Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Corda Vibrante e Telégrafo: Estudo Analítico de Problemas Modelados por Equações Diferenciais

por

João Bosco Coelho

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Corda Vibrante e Telégrafo: Estudo Analítico de Problemas Modelados por Equações Diferenciais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **João Bosco Coelho** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 26 de junho de 2008.

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

	Coelho, João Bosco
C65c	Corda vibrante e telégrafo: estudo analítico de problemas modelados por equações diferenciais/João Bosco Coelho -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.
	Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira
	Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Equações diferenciais. 2. Equação de onda. 3. Funções especiais. 4. Bessel, Funções de. I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Vibrating string and telegraph: an analytical study of problems by differential equations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential equations. 2. Wave equations. 3. Special functions. 4. Bessel's function.

Área de concentração: Física matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior (UMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (UNESP)

Data da defesa: 26/06/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profisssional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de junho de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof. (a). Dr (a). JAYME VAZ JUNIOR

Prof. (a). Dr (a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR

Agradecimentos

Quero agradecer a todas as pessoas que colaboraram para a elaboração deste trabalho. Agradeço ao meu orientador professor Edmundo Capelas de Oliveira, a quem dedico os méritos deste trabalho, pela generosidade, paciência e presteza na minha orientação. Fica minha gratidão à minha esposa (Cida) pelo carinho, amor, compreensão e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos, desde o início deste mestrado. Às minhas filhas (Marina, Ana Luiza e Lívia), agradeço pelos incentivos, cuidados e pela confiança depositada na conclusão deste trabalho, dando-me todo apoio necessário. Quero agradecer também a todos os colegas do curso, aos amigos que conquistei nesta jornada, especialmente ao grupo de Imperatriz (Remi, Ociran, Gilson, Heron e Adão) e aos professores e monitores de cada etapa deste mestrado. Em particular quero agradecer ao meu grande amigo Remi pela dedicação na leitura e correção dos textos produzidos e aos amigos Isaias e Rubens pela confecção das figuras utilizadas na dissertação. Agradeço ainda ao Cefet-MA, à Uema, à Fapema pelo apoio financeiro e ao Imecc-Unicamp pela iniciativa de oferecer um mestrado nestas condições. Mas acima de tudo agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade do convívio com tantas pessoas que são verdadeiras dádivas.

A elaboração desta dissertação não seria possível sem ajuda das pessoas que, com grande desprendimento, dedicaram e dedicam tempo de suas vidas em prol da melhoria e manutenção de um ensino público de qualidade para todos. A estas pessoas dedico este trabalho.

Resumo

Efetua-se um estudo sistemático das equações diferenciais parciais, lineares, de segunda ordem e do tipo hiperbólico, isto é, aquelas equações que estão associadas com o problema envolvendo a propagação de ondas. Como uma aplicação, discute-se o problema de ondas de corrente e ondas de tensão, através da chamada equação do telégrafo, também conhecida como equação dos telegrafistas. Casos particulares são discutidos tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista físico. Apresenta-se o método de Riemann como ferramenta para discutir a solução geral.

Abstract

We perform a systematic way to study the linear, second order partial differential equation of the hyperbolic type, that is, those equations which are associated with the problem involving wave propagation. As an application, we discuss the problem associated with the current waves and tension waves by means of the so-called telegraph equation, also known as telephone equation. Particular cases are discussed in both sense, Mathematic and Physical point of view. We also present the Riemann's method as a powerful tool to discuss the general solution.

Sumário

Introdução

O estudo das equações diferenciais parciais, em particular, aquelas associadas ao fenômeno da propagação de ondas[1] faz parte de uma grande área da Matemática, a Análise. A equação de onda ocorre principalmente em Acústica, na Elasticidade e no Eletromagnetismo. Em relação à formulação, podemos mencionar que, na Acústica pode ser usada quando a perturbação é causada por um corpo em movimento, por exemplo, um fluxo supersônico. Na Elasticidade, associada às vibrações transversais em cordas e membranas, bem como em ondas longitudinais em barras enquanto que no Eletromagnetismo, a propagação de ondas eletromagnéticas[2].

Antes de explicitarmos algumas situações envolvendo a equação de onda, voltemos às equações diferenciais parciais, em geral. Uma equação diferencial parcial, linear[3] e de segunda ordem é classificada quanto ao tipo como: (i) equação do tipo elíptico associada, por exemplo, a problemas advindos da eletrostática; (ii) equação do tipo parabólico, associada a problemas envolvendo processos de difusão e (iii) equações do tipo hiperbólico associada a problemas de propagação, interesse principal deste trabalho. Esta classificação diz respeito a uma certa região do espaço. No caso em que a equação diferencial parcial pode mudar de tipo, numa determinada região, dizemos que é uma equação do tipo misto. Neste trabalho vamos nos ocupar apenas com as equações de segunda ordem, do tipo hiperbólico, em particular, com coeficientes constantes, o que garante não haver mudança de tipo, isto é, será sempre uma equação dife-

[1]Daqui em diante, vamos chamar esta equação apenas pelo nome de equação de onda.

[2]G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, New York, (1974).

[3]A classificação que vamos apresentar pode ser estendida, também, para as equações diferenciais parciais quase-lineares.

rencial parcial, linear, de segunda ordem, com coeficientes constantes e do tipo hiperbólico, ou ainda, a equação de onda.

São muitos os nomes associados à equação de onda, dentre os quais podemos mencionar os clássicos problemas da corda vibrante, aquelas que regem as pequenas oscilações transversais de uma corda homogênea, uniformemente distendida (problema unidimensional) e da membrana, folha de espessura muito fina, formada de material flexível, a qual se supõe esticada (problema bidimensional), ambos relacionados ao nome do filósofo, matemático e físico francês Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) e a equação de Klein-Gordon[4], advinda da Mecânica Quântica, versão relativista da equação de Schrödinger[5] (1887 – 1961). Esta é uma equação do tipo onda que carrega termos relativistas[6]. Um outro nome associado à equação de onda é o do médico e físico alemão Hermann Ferdinand Ludwig Von Helmholtz (1821 – 1894), cuja equação que leva o seu nome (equação de Helmholtz), é obtida após a separação de variáveis da equação de Klein-Gordon, por exemplo. Neste caso, por não ocorrer explicitamente a parte temporal (a equação de Klein-Gordon é de segunda ordem no tempo), a nomenclatura é tomada por extensão de linguagem, assim como também o é, em relação às equações de Maxwell[7] (1831 – 1879). Enfim, podemos estender a nomenclatura, também, para outros tipos de problemas, em particular, a equação de onda no universo de de Sitter, nome ligado ao matemático, físico e astrônomo holandês Willen de Sitter (1872 – 1934), isto é, uma equação de onda estendida para problemas considerado o universo como um universo pentadimensional[8].

É, também, de se mencionar a importância da geometria do problema, isto

[4]Oskar Benjamin Klein (1894 – 1977): físico teórico sueco e Walter Gordon (1893 – 1939): físico alemão.

[5]Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, físico austríaco ganhador do Prêmio Nobel de Física em 1933 por esta equação.

[6]A. Goswani, *Quantum Mechanics*, Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, (1997).

[7]James Clerk Maxwell, físico e matemático escocês, conhecido por ter dado a sua forma final à teoria moderna do eletromagnetismo que une a eletricidade, o magnetismo e a ótica.

[8]D. Gomes e E. Capelas de Oliveira, *Equações de Onda no Universo de de Sitter*, Tend. Mat. Apl. Comput., **4**, 51 – 60, (2003).

é, as condições de contorno convenientemente impostas levam em conta a forma geométrica de onde, em geral, por conter o Laplaciano, o sistema de coordenadas também é de fundamental importância[9].

Passemos agora a mencionar alguns exemplos onde a equação de onda aparece explicitamente. (i) equações de Maxwell: conjunto de quatro equações que predizem ondas de campos magnéticos e elétricos oscilantes. No caso em que nem a permeabilidade nem a permitividade (características do meio) dependem da freqüência, as equações de Maxwell, num meio infinito, podem ser conduzidas a uma equação de onda, satisfeita para cada componente cartesiana dos campos elétrico e indução magnética. No caso de um dispersor, isto é, o produto permitividade vezes permeabilidade é função da freqüência, obtém-se uma equação de onda tipo Helmholtz[10]. (ii) potencial velocidade: neste caso, o problema pede determinar as freqüências possíveis para ondas sonoras em um gás, contido numa região delimitada por duas esferas rígidas e concêntricas. Aqui, devido a simetria, o potencial velocidade é solução de uma equação de onda cujo Laplaciano é escrito em coordenadas esféricas[11]. (iii) função de onda: advinda da Mecânica Quântica, temos que a chamada função de onda satisfaz uma equação de onda, conhecida pelo nome de equação de Klein-Gordon[12].

Neste trabalho, estamos interessados na propagação de ondas de corrente e tensão em cabos, isto é, um problema que está relacionado com a transmissão de informações. O problema específico, descrito por uma equação de ondas, a ser estudado é o chamado problema do telégrafo, ou seja, propagação, no tempo, de ondas de tensão e corrente, constituído por uma equação de ondas, obtida através de considerações físicas envolvendo grandezas físicas, cuja discussão é feita tanto do ponto de vista físico quanto do ponto de vista matemático.

---

[9] E. Romão Martins e E. Capelas de Oliveira, *Equações diferenciais, método de separação de variáveis e os sistemas de* Stäckel, Coleção Imecc, Vol. 4, Imecc-Unicamp, Campinas, (2006).

[10] J. D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*, 2ª Edição, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, (1983).

[11] J. Irving and N. Mullineux, *Mathematics in Physics and Engineering*, Academic Press, New York, (1959).

[12] A. Goswani, *Quantum Mechanics*, Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, (1997).

Este trabalho está disposto da seguinte maneira: no primeiro capítulo apresentamos uma classificação para as equações diferenciais parciais, lineares e de segunda ordem, com ênfase nas equações do tipo hiperbólico, aquelas associadas ao problema de propagação. No segundo capítulo, após a introdução das chamadas funções diferença de potencial instantâneo e corrente instantânea, consideradas ao longo de um fio condutor, discutimos a equação do telégrafo, analisando o comportamento físico em alguns casos específicos das grandezas em consideração. No terceiro capítulo é apresentado o método de Riemann[13] $(1826-1866)$, ferramenta bastante útil para discutir problemas envolvendo propagação cuja equação de ondas contém termos dissipativos[14]. Um apêndice envolvendo um estudo sistemático do método de Frobenius[15] $(1849-1917)$, associado às funções de Bessel $(1784-1846)$ e as funções de Bessel modificadas[16], conclui o trabalho[17].

[13]Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático alemão que fez contribuições importantes para a análise e a geometria diferencial, algumas das quais abriram caminho para o desenvolvimento da relatividade geral.

[14]A. N. Tijonov e A. A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editora Mir, Segunda Edición, (1980).

[15]Ferdinand Georg Frobenius, matemático alemão que fez importantes contribuições para a teoria dos grupos.

[16]Homenagem ao matemático e astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel.

[17]E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).

Capítulo 1

Equações Diferenciais Parciais

1.1 Introdução

A maior parte das equações diferenciais parciais (EDPs) surge de modelos físicos, que motivam o seu estudo, sugerem propriedades matemáticas inerentes às soluções destas equações, além de fornecer métodos para resolvê-las. Muitas EDPs importantes aparecem através de leis de conservação.

Empregamos equações diferenciais parciais para modelar e resolver problemas ligados a várias áreas do conhecimento. Destacamos: Acústica, Aerodinâmica, Elasticidade, Eletrodinâmica, Dinâmica dos Fluidos, Difusão de Calor, Ótica, Mecânica Quântica, Relatividade, dentre outras. Devemos ressaltar que nem todas as EDPs são construídas a partir de modelos matemáticos, mas o estudo de modelos é fundamental para a compreensão do funcionamento destas equações.

Enfim, um bom número de ramos da física teórica é descrito em termos de equações diferenciais parciais ou equações diferenciais ordinárias. Quando a formulação é feita a partir de EDPs, na maioria das vezes, são EDPs de duas ou mais variáveis independentes. Neste trabalho, damos ênfase especial àquelas com duas variáveis independentes. Além disso, vamos priorizar as EDPs de segunda ordem, pois estas ocorrem com freqüência na Física.

Vamos citar as EDPs encontradas com maior freqüência.

1.1.1 Equação de Laplace:

A equação de Laplace[1] $(1749-1827)$, $u_{xx}+u_{yy}=0$ com $u=u(x,y)$ é uma equação linear de segunda ordem homogênea[2]. Esta equação em dimensões maiores fica: $\nabla^2 u \equiv \Delta u = 0$ onde ∇^2 é o operador de Laplace, conhecido como Laplaciano[3]. Estas equações ocorrem em estudos de fenômenos eletromagnéticos, dinâmica dos fluidos, fluxo de calor e gravitação, por exemplo.

1.1.2 Equação de Poisson:

A equação de Poisson[4] $(1781-1840)$, $u_{xx}+u_{yy}=h(x,y)$ com $u=u(x,y)$ é uma equação linear de segunda ordem não-homogênea. Esta equação em dimensões maiores fica: $\nabla^2 u \equiv -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$, onde ∇^2 é o Laplaciano, ρ é a densidade de carga, considerada função das coordenadas e ϵ_0 é constante. Esta equação está associada a fenômenos físicos estacionários, isto é, independentes do tempo, como por exemplo, potenciais eletrostáticos.

1.1.3 Equação de onda:

A equação de onda, $u_{tt}=c^2u_{xx}$ com $u=u(x,t)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ e onde $c>0$ é uma constante (que tem dimensões de velocidade), é uma equação linear de segunda ordem homogênea. Esta equação em dimensões maiores fica: $\nabla^2 u = \dfrac{1}{c^2}\,u_{tt}$ onde $u=u(x,t), x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, e ∇^2 é o Laplaciano em $\mathbb{R}^n$. Esta equação está associada a fenômenos ondulatórios.

---

[1] Pierre Simon Laplace, matemático, astrônomo e físico-químico francês.

[2] Usamos a notação para derivadas parciais ora na forma $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ora u_x.

[3] O símbolo $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2\equiv\Delta$ está relacionado com o chamado operador *nabla* ou *del* que, no caso tridimensional, é dado por $\nabla=\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$. Aqui o ponto denota produto escalar.

[4] Siméon Denis Poisson, matemático e físico francês.

1.1.4 Equação de difusão:

A equação de difusão, $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ com $u = u(x,t)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ e onde α^2 é uma constante, é uma equação linear de segunda ordem homogênea. Esta equação em dimensões maiores fica: $\nabla^2 u = \dfrac{1}{\alpha^2}\, u_t$ onde $u = u(x,t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e ∇^2 é o Laplaciano em $\mathbb{R}^n$. Esta equação está associada a problemas de difusão de calor.

1.1.5 Equação de Schrödinger:

A equação de Schrödinger, $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v\left(\vec{x},t\right)\right]\psi\left(\vec{x},t\right) = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi\left(\vec{x},t\right)$ onde m e $\hbar$ são constantes positivas e $v\left(\vec{x},t\right)$ é o termo de potencial, é uma equação linear de segunda ordem, homogênea, que estuda a evolução temporal da chamada função de onda $\psi\left(\vec{x},t\right)$. Para o caso independente do tempo, podemos conduzir a equação em $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v\left(\vec{x}\right)\right]\psi\left(\vec{x}\right) = E\psi\left(\vec{x}\right)$, onde E é uma constante associada à energia.

1.1.6 Equação do telégrafo:

A equação do telégrafo, $v_{xx} = (CL)\, v_{tt} + (CR + GL)\, v_t + (GR)\, v$ onde $v = v(x,t)$ é a tensão elétrica em cada instante, sendo L, C, R e G, respectivamente a indutância, capacitância, resistência e condutância totais do circuito, consideradas por unidade de comprimento, é uma equação linear de segunda ordem, homogênea que rege o comportamento das cargas na propagação de um sinal em fios condutores de comprimento ℓ, de seção circular reta de raio a, tal que $\ell \gg a$. Ela utiliza a teoria eletromagnética de Maxwell e esta forma foi primeiramente obtida pelo matemático inglês Oliver Heaviside $(1850 - 1925)$, em 1876.

As equações citadas nos exemplos acima são de grande interesse do ponto de vista físico, são protótipos das chamadas equações diferenciais parciais dos tipos elíptico, parabólico e hiperbólico e o conhecimento de suas propriedades permite estudar equações mais gerais do mesmo tipo.

1.2 Definições básicas

Uma equação diferencial parcial é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x, y, z, t, \ldots$ e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u\,(x, y, z, t, \ldots)$. De maneira mais precisa, uma EDP em n variáveis independentes $x_1, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$\mathcal{F}\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \quad (1.1)$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ é uma função dada e $u = u(x)$ é a função que queremos determinar [9].

A ordem de uma EDP é a ordem da mais alta derivada que ocorre na equação. A EDP é linear se é de primeiro grau em u e em todas as derivadas parciais que ocorrem na equação. Além disso, uma EDP é homogênea se o termo que não contém a variável independente é identicamente nulo. Exemplificando:

1. EDP linear de primeira ordem

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)u + c(x) = 0, \quad (1.2)$$

onde algum dos coeficientes a_j não é identicamente nulo.

2. EDP linear de segunda ordem

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u + d(x) = 0, \quad (1.3)$$

onde algum dos coeficientes a_{ij} não é identicamente nulo.

Em particular, para o caso de duas variáveis independentes, podemos escrever as equações (1.2) e (1.3), respectivamente, nas formas

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y)u = S(x, y) \quad (1.4)$$

e

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (1.5)$$

onde A, B, C, D, E, F, G e u são funções de x e y.

A parte da EDP que contém as derivadas de maior ordem, chamada parte principal, em muitas situações determina propriedades da solução desta EDP. As EDPs não lineares que apresentam parte principal linear são chamadas quase-lineares ou semi-lineares.

1.3 Operador linear - princípio da superposição

As equações diferenciais parciais lineares de qualquer ordem podem ser apresentadas como uma equação envolvendo um operador linear, isto é,

$$Lu = f, \tag{1.6}$$

onde u é a função desconhecida, f é uma função de várias variáveis e L é uma combinação linear de derivadas.

Para exemplificar e sem perder a generalidade, vamos usar a equação (1.6) para reescrever a equação (1.3). Assim, temos

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}u(x) + c(x)u(x) = f, \tag{1.7}$$

onde $f = -d(x)$. Se $f = 0$, a EDP

$$Lu = 0 \tag{1.8}$$

é chamada equação homogênea associada à equação (1.6).

Prova-se que qualquer combinação linear das soluções da equação (1.8) é também uma solução, isto é, se $u_1, \ldots, u_n$ satisfazem (1.8) e se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são escalares, então

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j \tag{1.9}$$

é também solução de (1.8). Este é o princípio da superposição para EDPs homogêneas.

1.4 Condições de contorno e iniciais

Em geral, para garantir a existência e a unicidade de solução de problemas físicos dependentes do tempo, (como é o caso de fenômenos de difusão de calor e fenômenos ondulatórios), isto é, para que os problemas sejam bem postos, é necessário fornecer as condições iniciais. Estas condições compreendem a posição inicial e a sua velocidade inicial, ressaltando que ambas devem ser expressas por funções contínuas. Além destas, no caso de intervalos finitos, devemos impor as condições nas extremidades do sistema físico, as chamadas condições de contorno. Assim, as soluções, quando é possível achá-las, devem satisfazer certas condições impostas, que podem assumir formas como as descritas a seguir.

Tomando como modelo matemático o problema das vibrações de uma corda homogênea de comprimento ℓ, distendida com uma tensão constante ao longo do eixo x de 0 até ℓ, descrito pela equação

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

para $0 < x < \ell$ e $t > 0$, onde c é a velocidade de propagação na corda, considerada constante[5] e $u = u(x,t)$, a variável dependente, representa o deslocamento de um ponto da corda a partir da posição de equilíbrio $u = 0$, temos:

1.4.1 Condições de Dirichlet - extremidades fixas

Nas condições de Dirichlet[6]$(1805 - 1859)$, as extremidades estão fixas e as condições de contorno do problema são dadas por

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \ \text{ se } \ t \geq 0.$$

[5]Se a corda possui uma densidade linear de massa constante μ e está submetida a uma tensão τ, a velocidade c é dada por $c^2 = \tau/\mu$.

[6]Johann Peter Lejeune Dirichlet, matemático alemão a quem se atribui a moderna definição formal de função.

Sob o ponto de vista matemático não interessa a natureza do processo que provoca o início das vibrações. O que importa é o deslocamento inicial da corda, representado por $u(x,0)$, e o modo como a corda é abandonada nesta posição, ou seja, a velocidade inicial representada por $u_t(x,0)$, que são chamadas condições iniciais. Assim, devem ser dados

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad \text{se} \;\; 0 \le x \le \ell, \\ u_t(x,0) &= g(x) \quad \text{se} \;\; 0 \le x \le \ell. \end{aligned}$$

onde as condições iniciais $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas. Um problema deste tipo é conhecido como um problema de valores inicial e de contorno, ou abreviadamente, um PVIC.

1.4.2 Condições de Neumann - extremidades livres

Nas condições de Neumann[7] (1798−1895), a corda de comprimento ℓ tem suas extremidades forçadas a não se afastarem de trilhos colocados perpendicularmente à corda, no plano (x,u) de vibração. Isso implica em

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \;\; \text{se} \;\; t \ge 0,$$

que são as condições de contorno do problema. Para as condições iniciais podemos considerar as mesmas do caso anterior, por exemplo.

1.4.3 Condições mistas

Podemos considerar, dentre outros, o caso de vibrações de uma corda cujas extremidades se movem, transversalmente, de acordo com leis conhecidas. Neste caso,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= a(t) \quad \text{se} \;\; t \ge 0, \\ u_x(\ell,t) &= b(t) \quad \text{se} \;\; t \ge 0. \end{aligned}$$

[7]Franz Ernst Neumann, mineralogista, físico e matemático alemão.

A equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ descreve o movimento de uma corda vibrando livremente. No caso que atuam forças externas, obtemos diferentes equações para descrever o movimento da corda. Destacam-se equações com vibrações forçadas, vibrações amortecidas e vibrações sob ação de força restauradora [7].

Resumindo, EDPs podem ser resolvidas com condições iniciais, exatamente como as EDOs ou com condições de contorno que prescrevem o valor da solução ou sua derivada em superfícies, curvas ou pontos do contorno. Quando a solução é prescrita sobre o contorno, a EDP está associada ao *problema de Dirichlet*; se a derivada normal da solução é prescrita sobre o contorno, a EDP está associada ao *problema de Neumann* [1].

