_{n+1}$ para todo n .*

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo dado por $f(x, y) = (2x, \frac{y}{2})$.

Para qualquer compacto N que contém o ponto fixo $(0, 0)$, o conjunto invariante maximal de N é $Inv(N) = \{(0, 0)\}$. Mas se N é um compacto que não contém a origem, então $Inv(N) = \emptyset$.

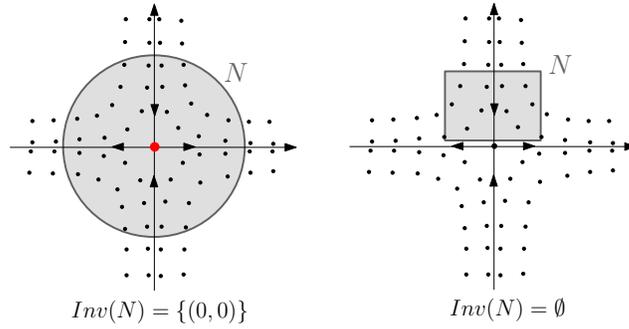


Figura 2.1: Conjunto invariante maximal

Se a aplicação f é invertível, então o conjunto invariante maximal de N pode ser escrito na forma:

$$Inv(N) = \{x \in N \mid f^n(x) \in N, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

É fácil ver que o conjunto $Inv(N)$ é invariante, é maximal em N com relação a esta propriedade e é compacto se N é um conjunto compacto.

Definição 2.2. Um conjunto compacto N é chamado uma **vizinhança isolante** se $Inv(N) \subset int(N)$. Um conjunto S é chamado um **conjunto invariante isolado** se existe uma vizinhança isolante N com $S = Inv(N)$. Um conjunto compacto N é chamado um **bloco isolante** se $f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset int(N)$.

Note que todo bloco isolante N é uma vizinhança isolante para o conjunto $S = Inv(N)$, pois

$$Inv(N) \subset f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset int(N).$$

A recíproca não é verdadeira, por exemplo, tome a aplicação contínua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (2x, y)$, $S = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1, 1]\}$ e $N = [-1, 1] \times [-1, 1]$, temos que N é uma vizinhança isolante de S , isto é, $Inv(N) = S$, mas não é um bloco isolante, pois

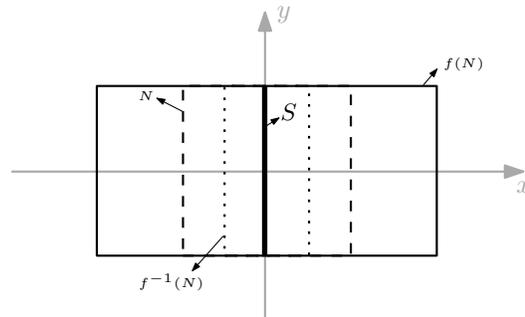


Figura 2.2: Vizinhança isolante que não é bloco isolante

$$f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) = f^{-1}(N) \text{ e } f^{-1}(N) \not\subset int(N).$$

Definição 2.3. Seja N uma vizinhança isolante de uma aplicação contínua f . Definimos o **conjunto de saída** de N como sendo

$$N^- = \{x \in N \mid f(x) \notin \text{int}(N)\}$$

Exemplo 2.2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. Temos que $S = \{0\}$ é um conjunto invariante isolado de f , pois podemos tomar como vizinhança isolante, por exemplo, o compacto $N = [-1, 1]$.

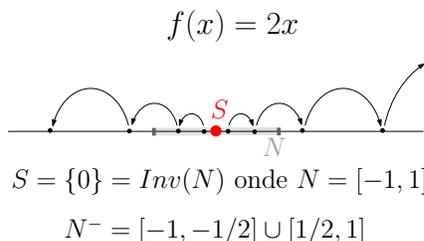


Figura 2.3: Conjunto invariante isolado

Porém, se consideramos a aplicação antípoda $f : S^2 \rightarrow S^2$, temos que a órbita de cada ponto p da esfera é um conjunto invariante, porém não é isolado. De fato, qualquer vizinhança N de $O(p) = \{-p, p\}$ contém $\{-q, q\}$ para algum $q \in S^2$ distinto de $-p$ e de p .

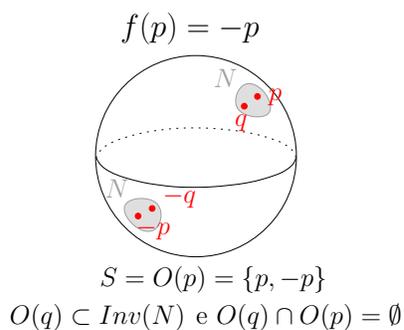


Figura 2.4: Conjunto invariante que não é isolado

2.2 O índice de Conley na versão de Franks-Richeson

Nas primeiras subseções introduzimos as ferramentas necessárias para definir o índice de Conley. Na Subseção 2.2.4 definimos o índice de Conley e apresentamos sua propriedade de continuação. Posteriormente, na Subseção 2.2.5 expomos a definição do índice de Conley cohomológico reduzido que é utilizado em [22] e [23] para definir o par de matrizes de conexão.

2.2.1 Par-filtração

Nesta subsecção definimos um par-filtração (N, L) do conjunto invariante isolado S e observamos que o tipo de homotopia do espaço pontuado N_L não é invariante homotópico do S .

Definição 2.4. *Seja S um conjunto invariante isolado e suponha que $L \subset N$ é um par compacto contido no interior do domínio de f . O par (N, L) é chamado um **par-filtração** para S se N e L são ambos o fecho de seus interiores e*

(1) $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de S ,

(2) L é uma vizinhança de N^- em N ,

(3) $f(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$

É interessante observar que a motivação de Franks e Richeson na escolha deste par-filtração vem da definição de filtração, pois dado um conjunto invariante isolado S pode não existir uma filtração associada. Assim, o par-filtração vem do enfraquecimento das hipóteses de filtração de maneira a sempre existir para um conjunto invariante isolado. Na verdade, se (N, L) é uma filtração do conjunto invariante isolado S , então (N, L) é um par-filtração para S .

Exemplo 2.3. Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ uma região formada por um quadrado Q e dois semi-discos D_1 e D_2 conforme ilustrado na Figura 2.5. Sejam H_0 e H_1 dois retângulos disjuntos contidos em Q conforme ilustrado na Figura 2.5. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo dado na Figura 2.5 onde $f(H_0) = V_0$ e $f(H_1) = V_1$.

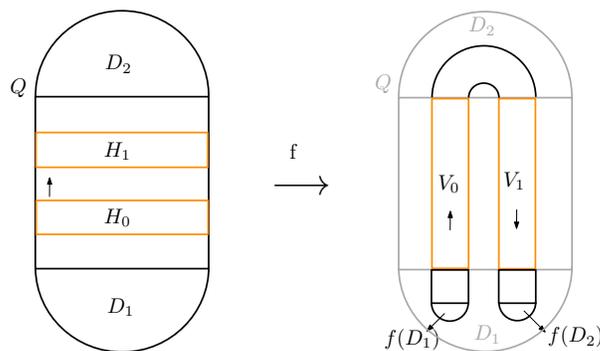


Figura 2.5: Ferradura de Smale

Como f é um difeomorfismo, temos que

$$\text{Inv}(Q) = \{x \in Q \mid f^n(x) \in Q, \forall n \in \mathbb{Z}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) = \Lambda$$

Portanto, Λ é um conjunto invariante isolado de f com vizinhança isolante Q .

Sejam $N_1 = Q$, $L_1 = \overline{N_1 \setminus (H_0 \cup H_1)}$ e $N_2 = V_0 \cup V_1$, $L_2 = \overline{(V_0 \cup V_1) \setminus (H_0 \cup H_1)}$, como indicados na Figura 2.6. Vamos provar que (N_1, L_1) e (N_2, L_2) são pares-filtrações para Λ .

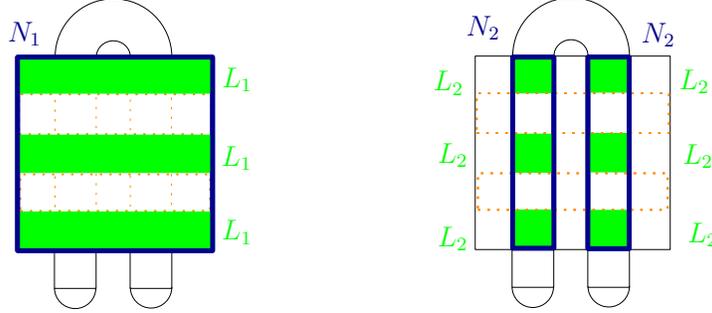


Figura 2.6: Pares-filtração de S

(1) Temos que $\overline{N_i \setminus L_i}$ é uma vizinhança isolante de $S = \Lambda$ para $i = 1, 2$.

Para isto devemos mostrar que $\Lambda = \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$.

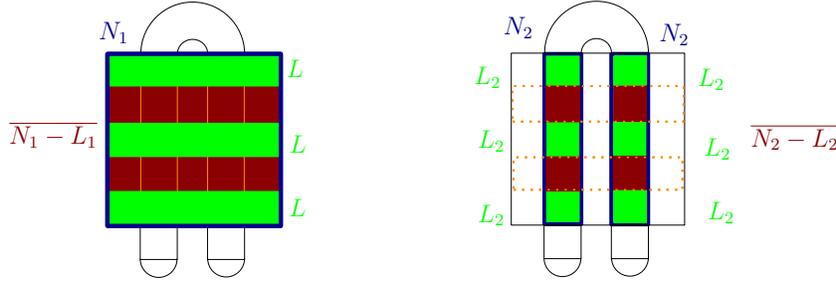


Figura 2.7: $\overline{N_i \setminus L_i}$ é uma vizinhança isolante de $S = \Lambda$

Temos que $\overline{N_i \setminus L_i}$ é compacto para $i = 1, 2$. Vejamos que $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) = \text{Inv}(Q)$ para $i = 1, 2$.

Como $\overline{N_i \setminus L_i} \subset Q \Rightarrow \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{Inv}(Q)$. Agora, suponhamos, por absurdo, que existe um $x \in \text{Inv}(Q)$ tal que $x \notin \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \Rightarrow f^n(x) \notin \overline{N_i \setminus L_i}$ para algum $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f^n(x) \notin H_0 \cup H_1 \Rightarrow f(f^n(x)) \notin Q \Rightarrow x \notin \text{Inv}(Q)$, que é um absurdo. Portanto, $\text{Inv}(Q) \subset \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i})$ para cada $i = 1, 2$, o que prova que $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) = \text{Inv}(Q)$ para $i = 1, 2$.

Nos resta provar que $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$ para $i = 1, 2$. Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i})$ tal que $x \notin \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$, então $x \in L_i$. Logo, $f(x) \notin Q$ ou $f^2(x) \notin Q \Rightarrow x \notin \text{Inv}(Q) = \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i})$, que é um absurdo. Portanto, $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$ para $i = 1, 2$.

(2) Temos que L_i é uma vizinhança de N_i^- para $i = 1, 2$.

É fácil ver, pela Figura 2.8 , que $L_1 = N_1^-$ e $L_2 = N_2^-$.

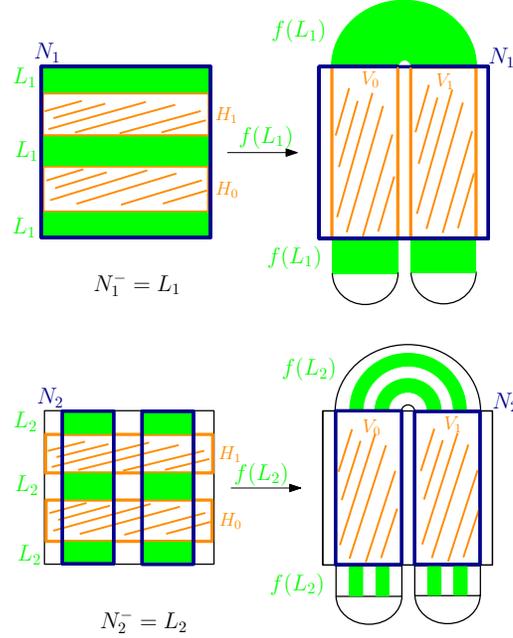


Figura 2.8: L_i é o conjunto de saída de N_i , para $i = 1, 2$.

(3) Temos que $f(L_i) \cap \overline{N_i \setminus L_i} = \emptyset$ para $i = 1, 2$.

Segue observando a Figura 2.9.

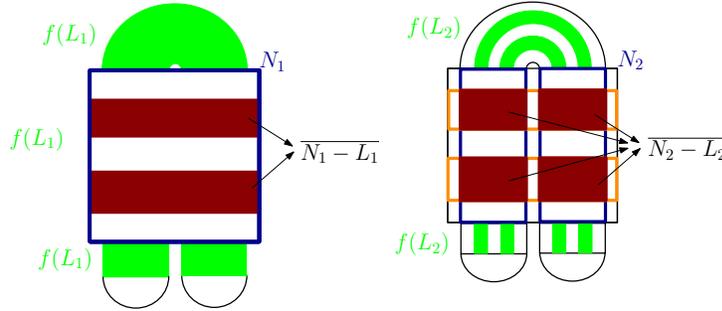


Figura 2.9: $f(L_i) \cap \overline{N_i \setminus L_i} = \emptyset$, para $i = 1, 2$.

Portanto, (N_1, L_1) e (N_2, L_2) são pares-filtração distintos para o conjunto invariante isolado $S = \Lambda$.

Observação 2.1. No Exemplo 2.3 anterior, encontramos dois pares-filtração disjuntos, (N_1, L_1) e (N_2, L_2) , do conjunto invariante isolado $S = \text{Inv}(Q) = \Lambda$.

Temos, pela Figura 2.10, que o espaço pontuado $(N_1)_{L_1} = N_1/L_1$ tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1$ e $(N_2)_{L_2} = N_2/L_2$ tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$, isto é, o tipo de homotopia do espaço pontuado de S depende da escolha do par-filtração. Portanto, não é um invariante homotópico.

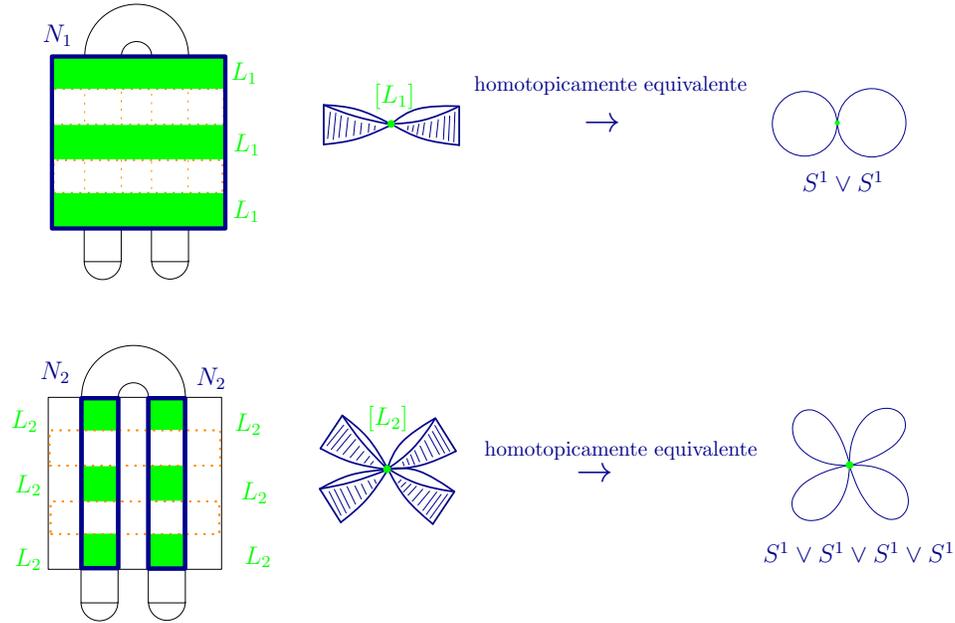


Figura 2.10: Pares-filtração de S que tem espaços pontuados distintos

Logo, não se pode definir o índice de Conley discreto como sendo o tipo de homotopia do espaço pontuado, como no caso do índice de Conley contínuo. Portanto, para definir o índice de Conley discreto precisamos de uma definição mais abrangente de modo a obter a independência da escolha do par-filtração, obtendo desta forma um invariante homotópico.

2.2.2 Existência de bloco isolante e par-filtração

Nesta subseção apresentamos os resultados em [7] sobre a existência de blocos isolantes e pares-filtração.

Teorema 2.1 ([7]). *Seja S um conjunto invariante isolado de f .*

- (a) *Toda vizinhança de S contém um bloco isolante N .*
- (b) *Se L é qualquer vizinhança compacta suficientemente pequena de N^- em N , então (N, L) é um par-filtração.*
- (c) *Existe uma vizinhança de f na topologia C^0 tal que para qualquer \tilde{f} nesta vizinhança, $\tilde{S} = \text{Inv}(N, \tilde{f})$ é um conjunto invariante isolado e (N, L) é um par-filtração para \tilde{S} .*

Proposição 2.1. *Se P_1 um bloco isolante, então $f(P_1^-) \cap \overline{P_1 \setminus P_1^-} = \emptyset$.*

Demonstração:

(i) $P_1 \setminus P_1^- \subseteq P_1 \cap f^{-1}(\text{int}(P_1))$.

Se $x \in P_1 \setminus P_1^-$, então $x \in P_1$ e $x \notin P_1^-$, isto é, $x \in P_1$ e $f(x) \in \text{int}(P_1)$.

(ii) $\overline{P_1 \setminus P_1^-} \subseteq P_1 \cap f^{-1}(P_1)$.

De fato, se $y \in \overline{P_1 \setminus P_1^-}$, então existe uma sequência $(y_n) \subset P_1 \setminus P_1^- \subset f^{-1}(P_1)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Logo, $(f(y_n)) \subset P_1$ e $f(y_n) \rightarrow f(y)$, como P_1 é compacto, temos que $f(y) \in P_1$, isto é, $y \in f^{-1}(P_1)$.

(iii) $f(P_1^-) \subseteq f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c$.

Se $y \in f(P_1^-)$, então $y = f(x)$ para algum $x \in P_1^-$, e assim $y = f(x) \notin \text{int}(P_1) \Rightarrow y \in (\text{int}(P_1))^c$.

Assim, de (i), (ii) e (iii) e do fato de P_1 ser um bloco isolante, temos que

$$\begin{aligned} f(P_1^-) \cap \overline{(P_1 \setminus P_1^-)} &\subseteq (f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c) \cap (P_1 \cap f^{-1}(P_1)) \\ &\subseteq (f(P_1) \cap P_1 \cap f^{-1}(P_1)) \cap (\text{int}(P_1))^c \\ &\subseteq (\text{int}(P_1)) \cap (\text{int}(P_1))^c = \emptyset \end{aligned}$$

■

Além de provar a existência de um par-filtração, Franks e Richeson [7] provam também a existência de um par-filtração (N, L) tal que a cohomologia $H^*(N, L)$ é de dimensão finita, se estivermos trabalhando em uma variedade n -dimensional.

Observação 2.2. *Dado um par-filtração (N, L) a cohomologia $H^*(N, L)$ pode não ser de dimensão finita. Por exemplo, suponha que*

$$X = \bigcup_{n>0} \{(x, y) \mid x^2 + (y - \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}\}$$

conhecido como o "Hawaiian earring", e $N = X$, $L = \emptyset$. Então independentemente da aplicação $f : X \rightarrow X$, (N, L) é um par-filtração com $H^*(N, L) = H^*(X)$ um espaço de dimensão infinita.

Teorema 2.2 ([7]). *Seja U um subconjunto aberto de uma variedade n -dimensional M e suponha que $f : U \rightarrow M$ é uma aplicação contínua com um conjunto invariante isolado S . Dentro de qualquer vizinhança de S existe um par-filtração (N, L) tal que N é uma variedade n -dimensional com bordo e ∂L é uma subvariedade de codimensão um de M . Em particular, (N, L) é homeomorfo a um par simplicial finito.*

2.2.3 Aplicação espaço pontuado associada ao par-filtração

Vimos, na Observação 2.1, que o espaço pontuado não é invariante pelo par-filtração como o é no caso contínuo. Assim queremos, no caso discreto, encontrar um invariante que independa do par-filtração. Com este intuito é que Franks e Richeson em [7] provaram um resultado que apresentamos no Teorema 2.3. Vamos reproduzir sua demonstração, pois nela aparece a construção da aplicação espaço pontuado associada a um par-filtração.

Teorema 2.3 ([7]). *Seja $P = (N, L)$ um par-filtração para f e seja N_L o espaço quociente N/L onde o conjunto colapsado L é denotado por $[L]$ e é tomado como o ponto-base. Então f induz uma aplicação contínua que preserva o ponto base $f_P : N_L \rightarrow N_L$ com a propriedade que $[L] \subset \text{int } f^{-1}([L])$.*

Demonstração:

Seja $p : N \rightarrow N/L$ a aplicação quociente e defina $f_P([L]) = [L]$ e $f_P(x) = p(f(x))$ caso contrário, onde temos identificado $N_L \setminus \{[L]\}$ com $N \setminus L$. Pela definição de par-filtração, $f(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$. Por isso, se K é uma vizinhança suficientemente pequena de L em N , então $f(K) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$. Por isso, $f_P(x) = [L]$ para todo $x \in p(K)$.

É imediato que f_P é contínua em $N_L \setminus \{[L]\}$, visto que é a composição de funções contínuas. Para verificar a continuidade em $[L]$, note que se $\{x_n\}$ é uma sequência em $N_L \setminus \{[L]\}$ convergindo para $[L]$, então $\{p^{-1}(x_n)\}$ está eventualmente em K , logo $\{f_P(x_n)\}$ é uma sequência que é eventualmente constante e igual a $[L]$. ■

Chamamos esta aplicação f_P de **aplicação espaço pontuado associada a P** .

Ainda, temos que o tipo de homotopia da aplicação espaço pontuado f_P e o tipo de homotopia de N_L dependem da escolha do par-filtração $P = (N, L)$ (rever a Observação 2.1). Deste modo, ainda é preciso um invariante que independa da escolha do par-filtração.

2.2.4 O índice de Conley

Se S é um conjunto invariante isolado, pelo Teorema 2.4, temos que para qualquer par-filtração $P = (N, L)$ de S a classe de shift equivalência da aplicação espaço pontuado $f_P : N_L \rightarrow N_L$ é um invariante dinâmico para S , isto é, se g e g' são homeomorfismos, então são shifts equivalentes se, e somente se, são topologicamente conjugados. Mas segundo Franks e Richeson em [7] este invariante é muito restritivo para ser usado como a definição do índice de Conley, e assim eles sugerem utilizar a classe de homotopia das aplicações que preservam ponto base em N_L com f_P sendo um representante.

A seguir, introduzimos a classe de shift equivalência e o Teorema 2.4 que diz que a classe de shift equivalência para a aplicação espaço pontuado f_P é um invariante dinâmico de S que independe da escolha do par-filtração.

Suponha que \mathcal{K} é uma categoria. Sejam X, X' objetos em \mathcal{K} e $f : X \rightarrow X, g : X' \rightarrow X'$ endomorfismos.

Definição 2.5. Dizemos que (X, f) e (X', g) são **shift equivalentes**, $f \sim_s g$, se existem $m \in \mathbb{Z}^+, r : X \rightarrow X'$ e $s : X' \rightarrow X$ tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ X' & \xrightarrow{g} & X' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X' \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

comutam, e que as compostas satisfaçam $r \circ s = g^m$ e $s \circ r = f^m$. O inteiro m é chamado de **comprimento**.

Teorema 2.4 ([7]). Suponha que $P_1 = (N_1, L_1)$ e $P_2 = (N_2, L_2)$ são pares-filtração para S . Então as aplicações induzidas, f_{P_1} e f_{P_2} , nos correspondentes espaços pontuados, são shift equivalentes.

Com a finalidade de obter um invariante homotópico menos restritivo, vamos considerar $h_P(S)$ como sendo a classe de homotopia das aplicações que preservam ponto base em N_L com f_P sendo um representante.

Suponha que X e Y são espaços topológicos pontuados e $[f] : X \rightarrow X$ e $[g] : Y \rightarrow Y$ são as classes de homotopia das aplicações que preservam ponto base. Então a definição de shift equivalência nos diz que $(X, [f])$ e $(Y, [g])$ são shift equivalentes se existem classes de homotopia de aplicações $[r] : X \rightarrow Y$ e $[s] : Y \rightarrow X$ tais que $[g \circ r] = [r \circ f]$, $[s \circ g] = [f \circ s]$, $[r \circ s] = [g^m]$ e $[s \circ r] = [f^m]$ para algum m .

Deste modo, apresentamos as definições do índice de Conley discreto homotópico e dos índices de Conley discreto homológico e cohomológico.

Definição 2.6 (Índice de Conley discreto homotópico). Seja S um conjunto invariante isolado para uma aplicação contínua f . O **índice de Conley homotópico** de S , $h(S)$, é a classe de shift equivalência de $h_P(S)$ onde $P = (N, L)$ é um par-filtração para S .

Definição 2.7 (Índice de Conley discreto homológico e cohomológico). O **índice de Conley homológico** $Con_*(S)$ é a classe de shift equivalência de $(f_P)_* : H_*(N_L, [L]) \rightarrow H_*(N_L, [L])$ onde $P = (N, L)$ é um par-filtração para S . Analogamente, definimos o **índice de Conley cohomológico**, $Con^*(S)$.

Uma das propriedades mais importantes do índice de Conley é a continuação, pois como veremos no Teorema 2.5, sob pequenas perturbações na aplicação contínua f o índice de Conley permanece o mesmo.

Teorema 2.5 ([7]). *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua com vizinhança isolante N e $S = \text{Inv}(N)$ o conjunto invariante isolado. Existe uma vizinhança de f na C^0 -topologia com a propriedade que N é uma vizinhança isolante para todo \tilde{f} nesta vizinhança. Além disso, $h(S, f) = h(\tilde{S}, \tilde{f})$ onde $\tilde{S} = \text{Inv}(N, \tilde{f})$.*

Uma propriedade natural do índice de Conley, conhecida como propriedade de Wazewski, afirma que o índice do conjunto vazio é igual a zero. Em outras palavras temos o Teorema 2.6.

Teorema 2.6 ([7]). *Se $h(S) \neq 0$, então $S \neq \emptyset$.*

2.2.5 O índice de Conley cohomológico reduzido

A seguir apresentamos o índice de Conley cohomológico reduzido definido em [7], [22] e [23] usado para definir o par de matrizes de conexão. Esta definição do índice de Conley cohomológico reduzido difere das Definições 2.6 e 2.7 pelo fato de gerar um par $(CH^*(S), \chi^*(S))$, onde $CH^*(S)$ é um espaço vetorial e $\chi^*(S)$ é um isomorfismo como veremos a seguir.

Seja f uma aplicação contínua e $P = (N, L)$ um par-filtração para um conjunto invariante isolado S . Trabalharemos com os coeficientes em um corpo, e daí teremos que $H^*(N_L, [L])$ é um espaço vetorial e $f_P^* : H^*(N_L, [L]) \rightarrow H^*(N_L, [L])$ é uma aplicação linear. Franks e Richeson observaram que, neste caso, se Q é outro par-filtração, então f_P^* e f_Q^* diferem apenas em suas partes nilpotentes. Desta maneira, podemos definir.

Definição 2.8 (O índice de Conley cohomológico reduzido). *Definimos o **índice de Conley cohomológico reduzido** de S como sendo*

$$\text{Con}^*(S) = (CH^*(S), \chi^*(S)),$$

onde $CH^*(S) = \bigcap_{n>0} (f_P^*)^n(H^*(N_L, [L]))$ e $\chi^*(S) : CH^*(S) \rightarrow CH^*(S)$ é o automorfismo induzido por f_P^* .

Exemplo 2.4. Voltemos ao Exemplo 2.3 e calculemos o índice de Conley cohomológico reduzido para o conjunto invariante isolado $S = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) = \text{Inv}(Q)$ com o par-filtração (N, L) indicado na Figura 2.11.

Assim, como vimos na Observação 2.1, o espaço pontuado N_L tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1$. Logo,

$$H^q(N_L, [L]) = H^q(S^1 \vee S^1, *) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

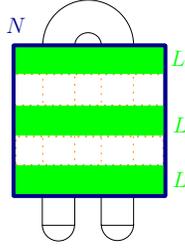


Figura 2.11: Par-filtração

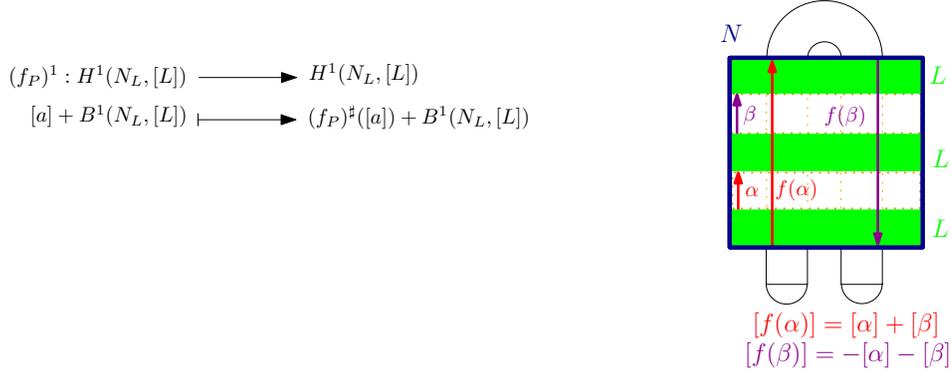


Figura 2.12: Induzida em cohomologia da aplicação espaço pontuado f_P

Na Figura 2.12, observamos os geradores de $H^1(N_L, [L])$ e o comportamento de suas imagens pela aplicação $(f_P)^1$. Com isso, calculamos abaixo a induzida em cohomologia da aplicação espaço pontuado $(f_P)^1$ na dimensão 1. Nas dimensões diferentes de 1, temos que $H^q(N_L, [L]) = 0 \Rightarrow (f_P)^q \equiv 0$.

$H^1(N_L, [L]) \approx \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$
$(f_P)^\sharp([\alpha]) = f_P([\alpha]) = [f(\alpha)] = [\alpha] + [\beta]$ $(f_P)^\sharp([\beta]) = f_P([\beta]) = [f(\beta)] = -[\alpha] - [\beta]$
$(f_P)^1([\alpha]) = [\alpha] + [\beta] + B^1(N_L, [L]) = [\alpha] + [\beta]$ $(f_P)^1([\beta]) = -[\alpha] - [\beta] + B^1(N_L, [L]) = -[\alpha] - [\beta]$
$(f_P)^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Como $(f_P^1)^2 = 0$, temos que

$$CH^1(S) = \bigcap_{n>0} (f_P^1)^n(H^1(N_L, [L])) \subset (f_P^1)^2(H^1(N_L, [L])) = 0$$

Logo,

$$CH^1(S) = \bigcap_{n>0} (f_P^1)^n(H^1(N_L, [L])) = 0 \text{ e } \chi^1(S) = 0.$$

Portanto, $Con^q(S) = (0, 0)$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

O exemplo a seguir foi construído por Richeson em [22].

Exemplo 2.5. Sejam dois quadrados N_1 e N_2 em \mathbb{R}^2 e o difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ indicados na Figura 2.13, onde $f(H_0) = V_0$, $f(H'_0) = V'_0$ e $f(H'_1) = V'_1$.

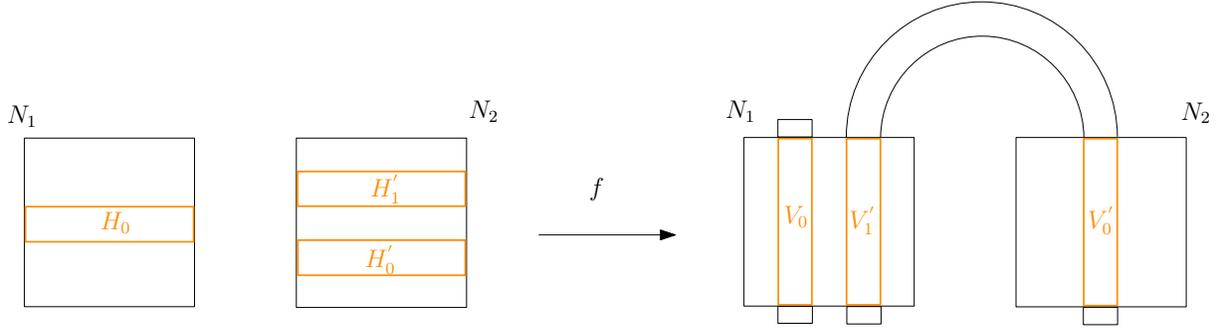


Figura 2.13: Ferradura quebrada

Vamos calcular os índices de Conley cohomológicos reduzidos dos seguintes conjuntos invariantes isolados: $S = Inv(N_1 \cup N_2)$, $A = Inv(N_1)$ e $R = Inv(N_2)$.

Temos que, os pares de compactos da Figura 2.14 são pares-filtração para S , A e R , respectivamente.

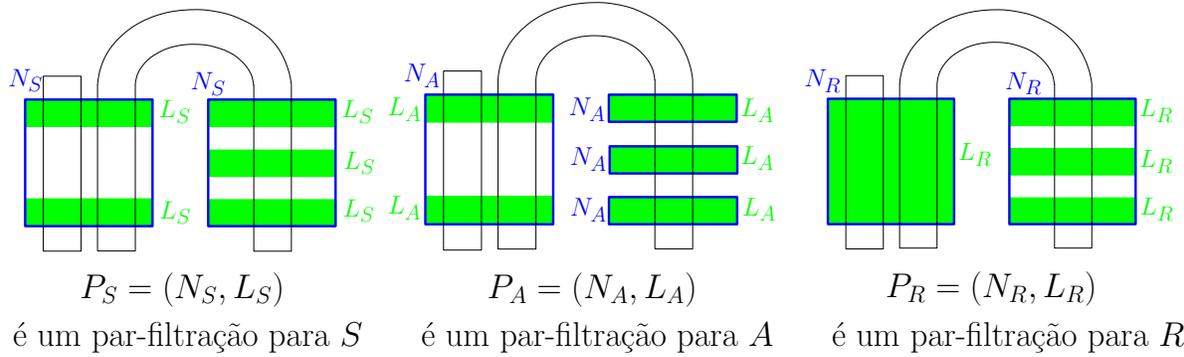


Figura 2.14: Pares-filtração

Logo,

$$H^q((N_S)_{L_S}, [L_S]) = H^q(S^1 \vee S^1 \vee S^1, *) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

$$H^q((N_A)_{L_A}, [L_A]) = H^q(S^1, *) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

$$H^q((N_R)_{L_R}, [L_R]) = H^q(S^1 \vee S^1, *) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

Na Figura 2.15, temos representado o comportamento dinâmico de cada $(f_P)^1$ associada aos respectivos conjuntos invariantes isolados. Para tanto, calculamos a imagem dos geradores da cohomologia dos respectivos espaços pontuados como indicado na Figura 2.15.

Então, temos que as induzidas em cohomologia das aplicações espaço pontuado na dimensão 1 correspondentes aos pares-filtração da Figura 2.14 são

$$(f_{P_S})^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (f_{P_A})^1 = Id, \quad (f_{P_R})^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

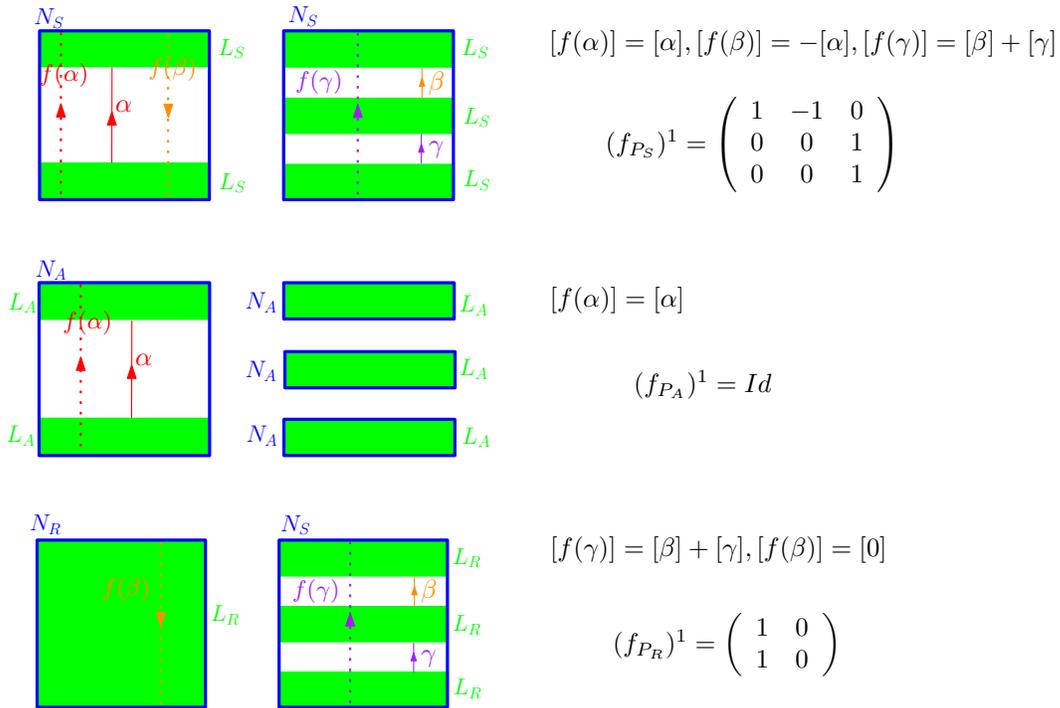


Figura 2.15: Induzida em cohomologia da aplicação espaço pontuado

Temos que $CH^1(S) = \bigcap_{n>0} (f_{P_S}^1)^n (H^1((N_S)_{L_S}, [L_S]))$ e

$$(f_{P_S}^1)^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo $n \geq 2$. Logo, $\text{Im}((f_{P_S}^1)^n) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle, \forall n \geq 1$, o que implica que

$$CH^1(S) = \bigcap_{n>0} (f_{P_S}^1)^n (H^1((N_S)_{L_S}, [L_S])) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (f_{P_S}^1)(1, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (f_{P_S}^1)(0, 1, 1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Então, se $\alpha = (1, 0, 0)$ e $\beta = (0, 1, 1)$, temos que $(f_{P_S}^1)(\alpha) = \alpha$ e $(f_{P_S}^1)(\beta) = -\alpha + \beta$, logo, como $\chi^1(S)$ é igual a $f_{P_S}^1$ restrito a $\langle \alpha, \beta \rangle$, tem-se que

$$\chi^1(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\text{Con}^q(S) = (CH^q(S), \chi^q(S)) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$

Temos que $CH^1(A) = \bigcap_{n>0} (f_{P_A}^1)^n (H^1((N_A)_{L_A}, [L_A])) = H^1((N_A)_{L_A}, [L_A]) = \mathbb{Q}$ e $\chi^1(A) = f_{P_A}^1 = Id$. Portanto,

$$\text{Con}^q(A) = (CH^q(A), \chi^q(A)) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$

Temos que $CH^1(R) = \bigcap_{n>0} (f_{P_R}^1)^n (H^1((N_R)_{L_R}, [L_R]))$ e $(f_{P_R}^1)^n = f_{P_R}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, para todo $n \geq 1$. Logo, $CH^1(R) = \text{Im}(f_{P_R}^1) = \langle (1, 1) \rangle$, e assim

$$f_{P_R}^1(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e com isso temos que

$$\chi^1(R) = Id$$

Portanto,

$$\text{Con}^q(R) = (CH^q(R), \chi^q(R)) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$

2.3 O índice de Conley na versão de Mrozek

Apresentamos nesta seção o índice de Conley definido por Mrozek em [16]. E na Seção 2.4 provamos uma relação entre este índice e o índice apresentado por Franks-Richeson [7].

Sejam X um espaço métrico localmente compacto, $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e Ξ um anel com unidade. Se K é um conjunto invariante isolado com par-índice P , então o índice de Conley na versão do Mrozek de K é a redução de Leray do par $(H^*(P), I_P)$, onde $H^*(P)$ é a cohomologia de Alexander-Spanier de P e I_P é a aplicação-índice associada a P . Mrozek afirma também que outras homologias e cohomologias podem ser usadas se colocarmos mais restrições sobre o par-índice.

Nas primeiras subseções apresentamos os pré-requisitos necessário para definir o índice de Conley na versão do Mrozek. Na Subseção 2.3.5 definimos o índice e apresentamos suas propriedades.

2.3.1 Preliminares

A seguir apresentamos alguns pré-requisitos necessários para as próximas subseções.

Aplicação entre pares

Uma aplicação $f : P \rightarrow Q$ de pares $P = (P_1, P_2)$ e $Q = (Q_1, Q_2)$ é uma aplicação contínua $f : P_1 \rightarrow Q_1$ tal que $f(P_1 \cap P_2) \subseteq Q_1 \cap Q_2$.

Se $R \subseteq P, S \subseteq Q$ e $f : P_1 \rightarrow Q_1$ é tal que $f(R) \subseteq S$, então

$$\begin{aligned} f_{R,S} : R_1 &\rightarrow S_1 \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

que aplica $R_1 \cap R_2$ em $S_1 \cap S_2$, será chamada a **contração de f ao conjunto de pares (R, S)** .

Se $R \subseteq S$ são pares, então $i_{R,S}$ é a contração da identidade $id : S \rightarrow S$ para o conjunto de pares (R, S) e será chamado a **inclusão do par R no par S** .

Categoria

Sejam \mathcal{E} a categoria dos módulos graduados sobre o anel Ξ com homomorfismos de grau zero e $\mathcal{E}(E, F)$ o conjunto de todos os morfismos de E em F em \mathcal{E} .

O functor da cohomologia de Alexander-Spanier com coeficientes em Ξ será considerado como um functor $H^* : Top_2 \rightarrow \mathcal{E}$, onde Top_2 é a categoria dos pares topológicos.

Seja \mathcal{EE} a categoria de módulos graduados equipados com um endomorfismo, isto é, os objetos desta categoria são os elementos do conjunto $\{(E, e) \mid E \in \mathcal{E} \text{ e } e \in \mathcal{E}(E, E)\}$ é um

endomorfismo $\}$. Os morfismos de $(E, e) \in \mathcal{E}E$ em $(F, f) \in \mathcal{E}F$ são todas as aplicações $\varphi \in \mathcal{E}(E, F)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & E \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ F & \xrightarrow{f} & F \end{array} \quad (2.1)$$

comuta.

Sejam $\mathcal{E}M$ e $\mathcal{E}I$ as subcategorias de $\mathcal{E}E$ consistindo dos módulos graduados equipados com monomorfismos e isomorfismos, respectivamente.

Observe que se tomarmos $E \in \mathcal{E}$, então $(E, id) \in \mathcal{E}I$. Portanto, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}I \subseteq \mathcal{E}M \subseteq \mathcal{E}E$.

2.3.2 Par-índice

Uma das principais diferenças entre o índice definido por Mrozek em [16] e o definido por Franks e Richeson em [7] é a definição dos pares de compactos. Analisamos na Seção 2.4 essa diferença.

Sejam K um conjunto invariante isolado e N uma vizinhança isolante de K .

Definição 2.9. *O par $P = (P_1, P_2)$ de subconjuntos de N será chamado um **par-índice de K em N** com respeito a f se, e só se, as três condições seguintes são satisfeitas*

1. P_1 e P_2 são positivamente invariantes com respeito a N , isto é,

$$P_i \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_i) \text{ para } i = 1, 2,$$

2. $Inv^- N = \{x \in M \mid f^i(x) \in N, \forall i \in \mathbb{Z}^-\} \subseteq int_N(P_1)$ e $Inv^+ N = \{x \in M \mid f^i(x) \in N, \forall i \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq N \setminus P_2$,

3. $P_1 \setminus P_2 \subseteq int(N) \cap f^{-1}(int(N))$.

Denotamos a família de todos os pares-índices em N por $IP(N, f)$ ou simplesmente por $IP(N)$.

Apresentamos na Proposição 2.2 algumas propriedades do par-índice e na Proposição 2.3 a existência de par-índice em uma vizinhança qualquer do conjunto invariante isolado.

Proposição 2.2 ([16]).

1. Se $P = (P_1, P_2)$ é um par-índice de S em N , então $Inv(N) \subseteq int(P_1 \setminus P_2)$,
2. Se P e Q são pares-índice de S em N , então $P \cap Q$ é um par-índice de S em N ,
3. Se $x \in P_1$, $f(x) \notin N$, então $x \in P_2$.

Proposição 2.3 ([16]). *Para qualquer vizinhança W de S existe um par-índice P em N tal que $P_1 \setminus P_2 \subseteq W$.*

Exemplo 2.6. Voltamos ao Exemplo 2.3 da ferradura. Sejam $N = Q$, (P_1, P_2) e (P'_1, P'_2) como indicados na Figura 2.16. Vamos provar que (P_1, P_2) e (P'_1, P'_2) são dois pares-índice de S em N .

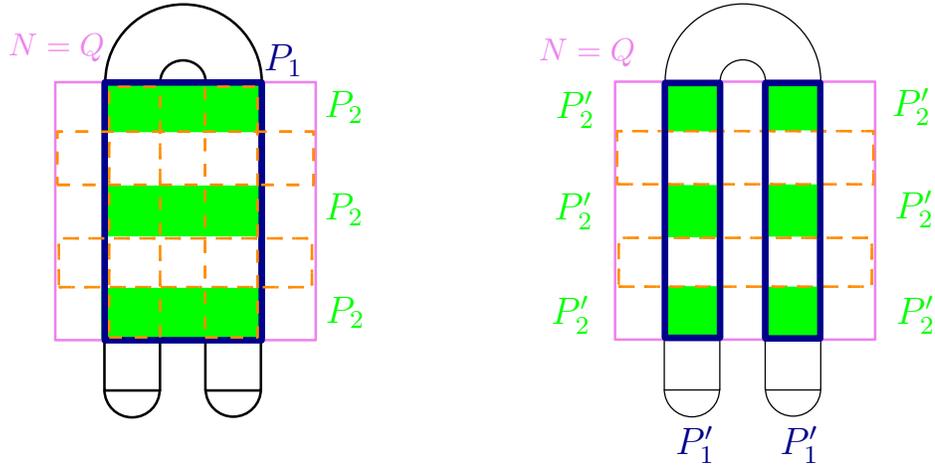
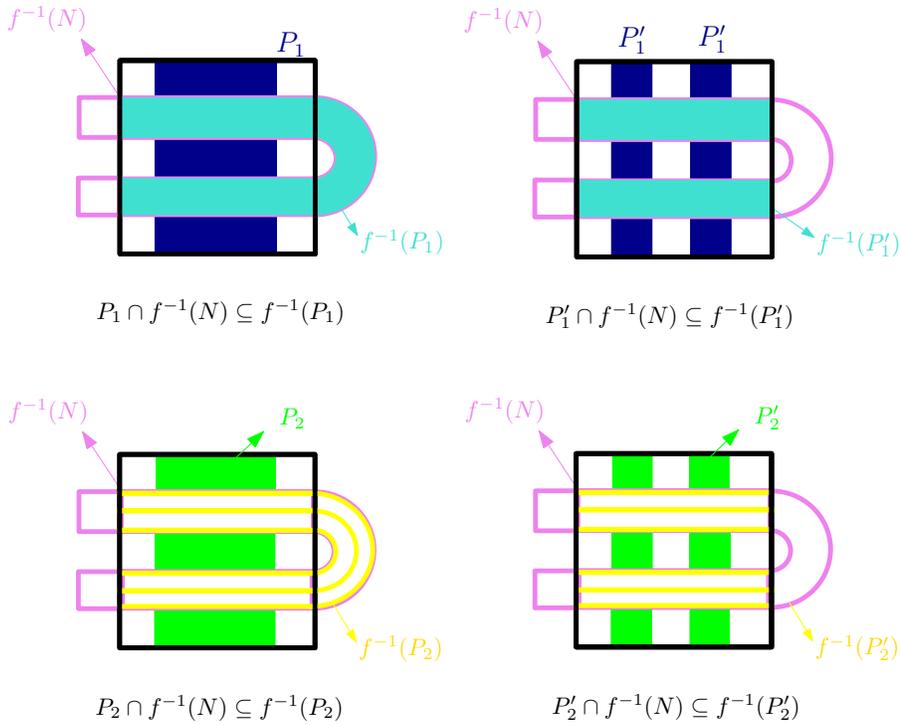


Figura 2.16: Pares-índice

(1) $P_i \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_i)$ e $P'_i \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P'_i)$ para $i = 1, 2$.



(2) $Inv^-(N) \subseteq int_N(P_1)$ e $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P_2$, $Inv^-(N) \subseteq int_N(P'_1)$ e $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P'_2$.

Como $Inv^+(N) = Inv^+(Q) = \bigcap_{n \leq 0} f^n(Q) \subseteq Q \cap f^{-1}(Q) \cap f^{-2}(Q)$ temos, pela Figura 2.17, que $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P_2$ e $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P'_2$. E como $Inv^-(N) = Inv^-(Q) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q) \subseteq Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ temos, pela Figura 2.18, que $Inv^-(N) \subseteq int_N(P_1)$ e $Inv^-(N) \subseteq int_N(P'_1)$.

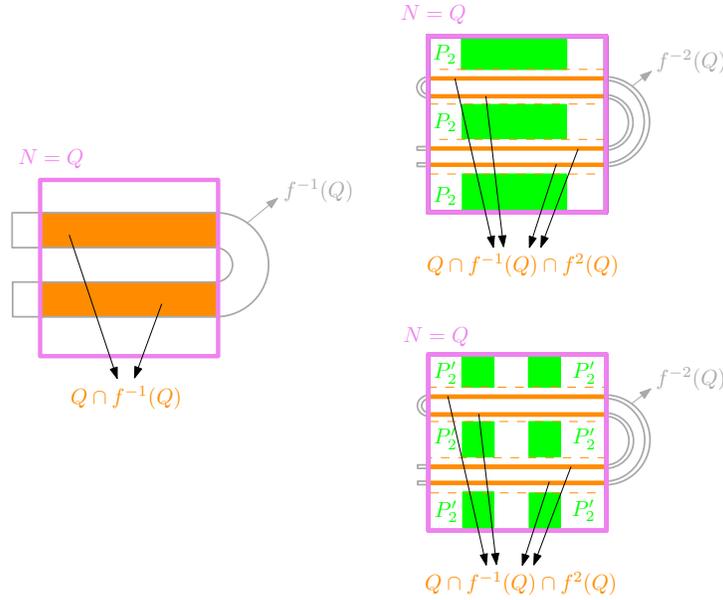


Figura 2.17: $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P_2$ e $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P'_2$.

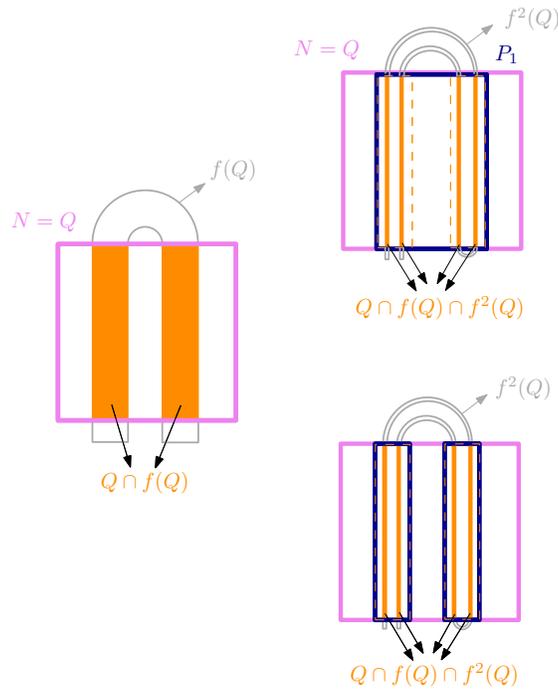
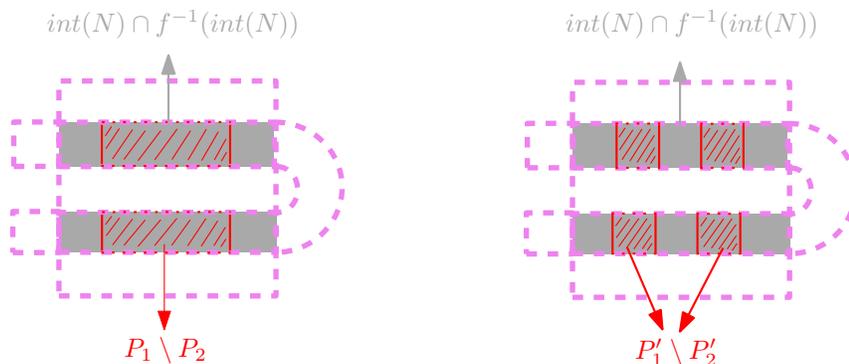


Figura 2.18: $Inv^-(N) \subseteq int_N(P_1)$ e $Inv^-(N) \subseteq int_N(P'_1)$

(3) $P_1 \setminus P_2 \subseteq \text{int}(N) \cap f^{-1}(\text{int}(N))$ e $P'_1 \setminus P'_2 \subseteq \text{int}(N) \cap f^{-1}(\text{int}(N))$.



Portanto, (P_1, P_2) e (P'_1, P'_2) são dois pares-índice de S em N distintos.

Pelo exemplo acima, vemos que, assim como no caso do par-filtração, temos que o tipo de homotopia do espaço pontuado não é invariante homotópico que independe do par-índice.

2.3.3 Aplicação-índice

Motivados pelo Exemplo 2.6, constatamos que o tipo de homotopia do espaço pontuado depende do par-índice. Desta forma, faz-se necessário buscar um invariante homotópico. Com esta finalidade, vamos definir a aplicação-índice.

Considere o par-índice P em N , $P \in IP(N)$, e defina os pares-índice

$$S(P) := (P_1 \cup f(P_2), P_2 \cup f(P_2)) \text{ e } T(P) := (P_1 \cup (X \setminus \text{int}(N)), P_2 \cup (X \setminus \text{int}(N)))$$

Estes pares-índice são escolhidos de forma que as contrações da identidade sejam isomorfismos como vemos na Proposição 2.4.

Proposição 2.4 ([16]). *Se $P \in IP(N)$, então*

1. $f(P) \subseteq S(P) \subseteq T(P)$,
2. as inclusões $i_{P,S(P)}, i_{S(P),T(P)}, i_{P,T(P)}$ induzem isomorfismos na cohomologia de Alexander-Spanier.

Defina $f_P := f_{P,T(P)}$ e $i_P := i_{P,T(P)}$. Temos, pela Proposição 2.4, que $H^*(i_P)$ é um isomorfismo.

Definição 2.10. *O endomorfismo $H^*(f_P) \circ H^*(i_P)^{-1}$ de $H^*(P)$ será chamado **aplicação-índice** associado ao par-índice P e será denotado por I_P .*

2.3.4 Redução de Leray

Mrozek em [16] define o índice de Conley discreto como um par constituído de um espaço vetorial graduado e um isomorfismo de maneira que este par independa da escolha do par-índice. Mrozek provou em [16] que a redução de Leray do par $(H^*(P), I_P)$ independe da escolha do par-índice.

A seguir apresentamos a definição do functor de Leray, que é o functor que leva espaços vetoriais graduados com endomorfismos em espaços vetoriais graduados com isomorfismos.

Primeiro definimos um functor LM que transforma um par $(F, f : F \rightarrow F) \in \mathcal{E}E$ em um par em $\mathcal{E}M$.

Definição 2.11 (Núcleo generalizado). *Seja $f : F \rightarrow F$ um endomorfismo. O núcleo generalizado de f é dado por*

$$gKer(f) := \{x \in F \mid f^n(x) = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $f(gKer(f)) \subseteq gKer(f)$, temos o seguinte monomorfismo induzido

$$f' : \frac{F}{gKer(f)} \rightarrow \frac{F}{gKer(f)}$$

$$[x] \mapsto [f(x)]$$

Defina $LM(F, f) := \left(\frac{F}{gKer(f)}, f' \right) \in \mathcal{E}M$.

Tome $\varphi : (E, e) \rightarrow (F, f)$ um morfismo. Temos que $\varphi(gKer(e)) \subseteq gKer(f)$, e portanto temos uma aplicação induzida

$$\varphi' : \frac{E}{gKer(e)} \rightarrow \frac{F}{gKer(f)}$$

$$[x] \mapsto [\varphi(x)]$$

Obviamente, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{E}{gKer(e)} & \xrightarrow{e'} & \frac{E}{gKer(e)} \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \frac{F}{gKer(f)} & \xrightarrow{f'} & \frac{F}{gKer(f)} \end{array} \quad (2.2)$$

é comutativo.

Defina $LM(\varphi) := \varphi'$. Logo, temos definido um functor covariante

$$LM : \mathcal{E}E \rightarrow \mathcal{E}M$$

Agora definimos um functor LI que transforma um par $(F, f : F \rightarrow F) \in \mathcal{EM}$ em um par em \mathcal{EI} .

Definição 2.12 (Imagem generalizada). *Seja $f : F \rightarrow F$ um monomorfismo. A **imagem generalizada** de f é definida por:*

$$gIm(f) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(F).$$

Como $f(gIm(f)) \subseteq gIm(f)$, podemos definir a seguinte contração

$$\begin{aligned} f'' : gIm(f) &\rightarrow gIm(f) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

que é um isomorfismo.

Defina $LI(F, f) := (gIm(f), f'') \in \mathcal{EI}$.

Tome $\varphi : (E, e) \rightarrow (F, f)$ um morfismo com $(E, e), (F, f) \in \mathcal{EM}$. Temos que $\varphi(gIm(e)) \subseteq gIm(f)$, assim, podemos definir a seguinte contração

$$\begin{aligned} \varphi'' : gIm(e) &\rightarrow gIm(f) \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} gIm(e) & \xrightarrow{e''} & gIm(e) \\ \varphi'' \downarrow & & \downarrow \varphi'' \\ gIm(f) & \xrightarrow{f''} & gIm(f) \end{array} \quad (2.3)$$

é comutativo.

Defina $LI(\varphi) := \varphi''$. Logo, temos definido um functor covariante

$$LI : \mathcal{EM} \rightarrow \mathcal{EI}.$$

Definição 2.13. *O functor $\mathcal{L} : \mathcal{EE} \rightarrow \mathcal{EI}$ definido pela composição $\mathcal{L} = LI \circ LM$ é chamado de **functor de Leray**.*

Uma das propriedades provadas por Mrozek em [16] é que se I_P é um isomorfismo, então a redução de Leray do par $(H^*(P), I_P)$ é ele mesmo, isto é, $\mathcal{L}(H^*(P), I_P) = (H^*(P), I_P)$.

2.3.5 O índice de Conley cohomológico

Agora estamos aptos a apresentar a definição do índice de Conley cohomológico de Mrozek [16].

Seja P um par-índice de um conjunto invariante isolado K de um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$. Sejam $H^*(P)$ a cohomologia de Alexander-Spanier do par P e I_P a aplicação-índice associada ao par-índice P .

Aplicando o functor de Leray ao par $(H^*(P), I_P)$ obtemos um objeto em \mathcal{EI} , que será chamado a **redução de Leray da cohomologia de Alexander-Spanier** do par-índice P .

O Teorema 2.7 e o Corolário 2.1 mostram que a redução de Leray do par $(H^*(P), I_P)$ independe da escolha do par-índice.

Teorema 2.7 ([16]). *Sejam $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo e K um conjunto invariante isolado com respeito a f . Então para todas vizinhanças isolantes N, M de K e para todos $P \in IP(N), Q \in IP(M)$, as reduções de Leray das cohomologias de Alexander-Spanier $\mathcal{L}(H^*(P), I_P)$ e $\mathcal{L}(H^*(Q), I_Q)$ são isomorfas.*

Corolário 2.1 ([16]). *A redução de Leray da cohomologia de Alexander-Spanier de um par-índice de um conjunto invariante isolado K depende apenas de K .*

Logo, podemos definir o índice de Conley cohomológico na versão de Mrozek.

Definição 2.14. *O índice de Conley cohomológico de K é $\mathcal{L}(H^*(P), I_P)$, onde P é um par-índice de K em N , e é denotado por $C(K, f)$ ou $C(K)$.*

Apresentamos a seguir algumas propriedades do índice de Conley, como a propriedade da continuação e o índice de Conley de uma aplicação tempo-um de um fluxo.

Teorema 2.8 ([16]). *O índice de Conley cohomológico de um conjunto invariante isolado de um fluxo coincide com o índice de Conley cohomológico correspondente a aplicação tempo-um desse fluxo, isto é, se f é uma aplicação tempo-um de um fluxo, então existe um par-índice P , tanto para o fluxo quanto para o difeomorfismo e*

$$C(K) = \mathcal{L}(H^*(P), Id) = (H^*(P), Id) = H^*(P)$$

Também, neste contexto, temos a propriedade de Wazewski satisfeita para o índice de Mrozek como vemos na Proposição 2.5.

Proposição 2.5 ([16]). *O índice de Conley do conjunto vazio é igual a zero. Em outras palavras, um índice de Conley não-nulo implica um conjunto invariante isolado não-vazio.*

O índice de Conley na versão de Mrozek também satisfaz a importante propriedade da continuação como vemos no Teorema 2.9.

Teorema 2.9 ([16]). *Suponha que $\Lambda \subset \mathbb{R}$ é um intervalo compacto, $f : \Lambda \times X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua tal que para cada $\lambda \in \Lambda$*

$$\begin{aligned} f_\lambda : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto f(\lambda, x) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo e N é uma vizinhança isolante com respeito a f_λ . Então, $C(\text{Inv}(N, f_\lambda))$ não depende de $\lambda \in \Lambda$.

E por último, temos a propriedade da aditividade.

Teorema 2.10 ([16]). *Suponha que um conjunto invariante isolado é uma soma disjunta de dois outros conjuntos invariantes isolados K_1 e K_2 . Então:*

$$C(K) = C(K_1) \times C(K_2)$$

M. Mrozek calculou em [16] o índice de Conley de um ponto fixo hiperbólico e de uma órbita periódica hiperbólica.

Seja x_0 um ponto fixo hiperbólico de f . Sejam k igual ao número de autovalores de $Df(x_0)$ com módulo maior que 1 (contados com multiplicidade) e l igual ao número de autovalores reais de $Df(x_0)$ menores que -1. O par (k, l) será chamado o **índice de Morse** de x_0 .

Teorema 2.11 (O índice de um ponto fixo hiperbólico). *Suponha que x_0 é um ponto fixo hiperbólico de um C^1 -difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então, $\{x_0\}$ é um conjunto invariante isolado e*

$$C_i(\{x_0\}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq k, \\ (\Xi, (-1)^l Id), & \text{se } i = k \end{cases}$$

onde (k, l) é o índice de Morse de x_0 .

Teorema 2.12 (O índice de uma órbita periódica hiperbólica). *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ uma órbita periódica hiperbólica de f , isto é, um ponto fixo hiperbólico de f^d para algum $d \in \mathbb{N}$. Seja (k, l) o índice de Morse de x_0 com respeito a f^d . Suponha que d é o período minimal de x_0 , isto é, $f^i(x_0) \neq x_0$ para todo $i = 1, 2, \dots, d-1$. Então, $K := \{x_0, f(x_0), \dots, f^{d-1}(x_0)\}$ é um conjunto invariante isolado e*

$$C_i(K) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq k, \\ (\Xi^d, D), & \text{se } i = k \end{cases}$$

onde $D : \Xi^d \rightarrow \Xi^d$ é dada na base canônica $\{e_i\}_{i=1}^d$ de Ξ^d por $D(e_i) = e_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, d-1$ e $D(e_d) = (-1)^l e_1$.

Exemplo 2.7. Vamos voltar ao Exemplo 2.6 para calcular o índice de Conley cohomológico na versão de Mrozek do conjunto invariante isolado $S = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) = Inv(Q)$ com o par-índice $P = (P_1, P_2)$ indicado na Figura 2.19.

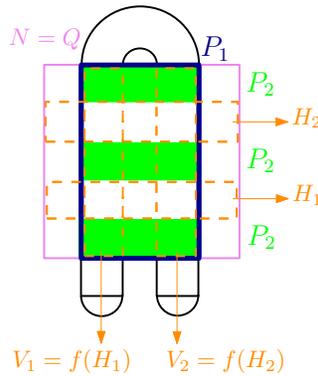


Figura 2.19: Par-índice

Pela Figura 2.20, temos que o espaço pontuado P_1/P_2 tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1$.

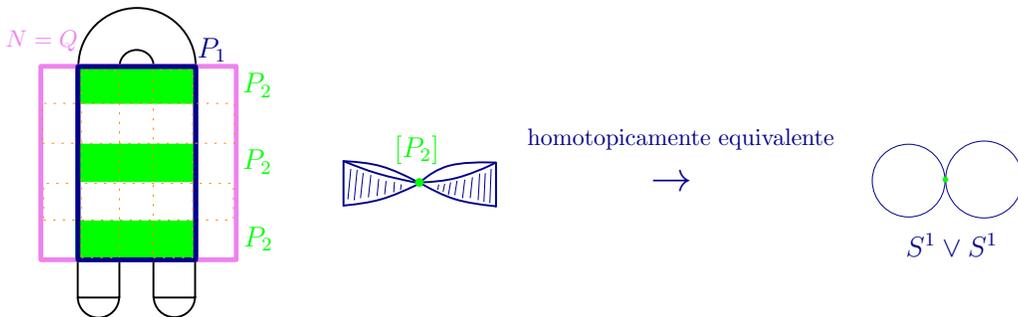


Figura 2.20: Espaço pontuado P_1/P_2

Portanto,

$$H^q(P) = H^q(P_1/P_2) = H^q(S^1 \vee S^1, *) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

Observe, pela Figura 2.21, que I_P não é um isomorfismo, logo temos que aplicar o functor de Leray no par $(H^1(P), I_P)$.

Como $I_P^2 = 0$ então $gKer(I_P) = H^1(P) \Rightarrow \frac{H^1(P)}{gKer(I_P)} = 0$ o que implica que

$$\mathcal{L}(H^1(P), I_P) = (0, 0).$$

Portanto,

$$C^q(S) = (0, 0), \forall q.$$

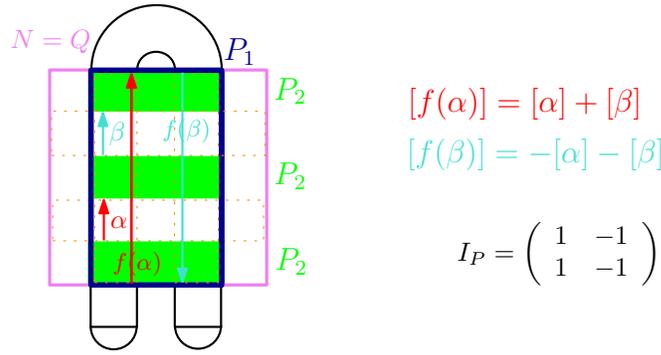


Figura 2.21: Aplicação-índice I_P

2.4 A relação entre as duas abordagens do índice de Conley

Nesta seção faremos uma análise comparativa dos índices de Conley discreto nas versões de Franks-Richeson [7] e do Mrozek [16].

Na primeira subseção apresentamos as diferenças entre as definições de par-filtração e par-índice, e provamos, no Teorema 2.13, que existe um par-filtração e uma vizinhança N do par que é um par-índice de S em N para conjuntos básicos e para conjuntos $\Lambda(k) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k))$ de difeomorfismos fitted Smale. Na Subseção 2.4.2 veremos que, no caso em que trabalhamos, as duas abordagens do índice de Conley discreto coincidem.

2.4.1 Par-filtração e par-índice

Nesta subseção vamos apresentar dois exemplos que mostram que a Definição 2.4 de [7] e a Definição 2.9 de [16] são ligeiramente diferentes.

O primeiro exemplo que construímos é de um par-índice que não é um par-filtração.

Exemplo 2.8. Seja o difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado pela aplicação tempo-um de um fluxo de uma sela S . Temos que S é um conjunto invariante isolado.

Sejam P_1, P_2 e N como descritos na Figura 2.22. Vejamos que (P_1, P_2) é um par-índice de S em N .

(1) $P_1 \cap f^{-1}(N) \subset f^{-1}(P_1)$ e $P_2 \cap f^{-1}(N) \subset f^{-1}(P_2)$. De fato, segue pela Figura 2.23.

(2) $Inv^-(N) \subseteq int_N(P_1)$ e $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P_2$. Como $Inv^-(N) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(N) = W^u(S) \cap N$

e $Inv^+(N) = \bigcap_{n \leq 0} f^n(N) = W^s(S) \cap N$, então, pela Figura 2.24, tem-se que $Inv^-(N) \subseteq int_N(P_1)$ e $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P_2$.

(3) $P_1 \setminus P_2 \subseteq int(N) \cap f^{-1}(int(N))$. De fato, segue pela Figura 2.25.