1.5 EDP de primeira ordem

Abordamos nesta seção as equações diferenciais parciais lineares ou quase lineares de primeira ordem empregando, para solucioná-las, o método das características. Para uma melhor visualização dos conceitos, vamos considerar apenas duas variáveis independentes x e y e a variável dependente $u = u(x, y)$. Desta forma, vamos procurar solução de EDPs expressas por

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y)u = S(x,y). \tag{1.10}$$

Logo, considerando o operador linear de primeira ordem

$$L = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + R(x,y) \tag{1.11}$$

atuando na função $u = u(x, y)$, obtemos

$$Lu = P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y)u. \tag{1.12}$$

Vamos resolver a equação diferencial parcial de primeira ordem, quase-linear,

$$Lu = S(x,y) \tag{1.13}$$

em um aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$, supondo que $P,\ Q,\ R,\ S \in C^1(\Omega)$.

A teoria das EDPs lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes é semelhante à teoria das EDOs. Isto porque, para resolver a equação (1.13), empregando o método das características, podemos mudar convenientemente as coordenadas (x, y) para as coordenadas (ξ, η) onde $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ com ξ e η de classe C^1, de modo a transformar esta equação em outra onde só apareça a derivada em relação a uma variável, permitindo-nos resolver a EDP como se fosse uma EDO.

Assim, resolvemos as EDPs do tipo da equação (1.13), integrando ao longo de curvas, chamadas curvas características planas, que se constituem numa família de curvas associadas às EDPs e que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x'(\xi) = P\left(x(\xi), y(\xi)\right) \\ y'(\xi) = Q\left(x(\xi), y(\xi)\right) \end{cases} \tag{1.14}$$

e utilizando uma curva auxiliar C que intercepta transversalmente as curvas características.

As curvas características planas associadas à equação (1.13), também são soluções da EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \tag{1.15}$$

Quando as soluções da EDO (1.15) tiverem a forma $\eta(x, y) = k$ com k constante, devemos tomar η como uma das novas variáveis. A escolha de ξ pode ser feita livremente, desde que seja garantido que $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$, pois é uma mudança de variável de classe C^1 em Ω. Para tanto é necessário que o jacobiano

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

com $\xi_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial x},\ \xi_y = \dfrac{\partial \xi}{\partial y},\ \eta_x = \dfrac{\partial \eta}{\partial x},\ \eta_y = \dfrac{\partial \eta}{\partial y}$ não se anule em Ω.

Para fixar idéias, vamos resolver a equação

$$-2yu_x + u_y = y\,\mathrm{e}^x \tag{1.17}$$

com $u = u(x, y)$, que é uma EDP linear de primeira ordem, não homogênea.

Com auxílio das curvas características planas e de uma curva auxiliar C transversal à família de curvas características, podemos fazer a mudança de variável $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ de forma a obter uma equação mais simples. As curvas características planas para a equação (1.17) são dadas por

$$\begin{cases} x'(\xi) = -2y(\xi) \\ y'(\xi) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\xi) = -\xi^2 - 2\xi c_1 + c_2 = -(\xi + c_1)^2 + c_1^2 + c_2 \\ y(\xi) = \xi + c_1 \end{cases}$$

com c_1 e c_2 constantes. Da solução do sistema de EDOs concluímos que as curvas características planas são as parábolas $x = -y^2 + k$, k constante. De modo equivalente, poderíamos obter a família de curvas características através da relação

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}, \tag{1.18}$$

com $P(x, y) = -2y$ e $Q(x, y) = 1$.

Com efeito, usando a relação (1.18) temos que as curvas características satisfazem a EDO

$$\frac{dx}{-2y} = \frac{dy}{1} \Rightarrow dx = -2ydy$$

cuja solução fornece a família de curvas $x = -y^2 + k$, onde k é uma constante.

Tomando como curva auxiliar o eixo x , procuramos ξ e η com

$$\begin{aligned} & x(\xi, \eta) = -\left[\xi + c_1(\eta)\right]^2 + c_2(\eta), \quad x(0, \eta) = \eta \\ & y(\xi, \eta) = \xi + c_1(\eta), \quad y(0, \eta) = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

de onde segue-se

$$x = -\xi^2 + \eta, \qquad y = \xi.$$

Ou, equivalentemente, explicitando ξ e η,

$$\xi = y, \qquad \eta = x + y^2. \tag{1.20}$$

Observe que η é uma constante ao longo das curvas características planas e a curva auxiliar corresponde a $\xi = 0$. Fazendo a mudança de variável (1.20) e tomando $v(\xi, \eta)$, v satisfaz a equação

$$v_\xi = \xi \, \mathrm{e}^{-\xi^2 + \eta}$$

cuja solução geral é dada por

$$v(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\xi^2 + \eta} + f(\eta),$$

onde $f(\eta)$ só depende da variável η.

A solução geral da equação (1.17) é dada por

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \mathrm{e}^{x} + f\left(x + y^2\right), \tag{1.21}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ é arbitrária [9].

1.6 EDP lineares de segunda ordem

Abordamos nesta seção as equações diferencias parciais lineares de segunda ordem. Dentre todas as EDPs, talvez as mais importantes, pois um grande número de problemas físicos, quando formulados em termos matemáticos, conduzem a equações diferenciais parciais, freqüentemente lineares e de segunda ordem [3].

Vamos classificar as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, definir suas curvas características e apresentar suas formas canônicas. Consideramos apenas duas variáveis independentes x e y e uma função incógnita $u = u(x, y)$, que possui derivadas parciais contínuas até segunda ordem em ambas as variáveis independentes num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Como vimos na Seção 1.2, estas equações têm a seguinte forma geral

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{1.22}$$

onde $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, e A, B, C, D, E, F, G e u são funções de x e y.

Vamos supor que todos os coeficientes presentes na equação (1.22) são continuamente diferenciáveis em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e que os coeficientes A, B e C não são simultaneamente nulos. Destaca-se a parte principal desta equação que é o operador linear de segunda ordem atuando na função $u = u(x, y)$

$$Lu = A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy}. \tag{1.23}$$

1.6.1 Classificação das EDPs

Em analogia com as cônicas, vamos classificar as EDPs da forma (1.22) quanto ao tipo, em cada ponto (x_0, y_0) de seu domínio analisando sua parte principal, ou mais precisamente, analisando o discriminante $\Delta(x, y)$ associado à equação, definido por

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)\, C(x, y). \tag{1.24}$$

Definição 1.1 A EDP dada por (1.22) é dita uma equação

(i) Parabólica no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $\Delta(x_0, y_0) = 0$,

(ii) Hiperbólica no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $\Delta(x_0, y_0) > 0$,

(iii) Elíptica no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $\Delta(x_0, y_0) < 0$.

A equação (1.22) é dita parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em Ω se for parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em todos os pontos de Ω. Esta equação pode mudar de tipo no domínio de definição de seus coeficientes; neste caso dizemos que a EDP é de tipo misto, o que não ocorre quando A, B e C são constantes. Um exemplo é a equação de Tricomi[8] $(1897 - 1978)$

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.25}$$

com $u = u(x, y)$ que é do tipo misto a saber: é elíptica no semi-plano $y > 0$, parabólica no eixo dos x e hiperbólica no semi-plano $y < 0$ [9].

[8] Francesco Giacomo Tricomi, matemático italiano.

Dentre as equações citadas na introdução deste capítulo, em particular, com duas variáveis independentes, destacamos, por exemplo, que as equações de Laplace e Poisson são do tipo elíptico, a equação de onda é do tipo hiperbólico e a equação de difusão de calor é do tipo parabólico. A equação do telégrafo é, em geral, uma equação do tipo hiperbólico mas, dependendo dos parâmetros, pode ser uma equação do tipo parabólico.

Uma propriedade fundamental, associada às EDPs de duas variáveis independentes, diz respeito ao fato de ser sempre possível encontrar uma transformação de coordenadas que deixa a equação (1.22) invariante quanto ao tipo. Para tanto, basta que o jacobiano da transformação seja diferente de zero, ou seja, a transformação seja inversível.

Para demonstrar esta propriedade, suponhamos uma transformação genérica dada por

$$\begin{aligned} \xi &= \xi\,(x,y) \\ \eta &= \eta\,(x,y) \end{aligned} \tag{1.26}$$

onde ξ e η são funções com derivadas contínuas até segunda ordem, em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ com Jacobiano

$$J\,(x,y) = \frac{\partial\,(\xi,\eta)}{\partial\,(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

diferente de zero no domínio considerado, de modo que x e y podem ser obtidos univocamente a partir das equações para ξ e η.

Introduzindo as transformações (1.26) na equação (1.22), obtemos pela regra da cadeia, uma nova equação diferencial parcial, linear e de segunda ordem, dada por

$$\bar{A}u_{\xi\xi} + 2\bar{B}u_{\xi\eta} + \bar{C}u_{\eta\eta} + \bar{D}u_{\xi} + \bar{E}u_{\eta} + \bar{F}u = \bar{G}, \tag{1.27}$$

sendo $u = u(\xi, \eta)$ e onde os novos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= A(\xi_x)^2 + 2B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2 \\
\bar{B} &= A(\xi_x\eta_x)^2 + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C(\xi_y\eta_y) \\
\bar{C} &= A(\eta_x)^2 + 2B\eta_x\eta_y + C(\eta_y)^2 \\
\bar{D} &= A\xi_{xx} + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\
\bar{E} &= A\eta_{xx} + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\
\bar{F} &= F \\
\bar{G} &= G.
\end{aligned}$$

Como a classificação da EDP depende apenas dos coeficientes A, B e C no ponto (x, y), por simplicidade, reescrevemos as equações (1.22) e (1.27) respectivamente como

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = H \equiv H(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1.28}$$

e

$$\bar{A}(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2\bar{B}(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + \bar{C}(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \bar{H} \equiv \bar{H}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{1.29}$$

Calculando o discriminante associado à equação (1.29), obtemos

$$\bar{\Delta}(\xi,\eta) = \bar{B}^2(\xi,\eta) - \bar{A}(\xi,\eta)\bar{C}(\xi,\eta) = \Delta(x,y)|J|^2(x,y)$$

onde

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y)$$

é o discriminante associado à equação (1.28). Como o jacobiano nunca se anula em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0), o sinal de $\bar{\Delta}(\xi,\eta)$ é igual ao sinal de $\Delta(x,y)$. Em outras palavras, a equação (1.28) é parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em (x_0, y_0) se e somente se a equação (1.29) é parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em (ξ_0, η_0) [9].

1.6.2 Forma canônica - equações e curvas características

Na equação (1.28), vamos supor que as funções A, B e C não são simultaneamente nulas. Podemos então escolher as novas variáveis $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ de modo que os coeficientes $\bar{A}$ e $\bar{C}$ da equação (1.29) se anulem. Assim

$$\bar{A} = A(\xi_x)^2 + 2B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2 \equiv 0;$$
$$\bar{C} = A(\eta_x)^2 + 2B\eta_x\eta_y + C(\eta_y)^2 \equiv 0.$$

Como as equações $\bar{A} = 0$ e $\bar{C} = 0$ têm a mesma forma, exceto pela mudança de ξ por η, vamos discutir a equação

$$A(\tau_x)^2 + 2B\tau_x\tau_y + C(\tau_y)^2 = 0 \tag{1.30}$$

onde τ representa ora ξ, ora η. Dividindo a equação (1.30) por $(\tau_y)^2$ podemos escrevê-la na forma

$$A\left(\frac{\tau_x}{\tau_y}\right)^2 + 2B\left(\frac{\tau_x}{\tau_y}\right) + C = 0. \tag{1.31}$$

Ao longo de uma curva característica da equação (1.30), onde $\tau =$ constante, temos

$$d\tau = \tau_x dx + \tau_y dy = 0$$

de onde obtemos

$$\frac{\tau_x}{\tau_y} = -\frac{dy}{dx}. \tag{1.32}$$

Introduzindo a equação (1.32) na equação (1.31), a equação toma a forma

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0. \tag{1.33}$$

A equação (1.33) é uma equação algébrica, de segundo grau, cujas raízes são

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{A} \tag{1.34}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{A} \tag{1.35}$$

onde $\Delta = B^2 - AC$.

As duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (1.34) e (1.35) são chamadas equações características e suas respectivas integrais

$$y = \int \left(\frac{B + \sqrt{\Delta}}{A} \right) dx + c_1 \tag{1.36}$$

$$y = \int \left(\frac{B - \sqrt{\Delta}}{A} \right) dx + c_2 \tag{1.37}$$

são chamadas curvas características com c_1 e c_2 constantes de integração.

Devemos notar ainda que se os coeficientes A, B e C são constantes as equações características levam a duas famílias de retas, e a equação é do mesmo tipo em todos os pontos de seu domínio, uma vez que Δ também será constante [4].

As EDPs podem ser apresentadas em formas equivalentes ou em formas que diferem apenas em notação. Assim, como no caso das cônicas do segundo grau, se a EDP (1.22) é do mesmo tipo em um aberto em $\mathbb{R}^2$, uma completa teoria pode ser desenvolvida, procurando uma mudança de variável que a coloque em uma forma particularmente simples, a chamada *forma canônica ou normal* [8]. Apresentamos a seguir, as três possibilidades em função do discriminante Δ.

Equação do tipo hiperbólico: $\Delta > 0$

Se $\Delta > 0$, há duas equações características, logo temos duas famílias de curvas características reais distintas, e a primeira forma canônica à qual a equação original se reduz é

$$u_{\xi\eta} = H_1 \left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta \right) \tag{1.38}$$

onde $H_1 = \bar{H}/\bar{B}$, com $\bar{B} \neq 0$.

Apenas para este tipo temos uma segunda forma canônica que é obtida introduzindo um segundo par de variáveis independentes reais do tipo

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi + \eta \\ \beta &= \xi - \eta \end{aligned} \tag{1.39}$$

que é dada por

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_2\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right). \qquad (1.40)$$

Um exemplo deste tipo de equação é a chamada equação de propagação das ondas.

Equação do tipo parabólico: $\Delta = 0$

No caso em que o discriminante $\Delta = 0$, as equações características (1.34) e (1.35) são idênticas. Neste caso, temos somente uma família de curvas características, de onde obtemos apenas uma curva integral ξ = constante (ou η = constante). A forma canônica para a equação do tipo parabólico é dada por

$$u_{\xi\xi} = H_3\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right), \qquad (1.41)$$

com η = constante e $\bar{A} \neq 0$, ou

$$u_{\eta\eta} = H_4\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) \qquad (1.42)$$

com ξ = constante e $\bar{C} \neq 0$.

Aplicações importantes deste tipo de equação são as equações associadas aos problemas de difusão, também chamada equação do calor.

Equação do tipo elíptico: $\Delta < 0$

Neste caso o discriminante $\Delta < 0$ e as curvas características são complexas, o que nos dá a primeira forma canônica elíptica com ξ e η complexos. Tomando ξ e η complexos conjugados, podemos introduzir uma nova mudança de variáveis

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\xi + \eta\right) \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{1}{2i}\left(\xi - \eta\right)$$

com α e β variáveis reais e independentes. Efetuando todas as transformações obtemos a equação

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_5\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right), \qquad (1.43)$$

chamada forma canônica da equação elíptica.

Este tipo de equação está associado, por exemplo, aos problemas advindos da eletrostática, isto é, associadas a um potencial. Quando $H_5 = 0$, temos a equação de Laplace. No caso em que $H_5 =$ constante ou possui dependência apenas com ξ e η, temos a equação de Poisson [11].

1.6.3 Exemplo

Como exemplo vamos colocar a equação de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1.44}$$

onde $u = u(t, x)$, e $c > 0$ é constante, na forma da equação (1.38).

Podemos verificar que a equação (1.44) é do tipo hiperbólico e, portanto, tem duas famílias de curvas características. Escrevendo a equação na forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1.45}$$

temos $A(t, x) = 1$, $B(t, x) = 0$ e $C(t, x) = -c^2$. Logo da equação (1.33) obtemos as equações características

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm c.$$

Integrando-as temos as curvas características $x = ct + \alpha$ e $x = -ct + \beta$, com α e β constantes, ou seja, as curvas características são famílias de retas. Introduzindo as novas variáveis ξ e η obtemos as coordenadas características

$$\xi = x - ct \quad e \quad \eta = x + ct$$

com $\xi = \xi(t, x)$ e $\eta = \eta(t, x)$. Como $c > 0$, o Jacobiano nunca se anula pois

$$J(t, x) = \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t = -c - c = -2c \neq 0.$$

Logo x e t podem ser obtidos univocamente a partir das equações para ξ e η.

Calculando as derivadas parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial t} &= -c\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\,\frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(-c\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(-c\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{1.46}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{1.47}$$

Introduzindo as equações (1.46) e (1.47) na equação (1.45) temos:

$$\left(c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) - c^2\,\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0.$$

Simplificando a expressão e reduzindo os termos semelhantes obtemos

$$-4c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{1.48}$$

que é a primeira forma canônica da equação do tipo hiperbólico.

1.6.4 Solução da EDP

A solução de uma equação diferencial parcial é uma função que verifica identicamente essa equação. Nas equações diferenciais ordinárias obtemos uma expressão geral de todas as soluções da equação diferencial. O mesmo não acontece nas equações diferenciais parciais. Nas expressões que definem soluções das equações diferencias parciais podem surgir funções arbitrárias e constantes arbitrárias, situação diferente da que acontece nas equações diferenciais ordinárias, onde na expressão da solução geral apenas aparecem constantes arbitrárias.

Exemplo

A equação $u_{xy} = 3x^2 - 4y$, com $u = u(x, y)$, é uma EDP de segunda ordem. A função $u = u(x, y) = x^3y - 2xy^2 + F(x) + G(y)$ é uma solução desta equação que contém duas funções arbitrárias e independentes, $F(x)$ e $G(y)$. Logo, é solução geral. Em particular, fazendo $F(x) = \cos(x)$ e $G(y) = y^2 - 3y$, temos que $u(x, y) = x^3y - 2xy^2 + \cos(x) + y^2 - 3y$ é uma solução particular da EDP dada.

As EDPs, da mesma forma que as EDOs, necessitam de condições adicionais, chamadas *condições de contorno*, para serem resolvidas de forma única. Estas condições especificam o comportamento da solução na fronteira do domínio onde ela deve ser determinada. Ao conjunto de uma EDP e suas condições de contorno dá-se o nome de um problema a valores de contorno (PVC), ou, simplesmente, um problema de contorno. Utiliza-se mais freqüentemente a expressão *condições iniciais* para aquelas envolvendo a variável tempo, reservando-se a expressão original para as condições de contorno que envolvem apenas variáveis espaciais [6].

1.7 Separação de variáveis e séries de Fourier

Nesta seção vamos introduzir o método de separação de variáveis para obter soluções de equações diferenciais parciais lineares. Estamos, em particular, interessados nas EDPs lineares de segunda ordem, as chamadas equações da Física-Matemática. Este método freqüentemente leva a equações diferenciais ordinárias, com coeficientes variáveis que, acompanhados de condições de contorno convenientes, geram conjuntos de funções ortogonais.

O método consiste em subdividir uma EDP de n variáveis independentes em n equações diferenciais ordinárias. Cada separação introduz uma constante de separação arbitrária, de modo que se temos n variáveis independentes, introduzimos $n-1$ constantes, determinadas pelas condições de contorno impostas às soluções.

A separabilidade de uma equação depende da forma e do sistema de coordenadas usado. Por exemplo, o sistema de coordenadas cartesianas retangulares é conveniente para regiões do espaço com simetria retangular. Para as regiões com simetria esférica e cilíndrica são mais indicadas as coordenadas polares esféricas e cilíndricas, respectivamente [13].

Neste estudo, para obter a solução de uma EDP homogênea com condições de contorno homogêneas, vamos proceder como segue:

(i) Aplicando o método de separação de variáveis ou método do produto, reduzimos a equação a derivadas parciais, já colocada na forma canônica, sem o termo de derivada mista, em equações ordinárias.

(ii) Determinamos as soluções destas equações ordinárias satisfazendo as condições de contorno.

(iii) Estas soluções serão compostas (combinadas) de modo que o resultado satisfaça a equação diferencial parcial, assim como as condições dadas.

Esta seqüência com os três passos se constitui no chamado *método de Fourier*[9] $(1768 - 1830)$, para a resolução de uma equação a derivadas parciais, linear e homogênea [6].

A fim de exemplificar, descrevemos os passos utilizando equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem e homogêneas, em três situações: no caso geral de duas variáveis independentes, no problema das oscilações de uma membrana circular e na equação de Helmholtz em coordenadas esféricas.

[9] Jean Baptiste Fourier, matemático e físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, chamadas séries de Fourier e a sua aplicação aos problemas da difusão.

1.7.1 Caso geral de duas variáveis independentes

Neste caso, vamos utilizar a EDP linear de segunda ordem e homogênea, escrita na forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu=0, \tag{1.49}$$

onde $u = u(\xi, \eta)$ e os coeficientes $A, \ldots, F$ são funções das variáveis independentes ξ e η.

Primeiro Passo: Separação de variáveis.

Para aplicarmos o método de separação de variáveis, primeiramente devemos reduzir a equação (1.49) à sua forma canônica. É sempre possível, neste caso, encontrar uma transformação de coordenadas do tipo $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$, com o Jacobiano diferente de zero, capaz de reduzir esta equação à forma canônica do tipo

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u=0, \tag{1.50}$$

onde $a = -c \neq 0$ para as equações hiperbólicas, $a = 0$ (ou $c = 0$) para as equações parabólicas e $a = c \neq 0$ no caso de uma equação do tipo elíptico [5].

Vamos propor uma solução $u(x, y)$ da equação (1.50) na forma do produto

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \tag{1.51}$$

onde a função $X(x)$ depende somente da variável x e $Y(y)$ depende somente da variável y. Introduzindo $u(x, y)$ escrito desta forma na equação (1.50), obtemos uma equação a derivadas ordinárias envolvendo as funções X e Y:

$$aY\frac{d^2X}{dx^2}+cX\frac{d^2Y}{dy^2}+dY\frac{dX}{dx}+eX\frac{dY}{dy}+fXY=0, \tag{1.52}$$

onde foi omitida, tanto dos coeficientes quanto das variáveis, a dependência funcional em x e y.