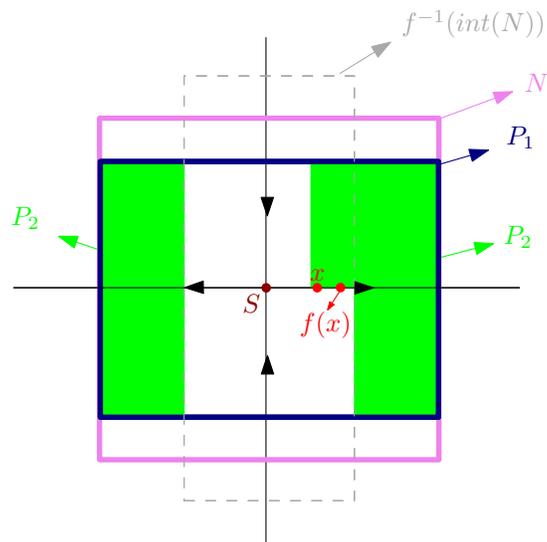


Figura 2.22: Par-índice que não é par-filtração

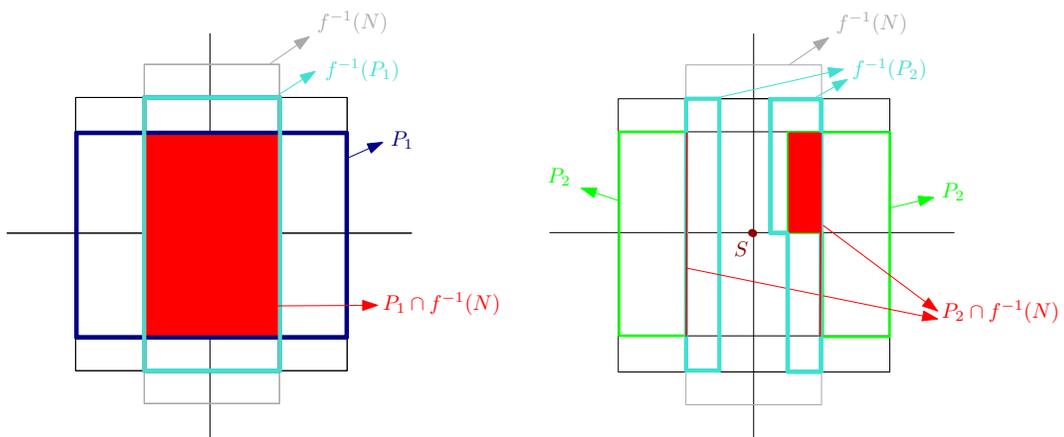


Figura 2.23: $P_1 \cap f^{-1}(N) \subset f^{-1}(P_1)$ e $P_2 \cap f^{-1}(N) \subset f^{-1}(P_2)$

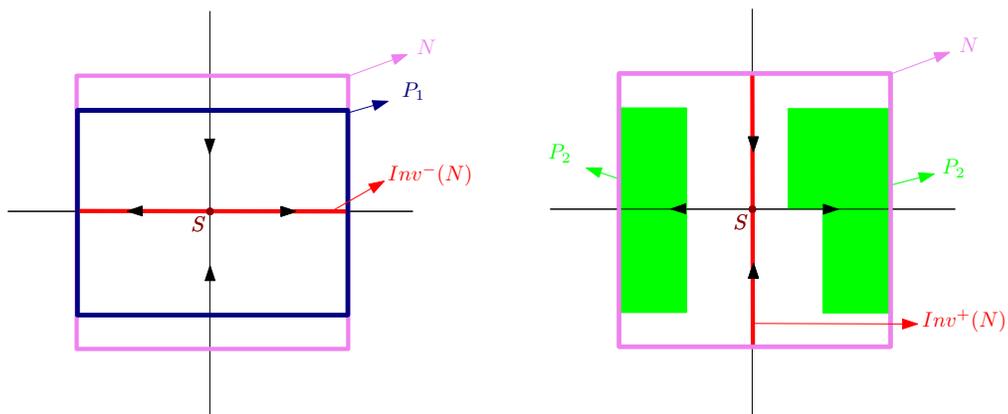


Figura 2.24: $Inv^{-}(N) \subseteq int_N(P_1)$ e $Inv^{+}(N) \subseteq N \setminus P_2$

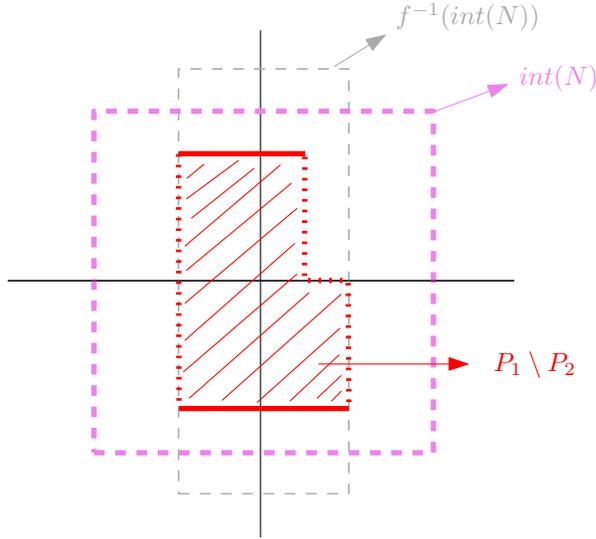


Figura 2.25: $P_1 \setminus P_2 \subseteq \text{int}(N) \cap f^{-1}(\text{int}(N))$

Vejamos agora que (P_1, P_2) não é um par-filtração para S . De fato, pela Figura 2.22, existe um ponto $x \in P_2$ tal que $f(x) \in \overline{P_1 \setminus P_2}$, e daí $f(x) \in f(P_2) \cap \overline{P_1 \setminus P_2} \Rightarrow f(P_2) \cap \overline{P_1 \setminus P_2} \neq \emptyset$. Portanto, não satisfaz o item (3) da Definição 2.4 de par-filtração.

Apresentamos a seguir um par-filtração que não é um par-índice.

Exemplo 2.9. Voltemos ao Exemplo 2.3 da ferradura de Smale. Temos que o par de compactos (P_1, P_2) e a vizinhança N descritos na Figura 2.26 é um par-filtração de S que não é um par-índice de S em N .

Mostramos de uma maneira diferente do Exemplo 2.3 que o par de compactos (P_1, P_2) é um par-filtração.

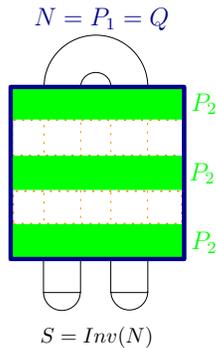


Figura 2.26: Par-filtração que não é par-índice

Pela Figura 2.27, temos que $P_2 = P_1^-$ e P_1 é um bloco isolante. Portanto, pelo Teorema 2.1 temos que (P_1, P_2) é um par-filtração de S .

Vejamos, agora, que (P_1, P_2) não é um par-índice de S em N . Vemos que este par de

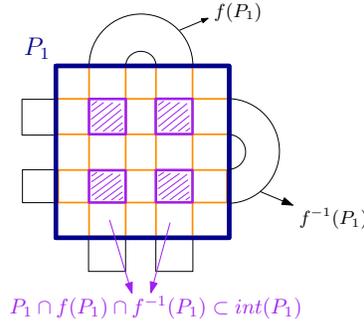


Figura 2.27: Bloco isolante

compactos falha no item 3 da Definição 2.9 de par-índice, pois existe um ponto $x \in P_1 \setminus P_2$ tal que $x \notin \text{int}(N)$ como vemos na Figura 2.28.

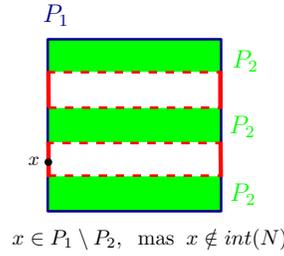


Figura 2.28: Existe um $x \in P_1 \setminus P_2$ tal que $x \notin \text{int}(N)$

Portanto, (P_1, P_2) não é um par-índice de S em N .

Observe que o Exemplo 2.9 anterior só falha, pois a vizinhança N do par-filtração é muito pequena. Motivados por este fato, provamos no Teorema 2.13, a existência de um par de compactos e uma vizinhança que satisfazem as definições de par-filtração e de par-índice para os conjuntos $\Lambda(k)$ de difeomorfismos fitted.

Teorema 2.13. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo fitted em relação ao conjunto de alças $H(k) = \bigcup_i h_i(k)$ onde M é um espaço métrico localmente compacto. Considere $N = H(k)$, $P_1 = f(H(k)) \cap H(k)$, $P_2 = P_1^-$ e $S = \text{Inv}(N)$, então (P_1, P_2) é um par-filtração para S e um par-índice de S em N com respeito a f .*

Demonstração:

Tome k fixo. Como $H(k)$ é compacto, tem-se que N e P_1 são compactos. Como $f(P_1)$ é compacto, o complementar do $\text{int}(P_1)$, $(\text{int}(P_1))^c$, é fechado e $f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c \subset f(P_1)$, então $f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c$ é compacto, logo $f^{-1}(f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c)$ também é compacto. Assim, para provar que P_1^- é compacto, basta provar $P_1^- = f^{-1}(f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c)$. Provaremos a seguir que esta igualdade é verdadeira.

Se $x \in P_1^-$, então $x \in P_1$ e $f(x) \notin \text{int}(P_1)$, isto é, $f(x) \in f(P_1)$ e $f(x) \in (\text{int}(P_1))^c \Rightarrow x \in f^{-1}(f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c)$. Logo,

$$P_1^- \subset f^{-1}(f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c)$$

Se $x \in f^{-1}(f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c)$, então $x \in f^{-1}(f(P_1))$ e $x \in f^{-1}((\text{int}(P_1))^c)$, isto é, $x \in P_1$ e $f(x) \in (\text{int}(P_1))^c \Rightarrow x \in P_1$ e $f(x) \notin \text{int}(P_1) \Rightarrow x \in P_1^-$. Logo,

$$f^{-1}(f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c) \subset P_1^-$$

Portanto, $P_1^- = f^{-1}(f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^c)$.

Afirmção 1: (P_1, P_1^-) é um par-filtração de S da Definição 2.4 de [22].

Pelo Teorema 2.1, basta provar que P_1 é um bloco isolante, isto é, que $P_1 \cap f(P_1) \cap f^{-1}(P_1) \subset \text{int}(P_1)$.

Para simplificar denotaremos por H o conjunto $H(k)$, por h_i a alça $h_i(k)$ e vamos dividir em duas partes.

(a) $\text{int}(P_1) = \text{int}(f(H)) \cap \text{int}(H)$.

De fato, como $\text{int}(f(H) \cap H) \subset \text{int}(f(H))$ e $\text{int}(f(H) \cap H) \subset \text{int}(H)$, temos que

$$\text{int}(f(H) \cap H) \subset \text{int}(f(H)) \cap \text{int}(H)$$

Por outro lado, se $y \in \text{int}(f(H)) \cap \text{int}(H)$, então existem duas bolas abertas centradas em y tais que $y \in B(\delta) \subset f(H)$ e $y \in B(\delta') \subset H$. Assim, $y \in B(\delta) \cap B(\delta') \subset f(H) \cap H$ onde $B(\delta) \cap B(\delta')$ é um aberto, daí, $y \in \text{int}(f(H) \cap H)$. Logo,

$$\text{int}(f(H)) \cap \text{int}(H) \subset \text{int}(f(H) \cap H)$$

Portanto, $\text{int}(P_1) = \text{int}(f(H) \cap H) = \text{int}(f(H)) \cap \text{int}(H)$.

(b) $P_1 \cap f(P_1) \cap f^{-1}(P_1) \subset \text{int}(P_1)$.

De fato, se $y \in P_1 \cap f(P_1) \cap f^{-1}(P_1)$, então

- $y \in P_1 = f(H) \cap H \Rightarrow y \in h_i$ e existe um $x \in h_j$ tal que $y = f(x) \in f(h_j)$ para algum $h_i \in H$ e para algum $h_j \in H$.
- $y \in f(P_1) = f(f(H) \cap H)$. Como $y = f(x) \Rightarrow x \in f(H) \cap H$, assim existe $x' \in h_o \in H$ tal que $x = f(x') \in f(h_o)$.
- $y \in f^{-1}(P_1) = f^{-1}(f(H) \cap H) \Rightarrow f(y) \in f(H) \cap H \Rightarrow f(y) \in h_l$ para algum $h_l \in H$.

Vamos usar o fato de f ser hiperbólico com respeito ao conjunto de alças $H(k)$ (veja Definições 1.7 e 1.12) para mostrar que $y \in \text{int}(H) \cap \text{int}(f(H)) = \text{int}(H \cap f(H)) = \text{int}(P_1)$.

- Como $x \in h_j$ e $y = f(x) \in h_i$ tem-se que

1. $y = f(x) \in f(W_j^s(x)) \subset \text{int}(W_i^s(f(x))) = \text{int}(q \times D_i^{n-k})$ para algum $q \in D_i^k$ tal que $y = f(x) \in q \times D_i^{n-k}$. Então, $y \in \text{int}(q \times D_i^{n-k}) \Rightarrow$ existe um aberto $B_i^{n-k} \subset D_i^{n-k}$ tal que

$$y \in q \times B_i^{n-k} \subset q \times D_i^{n-k} \quad (2.4)$$

2. $y = f(x) \in W_j^u(f(x)) \subset \text{int}(f(W_j^u(x))) = f(\text{int}(W_j^u(x))) = f(\text{int}(D_j^k \times p'))$ para algum $p' \in D_j^{n-k}$ tal que $x \in D_j^k \times p'$. Então, $x \in \text{int}(D_j^k \times p') \Rightarrow$ existe um aberto $B_j^k \subset D_j^k$ tal que

$$x \in B_j^k \times p' \subset D_j^k \times p' \quad (2.5)$$

- Como $y \in h_i$ e $f(y) \in h_l$ tem-se que

1. $f(y) \in W_l^u(f(y)) \subset \text{int}(f(W_i^u(y))) = \text{int}(f(D_i^k \times p)) = f(\text{int}(D_i^k \times p))$ para algum $p \in D_i^{n-k}$. Então, $y \in \text{int}(D_i^k \times p) \Rightarrow$ existe um aberto $B_i^k \subset D_i^k$ tal que

$$y \in B_i^k \times p \subset D_i^k \times p \quad (2.6)$$

- Como $x' = f^{-1}(x) \in h_o$ e $f(x') = f(f^{-1}(x)) = x \in h_j$ tem-se que

1. $x \in f(W_o^s(f^{-1}(x))) \subset \text{int}(W_j^s(f(f^{-1}(x)))) = \text{int}(q' \times D_j^{n-k})$ para algum $q' \in D_j^k$. Então, $x \in \text{int}(q' \times D_j^{n-k}) \Rightarrow$ existe um aberto $B_j^{n-k} \subset D_j^{n-k}$ tal que

$$x \in q' \times B_j^{n-k} \subset q' \times D_j^{n-k} \quad (2.7)$$

Das equações (2.4) e (2.6) acima, temos que $y \in B_i^k \times B_i^{n-k} \subset D_i^k \times D_i^{n-k} = h_i$ onde $B_i^k \times B_i^{n-k}$ é um conjunto aberto. Assim,

$$y \in \text{int}(h_i) \subset \text{int}(H)$$

E das equações (2.5) e (2.7) acima, temos que $x \in B_j^k \times B_j^{n-k} \subset D_j^k \times D_j^{n-k} = h_j$ onde $B_j^k \times B_j^{n-k}$ é um conjunto aberto. Assim, $x \in \text{int}(h_j)$ e daí $y = f(x) \in f(\text{int}(h_j)) = \text{int}(f(h_j))$ o que implica que

$$y \in \text{int}(f(H))$$

Logo, $y \in \text{int}(H) \cap \text{int}(f(H)) = \text{int}(P_1)$ e portanto $P_1 \cap f(P_1) \cap f^{-1}(P_1) \subset \text{int}(P_1)$, isto é, P_1 é um bloco isolante.

Afirmção 2: (P_1, P_1^-) é um par-índice em N de S da Definição 2.9 de [16].

1. $P_1 \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_1)$ e $P_2 \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_2)$.

(a) $P_1 \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_1)$.

Se $y \in P_1 \cap f^{-1}(N) = (f(H) \cap H) \cap f^{-1}(H)$, então $f(y) \in f(H) \cap H = P_1 \Rightarrow y \in f^{-1}(P_1)$.
Portanto, $P_1 \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_1)$.

(b) $P_2 \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_2)$, isto é, $P_1^- \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_1^-)$.

Se $y \in P_1^- \cap f^{-1}(N)$, então

$$y \in P_1^- \cap f^{-1}(N) \subset P_1 \cap f^{-1}(N) \subset f^{-1}(P_1)$$

por (a) e

$$f(y) \in f(P_1^-) \Rightarrow f(y) \notin \overline{P_1 \setminus P_1^-}$$

pois, pela Proposição 2.1, $f(P_1^-) \cap \overline{P_1 \setminus P_1^-} = \emptyset$.

Assim, $f(y) \in P_1 \cap \overline{(P_1 \setminus P_1^-)^c} \subseteq P_1^-$, logo, $y \in f^{-1}(P_1^-)$. Portanto, $P_1^- \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_1^-)$.

2. $\text{Inv}^-(N) \subseteq \text{int}_N(P_1)$ e $\text{Inv}^+(N) \subseteq N \setminus P_1^-$.

(a) $\text{Inv}^-(N) \subseteq \text{int}_N(P_1)$:

a.1 $\text{Inv}^-(N) = \text{Inv}^-(P_1)$.

Como $P_1 \subset N$, então $\text{Inv}^-(P_1) \subseteq \text{Inv}^-(N)$. Por outro lado, se $x \in \text{Inv}^-(N)$, então $f^{-i}(x) \in N = H, \forall i \geq 0$, isto é,

$$\begin{array}{lcl} x \in H & & \\ f^{-1}(x) \in H & \Rightarrow & x \in f(H) \cap H \\ f^{-2}(x) \in H & \Rightarrow & f^{-1}(x) \in f(H) \cap H \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{-k}(x) \in H & \Rightarrow & f^{-k+1}(x) \in f(H) \cap H \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

e assim $f^{-i}(x) \in f(H) \cap H = P_1, \forall i \geq 0 \Rightarrow x \in \text{Inv}^-(P_1)$. Logo, $\text{Inv}^-(N) \subseteq \text{Inv}^-(P_1)$.

Portanto, $\text{Inv}^-(N) = \text{Inv}^-(P_1)$.

a.2 $\text{Inv}^-(P_1) \subseteq \text{int}_N(P_1)$.

Se $y \in \text{Inv}^-(P_1) \subseteq P_1 \cap f(P_1) = (f(H) \cap H) \cap f(f(H) \cap H)$. Assim,

$$\begin{aligned} y \in H &\Rightarrow y \in h_i \text{ para algum } h_i \in H \\ y \in f(H) &\Rightarrow y = f(x) \text{ para algum } x \in H \\ &\quad \text{e } x \in h_j \text{ para algum } h_j \in H \\ y = f(x) \in f(f(H) \cap H) &\Rightarrow x = f(x') \text{ para algum } x' \in H \\ &\quad \text{e } x' \in h_l \text{ para algum } h_l \in H \end{aligned}$$

Como $x \in h_j$ e $f(x) = y \in h_i$, temos que

$$y = f(x) \in W_i^u(f(x)) \subset \text{int}(f(W_j^u(x))) = f(\text{int}(W_j^u(x)))$$

e $y = f(x) \in f(\text{int}(D_j^k \times p)) \Rightarrow x \in \text{int}(D_j^k \times p)$, e daí existe um aberto $B_j^k \subset D_j^k$ tal que

$$x \in B_j^k \times p \subset D_j^k \times p \quad (2.8)$$

Como $f^{-1}(x) = x' \in h_l$ e $x = f(f^{-1}(x)) = f(x') \in h_j$, temos que

$$x \in f(W_l^s(f^{-1}(x))) \subset \text{int}(W_j^s(f(f^{-1}(x))))$$

e $x \in \text{int}(W_j^s(x)) = \text{int}(q \times D_j^{n-k})$, e daí existe um aberto $B_j^{n-k} \subset D_j^{n-k}$ tal que

$$x \in q \times B_j^{n-k} \subseteq q \times D_j^{n-k} \quad (2.9)$$

De 2.8 e 2.9 tem-se que

$$x \in B_j^k \times B_j^{n-k} \subset D_j^k \times D_j^{n-k} = h_j$$

onde $B_j^k \times B_j^{n-k}$ é um conjunto aberto. Assim,

$$y = f(x) \in f(B_j^k \times B_j^{n-k}) \subset f(h_j) \subset f(H)$$

onde $f(B_j^k \times B_j^{n-k})$ é um aberto. Logo,

$$y \in f(B_j^k \times B_j^{n-k}) \cap H \subset f(H) \cap H = P_1$$

o que implica que $y \in \text{int}_N(P_1)$.

Portanto, $\text{Inv}^-(P_1) \subseteq \text{int}_N(P_1)$.

(b) $\text{Inv}^+(N) \subseteq N \setminus P_1^-$:

Se $x \in Inv^+(N)$, então $f^i(x) \in N, \forall i \geq 0$. Suponhamos, por absurdo, que $x \in P_1^-$. Assim, $x \in P_1^-$ e $x \in f^{-1}(N)$, temos, por 1, que $P_1^- \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_1^-)$ e daí $x \in f^{-1}(P_1^-)$ o que implica

$$f(x) \in P_1^- \subset P_1 \quad (2.10)$$

Como $x \in P_1^-$, então

$$f(x) \in f(P_1^-) \subset f(P_1) \quad (2.11)$$

E como $f(x) \in P_1^-$ e $f(x) \in f^{-1}(N)$, então

$$f(x) \in P_1^- \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(P_1^-) \subset f^{-1}(P_1) \quad (2.12)$$

De (2.10), (2.11) e (2.12) e do fato de P_1 ser um bloco isolante, temos que

$$f(x) \in P_1 \cap f(P_1) \cap f^{-1}(P_1) \subseteq int(P_1)$$

o que é um absurdo, pois $x \in P_1^-$. Logo, $x \notin P_1^-$.

Portanto, $Inv^+(N) \subseteq N \setminus P_1^-$.

3. $P_1 \setminus P_1^- \subseteq int(N) \cap f^{-1}(int(N))$.

Se $x \in P_1 \setminus P_1^-$, temos que $x \in P_1$ e $x \notin P_1^-$, isto é, $x \in P_1$ e $f(x) \in int(P_1)$, e daí

$$x \in f^{-1}(int(P_1)) \subseteq f^{-1}(int(N)) \quad (2.13)$$

pois $P_1 \subseteq N \Rightarrow int(P_1) \subseteq int(N)$.

Por outro lado, suponhamos, por absurdo, que $x \notin int(N)$, então $x \in int(P_1) \Rightarrow f^{-1}(x) \in P_1^-$. Como, pela Proposição 2.1, $f(P_1^-) \cap \overline{P_1 \setminus P_1^-} = \emptyset$ temos que

$$x = f(f^{-1}(x)) \in f(P_1^-) \Rightarrow x \notin \overline{P_1 \setminus P_1^-}$$

que é um absurdo, pois $x \in P_1 \setminus P_1^-$. Logo,

$$x \in int(N) \quad (2.14)$$

De (2.13) e (2.14), temos que $x \in int(N) \cap f^{-1}(int(N))$.

Portanto, $P_1 \setminus P_1^- \subseteq int(N) \cap f^{-1}(int(N))$.

Assim, pelos itens 1, 2 e 3, temos que (P_1, P_1^-) é um par-índice em N de S da Definição 2.9 de [16]. ■

2.4.2 Índices de Conley

Veremos que o fato do índice de Conley cohomológico reduzido da Definição 2.8 e do índice de Conley cohomológico da Definição 2.14 da ferradura serem idênticos, como vimos no Exemplos 2.4 e 2.7, não é mera coincidência.

Queremos verificar que as Definições do índice de Conley cohomológico reduzido 2.8 de Franks e Richeson [7] e do índice de Conley cohomológico 2.14 de Mrozek [16], para f um homeomorfismo e $P = (N, L)$ um par de compactos que satisfaz as Definições 2.9 e 2.4 para um conjunto invariante isolado S e tal que a homologia com coeficientes tomados em um corpo, $H^*(N_L, [L])$, é um espaço vetorial de dimensão finita, são isomorfos. Para isso, basta mostrar que

$$\mathcal{L}(H^*(N_L, [L])) \cong CH^*(S)$$

são isomorfos.

É um fato conhecido que

Proposição 2.6. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear. Então*

$$V = gKerT \oplus gImT.$$

Portanto,

$$\frac{V}{gKerT} = gImT.$$

Demonstração:

Para mostrar esta soma direta basta verificar as seguintes igualdades:

$$(1) \quad gKerT \cap gImT = \{0\}$$

$$(2) \quad dimV = dim(gKerT) + dim(gImT)$$

$$(1) \quad gKerT \cap gImT = \{0\}.$$

Tome $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ uma base do subespaço $gKerT$ tal que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n\}$ é uma base de V .

Para cada $i = 1, \dots, l$, existe um $r_i > 0$ tal que $T^{r_i}(\alpha_i) = 0$. Tome $r = \max\{r_1, \dots, r_l\} > 0$.

Se $v \in gKerT \cap gImT$, então

$$T^r(v) = 0 \text{ e para todo } k > 0, \exists v_k \in V \text{ tal que } v = T^k(v_k).$$

Daí, como $r > 0$, existe um $v_r \in V$ tal que $v = T^r(v_r)$ e $0 = T^r(v) = T^{2r}(v_r) \Rightarrow v_r \in gKerT$. Assim, existem $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}$ tais que $v_r = a_1\alpha_1 + \dots + a_l\alpha_l$ e pela linearidade de

T tem-se que

$$v = T^r(v_r) = T^r(a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l) = a_1T^r(\alpha_1) + \cdots + a_lT^r(\alpha_l) = 0.$$

Portanto, $gKerT \cap gImT = \{0\}$.

(2) $dimV = dim(gKerT) + dim(gImT)$.

Para verificar isto, vamos mostrar que $\beta = \{T^r(\alpha_1), \dots, T^r(\alpha_n)\}$ é uma base de $gImT$.

Primeiramente, veremos que β gera $gImT$. Seja $w \in gImT$, então para todo $k > 0$ existe um $v_k \in V$ tal que $w \in T^k(v_k)$. Em particular, $w = T^r(v_r)$ e $v_r = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$, logo

$$\begin{aligned} w = T^r(v_r) &= a_1T^r(\alpha_1) + \cdots + a_lT^r(\alpha_l) + a_{l+1}T^r(\alpha_{l+1}) + \cdots + a_nT^r(\alpha_n) \\ &= a_{l+1}T^r(\alpha_{l+1}) + \cdots + a_nT^r(\alpha_n). \end{aligned}$$

Portanto, β gera $gImT$.

Provaremos agora que β é linearmente independente. Seja

$$0 = a_{l+1}T^r(\alpha_{l+1}) + \cdots + a_nT^r(\alpha_n) = T^r(a_{l+1}\alpha_{l+1} + \cdots + a_n\alpha_n)$$

então $a_{l+1}\alpha_{l+1} + \cdots + a_n\alpha_n \in gKerT$. Como $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ é base de $gKerT$, temos que $a_{l+1} = \dots = a_n = 0$, o que prova que β é linearmente independente.

Logo, $\beta = \{T^r(\alpha_1), \dots, T^r(\alpha_n)\}$ é uma base de $gImT$.

Portanto, $dim(gKerT) = l$ e $dim(gImT) = n - l$ e assim

$$dimV = n = l + (n - l) = dim(gKerT) + dim(gImT).$$

Assim, concluímos que

$$V = gKerT \oplus gImT.$$

■

Como $f_P^* : H^*(N_L, [L]) \rightarrow H^*(N_L, [L])$ é uma aplicação linear de um espaço vetorial de dimensão finita nele mesmo, temos que o índice de Conley cohomológico 2.14 de M. Mrozek

$$\mathcal{L}(H^*(N_L, [L])) = LM(H^*(N_L, [L])) = \frac{H^*(N_L, [L])}{gKer(f_P^*)}$$

e assim pela Proposição 2.6 obtemos que

$$\mathcal{L}(H^*(N_L, [L])) = \frac{H^*(N_L, [L])}{gKer(f_P^*)} = gIm(f_P^*) = CH^*(S).$$

Portanto, temos que o índice de Conley cohomológico reduzido 2.8 de D. Richeson e o índice de Conley cohomológico 2.14 de M. Mrozek são isomorfos neste caso especial no qual trabalharemos nesta tese.

Capítulo 3

O índice de Conley para conjuntos básicos zero-dimensionais

Neste capítulo, provamos no Teorema 3.1 um resultado que estabelece uma relação entre o índice de Conley e a matriz de estrutura de um conjunto básico zero-dimensional e no Teorema 3.2 uma caracterização através forma de Jordan real do isomorfismo do índice de Conley também de um conjunto básico zero-dimensional. Na Seção 3.2, demonstramos uma caracterização da função Zeta e das desigualdades de Morse via o índice de Conley.

Trabalhamos com a versão homológica do índice de Conley reduzido da Definição 2.8, nos referimos doravante como o índice de Conley homológico.

3.1 O índice de Conley e a matriz de estrutura para difeomorfismos Smale

Utilizamos o Teorema 1.6 para relacionar o isomorfismo que aparece no índice de Conley com a matriz de estrutura de conjunto básico zero-dimensional.

Primeiramente, mostramos que o par (M_i, M_{i-1}) de uma filtração associada a f é um par-filtração para o conjunto básico Ω_i .

Proposição 3.1. *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico. Sejam $\{\Omega_i\}_{i=0}^n$ os conjuntos básicos de f e $\{M_i\}_{i=0}^n$ uma filtração associada. Então, (M_i, M_{i-1}) é um par-filtração para Ω_i para cada $i = 0, \dots, n$.*

Demonstração:

Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov tal que existem valores críticos c_0, \dots, c_n tais que $M_i = \phi^{-1}((-\infty, c_i])$ para todo $i = 0, \dots, n$.

Observe que M_i é compacto para todo $i = 0, \dots, n$.

Mostremos que o par (M_i, M_{i-1}) satisfaz as três condições de par-filtração para Ω_i .

1. $\overline{M_i \setminus M_{i-1}}$ é uma vizinhança isolante para Ω_i .

Da Definição 1.13 de filtração e do fato de f ser difeomorfismo, temos que

$$\text{Inv}(\overline{M_i \setminus M_{i-1}}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{M_i \setminus M_{i-1}}) = \Omega_i.$$

2. M_{i-1} é uma vizinhança de $M_i^- = \{x \in M_i \mid f(x) \notin \text{int} M_i\}$, pois como $f(M_i) \subset \text{int} M_i$, temos que $M_i^- = \emptyset \subset M_{i-1}$.
3. $f(M_{i-1}) \cap \overline{M_i \setminus M_{i-1}} = \emptyset$, pois como $f(M_{i-1}) \subset \text{int} M_{i-1}$ e $\text{int} M_{i-1} \cap \overline{M_i \setminus M_{i-1}} = \emptyset$ temos que $f(M_{i-1}) \cap \overline{M_i \setminus M_{i-1}} = \emptyset$.

Portanto, (M_i, M_{i-1}) é um par-filtração para o conjunto básico Ω_i para todo $i = 0, \dots, n$. ■

Agora, provamos, na Proposição 3.2, que se $P = (N, L)$ é um par-filtração para um conjunto invariante isolado S , então $f_* : H_k(N, L) \rightarrow H_k(N, L)$ e $(f_P)_* : H_k(N_L, [L]) \rightarrow H_k(N_L, [L])$ são conjugadas.

Proposição 3.2. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $P = (N, L)$ um par-filtração para um conjunto invariante isolado S . Temos que*

$$f_* : H_k(N, L) \rightarrow H_k(N, L) \quad \text{e} \quad (f_P)_* : H_k(N_L, [L]) \rightarrow H_k(N_L, [L])$$

onde f_P é a aplicação espaço pontuado associado a P , são conjugadas.

Demonstração: Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ \frac{N}{L} & \xrightarrow{f_P} & \frac{N}{L} \end{array}$$

onde $q : N \rightarrow \frac{N}{L}$ é aplicação quociente.

Temos que o diagrama acima é comutativo. De fato,

(I) $x \in N \setminus L$

(I.a) Se $f(x) \in N \setminus L$, então $q \circ f(x) = [f(x)]$ e $f_P \circ q(x) = f_P([x]) = [f(x)]$.

(I.b) Se $f(x) \in L$, então $q \circ f(x) = [L]$ e $f_P \circ q(x) = f_P([x]) = [f(x)] = [L]$.

(II) $x \in L$

Se $x \in L \Rightarrow f(x) \in L$. Logo, $q \circ f(x) = [L]$ e $f_P \circ q(x) = f_P([L]) = [L]$.

Portanto,

$$q \circ f = f_P \circ q.$$

Daí, temos que as suas aplicações induzidas em homologia coincidem, isto é, $(q \circ f)_* = (f_P \circ q)_*$, ou seja, $q_* \circ f_* = (f_P)_* \circ q_*$ e portanto $q_* : H_k(N, L) \rightarrow H_k(N_L, [L])$ é um isomorfismo que conjuga f_* e $(f_P)_*$. ■

Para provarmos o Teorema 3.1 que relaciona a parte não-nilpotente de $f_{*u} : H_u(M_i, M_{i-1}; F) \rightarrow H_u(M_i, M_{i-1}; F)$, f_{*u}^+ , com o isomorfismo $\chi_u(\Omega)$, precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.1. *Sejam $e_1 : V_1 \rightarrow V_1$ e $e_2 : V_2 \rightarrow V_2$ dois endomorfismos, onde V_1 e V_2 são espaços vetoriais. Suponhamos que e_1 e e_2 são conjugados, então*

(a) *As partes não-nilpotentes e_1^+ e e_2^+ de e_1 e e_2 , respectivamente, são conjugadas.*

(b) *Se e_1 é nilpotente, então e_2 também é nilpotente.*

Demonstração:

(a) Para cada $i = 1, 2$ temos

$$(V_i)_0 = \{v \in V_i \mid e_i^k(v) = 0 \text{ para algum } k > 0\} \text{ e } e_i^+ : \frac{V_i}{(V_i)_0} \rightarrow \frac{V_i}{(V_i)_0}$$

Como e_1 e e_2 são conjugados existe um isomorfismo $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $e_2 \circ \psi = \psi \circ e_1$. Vamos provar que $\psi' : \frac{V_1}{(V_1)_0} \rightarrow \frac{V_2}{(V_2)_0}$ a induzida de ψ é um isomorfismo que conjuga e_1^+ e e_2^+ . Para isso basta provar que $\psi((V_1)_0) = (V_2)_0$.

- $\psi((V_1)_0) \subset (V_2)_0$, pois como $\psi(v) \in \psi((V_1)_0)$, então existe $k > 0$ tal que $e_1^k(v) = 0$ e

$$\begin{aligned} e_2^k(\psi(v)) &= e_2^{k-1}(e_2 \circ \psi(v)) = e_2^{k-1}(\psi \circ e_1(v)) = e_2^{k-2}(e_2 \circ \psi(e_1(v))) \\ &= e_2^{k-2}(\psi \circ e_1^2(v)) \\ &= \dots = \\ &= \psi \circ e_1^k(v) = \psi(0) = 0 \end{aligned}$$

o que implica que $\psi(v) \in (V_2)_0$.

- $\psi^{-1}((V_2)_0) \subset (V_1)_0$. Prova-se esta inclusão da mesma maneira que provamos a anterior.

Portanto, ψ' é um isomorfismo que conjuga e_2^+ e e_1^+ .

(b) Como $e_1 = \psi \circ e_2 \circ \psi^{-1}$ e $e_1^l = 0$, temos que $0 = e_1^l = \psi \circ e_2^l \circ \psi^{-1} \Rightarrow e_2^l = 0$. ■

Teorema 3.1. *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico. Seja Ω_i um conjunto básico zero-dimensional de índice u e denote por*

$$Con_*(\Omega_i) = (CH_*(\Omega_i), \chi_*(\Omega_i))$$

o índice de Conley homológico.

Se A é uma matriz de estrutura $n \times n$ para Ω_i e F é um corpo, então

(a) $\chi_u(\Omega_i)$ é conjugado a parte não-nilpotente A^+ de $A : F^n \rightarrow F^n$;

(b) $Con_k(\Omega_i) = (0, 0)$ para todo $k \neq u$.

Demonstração:

Tome $\{M_j\}$ uma filtração associada a f . Pelo Teorema 1.6, A^+ é conjugada a parte não-nilpotente f_{*u}^+ de $f_{*u} : H_u(M_i, M_{i-1}) \rightarrow H_u(M_i, M_{i-1})$.

Por outro lado, pelas Proposições 3.1 e 3.2, temos que

$$f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1})$$

e

$$(f_P)_{*k} : H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]) \rightarrow H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}])$$

são conjugadas para todo k e conseqüentemente suas partes não-nilpotentes f_{*u}^+ e $(f_P)_{*u}^+$ também o são.

Provamos, agora, que $(f_P)_{*u}^+ = \chi_u(\Omega_i)$. Temos que $(f_P)_{*u}^+$ é a aplicação induzida por $(f_P)_{*u}$ no espaço quociente

$$\frac{H_u(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}])}{(H_u(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]))_0}$$

onde

$$\begin{aligned} (H_u(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]))_0 &= \{v \in H_u(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]) \mid (f_P)_{*u}^k(v) = 0 \text{ para algum } k > 0\} \\ &= gKer((f_P)_{*u}) \end{aligned}$$

E $\chi_u(\Omega_i)$ é a aplicação induzida por $(f_P)_{*u}$ no espaço

$$CH^*(\Omega_i) = (gIm(f_P)_{*u}) = \frac{H_u(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}])}{gKer((f_P)_{*u})}$$

Portanto,

$$\chi_u(\Omega_i) = (f_P)_{*u}^+ \quad (3.1)$$

Como $\chi_u(\Omega_i) = (f_P)_{*u}^+$ é conjugada a f_{*u}^+ e, pelo Teorema 1.6, f_{*u}^+ é conjugada a A^+ , temos que $\chi_u(\Omega_i)$ é conjugada a A^+ . E com isso temos provado (a).

Ainda, pelo Teorema 1.6, temos que f_{*k} é nilpotente para todo $k \neq u$. Como $(f_P)_{*k}$ é conjugada a f_{*k} , então $(f_P)_{*k}$ também é nilpotente para todo $k \neq u$. Assim, $gKer((f_P)_{*k}) = H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}])$ para todo $k \neq u$. Portanto,

$$CH_k(\Omega_i) = \frac{H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}])}{gKer((f_P)_{*k})} \approx 0, \forall k \neq u,$$

o que implica $\chi_k(\Omega_i) = 0$ para todo $k \neq u$. Isto prova (b). ■

Como consequência do Teorema 3.1, obtemos no Corolário 3.1 uma condição suficiente para que o índice de Conley homológico de um conjunto básico seja nulo. Para tanto, vamos utilizar o seguinte lema.

Lema 3.2 ([6]). *Suponha que $f : M \rightarrow M$ tem um conjunto recorrente por cadeia hiperbólico, com conjuntos básicos $\{\Omega_i\}$ e filtração associada $\{M_i\}$.*

- (a) *Se $\dim W^u(\Omega_i) < k$ (em particular, se $\dim \Omega_i + u(i) < k$), então $f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; F) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; F)$ é nilpotente para qualquer corpo de coeficientes F .*
- (b) *Dualmente, se $\dim W^s(\Omega_i) < (\dim M) - k$, ou se $u(i) - \dim \Omega_i > k$, então $f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; F) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; F)$ é nilpotente.*

Assim, provamos o seguinte corolário:

Corolário 3.1. *Suponha que $f : M \rightarrow M$ tem conjunto recorrente por cadeia hiperbólico, com conjuntos básicos $\{\Omega_i\}$ e filtração associada $\{M_i\}$.*

- (a) *Se $\dim W^u(\Omega_i) < k$ (em particular, se $\dim \Omega_i + u(i) < k$), então $Con_k(\Omega_i) = (0, 0)$ para qualquer corpo de coeficientes F .*
- (b) *Dualmente, se $\dim W^s(\Omega_i) < (\dim M) - k$, ou se $u(i) - \dim \Omega_i > k$, então $Con_k(\Omega_i) = (0, 0)$.*

Demonstração:

Pelo Lema 3.2, temos que se $\dim W^u(\Omega_i) < k$ (em particular, se $\dim \Omega_i + u(i) < k$), então $f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; F) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; F)$ é nilpotente para qualquer corpo de coeficientes F . Por outro lado, pela Proposição 3.2, $(f_P)_{*k}$ e f_{*k} são conjugadas. Daí, $(f_P)_{*k}$ também é

nilpotente se $\dim W^u(\Omega_i) < k$ (em particular, se $\dim \Omega_i + u(i) < k$). Logo, $gKer((f_P)_{*k}) = H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]; F)$, o que implica que

$$CH_k(\Omega_i) = \frac{H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]; F)}{gKer((f_P)_{*k})} = 0 \text{ e } \chi_k(\Omega_i) = (f_P)_{*k}|_{CH_k(\Omega_i)} = 0$$

portanto $Con_k(\Omega_i) = (CH_k(\Omega_i), \chi_k(\Omega_i)) = (0, 0)$, para todo k tal que $\dim W^u(\Omega_i) < k$. Isto prova a parte (a) da proposição.

A parte (b) é demonstrada de maneira análoga. ■

O Corolário 3.2 é uma outra consequência do Teorema 3.1 para difeomorfismos Smale.

Corolário 3.2. *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo Smale. Para qualquer conjunto básico de f , Ω_i , de índice u , temos que se A é uma matriz de estrutura $n \times n$ para Ω_i e F é um corpo, então*

(a) $\chi_u(\Omega_i)$ é conjugado a parte não-nilpotente A^+ de $A : F^n \rightarrow F^n$;

(b) $Con_k(\Omega_i) = (0, 0)$ para todo $k \neq u$.

onde $Con_*(\Omega_i) = (CH_*(\Omega_i), \chi_*(\Omega_i))$ é o índice de Conley homológico.

Como os difeomorfismos Morse-Smale são um caso particular de difeomorfismos Smale, o Teorema 3.1, se aplica a este caso. Isto é, podemos calcular o índice de Conley de seus conjuntos básicos através de suas matrizes de estrutura. Deste modo vamos ver que o índice de Conley obtido desta maneira coincide com o obtido por Mrozek como vimos nos Teoremas 2.11 e 2.12.

Corolário 3.3. *Sejam M uma variedade compacta, $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo Morse-Smale. Para qualquer conjunto básico de f , Ω_i de índice u , temos que existe uma matriz de estrutura A de Ω_i da forma*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times m},$$

e

(a) $\chi_u(\Omega_i)$ é conjugado a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times m}$$

(b) $Con_k(\Omega_i) = (0, 0)$ para todo $k \neq u$.

onde $Con_*(\Omega_i) = (CH_*(\Omega_i), \chi_*(\Omega_i))$ é o índice de Conley homológico.

Demonstração:

Como a matriz de estrutura de uma órbita periódica tem a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times m}$$

e sua parte nilpotente é nula, isto é $A^+ = A$, usando o Teorema 3.1, temos o desejado. ■

No exemplo abaixo vamos ilustrar a facilidade que temos ao calcular o índice de Conley usando o Teorema 3.1.

Exemplo 3.1. Vamos calcular novamente o índice de Conley da ferradura mergulhada em S^2 do Exemplo 2.3 usando agora o Teorema 3.1.

Para isto calculemos a matriz de estrutura do conjunto básico de índice 1

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q).$$

Seja o conjunto de alças $H = H_0 \cup H_1$, então a matriz de estrutura de Λ com respeito a esse conjunto de alças é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

E assim, como $A^2 = 0$, temos que $(A)_0 = gKer(A) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, o que implica que $A^+ = 0$. Logo,

$$Con_1(\Lambda) = (0, 0)$$

Portanto, o índice de Conley homológico discreto da ferradura é

$$Con_q(\Lambda) = (0, 0), \forall q.$$

Observe que não precisamos de nenhum par-índice ou par-filtração e nem aplicação-índice ou aplicação espaço pontuado para encontrar o índice de Conley, isto é, usamos apenas as informações dinâmicas da ferradura e não as suas informações homológicas (ou cohomológicas).

3.1.1 O índice de Conley e a forma de Jordan real da matriz de estrutura

Vimos no início desta seção que o isomorfismo χ^* , do índice de Conley de um conjunto básico zero-dimensional de um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico, é conjugado à parte não-nilpotente da matriz de estrutura associada. Do ponto de vista prático, trabalhar com a matriz de estrutura na sua forma de Jordan facilita a determinação das partes nilpotente e não-nilpotente dessa matriz, pois a parte não-nilpotente está relacionada aos autovalores não-nulos e a parte nilpotente ao autovalor nulo.

Desta forma provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e Ω um conjunto básico zero-dimensional de índice u e denote por*

$$Con_*(\Omega) = (CH_*(\Omega), \chi_*(\Omega_i))$$

o índice de Conley homológico.

Seja A a matriz de estrutura $n \times n$ associada ao Ω e $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os seus autovalores disjuntos, então $\chi_u(\Omega)$ é conjugado à forma de Jordan real da matriz A após a retirada dos blocos de Jordan correspondentes ao autovalor nulo. Isto é, $\chi_u(\Omega)$ é conjugado a

$$1. J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ se } r = n \text{ e } \lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

isto é, basta sabermos como é a parte não-nilpotente dos seguintes possíveis blocos de Jordan real associados a um autovalor λ

$$\bullet J(1) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{p \times p} \quad \text{se } \lambda \neq 0$$

$$\bullet J(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p \times p} \quad \text{se } \lambda = 0$$

$$\bullet J(3) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \boxed{\begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix}} & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix}} \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}} \end{array} \right]_{p \times p} \quad \begin{array}{l} \text{se } \lambda = a + bi \\ \text{com } b \neq 0. \end{array}$$

$$\text{Caso 1: } J(1) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{p \times p} \quad \text{se } \lambda \neq 0.$$

Vamos mostrar que $J(1)^+ = J(1)$. Como $\lambda \neq 0$ temos que

$$J(1)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_1 \lambda^{k-1} & \cdots & C_{p-2} \lambda^{k-(p-2)} & C_{p-1} \lambda^{k-(p-1)} \\ 0 & \lambda^k & \cdots & C_{p-3} \lambda^{k-(p-3)} & C_{p-2} \lambda^{k-(p-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^k & C_1 \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}_{p \times p}$$

onde $C_i = \binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-(i-1))}{i!}$, $\forall i = 1, \dots, p-1$. Se $k \geq p$, então $C_i \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, p-1$ e se $k < p$, então existe um $k \leq i_0 < p$ tal que $C_i \neq 0$ se $i = 1, \dots, i_0$ e $C_i = 0$ para $i \geq i_0$.

Daí, $J(1)^k(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \lambda^k x_1 + C_1 \lambda^{k-1} x_2 + \cdots + C_{p-1} \lambda^{k-(p-1)} x_p &= 0 \\ \lambda^k x_2 + C_{p-2} \lambda^{k-(p-2)} x_p &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda^k x_{p-1} + C_1 \lambda^{k-1} x_p &= 0 \\ \lambda^k x_p &= 0 \end{aligned}$$

se, e somente se, $x_p = x_{p-1} = \cdots = x_2 = x_1 = 0$.

Logo, $\text{Ker} J(1)^k = \{(0, \dots, 0)\}$ para todo $k > 0$. Portanto, $g\text{Ker} J(1) = \{(0, \dots, 0)\}$ e com isso concluímos que $g\text{Im} J(1) = \frac{\mathbb{F}^p}{g\text{Ker} J(1)} = \mathbb{F}^p$, o que implica que $J(1)^+ = J(1)$.

Caso 2: $J(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p \times p}$.

Observe que a matriz $J(2)$ acima é nilpotente, pois $J(2)^p = 0$. Logo, $g\text{Ker} J(2) = \mathbb{F}^p$, o que implica que $g\text{Im} J(2) = \{(0, \dots, 0)\}$ e portanto $J(2)^+ = 0$.

Caso 3:

$J(3) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix} & & & & \\ & & \begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{matrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{matrix} \\ & & & & & & \begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix} \end{bmatrix}_{p \times p}$ se $\lambda = a + bi$ com $b \neq 0$.

Podemos ver a matriz $J(3)$ acima como uma matriz da forma

$$J(3) = \begin{pmatrix} D & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D \end{pmatrix}_{p \times p}$$

onde $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, temos que

$$J(3)^k = \begin{pmatrix} D^k & C_1 D^{k-1} & \cdots & C_{p'-2} D^{k-(p'-2)} & C_{p'-1} D^{k-(p'-1)} \\ 0 & D^k & \cdots & C_{p'-3} D^{k-(p'-3)} & C_{p'-2} D^{k-(p'-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D^k & C_1 D^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D^k \end{pmatrix}$$

onde $p' = \frac{p}{2}$ e $C_i = \binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-(i-1))}{i!}$, $\forall i = 1, \dots, p' - 1$.

Daí, $\det(J(3)^k) = \det(D^k) \cdots \det(D^k) \neq 0$, pois $\det D^k \neq 0$ (como veremos a seguir). Logo, temos que as colunas de $J(3)^k$ formam um conjunto linearmente independente. Daí, $\text{Ker} J(3)^k = \{(0, \dots, 0)\}$, $\forall k > 0$, o que implica que $g\text{Ker} J(3) = \{(0, \dots, 0)\}$. Portanto, $J(3)^+ = J(3)$.

Afirmção 1: Se $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos que $\det D^k \neq 0$, $\forall k > 0$.

Vamos demonstrar essa afirmação usando indução sobre k .

Para $k = 1$, temos que $D^1 = D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $\det D = a^2 + b^2 \neq 0$.

Suponhamos que o resultado é válido para k , isto é, $\det D^k \neq 0$. Vamos provar que o resultado é válido para $k + 1$.

Temos que

$$\det D^{k+1} = \det(D^k \cdot D) = \det D^k \cdot \det D \neq 0$$

pois $\det D^k \neq 0$ pela hipótese de indução e $\det D = a^2 + b^2 \neq 0$ como vimos acima.

Portanto, temos concluída a demonstração da afirmação 1.

Afirmção 2: Se $D = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ com $b \neq 0$, temos que $\det D^k \neq 0, \forall k > 0$.

Temos que para todo $k > 0$

$$D^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} b^{2k} & 0 \\ 0 & b^{2k} \end{pmatrix} \quad D^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -b^{2k+1} \\ b^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto, como $b \neq 0$, temos que

$$\det D^{2k} = (-1)^k b^{2k} b^{2k} \neq 0 \quad \det D^{2k+1} = (-1)^k b^{2k+1} b^{2k+1} \neq 0 .$$

E assim concluímos a demonstração da afirmação 2.

Das afirmações 1 e 2 podemos concluir que $\det D^k \neq 0$ para todo $k > 0$ quando $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ com $b \neq 0$, como queríamos demonstrar. ■

Matrizes de estrutura 2×2

Quando a matriz de estrutura for 2×2 , temos que a forma de Jordan Real nos dá uma classificação dos sistemas que geram matrizes de estrutura 2×2 .

O Corolário 3.4 a seguir segue como consequência imediata do Teorema 3.2 observando que a forma de Jordan real de matrizes 2×2 tem uma das seguintes formas

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Corolário 3.4. *Sejam M uma variedade e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico. Seja Ω um conjunto básico zero-dimensional de índice u e $Con_*(\Omega) = (CH_*(\Omega), \chi_*(\Omega))$ o seu índice de Conley homológico discreto, com coeficientes em um corpo. Se existir uma matriz de estrutura A de tamanho 2×2 para Ω , então $\chi_u(\Omega)$ é conjugado a uma matriz de uma das seguintes formas*

$$(0), (\lambda_i), \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

onde $i = 1, 2$ e podemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $a = 0$, $a = b$.

Exemplo 3.2. Voltemos ao Exemplo 2.5. Temos que a matriz de estrutura do conjunto

básico $\Lambda = Inv(N_1 \cup N_2)$ com respeito ao conjunto de alças $H = N_1 \cup N_2$ é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

que é 2×2 .

O autovalor de A é igual a $\lambda = 1$, isto é, A tem um autovalor de multiplicidade algébrica igual a 2. A multiplicidade geométrica é igual a

$$\dim(Ker(A - I)) = \dim \left(Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right) = 1.$$

Assim, pelo Teorema 3.4, temos que $\chi_1(\Lambda)$ é conjugado a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar que de fato o índice de Conley que encontramos no Exemplo 2.5

$$\chi_1(\Lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

é conjugado a $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De fato, tome o isomorfismo

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\chi_1(\Lambda)h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = hJ.$$

3.2 O índice de Conley, a função Zeta e as desigualdades de Morse

Nesta seção vamos explorar as caracterizações da função zeta e das desigualdades de Morse encontradas em [6], com objetivo de estabelecer uma relação entre essas duas ferramentas com o isomorfismo do índice de Conley homológico χ_* .

3.2.1 Função Zeta

Provamos na Proposição 3.4 uma caracterização da função Zeta homológica usando o índice de Conley homológico. Esta não é a primeira caracterização da função Zeta utilizando o índice de Conley. No artigo [15] de McCord, Mischaikow e Mrozek encontramos um resultado nesta direção para uma aplicação de atração compacta.

Na Proposição 3.4 utilizamos a seguinte caracterização da função Zeta homológica de Franks.

Proposição 3.3 ([6]). *Suponha que $f : M \rightarrow M$ tem um conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e conjuntos básicos $\{\Omega_i\}_{i=0}^l$, então a função Zeta homológica de $f|_{\Omega_i}$ é*

$$Z_i(f) = \prod_{k=0}^{\dim M} \det(I - f_{*k}t)^{(-1)^{k+1}}$$

onde $f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; \mathbb{R})$ é a induzida por f , e $\{M_i\}$ é uma filtração associada a f e a **função Zeta homológica de f** é

$$Z(f) = \prod_{i=0}^l Z_i(f)$$

A relação entre a função Zeta homológica com o isomorfismo do índice de Conley homológico $\chi_k(\Omega_i)$ e dada na Proposição 3.4 e para sua demonstração precisamos do seguinte lema.

Lema 3.3. *Seja $e : V \rightarrow V$ um endomorfismo onde V é um espaço vetorial de dimensão finita n . Então, se e^+ e e^- são, respectivamente, as partes não-nilpotente e nilpotente de e , temos que*

(a) e^- é nilpotente e $\det(I - e^-) = 1$.

(b) $\det(I - e) = \det(I - e^+)$

Demonstração:

Seja a base β_1 tal que $e = [e]_{\beta_1}$.

Defina $V_0 = \{x \in V \mid e^k(x) = 0 \text{ para algum } k > 0\}$. Assim,

$$V = \frac{V}{V_0} \oplus V_0$$

Tome $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ uma base de $\frac{V}{V_0}$ e $\omega_{r+1}, \dots, \omega_n$ uma base de V_0 tal que $\beta_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n\}$ é uma base de V .

Logo,

$$e^+ = [e]_{\beta_2}|_{V_0^+} \text{ e } e^- = [e]_{\beta_2}|_{V_0^-}.$$

Temos que V_0 é um subespaço invariante por e , pois se $v \in V_0$, então $\exists k > 0$ tal que $e^k(v) = 0$. Logo, $e^{k-1}(e(v)) = e^k(v) = 0$, então $e(v) \in V_0$. Assim, se $v \in V_0$, temos que $e(v) \in V_0$ e

$$e(v) = 0 \cdot \alpha_1 + \dots + 0 \cdot \alpha_r + a_{r+1} \cdot \omega_{r+1} + \dots + a_n \cdot \omega_n$$

Portanto,

$$[e]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} e^+ & 0 \\ * & e^- \end{pmatrix}$$

(a) De fato, como

$$\begin{aligned} \omega_{r+1} \in V_0 &\Rightarrow \exists k_{r+1} > 0 \text{ tal que } e^{k_{r+1}}(\omega_{r+1}) = 0 \\ &\vdots \\ \omega_n \in V_0 &\Rightarrow \exists k_n > 0 \text{ tal que } e^{k_n}(\omega_n) = 0 \end{aligned}$$

Tome $k = \max \{k_{r+1}, \dots, k_n\}$, então $e^k(\omega_i) = 0, \forall i = r+1, \dots, n$. Portanto, $(e^-)^k = 0$, isto é, e^- é nilpotente.

Vamos mostrar, agora, que $\det(I - e^-) = 1$. Como e^- é nilpotente, sabemos que a sua forma de Jordan é

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

isto é, existe uma matriz invertível M tal que $e^- = M^{-1}JM$. Logo,

$$\det(I - e^-) = \det(I - (M^{-1}JM)) = \det(M^{-1}(I - J)M) = \det(I - J)$$

e

$$I - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\det(I - e^-) = \det(I - J) = 1.$$

(b) Como

$$[e]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} e^+ & 0 \\ * & e^- \end{pmatrix}$$

temos que

$$\det([e]_{\beta_2}) = \det(e^+) \cdot \det(e^-) \text{ e } \det([e]_{\beta_2}) = \det(M \cdot [e]_{\beta_1} \cdot M^{-1}) = \det([e]_{\beta_1})$$

Logo,

$$\det([e]_{\beta_1}) = \det(e^+) \cdot \det(e^-)$$

e

$$I - [e]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} I - e^+ & 0 \\ * & I - e^- \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\det(I - [e]_{\beta_1}) = \det(I - [e]_{\beta_2}) = \det(I - e^+) \cdot \det(I - e^-) = \det(I - e^+)$$

pois pelo item (a) $\det(I - e^-) = 1$.

Portanto, $\det(I - e) = \det(I - [e]_{\beta_1}) = \det(I - e^+)$. ■

A seguir demonstramos a seguinte caracterização da função Zeta homológica com relação ao índice de Conley homológico.

Proposição 3.4. *Suponha que $f : M \rightarrow M$ tem um conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e conjuntos básicos $\{\Omega_i\}_{i=0}^l$, então a função Zeta homológica de $f|_{\Omega_i}$ é*

$$Z_i(f) = \prod_{k=0}^{\dim M} \det(I - \chi_k(\Omega_i)t)^{(-1)^{k+1}}$$

onde $Con_k(\Omega_i) = (H_k(\Omega_i), \chi_k(\Omega_i))$ é o índice de Conley homológico com coeficientes em \mathbb{R} do conjunto básico Ω_i , $\forall i = 0, \dots, l$.

Demonstração:

Seja $\{M_i\}$ uma filtração associada a f . Pela Proposição 3.2, temos que

$$(f_P)_{*k} : H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]; \mathbb{R})$$

e

$$f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; \mathbb{R})$$

são conjugadas pelo isomorfismo $q_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M_i/M_{i-1}, [M_{i-1}]; \mathbb{R})$ induzido pela aplicação quociente $q : M_i \rightarrow \frac{M_i}{M_{i-1}}$. Logo,

$$(f_P)_{*k} = q_{*k} \circ f_{*k} \circ q_{*k}^{-1}$$

e

$$\begin{aligned} \det(I - (f_P)_{*k}t) &= \det(I - (q_{*k} \circ f_{*k} \circ q_{*k}^{-1})t) \\ &= \det(I - (q_{*k} \circ (f_{*k}t) \circ q_{*k}^{-1})) \\ &= \det(q_{*k} \circ (I - f_{*k}t) \circ q_{*k}^{-1}) \\ &= \det(q_{*k}) \det(I - f_{*k}t) \det(q_{*k})^{-1} \\ &= \det(I - f_{*k}t) \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.3, temos que

$$\det(I - (f_P)_{*k}^+) = \det(I - (f_P)_{*k})$$

e já vimos, na equação 3.1, que $\chi_k(\Omega_i) = (f_P)_{*k}^+$. Portanto,

$$\det(I - \chi_k(\Omega_i)t) = \det(I - (f_P)_{*k}^+t) = \det(I - (f_P)_{*k}t) = \det(I - f_{*k}t).$$

■

Exemplo 3.3. Vamos calcular a função Zeta homológica de $f|_\Lambda$ da ferradura do Exemplo 3.1. Temos, pela Proposição 3.4, que

$$Z_\Lambda = \prod_{k=0}^2 \det(I - \chi_k(\Omega)t)^{(-1)^{k+1}} = 1$$

pois $\chi_q(\Lambda) = 0$.

Exemplo 3.4. Vamos calcular a função Zeta para os conjuntos básicos $\Omega_0 = \{p\}, \Omega_1 = \Lambda, \Omega_2 = \{\infty\}$ do difeomorfismo do Exemplo 1.2.

Para isto, calculemos os índices de Conley sobre \mathbb{R} de cada Ω_i com $i = 0, 1, 2$.

Tome D_p um disco suficientemente pequeno contendo o ponto p . Temos que $N = D_p$ e $L = \emptyset$ é um par-filtração para Ω_0 e $N_L \simeq S^0$. Logo,

$$H_q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases} \quad e \quad (f_P)_q = \begin{cases} Id, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$Con_q(\Omega_0) = \begin{cases} (\mathbb{R}, Id), & q = 0 \\ (0, 0), & q \neq 0 \end{cases}$$

Tome D_∞ um disco suficientemente pequeno que isola o ponto ∞ . Temos que $N = D_\infty$ e $L = \partial D_\infty$ é um par-filtração para Ω_2 e $N_L \simeq S^2$. Logo,

$$Con_q(\Omega_2) = \begin{cases} (\mathbb{R}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & q \neq 2 \end{cases}$$

Temos que $\Omega_1 = \Lambda \subset \overline{T^2 \setminus (D_p \cup D_\infty)}$ onde D_p e D_∞ são os discos definidos acima. Então, $N = \overline{T^2 \setminus (D_p \cup D_\infty)}$ e $L = \partial D_p$ é um par-filtração de Ω_1 e N_L tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1$. Daí,

$$H_q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

Observe que $[h_1] + B_1(N_L)$ e $[h_2] + B_1(N_L)$ geram $H_1(N_L)$ e

$$\begin{aligned} (f_P)_1([h_1] + B_1(N_L)) &= -[h_2] + B_1(N_L) \\ (f_P)_1([h_2] + B_1(N_L)) &= ([h_1] + [h_2]) + B_1(N_L) \end{aligned}$$

Daí,

$$(f_P)_1 = \begin{matrix} [f(h_1)] & [f(h_2)] \\ [h_1] & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ [h_2] & \end{matrix}$$

é um isomorfismo, e portanto

$$Con_q(\Omega_2) = \begin{cases} \left(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Z_0(f) &= \det(I - \chi_0(\Omega_0)t)^{-1} \det(I - \chi_1(\Omega_0)t) \det(I - \chi_2(\Omega_0)t)^{-1} \\ &= (1-t)^{-1} (1) (1) = (1-t)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1(f) &= \det(I - \chi_0(\Omega_1)t)^{-1} \det(I - \chi_1(\Omega_1)t) \det(I - \chi_2(\Omega_1)t)^{-1} \\ &= (1) \det \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} (1) = (1-t) + t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2(f) &= \det(I - \chi_0(\Omega_2)t)^{-1} \det(I - \chi_1(\Omega_2)t) \det(I - \chi_2(\Omega_2)t)^{-1} \\
&= (1)(1)(1-t)^{-1} = (1-t)^{-1}
\end{aligned}$$

3.2.2 Desigualdades de Morse

A seguir vamos estabelecer uma relação entre as desigualdades de Morse de [6] com o índice de Conley homológico.

Definição 3.1. *Se $f : M \rightarrow M$ tem um conjunto recorrente por cadeia hiperbólico, dizemos que os conjuntos básicos são **homologicamente divididos em q** sobre o corpo F se para qualquer filtração $\{M_j\}$ associada a f e qualquer conjunto básico Ω_i , as aplicações $f_{*k} : H_k(M_i, M_{i-1}; F) \rightarrow H_k(M_i, M_{i-1}; F)$ são nilpotentes para todo $k > q$ se $u(i) \leq q$, e nilpotentes para todo $k \leq q$ se $u(i) > q$.*

Proposição 3.5 ([6]). *Se todos os conjuntos básicos de $f : M \rightarrow M$ tem dimensão zero, então eles são homologicamente divididos em q para todo q e quaisquer corpo de coeficientes.*

Teorema 3.3 (Desigualdades de Morse, [6]). *Se $f : M \rightarrow M$ tem conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e seus conjuntos básicos são homologicamente divididos em q sobre \mathbb{R} , então existe um polinômio inteiro $P(t)$ tal que*

$$P(t)^{(-1)^q} \prod_{u(i) \leq q} Z_i(f) = \prod_{k=0}^q \det(I - f_{*k}t)^{(-1)^{k+1}}$$

onde $f_{*k} : H_k(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M; \mathbb{R})$ é induzida por f .

Proposição 3.6. *Se $f : M \rightarrow M$ tem conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e seus conjuntos básicos são homologicamente divididos em q sobre \mathbb{R} , então existe um polinômio inteiro $P(t)$ tal que*

$$P(t)^{(-1)^q} \prod_{u(i) \leq q} Z_i(f) = \prod_{k=0}^q \det(I - \chi_k(M)t)^{(-1)^{k+1}}$$

onde

$$Z_i(f) = \prod_{k=0}^{\dim M} \det(I - \chi_k(\Omega_i)t)^{(-1)^{k+1}}$$

e $Con_k(\Omega_i) = (CH_k(\Omega_i), \chi_k(\Omega_i))$ é o índice de Conley homológico do conjunto básico Ω_i , $\forall i = 0, \dots, l$.

Demonstração:

Como $P = (M, \emptyset)$ é um par-índice para M , temos que $f_{*k} : H_k(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M; \mathbb{R})$ a induzida por f e $(f_P)_{*k} : H_k(M, \emptyset; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M, \emptyset; \mathbb{R})$ a induzida por f_P são isomorfias e portanto $\det(I - f_{*k}t) = \det(I - \chi_k(M)t)$. Daí, usando o Teorema 3.3 e a Proposição 3.4 segue o resultado. ■

Exemplo 3.5. Novamente vamos trabalhar com a ferradura do Exemplo 3.1. Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ o difeomorfismo cujos conjuntos básicos são $\Lambda_0 = \{p_0\}$ um ponto fixo atrator, $\Lambda_1 = \Lambda$ a ferradura e $\Lambda_2 = \{p_2\}$ um ponto fixo repulsor que tem índices $u(0) = 0, u(1) = 1$ e $u(2) = 2$, respectivamente. Temos que $\{\Lambda_i\}_{i=0}^2$ são homologicamente divididos em 1, pela Proposição 3.5.

Tome a seguinte filtração para f , M_0 um disco que contém p_0 que não intercepta Λ_1 e nem Λ_2 , M_1 uma vizinhança compacta de $\Lambda_1 = \Lambda$ que contém M_0 , mas não contém um disco centrado em p_2 e $M_2 = S^2$.

Temos que

$$\begin{aligned} CH_k(M_0, \emptyset; \mathbb{R}) &= \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases} \\ CH_k(M_1, M_0; \mathbb{R}) &= 0, \forall k > 0 \\ CH_k(M_2, M_1; \mathbb{R}) &= \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 2 \\ 0, & q \neq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \chi_k(\Lambda_0) &= \begin{cases} Id, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases} \\ \chi_k(\Lambda_1) &= 0, \forall k \\ \chi_k(\Lambda_2) &= \begin{cases} Id, & q = 2 \\ 0, & q \neq 2 \end{cases} \\ \chi_k(S^2) &= \begin{cases} Id, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{u(i) \leq 1} Z_i(f) &= Z_0(f)Z_1(f) \\ &= (\det(I - \chi_0(\Lambda_0)t)^{-1} \det(I - \chi_1(\Lambda_0)t) \det(I - \chi_2(\Lambda_0)t)^{-1}) \cdot \\ &\quad (\det(I - \chi_0(\Lambda_1)t)^{-1} \det(I - \chi_1(\Lambda_1)t) \det(I - \chi_2(\Lambda_1)t)^{-1}) \\ &= (1 - t)^{-1} \\ \prod_{k=0}^1 \det(I - \chi_k(M)t)^{(-1)^{k+1}} &= \det(I - \chi_0(S^2)t)^{-1} \det(I - \chi_1(S^2)t) = (1 - t)^{-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\prod_{u(i) \leq 1} Z_i(f) = \prod_{k=0}^1 \det(I - \chi_k(M)t)^{(-1)^{k+1}}$$

Exemplo 3.6. Vamos calcular as desigualdades de Morse para o Exemplo 3.4. Para isto, só falta calcularmos o índice de Conley de $M = T^2$. É fácil ver que (T^2, \emptyset) é um par-filtração

para T^2 e

$$Con_q(M) = \begin{cases} (\mathbb{R}, Id), & q = 0 \\ \left(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (\mathbb{R}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como f é um difeomorfismo Smale, pela Proposição 3.5, temos que os conjuntos básicos de f são homologicamente divididos em 1. E,

$$\begin{aligned} \prod_{u(i) \leq 1} Z_i(f) &= Z_0(f)Z_1(f) \\ &= (1-t)^{-1} (t^2 - t + 1) \\ \prod_{k=0}^1 \det(I - \chi_k(M)t)^{(-1)^{k+1}} &= \det(I - \chi_0(T^2)t)^{-1} \det(I - \chi_1(T^2)t) = \\ &= (1-t)^{-1} (t^2 - t + 1) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\prod_{u(i) \leq 1} Z_i(f) = \prod_{k=0}^1 \det(I - \chi_k(M)t)^{(-1)^{k+1}}.$$

Capítulo 4

Par de matrizes de conexão

A teoria de par de matrizes de conexão foi desenvolvida por Richeson em [22] e [23] para aplicações contínuas e multivaloradas. Em seus trabalhos foram exploradas algumas poucas propriedades deste par de matrizes de conexão.

Assim, o nosso objetivo neste capítulo foi aprofundar este estudo da teoria de par de matrizes de conexão para difeomorfismos Smale. Provaremos também um paralelo com a teoria de matriz de conexão no caso contínuo destacando as suas limitações na detecção de conexões e as vantagens de se utilizar a teoria de par de matrizes de conexão no caso discreto.

Na Seção 4.1 vamos expor alguns preliminares de par de matrizes de conexão necessários para os resultados que provamos na seção subsequente, onde estão enunciados alguns dos resultados obtidos neste trabalho. Na Seção 4.2 provamos resultados de par de matrizes de conexão (Δ, a) para difeomorfismos e demonstramos que sob certas condições Δ e a assumem um caráter complementar como veremos, no Teorema 4.4. Na Subseção 4.2.1 provamos o Teorema 4.6 caracterizando o par de matrizes de conexão no caso particular das aplicações tempo-um de fluxos. Finalmente, na Subseção 4.2.2 demonstramos o Teorema 4.7 que caracteriza o par de matrizes de conexão para difeomorfismos com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico com conjuntos básicos zero-dimensionais.

4.1 Introdução a teoria de par de matrizes de conexão

4.1.1 Decomposição em par atrator-repulsor

A decomposição de Morse mais simples de um conjunto invariante isolado é a decomposição em par atrator-repulsor.

Seja S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f .

Definição 4.1.

- Um subconjunto $A \subset S$ é chamado um **atrator** em S se existe uma vizinhança U de A tal que $w(U \cap S) = A$.
- Definimos o seu **repulsor dual** como $A^* = \{x \in S \mid w(x) \cap A = \emptyset\}$.
- O par (A, A^*) é chamado de **par atrator-repulsor** de S .
- O subconjunto de S dado por $C(A, A^*) = S \setminus (A \cup A^*)$ é chamado de **conjunto das órbitas de conexão** de S .