Vamos supor que seja possível encontrar uma função $p(x,y)$ tal que, ao dividirmos a equação (1.52) por $p(x,y)$, obtenhamos uma expressão da forma

$$Ya_1\frac{d^2X}{dx^2}+Xb_1\frac{d^2Y}{dy^2}+Ya_2\frac{dX}{dx}+Xb_2\frac{dY}{dy}+(a_3+b_3)\,XY=0, \tag{1.53}$$

onde a_1,a_2 e a_3 dependem da variável x e b_1,b_2 e b_3 dependem da variável y. Dividindo a equação (1.53) por XY e rearranjando os termos, temos

$$\frac{a_1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{a_2}{X}\frac{dX}{dx}+a_3=-\left(\frac{b_1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{b_2}{Y}\frac{dY}{dy}+b_3\right). \tag{1.54}$$

O lado esquerdo da equação (1.54) depende apenas de x, enquanto que o lado direito depende somente de y. Este fato só pode ser possível se, na verdade, ambos os lados forem independentes de x e y. Diferenciando ambos os lados da equação (1.54) em relação a x obtemos[10]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a_1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{a_2}{X}\frac{dX}{dx}+a_3\right)=0;$$

integrando esta expressão encontramos que

$$\frac{a_1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{a_2}{X}\frac{dX}{dx}+a_3=-\lambda^2 \tag{1.55}$$

onde a constante λ é chamada a *constante de separação*. A escolha do sinal da constante de separação depende do problema em questão e λ foi escrita ao quadrado única e exclusivamente por conveniência. Em problemas específicos será fixada pela necessidade de satisfazer condições de contorno específicas. De posse deste resultado podemos então escrever

$$\frac{a_1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{a_2}{X}\frac{dX}{dx}+a_3=-\lambda^2 \quad\Rightarrow\quad a_1\frac{d^2X}{dx^2}+a_2\frac{dX}{dx}+\left(a_3+\lambda^2\right)X=0, \tag{1.56}$$

e

$$-\left(\frac{b_1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{b_2}{Y}\frac{dY}{dy}+b_3\right)=-\lambda^2 \quad\Rightarrow\quad b_1\frac{d^2Y}{dy^2}+b_2\frac{dY}{dy}+\left(b_3-\lambda^2\right)Y=0, \tag{1.57}$$

que constitui um sistema de duas[11] equações diferenciais ordinárias. Portanto o problema se reduz a resolver duas equações diferenciais ordinárias, quais sejam as

[10] O procedimento e o resultado final serão os mesmos se diferenciarmos em relação a y.

[11] Se tivéssemos partido de uma equação a derivadas parciais com n variáveis independentes teríamos $(n-1)$ constantes de separação.

EDOs (1.56) e (1.57) em substituição à equação diferencial parcial (1.50). Assim, $u(x,y)$ é solução da equação (1.50) se $X(x)$ e $Y(y)$ são, respectivamente, soluções das equações (1.56) e (1.57). A solução deve ser identificada de acordo com a escolha da constante de separação λ, isto é,

$$u_\lambda(x,y) = X_\lambda(x)Y_\lambda(y). \tag{1.58}$$

Segundo passo: Condições de contorno.

As equações diferenciais (1.56) e (1.57), obtidas pela separação de variáveis, apresentam, em suas soluções gerais, duas constantes arbitrárias. Para determiná-las devemos impor que satisfaçam as condições de contorno do problema original[12].

Devemos notar que a escolha correta do sistema de coordenadas é de suma importância para que tenhamos condições separadas. Além disso, as condições de contorno dadas em $x = x_0$ devem conter somente derivadas de $u(x,y)$ em relação a x, e seus coeficientes devem depender apenas de x [5].

Terceiro passo: Solução do problema de partida.

Finalmente, desenvolve-se a solução mais geral da equação (1.50) considerando uma combinação linear da solução (1.58) expressa da forma

$$u(x,y) = \sum_\lambda a_\lambda u_\lambda(x,y), \tag{1.59}$$

onde os coeficientes a_λ são escolhidos de modo a permitir que $u(x,y)$ satisfaça as equações diferenciais ordinárias correspondentes, bem como as condições iniciais do problema, que, como regra, leva a um conjunto discreto de valores de λ [1].

[12] Na Seção 1.4 apresentamos as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas.

1.7.2 Oscilações de uma membrana circular

Para uma membrana circular vamos utilizar as coordenadas cilíndricas circulares (r, θ, z) que são definidas por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{e} \qquad z = z$$

onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

com $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $-\infty < z < \infty$, onde a expressão para o Laplaciano em coordenadas cilíndricas circulares é

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}.$$

O objetivo é aplicar o método de separação de variáveis na equação de onda que descreve as pequenas oscilações transversais de uma membrana circular plana de raio ℓ. Entende-se por membrana uma folha de espessura muito pequena $(z = 0)$, formada de material flexível, a qual se supõe esticada, como por exemplo, a membrana de um tambor.

Consideremos a membrana circular Γ definida por

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 < \ell^2\right\}.$$

Tratando-se de um círculo, vamos expressar o deslocamento transversal dos pontos da membrana em relação à sua posição de equilíbrio, por uma função $u(r, t)$, com $0 < r < \ell$ e $t > 0$.

Tendo em vista a expressão do Laplaciano em coordenadas polares no plano (cilíndricas com $z = 0$), a EDP da onda $u(r, t)$ reduz-se a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial u}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u^2}{\partial \theta^2}, \tag{1.60}$$

onde c^2 é uma constante e r é o raio da membrana.

Primeiro passo: Separação de variáveis

Vamos propor uma solução $u = u(r, \theta, t)$ desta equação na forma do produto

$$u(r, \theta, t) = S(r, \theta)\, T(t) \equiv ST, \tag{1.61}$$

onde $S(r, \theta) \equiv S$ depende das variáveis independentes r e θ enquanto que $T(t) \equiv T$ depende somente da variável temporal t, ou seja, vamos separar apenas a parte temporal.

Introduzindo a equação (1.61) na equação (1.60), dividindo-a por ST e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{1}{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2}. \tag{1.62}$$

O lado direito da equação (1.62) depende apenas de t, enquanto que o lado esquerdo não depende de t. Este fato só pode ser possível se, na verdade, ambos os lados forem independentes de t. Então cada lado deve ser igual a uma constante, denominada constante de separação, isto é,

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2\lambda^2 T = 0 \tag{1.63}$$

e

$$\frac{1}{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}\right] = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \lambda^2 S = 0, \tag{1.64}$$

onde, por conveniência, denotamos por $-\lambda^2$ a constante de separação.

Para a equação (1.64), vamos propor a separação de variávies da forma

$$S(r, \theta) = R(r) V(\theta) \equiv RV \tag{1.65}$$

onde $R(r) \equiv R$ e $V(\theta) \equiv V$, são dependentes, respectivamente, somente de r e θ. Introduzindo $S(r, \theta)$ escrita na forma (1.65) na equação (1.64), dividindo pelo produto RV, multiplicando por r^2 e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda^2 r^2 = -\frac{1}{V}\frac{d^2 V}{d\theta^2}. \tag{1.66}$$

O primeiro membro da equação (1.66) não depende da variável θ, enquanto que o segundo membro só depende desta variável, logo devem ser iguais a uma constante. Vamos estabelecer uma nova constante de separação μ^2 e escrever o lado direito da forma

$$-\frac{1}{V}\frac{d^2V}{d\theta^2} = \mu^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} + \mu^2 V = 0. \tag{1.67}$$

Para a dependência na variável r, temos

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda^2 r^2 - \mu^2\right) R = 0. \tag{1.68}$$

Fazendo a mudança de variáveis $r = \dfrac{x}{\lambda}$, temos

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR}{dx}\right) + \left(x^2 - \mu^2\right) R = x\left(\frac{dR}{dx} + x\frac{d^2R}{dx^2}\right) + \left(x^2 - \mu^2\right) R = 0.$$

ou

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + \left(x^2 - \mu^2\right) R = 0. \tag{1.69}$$

As equações diferenciais ordinárias nas variáveis t e θ, são equações com coeficientes constantes e a equação na variável r é uma equação com coeficientes variáveis e é conhecida como *equação de Bessel*, mais especificamente, para $\mu^2 > 0$ e $\lambda > 0$ é uma equação de Bessel modificada, com solução geral dada em termos das chamadas *funções de Bessel* modificadas[13].

A equação (1.60) foi substituída por três EDOs, equações (1.63), (1.67) e (1.69). Assim, $u(r,\theta,t)$ é solução da equação (1.60) se $T(t)$, $V(\theta)$ e $R(r)$ são, respectivamente, soluções das equações (1.63), (1.67) e (1.69). Portanto o problema se reduz a resolver três equações diferenciais ordinárias, com solução identificada de acordo com a escolha das constantes de separação λ e μ, isto é,

$$u_{\lambda\mu}(r,\theta,t) = R_{\lambda\mu}(r)V_{\mu}(\theta)T_{\lambda}(t)$$

Seguem o segundo e o terceiro passos apresentados na Subseção 1.7.1. A solução mais geral da equação da membrana circular, em coordenadas polares no

[13]As soluções e suas propriedades são apresentadas no Apêndice.

plano, é expressa na forma

$$u(r,\theta,t)=\sum_{\lambda,\mu}a_{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}(r)V_{\mu}(\theta)T_{\lambda}(t). \tag{1.70}$$

onde os coeficientes $a_{\lambda\mu}$ são escolhidos de modo a permitir que $u(r,\theta,t)$ satisfaça as equações diferenciais ordinárias correspondentes, bem como as condições iniciais do problema, que leva a um conjunto discreto de valores de λ e μ.

1.7.3 Equação de Helmholtz em coordenadas esféricas

As coordenadas polares esféricas (r,θ,φ) são definidas por

$$x=r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi,\quad y=r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

onde

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ \text{ e }\ \theta=\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

com $0\leq r<\infty,\ 0\leq\theta\leq\pi$ e $0\leq\varphi\leq2\pi.$ A expressão para o Laplaciano é

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right],$$

ou

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Vamos discutir a equação de Helmholtz que, em coordenadas polares esféricas, tem a forma

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0, \tag{1.71}$$

onde $u=u\,(r,\theta,\varphi)$ e k^2 é uma constante.

Primeiro passo: Separação de variáveis.

Vamos propor uma solução $u = u(r, \theta, \varphi)$ da equação (1.71) na forma do produto

$$u\left(r, \theta, \varphi\right) = R\left(r\right) T\left(\theta\right) \Phi\left(\varphi\right) \equiv RT\Phi. \tag{1.72}$$

onde $R(r) \equiv R$, $T(\theta) \equiv T$ e $\Phi(\varphi) \equiv \Phi$, são dependentes, respectivamente, somente de r, θ e φ. Introduzindo a equação (1.72) na equação (1.71), dividindo por $RT\Phi$, multiplicando o resultado por $r^2 \text{sen}^2\theta$ e rearranjando os termos, obtemos

$$r^2 \text{sen}^2\theta \left(\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{Tr^2} \frac{d^2T}{d\theta^2} + \frac{1}{Tr^2} \cot\theta \frac{dT}{d\theta} + k^2 \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}. \tag{1.73}$$

O primeiro membro da equação (1.73) é função de r e θ enquanto que o segundo, apenas de φ. Uma vez que r, θ e φ são variáveis independentes, devemos igualar cada membro da equação a uma constante, de onde seguem-se

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \lambda^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda^2 \Phi = 0 \tag{1.74}$$

e

$$\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{Tr^2} \frac{d^2T}{d\theta^2} + \frac{1}{Tr^2} \cot\theta \frac{dT}{d\theta} + k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2 \text{sen}^2\theta} = 0, \tag{1.75}$$

onde λ^2 é uma constante de separação[14].

Multiplicando a equação (1.75) por r^2 e rearranjando os termos obtemos

$$r^2 \left(\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + k^2 \right) = -\left(\frac{1}{T} \frac{d^2T}{d\theta^2} + \frac{\cot\theta}{T} \frac{dT}{d\theta} - \frac{\lambda^2}{\text{sen}^2\theta} \right). \tag{1.76}$$

Agora temos as variáveis r e θ separadas. Igualando cada membro da equação (1.76) a uma constante μ^2, obtemos

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \left(k^2 r^2 - \mu^2 \right) R = 0 \tag{1.77}$$

e

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dT}{d\theta} + \left(\mu^2 - \frac{\lambda^2}{\text{sen}^2\theta} \right) T = 0 \tag{1.78}$$

[14] A solução da equação (1.74) é $\Phi\left(\varphi\right) = a\ \text{sen}\left(\mu\varphi\right) + b\ \cos\left(\mu\varphi\right)$, com a e b constantes arbitrárias. Em quase todos os problemas físicos φ aparecerá como um ângulo de azimute. Com isso, espera-se que esta solução seja periódica em φ de período 2π isto é, $\Phi\left(\varphi + 2\pi\right) = \Phi\left(\varphi\right)$. Para tanto a constante de separação μ neste caso deve ser um número inteiro.

onde μ^2 é uma constante de separação. A equação (1.77) é uma equação do tipo Bessel[15] enquanto que a equação (1.78) é uma equação do tipo Legendre[16] $(1752 - 1833)$.

Portanto o problema se reduz a resolver três equações diferenciais ordinárias, quais sejam as equações (1.74), (1.77) e (1.78) em substituição à equação diferencial parcial (1.71). Assim, $u(r, \theta, \varphi)$ é solução da equação (1.71) se $R(r)$, $\Phi(\varphi)$ e $T(\theta)$ são, respectivamente, soluções das equações (1.74), (1.77) e (1.78). A solução deve ser identificada de acordo com a escolha das constantes de separação λ e μ, isto é,

$$u_{\lambda\mu}(r, \theta, \varphi) = R_\mu(r) T_{\lambda\ \mu}(\theta) \Phi_\lambda(\varphi).$$

Seguem o segundo e o terceiro passos apresentados na Subseção 1.7.1. A solução mais geral da equação (1.71) é expressa na forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} R_\mu(r) T_{\lambda\mu}(\theta) \Phi_\lambda(\varphi) \tag{1.79}$$

sendo que, somente com a imposição de periodicidade, a constante de separação λ deve ser um número inteiro e que μ deve pertencer a um conjunto de valores admissíveis.

1.8 Equação da corda vibrante

Nesta seção vamos estudar o movimento de uma corda sujeita a pequenas vibrações transversais livres. A descrição do modelo físico é o seguinte:

1. As vibrações ocorrem em um plano. Vamos representar as coordenadas desse plano por (x, u), de modo que $u(x, t)$ representa a posição do ponto x da corda no instante t.

[15] Ver Seção 4.5 do Apêndice.

[16] Adrien Marie Legendre, matemático francês.

2. As vibrações são transversais. Faz-se a hipótese de que as partículas constituintes da corda se desloquem apenas na direção do eixo u.

3. A corda é flexível. Supõe-se que a corda não ofereça resistência ao ser dobrada, ou seja, resistência à flexão. Como conseqüência, a força atuando em cada ponto da corda é sempre tangente à corda e é chamada de tensão da corda.

Como não há movimento da corda na direção do eixo x, isso significa, pela segunda lei de Newton[17] $(1643-1727)$, que a resultante das componentes horizontais das tensões que atuam em cada trecho da corda é nula. Portanto, se $T(x,t)$ e $T(x+\Delta x,t)$ são as tensões atuando nos pontos x e $x+\Delta x$, respectivamente e $\alpha(x,t)$ e $\alpha'(x+\Delta x,t)$ são os ângulos que estas forças formam com o eixo x, no instante t, como indicados na Figura 1.1, temos que

$$T\,(x,t)\,\mathrm{cos}\alpha = T\,(x+\Delta x,t)\,\mathrm{cos}\alpha'$$

para todos os x e $x+\Delta x$. Portanto, a componente horizontal da tensão é independente do ponto x, é constante ao longo da corda e é função apenas do tempo t. Vamos chamar a constante de $\tau(t)$:

$$\tau(t) = T(x,t)\mathrm{cos}\alpha(x,t). \tag{1.80}$$

Para calcular a resultante vertical da tensão atuando no trecho da corda compreendido entre x e $x+\Delta x$, observamos primeiro que a força vertical que atua em um elemento infinitesimal da corda compreendida entre esses pontos é dada por

$$T(x+\Delta x,t)\mathrm{sen}\alpha'(x+\Delta x,t) - T(x,t)\mathrm{sen}\alpha(x,t),$$

ou, introduzindo a constante (1.80)

$$\tau(t)\left[\mathrm{tan}\alpha'(x+\Delta x,t) - \mathrm{tan}\alpha(x,t)\right].$$

Utilizando o fato de que $\mathrm{tan}\alpha(x,t)$ é a inclinação de $u(x,t)$ no instante t, isto é,

[17] Isaac Newton, cientista inglês, mais conhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista e filósofo natural.

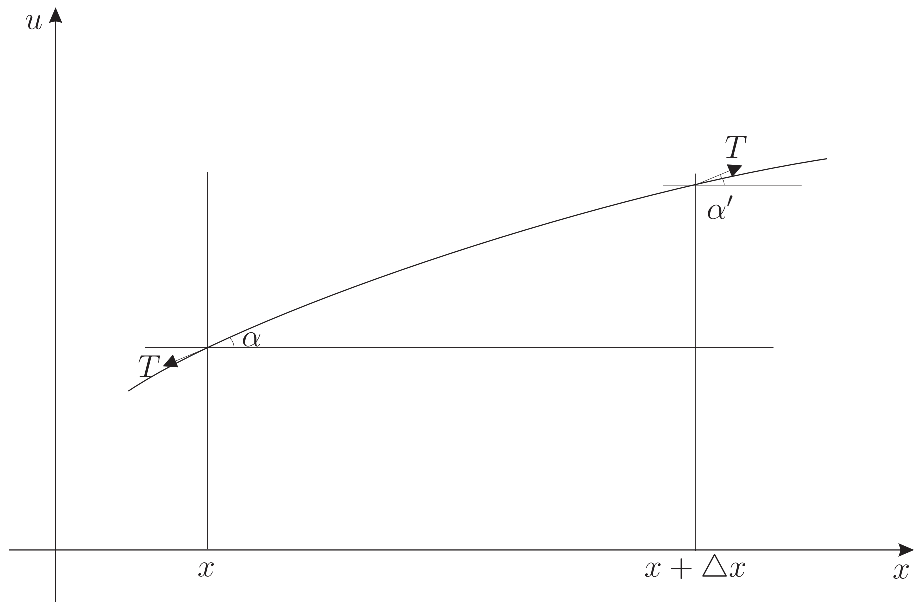

Figura 1.1: Um elemento de corda flexível.

tan$\alpha(x,t) = u_x(x,t)$, podemos reescrever a expressão acima na forma

$$\tau(t)\left[u_x\left(x+\Delta x,t\right)-u_x\left(x,t\right)\right]=\tau(t)u_{xx}\left(\bar{x},t\right)\Delta x \tag{1.81}$$

onde, pelo teorema do valor médio, $\bar{x}$ é algum ponto entre x e $x+\Delta x$. Portanto a resultante vertical da tensão atuando no trecho da corda compreendido entre x e $x+\Delta x$ é dada por

$$F_{res}=\tau(t)\int_x^{x+\Delta x}u_{xx}(x,t)dx. \tag{1.82}$$

Isso significa que em cada ponto x da corda, a força devida à tensão atuando nele no instante t é dada por $\tau(t)u_{xx}(x,t)$, o produto da tensão horizontal naquele ponto pela curvatura da corda no ponto. Intuitivamente isso faz sentido, pois a tensão atuando na corda é principalmente uma força horizontal e quanto maior é a curvatura em um ponto na corda, maior deve ser a tensão naquele ponto.

Além das forças de tensão, forças internas à corda, a corda pode também estar sujeita à forças externas, tais como a força da gravidade e a resistência ao movimento da corda imposta pelo meio onde ela está situada, forças de atrito ou fricção. Vamos considerar que a corda é feita de um material muito leve e o meio não oferece resistência significativa, isto é, vamos desprezar as forças externas, pois, consideramos, por hipótese, que as vibrações são livres.

Por outro lado, se $u_{tt}(x,t)$ é a aceleração em um ponto x da corda no instante t, representada somente pela sua componente vertical, já que a componente horizontal é nula e se a densidade linear da corda no ponto x é $\rho(x)$, segue da segunda lei de Newton que a força atuante em cada elemento infinitesimal da corda é

$$dm\ u_{tt}(x,t) = \rho(x)dx\ u_{tt}(x,t)$$

de modo que

$$F_{res} = \int_x^{x+\Delta x} \rho(x) u_{tt}(x,t) dx, \tag{1.83}$$

com $\rho(x)$ e $\tau(t)$ constantes.

Igualando as equações (1.82) e (1.83), usando o fato de que x e $x+\Delta x$ são arbitrários, e fazendo $c^2 = c^2(x,t) = \tau(t)/\rho(x)$, obtemos a equação de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \tag{1.84}$$

Fisicamente, ela significa que a aceleração em cada ponto da corda é proporcional à curvatura da corda naquele ponto. Pontos com concavidade para cima ($u_{xx} > 0$) tendem a se mover para cima ($u_{tt} > 0$), enquanto que pontos com concavidade para baixo ($u_{xx} < 0$) tendem a se mover para baixo, levando-se em conta a velocidade e a direção do movimento da corda no momento.

Quando a corda é homogênea $\rho(x) =$ constante e as vibrações são pequenas, $\alpha(x,t) \sim 0$ e conseqüentemente $\cos\alpha(x,t) \sim 1$, a força de tensão não varia com o tempo. Por exemplo, em uma corda com as extremidades fixas, temos que o parâmetro c, que tem dimensões de velocidade, é uma constante [2].

A equação de onda é uma EDP linear, de segunda ordem, com variáveis independentes x e t. Conseqüentemente para garantir a existência e a unicidade de soluções, valem as condições de contorno e iniciais citadas na Seção 1.4.

A equação (1.84) descreve o movimento de uma corda vibrando livremente. No caso em que atuam forças externas na corda, a resultante vertical das forças atuando na corda é modificada levando-se em conta estas forças, de modo que obtemos diferentes equações para descrever o movimento da corda. De acordo com o tipo de forças externas vamos mencionar:

1. **Vibrações forçadas.** Suponha que a corda esteja sujeita a uma força externa, que pode variar com x e t. Então a equação (1.84) torna-se
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t). \tag{1.85}$$

2. **Vibrações amortecidas.** Suponha que a corda esteja imersa em um fluido, o qual opõe uma resistência ao movimento. Nesse caso, há uma força externa dependendo da velocidade, que podemos supor ser da forma $h(x,t) = -ku_t(x,t)$, $k > 0$. O sinal negativo deve-se ao fato de a força ser de resistência ao movimento. Neste caso, a equação (1.84) torna-se
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - ku_t(x,t). \tag{1.86}$$

3. **Vibrações sob ação de uma força restauradora.** Suponha que exista um dispositivo que produza uma força tendente a trazer a corda para a posição de equilíbrio $u \equiv 0$, e que essa força seja dada por $h(x,t) = -ku(x,t)$, com k constante. Então a equação (1.84) fornece
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - ku. \tag{1.87}$$

1.8.1 Exemplo

Vamos aplicar o método de separação de variáveis e a teoria das séries de Fourier para resolver o problema da corda vibrante com extremidades fixas:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx} && \text{se } \ 0 < x < \ell \ \text{ e } \ t > 0,\\
&u(0,t) = u(\ell,t) = 0 && \text{se } \ t \geq 0,\\
&u(x,0) = f(x) && \text{se } \ 0 \leq x \leq \ell,\\
&u_t(x,0) = g(x) && \text{se } \ 0 \leq x \leq \ell,
\end{aligned} \tag{1.88}$$

isto é, vamos estudar os modos de vibração de uma corda homogênea de comprimento ℓ situada sobre o eixo dos x, com origem no ponto de abscissa zero e extremidade ℓ. Nesta equação c é a velocidade de propagação das ondas, considerada constante e $u(x,t)$, a variável dependente, representando a elongação (o deslocamento de um ponto da corda a partir da posição de equilíbrio $u=0$). Como as extremidades são fixas, as condições de contorno $u(0,t)=u(\ell,t)=0$ são as condições de Dirichlet. Para as condições iniciais consideradas

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad \text{se} \;\; 0 \leq x \leq \ell, \\ u_t(x,0) &= g(x) \quad \text{se} \;\; 0 \leq x \leq \ell, \end{aligned}$$

temos que $f(x)$ e $g(x)$ correspondem[18], respectivamente, ao deslocamento inicial e à velocidade inicial do ponto da corda com abscissa x.

Definição 1.2 Dizemos que uma função $u : \bar{\Re} \to \mathbb{R}$ é uma solução do problema da corda vibrante, se u é contínua em $\bar{\Re} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ell \text{ e } t \geq 0\}$, $u \in C^2(\Re)$ e u satisfaz todas as condições iniciais e de contorno.

Vamos procurar soluções da forma

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{1.89}$$

onde a função $\varphi(x)$ depende somente da variável x e $\psi(t)$ depende somente da variável t.

Introduzindo a equação (1.89) na equação de onda (1.88), obtemos

$$\varphi(x)\psi''(t) = c^2\varphi''(x)\psi(t)$$

donde

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}. \tag{1.90}$$

É importante notar que o lado esquerdo da equação (1.90) depende apenas de x, enquanto que o lado direito depende apenas de t. Isso só pode ser possível se,

[18] Este é um *problema bem posto* visto que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados iniciais [12].

na verdade, ambos os lados forem independentes de x e t, isto é,

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \lambda$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante de separação.

Portanto o problema se reduz a resolver duas equações diferenciais ordinárias:

- A equação diferencial de segunda ordem, para $0 < x < \ell$

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0. \tag{1.91}$$

- A equação diferencial de segunda ordem, para $t > 0$

$$\psi''(t) - \lambda c^2\psi(t) = 0. \tag{1.92}$$

Na equação (1.91), como $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$, a função $\varphi(x)$ deve satisfazer também às condições de contorno

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0. \tag{1.93}$$

De fato, a condição $u(0,t) = 0$ implica que $\varphi(0)\psi(t) = 0$ para todo $t > 0$, o que por sua vez implica que $\varphi(0) = 0$ (a menos que $\psi(t) = 0$ para todo t, o que significa que $u \equiv 0$, uma solução que não nos interessa). De modo semelhante, a condição $u(\ell,t) = \varphi(\ell)\psi(t) = 0$ implica em $\varphi(\ell) = 0$.

As condições de contorno (1.93) restringem as soluções da equação (1.91) fato que limitará os possíveis valores de λ.

Primeiro caso. Se $\lambda > 0$, a solução geral da equação (1.91) é da forma

$$\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

As condições de contorno (1.93) implicam que as constantes reais c_1 e c_2 devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} = 0 \end{cases} \tag{1.94}$$

A única solução do sistema (1.94) é $c_1 = c_2 = 0$, o que implica $\varphi \equiv 0$ e, portanto $u \equiv 0$, o que não nos interessa.

Segundo caso. Se $\lambda = 0$, a solução geral da equação (1.91) é da forma

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2,$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. As condições de contorno (1.93) implicam que as constantes reais c_1 e c_2 devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \ell + c_2 = 0 \end{cases} \tag{1.95}$$

cuja única solução é $c_1 = c_2 = 0$, implicando em $\varphi \equiv 0$ e novamente $u \equiv 0$, o que também não nos interessa.

Terceiro caso. Se $\lambda < 0$, fazemos $\lambda = -\mu^2$, e a solução geral da equação (1.91) é da forma $\varphi(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \operatorname{sen}(\mu x)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

As condições de contorno (1.93) implicam que as constantes c_1 e c_2 devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \operatorname{sen}(\mu \ell) = 0 \end{cases} \tag{1.96}$$

Como não nos interessa $c_2 = 0$, devemos ter $\operatorname{sen}(\mu\ell) = 0$, o que implica $\mu\ell = n\pi$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um inteiro positivo qualquer. Portanto, a equação (1.91) satisfazendo às condições de contorno (1.93) possui solução não nula apenas para uma coleção enumerável de valores de μ dados por

$$\mu_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \tag{1.97}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$. A cada μ_n^2 corresponde uma solução $\varphi_n(x)$ definida por

$$\varphi_n(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \tag{1.98}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$ e onde os A_n são constantes arbitrárias independentes de x.

Um problema como o da equação (1.91), dependendo do parâmetro λ e das condições de contorno (1.93), denomina-se um problema de Sturm-Liouville[19]. Os valores de λ aos quais correspondem soluções não nulas do problema denominam-se autovalores e as respectivas soluções não nulas são chamadas autofunções. No presente caso, os autovalores são os $\mu_n^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ e $\varphi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right)$ com $n = 1, 2, 3, \ldots$ são as autofunções [10].

Portanto, o método de separação de variáveis transformou o problema (1.88) da equação da corda vibrante com extremidades fixas, num problema de Sturm-Liouville.

Agora a equação (1.92) toma a forma

$$\psi''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{\ell^2}\psi(t) = 0, \tag{1.99}$$

cuja solução geral é

$$\psi_n(t) = B_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + C_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right), \tag{1.100}$$

onde B_n e C_n são constantes arbitrárias independentes de t.

Logo, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, temos que as soluções da equação (1.88) que satisfazem às condições de contorno são as funções

$$u_n(x,t) = \varphi(x)\psi(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right], \tag{1.101}$$

onde $a_n = A_nB_n$ e $b_n = A_nC_n$ são constantes arbitrárias [7].

A equação da onda unidimensional é homogênea, isto é, se $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ são soluções da equação diferencial parcial $u_{tt} = c^2u_{xx}$, então $a\,u_1(x,t) + b\,u_2(x,t)$ também o é, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Além disso, se elas satisfazem as condições de contorno homogêneas $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$, então $a\,u_1(x,t) + b\,u_2(x,t)$ também satisfaz [2].

Portanto, qualquer expressão da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t), \tag{1.102}$$

[19]Jacques Charles François Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1882), matemáticos franceses.

onde c_n são constantes e os u_n são as funções definidas em (1.101), é um candidato a solução da equação da onda (1.88) satisfazendo às condições iniciais e de contorno.

Mesmo que a condição inicial $f(x)$ não seja uma combinação linear de senos, Fourier teve a idéia de tomar *séries infinitas*, considerando que toda função pode ser escrita como uma série infinita de senos. Admitindo que, para certos coeficientes bem determinados a_n, $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

chamada a *série de Fourier em senos de* $f(x)$, temos que o candidato a solução da equação (1.88) é a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \tag{1.103}$$

onde os coeficientes a_n e b_n, são determinados utilizando as condições iniciais.

Introduzindo a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, se $0 \leq x \leq \ell$, na equação (1.103) temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{1.104}$$

Usando a ortogonalidade das funções seno, e admitindo que a série seja absolutamente convergente, temos que a_n é o coeficiente de ordem n da série de Fourier (ímpar) de $f(x)$, ou seja,

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx. \tag{1.105}$$

Quanto à constante b_n, derivando termo a termo a série (1.103) em relação à variável t, obtemos

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) \left[-a_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

Como $u_t(x,0) = g(x)$, segue que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{1.106}$$

Logo,

$$\frac{cn\pi}{\ell}b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell g(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx.$$

de onde obtemos

$$b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^\ell g(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \tag{1.107}$$

que são os coeficientes da série de Fourier em senos de g.

O método de Fourier culmina com a indicação do candidato a solução *formal* do problema (1.88)[20].

Observe que o candidato a solução (1.103), não é produto de duas funções de uma variável, uma dependendo apenas de x e outra dependendo apenas de t (ele é na realidade soma de produtos de funções de uma variável). Portanto devemos supor que pode ou não ser correto tentar resolver a EDP (1.88) pelo método de separação de variáveis para a maioria das condições iniciais, a não ser que elas sejam múltiplas de $\text{sen}\,(n\pi x/\ell)$. Mas, usando a linearidade da equação de onda, pudemos usar a solução obtida através do método de separação de variáveis e a partir dela construir a solução geral da equação. Este é um método freqüentemente usado em ciências exatas: simplificar um problema complexo através de uma suposição que, em geral, não é válida, mas a partir da solução para o problema simplificado, construir a solução para o problema "complicado".

Vamos considerar um caso concreto em que $g(x) = 0$. Neste caso, $b_n = 0$ donde obtemos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{1.108}$$

Utilizando uma conveniente relação trigonométrica, podemos escrever

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}\left[\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}\left[\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\right]$$

ou seja, como a soma de duas séries de Fourier, ambas obtidas através da extensão periódica ímpar de $f(x)$, com período 2ℓ, que vamos denotar por $F(x)$. Os coeficientes a_n no primeiro e segundo termos são os coeficientes de Fourier

[20] Ver referência [7].

da série $F(x)$, para os argumentos $(x-ct)$ e $(x+ct)$, respectivamente, pelo que podemos escrever

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[F\left(x-ct\right)+F\left(x+ct\right)\right] \tag{1.109}$$

A interpretação do resultado (1.109) tem um significado útil nas aplicações de Engenharia. $F\left(x-ct\right)$ representa uma onda que se desloca para a direita, enquanto que $F\left(x+ct\right)$ representa uma onda que se desloca para a esquerda, quando t aumenta. Assim, $u(x,t)$ não é mais do que a superposição destas duas ondas [14].

Vamos considerar agora outro caso em que $u(x,0)=0$ e $u_t(x,0)=g(x)$, com $g(x)$ contínua e com derivada $g'(x)$ contínua em $[0,\ell]$. Para tal, primeiramente, consideremos o teorema:

Teorema 1.1 Seja u contínua, periódica com período 2ℓ, derivável com derivada u' contínua por partes em $[-\ell,\ell]$. Se $u\left(-\ell\right)=u\left(\ell\right)$, então a série de Fourier de u converge para u uniforme e absolutamente em $[-\ell,\ell]$[21].

Vamos tomar $g(x)$, periódica com período 2ℓ. Para que esta função esteja nas condições do Teorema 1.1, falta apenas a condição $g(-\ell)=g(\ell)$ e que $g(x)$ seja bem definida também no zero. Consegue-se isso simplesmente supondo-se $g(0)=g(\ell)=0$. Nestas condições temos,

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{1.110}$$

sendo

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx. \tag{1.111}$$

Das condições estabelecidas resulta que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell}{cn\pi}\,b_n\operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{1.112}$$

converge uniformemente em $[0,\ell]$, $t>0$ e define uma função $v(x,t)$, isto é,

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell}{cn\pi}\,b_n\operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{1.113}$$

[21] A demonstração deste teorema pode ser encontada na referência bibliográfica [10].

Mostra-se que $v(x,t)$, dada na equação (1.113) é solução do problema

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx} && \text{se } \ 0 < x < \ell \ \text{ e } \ t > 0,\\
&u(0,t) = u(\ell,t) = 0 && \text{se } \ t \geq 0,\\
&u(x,0) = 0 && \text{se } \ 0 \leq x \leq \ell,\\
&u_t(x,0) = g(x) && \text{se } \ 0 \leq x \leq \ell.
\end{aligned}$$

Utilizando as condições iniciais e a equação (1.109), obtemos

$$v_t(x,t) = \frac{1}{2}\left[g\left(x-ct\right) + g\left(x+ct\right)\right]$$

ou

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t g\left(x-cs\right)ds + \frac{1}{2}\int_0^t g\left(x+cs\right)ds,$$

de onde resulta

$$v(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds,$$

que satisfaz as condições iniciais e de contorno, como pode ser verificado.

No exemplo dado, consideramos dois casos particulares e chegamos a duas soluções distintas para o problema da corda vibrante. No caso particular em que $g(x) = 0$, obtivemos

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F\left(x-ct\right) + F\left(x+ct\right)\right].$$

Agora, quando consideramos $f(x) = 0$, a solução encontrada foi

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Destes resultados segue que a solução geral do problema (1.88), é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f\left(x-ct\right) + f\left(x+ct\right)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, \tag{1.114}$$

que é a chamada fórmula de d'Alembert.

1.9 Existência e unicidade de solução para a equação de onda

A existência de uma solução geral é próprio das equações diferenciais ordinárias e é excepcional para as equações diferenciais parciais. A equação de onda é uma EDP atípica, no sentido de que ela possui uma solução geral. Vamos provar que a função (1.103), é de fato a única solução do problema (1.88).

1.9.1 Existência

Para discutir a existência é preciso especificar não somente a classe de funções onde procuramos solução mas também em que sentido as condições de contorno e iniciais são satisfeitas. Então, para adotar a expressão (1.103) com coeficientes (1.105) e (1.107) como solução do problema (1.88), temos que mostrar

i) que a série (1.103) converge;

ii) define uma função contínua em $\bar{\Re}$;

iii) define uma função de classe C^2 em $\Re$, que seja solução do problema (1.88);

iv) quais as condições sobre f e g para que, respectivamente, (1.104) e (1.106) ocorram,

onde $\Re$ designa a faixa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < \ell,\ t > 0\}$. Isto será feito com o resultado do teorema a seguir.

Teorema 1.2 Suponha que f e g sejam funções dadas em $[0,\ell]$ tais que f, f', f'', g, g' sejam contínuas e f''' e g'' são seccionalmente contínuas. Além disso, suponha que $f(0) = f(\ell) = f''(0) = f''(\ell) = g(0) = g(\ell) = 0$. Então

a) a_n e b_n estão bem definidos por (1.105) e (1.107), respectivamente;

b) as igualdades (1.104) e (1.106) ocorrem;

c) a expressão (1.103) define uma função contínua em $\bar{\Re}$, de classe C^2 em $\Re$, que satisfaz o problema (1.88) em $\Re$.

Prova. A parte (a) é conseqüência imediata do fato de serem f e g contínuas em $[0,\ell]$, o que implica que as integrais em (1.105) e (1.107) convergem. A parte (b) decorre das hipóteses de serem f e g de classe C^1 em $[0,\ell]$ e de que $f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell) = 0$. Pois, então, f e g podem ser estendidas continuamente a toda a reta de modo a serem funções ímpares e periódicas de período 2ℓ[22].

Na parte (c) para mostrar que u é contínua em $\bar{\Re}$, vamos mostrar que a série que define u converge uniformemente em $\bar{\Re}$. Para provar isso pelo teste[23] M de Weierstrass[24] (1815 – 1897) basta mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) \tag{1.115}$$

é convergente. Integrando por partes duas vezes e usando as hipóteses que f é de classe C^2 e que $f(0) = f(\ell) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \\
&= \frac{2}{\ell}\left[-\frac{\ell}{n\pi}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell f'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\ell f'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\ell}{n\pi}f'(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell f''(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\right] \\
&= -\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\int_0^\ell f''(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx.
\end{aligned}$$

[22] Ver referência [7].

[23] Ver referência [7].

[24] Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, matemático alemão.

Como pelo lema[25] de Riemann-Lebesgue[26]

$$\int_0^\ell f''(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

segue que existe uma constante C independente de n tal que

$$|a_n| \leq \frac{C}{n^2}. \tag{1.116}$$

Analogamente, integrando por partes uma vez e usando as hipóteses que g é de classe C^1 e $g(0) = g(\ell) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{cn\pi}\int_0^\ell g(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \\ &= \frac{2}{cn\pi}\left[-\frac{\ell}{n\pi}g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell g'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right] \\ &= \frac{2\ell}{cn^2\pi^2}\int_0^\ell g'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx, \end{aligned}$$

de modo que concluímos também que existe uma constante C independente de n tal que

$$|b_n| \leq \frac{C}{n^2}. \tag{1.117}$$

Segue dos coeficientes (1.116) e (1.117) que a série (1.115) converge, logo u é contínua em $\bar{\Re}$.

Se integrarmos a_n por partes, mais uma vez e usarmos as hipóteses $f''(0) = f''(\ell) = 0$ e que f''' é contínua por partes, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\left[\frac{\ell}{n\pi}f''(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell f'''(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\right] \\ &= -\frac{2\ell^2}{n^3\pi^3}\int_0^\ell f'''(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = -\frac{2\ell^2}{n^3\pi^3}c_n, \end{aligned} \tag{1.118}$$

onde c_n são os coeficientes de Fourier de f'''.

---

[25] Ver referência [4].

[26] Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941), matemático francês.

Da mesma forma, integrando b_n por partes mais uma vez e utilizando a hipótese que g'' é contínua por partes, obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2\ell}{cn^2\pi^2}\left[\frac{\ell}{n\pi}g'(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell g''(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\right] \\ &= \frac{2\ell^2}{cn^3\pi^3}\int_0^\ell g''(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \qquad (1.119) \\ &= -\frac{2\ell^2}{cn^3\pi^3}\,d_n \end{aligned}$$

onde d_n são os coeficientes de Fourier de g''.

Sendo f''' e g'' contínuas por partes, temos pelo lema de Riemann-Lebesgue que

$$c_n \ \text{ e } \ d_n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

logo segue dos coeficientes (1.118) e (1.119) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|a_n| \leq \frac{C}{n^3} \qquad \text{e} \qquad |b_n| \leq \frac{C}{n^3}$$

logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

converge, o que prova que u é de classe C^1 em $\Re$ e que podemos derivar a série que define u termo a termo para obter

$$u_x(x,t) = \frac{\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n\text{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right], \qquad (1.120)$$

e

$$u_t(x,t) = \frac{c\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\text{sen}\left[-a_n\,\text{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right]\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \qquad (1.121)$$

Usando os coeficientes (1.118) e (1.119) novamente, podemos escrever

$$|a_n| \leq \frac{C}{n^3}|c_n| \qquad \text{e} \qquad |b_n| \leq \frac{C}{n^3}|d_n|.$$

Enfim, usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$, temos

$$n^2|a_n| \leq \frac{C}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|c_n|^2\right),$$

$$n^2|b_n| \leq \frac{C}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|d_n|^2\right).$$

Daí, segue-se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(|a_n|+|b_n|\right) \leq \frac{C}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2\right]. \tag{1.122}$$

Como as três séries do lado direito da expressão (1.122) são convergentes, as duas últimas pela desigualdade de Bessel[27], segue que u é de classe C^2 em $\Re$ e que podemos derivar as séries (1.120) e (1.121) termo a termo para obter as derivadas segundas de u:

$$u_{xx}(x,t) = -\frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right],$$

$$u_{tt}(x,t) = -\frac{c^2\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right].$$

Em particular, temos que $u_{tt}(x,t) = c^2u_{xx}(x,t)$, isto é, (1.103) é solução do problema (1.88).

1.9.2 Unicidade

A demonstração de unicidade para o problema da corda vibrante pode ser feita, dentre outras maneiras, através da mudança de variável $\xi = x+ct$, $\eta = x-ct$, ou através de integrais de energia. O primeiro método não funciona para dimensão $n>1$. Vamos então provar a unicidade usando integrais de energia, que é um método que funciona em geral.

[27]Ver referência [7].

Em geral, vamos considerar a equação de onda em uma dimensão espacial, no caso das vibrações livres

$$u_{tt} = c^2\, u_{xx}, \tag{1.123}$$

onde $u = u(x,t)$ e $c^2 =$ constante, isto é, vamos supor que a corda seja homogênea ($\rho(x) =$ constante) e que as vibrações tenham amplitudes pequenas ($\tau(t) =$ constante).

O problema básico associado a esta equação é o problema (1.88), cuja solução $u = u(x,t)$ satisfaz as condições de Dirichlet $u(0,t) = u(\ell,t) = 0,\ t > 0$ e às condições iniciais $u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 < x < \ell$, onde f e g são funções dadas.

Neste ponto, vamos definir a energia associada à solução u no instante t, ou energia da corda vibrante.
Seja $u = u(x,t)$ uma solução do problema (1.88). Ainda mais, vamos supor que u seja uma função de classe C^1 em $\bar{\Re}$ e classe C^2 em $\Re$ e que satisfaça ao problema (1.88) em $\Re$, onde $\Re = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < \ell,\ t > 0\right\}$.

Multiplicando a equação (1.123) por u_t e integrando com relação a x entre 0 e ℓ, temos

$$\int_0^\ell u_{tt}\, u_t\, dx = \int_0^\ell c^2\, u_{xx}\, u_t\, dx. \tag{1.124}$$

Observando que $u_{tt}\, u_t = \dfrac{1}{2}\, \left(u_t^2\right)_t$ e realizando a integração por partes do segundo membro da equação (1.124), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell u_t^2\, dx = c^2\, u_x\, u_t\Big|_0^\ell - \int_0^\ell c^2\, u_x\, u_{tx}\, dx, \tag{1.125}$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^\ell u_t^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell c^2\, u_x^2\, dx\right] = c^2\, u_x\, u_t\Big|_0^\ell, \tag{1.126}$$

chamada equação da energia. A expressão

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell u_t^2\, dx \tag{1.127}$$

é a energia cinética da corda e

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell c^2\, u_x^2\, dx \tag{1.128}$$

é a energia potencial da corda e $E(t) = K(t) + V(t)$ é a energia total da corda.