Exemplo 4.1. Vamos retornar ao Exemplo 2.5. Temos que $(S_A, S_R) = (Inv(N_1), Inv(N_2))$ é um par **atrator-repulsor** de $S = Inv(N_1 \cup N_2)$.

De fato, $S_A = Inv(N_1)$ é um atrator de $S = Inv(N_1 \cup N_2)$ e $S_R = Inv(N_2)$ é o seu repulsor dual associado. Para ver isto, basta observar que as iteradas positivas de N_1 não interceptam N_2 e as suas iteradas negativas interceptam N_2 e que as iteradas negativas de N_2 não interceptam N_1 e as suas iteradas positivas interceptam N_1 . Abaixo apresentamos as iteradas primeira e segunda da f e da f^{-1} . Neste exemplo S_A é um ponto fixo atrator e S_R é um ponto fixo repulsor.

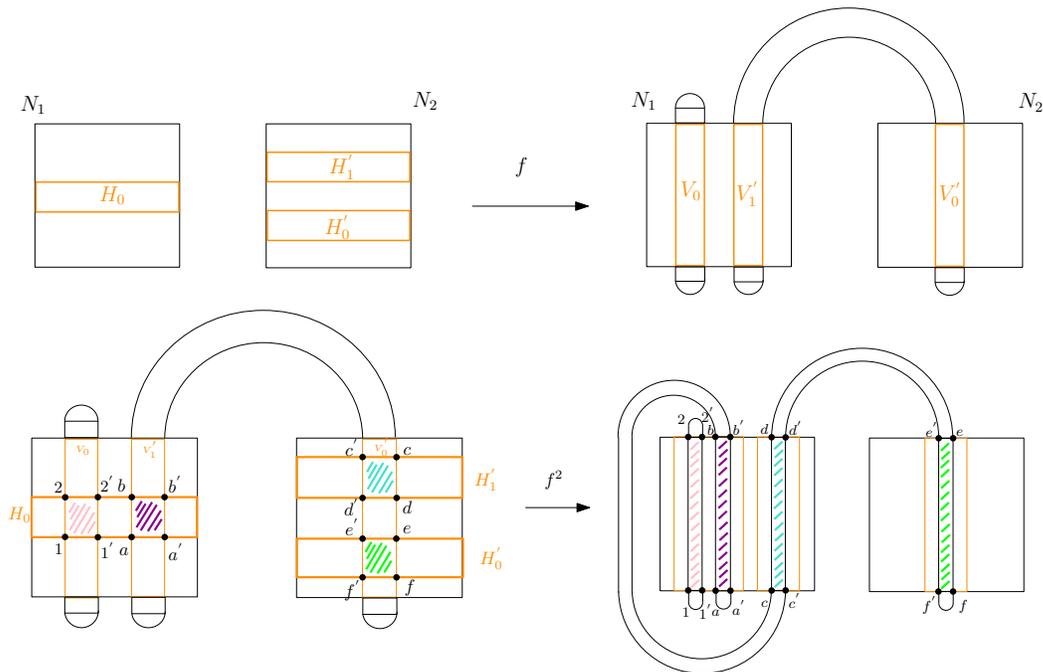


Figura 4.1: Iteradas f e f^2

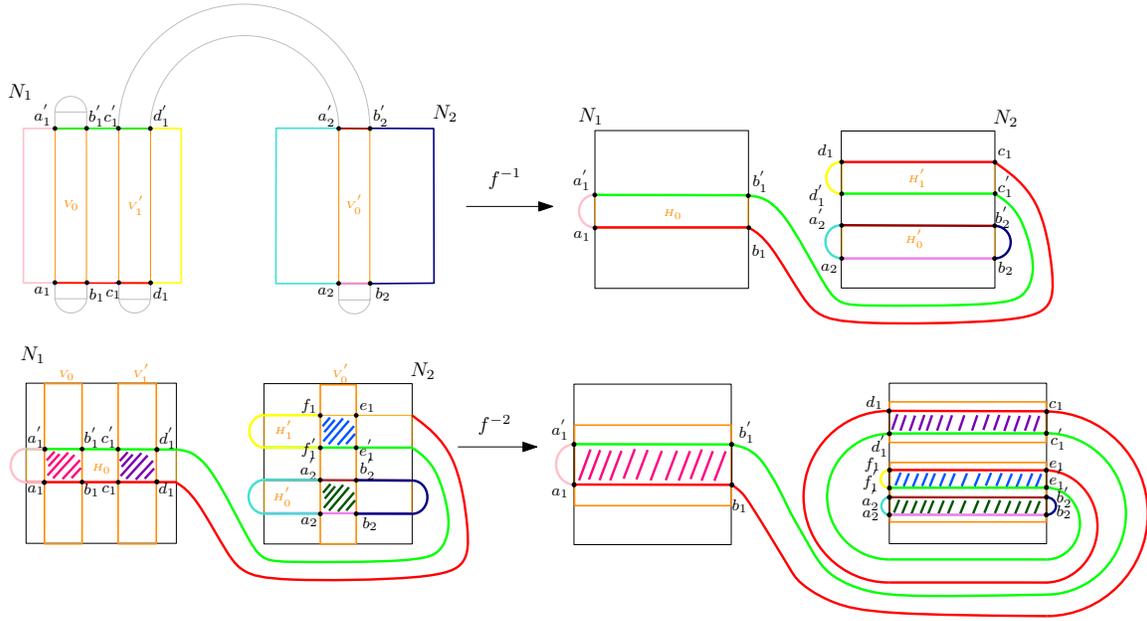


Figura 4.2: Iterada f^{-1} e f^{-2}

4.1.2 Decomposição de Morse

A decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_\pi \subset S \mid \pi \in \mathcal{P}\}$ é uma decomposição mais rica do conjunto invariante isolado S numa união finita de conjuntos de Morse.

Para defini-la precisamos de uma ordem parcial em \mathcal{P} .

Definição 4.2. *Seja \mathcal{P} um conjunto finito. Dizemos que uma relação $<$ é uma **ordem parcial** em \mathcal{P} se para todo π e $\pi' \in \mathcal{P}$ temos que*

1. $\pi < \pi$ nunca acontece, e
2. $\pi < \pi'$ e $\pi' < \pi''$ implica $\pi < \pi''$,

*Se, em adição, para qualquer $\pi \neq \pi'$ temos que $\pi < \pi'$ ou $\pi' < \pi$, então a relação $<$ é chamada de **ordem total**.*

Usando a ordem parcial definimos alguns conceitos básicos.

Definição 4.3. *Considere \mathcal{P} um conjunto finito com uma ordem parcial $<$.*

1. Um subconjunto $I \subset \mathcal{P}$ é chamado um **intervalo** se $\pi < \pi'' < \pi'$ e $\pi, \pi' \in I$, então $\pi'' \in I$. O conjunto dos intervalos em \mathcal{P} é denotado por $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{P}, <)$
2. Um intervalo I é chamado **atrator** se $\pi'' < \pi'$ e $\pi' \in I$ implica que $\pi'' \in I$. O conjunto dos intervalos atratores em \mathcal{P} é denotado por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{P}, <)$.

3. Uma coleção ordenada de intervalos disjuntos (I_1, \dots, I_n) é chamada uma **n-upla adjacente** se $I_1 \cup \dots \cup I_n \in \mathcal{I}(\mathcal{P})$ e para quaisquer $\pi \in I_i$ e $\pi' \in I_j$ com $i < j$, temos que $\pi' \not\prec \pi$. Denotamos a coleção de n-uplas adjacentes por $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_n(\mathcal{P}, <)$. Se $(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_n$, então usamos $I_1 I_2 \dots I_n$ para denotar $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$.

Agora, estamos aptos a definir o que é uma decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado S .

Definição 4.4. Uma coleção de conjuntos invariantes isolados disjuntos $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_\pi \subset S \mid \pi \in \mathcal{P}\}$ é uma **decomposição de Morse** do conjunto invariante isolado S se para todo $x \in S$ e para toda solução $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow S$ para x temos que

1. $\sigma(\mathbb{Z}) \subset M_\pi$ para algum $\pi \in \mathcal{P}$, ou
2. $\omega(\sigma) \subset M_\pi$ e $\alpha(\sigma) \subset M_{\pi'}$ para alguns π, π' com $\pi < \pi'$.

Definição 4.5. Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_\pi \subset S \mid \pi \in \mathcal{P}\}$ uma decomposição de Morse. Se $<$ satisfaz: $\pi < \pi'$ se, e somente se, existe uma sequência de elementos distintos $\pi_0 = \pi, \pi_1, \dots, \pi_n = \pi'$ em \mathcal{P} tais que $C(M_{\pi_{j-1}}, M_{\pi_j}) \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \dots, n$, então $<$ é chamada de **ordem f-definida** no caso discreto e de **ordem do fluxo** no caso contínuo. Toda ordem parcial que é uma extensão destas ordens será chamada uma **ordem admissível**.

Definição 4.6. Para qualquer intervalo $I \subset \mathcal{P}$ defina o conjunto

$$M_I = \bigcup_{\pi \in I} M_\pi \cup \bigcup_{\pi', \pi'' \in I} C(M_{\pi'}, M_{\pi''}; S).$$

Richeson provou em [22] que se I é um intervalo, temos que M_I é um conjunto invariante isolado e, se o intervalo I for atrator, então M_I é um atrator.

A Proposição 4.1 é uma propriedade conhecida da teoria de decomposição de Morse.

Proposição 4.1. Se $(I, J) \in \mathcal{I}_2(\mathcal{P}, <)$, então (M_I, M_J) é uma decomposição em par atrator-repulsor de M_{IJ} .

4.1.3 Filtração de conjuntos de Morse

Nesta subseção apresentamos uma coleção de compactos em X tal que podemos extrair pares-filtrações para cada M_I atrator. Exibimos no Teorema 4.1 um resultado de Richeson [22] sobre a existência desta coleção para uma decomposição de Morse.

Definição 4.7. Uma coleção de conjuntos compactos $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <) = \{N(I) \subset X \mid I \in \mathcal{A}\}$ é chamado uma **filtração de conjuntos de Morse** para $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ se para quaisquer intervalos atratores $I, J \subset \mathcal{P}$ as seguintes condições são verdadeiras.

1. $(N(I), N(\emptyset))$ é um par-filtração para M_I ,
2. $N(I) \cap N(J) = N(I \cap J)$, e
3. $N(I) \cup N(J) = N(I \cup J)$.

Teorema 4.1 ([22]). *Suponha que $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ é uma decomposição de Morse de S . Então existe uma filtração de conjuntos de Morse para $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$.*

4.1.4 O par de matrizes de conexão para decomposição em par atrator-repulsor

Nesta subseção apresentamos a definição do par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse mais simples: a decomposição em par atrator-repulsor. Este caso ilustra de uma forma mais simples o conceito de par de matrizes de conexão. Apresentamos a seguir a construção dada por Richeson em [22].

Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f , uma decomposição em par atrator-repulsor (A, R) . Pelo Teorema 4.1, como uma decomposição em par atrator-repulsor é um caso particular de uma decomposição de Morse, existe uma filtração de conjuntos de Morse para (A, R) de S . Neste caso, reduz-se a um trio de compactos (N, L, Q) tal que (N, Q) , (N, L) e (L, Q) são pares-filtração para S , R e A , respectivamente. Chamamos esse trio de compactos de **trio-filtração**.

A Proposição 4.2 e o Corolário 4.1 são resultados de Richeson [22], que relacionam os índices de Conley cohomológicos reduzidos de S , A e R através de uma sequência longa exata e, o corolário apresenta condições suficientes para detectar a existência de órbitas de conexão.

Proposição 4.2 ([22]). *Se (A, R) é uma decomposição em par atrator-repulsor de um conjunto invariante isolado S , então temos a seguinte sequência longa exata de espaços vetoriais e automorfismos*

$$\cdots \xrightarrow{\delta^*} \text{Con}^k(R) \longrightarrow \text{Con}^k(S) \longrightarrow \text{Con}^k(A) \xrightarrow{\delta^*} \text{Con}^{k+1}(R) \longrightarrow \cdots \quad (4.1)$$

A sequência longa exata da equação 4.1 será chamada de **sequência do índice de Conley cohomológico** associado ao par atrator-repulsor (A, R) e a aplicação δ^* será chamada a **aplicação cobordo definida pela aplicação contínua f** .

Corolário 4.1 ([22]). *Se $S = A \cup R$, então $\delta^* = 0$, $CH^*(S) \cong CH^*(A) \oplus CH^*(R)$ e $\chi^*(S)$ é conjugado a $\chi^*(A) \oplus \chi^*(R)$.*

Observe que, se $\delta^* \neq 0$ ou $CH^*(S) \not\cong CH^*(A) \oplus CH^*(R)$ ou $\chi^*(S)$ não é conjugado a $\chi^*(A) \oplus \chi^*(R)$, pelo Corolário 4.1, temos que $C(R, A; S) \neq \emptyset$. Portanto, este resultado é uma ferramenta de grande utilidade na procura de órbitas de conexão. Note, ainda, que com isto o caso discreto tem uma condição suficiente a mais do que no caso contínuo, que é a condição sobre o isomorfismo χ^* . Apresentamos a seguir um exemplo de [22] que ilustra bem este fato.

Exemplo 4.2. Retornemos ao Exemplo 2.5. Sejam $A = Inv(N_1)$, $R = Inv(N_2)$ e $S = Inv(N_1 \cup N_2)$. Pelo Exemplo 4.1, (A, R) é uma decomposição em par atrator-repulsor de S . Além disso, pelo Exemplo 2.5, temos o trio de compactos da Figura 4.3 é um trio-filtração para (A, R) e os índices de Conley de A, R e S são

$$Con^k(A) \cong Con^k(R) \cong \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & k = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$Con^k(S) \cong \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & k = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

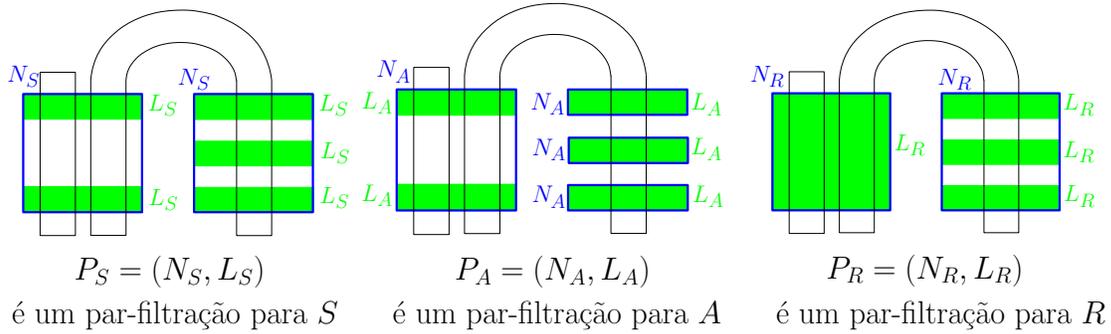


Figura 4.3: Trio-filtração para (A, R)

Portanto, $CH^*(S) \cong CH^*(A) \oplus CH^*(R)$ e $\delta^* = 0$, mas $\chi^*(S)$ e $\chi^*(A) \oplus \chi^*(R)$ não são conjugadas, e desta forma, pelo Corolário 4.1, deve existir uma órbita de conexão de R para A .

Observe que esta conexão é uma conexão de grau zero que foi detectada pelo segundo membro do par do índice de Conley discreto, χ^* .

Vamos definir agora o par de matrizes de conexão para uma decomposição em par atrator-repulsor.

Sejam S um conjunto invariante isolado de uma aplicação contínua f e (A, R) uma decomposição em par atrator-repulsor de S . Suponhamos que $CH^*(S)$ tem dimensão finita.

Defina $D = CH^*(A) \oplus CH^*(R)$ e

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^* & 0 \end{pmatrix} : D \rightarrow D.$$

Chamaremos a aplicação Δ de **matriz de conexão** para (A, R) de S .

O Teorema 4.2 é um resultado de [22] sobre a existência de uma aplicação de cocadeia $a : D \rightarrow D$ que possui uma relação com o isomorfismo $\chi^*(S)$ e esta aplicação será chamada de **matriz de conexão complementar** para (A, R) de S . Reproduzimos a demonstração de [22] com o objetivo de ilustrar a forma da matriz a .

Teorema 4.2 ([22]). *(D, Δ) é um complexo de cocadeia com $H^*(D) \cong CH^*(S)$. Além disso, existe uma aplicação de cocadeia $a : D \rightarrow D$ da forma*

$$\begin{pmatrix} \chi^*(A) & 0 \\ a_{RA}^* & \chi^*(R) \end{pmatrix}$$

tal que a aplicação induzida em cohomologia a^* é conjugada a $\chi^*(S)$.

Demonstração: Como Δ é uma aplicação de grau +1 e $\Delta^2 = 0$, temos que D é um complexo de cocadeia. Vamos mostrar que

$$CH^n(S) \cong \frac{Ker \Delta^n}{Im \Delta^{n-1}}.$$

Temos que

$$Ker \Delta^n = Ker \delta^n \oplus CH^n(R) \text{ e } Im \Delta^{n-1} = Im \delta^{n-1}$$

Logo,

$$H^n(D) = \frac{Ker \delta^n \oplus CH^n(R)}{Im \delta^{n-1}} = Ker \delta^n \oplus \frac{CH^n(R)}{Im \delta^{n-1}}$$

Como estamos trabalhando com espaços vetoriais, podemos reescrever a sequência longa exata como

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} CH^n(R) \xrightarrow{i^n} Im i^n \oplus Im j^n \xrightarrow{j^n} CH^n(A) \xrightarrow{\delta^n} \dots$$

e temos

$$Im i^n \cong \frac{CH^n(R)}{Ker i^n} \cong \frac{CH^n(R)}{Im \delta^{n-1}} \text{ e } Im j^n \cong Ker \delta^n$$

Logo, $H^*(D) \cong CH^*(S)$.

Agora, afirmamos que existe uma aplicação linear $a_{RA}^* : CH^*(A) \rightarrow CH^*(R)$ tal que a aplicação linear $a : D \rightarrow D$ dada por

$$a = \begin{pmatrix} \chi^*(A) & 0 \\ a_{RA}^* & \chi^*(R) \end{pmatrix}$$

que faz a sequência de complexos de cocadeia e endomorfismos

$$\dots \longrightarrow (D^{n-1}, a^{n-1}) \longrightarrow (D^n, a^n) \longrightarrow (D^{n+1}, a^{n+1}) \longrightarrow \dots$$

exata e induz uma aplicação $a^* : H^*(D) \rightarrow H^*(D)$ conjugada ao $\chi^*(S)$.

Lembre que

$$CH^n(S) = Ker\delta^n \oplus \frac{CH^n(R)}{Im\delta^{n-1}}.$$

Logo, $\chi^n(S)$ deve ter a forma

$$\begin{pmatrix} c^n & 0 \\ \bar{a}_{RA}^n & d^n \end{pmatrix}$$

onde c^n é a restrição de $\chi^n(A)$ ao $Ker\delta^n$ e d^n é a aplicação em $\frac{CH^n(R)}{Im\delta^{n-1}}$ induzida por $\chi^n(R)$. Então, temos uma aplicação linear

$$\bar{a}_{RA}^n : Ker\delta^n \rightarrow \frac{CH^n(R)}{Im\delta^{n-1}}$$

e gostaríamos de encontrar uma aplicação $a_{RA}^n : CH^n(A) \rightarrow CH^n(R)$ que induz \bar{a}_{RA}^n . Claramente, uma tal aplicação existe. ■

Definição 4.8. *Considere o espaço vetorial graduado*

$$D = CH^*(A) \oplus CH^*(R)$$

e as aplicações lineares

$$\Delta, a : D \rightarrow D$$

definidas por

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^* & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad a = \begin{pmatrix} \chi^*(A) & 0 \\ a_{RA}^* & \chi^*(R) \end{pmatrix}.$$

O par de matrizes (Δ, a) é chamado de **par de matrizes de conexão para a decomposição em par atrator-repulsor** (A, R) de S . Chamamos a aplicação Δ de **matriz de conexão** e a aplicação a de **matriz de conexão complementar** para (A, R) de S .

Assim, se temos os índices de Conley cohomológicos reduzidos de A e R e o par de matrizes de conexão (Δ, a) , então obtemos o índice de Conley cohomológico reduzido de S .

A seguir apresentamos dois resultados conhecidos que são úteis na hora de calcular o par de matrizes de conexão.

Proposição 4.3. *Se existir um número natural n tal que*

$$Con^q(A) = \begin{cases} (CH^q(A), \chi^q(A)) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

e

$$Con^q(A^*) = \begin{cases} (CH^q(A^*), \chi^q(A^*)) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

então $\delta^* \equiv 0$ e $CH(S) \approx CH(A) \oplus CH(A^*)$.

Demonstração: Tome $q \in \mathbb{N}$ qualquer. Temos que $CH^{q+1}(A^*) = 0$ ou $CH^q(A) = 0$ e daí temos em ambos os casos que $\delta^q : CH^q(A) \rightarrow CH^{q+1}(A^*)$ é nula. Isto é, $\delta^q \equiv 0, \forall q \in \mathbb{N}$, logo $\delta \equiv 0$.

Daí, $\Delta : CH(A) \oplus CH(A^*) \rightarrow CH(A) \oplus CH(A^*)$ é a matriz nula e, portanto

$$CH^q(S) \approx CH^q \Delta(S) = \frac{Ker \Delta^q}{Im \Delta^{q-1}} \approx CH^q(A) \oplus CH^q(A^*), \forall q > 0$$

Isto é, $CH(S) \approx CH(A) \oplus CH(A^*)$. ■

Corolário 4.2. *Se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$Con^q(A) = \begin{cases} (CH^q(A), Id) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

$$Con^q(A^*) = \begin{cases} (CH^q(A^*), Id) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

e, além disso, a n -ésima aplicação de $a_{RA} = \{a_{RA}^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ é não nula, então $C(A, A^*) \neq \emptyset$.

Demonstração:

Seja (Δ, a) a matriz de conexão para o par (A, A^*) . Pelo Teorema 4.2, temos que a induzida em cohomologia de a^n , $(a^n)^*$, é conjugada à $\chi^n(S)$. Por definição,

$$(a^n)^* : \frac{Ker \Delta^n}{Im \Delta^{n-1}} \longrightarrow \frac{Ker \Delta^n}{Im \Delta^{n-1}}$$

$$x + Im \Delta^{n-1} \longmapsto a^n(x) + Im \Delta^{n-1}$$

onde $CH^n \Delta(S) = \frac{Ker \Delta^n}{Im \Delta^{n-1}}$ (n -ésima cohomologia do complexo de cocadeia $(C\Delta(S), \Delta)$).

Como,

$$Con^q(A) = \begin{cases} (CH^q(A), Id) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

$$\text{Con}^q(A^*) = \begin{cases} (CH^q(A^*), Id) & , \text{ se } q = n \\ (0, 0) & , \text{ se } q \neq n \end{cases}$$

pela Proposição 4.3 acima, temos que $\delta^* \equiv 0$ e $CH(S) \approx CH(A) \oplus CH(A^*)$, daí $\text{Im } \Delta^{n-1} \equiv \{0\}$. Logo, a^n pode ser identificada à $(a^n)^*$.

Portanto,

$$\chi^n(S) \sim (a^n)^* \equiv a^n = \begin{pmatrix} \chi^n(A) & 0 \\ a_{RA}^n & \chi^n(A^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ a_{RA}^n & Id \end{pmatrix}$$

mas como, por hipótese, $a_{RA}^n \neq 0$, temos que

$$\chi^n(S) \sim \begin{pmatrix} Id & 0 \\ a_{RA}^n & Id \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \chi^n(A) \oplus \chi^n(R)$$

não são conjugadas, isto é, $\chi^n(S)$ e $\chi^n(A) \oplus \chi^n(R)$ não são conjugadas, o que implica, pela Corolário 4.1, que $C(A, A^*) \neq \emptyset$. ■

Exemplo 4.3. Vamos calcular o par de matrizes de conexão do Exemplo 4.2 para a decomposição em par atrator-repulsor ($A = \text{Inv}(N_1), R = \text{Inv}(N_2)$) de $S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$. Já vimos que o trio de compactos indicados na Figura 4.3 é um trio-filtração para o par atrator-repulsor (A, R) e que os índices de Conley de S, A e R são

$$\text{Con}^k(A) \cong \text{Con}^k(R) \cong \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & k = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\text{Con}^k(S) \cong \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & k = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como

$$\text{Con}^k(A) \cong \text{Con}^k(R) \cong \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & k = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pela Proposição 4.3, temos que $\delta^* \equiv 0$ e $CH(S) \approx CH^*(A) \oplus CH^*(R)$.

Assim, como a aplicação cobordo δ^* é nula, temos que

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $\Delta \equiv 0$ é uma coleção de matrizes nulas.

Pelo Teorema 4.2, temos que $a = \{a^n\}$ é uma aplicação de cocadeia cuja induzida em cohomologia $a^* = \{(a^n)^*\}$ é conjugada à $\chi^*(S)$, onde $\text{Con}^*(S) = (CH^*(S), \chi^*(S))$ é o índice

de Conley cohomológico reduzido de S .

Por definição,

$$(a^n)^* : \frac{Ker \Delta^n}{Im \Delta^{n-1}} \longrightarrow \frac{Ker \Delta^n}{Im \Delta^{n-1}}$$

$$x + Im \Delta^{n-1} \longmapsto a^n(x) + Im \Delta^{n-1}$$

Como $\Delta \equiv 0 \Rightarrow Im \Delta \equiv 0$, portanto a^n pode ser identificada à $(a^n)^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, a^n é conjugada à $\chi^n(S)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, para $n \neq 1$ tem-se que $a^n = 0$ e para $n = 1$ temos

$$a^1 = \begin{pmatrix} \chi^1(A) & 0 \\ a_{RA}^1 & \chi^1(R) \end{pmatrix} \quad e \quad \chi^1(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

são conjugadas. Logo, $d^1 = -Id$.

Logo, $a = \{a^n\}$ é uma coleção de matrizes nulas exceto

$$a^1 = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -Id & Id \end{pmatrix}$$

e $\Delta = \{\Delta^n\}$ é uma coleção de matrizes nulas.

Portanto, (Δ, a) é o par de matrizes de conexão para a decomposição em par atrator-repulsor (A, R) de S .

Observação 4.1. *O Exemplo 4.3 foi construído em [22] para ilustrar a potência que tem a matriz de conexão complementar do par (Δ, a) , pois, neste Exemplo 4.3, a matriz de conexão Δ não fornece nenhuma informação sobre conexões, enquanto que a matriz de conexão complementar, a , detecta uma conexão de grau zero de R para A , onde A e R são pontos fixos de índice 1.*

Observação 4.2. *Se (Δ, a) é um par de matrizes de conexão, temos que a matriz de conexão Δ detecta as conexões de grau 1 e a matriz de conexão complementar, a , detecta as conexões de grau zero. Na Proposição 4.4 provamos que, sob certas condições, as matrizes Δ e a assumem um caráter complementar. Vimos, no Exemplo 4.3, que em um sistema dinâmico discreto podem existir conexões de grau zero, e deste modo, com a matriz de conexão complementar é possível analisar a existência deste tipo de conexão, enquanto a matriz de conexão Δ não é capaz de detectá-la.*

No artigo [1], Bartiomejczyk e Dzedzej definem, seguindo as ideias de [10], a matriz de conexão como sendo apenas a matriz Δ sem utilizar a segunda parte do índice de Conley discreto. Deste modo, a definição de [22] é mais rica do que a definição apresentada em [1],

pois além de detectar conexões de grau 1, detecta-se também conexões de grau 0 através da matriz de conexão complementar a .

4.1.5 O par de matrizes de conexão para decomposição de Morse

A definição de par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse é mais complexa e assim apresentamos inicialmente uma definição informal sugerida por Richeson em [22].

Sejam $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_\pi \subset S \mid \pi \in \mathcal{P}\}$ uma decomposição de Morse do conjunto invariante isolado S e $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <) = \{N(I) \subset X \mid I \in \mathcal{A}\}$ uma filtração de conjuntos de Morse para $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$.

Seja I um intervalo e defina $C\Delta(I) = \bigoplus_{\pi \in I} CH^*(M_\pi)$. Um par de matrizes de conexão é um par de matrizes graduadas $\Delta, a : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ tal que suas restrições a $C\Delta(I)$, satisfazem os seguintes.

1. $\Delta(I)$ é uma aplicação de cobordo e $a(I)$ é uma aplicação de cocadeia,
2. existe um isomorfismo $\psi^*(I) : H^*(C\Delta(I)) \rightarrow H^*(M_I)$,
3. a aplicação induzida a^* em $H^*(C\Delta(I))$ é conjugada a $\chi^*(I)$ via $\psi^*(I)$, isto é, $\psi^*(I) \circ a^* = \chi^*(I) \circ \psi^*(I)$.

Se $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ é um par adjacente, pela Proposição 4.1, temos que (M_I, M_J) é uma decomposição em par atrator-repulsor de M_{IJ} . Não é difícil encontrar um trio de compactos (N, L, Q) contidos em $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$ que seja um trio-filtração para (M_I, M_J) . Usando esse trio-filtração, obtemos, aplicando a redução de Leray no diagrama no nível de cocadeia, o seguinte diagrama comutativo de complexos de cocadeia e automorfismos de cocadeia.

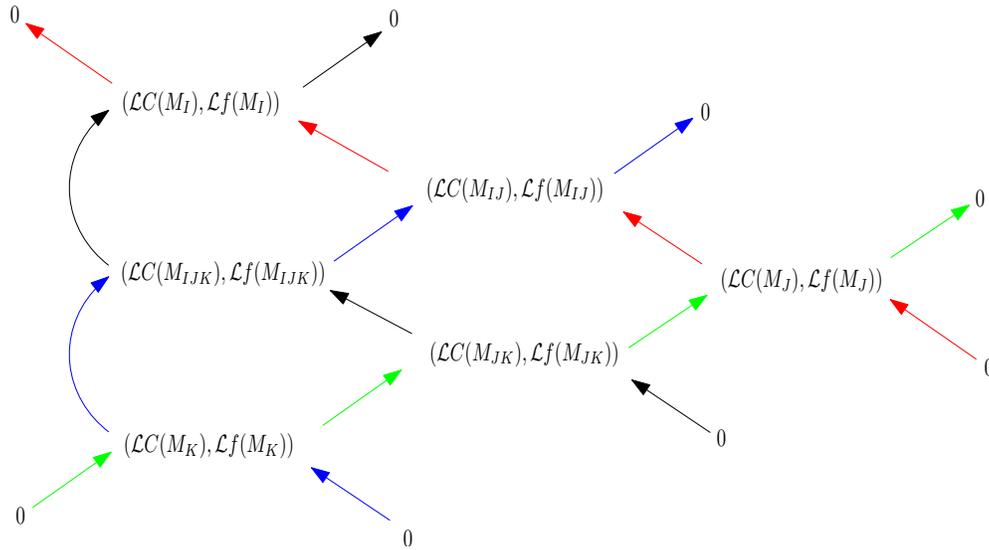
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}C^*(M_J) & \xrightarrow{\rho^\#} & \mathcal{L}C^*(M_{IJ}) & \xrightarrow{\iota^\#} & \mathcal{L}C^*(M_I) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathcal{L}f(M_J) & & \downarrow \mathcal{L}f(M_{IJ}) & & \downarrow \mathcal{L}f(M_I) & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}C^*(M_J) & \xrightarrow{\rho^\#} & \mathcal{L}C^*(M_{IJ}) & \xrightarrow{\iota^\#} & \mathcal{L}C^*(M_I) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde $\mathcal{L}C^*(M_J) = \mathcal{L}C^*(N_L, [L])$, $\mathcal{L}C^*(M_{IJ}) = \mathcal{L}C^*(N_Q, [Q])$ e $\mathcal{L}C^*(M_I) = \mathcal{L}C^*(L_Q, [Q])$. E passando a cohomologia, obtemos a seguinte sequência longa exata de espaços vetoriais e isomorfismos dada na equação 4.1.

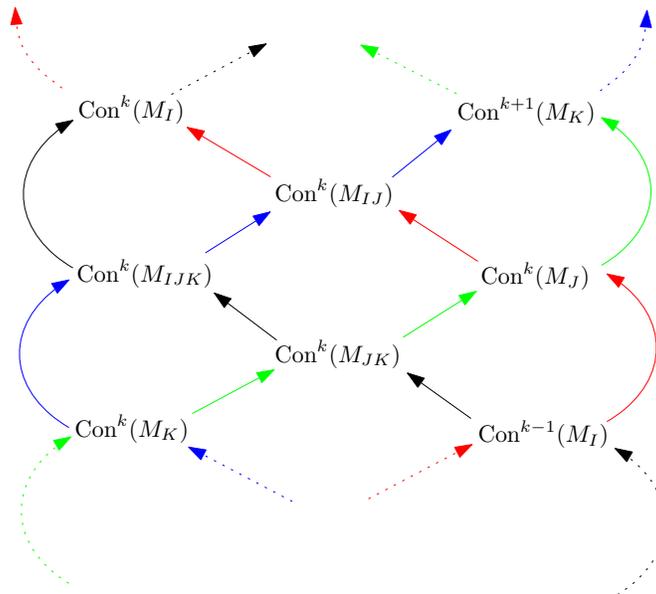
$$\dots \xrightarrow{\delta^*} \text{Con}^k(M_J) \longrightarrow \text{Con}^k(M_{IJ}) \longrightarrow \text{Con}^k(M_I) \xrightarrow{\delta^*} \dots$$

De maneira análoga, se (I, J, K) é uma 3-upla, então existem trios-filtração para (M_I, M_J) , (M_J, M_K) , (M_I, M_{JK}) e (M_{IJ}, M_K) , e também obtemos quatro sequências curtas exatas de

complexos de cocadeia e automorfismos de cocadeia que pode ser escritas como um único diagrama comutativo da seguinte maneira.



E assim, obtemos um diagrama comutativo de seqüências longas exatas de espaços vetoriais e isomorfismos, passando a cohomologia no diagrama anterior.



Esses diagramas que exibimos acima tem uma forma geral que definimos a seguir.

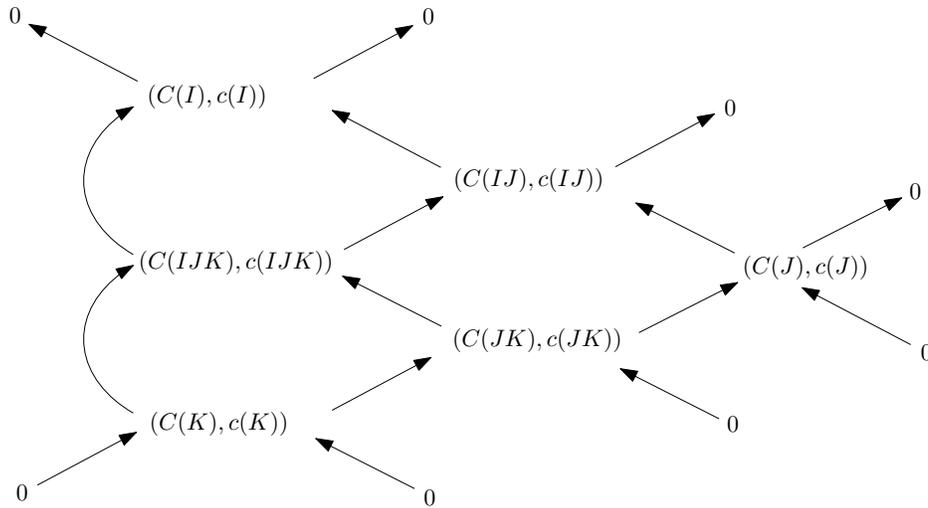
Seja $(\mathcal{P}, <)$ um conjunto finito parcialmente ordenado.

Definição 4.9. Uma *trança de complexos de cocadeia com endomorfismos* é uma coleção $\mathcal{C} = \{C(I), \partial(I), c(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ de complexos de cocadeia e endomorfismos satisfazendo as seguintes condições

1. Para cada $I \in \mathcal{I}$ existe um complexo de cocadeia $C(I)$ com operador de cobordo $\partial(I)$ e um endomorfismo de cocadeia $c(I) : C(I) \rightarrow C(I)$ de grau zero,
2. Para todo $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ existem aplicações de cocadeia $\iota(I, IJ)$ e $\rho(IJ, J)$ tais que a seguinte sequência é exata,

$$0 \longrightarrow (C(J), c(J)) \xrightarrow{\rho} (C(IJ), c(IJ)) \xrightarrow{\iota} (C(I), c(I)) \longrightarrow 0,$$

3. Para todo $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ o seguinte diagrama de trança comuta,

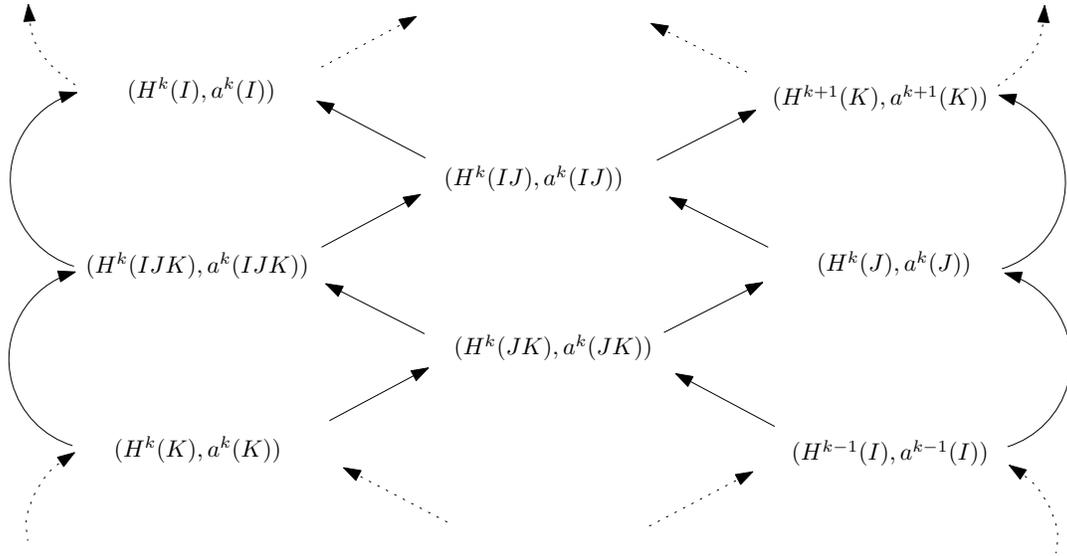


Definição 4.10. Uma **trança de módulos graduados com endomorfismos** é uma coleção $\mathcal{H} = \{(H(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ de módulos graduados com endomorfismos lineares tais que as seguintes condições são satisfeitas:

1. Para cada $I \in \mathcal{I}$, existe um módulo graduado $H(I)$ e um endomorfismo linear $a(I) : H(I) \rightarrow H(I)$ de grau zero,
2. Para todo $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ existe uma sequência exata longa de módulos e endomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} (H^n(J), a^n J) \xrightarrow{\rho^n} (H^n(IJ), a^n(IJ)) \xrightarrow{\iota^n} (H^n(I), a^n(I)) \xrightarrow{\delta^n} \dots,$$

3. Para todo $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ o seguinte diagrama de trança comuta,



A Proposição 4.4 é um resultado de Richeson [22] afirmando que os diagramas que construímos no início desta subseção são tranças.

Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_\pi \subset S \mid \pi \in \mathcal{P}\}$ uma decomposição de Morse do conjunto invariante isolado S . Defina

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \{(\mathcal{L}C(M_I), \mathcal{L}f(M_I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$$

e

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}) = \{Con^*(M_I) = (CH^*(M_I), \chi^*(M_I)) \mid I \in \mathcal{I}\}.$$

Proposição 4.4 ([22]). $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ é uma trança de complexos de cocadeia com endomorfismo e $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ é uma trança de módulos graduados com endomorfismos.

Definição 4.11. Suponha que $\mathcal{H}(\mathcal{P}) = \{(H(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ e $\mathcal{H}'(\mathcal{P}) = \{(H'(I), a'(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ são tranças de módulos graduados com endomorfismos. Definimos um **homomorfismo de tranças de módulos graduados** $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ como sendo uma coleção de homomorfismos $\psi^*(I) : H(I) \rightarrow H'(I)$ definidos para todo $I \in \mathcal{I}$ tais que para $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ o seguinte diagrama comuta;

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta} & (H(J), a(J)) & \longrightarrow & (H(IJ), a(IJ)) & \longrightarrow & (H(I), a(I)) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\ & & \downarrow \psi^*(J) & & \downarrow \psi^*(IJ) & & \downarrow \psi^*(I) & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & (H'(J), a'(J)) & \longrightarrow & (H'(IJ), a'(IJ)) & \longrightarrow & (H'(I), a'(I)) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \end{array}$$

Dizemos que Ψ é um isomorfismo se cada $\psi^*(I)$ é um isomorfismo.

Proposição 4.5 ([22]). Suponha que $\Psi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ é um homomorfismo de tranças de módulos graduados tal que $\psi^*(\pi)$ é um isomorfismo para cada $\pi \in \mathcal{P}$, então Ψ é um isomorfismo.

A seguir enunciamos algumas definições básicas antes de definir o par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse.

Definição 4.12. *Seja*

$$C\Delta(I) = \bigoplus_{\pi \in \mathcal{I}} CH^*(M_\pi)$$

e suponha que $A : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ é uma aplicação linear. A matriz A pode ser vista como uma matriz $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{P}|$ de aplicações lineares, $A = (A_{\pi\pi'})_{\pi, \pi' \in \mathcal{P}}$ onde $A_{\pi\pi'} : CH^*(M_{\pi'}) \rightarrow CH^*(M_\pi)$.

1. A matriz parcialmente ordenada A é dita **estritamente triangular inferior** se $\pi \leq \pi' \Rightarrow A_{\pi\pi'} = 0$.
2. A matriz parcialmente ordenada A é dita **triangular inferior** se $\pi < \pi' \Rightarrow A_{\pi\pi'} = 0$.
3. Definimos para cada $I \in \mathcal{I}$ uma submatriz $A(I)$ dada por

$$A(I) = (A_{\pi, \pi'})_{\pi, \pi' \in I} : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I).$$

4. A matriz A é chamada um **operador cobordo** se é de grau $+1$ e $A^2 = 0$.

Seja $\Delta = (\Delta_{\pi\pi'})_{\pi, \pi' \in \mathcal{P}} : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ um operador cobordo triangular estritamente inferior. Temos o seguinte lema do Franzosa [10] sobre o operador de cobordo restrito a um intervalo.

Lema 4.1 ([10]). *Se Δ é um operador cobordo estritamente triangular inferior, então também o é para cada $I \in \mathcal{I}$. Logo, $(C\Delta(I), \Delta(I))$ é um complexo de cocadeia para cada $I \in \mathcal{I}$.*

Suponha que $a = (a_{\pi\pi'})_{\pi, \pi' \in \mathcal{P}} : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ é uma aplicação de cocadeia linear triangular inferior de grau zero para o complexo de cocadeia $(C\Delta, \Delta)$. O Lema 4.2 apresentado abaixo é um resultado análogo ao Lema 4.1 acima para a aplicação de cocadeia a .

Lema 4.2 ([22]). *Se a é uma aplicação de cocadeia triangular inferior com respeito ao complexo de cocadeia $(C\Delta, \Delta)$, então $a(I)$ é uma aplicação de cocadeia para o complexo de cocadeia $(C\Delta(I), \Delta(I))$.*

Seja $\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})$ a trança de módulos graduados com endomorfismos, obtida passando a cohomologia a trança de complexos de cocadeia com endomorfismos

$$\mathcal{C}\Delta(\mathcal{M}) = \{C\Delta(I), \Delta(I), a(I) \mid I \in \mathcal{I}\}.$$

Lembre que $\mathcal{H}(\mathcal{M}) = \{Con^*(M_I) = (CH^*(M_I), \chi^*(M_I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$.

Agora, podemos definir o par de matrizes de conexão formalmente.

Definição 4.13. O par de matrizes (Δ, a) é chamado um **par de matrizes de conexão** para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ se a trança de módulos graduados com endomorfismo $\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})$ é isomorfa à trança de módulos graduados com endomorfismo $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Denotamos o conjunto de pares de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ por

$$\mathcal{CM}(\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)).$$

Richeson provou em [22] a existência do par de matrizes de conexão para o caso em que $CH^*(S)$ é de dimensão finita.

Teorema 4.3 (Existência de par de matrizes de conexão, [22]). *Para qualquer conjunto invariante isolado S com $CH^*(S)$ finito dimensional e qualquer decomposição de Morse parcialmente ordenada $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ de S , existe um par de matrizes de conexão.*

4.1.6 Exemplos

Exemplo 4.4 (Difeomorfismo Morse-Smale). Seja o difeomorfismo $f : S^2 \rightarrow S^2$ dado pela aplicação tempo um do fluxo em S^2 indicado na Figura 4.4, onde w_1, w_2 são dois poços fixos, σ é uma sela fixa e α é uma fonte fixa.

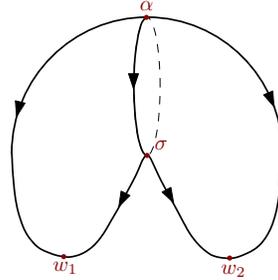


Figura 4.4: Difeomorfismo Morse-Smale na esfera S^2

Temos que $S = S^2$ é um conjunto invariante isolado. Vamos encontrar uma decomposição de Morse para este conjunto. Tome

- $\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$ e tome a ordem dada pelo difeomorfismo (que neste caso é a mesma ordem dada pelo fluxo) $1 < 2 < 3$.
- Os intervalos são $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
- Os intervalos atratores são $\mathcal{A} = \{A_0 = \emptyset, A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{1, 2, 3\}\}$.

Temos que $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_1 = \{w_1, w_2\}, M_2 = \{\sigma\}, M_3 = \{\alpha\}\}$ é uma decomposição de Morse para S e a coleção de compactos $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <) = \{N(A_0) = \emptyset, N(A_1), N(A_2), N(A_3) = S^2\}$, indicada na Figura 4.5, é uma filtração de conjuntos de Morse associada.

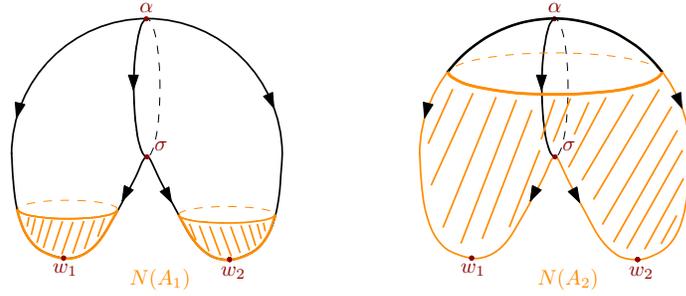
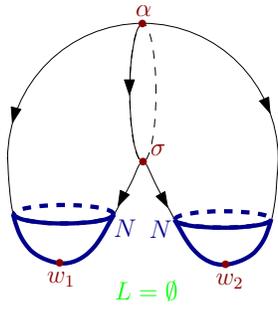


Figura 4.5: Filtração de conjuntos de Morse

Vamos calcular os índices de Conley cohomológicos reduzidos dos conjuntos $M_1, M_2, M_3, M_{12}, M_{23}$ e M_{123} .



$(N, L) = (N(A_1), N(A_0) = \emptyset)$ é um par-filtração para M_1

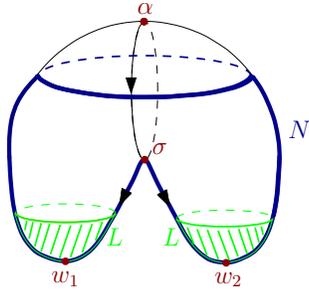
$N_L \simeq \{\cdot\} \sqcup \{\cdot\} \sqcup \{\cdot\}$ (união disjunta)

Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\text{Con}^q(M_1) = \begin{cases} (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, Id_{2 \times 2}), & q = 0 \\ (0, 0), & q \neq 0 \end{cases}$$



$(N, L) = (N(A_2), N(A_1))$ é um par-filtração para M_2

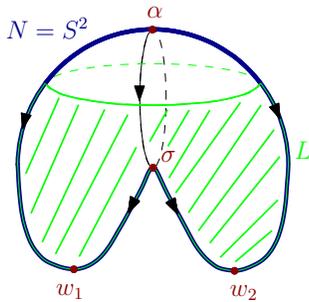
$N_L \simeq S^1$

Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\text{Con}^q(M_2) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$



$(N, L) = (N(A_3) = S^2, N(A_2))$ é um par-filtração para M_3

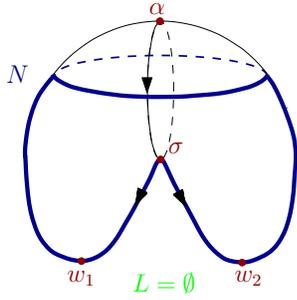
$N_L \simeq S^2$

Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 2 \\ 0, & q \neq 2 \end{cases}$$

Portanto,

$$\text{Con}^q(M_3) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & q \neq 2 \end{cases}$$



$(N, L) = (N(A_2), N(A_0) = \emptyset)$ é um par-filtração para

$$M_{12} = M_1 \cup M_2 \cup C(M_2, M_1)$$

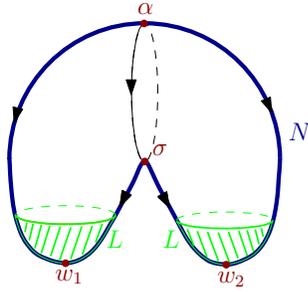
$$N_L \simeq \{\cdot\} \sqcup \{\cdot\} \text{ (união disjunta)}$$

Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$Con^q(M_{12}) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 0 \\ (0, 0), & q \neq 0 \end{cases}$$



$(N, L) = (N(A_3) = S^2, N(A_1))$ é um par-filtração para

$$M_{23} = M_2 \cup M_3 \cup C(M_3, M_2)$$

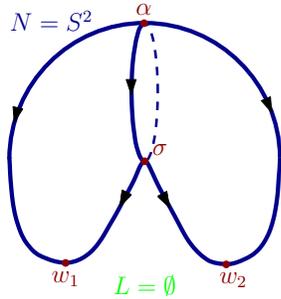
$$N_L \simeq S^2 \vee S^1$$

Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 1, 2 \\ 0, & q \neq 1, 2 \end{cases}$$

Portanto,

$$Con^q(M_{23}) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 1, 2 \\ (0, 0), & q \neq 1, 2 \end{cases}$$



$(N, L) = (N(A_3) = S^2, N(A_0) = \emptyset)$ é um par-filtração para

$$M_{123} = S^2$$

$$N_L \simeq S^2 \sqcup \{\cdot\} \text{ (união disjunta)}$$

Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

Portanto,

$$Con^q(M_{123}) = Con^1(S^2) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 0, 2 \\ (0, 0), & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

Temos que um par de matrizes de conexão tem a seguinte forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta(2, 1) & 0 & 0 \\ \Delta(3, 1) & \Delta(3, 2) & 0 \end{pmatrix} \text{ e } a = \begin{pmatrix} a(1, 1) & 0 & 0 \\ a(2, 1) & a(2, 2) & 0 \\ a(3, 1) & a(3, 2) & a(3, 3) \end{pmatrix}$$

onde cada $\Delta(i, j) : CH^*(M_j) \rightarrow CH^{*+1}(M_i)$ é uma aplicação de cobordo de grau 1 e $a(i, j) : CH^*(M_j) \rightarrow CH^*(M_i)$ é uma aplicação de cocadeia de grau zero.

Vamos calcular primeiramente Δ .

- $\Delta^q(2, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^{q+1}(M_2)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow \Delta^q(2, 1) = 0$. Se $q = 0$, temos que

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0(2, 1) : CH^0(M_1) & \rightarrow & CH^1(M_2) \\ & & \parallel \\ & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \end{array}$$

- $\Delta^q(3, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^{q+1}(M_3)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow \Delta^q(3, 1) = 0$. Por outro lado, se $q = 0$, então $CH^{0+1}(M_3) = 0 \Rightarrow \Delta^0(3, 1) = 0$. Logo, $\Delta(3, 1) \equiv 0$.

- $\Delta^q(3, 2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^{q+1}(M_3)$

Se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow \Delta^q(3, 2) = 0$. Se $q = 1$, temos que

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1(3, 2) : CH^1(M_2) & \rightarrow & CH^2(M_2) \\ & & \parallel \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$$

Analisando, na Figura 4.6, as seqüências longas exatas associadas ao par $(\{1\}, \{2\}) \in \mathcal{I}_2$ e ao par $(\{2\}, \{3\}) \in \mathcal{I}_2$, obtemos que $\Delta^0(2, 1) \simeq \delta^0(2, 1) \neq 0$ e $\Delta^1(3, 2) \simeq \delta^1(3, 2) = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \rightarrow CH^0(M_2) & \rightarrow & CH^0(M_{12}) & \rightarrow & CH^0(M_1) & \xrightarrow{\delta^0(2,1)} & CH^1(M_2) & \rightarrow & CH^1(M_{12}) & \rightarrow & CH^1(M_1) & \rightarrow \cdots \\ \parallel & & \parallel & \\ 0 & & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} & & 0 & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \rightarrow CH^1(M_3) & \rightarrow & CH^1(M_{23}) & \rightarrow & CH^1(M_2) & \xrightarrow{\delta^1(3,2)} & CH^2(M_3) & \rightarrow & CH^2(M_{23}) & \rightarrow & CH^2(M_2) & \rightarrow \cdots \\ \parallel & & \parallel & \\ 0 & & \mathbb{Q} & \end{array}$$

Figura 4.6: Sequências longas exatas

Portanto, a matriz de conexão $\Delta = \{\Delta^q\}$ do par de matrizes de conexão (Δ, a) é da forma

$$\Delta^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta^q(2, 1) & 0 & 0 \\ \Delta^q(3, 1) & \Delta^q(3, 2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta^0(2, 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora, calculemos a matriz de conexão complementar a .

- $a^q(1, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_1)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(1, 1) = 0$ para $q \neq 0$. Se $q = 0$, então

$$\begin{array}{ccc} a^0(1, 1) : CH^0(M_1) & \rightarrow & CH^0(M_1) \\ & \parallel & \parallel \\ & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{array}$$

- $a^q(2, 2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^q(M_2)$

Se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow a^q(2, 2) = 0$ para $q \neq 1$. Se $q = 1$, então

$$\begin{array}{ccc} a^1(2, 2) : CH^1(M_2) & \rightarrow & CH^1(M_2) \\ & \parallel & \parallel \\ & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{array}$$

- $a^q(3, 3) : CH^q(M_3) \rightarrow CH^q(M_3)$

Se $q \neq 2$, então $CH^q(M_3) = 0 \Rightarrow a^q(3, 3) = 0$ para $q \neq 2$. Se $q = 2$, então

$$\begin{array}{ccc} a^2(3, 3) : CH^2(M_3) & \rightarrow & CH^2(M_3) \\ & \parallel & \parallel \\ & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{array}$$

- $a^q(2, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_2)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(2, 1) = 0$. Se $q = 0$, temos que $CH^0(M_2) = 0 \Rightarrow a^0(2, 1) = 0$. Logo, $a(2, 1) \equiv 0$.

- $a^q(3, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_3)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(3, 1) = 0$. Se $q = 0$, temos que $CH^0(M_3) = 0 \Rightarrow a^0(3, 1) = 0$. Logo, $a^q(3, 1) \equiv 0$.

- $a^q(3, 2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^q(M_3)$

Se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow a^q(3, 2) = 0$. Se $q = 1$, temos que $CH^1(M_3) = 0 \Rightarrow a^1(3, 2) = 0$. Logo, $a^q(3, 2) \equiv 0$.

Sabemos que $(a^q(I))^*$ é conjugada ao $\chi^q(M_I), \forall I \in \mathcal{I}$ e

$$\begin{array}{ccc} (a^q)^* : \frac{Ker \Delta^q}{Im \Delta^{q-1}} & \longrightarrow & \frac{Ker \Delta^q}{Im \Delta^{q-1}} \\ & & x + Im \Delta^{q-1} \longmapsto a^q(x) + Im \Delta^{q-1} \end{array}$$

Para cada $k = 0, 1, 2$, temos que

$$\begin{array}{ccc} a^k(k+1, k+1) : CH^k(M_{k+1}) & \rightarrow & CH^k(M_{k+1}) \\ & \parallel & \parallel \\ & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{array}$$

e $\Delta(k+1) = \Delta(k+1, k+1) \equiv 0$. Logo, como $Im\Delta(k+1) \equiv 0$, temos que $a^k(k+1, k+1) = (a^k(k+1, k+1))^*$ é conjugado ao $\chi^k(M_{k+1}) = Id$, para todo $k = 0, 1, 2$.

Portanto, a matriz de conexão complementar $a = \{a^q\}$ é da forma

$$a^q = \begin{cases} \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}, & q = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 4.5 (Difeomorfismo Smale). Vamos calcular o par de matrizes de conexão para o difeomorfismo do Exemplo 1.2 para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_1 = \{p\}, M_2 = \Lambda, M_3 = \{\infty\}\}$ com $1 < 2 < 3$.

Vamos calcular os índices dos conjuntos de Morse.

Tome D_p um disco suficientemente pequeno contendo o ponto p . Temos que $N = D_p$ e $L = \emptyset$ é um par-filtração para M_1 e $N_L \simeq S^0$. Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases} \quad e \quad (f_P)^q = \begin{cases} Id, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$Con^q(M_1) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 0 \\ (0, 0), & q \neq 0 \end{cases}$$

Tome D_∞ um disco suficientemente pequeno que isola o ponto ∞ . Temos que $N = D_\infty$ e $L = \partial D_\infty$ é um par-filtração para M_3 e $N_L \simeq S^2$. Logo,

$$Con^q(M_3) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & q \neq 2 \end{cases}$$

Temos que $M_2 = \Lambda \subset \overline{T^2 \setminus (D_p \cup D_\infty)}$ onde D_p e D_∞ são os discos definidos acima. Então, $N = \overline{T^2 \setminus (D_p \cup D_\infty)}$ e $L = \partial D_p$ é um par-filtração de M_2 e N_L tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1$. Daí,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

Observe que $[h_1] + B^1(N_L)$ e $[h_2] + B^1(N_L)$ geram $H^1(N_L)$ e

$$\begin{aligned} (f_P)^1([h_1] + B^1(N_L)) &= -[h_2] + B^1(N_L) \\ (f_P)^1([h_2] + B^1(N_L)) &= ([h_1] + [h_2]) + B^1(N_L) \end{aligned}$$

Daí,

$$(f_P)^1 = \begin{matrix} & [f(h_1)] & [f(h_2)] \\ \begin{matrix} [h_1] \\ [h_2] \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

é um isomorfismo, e portanto

$$Con^q(M_2) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$

Temos que o par de matrizes de conexão é da seguinte forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta(2,1) & 0 & 0 \\ \Delta(3,1) & \Delta(3,2) & 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a(1,1) & 0 & 0 \\ a(2,1) & a(2,2) & 0 \\ a(3,1) & a(3,2) & a(3,3) \end{pmatrix}$$

Primeiramente, iremos calcular a matriz de conexão Δ que é uma coleção de matrizes $\{\Delta^q\}$.

- $\Delta^q(2,1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^{q+1}(M_2)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow \Delta^q(2,1) \equiv 0$. Se $q = 0$, então

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0(2,1) : CH^0(M_1) & \rightarrow & CH^1(M_2) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \end{array}$$

Como $(\{1\}, \{2\})$ é um par de intervalos adjacentes, podemos construir a seguinte sequência longa exata

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \rightarrow & CH^0(M_2) & \xrightarrow{p_0^*} & CH^0(M_{12}) & \xrightarrow{i_0^*} & CH^0(M_1) & \xrightarrow{\delta^0(2,1)} & CH^1(M_2) & \xrightarrow{p_1^*} & CH^1(M_{12}) & \xrightarrow{i_1^*} & CH^1(M_1) & \rightarrow & \cdots \\
& & \parallel & & \\
& & 0 & & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & & 0 & &
\end{array}$$

Daí, $Im\delta^0(2,1) = Ker p_1^* = \{(0,0)\}$ e $Ker\delta^0(2,1) = Im i_0^* = \mathbb{Q}$, e assim concluímos que $\Delta^0(2,1) \equiv \delta^0(2,1) = 0$.

- $\Delta^q(3,1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^{q+1}(M_3)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow \Delta^q(3,1) \equiv 0$. Se $q = 0$, então $CH^1(M_3) = 0 \Rightarrow \Delta^0(3,1) \equiv 0$. Logo, $\Delta(3,1) \equiv 0$.

- $\Delta^q(3,2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^{q+1}(M_3)$

Se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow \Delta^q(3,2) \equiv 0$. Se $q = 1$, então

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^1(3,2) : & CH^1(M_2) & \rightarrow & CH^2(M_3) \\
& \parallel & & \parallel \\
& \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & & \mathbb{Q}
\end{array}$$

Como $(\{2\}, \{3\})$ é um par de intervalos adjacentes, podemos construir a seguinte sequência longa exata

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \rightarrow & CH^1(M_3) & \xrightarrow{p_1^*} & CH^1(M_{23}) & \xrightarrow{i_1^*} & CH^1(M_2) & \xrightarrow{\delta^1(3,2)} & CH^2(M_3) & \xrightarrow{p_2^*} & CH^2(M_{23}) & \xrightarrow{i_2^*} & CH^2(M_2) & \rightarrow & \cdots \\
& & \parallel & & \\
& & 0 & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} & & 0 & &
\end{array}$$

Como $Im\delta^1(3,2) = Ker p_2^* = 0$ e $Ker\delta^1(3,2) = Im i_1^* = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, temos que $\Delta^1(3,2) \equiv \delta^1(3,2) \equiv 0$.

Para construirmos as sequências anteriores foram necessários os índices de Conley dos conjuntos M_{12} e M_{23} . A seguir apresentamos o cálculo destes índices.

Temos que $M_{12} = M_1 \cup M_2 \cup C(M_2, M_1) \subset \overline{T^2 \setminus D_\infty}$. Assim, $(N = \overline{T^2 \setminus D_\infty}, L = \emptyset)$ é um par-filtração para M_{12} e N_L tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1 \vee S^1$ união disjunta com um ponto. Logo,

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 0 \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que $(f_P)^0 \equiv Id$ e $[h_1] + B^1(N_L), [h_2] + B^1(N_L)$ geram $H^1(N_L)$ e daí

$$(f_P)^1 = \begin{matrix} & [f(h_1)] & [f(h_2)] \\ [h_1] & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ [h_2] & \end{matrix}$$

é um isomorfismo, e portanto

$$Con^q(M_{12}) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 0 \\ \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (0, 0), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que $M_{23} = M_2 \cup M_3 \cup C(M_3, M_2) \subset \overline{T^2 \setminus D_p}$. Assim, $(N = \overline{T^2 \setminus D_p}, L = \partial D_p)$ é um par-filtração para M_{23} e $N_L \cong T^2$. Logo,

$$H^q(N_L) \simeq H^q(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ \mathbb{Q}, & q = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que $(f_P)^2 \equiv Id$ e $[h_1] + B^1(N_L), [h_2] + B^1(N_L)$ geram $H^1(N_L)$. Logo,

$$(f_P)^1 = \begin{matrix} & [f(h_1)] & [f(h_2)] \\ [h_1] & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ [h_2] & \end{matrix}$$

é um isomorfismo, e portanto,

$$Con^q(M_{23}) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (\mathbb{Q}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora, vamos calcular a matriz de conexão complementar a que é uma coleção de matrizes $a = \{a^q\}$.

- $a^q(1, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_1)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(1, 1) \equiv 0$. Se $q = 0$, então

$$\begin{array}{ccc} a^0(1, 1) : & CH^0(M_1) & \rightarrow & CH^0(M_1) \\ & \parallel & & \parallel \\ & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \end{array}$$

E, como $\Delta(1) \equiv 0$, temos que $a^0(1, 1) \equiv (a^0(1, 1))^* \sim \chi^0(M_1) = Id$.

- $a^q(2, 2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^q(M_2)$

Se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow a^q(2, 2) \equiv 0$. Se $q = 1$, então

$$\begin{array}{ccc} a^1(2, 2) : CH^1(M_2) & \rightarrow & CH^1(M_2) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \end{array}$$

E, como $\Delta(2) \equiv 0$, temos que $a^1(2, 2) \equiv (a^1(2, 2))^* \sim \chi^1(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- $a^q(3, 3) : CH^q(M_3) \rightarrow CH^q(M_3)$

Se $q \neq 2$, então $CH^q(M_3) = 0 \Rightarrow a^q(3, 3) \equiv 0$. Se $q = 2$, então

$$\begin{array}{ccc} a^2(3, 3) : CH^2(M_3) & \rightarrow & CH^2(M_3) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \end{array}$$

E, como $\Delta(3) \equiv 0$, temos que $a^2(3, 3) \equiv (a^2(3, 3))^* \sim \chi^2(M_3) = Id$.

- $a^q(2, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_2)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(2, 1) \equiv 0$. Se $q = 0$, então $CH^0(M_2) = 0$ e assim $a^0(2, 1) \equiv 0$. Logo, $a(2, 1) \equiv 0$.

- $a^q(3, 1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_3)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(3, 1) \equiv 0$. Se $q = 0$, então $CH^0(M_3) = 0$ e assim $a^0(3, 1) \equiv 0$. Logo, $a(3, 1) \equiv 0$.

- $a^q(3, 2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^q(M_3)$

Se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow a^q(3, 2) \equiv 0$. Se $q = 1$, então $CH^1(M_3) = 0$ e assim $a^1(3, 2) \equiv 0$. Logo, $a(3, 2) \equiv 0$.

de conexão para o fluxo e , que sob certas condições as entradas fora da diagonal principal da matriz de conexão complementar a são nulas.

Finalmente, na Subseção 4.2.2, provamos o Teorema 4.7 que caracteriza o par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse em conjuntos básicos zero dimensionais, cujos os índices de Conley homológico e cohomológico coincidem nos conjuntos básicos.

A seguir reescrevemos, na Proposição 4.6, o Corolário 4.1 na linguagem de conjuntos de Morse.

Proposição 4.6. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Seja (Δ, a) um par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ de um conjunto invariante isolado S de f . Sejam $\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ com $\pi < \pi'$ elementos adjacentes. Se uma das alternativas abaixo ocorrer:*

1. $\Delta^*(\pi', \pi) \neq 0$ ou
2. $CH^*(M_{\pi\pi'}) \cong CH^*(M_\pi) \oplus CH^*(M_{\pi'})$ ou
3. $\chi^*(M_{\pi\pi'})$ não é conjugado ao $\chi^*(M_\pi) \oplus \chi^*(M_{\pi'})$

então $C(M_{\pi'}, M_\pi; M_{\pi\pi'}) \neq \emptyset$.

Demonstração:

A demonstração segue observando que $(M_\pi, M_{\pi'})$ é uma decomposição em par atrator-repulsor para $M_{\pi\pi'}$ e portanto, podemos usar o Corolário 4.1 para concluir a existência de conexão. ■

Definição 4.14. *Sejam dois endomorfismos A e B fixos. Dizemos que dois endomorfismos g e f estão relacionados por \sim_{AB} , $g \sim_{AB} f$, se, e somente se,*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ g & B \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} A & 0 \\ f & B \end{pmatrix}$$

são conjugados.

A relação acima é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência da relação \sim_{AB} por $[g]$ onde g é um representante da classe.

Teorema 4.4. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e (Δ, a) um par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ de um conjunto invariante isolado S de f com uma ordem parcial $<$.*

(a) Se $<$ é a ordem f -definida e $\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ são dois elementos que não estão relacionados por $<$, então $\Delta(\pi, \pi') = \Delta(\pi', \pi) = 0$ e $[a(\pi, \pi')] = [a(\pi', \pi)] = 0$.

(b) Se $\pi < \pi'$ em \mathcal{P} são elementos adjacentes tais que a submatriz $\Delta(\pi\pi')$ de Δ é nula e a entrada $[a(\pi', \pi)]$ de a é não nula, então $C(M_{\pi'}, M_{\pi}) \neq \emptyset$.

(c) Sejam $\pi < \pi'$ dois elementos adjacentes em \mathcal{P} tais que

$$CH^q(M_{\pi}) = \begin{cases} CH^k(M_{\pi}) \neq 0, & q = k \\ 0, & q \neq k \end{cases} \quad e \quad CH^q(M_{\pi'}) = \begin{cases} CH^s(M_{\pi'}) \neq 0, & q = s \\ 0, & q \neq s \end{cases}$$

Se $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$, então $a(\pi', \pi) = 0$.

Demonstração:

(a) Como π, π' não estão relacionados pela ordem f -definida, então não pode haver conexão entre M_{π} e $M_{\pi'}$. Pela Proposição 4.6, como $\{\pi, \pi'\}$ forma um intervalo (logo são adjacentes), tem-se que $\Delta(\pi, \pi') = \Delta(\pi', \pi) = 0$, $CH^*(M_{\pi\pi'}) \cong CH^*(M_{\pi}) \oplus CH^*(M_{\pi'})$ e $\chi^*(M_{\pi\pi'})$ é conjugado ao $\chi^*(M_{\pi}) \oplus \chi^*(M_{\pi'})$, pois caso contrário haveria conexão entre M_{π} e $M_{\pi'}$.

Como $\Delta(\pi', \pi) = 0$, temos que $\Delta(\pi\pi') \equiv 0$, e daí segue que $(a(\pi\pi'))^* \equiv a(\pi\pi')$.

Assim, como

$$a(\pi\pi') \equiv (a(\pi\pi'))^* \sim \chi(M_{\pi\pi'}) \sim \chi(M_{\pi}) \oplus \chi(M_{\pi'})$$

temos que

$$\begin{pmatrix} \chi(M_{\pi}) & 0 \\ a(\pi', \pi) & \chi(M_{\pi'}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \chi(M_{\pi}) & 0 \\ 0 & \chi(M_{\pi'}) \end{pmatrix}$$

e portanto $[a(\pi', \pi)] = 0$.

Da mesma forma provamos que $[a(\pi, \pi')] = 0$.