Das condições do problema (1.88), onde $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$, temos que $u_t(0,t) = u_t(\ell,t) = 0$. Assim a equação (1.126) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^\ell u_t^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell c^2\, u_x^2\, dx\right] = 0$$

o que implica que a energia $E(t)$ é constante com o tempo. Tem-se assim, um *princípio de conservação da energia* para o fenômeno de vibração da corda com extremidades fixas, e sem ação de forças externas.

O princípio da conservação da energia nos permite obter a unicidade de solução do problema (1.88). De fato, vale o resultado para o problema a seguir:

Teorema 1.3 A solução do problema geral da onda, se existe, é única:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} + k(x,t) & \text{em } \Re \\ u(0,t) = h_1(t) & \text{se } t \geq 0, \\ u(\ell,t) = h_2(t) & \text{se } t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \ell, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \ell, \end{array} \tag{1.129}$$

onde h_1 e h_2 são funções de classe C^2 em $\Re$, f é função de classe C^1 em $\Re$ e g e k são funções de classe C em $\Re$.

Prova. Suponha que u_1 e u_2 sejam duas soluções do problema (1.129). Entende-se por solução uma função de classe C^2 em $\Re$ e contínua em $\bar{\Re}$ que satisfaz a todas as relações em (1.129). Este fato requer as seguintes relações de compatibilidade entre os dados iniciais e os de contorno: $h_1(0) = f(0)$, $h_2(0) = g(\ell)$. É fácil ver que a função $u = u_1 - u_2$ é de classe C^2 em $\Re$, contínua em $\bar{\Re}$ e satisfaz ao seguinte problema, o qual é do tipo (1.88):

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2\, u_{xx} & \text{se } \; 0 < x < \ell \; \text{ e } \; t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{se } \; t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{se } \; 0 \leq x \leq \ell, \end{array}$$

É claro que a energia inicial é $E(0) = 0$. Logo, pelo princípio da conservação da energia,

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell c^2\, u_x^2(x,t)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell u_t^2(x,t)\, dx = 0,$$

o que implica que $u_t(x,t) = u_x(x,t) = 0$, para (x,t) em $\Re$.
Logo, $u(x,t) =$ constante em $\Re$. Usando a continuidade de u, em $\bar{\Re}$, e as condições iniciais, concluímos que $u = 0$ em $\bar{\Re}$, ou seja $u_1 = u_2$. Tem-se, assim, a unicidade de solução no problema (1.129) [7].

Referências Bibliográficas

[1] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, Elsevier/Campus, Rio de Janeiro, (2007).

O tema do livro é a teoria matemática sob a ótica das aplicações à física. Assim, em cada capítulo os autores procuram relacionar o assunto em questão a certos conceitos da física. O livro é bastante abrangente e apresenta os principais métodos matemáticos usados na resolução dos problemas de física. Nele encontramos seções sobre métodos não-lineares e probabilidade. Trata-se de um texto que pretende ser um compêndio sobre a matemática básica necessária a um estudante das disciplinas da física.

[2] R. J. Biezuner, *Introdução às Equações Diferenciais Parciais*, Notas de Aula, UFMG, (2005).

Estas Notas de Aula estão divididas em nove capítulos onde destacamos: séries de Fourier, estudos das equações da onda, do calor, EDPs bidimensionais, equação de Laplace e transformada de Fourier.

[3] Carmen Lys Ribeiro Braga, *Notas de Física Matemática*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2006).

Estas notas de aulas apresentam um texto adequado a um curso básico de Física-Matemática. O tratamento de numerosas aplicações da teoria é uma característica marcante destas notas de aula.

[4] E. Capelas de Oliveira, Ary O. Chiacchio e Jayme Vaz Jr., *Equações Diferenciais Métodos Analíticos e Aplicações*, Imecc, Campinas, (2007).

Elaborado para alunos de matemática, matemática aplicada, física, química ou engenharia, esse livro é ideal para resolver alguns dos problemas básicos dessas disciplinas, que precisam do conhecimento das diferentes técnicas associadas à solução de equações diferenciais lineares ordinárias e parciais.

[5] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Maiorino, *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada*, Editora Unicamp, Campinas, (2003).

Elaborado para alunos de matemática, matemática aplicada, física, química ou engenharia, esse livro é ideal para resolver alguns dos problemas básicos dessas disciplinas, que precisam do conhecimento das diferentes técnicas associadas à solução de equações diferenciais lineares ordinárias e parciais.

[6] E. Capelas de Oliveira e M. Tygel, *Métodos Matemáticos para Engenharia*, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2005).

O livro tem como tema central a obtenção de soluções analíticas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e lineares de segunda ordem, bem como das equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem conhecidas como equações do potencial, do calor e da onda.

[7] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).

Este livro tem como objetivo central a resolução de equações da Física-Matemática, tais como, as equações do calor e das ondas. Nele, as ferramentas básicas usadas são as séries e a transformada de Fourier.

[8] D. Greenspan, *Introduction to Partial Differential Equations*, Dover Publications Inc., New York, (2000).

Este livro é destinado a estudantes graduados em matemática, física e engenharias. Ele explora métodos práticos para resolver equações diferenciais parciais e os tópicos nele incluídos são: conceitos básicos, séries de Fourier, equações diferenciais de segunda ordem, equação de onda, equação do potencial e solução aproximada de equações diferenciais parciais.

[9] V. Iório, *EDP Um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).

Trata-se de uma introdução ao estudo das equações diferenciais parciais dirigida aos alunos universitários que já completaram a seqüência de cálculo. Devido à natureza essencialmente clássica das equações diferenciais parciais, existe uma escolha padrão de tópicos que devem ser cobertos em qualquer curso introdutório. Além destes, o livro introduz, em uma linguagem simples, o conceito de ondas de choque para equações de primeira ordem, um assunto que tem sido objeto de pesquisa recente e é de fundamental importância no estudo da dinâmica de fluidos.

[10] L. A. Medeiros e N. G. de Andrade, *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, Editora LTC, Rio de Janeiro, (1978).

Este livro foi dividido em três capítulos com destaque no primeiro capítulo para a EDP para pequenas oscilações de uma corda e de uma membrana aplicando os métodos de d'Alembert e Fourier. O segundo capítulo é dedicado ao estudo da equação de transferência de calor e o último apresenta o problema de Dirichlet.

[11] D. J. Pamplona da Silva, *Sobre Um Tipo de Equação Diferencial Parcial*, Projeto de Iniciação Científica, (PIBIC-CNPq), Imecc-Unicamp, (2001).

O projeto consiste de um estudo das equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, com coeficientes constantes, classificando-as quanto à possibilidade de redução à forma canônica. Também discute as EDPs de segunda ordem com coeficientes não constantes, ou equações do tipo misto, conhecidas como equação de Tricomi.

[12] I. G. Petrovsky, *Lectures on Partial Differential Equations*, Dover Publications Inc., New York, (1991).

Este livro oferece rigorosa classificação das equações diferenciais parciais, hiperbólicas, elípticas e parabólicas. Comentários ricos e profundos de valor inestimável para a compreensão dos problemas considerados no texto.

[13] E. Romão Martins e E. Capelas de Oliveira, *Equações Diferenciais, Método de Separação de Variáveis e os Sistemas de Stäckel*, Imecc, Textos Didáticos, Vol. 4, (2006).

Este trabalho envolve alguns tipos de equações diferenciais parciais associados a problemas que surgem dos mais diversos ramos das ciências naturais. Foi escrito no sentido de utilizar, na solução de EDPs, o método de separação de variáveis de modo a conduzir uma EDP a um conjunto de EDOs.

[14] K. R. Symon, *Mecânica*, Editora Campus, Rio de Janeiro, (1996).

O livro aborda elementos de mecânica newtoniana, movimento unidimensional de uma partícula; movimento de uma partícula em duas e três dimensões, movimento de um sistema de partículas, corpos rígidos, rotação, estática, gravitação, sistemas de coordenadas em movimento, introdução à mecânica dos meios contínuos; equações de Lagrange, álgebra tensorial, teoria das pequenas vibrações, teoria da relatividade e dinâmica relativista.

Capítulo 2

Equação do Telégrafo

2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos utilizar as leis das malhas e dos nós de Kirchhoff[1] $(1824-1887)$ [8], para introduzir as funções diferença de potencial instantâneo e corrente instantânea, considerados ao longo de um fio condutor. Com estas funções, utilizando algumas hipóteses, vamos obter a chamada equação do telégrafo, que é uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólico (exceto numa situação particular onde se torna do tipo parabólico). A partir da equação do telégrafo, vamos discutir casos particulares de interesse físico e de interesse apenas histórico, devido à impossibilidade de ocorrência.

Historicamente, cientistas como Heaviside, Kirchhoff, Poincaré[2] $(1854-1912)$ e Thomson[3] $(1824-1907)$ entre outros, dedicaram-se ao estudo da propagação de ondas de corrente e de tensão em cabos, que é um problema que se faz presente na transmissão de informações. Nosso propósito é partir de hipóteses teóricas e chegar à equação do telégrafo, que foi obtida primeiramente por Heaviside.

Uma linha de transmissão é caracterizada por meio de tensão elétrica e da

[1]Gustav Robert Kirchhoff, físico alemão.

[2]Jules Henri Poncaré, matemático, físico e filósofo da ciência francês.

[3]William Thomson (Lord Kelvin), físico, matemático e engenheiro irlandês.

corrente elétrica. Ela representa um elemento de circuito capaz de conduzir energia elétrica de um ponto a outro, que pode ser utilizado para transmitir sinais entre um transmissor e um receptor, por exemplo.

2.2 Equações gerais de tensão e corrente instantâneas

Nesta seção vamos utilizar as leis de Kirchhoff para estudar aspectos da propagação, no tempo, de ondas eletromagnéticas numa linha de transmissão, constituída por um fio condutor. Incluímos a determinação da velocidade de propagação e os efeitos da resistência $R\Delta x$, da indutância $L\Delta x$, da capacitância $C\Delta x$ e da condutância $G\Delta x$, associados ao fio, considerados constantes.

No Capítulo 1, estudamos efeitos importantes associados às ondas numa corda vibrante. Estes efeitos são propriedades de todos os fenômenos ondulatórios e, portanto, estarão presentes também em ondas eletromagnéticas. Relembrando, temos que a equação diferencial parcial que rege a propagação de uma onda transversal em uma corda pode ser expressa por

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \tag{2.1}$$

com $u = u(x,t)$, onde c é a velocidade de propagação da onda no meio e está associada a $\tau = \tau(t)$, força que tensiona a corda que é função apenas de t, e $\rho = \rho(x)$, sua densidade linear, $c = \sqrt{\tau(t)/\rho(x)}$.

Podemos verificar que, para $\omega = kc$,

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{i(kx-wt)}$$

é uma solução da equação (2.1) e que $\mathrm{e}^{i(kx-wt)}$ pode ser transformada numa combinação linearmente independente de senos e co-senos. Assim, uma conveniente solução para esta equação é a chamada função de onda

$$u(x,t) = u_0 \,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t) \tag{2.2}$$

onde u_0 é a amplitude da onda, $k = 2\pi/\lambda$ é o número de ondas e $\omega = 2\pi f$ representa a freqüência angular. Entre a velocidade de propagação da onda, a freqüência f e o comprimento de onda λ, admitamos a relação

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda f. \tag{2.3}$$

Quando uma onda, ao propagar-se, encontra um obstáculo em seu caminho, ela sofre, dentre outros fenômenos observáveis, a reflexão. No caso de uma corda, por exemplo, o comportamento do pulso de onda ao longo de seu caminho varia segundo o tipo de obstáculo que ele encontra. Se a extremidade da corda está fixa, o pulso de onda, ao ser refletido, mantém todas as suas características iniciais, porém sofre inversão de fase de π rad. Se a extremidade da corda puder mover-se, então nenhuma alteração é observada na fase do pulso refletido com relação ao pulso incidente, a não ser pela mudança no sentido de propagação da onda.

Uma situação intermediária, na qual a extremidade da corda não se encontra rigidamente presa e nem é mantida completamente livre, corresponde ao caso em que duas cordas de densidades lineares diferentes encontram-se unidas. Um pulso de onda percorrendo uma corda de menor densidade, ao atingir o ponto de união com uma corda de maior densidade, é em parte refletido com inversão de fase e é em parte transmitido. Porém, se o pulso de onda está inicialmente percorrendo a corda de maior densidade, o pulso refletido terá mesma fase. O pulso transmitido sempre tem a mesma fase do pulso incidente, qualquer que seja o caso.

Com respeito às ondas eletromagnéticas, sendo conduzidas através de um fio, por exemplo, podemos verificar comportamentos semelhantes aos verificados acima. Certamente há um campo eletromagnético, mas estamos interessados com ondas de diferença de potencial e corrente na linha [1].

Na determinação das equações de tensão e corrente instantâneas, equações características de uma linha de transmissão, vamos considerar um gerador ligado a uma carga e, de toda a linha, considerar o circuito equivalente de uma seção Δx representado na Figura 2.1.

Nesse circuito, $C\Delta x$ e $G\Delta x$ são, respectivamente, a capacitância e a con-

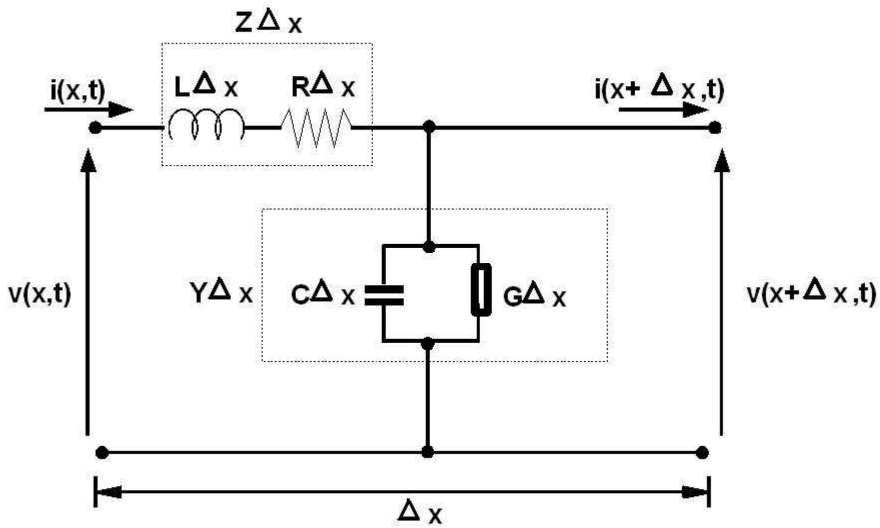

Figura 2.1: Circuito de uma linha de transmissão: uma seção Δx.

dutância da linha, que constituem, quando associados em paralelo, a admitância $Y\Delta x$ do circuito e, $R\Delta x$ e $L\Delta x$ são as respectivas resistência e indutância da linha que, por sua vez, quando associados em série, constituem a impedância $Z\Delta x$. Então, uma linha de transmissão pode ser representada como uma associação de infinitas seções de impedância em série e admitância em paralelo [9]. No circuito, $i(x,t)$ e $v(x,t)$ representam, respectivamente, a corrente elétrica e a tensão elétrica em cada instante.

Circulando na malha do circuito e aplicando a lei das malhas de Kirchhoff no comprimento da linha Δx, temos

$$v(x,t) = L\Delta x \frac{\partial}{\partial t} i(x,t) + R\Delta x i(x,t) + v\left(x+\Delta x, t\right). \tag{2.4}$$

Rearranjando os termos da equação (2.4), podemos escrever

$$\frac{v\left(x+\Delta x,t\right) - v\left(x,t\right)}{\Delta x} = -L\frac{\partial}{\partial t} i(x,t) - Ri(x,t). \tag{2.5}$$

Tomando o limite da equação (2.5), isto é, fazendo $\Delta x \to 0$, então ela toma a seguinte forma

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{v\left(x+\Delta x,t\right) - v\left(x,t\right)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = -L\frac{\partial}{\partial t} i(x,t) - Ri(x,t). \tag{2.6}$$

Temos assim uma primeira equação diferencial parcial extraída do circuito em estudo que relaciona a tensão com a corrente num determinado ponto da linha.

O objetivo que pretendemos atingir é o de descobrir equações que separadamente traduzam o comportamento da tensão e da corrente na linha. No entanto a equação (2.6) tem duas incógnitas i e v sendo, portanto, necessário encontrar outra equação de modo a formar um sistema com duas equações e duas incógnitas. Aplicando a lei dos nós no mesmo circuito podemos escrever

$$i(x,t) = G\Delta x v\left(x+\Delta x,t\right) + C\Delta x v\left(x+\Delta x,t\right) + i\left(x+\Delta x,t\right), \tag{2.7}$$

que pode ser conduzida à equação

$$\frac{i\left(x+\Delta x,t\right) - v\left(x,t\right)}{\Delta x} = -Gv\left(x+\Delta x,t\right) - Cv\left(x+\Delta x,t\right). \tag{2.8}$$

Tomando o limite da equação (2.8), isto é, fazendo $\Delta x \to 0$, então ela toma a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial x} i(x,t) = -Gv(x,t) - C\frac{\partial}{\partial t} v(x,t). \tag{2.9}$$

Temos agora uma segunda equação diferencial parcial que também relaciona a tensão com a corrente no circuito[4]. As equações (2.6) e (2.9) são as equações que regem todo o comportamento elétrico da linha. Elas formam um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, linear e homogêneo, com coeficientes constantes. Observe que para a obtenção do sistema não utilizamos, em nenhum momento, condições iniciais e de contorno, podendo estas serem utilizadas em estudos particulares [6].

Note-se que as equações (2.6) e (2.9) nada nos dizem sobre a forma da corrente e da tensão, mas sim apenas a relação entre ambas e a dependência destas com os parâmetros distribuídos. A equação (2.6) afirma que uma variação temporal na corrente, causa uma variação na distribuição do potencial (nas vizinhanças). A recíproca é verdadeira e é garantida pela equação (2.9) [7].

[4]F. M. Oliveira Costa, *Ondas em Linhas de Transmissão Problema Fundamental* (Dissertação apresentada à congregação da Escola Nacional de Engenharia, Universidade do Brasil), Rio de Janeiro, (1949).

2.3 Equação do telégrafo

As equações (2.6) e (2.9) não são geralmente apresentadas nesta forma, mas são manipuladas. Isto é, diferenciando a primeira equação em relação a t, a segunda em relação a x e eliminando o termo de derivada mista, temos

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0, \tag{2.10}$$

onde $i = i(x,t)$ e $v = v(x,t)$.

Agora, substituindo $\dfrac{\partial}{\partial x}v(x,t) = -L\dfrac{\partial}{\partial t}i(x,t) - Ri(x,t)$ na equação (2.10) obtemos

$$i_{xx} = (CL)i_{tt} + (CR + GL)i_t + (GR)i, \tag{2.11}$$

com $i = i(x,t)$.

A tensão também tem sua própria equação, que é dada por

$$v_{xx} = (CL)v_{tt} + (CR + GL)v_t + (GR)v, \tag{2.12}$$

com $v = v(x,t)$.

Esta equação é conhecida como equação de linha de transmissão ou equação do telégrafo, ou ainda como equação de Heaviside para a tensão v e é uma equação do tipo hiperbólico de segunda ordem, exceto se C ou L são nulos, quando, neste caso, torna-se uma equação do tipo parabólico[5] [2]. Ela foi estudada por Lord Kelvin em 1855 em conexão com o cabo submarino transatlântico de telégrafo, atraindo a atenção de Kirchhoff em 1857, de Heaviside em 1876 e du Bois Reymond[6] $(1831 - 1889)$ em 1889 tendo sido tornada conhecida, em geral, quando estudada por Poincaré em 1893. Em 1889, du Bois Reymond e Poincaré resolveram esta equação por meio do método de Riemann [4].

Fazendo algumas considerações, a equação (2.12) pode ser posta numa forma mais conveniente. Assim, dividindo a equação (2.12) por LC ($L > 0$ e $C > 0$),

[5] Ver Seção 1.6.

[6] Paul David Gustav du Bois Reymond, matemático alemão.

temos

$$\left(\frac{1}{LC}\right) v_{xx} = v_{tt} + \left(\frac{CR+GL}{LC}\right) v_t + \left(\frac{GR}{LC}\right) v$$

ou

$$c^2\, v_{xx} = v_{tt} + \left(\frac{CR+GL}{LC}\right) v_t + \left(\frac{GR}{LC}\right) v, \tag{2.13}$$

onde $c^2LC = 1$.

Na equação (2.13), quando não existem perdas, isto é, considerando todos os elementos constantes $R = 0, L > 0, C > 0$ e $G \neq 0$ ela se reduz a

$$c^2 v_{xx} - v_{tt} - b v_t = 0 \tag{2.14}$$

onde $v = v(x,t)$, $c^2LC = 1$ e $b = G/C$, que se denomina equação de ondas amortecidas [5].

O fenômeno físico associado a equação (2.14) é o das pequenas vibrações transversais de uma corda uniforme quando existe uma força de amortecimento[7].

Introduzindo as características

$$\xi = x + ct \qquad \text{e} \qquad \eta = x - ct$$

a equação (2.14) se transforma em

$$v_{\xi\eta} - m\,(v_\xi - v_\eta) = 0$$

onde $m = \dfrac{b}{4c}$.
Sob a transformação $v = \mathrm{e}^{-m(\xi-\eta)}\phi$ ela pode ser escrita na forma

$$\phi_{\xi\eta} + m^2\phi = 0, \tag{2.15}$$

que foi a equação integrada pelo método de Riemann por du Bois.

[7]Ver equação (1.86).

2.4 Casos especiais

No Capítulo 1 resolvemos o problema da corda vibrante com extremidades fixas[8], e obtivemos a solução

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, \qquad (2.16)$$

chamada solução de d'Alembert para a equação de onda.

Nesta seção vamos analisar o comportamento físico das equações (2.11) e (2.12) em certos casos particulares das grandezas R, L, G e C, contemplanto com isso, casos de interesse físico e casos de interesse histórico.

2.4.1 Linha de transmissão com resistividade e condutividade lateral infinitamente pequenas

Na equação (2.12), se desprezarmos as perdas através das oscilações e se a resistência é muito pequena ($G \approx R \approx 0$), obtemos a equação das oscilações [10],

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} \qquad (2.17)$$

onde $c^2 LC = 1$. A solução da equação (2.17) é a solução de d'Alembert para a equação de onda unidimensional.

2.4.2 Linha de transmissão na condição de Heaviside

Considerando a equação da corrente (2.11) e fazendo $i(x,t) = u\,\mathrm{e}^{-\mu t}$, onde $\mu = \frac{1}{2}(CR - GL)/CL$, obtemos para u a equação

$$u_{xx} = CLu_{tt} + \bar{c}\,u,$$

[8]Ver problema (1.88).

onde $u = u(x,t)$ e $\bar{c} = -\left(CR - LG\right)^2/4$. Observa-se que para $CR \neq LG$, o sinal transmitido tem deformação, visto que temos dispersão das ondas [10].

A condição

$$CR = LG \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

chama-se condição de ausência de deformação na linha. Neste caso, a equação do telégrafo admite uma solução na forma de onda amortecida

$$i(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} f(x - ct) \tag{2.18}$$

onde $\gamma = \dfrac{R}{L} = \dfrac{G}{C}$, $c^2 LC = 1$ e $f = f(x,t)$ é uma função arbitrária.

A ausência da deformação das ondas em sua propagação através de uma linha de trasmissão tem uma importância fundamental para a comunicação telegráfica e telefônica em grandes distâncias [10]. Olivier Heaviside provou que a resistividade e a condutância lateral de uma linha de transmissão não são problemas tão graves na telegrafia a longas distâncias[9]. Assim, combinando adequadamente R, L, G e C, obtemos

$$v_{xx} = (LC) v_{tt} \tag{2.19}$$

ou seja, os pulsos propagados na linha de transmissão não sofrem atenuações [3].

2.4.3 Linha de transmissão sem capacitância e/ou sem indutância

Neste caso temos três possibilidades, a saber:

1. $C = 0$ e $L = 0$
2. $C = 0$ e $L \neq 0$
3. $C \neq 0$ e $L = 0$

Estas hipóteses não podem ser encontradas em circuitos reais. Nos casos 2 e 3 a equação do telégrafo passa e ser escrita, respectivamente na forma:

[9] Ver O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Chelsea Publishing, N.Y., (1971).

para $C = 0$ e $L \neq 0$ $\rightarrow$ $v_{xx} = (GL)v_t + (GR)v$

e

para $C \neq 0$ e $L = 0$ $\rightarrow$ $v_{xx} = (RC)v_t + (GR)v$.

onde $v = v(x,t)$. Estas equações são semelhantes às equações de difusão de calor[10].

No caso 1, para $C = 0$ e $L = 0$ $\rightarrow$ $v_{xx} = (GR)v$.

Nestes três casos temos que, nos limites propostos, a velocidade de propagação de um pulso de tensão na linha de transmissão tende ao infinito (as equações mudam de tipo, passam a ser parabólicas).

2.4.4 Cabo na condição de Thomson

Para este caso temos

$$L = G = 0.$$

Outra vez temos aqui uma equação parabólica quando consideramos esta condição. Transformamos a equação (2.12) para a forma:

$$v_{xx} = RCv_t$$

onde $v = v(x,t)$. Esta forma, conhecida como *equação de Fourier* tem importância apenas histórica, pois a hipótese $L = 0$ é pouco provável fisicamente. William Thomson, o primeiro a obtê-la, levou em conta no equacionamento que somente havia resistência e capacitância por unidade de comprimento [7].

2.4.5 Linha de transmissão de corrente contínua

Neste caso, a intensidade de corrente e a tensão não variam com o tempo. Logo as equações (2.11) e (2.12) se tornam, respectivamente,

$$i_{xx} = RG\,i \qquad \text{e} \qquad v_{xx} = RG\,v$$

o que mostra que i e v são soluções de equações diferenciais ordinárias.

[10]Ver Seção 1.1.

2.4.6 Cabo submarino

Neste caso admitimos que o isolamento seja muito bom, o que se traduz em supor que $G = 0$. Além disso supomos que a freqüência ω de corrente alternada é muito baixa. Teríamos $v(x,t) = \psi(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$, onde ψ e a amplitude da onda, com ω pequeno. Daí

$$v_{tt} = -\omega^2\psi(x)\mathrm{e}^{i\omega t} = -i\omega v_t = o(v_t)$$

onde $o(v_t)$ significa um resíduo desprezível. Segue que, num modelo aproximado, v_{tt} pode ser desprezado em presença de v_t. Conseqüentemente

$$i_{xx} = RC\, i_t \qquad \text{e} \qquad v_{xx} = RC\, v_t$$

que são EDPs do tipo difusão de calor [3].

Referências Bibliográficas

[1] D. R. Cornejo, *Física para Engenharia Elétrica, Linhas de Transmissão*, encontrado em *http : //plato.if.usp.br fap2293d/LAB2293_6.pdf*, (2007).

Trabalho experimental ressaltando aspectos da propagação de ondas eletromagnéticas numa linha de transmissão, incluindo a determinação da velocidade de propagação, efeitos da impedância e efeitos associados à terminação do cabo.

[2] S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineering*, Dover Publications, Inc., New York, (1993).

Livro útil para estudantes e profissionais que trabalham com ciências aplicadas. Mostra como formular e resolver equações diferenciais parciais. Destacando problemas do tipo hiperbólico e elíptico envolvendo métodos numéricos e método de aproximação, além de métodos analíticos.

[3] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).

Este livro tem como objetivo central a resolução de equações da Física-Matemática, tais como, as equações do calor e das ondas. Nele, as ferramentas básicas usadas são as séries e a transformada de Fourier.

[4] G. M. de La Penha, *Introdução ao Método de Riemann em Problemas de Contorno do Tipo Hiperbólico a Duas Variáveis*, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, (1976).

Neste livro podemos destacar os seguintes assuntos: geometria riemaniana, variáveis, funções hiperbólicas, matemática para engenharia e problema de condições de contorno.

[5] L. A. Medeiros e N. G. de Andrade, *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, (1978).

Este livro foi dividido em três capítulos com destaque no primeiro capítulo para a EDP associada a pequenas oscilações de uma corda e de uma membrana aplicando os métodos de d'Alembert e Fourier. O segundo capítulo é dedicado ao estudo da equação de transferência de calor e o último apresenta o problema de Dirichlet.

[6] C. A. B. Mendes e H. J. da Silva, *Teoria das Linhas de Transmissão*, encontrado em *http://www.deetc.isel.ipl.pt/sistemastele/Pr1/Arquivo/Sebeuta/Linhas/II_teoria.pdf*, (2005).

Trabalho sobre linha de transmissão apresentando as equações gerais e particulares de tensão e corrente a partir dos parâmetros capacitância, indutância, resistência e condutância, denominados parâmetros distribuídos. Analisa a impedância ao longo da linha de transmissão e o coeficiente de reflexão.

[7] L. Prado Jr., *Sobre a Equação do Telégrafo e o Método de Riemann*, Relatório Técnico 16/91, Imecc, Campinas, (1991).

Apresenta a equação do telégrafo e o método de Riemann aplicado à equação do telégrafo. Vários casos particulares são discutidos fisicamente.

[8] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus, Rio de Janeiro, (1982).

Desde o seu aparecimento em 1960, este livro tornou-se texto obrigatório na matéria para alunos de Física. Desenvolveu-se o presente volume através do ensino em cursos de eletricidade e magnetismo para alunos de Física no

Case Institute of Tecnology e no Dartmouth College. Um curso de eletromagnetismo é bastante adequado para um desenvolvimento dos conceitos de análise vetorial, equações diferenciais parciais e problemas com valores de contorno. As seções que envolvem estas técnicas estão escritas de tal forma que para compreendê-las faz-se necessário apenas um pequeno conhecimento prévio do seu conteúdo.

[9] J. C. Sartori, *Linhas de Transmissão e Carta de Smith: Projeto Assistido por Computador*, EESC-USP, São Carlos, (1999).

A estrutura deste livro é dividida em duas partes bem distintas: a primeira trata de uma revisão sobre linhas de transmissão, dando prioridade aos aspectos físicos e práticos. A segunda aborda a carta de Smith incluindo sua construção e aplicações, empregando recursos gráficos convencionais.

[10] A. N. Tijonov e A. A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editora Mir, Moscou, (1980).

Livro destinado a estudantes de ciências e engenharias, dedicado às EDPs. Este livro está ligado ao estudo de diferentes processos físicos, dos quais citamos os estudos da hidrodinâmica, da teoria da elasticidade, da eletrodinâmica entre outros. Os problemas matemáticos apresentados contêm muitos elementos comuns e formam o objeto de estudo da Física-Matemática.

Capítulo 3

Método de Riemann

3.1 Introdução

Uma primeira solução geral do problema de Cauchy[1] $(1789 - 1857)$ para uma ampla classe de equações hiperbólicas foi apresentada por Riemann no chamado método de Riemann contido no artigo[2] *Sobre a propagação no ar de ondas planas de amplitude finita*. Embora este método tenha sido introduzido para um tipo especial de equações, o mesmo cobre na realidade, qualquer EDP linear em duas variáveis, do tipo hiperbólico. O método foi difundido em sua forma geral nas *Leçons sur La Théorie des Surfaces*[3] de Darboux[4] $(1842 - 1917)$. Existem extensões do método, a um número finito de variáveis, porém, quase sempre restritas a certas formas particulares das equações [2].

Neste capítulo vamos utilizar o método de Riemann para encontrar uma fórmula integral para a solução do problema de Cauchy, em função dos dados.

[1] Augustin Louis Cauchy, matemático francês.

[2] B. Riemann, *Über die Fortfanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Abhandl. Königl. Ges. Wiss. Göttingen **8**, (1860). Tradução francesa: *Oeuvres Mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris (1898).

[3] J. G. Darboux, *Leçons Sur La Théorie des Surfaces*, Gauthiers-Villars, Paris, (1887).

[4] Jean Gaston Darboux, matemático francês.

O método será aplicado ao estudo da equação associada às vibrações transversais de uma corda elástica, que é uma equação do tipo hiperbólico, chegando-se à fórmula de d'Alembert. Finaliza-se o capítulo aplicando o método de Riemann ao estudo da equação do telégrafo.

3.2 O Método de Riemann

O método de Riemann permite calcular explicitamente a solução do problema de Cauchy associado ao operador linear L em função dos dados de Cauchy sobre uma curva Γ, sendo

$$Lu = u_{xy} + au_x + bu_y + cu, \tag{3.1}$$

onde a, b e c são funções das variáveis independentes x e y, diferenciáveis num domínio Ω do $\mathbb{R}^2$.

O problema de Cauchy consiste em determinar uma solução $u = u(x, y)$ da equação $Lu = f$, sendo $f = f(x, y)$, em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$, contendo no seu interior um arco de curva regular Γ. Supõe-se que Γ não intercepte cada característica de $Lu = f$ em mais de um ponto e que sejam conhecidos os valores de u e u_x sobre Γ. Assim, o problema de Cauchy consiste em determinar $u = u(x, y)$ definida em Ω satisfazendo as condições:

$$\begin{aligned} &Lu = f \qquad \text{em} \quad \Omega \\ &u\big|_{\Gamma} = \varphi(x) \ , \ u_x\big|_{\Gamma} = \psi(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

com $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ conhecidos [3].

Segue-se que, como está posto, a equação (3.2) é do tipo hiperbólico com as duas famílias de curvas características[5] dadas por

$$y - x = c \qquad e \qquad y + x = c$$

[5] Ver Subseções (1.6.1) e (1.6.2).

com $c =$ constante. Além disso, considerando a curva Γ regular e não interceptando cada característica em mais de um ponto, então o problema de Cauchy (3.2) possui uma única solução.

Nesta seção será exposto o método de Riemann permitindo calcular a solução do problema (3.2) em função dos dados e da função de Riemann associada ao chamado operador adjunto de L. Em outro momento apresentamos aplicações ao problema da corda vibrante e à equação do telégrafo.

3.2.1 Operadores lineares adjuntos

Vamos estabelecer fórmulas auxiliares, que nos servirão para a representação das soluções dos problemas de contorno em forma integral. Para tanto seja $v = v(x, y)$, uma função real de classe $C^1(\Omega)$. Podemos escrever as identidades:

$$
\begin{aligned}
vu_{xy} &- uv_{xy} = (vu_x)_y - (uv_y)_x,\\
vau_x &= (avu)_x - u(av)_x,\\
vbu_y &= (bvu)_y - u(bv)_y.
\end{aligned}
$$

Das identidades descritas, resulta:

$$vLu - uMv = U_x + V_y \tag{3.3}$$

onde M é o chamado operador adjunto de L, dado por

$$Mv = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \tag{3.4}$$

enquanto que

$$U = avu - uv_y, \tag{3.5}$$

$$V = bvu + vu_x. \tag{3.6}$$

Definição 3.1 Dois operadores lineares L e M são chamados de conjugados, se a diferença

$$vLu - uMv$$

é a soma de derivadas parciais em relação às variáveis independentes x e y de certas expressões U e V.

Considerando a equação (3.3) e a Definição 3.1 temos que os operadores L e M são considerados, evidentemente, conjugados. Em particular, se $Lv = Mu$, o operador L se chama auto adjunto.

A partir do teorema de Green[6] $(1793 - 1841)$, obtemos que a integral dupla da diferença $vLu - uMv$ sobre certa região Ω, delimitada pelo contorno Γ liso por partes, é igual a

$$\iint_{\Omega} (vLu - uMv)\, dxdy = \iint_{\Omega} (U_x + V_y)\, dxdy = \int_{\Omega} (Udy - Vdx) \qquad (3.7)$$

onde u e v são funções arbitrárias deriváveis duas vezes. A equação (3.7) é chamada fórmula de Gauss[7] $(1777 - 1855)$ ou fórmula de Riemann-Green [5].

3.2.2 Problema de Cauchy para EDP lineares de 2ª ordem do tipo hiperbólico em duas variáveis

Para solucionar o problema de Cauchy vamos considerar a Figura 3.1. Seja uma porção da curva Γ representada pelo arco QR. Seja P de coordenadas (x_0, y_0) e tracemos as características por P encontrando Γ nos pontos Q e R. As linhas PQ e PR são paralelas aos eixos x e y, respectivamente e em nenhum ponto entre Q e R uma tangente à curva QR é paralela aos eixos coordenados. Supõe-se Γ decrescente para $x > 0$ e $y > 0$ e possuindo tangentes em todos os seus pontos.

[6]George Green, matemático e físico inglês.

[7]Johann Carl Friedrich Gauss, matemático, astrônomo e físico alemão, conhecido como o *principe dos matemáticos* e considerado por muitos como o maior gênio da história da matemática.

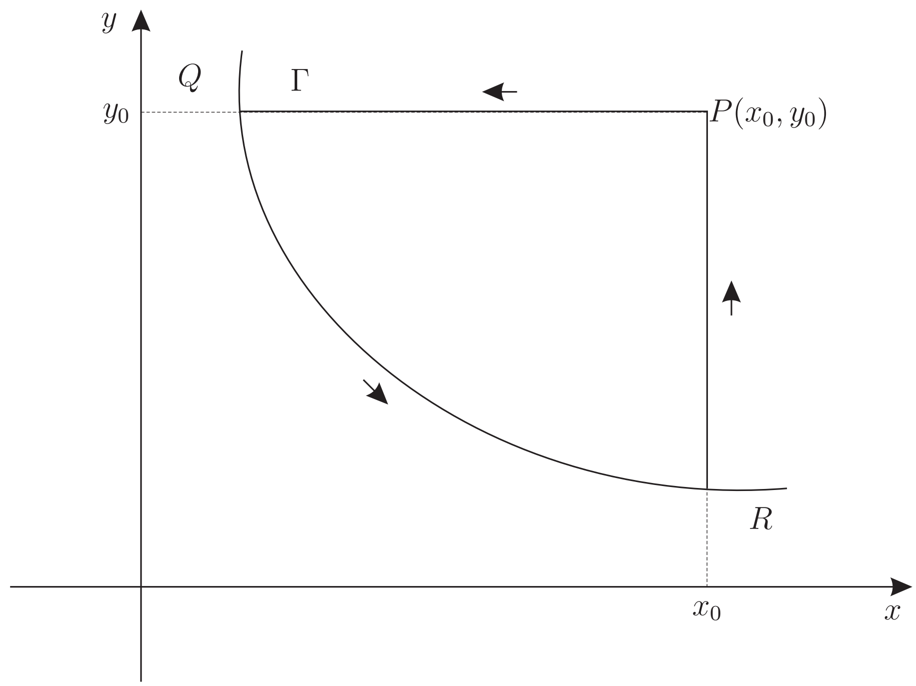

Figura 3.1: Caminho tomado para integração.

Estamos interessados na solução da equação diferencial parcial não homogênea

$$Lu = f \tag{3.8}$$

onde u e f são funções das variáveis independentes x e y e considerando que são dadas as condições de Cauchy ao longo da curva Γ.

Usando a fórmula de Green na região Ω limitada por PQR, orientada no sentido anti-horário, o segundo membro pode ser decomposto em três integrais ao longo de QR, RP e PQ, respectivamente. Tem-se, levando em conta as componentes da normal aos dois últimos segmentos:

$$\int_{\Omega} (Udy - Vdx) = \int_{Q}^{R} (Udy - Vdx) + \int_{R}^{P} Udy + \int_{P}^{Q} Vdx. \tag{3.9}$$

Como $V = buv + vu_x$ temos

$$\int_{P}^{Q} Vdx = \int_{P}^{Q} buvdx + \int_{P}^{Q} vu_x dx. \tag{3.10}$$

Integrando o termo $\int_P^Q vu_x dx$, por partes, obtemos

$$\int_P^Q vu_x dx = uv\Big|_P^Q - \int_P^Q uv_x dx = uv\big|_Q - uv\big|_P - \int_P^Q uv_x dx.$$

Voltando à equação (3.10) podemos escrever

$$\int_P^Q V dx = uv\big|_Q - uv\big|_P + \int_P^Q u(bv - v_x)dx. \tag{3.11}$$

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.9) e lembrando que $U = u(av - v_y)$ e $vLu - uMv = U_x + V_y$ obtemos

$$\begin{aligned} uv|_P &= uv|_Q + \int_P^Q u\,(bv - v_x)\,dx - \int_R^P u\,(av - v_y)\,dy + \\ &+ \int_Q^R (Udy - Vdx) + \iint_\Omega (vLu - uMv)\,dxdy. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Aqui chegamos ao ponto mais significativo do método de Riemann. Escolhemos a função $v(x, y; x_0, y_0)$ como sendo a solução da equação adjunta $Mv = 0$, satisfazendo as condições

$$\begin{aligned} &v_x = bv && \text{onde } \ y = y_0 \\ &v_y = av && \text{onde } \ x = x_0 \\ &v = 1 && \text{onde } \ x = x_0 \quad \text{e} \quad y = y_0. \end{aligned}$$

Esta solução $v(x, y; x_0, y_0)$ da equação adjunta é chamada de *função de Riemann* do problema de Cauchy (3.2) para Lu.

Como $Lu = f$ reduzimos a equação (3.12) a

$$u|_P = uv|_Q - \int_Q^R uv(ady - bdx) + \int_Q^R (uv_y dy + vu_x dx) + \iint_\Omega vf dxdy. \tag{3.13}$$

A equação (3.13) fornece o valor de u no ponto P, onde u e u_x são descritos ao longo da curva Γ. Analisando a equação (3.13) observa-se que u é conhecida em R e Q. Além disso, as funções U e V são conhecidas sobre QR porque u, u_x e u_y também o são. Assim, a equação (3.13) fornece explicitamente a solução do problema de Cauchy (3.2) para qualquer ponto P do domínio de existência fora de Γ, onde são conhecidos os dados de Cauchy [3].

Visto que u e u_x são descritas ao longo da curva Γ, podemos escrever:

$$uv\big|_R - uv\big|_Q = \int_Q^R \left[(uv)_x dx - (uv)_y dy\right]. \tag{3.14}$$

Podemos usar a equação (3.14) para encontrar outra relação de $u\big|_P$ a partir da equação (3.13):

$$u\big|_P = uv\big|_R - \int_Q^R uv(ady - bdx) - \int_Q^R (uv_x dx - vu_y dy) + \iint_\Omega vf dxdy. \tag{3.15}$$

Somando as equações (3.14) e (3.15) temos o valor u num ponto P dado:

$$\begin{aligned} u\big|_P &= \frac{1}{2}\left(uv\big|_Q + uv\big|_R\right) - \int_Q^R uv(ady - bdx) - \frac{1}{2}\int_Q^R u(v_x dx - v_y dy) + \\ &+ \frac{1}{2}\int_Q^R u(u_x dx - u_y dy) + \iint_\Omega vf dxdy. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A equação (3.16) é conhecida pelo nome de *fórmula de Riemann* para o problema de Cauchy [4].

3.3 Problema da corda vibrante

A equação diferencial parcial associada às vibrações transversais de uma corda elástica foi discutida no Capítulo 1. Representando por $u = u(x,t)$ a deformação da corda no instante t, temos o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad \text{em} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad \text{e} \qquad t > 0 \\ &u(x,0) = \varphi(x)\,,\; u_t(x,0) = \psi(x) \qquad \text{em} \qquad -\infty < x < +\infty, \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde c é uma constante positiva. Observa-se que os dados de Cauchy são sobre a curva

$$\Gamma = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \;;\; t = 0\right\}$$

isto é, o eixo dos x.

Usando o método de Riemann, inicialmente vamos fazer a mudança de coordenadas

$$\tau : (x,t) \to (X,Y)$$

sendo

$$X = x + ct \qquad \text{e} \qquad Y = x - ct \tag{3.18}$$

Por meio das novas coordenadas (3.18) a equação (3.17) é transformada em

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0 \tag{3.19}$$

onde $u = u(X,Y)$, que é uma equação diferencial parcial, do tipo hiperbólico, que está na primeira forma canônica[8], cujas curvas características são as retas

$$X = k \qquad \text{e} \qquad Y = k$$

onde k é constante.

A reta $t = 0$ é transformada pela mudança de variáveis (3.18), na bissetriz $Y = X$ dos quadrantes ímpares do plano $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (X,Y), conforme Figura 3.2.