(b) Observe que como π, π' são elementos adjacentes, temos que $I = \{\pi, \pi'\}$ forma um intervalo, e com isso $(a(\pi\pi'))^*$ é conjugada ao $\chi(M_{\pi\pi'})$.

Como $\Delta(\pi\pi') \equiv 0$, temos que $a(\pi\pi') \equiv (a(\pi\pi'))^*$, pois

$$\begin{aligned} (a(\pi\pi')^q)^* : \frac{Ker\Delta(\pi\pi')^q}{Im\Delta(\pi\pi')^{q-1}} &\longrightarrow \frac{Ker\Delta(\pi\pi')^q}{Im\Delta(\pi\pi')^{q-1}} \\ x + Im\Delta(\pi\pi')^{q-1} &\longmapsto a^q(x) + Im\Delta(\pi\pi')^{q-1} \end{aligned}$$

Logo, $a(\pi\pi')$ é conjugada ao $\chi(M_{\pi\pi'})$.

Por outro lado, como π, π' são adjacente temos, pela Proposição 4.1, que $(M_\pi, M_{\pi'})$ é uma decomposição em par atrator-repulsor para $M_{\pi\pi'}$. Daí,

$$a(\pi\pi') = \begin{pmatrix} \chi(M_\pi) & 0 \\ a(\pi', \pi) & \chi(M_{\pi'}) \end{pmatrix}.$$

Como, por hipótese, $[a(\pi', \pi)] \neq 0$, temos que

$$\begin{pmatrix} \chi(M_\pi) & 0 \\ a(\pi', \pi) & \chi(M_{\pi'}) \end{pmatrix} \text{ não é conjugada a } \begin{pmatrix} \chi(M_\pi) & 0 \\ 0 & \chi(M_{\pi'}) \end{pmatrix}$$

portanto, $\chi(M_{\pi\pi'})$ não é conjugado ao $\chi(M_\pi) \oplus \chi(M_{\pi'})$, o que implica, pela Proposição 4.6, que $C(M_{\pi'}, M_\pi) \neq \emptyset$.

(c) Sabemos que

$$\Delta^q(\pi', \pi) : CH^q(M_\pi) \rightarrow CH^{q+1}(M_{\pi'})$$

Assim, se $q \neq k$ então $CH^q(M_\pi) = 0$ e se $q = k$ então tem-se que $\Delta^k(\pi', \pi) : CH^k(M_\pi) \rightarrow CH^{k+1}(M_{\pi'})$ deve ser diferente de zero, pois por hipótese $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$. Daí, segue que $s = k + 1 \neq k$.

Como

$$a^q(\pi', \pi) : CH^q(M_\pi) \rightarrow CH^q(M_{\pi'})$$

e $s = k + 1$, temos que se $q \neq k$ então $CH^q(M_\pi) = 0$ e se $q = k$ então $CH^k(M_{\pi'}) = 0$. Portanto, $a(\pi', \pi) = 0$. ■

Nas hipóteses do Teorema 4.4(b) e da Proposição 4.6 exigimos que f seja um difeomorfismo, porém é fácil ver que basta f ser contínua.

O Exemplo 4.3 ilustra a Proposição 4.4 (b) acima, pois $M_1 = A$ e $R = M_2$ com $1 < 2$ é uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S e

$$\Delta \equiv 0 \text{ e } a^q = \begin{cases} \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -Id & Id \end{pmatrix}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

assim $\Delta^1(12) = \Delta^1 \equiv 0$ e $a^1(2, 1) = -Id \neq 0$.

Observe que os difeomorfismos Morse-Smale que possuem uma decomposição de Morse do conjunto invariante isolado, onde cada conjunto de Morse é um conjunto básico de f , satisfazem o Teorema 4.4 (c) como vimos nos Teoremas 2.11 e 2.12. Este fato é ilustrado no

Exemplo 4.4, pois $\{1, 2\}$ são adjacentes,

$$CH^q(M_1) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases} \text{ e } CH^q(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 0 \\ 1, & q \neq 1 \end{cases}$$

e $\Delta^0(2, 1) \neq 0$, $a^0(2, 1) = 0$. Ainda mais, nas condições do Teorema 4.4 (c), podemos concluir que Δ e a tem caráter complementar, já que se $\Delta(\pi', \pi) \neq 0 \Rightarrow a(\pi', \pi) = 0$ e $a(\pi', \pi) \neq 0 \Rightarrow \Delta(\pi', \pi) = 0$. O Exemplo 4.3 ilustra esta segunda afirmação, pois

$$CH^q(M_1) = CH^q(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

e $a^1(2, 1) \neq 0$, $\Delta^1(2, 1) = 0$, onde $M_1 = A$ e $R = M_2$.

É interessante ver que, no caso de 2-variedades, dependendo da escolha da decomposição de Morse, obtemos informações apenas para a matriz de conexão Δ , como vemos no resultado a seguir.

Proposição 4.7. *Sejam M uma 2-variedade compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_i \mid i = 1, 2, 3\}$ a decomposição de Morse de M tal que $M_i = \{\text{todos os conjuntos básicos de índice } i - 1\}$ e $<$ é a ordem f -definida. Suponha que*

$$Con^q(M_1) = \begin{cases} (CH^0(M_1), \chi^0(M_1)), & q = 0 \\ (0, 0), & q \neq 0 \end{cases}, \quad Con^q(M_2) = \begin{cases} (CH^1(M_2), \chi^1(M_2)), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$

$$Con^q(M_3) = \begin{cases} (CH^2(M_3), \chi^2(M_3)), & q = 2 \\ (0, 0), & q \neq 2 \end{cases}$$

então o par (Δ, a) da forma

$$\Delta^q = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta^0(2, 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^1(3, 2) & 0 \end{pmatrix}, & q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad a^q = \begin{cases} \begin{pmatrix} \chi^0(M_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^1(M_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2(M_3) \end{pmatrix}, & q = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um par de matrizes de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$.

Demonstração:

Sabemos que um par de matrizes de conexão para decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ deve ter a forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta(2,1) & 0 & 0 \\ \Delta(3,1) & \Delta(3,2) & 0 \end{pmatrix} \text{ e } a = \begin{pmatrix} a(1,1) & 0 & 0 \\ a(2,1) & a(2,2) & 0 \\ a(3,1) & a(3,2) & a(3,3) \end{pmatrix}$$

Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} \text{Con}^q(M_1) &= \begin{cases} (CH^0(M_1), \chi^0(M_1)), & q = 0 \\ (0, 0), & q \neq 0 \end{cases} \\ \text{Con}^q(M_2) &= \begin{cases} (CH^1(M_2), \chi^1(M_2)), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases} \\ \text{Con}^q(M_3) &= \begin{cases} (CH^2(M_3), \chi^2(M_3)), & q = 2 \\ (0, 0), & q \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vejam a forma da matriz Δ .

- $\Delta^q(3,1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^{q+1}(M_3)$

Se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow \Delta^q(3,1) \equiv 0$. Por outro lado, se $q = 0$, então $CH^{0+1}(M_3) = 0 \Rightarrow \Delta^0(3,1) \equiv 0$. Logo, $\Delta(3,1) \equiv 0$.

- $\Delta^0(2,1)$ e $\Delta^1(3,2)$ são possíveis entradas não nulas. De fato,

$$\Delta^q(2,1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^{q+1}(M_2)$$

e se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow \Delta^q(2,1) \equiv 0$. Se $q = 0$, então $CH^0(M_1)$ e $CH^1(M_2)$ podem ser não nulos, logo $\Delta^0(2,1) \equiv \delta^0(2,1)$. E

$$\Delta^q(3,2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^{q+1}(M_3)$$

e se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow \Delta^q(3,2) \equiv 0$. Se $q = 1$, então $CH^1(M_2)$ e $CH^2(M_3)$ podem ser não nulos, logo $\Delta^1(3,2) \equiv \delta^1(3,2)$.

Portanto, Δ tem a forma

$$\Delta^q = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta^0(2,1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^1(3,2) & 0 \end{pmatrix}, & q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora, vejamos a forma da matriz a .

- $a(2,1) \equiv 0$, pois, $a^q(2,1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_2)$, e se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(2,1) \equiv 0$, e se $q = 0$, então $CH^0(M_2) = 0 \Rightarrow a^0(2,1) \equiv 0$.
- $a(3,1) \equiv 0$, pois, $a^q(3,1) : CH^q(M_1) \rightarrow CH^q(M_3)$, e se $q \neq 0$, então $CH^q(M_1) = 0 \Rightarrow a^q(3,1) \equiv 0$, e se $q = 0$, então $CH^0(M_3) = 0 \Rightarrow a^0(3,1) \equiv 0$.
- $a(3,2) \equiv 0$, pois, $a^q(3,2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^q(M_3)$, e se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = 0 \Rightarrow a^q(3,2) \equiv 0$, e se $q = 1$, então $CH^1(M_3) = 0 \Rightarrow a^1(3,2) \equiv 0$.
- Para cada $k = 0, 1, 2$, temos que $a^q(k+1, k+1) = 0$ se $q \neq k$ e $a^k(k+1, k+1)$ é conjugada ao $\chi^k(M_{k+1})$.

De fato, temos que, $a^q(k+1, k+1) : CH^q(M_{k+1}) \rightarrow CH^q(M_{k+1})$, e se $q \neq k$, então $CH^q(M_{k+1}) = 0 \Rightarrow a^q(k+1, k+1) \equiv 0$.

Como $a^k(k+1, k+1) : CH^k(M_{k+1}) \rightarrow CH^k(M_{k+1})$ e $\Delta(k+1) \equiv 0$, temos que $a^k(k+1, k+1) \equiv (a^k(k+1, k+1))^* \sim \chi^k(M_{k+1})$.

Portanto, a tem a seguinte forma

$$a^q = \begin{cases} \begin{pmatrix} \chi^0(M_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^1(M_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2(M_3) \end{pmatrix}, & q = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

■

Exemplo 4.6. Observe que os Exemplos 4.4 da esfera S^2 e 4.5 do toro T^2 se encaixam nas hipóteses da Proposição 4.7, e desta forma a maioria dos cálculos feitos nestes dois exemplos podem ser obtidos diretamente usando a Proposição 4.7.

Note que se queremos detectar conexões entre conjuntos de Morse do mesmo índice, isto é, conexões de grau zero entre conjuntos de Morse, devemos tomar uma decomposição de Morse com um maior número de conjuntos de Morse.

Em [20], Reineck apresenta um teorema de unicidade da matriz de conexão para um caso especial de fluxos. A seguir demonstramos um resultado similar para um caso de difeomorfismos Morse-Smale sem órbita periódica, onde temos a unicidade do par de matrizes de conexão.

Teorema 4.5. *Sejam M uma variedade suave e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo Morse-Smale gradiente-like¹ sem órbita periódica. Seja S um conjunto invariante isolado de f que tem uma decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ com $<$ a ordem f -definida, onde cada conjunto de Morse M_π é um conjunto básico de f . Então o par de matrizes de conexão (Δ, a) , sob um corpo \mathbb{F} , para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ é única na classe de equivalência de cada entrada $a(\pi, \pi')$ da matriz de conexão complementar a dada pela relação $\sim_{\chi(M_{\pi'})\chi(M_\pi)}$ (ver Definição 4.14).*

Demonstração:

Denotemos $W^u(\pi)$ e $W^s(\pi)$ as variedades instável e estável de M_π , respectivamente.

Tome $\pi' < \pi$ em \mathcal{P} quaisquer e $<$ a ordem f -definida. Observe que se M_π é um conjunto básico de f , isto é, é um ponto fixo hiperbólico, então

$$CH^q(M_\pi) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = k \\ 0, & q \neq k \end{cases}$$

para algum k .

Caso 1: Suponha que π, π' são elementos adjacentes.

A entrada $\Delta(\pi, \pi')$ de Δ é univocamente determinada pela sequência do índice de Conley cohomológico reduzido associado ao par atrator-repulsor $(M_{\pi'}, M_\pi)$, descrito na Proposição 4.2.

Analisamos a entrada $a(\pi, \pi')$. Se $\Delta^q(\pi, \pi') \neq 0$, pelo Teorema 4.4 (c), temos que $a(\pi, \pi') = 0$. Agora, se $\Delta(\pi, \pi') = 0$, então $\Delta(\pi', \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta(\pi, \pi') & 0 \end{pmatrix} \equiv 0$ e daí $(a(\pi', \pi))^* \equiv$

¹Um difeomorfismo Morse-Smale f é dito **gradiente-like** se para todos pontos periódicos $x \neq y$ temos que: $W^u(x) \cap W^s(y) \neq \emptyset \Rightarrow \dim(W^u(x)) > \dim(W^u(y))$.

$a(\pi'\pi)$. Logo,

$$a(\pi'\pi) = \begin{pmatrix} \chi(M_{\pi'}) & 0 \\ a(\pi, \pi') & \chi(M_{\pi}) \end{pmatrix} \sim \chi(M_{\pi'\pi})$$

e $\chi(M_{\pi'\pi})$ é determinado univocamente pela sequência do índice de Conley cohomológico reduzido associado ao par atrator-repulsor $(M_{\pi'}, M_{\pi})$ descrito na Proposição 4.2. Portanto, $[a(\pi, \pi')]$ é determinada univocamente por $\chi(M_{\pi'\pi})$.

Caso 2: Suponha que π, π' não são elementos adjacentes.

Reineck, em [20], mostra que se π, π' não são elementos adjacentes, então $\Delta(\pi, \pi') = 0$. Vejamos que, neste caso, também temos que $a(\pi, \pi') = 0$.

Como π, π' não são elementos adjacentes, então existe um elemento $\pi'' \in \mathcal{P}$ tal que $\pi' < \pi'' < \pi$. Sejam i, j e k tais que $CH^i(M_{\pi'}) = \mathbb{F}$, $CH^j(M_{\pi''}) = \mathbb{F}$ e $CH^k(M_{\pi}) = \mathbb{F}$.

Como $\pi' < \pi''$, $W^s(\pi')$ e $W^u(\pi'')$ se interceptam transversalmente, temos que $i < j$. Da mesma forma, temos que $j < k$.

Daí, $i \leq j - 1 \leq (k - 1) - 1 = k - 2$ e com isso $i \neq k$. Portanto,

$$a^q(\pi', \pi) : CH^q(M_{\pi'}) \rightarrow CH^q(M_{\pi})$$

é nula para todo q . ■

4.2.1 O par de matrizes de conexão de uma aplicação tempo-um de um fluxo

O objetivo desta subseção é apresentar o par de matrizes de conexão para difeomorfismos que são aplicações tempo-um de fluxos. Provamos no Teorema 4.6 que a matriz de conexão Δ do par de matrizes de conexão (Δ, a) será igual a matriz de conexão do fluxo. Além disso, provamos que sob determinadas condições temos que as entradas fora da diagonal principal da matriz de conexão complementar a são nulas. Na Proposição 4.8 provamos que para o caso de aplicações tempo-um de fluxos Morse-Smale tais entradas sempre serão nulas.

Teorema 4.6. *Seja φ um fluxo em um espaço métrico localmente compacto M^n , temos que $\varphi_1 : M^n \rightarrow M^n$ é um difeomorfismo. Sejam S um conjunto invariante isolado e $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_{\pi} \mid \pi \in \mathcal{P}\}$ uma decomposição de Morse de S e (Δ, a) um par de matrizes de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ de S .*

(a) *Se $<$ é a ordem do fluxo, temos que Δ é uma matriz de conexão, no sentido contínuo, para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ de S .*

(b) *Se $\pi < \pi'$ são dois elementos adjacentes em \mathcal{P} tal que $\Delta(\pi', \pi) = 0$, então $a(\pi', \pi) = 0$.*

Demonstração:

(a) De fato, seja $I \in \mathcal{I}$ um intervalo, então $Con(M_I) = \mathcal{L}(CH(I), \chi(I))$ e como φ_1 é uma aplicação tempo-um do fluxo φ , pelo Teorema 2.8, temos que

$$Con(M_I) = \mathcal{L}(CH(I), \chi(I)) = (CH(I), Id).$$

Seja $\mathcal{H}(\mathcal{M}) = \{(CH^*(I), \chi^*(M_I)) | I \in \mathcal{I}\}$ a trança de módulos graduados com isomorfismos construída com os índices de Conley, isto é, a *trança do índice de Conley cohomológico*. Agora, seja $\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})$ a trança de módulos graduados com endomorfismos construída passando a homologia na trança de complexos de cadeia com endomorfismos $\{(C\Delta(I), \Delta(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$.

Como (Δ, a) é um par de matrizes de conexão então as tranças $\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})$ e $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ são isomorfas. Daí, temos que a trança de módulos graduados do caso contínuo,

$$\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})_{\text{contínua}} = \{CH\Delta(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$$

onde $CH\Delta(I)$ é a cohomologia o complexo de cadeia $(C\Delta(I), \Delta(I))$ e a *trança do índice de Conley cohomológico do caso contínuo*

$$\mathcal{H}(\mathcal{M})_{\text{contínuo}} = \{CH(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$$

são isomorfas.

Portanto, Δ é uma matriz de conexão, no sentido contínuo, para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(P, <)$ de S .

(b) Sejam $\pi < \pi'$ dois elementos adjacentes em \mathcal{P} tal que $\Delta(\pi', \pi) = 0$, então temos que

$$a(\pi\pi') \equiv (a(\pi\pi'))^* \sim \chi(M_{\pi\pi'}) = 0 \text{ ou } Id$$

onde a última igualdade segue do Teorema 2.8.

Logo,

$$\begin{pmatrix} 0 \text{ ou } Id & 0 \\ a(\pi', \pi) & 0 \text{ ou } Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(M_\pi) & 0 \\ a(\pi', \pi) & \chi(M_{\pi'}) \end{pmatrix} = a(\pi\pi') \sim Id$$

Portanto, $a(\pi', \pi) = 0$. ■

O Exemplo 4.4 ilustra o Teorema 4.6 (b) acima.

Gostaríamos de saber o que acontece quando mudamos as hipóteses do Teorema 4.6 trocando de $\Delta(\pi', \pi) = 0$ para $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$. Não se sabe o que acontece com a entrada

$a(\pi', \pi)$ da matriz a , pois neste caso não temos a identificação $a(\pi\pi') \equiv (a(\pi\pi'))^*$.

No caso de fluxos Morse-Smale a matriz de conexão complementar do par de matrizes de conexão não fornecerá nenhuma informação sobre conexões, pois neste tipo de fluxo não podem haver conexões de grau zero.

Proposição 4.8. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação tempo-um de um fluxo Morse-Smale com k conjuntos básicos. Considere a decomposição de Morse de M , $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$, onde cada conjunto de Morse é um conjunto básico de f . Seja (Δ, a) um par de matrizes de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$. Então as entradas de a da forma $a(i, j)$ com $i \neq j$ são nulas, isto é, a segunda matriz de conexão (Δ, a) tem a seguinte forma*

$$a^q = \begin{pmatrix} a^q(1, 1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^q(2, 2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^q(k, k) \end{pmatrix}$$

Além disso, cada entrada $a^q(i, i)$ é conjugada a identidade se q é igual ao índice do conjunto básico M_i e conjugada a zero caso contrário.

Demonstração: No caso de fluxo de Morse-Smale não existem conexões entre conjuntos básicos de mesmo índice e as entradas da matriz a são da forma

$$a^q(j, i) : CH^q(M_i) \rightarrow CH^q(M_j)$$

isto é, são aplicações de grau zero.

Assim, pela Proposição 4.6, temos que $a^q(j, i) \equiv 0$ para todo q e para todo i, j com $i \neq j$.

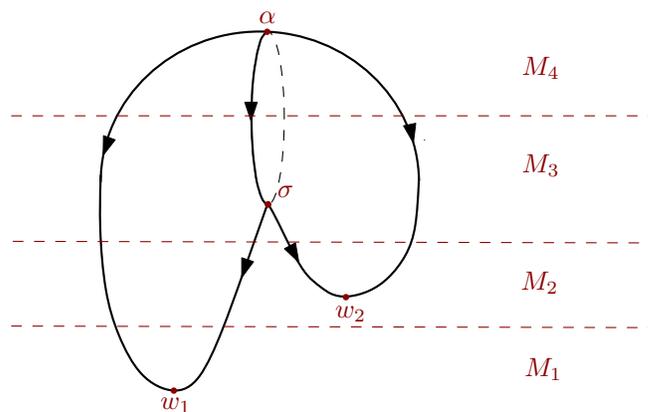
Temos, para cada $i = 0, \dots, k$, que

$$a^q(i, i) : CH^q(M_i) \rightarrow CH^q(M_i)$$

é conjugado a $\chi^q(M_i)$, pois $(a(i, i))^* \equiv a(i, i)$ uma vez que $\Delta(i) \equiv 0$.

Por outro lado, pelo Teorema 2.8, temos que $\chi(M_i)$ é igual a identidade no índice do conjunto básico e zero caso contrário. O que conclui a nossa demonstração. ■

Exemplo 4.7. Tomando a decomposição de Morse mais fina no Exemplo 4.4, isto é, $M_1 = \{w_1\}$, $M_2 = \{w_2\}$, $M_3 = \{\sigma\}$ e $M_4 = \{\alpha\}$, podemos concluir, pela Proposição 4.8 acima, que a matriz de conexão complementar a do par de matrizes de conexão (Δ, a) associada a



essa decomposição de Morse tem a seguinte forma

$$a^q = \begin{cases} \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix}, & q = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e portanto não fornece nenhuma informação sobre a existência de conexões de grau zero entre os conjuntos básicos de f .

4.2.2 O par de matrizes de conexão para difeomorfismos Smale

Nesta seção provamos o Teorema 4.7 que caracteriza o par de matrizes de conexão para um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e conjuntos básicos zeros dimensionais e trabalhamos sob a hipótese de que os índices de Conley homológico e cohomológico nestes conjuntos coincidem, isto é, $Con_q(\Lambda) = Con^q(\Lambda)$. Provamos na Proposição 4.9 e nos Corolários 4.3, 4.4 que esta condição é satisfeita para os conjuntos básicos de difeomorfismos Morse-Smale e no caso de difeomorfismos fitted com respeito aos conjuntos de alças $\bigcup_k H(k)$ é válido para os conjuntos da forma $\Lambda(k) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k))$.

Proposição 4.9. *Seja S um conjunto invariante isolado de um difeomorfismo f . Se existe um par-filtração $P = (N, L)$ de S tal que o espaço pontuado N_L tem o mesmo tipo de homotopia de $S^{k_1} \vee \dots \vee S^{k_s}$, então*

$$Con_q(S) = Con^q(S), \forall q.$$

Demonstração:

Como $N_L \cong S^{k_1} \vee \dots \vee S^{k_s}$, temos que $H_*(N_L) = H^*(N_L)$ e $(f_P)_* \sim (f_P)^*$.

Vejam os que as reduções de Leray dos pares $(H^*(N_L), (f_P)^*)$ e $(H_*(N_L), (f_P)_*)$ são iguais. Como $(f_P)^*$ e $(f_P)_*$ são conjugados temos que existe um isomorfismo ψ tal que $(f_P)^*\psi = \psi(f_P)_*$ e daí $gKer((f_P)^*) = gKer((f_P)_*)$, pois

$$\begin{aligned} v \in gKer(f_P)^* &\Leftrightarrow \exists k > 0 \text{ tal que } ((f_P)^*)^k(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\psi(f_P)_*\psi^{-1})^k(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\psi((f_P)_*)^k\psi^{-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow ((f_P)_*)^k(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in gKer(f_P)_* \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}(H^*(N_L)) = \frac{H^*(N_L)}{gKer((f_P)^*)} = \frac{H_*(N_L)}{gKer((f_P)_*)} = \mathcal{L}(H_*(N_L))$$

e

$$(f_P)^*|_{\mathcal{L}(H^*(N_L))} \sim (f_P)_*|_{\mathcal{L}(H_*(N_L))}$$

Portanto, $Con_q(S) = Con^q(S), \forall q.$ ■

Corolário 4.3. *Seja M uma variedade compacta n -dimensional e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo Morse-Smale. Para todo conjunto básico Λ de f temos que*

$$Con_q(\Lambda) = Con^q(\Lambda), \forall q$$

Demonstração:

Se Λ é um conjunto básico de f então podemos ter os seguintes tipos: um ponto fixo ou uma órbita periódica.

Caso 1: Λ é um ponto fixo p .

Sejam $k = \dim W^u(p)$. Tome N um disco contendo p da seguinte forma $D^k \times D^{n-k}$ e $L = \partial D^k \times D^{n-k}$. Temos que (N, L) é um par-filtração para $\Lambda = \{p\}$ e

$$N_L \cong \frac{D^k \times D^{n-k}}{\partial D^k \times D^{n-k}} \cong \frac{D^k}{\partial D^k} \cong S^k$$

Caso 2: Λ é uma órbita periódica $\{p_1, \dots, p_s\}$ de período s .

Fazer o mesmo do raciocínio do caso 1 para cada ponto p_i da órbita. Assim, $N = (D_1^k \times D_1^{n-k}) \cup \dots \cup (D_s^k \times D_s^{n-k})$ e $L = (D_1^k \times \partial D_1^{n-k}) \cup \dots \cup (D_s^k \times \partial D_s^{n-k})$ formam um par-filtração para Λ . Logo,

$$N_L \simeq \bigvee_s S^k$$

Portanto, para todo conjunto básico Λ de f existe um par-filtração (N, L) tal que o espaço pontuado N_L tem o mesmo tipo de homotopia de $S^k \vee \dots \vee S^k$ para algum $k \geq 0$, e, pela Proposição 4.9 acima,

$$Con_q(\Lambda) = Con^q(\Lambda), \forall q.$$

■

Corolário 4.4. *Seja M uma variedade compacta n -dimensional e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo fitted com respeito aos conjuntos de alças $\bigcup_k H(k)$. Então, para todo $0 \leq k \leq n$ temos que*

$$Con_q(\Lambda(k)) = Con^q(\Lambda(k)), \forall q$$

onde $\Lambda(k) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k))$.

Demonstração:

Tome $\Lambda(k) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k))$, temos que $H(k) = \bigcup_{i=1}^s h_i$ onde $h_i = D_i^k \times D_i^{n-k}$ é uma k -alça para cada $i = 1, \dots, s$.

Temos que $N = (D_1^k \times D_1^{n-k}) \cup (D_s^k \times D_s^{n-k})$ e $L = (D_1^k \times \partial D_1^{n-k}) \cup (D_s^k \times \partial D_s^{n-k})$ formam um par-filtração para $\Lambda(k)$. Logo,

$$N_L \simeq \bigvee_s S^k$$

Portanto, pela Proposição 4.9 acima,

$$Con_q(\Lambda(k)) = Con^q(\Lambda(k)), \forall q$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

■

Exemplo 4.8. Vejamos que o cálculo do índice de Conley dos conjuntos de Morse do Exemplo 4.5 que vimos anteriormente se torna mais simples usando o Corolário 4.4 e o Teorema 3.1.

Observe que $f : T^2 \rightarrow T^2$ é um difeomorfismo fitted com respeito aos conjuntos de alças $H(k)$ onde $H(0) = D_p$, $H(1) = h_1 \cup h_2$ e $H(2) = D_\infty$ (os discos D_p e D_∞ são discos que

isolam p e ∞ , respectivamente).

Temos que $M_1 = \{p\} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(0))$, $M_2 = \Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(1))$ e $M_3 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(2))$.

Usando o Corolário 4.4, temos que

$$Con^q(M_i) = Con_q(M_i), \forall q$$

com $i = 1, 2, 3$.

Usando o Teorema 3.1, temos, para cada $i = 1, 2, 3$, que

$$\chi^{u(i)}(M_i) \sim A(M_i)^+ \text{ e } \chi^q(M_i) = 0, \forall q \neq u(i)$$

onde $u(i)$ é o índice do conjunto básico M_i e $A(M_i)^+$ é a parte não-nilpotente da matriz de estrutura $A(M_i)$ associada ao conjunto básico M_i .

Temos que M_1 é um conjunto básico de índice 0 e $A_0 = (1)$ é a matriz de estrutura de M_1 . Logo,

$$Con^0(M_1) = (\mathbb{Q}, Id) \text{ e } Con^q(M_1) = (0, 0), \forall q \neq 0.$$

Temos que $M_3 = \{\infty\}$ é um conjunto básico de índice 2 e $A_2 = (1)$ é a matriz de estrutura de M_3 . Logo,

$$Con^2(M_3) = (\mathbb{Q}, Id) \text{ e } Con^q(M_3) = (0, 0), \forall q \neq 2.$$

Temos que $M_2 = \Lambda$ é um conjunto básico de índice 1 e sua matriz de estrutura associada é

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A_1^+ = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

uma vez que $gKer A_1 = \{(0, 0)\}$. Logo,

$$Con^1(M_2) = \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ e } Con^q(M_2) = (0, 0), \forall q \neq 1.$$

Observe que, no Exemplo 4.8 acima, usamos apenas a informação dinâmica contida na matriz de estrutura para calcular o índice de Conley dos seus conjuntos básicos, sem fazer uso de nenhum par de compactos e nem cálculo de homologias. Isso mostra a força e o alcance do Teorema 3.1 na hora de calcularmos o índice de Conley.

Definição 4.15. *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo qualquer. Para cada $0 \leq k \leq n$ sejam*

$$\Lambda_{k,1}, \dots, \Lambda_{k,s_k} \text{ todos os conjuntos básicos de índice } k \text{ de } f$$

*Se tomarmos $M_{i,j} = \Lambda_{i,j}$ com $0 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq s_i$, $\mathcal{P} = \{(i,j) \mid 0 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq s_i\}$ e $<$ a ordem f -definida, temos que $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ é uma decomposição de Morse para M chamada **decomposição de Morse por conjuntos básicos ordenada pelo índice**.*

Note que $(i,j) < (i',j')$ sempre que $i < i'$, onde $<'$ é a ordem total $0 <' 1 <' \dots <' n$.

Agora, podemos enunciar e demonstrar o seguinte resultado sobre o par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse por conjuntos básicos ordenada pelo índice.

Teorema 4.7. *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico. Suponhamos que para todo conjunto básico Λ de f tem-se que Λ é zero-dimensional e $Con_q(\Lambda) = Con^q(\Lambda), \forall q$. Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ a decomposição de Morse por conjuntos básicos ordenada pelo índice.*

Então o par de matrizes de conexão (Δ, a) para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ tem a seguinte forma

$$\Delta^q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & \dots & q & q+1 & \dots & n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ q \\ q+1 \\ \vdots \\ n \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{*} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

As entradas do quadrado destacado são aplicações de $CH^q(\Omega_{q,i})$ em $CH^{q+1}(\Omega_{(q+1),j})$ para algum $i \in \{1, \dots, s_q\}$ e algum $j \in \{1, \dots, s_{(q+1)}\}$

$$\alpha^q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & \cdots & q & \cdots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \begin{array}{cc} A_1^+ & \mathbf{0} \\ * & A_{s_q}^+ \end{array} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array} \right] \end{array}$$

As entradas do quadrado destacado são aplicações de $CH^q(\Omega_{q,i})$ em $CH^q(\Omega_{q,j})$ para alguns $i, j \in \{1, \dots, s_q\}$

onde para cada $i = 1, \dots, s_q$ tem-se que A_i^+ é a parte não nilpotente da matriz de estrutura A_i associada ao conjunto básico $\Lambda_{q,i}$.

Demonstração:

Pelas hipóteses e pelo Teorema 3.1, temos que

$$Con^q(M_\pi) = 0, \forall q \neq u(\pi)$$

onde $u(\pi)$ é o índice do conjunto básico M_π .

Sabemos que as entradas da primeira matriz Δ são aplicações de grau 1 e as entradas da segunda matriz a são aplicações lineares de grau zero.

Analisaremos primeiramente as entradas de Δ

$$\Delta^q(\pi', \pi) : CH^q(M_\pi) \rightarrow CH^{q+1}(M_{\pi'})$$

Tome $\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ com $\pi < \pi'$ então temos os dois casos abaixo:

Caso 1: Se M_π tem índice u e $M_{\pi'}$ tem índice $u + r$ com $r \neq 1$, então $\Delta^q(\pi', \pi) = 0$.

De fato, se $q \neq u$, então $CH^q(M_\pi) = 0$ o que implica $\Delta^q(\pi', \pi) = 0$. E se $q = u$, então $CH^{u+1}(M_{\pi'}) = 0$ (pois $u + 1 \neq u + r$) o que implica $\Delta^u(\pi', \pi) = 0$.

Caso 2: Se M_π tem índice u e $M_{\pi'}$ tem índice $u + 1$, então

$$\Delta(\pi\pi') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta(\pi', \pi) & 0 \end{pmatrix}$$

e neste caso podemos ter $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$ ou $\Delta(\pi', \pi) = 0$.

Analisaremos agora as entradas $a^q(\pi', \pi) : CH^q(M_\pi) \rightarrow CH^q(M_{\pi'})$ de a . Tome $\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ com $\pi < \pi'$ então temos os dois casos abaixo.

Caso 1: Se M_π tem índice u e $M_{\pi'}$ tem índice s com $u \neq s$, então $a(\pi', \pi) = 0$.

De fato, se $q \neq u$, então $CH^q(M_\pi) = 0$ o que implica que $a^q(\pi', \pi) = 0$. E se $q = u$, então $CH^u(M_{\pi'}) = 0$ (pois $u \neq s$) o que implica que $a^u(\pi', \pi) = 0$.

Caso 2: Se M_π e $M_{\pi'}$ tem índices iguais a u , então $a^q(\pi', \pi) = 0, \forall q \neq u$ e

$$a^u(\pi\pi') \sim \begin{pmatrix} A(M_\pi)^+ & 0 \\ a^u(\pi', \pi) & A(M_{\pi'})^+ \end{pmatrix}$$

onde $A(M_\pi)^+$ é a parte não nilpotente da matriz de estrutura $A(M_\pi)$ associada ao conjunto básico M_π e $A(M_{\pi'})^+$ é a parte não nilpotente da matriz de estrutura $A(M_{\pi'})$ associada ao conjunto básico $M_{\pi'}$.

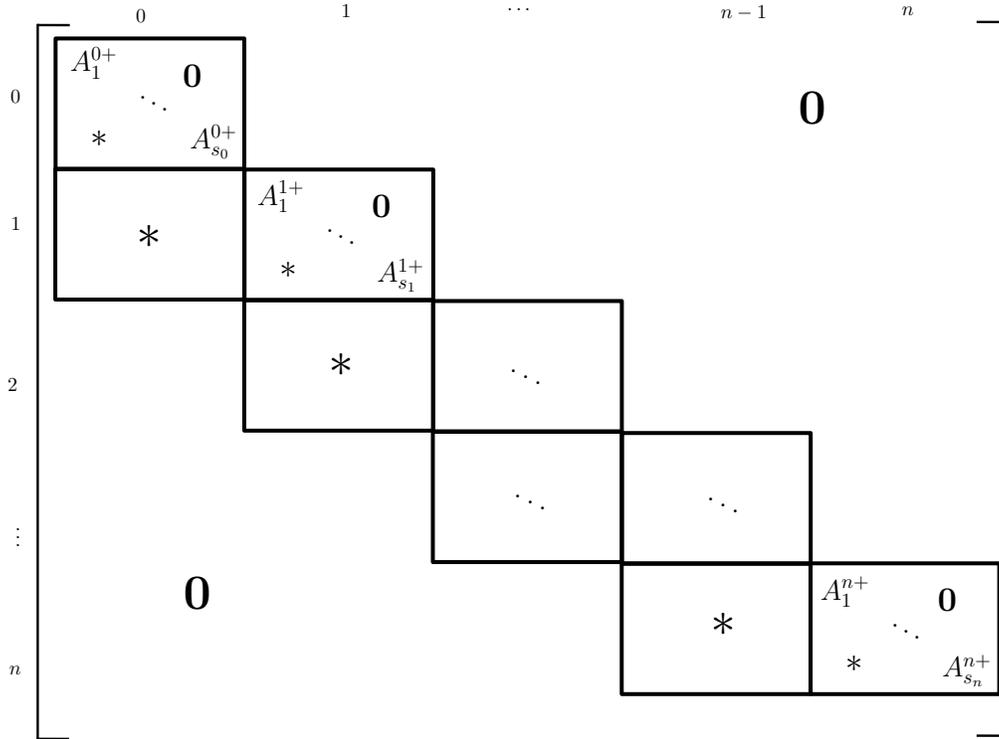
De fato, se $q \neq u$, então $CH^q(M_\pi) = CH^q(M_{\pi'}) = 0$ o que implica $a^q(\pi', \pi) = 0$. E se $q = u$, então $a^u(\pi', \pi)$ pode ser igual a zero ou diferente de zero. Pelo Teorema 3.1, $\chi^u(M_\pi) \sim A(M_\pi)^+$ e $\chi^u(M_{\pi'}) \sim A(M_{\pi'})^+$. Por outro lado, como $\Delta(\pi) = \Delta(\pi') = 0$ temos que $a^u(\pi) \equiv (a^u(\pi))^* \sim \chi^u(M_\pi) \sim A(M_\pi)^+$ e $a^u(\pi') \equiv (a^u(\pi'))^* \sim \chi^u(M_{\pi'}) \sim A(M_{\pi'})^+$. Daí,

$$a^u(\pi\pi') \sim \begin{pmatrix} A(M_\pi)^+ & 0 \\ a^u(\pi', \pi) & A(M_{\pi'})^+ \end{pmatrix}.$$

■

Observação 4.3. Observe que a classe de difeomorfismos do Corolário 4.3 e a classe de difeomorfismos do Corolário 4.4 tal que, para todo $0 \leq k \leq n$, $\Lambda(k) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k))$ é um único conjunto básico de f , satisfazem as hipóteses do Teorema 4.7 acima.

Corolário 4.5. Sob as hipóteses do Teorema 4.7, o par de matrizes de conexão (Δ, a) para $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ pode ser escrito da seguinte maneira



onde para cada $0 \leq j \leq n$ e cada $i = 1, \dots, s_j$ tem-se que A_i^{j+} é a parte não nilpotente da matriz de estrutura A_i^j associada ao conjunto básico $\Lambda_{j,i}$.

A representação do par de matrizes de conexão (Δ, a) do Corolário 4.5, onde a coleção das matrizes de conexão Δ está na diagonal em blocos inferior e a coleção das matrizes de conexão complementar a está na diagonal em blocos superior, é bastante conveniente. Ter todas as coleções das duas matrizes de conexão numa única matriz é conveniente quando se quer trabalhar com manipulações algébricas, por exemplo no caso de uma continuação.

No Exemplo 4.9 do apêndice, calculamos o par de matrizes de conexão para um difeomorfismo fitted Smale no bitoro com dois conjuntos básicos de índice 1, utilizando a caracterização apresentada no Teorema 4.7 e a representação dada no Corolário 4.5.

4.2.3 Continuação do par de matrizes de conexão

Vimos no Teorema 1.5 que os difeomorfismos fitted Smale são densos no conjunto dos difeomorfismos em variedades compactas com a C^0 -topologia. Apresentamos a seguir a propriedade da continuação do par de matrizes de conexão, que garante, portanto, uma caracterização dos pares de matrizes de conexão para uma classe de difeomorfismos em variedades compactas, uma vez que provamos o Teorema 4.7 para uma classe de difeomorfismo fitted Smale.

A continuação do par de matrizes de conexão, na verdade, está associada a continuação de decomposições de Morse, isto é, se (Δ, a) é um par de matrizes de conexão para uma

decomposição de Morse de S relativo à aplicação f , então esta decomposição de Morse continua para uma decomposição de Morse de uma aplicação C^0 -próxima \tilde{f} e (Δ, a) também será um par de matrizes de conexão para esta decomposição de Morse.

Definição 4.16. *Sejam X um espaço métrico localmente compacto e $f_\lambda : X \times [0, 1] \rightarrow X$ uma homotopia contínua. Se existe um conjunto compacto que é uma vizinhança isolante para f_λ , para todo $\lambda \in [0, 1]$, então dizemos que $S_0 = \text{Inv}(N, f_0)$ e $S_1 = \text{Inv}(N, f_1)$ são **relacionados por continuação** ou que S_0 **continua para** S_1 .*

Exigimos que a relação definida acima seja transitiva.

Desta forma, pelo Teorema 2.5 da continuação do índice de Conley, temos que quaisquer dois conjuntos relacionados por continuação tem o mesmo índice de Conley.

Agora, definimos o que significa duas decomposições de Morse de duas aplicações contínuas serem relacionadas por continuação. Para isso definimos uma decomposição de Morse especial que irá relacionar essas duas decomposições de Morse.

Note que para uma coleção qualquer de conjuntos compactos $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <) = \{N(I) \subset X \mid I \in \mathcal{A}(\mathcal{P})\}$ satisfazendo as seguintes propriedades

1. $(N(I), N(\emptyset))$ é um par-filtração,
2. $N(I) \cap N(J) = N(I \cap J)$ e
3. $N(I) \cup N(J) = N(I \cup J)$.

podemos definir $S := \text{Inv}(N(\mathcal{P}) \setminus N(\emptyset))$ e $M_\pi := \text{Inv}(N(I_\pi) \setminus N(I_\pi \setminus \{\pi\}))$ onde $I_\pi = \{\pi' \in \mathcal{P} \mid \pi' < \pi\} \cup \{\pi\}$.

Richeson em [22] diz que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{N}}(f, \mathcal{P}, <) = \{M_\pi \subset S \mid \pi \in \mathcal{P}\}$$

é uma decomposição de Morse de S com filtração de conjuntos de Morse $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$.

Definição 4.17. *Seja $f_\lambda : X \times [0, 1] \rightarrow X$ uma homotopia contínua. Suponha que S_0 e S_1 são conjuntos invariantes isolados para f_0 e f_1 , respectivamente, e que $\mathcal{M}_0(\mathcal{P}, <)$ é uma decomposição de Morse de S_0 e $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}, <)$ é uma decomposição de Morse de S_1 . Dizemos que $\mathcal{M}_0(\mathcal{P}, <)$ e $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}, <)$ são **relacionadas por continuação** se existe uma coleção $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}(f_\lambda, \mathcal{P}, <)$ é uma decomposição de Morse para todo λ , $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}(f_0, \mathcal{P}, <) = \mathcal{M}_0(\mathcal{P}, <)$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}(f_1, \mathcal{P}, <) = \mathcal{M}_1(\mathcal{P}, <)$.*

Exigimos que relação definida acima seja transitiva.

Apresentamos, a seguir, o Teorema 4.8 da continuação de decomposições de Morse e o Teorema 4.9 da continuação de pares de matriz de conexão.

Teorema 4.8 (Continuação de decomposições de Morse, [22]). *Suponha que $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua de espaços métricos localmente compactos e $S \subset X$ é um conjunto invariante isolado com decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$. Então existe uma vizinhança de f na C^0 -topologia tal que toda \tilde{f} nesta vizinhança tem um conjunto invariante isolado \tilde{S} , relacionado por continuação a S , possuindo uma decomposição de Morse $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, <)$ relacionada por continuação a $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$.*

Teorema 4.9 (Continuação de pares de matriz de conexão, [22]). *Seja X um espaço métrico localmente compacto e $f, \tilde{f} : X \rightarrow X$ aplicações contínuas com conjuntos invariantes isolados S e \tilde{S} , respectivamente. Se S e \tilde{S} tem decomposições de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ e $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, <)$ que são relacionadas por continuação, então $\mathcal{CM}(\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)) = \mathcal{CM}(\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, <))$.*

Concluimos, no Corolário 4.6, que para estudar o conjunto de par de matrizes de conexão de um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$, onde M é uma variedade compacta, basta estudar o conjunto de pares de matrizes de conexão de um difeomorfismo fitted Smale numa C^0 -vizinhança de f .

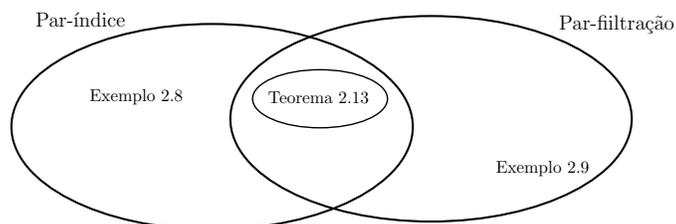
Corolário 4.6. *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo em um variedade compacta com decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ de um conjunto invariante isolado f , então existe um difeomorfismo fitted Smale \tilde{f} em M , C^0 -próximo de f , e uma decomposição de Morse $\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, <)$ de um conjunto invariante isolado \tilde{S} de \tilde{f} tal que*

$$\mathcal{CM}(\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)) = \mathcal{CM}(\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, <)).$$

Conclusão

Este trabalho teve como foco o estudo do índice de Conley discreto e do par de matrizes de conexão para difeomorfismos fitted Smale em variedades compactas, $Diff_{fitted}(M)$, pois, pelo Teorema 1.5, estes são densos no conjunto dos difeomorfismos em variedades compactas com a C^0 -topologia. Deste modo, é interessante procurar uma caracterização do par de matrizes de conexão para esta classe $Diff_{fitted}(M)$.

Na Seção 2.4, fizemos uma análise comparativa das definições de par-filtração e par-índice. Este estudo ainda não realizado na literatura levantou perguntas interessantes. Obtivemos exemplos de pares de compactos que são par-filtração e não são par índice em uma determinada vizinhança e o caso contrário. No Teorema 2.13, definimos um par de compactos e uma vizinhança para os conjuntos $\Lambda(k)$ de difeomorfismos fitted Smale que é ao mesmo tempo um par-filtração e um par-índice. Conjecturamos que o mesmo vale para conjuntos básicos zero-dimensionais de difeomorfismos com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico.



No Teorema 3.1, buscamos um método de calcular o índice de Conley de conjuntos básicos zero-dimensionais usando a informação dinâmica contida em suas matrizes de estrutura associadas. Obtemos esta relação usando o índice de Conley homológico reduzido.

No Teorema 3.2, o objetivo foi explorar esta caracterização matricial do índice de Conley homológico reduzido de conjuntos básicos zero-dimensionais, utilizando a sua forma de Jordan real. Uma pergunta que levantamos sobre isto é que se trabalharmos com conjuntos básicos zero-dimensionais que possuem estrutura de alças hiperbólicas, existirá um conjunto de alças minimal H tal que

$$\text{tamanho de } A^+ \leq \text{número de alças em } H$$

onde A é a matriz de estrutura associado a H ? Inicialmente podemos considerar quais ca-

racterísticas são refletidas na dinâmica que geram matrizes de estrutura tais que o tamanho de $A^+ \leq 2$. Na Subseção 3.2, relacionamos invariantes dinâmicos com a topologia da variedade, pois a função Zeta restringe a existência de difeomorfismos com conjuntos básicos pré-estabelecidos na variedade dada. Porém, a questão da realizabilidade ainda está longe de ser resolvida. Pode-se adotar a abordagem baseada nos Exemplos 1.2 e 4.9 para investigar difeomorfismos fitted Smale em superfícies.

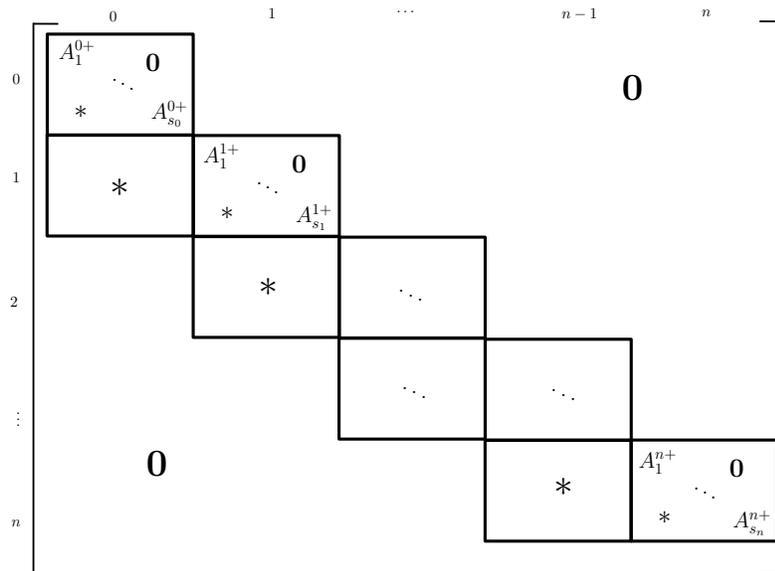
No Teorema 4.7 provamos uma caracterização de pares de matrizes de conexão para decomposições de Morse em conjuntos básicos zero-dimensionais, tal que temos a igualdade dos índices de Conley homológico e cohomológico reduzidos nestes conjuntos. E provamos que a classe

$$\{f \in Dif_{fitted}(M) \mid \text{para cada } 0 \leq k \leq n, \Lambda(k) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H(k)) \text{ é conjunto básico de } f \}$$

satisfaz as hipóteses deste teorema. Permanece em aberto um resultado mais geral para difeomorfismo em variedades compactas tais que os conjuntos $\Lambda(k)$ contém todos os conjuntos básicos de índice k . O que achamos plausível é que $\chi^k(\Lambda(k))$ seja conjugado à

$$\begin{pmatrix} A_{k,1}^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & A_{k,s_k}^+ \end{pmatrix}$$

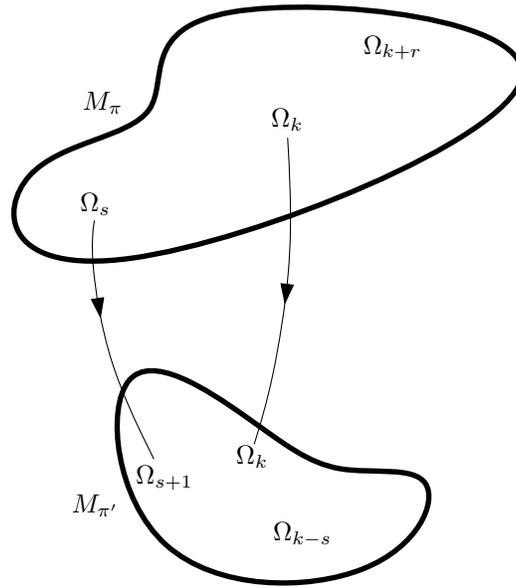
onde $A_{k,j}^+$ é a parte não-nilpotente da matriz de estrutura $A_{k,j}$ do conjunto básico $\Lambda_{k,j}$ de f de índice k , para cada $j = 1, \dots, s_k$. Deste modo, um par de matrizes de conexão poderia ser caracterizado da seguinte forma



onde para cada $0 \leq j \leq n$ e cada $i = 1, \dots, s_j$ tem-se que A_i^{j+} é a parte não nilpotente da matriz de estrutura A_i^j associada ao conjunto básico $\Lambda_{j,i}$, isto é, teria a mesma forma encontrada no Corolário 4.5.

Ainda muito pouco se sabe da matriz de conexão complementar a . Se considerarmos uma matriz de interseção geométrica para $\Lambda(k)$ como no Exemplo 4.9 do Apêndice busca-se informação dinâmica da matriz de conexão complementar a .

Outro questionamento em aberto é sobre a escolha de decomposições de Morse que englobem mais de um conjunto básico e as indagações sobre a possibilidade de encontrar, desta maneira, configurações tais que $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$ e $[a(\pi', \pi)] \neq 0$, o que implicaria na detecção simultânea de conexões de grau zero e um entre os conjuntos de Morse M_π e $M_{\pi'}$.



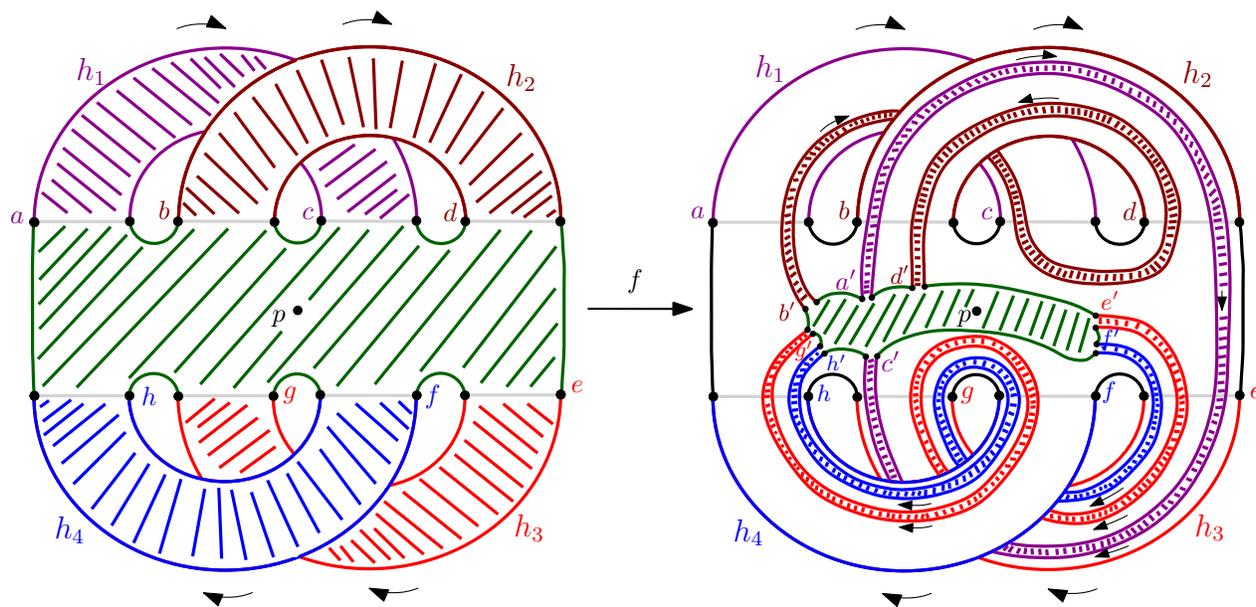
No caso contínuo existe um estudo da continuação de matrizes de conexão usando recursos algébricos como a matriz de transição [11] e a sequência espectral [12]. No caso discreto, podemos indagar ainda sobre os possíveis tipos de manipulações algébricas nos pares de matrizes de conexão que poderiam gerar continuações.

Concluindo, a teoria do par de matrizes de conexão ainda tem muito a ser explorada vide ao que já foi feito para a matriz de conexão no caso contínuo. Ainda pode-se explorar outras propriedades do par de matrizes de conexão que detectem outras conexões que levem a bifurcações como em [12].

Apêndice

Neste apêndice, apresentamos uma tentativa de generalização do Exemplo 1.2, [6], de construção de um difeomorfismo fitted Smale, agora no bitoro, contendo dois conjuntos básicos de índice 1, e fazemos o cálculo do seu par de matrizes de conexão para a decomposição de Morse em conjuntos básicos.

Exemplo 4.9. Considere o difeomorfismo fitted f no bitoro dado na figura a seguir, onde f tem um ponto fixo repulsor $\Lambda_3 = \{\infty\}$ em um disco deletado D_∞ , um ponto fixo atrator $\Lambda_0 = \{p\}$ e é construído de maneira que as alças $\{h_1, h_2\}$ e $\{h_3, h_4\}$ formem conjuntos de alças hiperbólicas para f .



Como a matriz de interseção geométrica correspondente a f e ao conjunto de alças $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

não é irredutível, então esta matriz não representa um conjunto básico de f . Por outro lado, temos que as matrizes de interseção geométrica correspondentes aos conjuntos de alças $\{h_1, h_2\}$ e $\{h_3, h_4\}$ são, respectivamente,

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e ambas são matrizes irredutíveis. Portanto, $\Lambda_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(h_3 \cup h_4)$ e $\Lambda_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(h_1 \cup h_2)$ são conjuntos básicos zero-dimensionais de f de índice 1.

Logo, temos que os conjuntos básicos de f são: $\{p\}, \Lambda_1, \Lambda_2, \{\infty\}$.

Neste exemplo vamos calcular o índice de Conley discreto destes conjuntos básicos e o par de matrizes de conexão (Δ, a) para a decomposição de Morse por conjuntos básicos ordenada pelo índice $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$.

Temos que $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) = \{M_i = \Lambda_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4\}$ e $1 < 2 < 3 < 4$, pois estamos trabalhando com a ordem f -definida.

Como os conjuntos de Morse M_i são conjuntos básicos zero-dimensionais do difeomorfismo fitted Smale f , pelo Corolário 4.4, podemos calcular os seus índices de Conley usando o Teorema 3.1. Temos que

$$Con^q(M_1) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 0 \\ (0, 0), & q \neq 0 \end{cases} \quad e \quad Con^q(M_4) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & q \neq 2 \end{cases}$$

Como as matrizes de estrutura de M_2 e M_3 são, respectivamente,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $A_1^+ = 2$ e $A_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, temos que

$$Con^q(M_2) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, 2Id), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases} \quad e \quad Con^q(M_3) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$

Temos, pelo Teorema 4.7, que par de matrizes de conexão para esta decomposição de Morse tem a seguinte configuração

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& 0 & 1 & 2 \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc}
Id & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
\Delta(2,1) & A_1^+ & 0 & 0 & & \\
\Delta(3,1) & a(3,2) & A_2^+ & 0 & & \\
\hline
0 & \Delta(4,2) & \Delta(4,3) & Id & &
\end{array} \right] & &
\end{array}
\end{array}$$

Como $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ são adjacentes, podemos calcular as entradas $\Delta^0(2, 1)$ e $\Delta^1(4, 2)$ usando as sequências longas exatas do índice de Conley cohomológico dadas na Figura 4.7. Logo, $\Delta^0(2, 1) = 0$ e $\Delta^1(4, 2) = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \rightarrow CH^0(M_2) \rightarrow CH^0(M_{12}) \rightarrow CH^0(M_1) \xrightarrow{\delta^0(2,1)} CH^1(M_2) \rightarrow CH^1(M_{12}) \rightarrow CH^1(M_1) \rightarrow \cdots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & 0 \\
\\
\cdots \rightarrow CH^1(M_4) \rightarrow CH^1(M_{34}) \rightarrow CH^1(M_3) \xrightarrow{\delta^1(4,3)} CH^2(M_4) \rightarrow CH^2(M_{34}) \rightarrow CH^2(M_3) \rightarrow \cdots \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
0 & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & 0
\end{array}$$

Figura 4.7: Sequências longas exatas associadas a $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$

Agora, vamos calcular as entradas $\Delta^0(3, 1)$ e $\Delta^1(4, 2)$ usando as sequências do índice de Conley cohomológico dos intervalos adjacentes $(\{1, 2\}, \{3\})$ e $(\{2, 3\}, \{4\})$ dadas na Figura 4.8. Vamos olhar inicialmente para a primeira sequência dada na Figura 4.8, temos que $Im \delta^0(3, 12) = Ker p_1^* = 0$ e $Ker \delta^0(3, 12) = Im i_0^* = \mathbb{Q}$, o que implica $\delta^0(3, 12) \equiv 0$. Logo, $\Delta^0(3, 12) = \begin{pmatrix} \Delta^0(3, 1) & \Delta^0(3, 2) \end{pmatrix} \equiv 0 \Rightarrow \Delta^0(3, 1) \equiv 0$. Agora, olhando para a segunda sequência da Figura 4.8, temos que $\delta^1(4, 23) \equiv 0$, logo $\Delta^1(4, 23) = \begin{pmatrix} \Delta^1(4, 2) & \Delta^1(4, 3) \end{pmatrix} \equiv 0 \Rightarrow \Delta^1(4, 2) = 0$.

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots \rightarrow CH^0(M_3) \xrightarrow{p_3^*} CH^0(M_{123}) \xrightarrow{i_3^*} CH^0(M_{12}) \xrightarrow{\delta^0(3,12)} CH^1(M_3) \xrightarrow{p_1^*} CH^1(M_{123}) \xrightarrow{i_1^*} CH^1(M_{12}) \xrightarrow{\delta^1(3,12)} CH^2(M_3) \rightarrow \cdots \\
\parallel & \parallel \\
0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & 0 \\
\\
\cdots \rightarrow CH^1(M_4) \xrightarrow{p_1^*} CH^1(M_{234}) \xrightarrow{i_1^*} CH^1(M_{23}) \xrightarrow{\delta^1(4,23)} CH^2(M_4) \xrightarrow{p_2^*} CH^2(M_{234}) \xrightarrow{i_2^*} CH^2(M_{23}) \rightarrow \cdots \\
\parallel & \parallel \\
0 & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & 0
\end{array}$$

Figura 4.8: Sequências longas exatas associadas a $(\{1, 2\}, \{3\})$ e $(\{2, 3\}, \{4\})$

Só falta agora calcular a entrada $a^1(3, 2)$. Para isto, observe que $a^q(3, 2) : CH^q(M_2) \rightarrow CH^q(M_3)$ e se $q \neq 1$, então $CH^q(M_2) = CH^q(M_3) = 0 \Rightarrow a^q(3, 2) = 0$. Se $q = 1$, então

$$\begin{array}{ccc} a^1(3, 2) : CH^1(M_2) & \rightarrow & CH^1(M_3) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \end{array}$$

e como $\Delta(3, 2) = 0$, temos que

$$\begin{pmatrix} \chi^1(M_2) & 0 \\ a^1(3, 2) & \chi^1(M_3) \end{pmatrix} = a^1(23) \equiv (a^1(23))^* \sim \chi^1(M_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Queremos saber se $[a^1(3, 2)] = 0$ ou $[a^1(3, 2)] \neq 0$. Temos que as matrizes

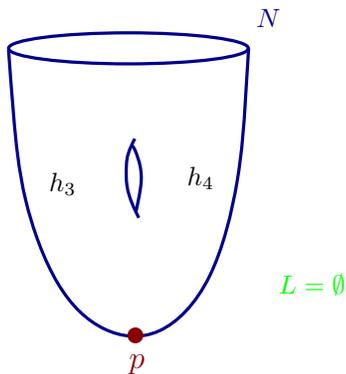
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

são conjugadas, pois tem a mesma forma de Jordan. Logo, como

$$\begin{pmatrix} \chi^1(M_2) & 0 \\ a^1(3, 2) & \chi^1(M_3) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^1(M_2) & 0 \\ 0 & \chi^1(M_3) \end{pmatrix}$$

temos que $[a^1(3, 2)] = 0$.

A seguir, vamos calcular os índices de Conley de M_{12} , M_{23} , M_{34} , M_{123} e M_{234} que foram usados anteriormente.



(N, L) é um par-filtração para M_{12}

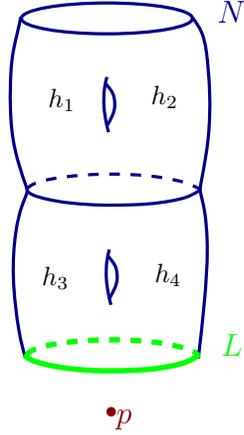
$$N_L \simeq T^2 - D_\infty \sqcup \{\cdot\}$$

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 1 \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$(f_P)^0 \equiv Id \text{ e } (f_P)^1 \equiv \begin{matrix} f(h_3) f(h_4) \\ h_3 \\ h_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$Con^q(M_{12}) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 0 \\ (\mathbb{Q}, 2Id), & q = 1 \\ (0, 0), & \text{caso contrário} \end{cases}$$



(N, L) é um par-filtração para M_{23}

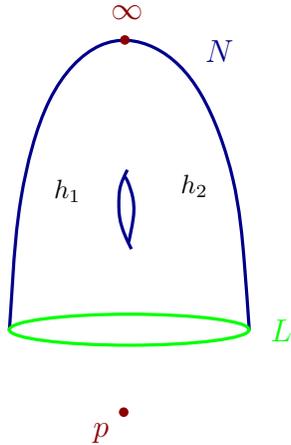
$$N_L \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$$

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & q \neq 1 \end{cases}$$

$$(f_P)^1 \equiv \begin{matrix} f(h_1)f(h_2)f(h_3)f(h_4) \\ h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{matrix}$$

Logo,

$$Con^q(M_{23}) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$



(N, L) é um par-filtração para M_{34}

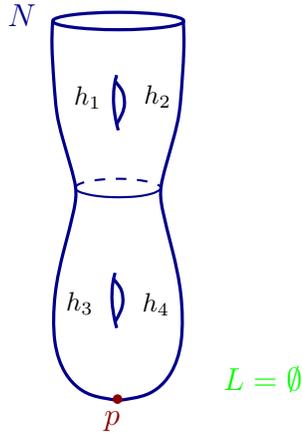
$$N_L \simeq T^2$$

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ \mathbb{Q}, & q = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$(f_P)^2 \equiv Id \text{ e } (f_P)^1 \equiv \begin{matrix} f(h_1)f(h_2) \\ h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ h_2 \end{matrix}$$

Logo,

$$Con^q(M_{34}) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (\mathbb{Q}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & q \neq 1 \end{cases}$$



(N, L) é um par-filtração para M_{123}

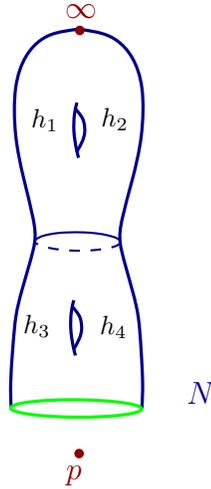
$$N_L \simeq (S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) \sqcup \{\cdot\}$$

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 0 \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$(f_P)^0 \equiv Id \text{ e } (f_P)^1 \equiv \begin{matrix} f(h_1) f(h_2) f(h_3) f(h_4) \\ h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{matrix}$$

Logo,

$$Con^q(M_{123}) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, Id), & q = 0 \\ \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (0, 0), & \text{caso contrário} \end{cases}$$



(N, L) é um par-filtração para M_{234}

$$N_L \simeq \text{bitoro}$$

$$H^q(N_L) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & q = 1 \\ \mathbb{Q}, & q = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$(f_P)^2 \equiv Id \text{ e } (f_P)^1 \equiv \begin{matrix} f(h_1) f(h_2) f(h_3) f(h_4) \\ h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{matrix}$$

$$Con^q(M_{234}) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right), & q = 1 \\ (\mathbb{Q}, Id), & q = 2 \\ (0, 0), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, o par matrizes de conexão tem a seguinte forma

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \hline
 Id & 0 & 0 & 0 & & \\
 \hline
 0 & A_1^+ & 0 & 0 & & \\
 0 & 0 & A_2^+ & 0 & & \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & Id & & \\
 \hline
 \end{array} \right] & & & & & \\
 \end{array}
 \end{array}$$

Observe que mesmo existindo a conexão entre os conjuntos de Morse M_2 e M_3 , temos que $[a(3, 2)] = 0$ e $\Delta(3, 2) = 0$.

Bibliografia

- [1] BARTIOMIEJCZYK, P.; DZEDZEJ, Z. Connection Matrix theory for discrete dynamical systems. *Banach Center Publications*, vol. 47, p.67-78, 1999.
- [2] BOWEN, R., Entropy versus homology for certain diffeomorphisms. *Topology*, vol. 13, p. 61-67, 1974.
- [3] BOWEN, R., Topological entropy and Axiom A. *Global Analysis*, (Proc. Sympos. Pure Math., vol. 14, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., p. 23-41, 1970.
- [4] BOWEN, R.; FRANKS, J. Homology for zero-dimensional nonwandering sets. *Annals of Mathematics*, vol. 106, n. 1, p.73-92, July 1977.
- [5] CONLEY, C. *Isolated invariant sets and Morse index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, n. 38. Providence: American Mathematical Society, 1978.
- [6] FRANKS, J.M. *Homology and dynamical systems*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, n. 49. Providence: American Mathematical Society, 1982.
- [7] FRANKS, J.M.; RICHESON, D.S. Shift equivalence and the Conley Index. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 352, n. 7, p. 3305-3322, Março 2000.
- [8] FRANZOSA, R.D. Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 298, n.1, 193-213, Novembro 1986.
- [9] FRANZOSA, R.D. The continuation theory for Morse decompositions and connection matrices. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 310, n. 2, 781-803, Dezembro 1988.
- [10] FRANZOSA, R.D. The connection matrix theory for Morse decompositions. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 311, n. 2, p. 561-592, Fevereiro 1989.

- [11] FRANZOSA, R.D.; MISCHAIKOW, K. Algebraic transition matrices in the Conley index theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 350, n. 3, p. 889-912, Março 1998.
- [12] FRANZOSA, R. D.; REZENDE, K. A. de; SILVEIRA, M. R. da. Continuation and Bifurcation Associated to the Dynamical Spectral Sequence. (Aceito em Ergodic Theory and Dynamical Systems)
- [13] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [14] MASSEY, W. S. *A basic course in algebraic topology*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [15] MCCORD, C.; MISCHAIKOW, K.; MROZEK, M. Zeta functions, periodic trajectories, and the Conley index. *Journal of differential equations*, vol. 121, p. 258-292, 1995.
- [16] MROZEK, M. Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 318, n. 1, p. 149-178, March 1990.
- [17] MROZEK, M. The Morse equation in Conley's index theory for homeomorphisms. *Topology and its Applications*, vol. 38, p. 45-60, 1991.
- [18] MROZEK, M. Construction and properties of the Conley index. *Banach Center Publications*, vol. 47, p.29-40, 1999.
- [19] PAULO, N.V., de. *Matrizes de Conexão para as Dinâmicas Contínua e Discreta*. Dissertação de mestrado - IMECC, Universidade Estadual de Campinas, 2009.
- [20] REINECK, J.F. The connection matrix in Morse-Smale flows. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 322, n. 2, p. 523-545, December 1990.
- [21] RIBEIRO, P.C.E. *O índice de Conley discreto e o par de matrizes de conexão*. Dissertação de mestrado - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- [22] RICHESON, D.S. *Connection matrix pairs for the discrete Conley index*. Tese de doutorado - Northwestern University, 1998.
- [23] RICHESON, D.S. Connection matrix pairs. *Banach Center Publications*, vol. 47, p. 219-232, 1999.
- [24] ROBBIN, J. W.; SALAMON, D. Dynamical systems, shape theory and Conley index. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, vol 8*, p. 375-393, 1988.

- [25] SMALE, S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, p.797-817, 1967.
- [26] SMALE, S. Diffeomorphisms with many periodic points. *Differential and Combinatorial Topology* (S. Cairns, ed.) Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965.
- [27] SHUB, M.; SULLIVAN, D. Homology and dynamical systems. *Topology*, vol. 14, p. 109-132, 1975.
- [28] SZYMCZAK, A. The Conley index for discrete semidynamical systems. *Topology and its Applications*, vol. 66, p.215-240, 1995.