Com esta transformação, as condições do problema de Cauchy (3.17) passam a ser

$$u(X,X) = \varphi(X), \quad u_t(x,0) = cu_X(X,X) - cu_Y(X,X) = \psi(X). \tag{3.20}$$

Assim, o problema de Cauchy (3.17) foi transformado no seguinte problema

$$\begin{aligned} &u_{XY} = 0 \\ &u(X,X) = \varphi(X) \quad \text{e} \quad cu_X(X,X) - cu_Y(X,X) = \psi(X) \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde φ e ψ são continuamente diferenciáveis em $-\infty < x < +\infty$.

Escrevendo a equação (3.21) utilizando o operador linear L , obtemos

$$Lu = u_{XY} = 0 \tag{3.22}$$

[8]Ver Subseção 1.6.2.

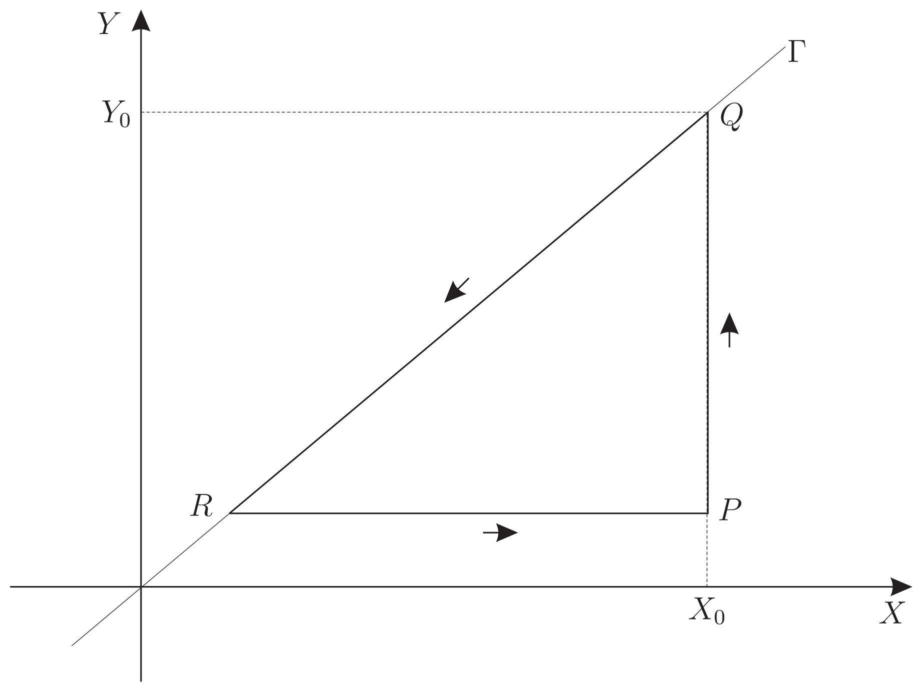

Figura 3.2: Caminho tomado para integração do problema (3.17).

onde, comparando à equação (3.1), temos $a = b = c = 0$, o que simplifica o problema. O operador adjunto de L é o operador M que atuando em v, fornece

$$Mv = v_{XY}. \tag{3.23}$$

Como $a = b = 0$, a função de Riemann v é $v\left(X, Y; X_0, Y_0\right) \equiv 1$. Em todo ponto, e, portanto, a solução é dada por

$$u\big|_P = \frac{1}{2}\left(u\big|_Q + u\big|_R\right) + \frac{1}{2c}\int_Q^R \left(u_X dX - u_Y dY\right). \tag{3.24}$$

Tem-se ainda que Q é o ponto (X, X) assim como R é o ponto (Y, Y). Logo, $u\big|_Q = u\left(X, X\right) = \varphi\left(X\right)$ e $u\big|_R = u\left(Y, Y\right) = \varphi\left(Y\right)$. Deste modo, P é o ponto (X, Y) e, portanto, a solução é

$$u\left(X, Y\right) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(X\right) + \varphi\left(Y\right)\right] + \frac{1}{2c}\int_X^Y \psi\left(\lambda\right) d\lambda.$$

Sendo $X = x + ct$ e $Y = x - ct$, obtemos, pelo método de Riemann, a solução explicita do problema de Cauchy (3.17):

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+ct\right)+\varphi\left(x-ct\right)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi\left(\lambda\right)d\lambda. \tag{3.25}$$

que é a chamada fórmula de d'Alembert ou solução de d'Alembert.

A solução geral da equação $u_{XT}=0$ pode ser escrita em várias formas, a mais simples delas é

$$u\left(X,T\right)=f\left(X-T\right)+g\left(X+T\right)$$

onde f e g são funções arbitrárias. Para resolver um problema de valor inicial em primeiro lugar temos que determinar f e g a partir dos dados iniciais. Isto, naturalmente, leva de volta à equação (3.24) que é normalmente obtida exatamente desta forma [1].

Observa-se que $\varphi\left(x-ct\right)$ é obtida de $\varphi\left(x\right)$ por meio de uma translação ct na direção positiva dos eixos dos x. Analogamente, $\varphi\left(x+ct\right)$ é obtida de $\varphi\left(x\right)$ por meio de uma translação $-ct$ na direção negativa dos eixos dos x. Portanto $\varphi\left(x-ct\right)$ é uma onda de configuração inicial $\varphi\left(x\right)$ que se propaga na direção positiva do eixo x, com velocidade de propagação c. Ela denomina-se onda progressiva. Semelhantemente, $\varphi\left(x+ct\right)$ é uma onda de configuração inicial $\varphi\left(x\right)$ que se propaga na direção negativa do eixo x, com velocidade de propagação c. Ela denomina-se onda regressiva. A solução de d'Alembert, quando $\psi=0$, é a média aritmética das duas ondas [3].

3.4 O método de Riemann e a solução da equação do telégrafo

Vimos no Capítulo 2 a equação que modela o fluxo de eletricidade em um fio metálico, a chamada equação do telégrafo, escrita na forma

$$v_{xx}=(LC)v_{tt}+(CR+GL)v_t+(GR)v, \tag{3.26}$$

onde $v = v(x,t)$ é a tensão instantânea e C, G, R e L são constantes. Trata-se de uma equação diferencial parcial linear do tipo hiperbólico, cuja solução será determinada utilizando o método de Riemann.

Tem-se que, em geral, nos problemas de Física-Matemática, procura-se a solução do problema de Cauchy fixando-se um dado instante quando o fenômeno começa a ser observado, por exemplo, escolhemos $t = 0$. Portanto, fixa-se v e v_t quando $t = 0$ [3]. Então a curva Γ associada ao problema de Cauchy é

$$\Gamma = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \; ; \; t = 0\right\}$$

onde $\mathbb{R}^2_+$ é o semi plano (x,t) com $t \geq 0$.
Estudamos nesta seção o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} &v_{xx} = (LC)v_{tt} + (CR + GL)v_t + (GR)v \;\text{ em } -\infty < x < +\infty \;\text{ e }\; t > 0, \\ &v(x,0) = \phi(x) \quad \text{e} \quad v_t(x,0) = \psi(x) \qquad \text{em} \qquad -\infty < x < +\infty, \end{aligned} \tag{3.27}$$

com $\phi(x)$ e $\psi(x)$ funções da variável independente x, continuamente diferenciáveis.

A derivada de primeira ordem pode ser eliminada por meio de uma simples substituição. Fazendo $v = u\,\mathrm{e}^{-[(CR+GL/2CL)]t}$, com $u = u(x,t)$, substituindo na equação (3.26) e manipulando os termos obtemos

$$u_{tt} = \left(\frac{1}{LC}\right) u_{xx} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 u, \tag{3.28}$$

que se denomina equação de ondas sob ação de força restauradora[9].

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\tau : (x,t) \qquad \rightarrow \qquad (X,Y)$$

introduzindo as variáveis características por

$$X = x + c\,t \qquad \text{e} \qquad Y = x - c\,t \tag{3.29}$$

onde $c^2LC = 1$, colocamos a equação (3.28) na primeira forma canônica das equações do tipo hiperbólico[10]

[9] Ver equação (1.87).
[10] Ver Seção 1.6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + ku = 0, \tag{3.30}$$

com $u = u(X,Y)$ e $k = \dfrac{16}{LC}\left(L^2G^2 - 2GRLC + R^2C^2\right)$.

Para saber como mudaram as condições iniciais, observe que a reta $t = 0$ do plano (x,t) é transformada, pelas novas variáveis (3.29), na bissetriz $Y = X$ dos quadrantes ímpares no plano (X,Y). Portanto, o problema de Cauchy para a equação (3.30) tem seus dados sobre a curva Γ que é a bissetriz $Y = X$, conforme Figura 3.2 [3]. Como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t},$$

então as condições iniciais do problema (3.27) mudam para

$$\begin{aligned} &u(X,Y) = u(X,X) = \phi\left(X\right), \\ &\left[u_X\left(X,X\right) - u_Y\left(X,X\right)\right] = \frac{1}{c}\,\psi\left(X\right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Devemos calcular, com a fórmula de Riemann (3.16), a solução do problema (3.30) com as condições (3.31) sobre a bissetriz $Y = X$. Necessitamos, então, calcular a função de Riemann do problema.

Escrevendo a equação (3.30) utilizando um operador linear L, temos

$$Lu = u_{XY} + ku = 0. \tag{3.32}$$

Observe que para a equação (3.32), tem-se $a = b = 0$, com a e b dados na equação (3.1). Então temos que um operador adjunto M associado ao operador L é da forma

$$MV = V_{XY} + kV \tag{3.33}$$

e a equação adjunta será:

$$V_{XY} + kV = 0. \tag{3.34}$$

Verifica-se que a equação (3.34) é auto-adjunta, visto que, $MV = Lu$ e deve portanto ser satisfeita pela função de Riemann V. Por conveniência definimos $\overline{X} = X - X_0$, $\overline{Y} = Y - Y_0$ e então, as condições impostas sobre V são:

$$V_{\overline{X}\,\overline{Y}} + kV = 0, \tag{3.35}$$

$$V_{\overline{X}} = 0 \qquad \text{em} \qquad \overline{Y} = 0, \tag{3.36}$$

$$V_{\overline{Y}} = 0 \qquad \text{em} \qquad \overline{X} = 0, \tag{3.37}$$

$$V(P) = 1. \tag{3.38}$$

As condições (3.36), (3.37) e (3.38) combinam-se requerendo que

$$V\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = 1 \qquad \text{com} \qquad \overline{X} = 0 \qquad \text{e} \qquad \overline{Y} = 0, \tag{3.39}$$

o que transforma o problema em um problema de características.

A função de Riemann pode ser obtida considerando-se o produto

$$\lambda = k\overline{X}\,\overline{Y}, \tag{3.40}$$

onde $\overline{X} = X - X_0$ e $\overline{Y} = Y - Y_0$, procurando-se a solução da equação (3.35) tal que

$$V(X, Y; X_0, Y_0) = \varphi(\lambda), \tag{3.41}$$

sendo $\varphi(0) = 1$. Fazendo-se a mudança de variáveis indicada pelo produto (3.40) na equação (3.35), obtém-se

$$\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2}\,\varphi(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}\,\varphi(\lambda) + \varphi(\lambda) = 0, \tag{3.42}$$

com a condição inicial $\varphi(0) = 1$. Trata-se de uma equação de Bessel na qual ponto $\lambda = 0$ é um ponto singular[11].

Calcula-se, a seguir, uma solução analítica da equação (3.42). Considera-se a série de potências

$$\varphi(\lambda) = 1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n + \cdots \tag{3.43}$$

cujos coeficientes são determinados de modo que a série (3.43) seja solução da equação (3.42). Substituindo-se a série (3.43) na equação (3.42), obtém-se a relação de recorrência[12]

$$n^2 a_n + a_{n-1} = 0. \tag{3.44}$$

[11]Ver Apêndice A.4.

[12]Ver método de Frobenius no Apêndice A.

Logo, a função de Riemann é

$$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} - \frac{\lambda^3}{(3!)^2} + \cdots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{(n!)^2}\,. \tag{3.45}$$

De modo explícito, tem-se

$$\begin{aligned} V\left(X, Y; X_0, Y_0\right) = 1 - \frac{k\left(X - X_0\right)\left(Y - Y_0\right)}{1^2} + \\ + \frac{\left[k\left(X - X_0\right)\left(Y - Y_0\right)\right]^2}{(2!)^2} - \cdots + \frac{(-1)^n\left[k\left(X - X_0\right)\left(Y - Y_0\right)\right]^n}{(n!)^2} \end{aligned} \tag{3.46}$$

que pode ser identificada com a função de Bessel de ordem zero[13], isto é,

$$V\left(X, Y; X_0, Y_0\right) = J_0\left[2\sqrt{k\left(X - X_0\right)\left(Y - Y_0\right)}\right]. \tag{3.47}$$

Deste resultado temos que

$$V_X = \frac{\sqrt{k}\left(X - Y_0\right)}{\sqrt{\left(X - X_0\right)\left(X - Y_0\right)}}\left[J_0'\left(\sqrt{4k\left(X - X_0\right)\left(X - Y_0\right)}\right)\right]$$

$$V_Y = \frac{\sqrt{k}\left(X - X_0\right)}{\sqrt{\left(X - X_0\right)\left(X - Y_0\right)}}\left[J_0'\left(\sqrt{4k\left(X - X_0\right)\left(X - Y_0\right)}\right)\right]$$

portanto,

$$V_X - V_Y = \frac{\sqrt{k}\left(X_0 - Y_0\right)}{\sqrt{\left(X - X_0\right)\left(X - Y_0\right)}}\left[J_0'\left(\sqrt{4k\left(X - X_0\right)\left(X - Y_0\right)}\right)\right], \tag{3.48}$$

ao longo de QR. Temos ainda que

$$uV\big|_Q = \phi(X_0) \qquad \text{e} \qquad uV\big|_R = \phi(Y_0), \tag{3.49}$$

$$\left[u_X\left(X, X\right) - u_Y\left(X, X\right)\right] = \frac{1}{c}\,\psi(X), \tag{3.50}$$

$$V(P) = 1. \tag{3.51}$$

Conhecida a função de Riemann (3.47) para a equação (3.30), podemos resolver o problema de Cauchy (3.27). A solução dada pela fórmula de Riemann (3.16) é:

---

[13] Ver Seção A.4.

$$
\begin{aligned}
u\big|_P &= \frac{1}{2}\left(uV\big|_Q + uV\big|_R\right) - \frac{1}{2}\int_Q^R u(V_X - V_Y)dX + \\
&+ \frac{1}{2}\int_Q^R V(u_X - u_Y)dX, \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

porque $a = b = 0$ e $dX = dY$ em QR.

Substituindo as relações (3.49), (3.50) e (3.51) na equação (3.52) obtemos

$$
\begin{gathered}
u(X_0, Y_0) = u\big|_P = \frac{1}{2}\left[\phi(X_0) + \phi(Y_0)\right] - \\
-\frac{1}{2}\int_Q^R \frac{\sqrt{k}\,(X_0 - Y_0)}{\sqrt{(\xi - X_0)(\xi - Y_0)}}\left[J_0'\left(\sqrt{4k\,(\xi - X_0)(\xi - Y_0)}\right)\right]\phi(\xi)d\xi + \\
+\frac{1}{2c}\int_Q^R J_0\left[\sqrt{4k\,(\xi - X_0)(\xi - Y_0)}\right]\psi(\xi)d\xi. \qquad (3.53)
\end{gathered}
$$

Repassando X_0 e Y_0 para X e Y e substituindo as variáveis originais obtemos a fórmula de d'Alembert

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x + ct) + \phi(x - ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(x,t,\xi)d\xi, \qquad (3.54)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
G(x,t,\xi) &= \frac{-2\sqrt{k}\,ct\,\phi(\xi)J_0'\left\{\sqrt{4k\left[(\xi - x)^2 - c^2t^2\right]}\right\}}{\sqrt{(\xi - x)^2 - c^2t^2}} + \\
&\quad +\psi(\xi)J_0\left\{\sqrt{4k\left[(\xi - x)^2 - c^2t^2\right]}\right\}.
\end{aligned}
$$

Temos aqui a solução para o problema (3.27). A solução da equação do telégrafo (3.26) é a solução (3.54) transformada de volta para $v(x,t)$, onde

$$
v(x,t) = u\,\mathrm{e}^{-[(CR+GL)/2LC]\,t},
$$

com $u = u(x,t)$.

Referências Bibliográficas

[1] R. Courant e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II Partial Differential Equations, John Wiley, New York, 1962.

Este livro é um clássico no qual Courant e Hilbert restauram as históricas e profundas ligações entre a física e a matemática, proporcionando ao leitor uma abordagem unificada para matemática e física.

[2] G. M. de La Penha, *Introdução ao Método de Riemann em Problemas de Contorno do Tipo Hiperbólico a Duas Variáveis*, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, (1976).

Neste livro podemos destacar os seguintes assuntos: geometria riemaniana, variáveis, funções hiperbólicas, matemática para engenharia e problema de condições de contorno.

[3] L. A. Medeiros, A. C. Biazutti e J. L. Ferrel, *Métodos Classicos em Equações Diferenciais Parciais*, Segunda Edição, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, (2005).

Este livro compõe-se de cinco capítulos. Um dedicado às EDPs no plano, estudo das características, classificação em tipos hiperbólicos, elípticos e parabólicos. Nas seções seguintes são estudadas cada um dos tipos acima. No caso hiperbólico estuda-se o problema de Cauchy, analisa-se o método de Riemann aplicando-o à equação do telégrafo. Na seção dedicada ao tipo elíptico são estudados os problemas de Dirichlet e Neumann. Conclui-se com o estudo das soluções analíticas das equações diferenciais parciais.

[4] L. Prado Jr., *Sobre a Equação do Telégrafo e o Método de Riemann*, Relatório Técnico 16/91, Imecc, SP, (1991).

Neste trabalho é apresentado o método de Riemann aplicado à equação do telégrafo. São apresentados casos particulares de interesse físico e de interesse apenas histórico.

[5] A. N. Tijonov e A. A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editoria Mir, Moscou, (1980).

Livro destinado a estudantes de Ciências e Engenharias, dedicado às EDPs. Este livro está ligado ao estudo de diferentes processos Físicos, dos quais citamos os estudos da Hidrodinâmica, da Teoria da elasticidade, da Eletrodinâmica entre outros. Os problemas matemáticos apresentados contêm muitos elementos comuns e formam o objeto de estudo da Física-Matemática.

Conclusões

Este trabalho foi formulado em termos de equações diferenciais. Como sabemos, elas são essenciais para quase todas as partes da física teórica, sendo que em algumas situações são equações diferenciais ordinárias, mas na maioria dos casos são equações diferenciais parciais, em duas variáveis, isto é, o espaço utilizado é o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, onde se situam as equações apresentadas.

As equações diferenciais que aparecem no texto, como aquela que expressa o problema das vibrações transversais de uma corda, ou as equações de tensão e corrente instantâneas numa linha de transmissão, apresentam algumas dificuldades na sua resolução. As soluções destas equações, obedecendo às condições de contorno e iniciais, não é uma tarefa fácil. Assim, para facilitar o estudo, apresentamos em um apêndice, o método de Frobenius, especificamente associado às equações de Bessel e Bessel modificada, voltado para as soluções das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem e homogêneas.

No Capítulo 1, deduzimos e apresentamos uma solução para o problema da corda vibrante, empregando o método de Fourier, desenvolvida em duas etapas: na primeira, utilizamos o método da separação de variáveis para obter equações diferenciais ordinárias, relacionadas com a equação diferencial parcial da corda. Nesta etapa, obtivemos famílias de soluções satisfazendo as condições dadas. Na segunda etapa, a solução do problema é apresentada como uma série cujos termos são produtos das soluções produzidas a partir da separação de variáveis, por coeficientes adequadamente escolhidos. Neste capítulo, além de apresentarmos o método de Fourier, também apresentamos a solução geral para o problema da corda vibrante obtida por d'Alembert. Detalhamos a existência da solução geral bem como provamos a unicidade desta solução.

O Capítulo 2 apresentou a equação do telégrafo expressa em termos de $v = v(x, t)$ ou $i = i(x, t)$ que representam, respectivamente, a tensão e a intensidade da corrente elétrica em um instante t, em um ponto x de uma linha de transmissão construída a partir de condutores feitos de metal. Para obter a equação diferencial parcial, conhecida por *equação do telégrafo*, analisamos parâmetros lineares constantes ao longo da linha de transmissão, todos tomados por unidade de comprimento: consideramos a resistência R, característica dos condutores, a indutância L justificada pelo surgimento dos campos magnéticos criados pela corrente elétrica (lei de Ampère[14] $(1775 - 1836)$) e a força eletromotriz retroativa induzida pelas vibrações nos campos criados (lei de Faraday[15] $(1791 - 1867)$). Além disso, os condutores agem como um capacitor, aparecendo assim certa capacitância C.

Como é impossível o perfeito isolamento dos condutores, apresentou-se também, certa condutância G, sendo que os dois primeiros, quando associados em série, constituem a impedância Z e os dois últimos, quando associados em paralelo, constituem a admitância Y. Com a utilização das leis de Kirchhoff chegamos à equação do telégrafo, que primeiramente foi estudada por William Thomson, em 1855, representada por uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem que é uma equação de onda. A solução desta equação foi obtida por Riemann e du Bois Reymond, em 1889. Casos particulares foram estudados, com destaque para as linhas de transmissão na condição de Heaviside (linha ideal) e de Thomson (importância histórica).

Este trabalho foi encerrado com a apresentação do método de Riemann, apresentado no Capítulo 3, aplicado especificamente no caso de equações diferenciais parciais lineares do tipo hiperbólico em duas variáveis. Este método pode ser estendido a EDPs lineares do tipo hiperbólico em qualquer número de variáveis, bem como a EDPs lineares elípticas em duas variáveis, desde que, neste caso, as discussões sejam feitas no plano complexo. No nosso caso, o método de Rie-

[14] André Marie Ampère, físico, filósofo, cientista e matemático francês.

[15] Michael Faraday, químico, físico e filósofo inglês.

mann foi utilizado na resolução do problema da corda vibrante e da equação do telégrafo que são problemas descritos por EDPs lineares do tipo hiperbólico, em duas variáveis.

No desenvolvimento deste estudo, ao mostrarmos as equações que norteiam a propagação de um sinal através de uma linha de transmissão, com destaque para a denominada *equação do telégrafo,* queremos ressaltar a importância de uma boa fundamentação teórica para o entendimento e o conseqüente desenvolvimento de modelos físicos experimentais, necessários para a melhoria dos sistemas existentes.

Abordagens para o aprofundamento dos aspectos teóricos podem sem encontrados em artigos recentemente publicados, dentre eles: *A Probability Method for the Solution of the Telegraph Equation with Real-Analytic Initial Conditions*[16], no qual é proposto um método para a construção de uma solução analítica do problema de Cauchy para a equação do telégrafo; *Analytic and Approximate Solutions of the Space- and Time-Fractional Telegraph Equations*[17], em que é proposto um método eficiente para resolver sistemas de equações diferenciais fracionárias associadas ao problema do telégrafo e *The Telegrapher's Equation*[18], artigo que trata das linhas de transmissão, nos seus aspectos históricos e, partindo de informações experimentais, nos aspectos físicos, incluindo uma vasta indicação bibliográfica. Virtualmente, podemos visualizar a propagação de uma onda numa linha de transmissão, observando *The Animated Telegraph Equation*[19], no qual se ilustra o comportamento das soluções da equação do telégrafo.

[16]Ver A. F. Turbin and I. V. Samoilenko, *Ukranian Math. J.*, **52**, 1292 – 1299, (2000).
[17]Ver S. Momani, *Appl. Math. Comput.* , **170**, 1126 – 1134, (2005).
[18]Ver http:// mysito.du.edu/ jcalvert/cable.html.
[19]Ver www.math.ubc.ca/ feldman/demos/demo8.html.

Apêndice A

Método de Frobenius

Neste apêndice apresentamos um estudo sistemático do método de Frobenius que consiste em procurar soluções linearmente independentes, em forma de série de potências, de equações diferenciais ordinárias, lineares, de segunda ordem. Discutimos, em particular, as soluções regulares na origem.

Neste trabalho, associamos o método de Frobenius especificamente às equações de Bessel e equações de Bessel modificadas, que aparecem em uma grande variedade de problemas físicos. Exemplificando, a separação da equação de onda, ou de Helmholtz, em coordenadas cilíndricas circulares, leva-nos à equação de Bessel. Estudamos os casos particulares do parâmetro, definimos a função gama e introduzimos as relações de recorrência bem como algumas de suas propriedades.

A.1 Introdução

Muitos problemas ligados à Física-Matemática podem ser equacionados em termos de equações diferenciais parciais, lineares, de segunda ordem que, na maioria das vezes, podem ser conduzidas a um conjunto de equações diferenciais ordinárias, lineares, de segunda ordem da forma

$$A(x)\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + B(x)\frac{d}{dx}\,y(x) + C(x)\,y(x) = 0. \tag{A.1}$$

Particularmente estamos interessados no caso em que a equação (A.1) tem os coeficientes $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ polinomiais e x é a variável independente.

Sabe-se que um polinômio é analítico para qualquer valor de x e uma função racional é analítica exceto nos pontos em que seu denominador se anula. Assim sendo, se $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ da equação (A.1) forem polinômios sem fatores em comum, ambas as frações racionais $P(x) = B(x)/A(x)$ e $Q(x) = C(x)/A(x)$ serão analíticas, exceto onde $A(x) = 0$. Então, se $A(x) \neq 0$ podemos colocar a equação (A.1) na forma padrão

$$\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + P(x)\frac{d}{dx}\,y(x) + Q(x)\,y(x) = 0. \tag{A.2}$$

Dentre muitas, podemos destacar a equação de Bessel de ordem υ

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + x\frac{d}{dx}\,y(x) + \left(x^2 - \upsilon^2\right)\,y(x) = 0. \tag{A.3}$$

onde υ é um parâmetro real ou complexo com parte real não-negativa e a equação de Legendre de ordem p

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) - 2x\frac{d}{dx}\,y(x) + p\,(p+1)\,y(x) = 0. \tag{A.4}$$

onde p é um parâmetro real ou complexo [5].

Apresentamos métodos de resolução da equação (A.1), por série de potências, na vizinhança de um ponto x_0, ou seja, fazendo uma análise local. Porém, antes de apresentarmos os procedimentos para a resolução destas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes não constantes, utilizando séries de potências, precisamos classificar o ponto x_0, objetivando indicar a natureza das soluções na vizinhança deste ponto.

A.2 Classificação dos pontos de EDOs

Vamos resolver a equação (A.1) por série de potências, em uma vizinhança de um ponto x_0, sabendo que a solução da equação (A.1) em um intervalo que contém x_0 está associada ao comportamento dos coeficientes $P(x) = B(x)/A(x)$ e $Q(x) = C(x)/A(x)$ neste intervalo. Para tanto, em primeiro lugar, devemos classificar o ponto x_0 como um ponto ordinário, singular regular ou singular irregular e então selecionar a forma apropriada para a série, tendo como base essa classificação.

A.2.1 Ponto ordinário

O ponto x_0 é um ponto ordinário de

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + P(x)\frac{d}{dx}\, y(x) + Q(x)\, y(x) = 0, \tag{A.5}$$

se as funções $P(x)$ e $Q(x)$ são analíticas em x_0, ou seja, admitem a representação em série de potências com centro $x = x_0$ e raio de convergência positivo R. Desta forma, valem as representações [6],

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, (x - x_0)^n\,, \qquad |x - x_0| < R_1, \tag{A.6}$$

e

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n\, (x - x_0)^n\,, \qquad |x - x_0| < R_2, \tag{A.7}$$

com R_1 e R_2 números positivos; caso contrário, x_0 é dito ponto singular da equação (A.5).

A.2.2 Ponto singular regular

O ponto x_0 é um ponto singular regular da equação (A.5) se

$$(x - x_0)\, P(x) \text{ é analítica em } x_0 \tag{A.8}$$

e

$$(x - x_0)^2\, Q(x) \text{ é analítica em } x_0, \tag{A.9}$$

isto é, se a singularidade dos coeficientes $P(x)$ e $Q(x)$ pode ser removida pela multiplicação, respectivamente, por $(x - x_0)$ e $(x - x_0)^2$.

A.2.3 Ponto singular irregular

Qualquer ponto singular da equação (A.5) que não seja um ponto singular regular é chamado de ponto singular irregular da equação (A.5).

A.2.4 Soluções na vizinhança de um ponto ordinário

Existem equações diferenciais lineares de segunda ordem cujas soluções não podem ser escritas sob forma simples, usando-se as funções conhecidas, tais como as funções algébricas, logarítmicas e trigonométricas. Usando séries de potências podemos obter uma representação válida das soluções destas equações.

Como um exemplo, vamos discutir a solução da equação

$$y'' - xy = 0 \tag{A.10}$$

com $y = y(x)$, conhecida como equação de Airy[1] $(1801 - 1892)$, encontrada, por exemplo, no estudo da difração da luz, difração de ondas de rádio em torno da superfície da Terra, aerodinâmica e deflexão de uma coluna vertical fina e uniforme que se inclina sobre seu próprio peso [9].

Para a equação (A.10), $A(x) = 1$, $B(x) = 0$ e $C(x) = -x$, logo, todo ponto é um ponto ordinário. Não existindo pontos singulares, o teorema (4.1) a seguir, garante solução $y(x)$ em série de potências centrada em zero, convergente para $|x| < \infty$ da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{A.11}$$

cujos coeficientes a_n precisam ser determinados.

Teorema A.1 Todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + P(x)\frac{d}{dx}\, y(x) + Q(x)\, y(x) = 0, \tag{A.12}$$

[1]George Biddell Airy, matemático e astrônomo inglês.

são analíticas em um ponto ordinário x_0, isto é, podem ser representadas na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \qquad |x - x_0| < R, \tag{A.13}$$

onde R é um número positivo. Mais ainda, vale que R é no mínimo igual ao menor dos raios de convergência R_1 e R_2, das expansões em série de potências centradas no ponto x_0, dos coeficientes da EDO, $P(x)$ e $Q(x)$ [6].

Voltando à equação (A.10) e substituindo $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e a derivada segunda

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n,$$

obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+1}. \tag{A.14}$$

Vamos mudar o índice da última série à direita na equação (A.14) substituindo n por $n-1$ e começando a somar a partir de 1 em vez de zero. Temos então

$$2.1.a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^n \tag{A.15}$$

ou

$$2.a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right] x^n = 0. \tag{A.16}$$

Para que esta equação seja satisfeita, para todo x, é necessário que os coeficientes de cada potência de x sejam igualados a zero, ou seja, $2a_2 = 0$ (coeficiente de x^0) donde $a_2 = 0$ e $(n+2)(n+1)a_n - 2a_{n-1} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ que nos leva à relação de recorrência

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \tag{A.17}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Essa relação gera coeficientes consecutivos da solução admitida, um de cada vez, à medida que fazemos n tomar os valores inteiros sucessivos indicados na relação (A.17):

$$
\begin{aligned}
&n = 1, \qquad a_3 = \frac{a_0}{2.3}\\
&n = 2, \qquad a_4 = \frac{a_1}{3.4}\\
&n = 3, \qquad a_5 = \frac{a_2}{4.5} = 0 \quad (a_2 = 0)\\
&n = 4, \qquad a_6 = \frac{a_3}{5.6} = \frac{1}{2.3.5.6}\ a_0\\
&n = 5, \qquad a_7 = \frac{a_4}{6.7} = \frac{1}{3.4.6.7}\ a_1\\
&n = 6, \qquad a_8 = \frac{a_5}{7.8} = 0 \quad (a_5 = \ 0)\\
&n = 7, \qquad a_9 = \frac{a_6}{8.9} = \frac{1}{2.3.5.6.8.9}\ a_0\\
&n = 8, \qquad a_{10} = \frac{a_7}{9.10} = \frac{1}{3.4.7.9.10}\ a_1\\
&n = 9, \qquad a_{11} = \frac{a_8}{10.11} = 0 \quad (a_8 = 0)
\end{aligned}
$$

concluímos que $a_2 = a_5 = a_8 = \cdots = 0$.

Para a seqüência $a_3, a_6, a_9, \ldots$ é conveniente escrever a fórmula a_{3n}, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Os resultados precedentes sugerem a fórmula geral

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2.3.5.6\ldots(3n-1)(3n)},$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Da mesma forma, para a seqüência $a_4, a_7, a_{10}, \ldots$ encontramos a_{3n+1}, $n = 1, 2, 3, \ldots$ dados por

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3.4.6.7\ldots(3n)(3n+1)},$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

A solução geral da equação de Airy é

$$
\begin{aligned}
y(x) \ &= a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2.3.\ldots(3n-1)(3n)}\right]\\
&+ a_1 \left[x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \cdots + \frac{x^{3n}}{3.4.\ldots(3n)(3n+1)}\right]
\end{aligned}
$$

ou

$$y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2.3\ldots(3n-1)(3n)} \right] + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3.4\ldots(3n)(3n+1)} \right]$$

com a_0 e a_1 constantes [3].

A.3 Soluções em torno de um ponto singular regular

Vamos apresentar, nesta seção, a discussão de soluções de equações diferenciais ordinárias, lineares, de segunda ordem, com um ponto singular regular. Inicialmente vamos mostrar a solução da equação Euler e, posteriormente, vamos discutir o problema mais geral, através do método de Frobenius.

A.3.1 Equação de Euler

O exemplo mais simples de uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, tendo um ponto singular regular é a chamada *equação de Euler*, expressa genericamente por

$$(x - x_0)^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \alpha (x - x_0) \frac{d}{dx} y(x) + \beta y(x) = 0 \tag{A.18}$$

onde x_0, α e β são constantes reais. A equação (A.18) pode ser reduzida à forma

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \alpha x \frac{d}{dx} y(x) + \beta y(x) = 0 \tag{A.19}$$

fazendo uma mudança de variável $x \rightarrow (x - x_0)$, equação esta, também conhecida como equação eqüidimensional[2].

[2] Justifica-se o termo eqüidimensional, porque o expoente de cada coeficiente cancela a ordem da derivada. Isto implica que a substituição da função $y(x) = x^r$ deixará todos os termos com o mesmo grau [6].

A solução da equação (A.19) será alguma função cuja primeira derivada multiplicada por x e a segunda derivada multiplicada por x^2 sejam linearmente dependentes da função original. Uma função que tem esta propriedade é a função

$$y(x) = x^r \tag{A.20}$$

em que r é uma constante real. Sendo $y'(x) = rx^{r-1}$ e $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$, por substituição na equação (A.19) obtemos

$$r(r-1)x^r + \alpha r x^r + \beta x^r = 0 \quad \Rightarrow \quad x^r\left[r(r-1) + \alpha r + \beta\right] = 0 \tag{A.21}$$

esta relação deve ser válida em todos os pontos onde y é solução. Assim,

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0. \tag{A.22}$$

A equação (A.22) é chamada equação indicial e cada raiz dela conduz a uma solução particular. Toda a discussão é semelhante ao tratamento de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Então, é necessário considerar separadamente os casos nos quais as raízes da equação indicial são reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas. Os resultados estão apresentados no seguinte teorema:

Teorema A.2 A solução geral da equação de Euler (A.19) em qualquer intervalo que não contenha a origem é determinada pelas raízes r_1 e r_2 da equação

$$r(r-1) + \alpha\, r + \beta = 0 \tag{A.23}$$

- Se as raízes forem reais e diferentes, então

  $$y(x) = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}, \tag{A.24}$$

  com c_1 e c_2 constantes.

- Se as raízes forem reais e iguais, isto é, $r_1 = r_2 = r$, então

  $$y(x) = (c_1 + c_2\,\ln|x|)\,|x|^r, \tag{A.25}$$

  com c_1 e c_2 constantes.

- Se as raízes forem complexas, então

$$y(x) = |x|^\lambda \left[c_1 \cos\left(\mu \ \ln|x|\right) + c_2 \,\mathrm{sen}\left(\mu \ \ln|x|\right)\right], \tag{A.26}$$

onde $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$ e com c_1 e c_2 constantes.

Como exemplo, vamos resolver a equação

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, \tag{A.27}$$

com $y = y(x)$.

Para esta equação temos $\alpha = -3$ e $\beta = 4$. Assim,

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0 \Rightarrow r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$$

donde $r_1 = r_2 = 2$ e $y(x) = x^2\left(c_1 + c_2 \ \ln|x|\right)$, com c_1 e c_2 constantes.

A.3.2 Método de Frobenius

Vamos, de modo sistemático, utilizar o chamado método de Frobenius para determinar, quando possível, as duas soluções linearmente independentes, em torno de um ponto singular regular, de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes não constantes.

Considere a equação diferencial ordinária linear, de segunda ordem

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)\,y = 0, \tag{A.28}$$

onde $y = y(x)$, em uma vizinhança de um ponto singular regular $x = x_0$. Sem perda de generalidade, vamos considerar sempre $x_0 = 0$. O caso geral pode sempre ser reduzido a este pela mudança da variável $x \ \rightarrow \ x - x_0$.

Dizemos que, sendo $x_0 = 0$ um ponto singular regular, isto é, uma singularidade removível da equação (A.28), então

$$x\frac{B(x)}{A(x)} = xP(x) \qquad \text{e} \qquad x^2\frac{C(x)}{A(x)} = x^2 Q(x) \tag{A.29}$$

são tais que $\lim_{x\to 0} xP(x)$ e $\lim_{x\to 0} x^2Q(x)$ existem e são finitos. Além disso, $xP(x)$ e $x^2Q(x)$ são analíticas em $x_0 = 0$, logo têm expansão em séries de potências convergentes da forma

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n \qquad \text{e} \qquad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n\, x^n, \tag{A.30}$$

em algum intervalo $|x| < R$ em torno da origem, onde $R > 0$.

Seja x_0 uma singularidade removível da equação (A.28) transformada em

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + P(x)\frac{d}{dx}\, y(x) + Q(x)\, y(x) = 0. \tag{A.31}$$

Multiplicando-se esta equação por x^2, obtemos

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + x\,[xP(x)]\,\frac{d}{dx}\, y(x) + \left[x^2Q(x)\right] y(x) = 0. \tag{A.32}$$

Admite-se como solução da equação (A.32) uma solução na forma de uma expansão em série de potências

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r}, \tag{A.33}$$

onde a_n são os coeficientes e r é o expoente indicial, a serem determinados. Podemos, sem perda de generalidade, sempre supor $a_0 \neq 0$. Introduzindo a série (A.33) na equação (A.31) de modo a satisfazê-la, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n\, x^{n+r} + xP(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n\, x^{n+r} +& \\ + x^2Q(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r} = 0.&\end{aligned} \tag{A.34}$$

Substituindo as séries (A.30) na equação (A.34) podemos escrevê-la na forma de uma série de potências de x

$$x^r \sum_{n=0}^{\infty} D_n\, x^n = 0, \tag{A.35}$$

onde D_n são funções de a_n, p_n e q_n.

Sendo esta expansão identicamente nula implica que $D_n = 0$, de onde se obtém relações entre os coeficientes a_n (relação de recorrência). Da menor potência de x, determina-se o expoente indicial r, a partir de uma equação algébrica chamada equação indicial,

$$a_0\left[r(r-1) + p_0 r + q_0\right] = 0. \tag{A.36}$$

A solução obtida com esse método deve convergir na região de interesse e a convergência da série pode ser estudada pelos métodos usuais de convergência [2].

Em geral, cada raiz da equação indicial pode conduzir a uma solução em séries de potências. No entanto, em alguns casos é possível encontrar apenas uma solução. O teorema que se segue indica como determinar a solução geral por meio de séries de potências.

Teorema A.3 Se $x_0 = 0$ é um ponto singular regular e r_1 e r_2 são duas raízes da equação indicial associada à equação diferencial linear de segunda ordem da forma (A.31), esta equação possui sempre uma solução $y = y_1(x)$ da forma

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r_1}, \tag{A.37}$$

com $a_0 \neq 0$. Uma segunda solução linearmente independente $y = y_2(x)$ pode ser obtida de acordo com o que se segue[3]:

i) Se $r_1 - r_2$ não é um inteiro positivo, então

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{n+r_2}, \tag{A.38}$$

com $b_0 \neq 0$.

ii) Se $r_1 - r_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = r_2 = r$, então

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + x^{r}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = y_1(x)\ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{n+r}, \tag{A.39}$$

com $b_0 \neq 0$.

[3] Ver referência [1].

iii) Se $r_1 - r_2 = N$, onde $N = 1, 2, \dots$ então

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln|x| + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = Cy_1(x)\ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{n+r_2}, \quad \text{(A.40)}$$

com $b_0 \neq 0$.

As soluções acima são válidas num intervalo à direita de $x_0 = 0$, $0 < x < R$ sendo R no mínimo igual ao menor dos raios de convergência das expansões em série de potências das funções $xP(x)$ e $x^2Q(x)$ em torno de $x_0 = 0$.

No caso (iii), a constante C pode eventualmente se anular. Nos casos em que $C = 0$ a segunda solução tem também a forma do método de Frobenius, o qual implica que aplicando o método de Frobenius é possível encontrar as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente independentes. Quando C não é nula, o método de Frobenius permite encontrar apenas uma solução e a segunda solução deverá ser encontrada por substituição da forma geral de $y_2(x)$ na equação diferencial.

Com as duas soluções encontradas seguindo o método indicado pelo teorema de Frobenius, a solução geral será:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad \text{(A.41)}$$

com C_1 e C_2 constantes arbitrárias.

Em alguns casos as condições de fronteira exigem que $y(x)$ seja finita na origem o qual implica $C_2 = 0$, se $r_2 < 0$ ou $r_2 = r_1$, já que nos dois casos a segunda solução é divergente na origem. Se $r_1 - r_2$ é um inteiro e o método de Frobenius conduz a uma única solução $y_1(x)$, C_2 será também nula e não será preciso calcular $y_2(x)$.

A.3.3 Exemplo

A fim de exemplificar o método de Frobenius, vamos discutir a seguinte equação diferencial:

$$2x^2y'' + 3xy' + \left(2x^2 - 1\right)y = 0,$$

com $y = y(x)$.

É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular desta equação. Aplicando o método de Frobenius supomos como solução da equação a função

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+r}, \tag{A.42}$$

onde $a_0 \neq 0$ e $x > 0$.

Valem as expressões para as derivadas

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) \, a_n \, x^{n+r-1} \tag{A.43}$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) \, (n+r-1) \, a_n \, x^{n+r-2} \tag{A.44}$$

onde $a_0 \neq 0$ e o índice começa obrigatoriamente a variar a partir de $n = 0$. Introduzindo $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ por suas expansões em série de potências na equação diferencial dada, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r+2} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \tag{A.45}$$

que pode ser reduzida a um único somatório, através de convenientes mudanças de índices

$$[r(2r+1)-1] \, a_0 x^r + [(r+1)(2r+3)-1] \, a_1 \, x_{r+1} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)(2n+2r+1)-1] \, a_n + 2a_{n-2}\} \, x^{n+r} = 0. \tag{A.46}$$

Para que tenhamos a equação (A.46) satisfeita, em qualquer ponto x, é necessário que todos os coeficientes sejam nulos. Assim,

i) Tendo em vista a condição $a_0 \neq 0$, o coeficiente de x^r é

$$r(2r+1) - 1 = 0. \tag{A.47}$$

ii) O coeficiente de x^{r+1} é

$$[(r+1)(2r+3) - 1]\, a_1 = 0. \tag{A.48}$$

iii) Para $n = 2, 3, 4, \ldots$, o coeficiente de x^{n+r} é

$$[(n+r)(2n+2r+1) - 1]\, a_n + 2a_{n-2} = 0, \tag{A.49}$$

sendo (A.47) a equação indicial e (A.49) é a relação de recorrência.

A equação indicial (A.47) é uma equação do segundo grau, cujas raízes fornecem os possíveis valores de r. Neste caso temos

$$2r^2 + r - 1 = 0$$

cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad r_2 = -1$$

Visto que $r_1 \neq r_2$ e $r_1 - r_2$ não é um inteiro, o método fornece duas soluções linearmente independentes. Escolhemos como expoente indicial da primeira solução a maior raiz tendo em vista que $\mathrm{Re}(r_1) \geq 0$. Assim escolhemos $r_1 = 1/2$.

1ª solução. Tomando $r_1 = 1/2$ na equação (A.48) temos

$$\left[\left(\frac{1}{2} + 2\right)\left(2.\frac{1}{2} + 3\right) - 1\right] a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0.$$

Agora, inserindo $r_1 = 1/2$ na relação de recorrência (A.49) temos

$$[(2n+1)(n+1) - 1]\, a_n + 2a_{n-2} = 0,$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$, ou seja,

$$\left(2n^2 + 3n\right) a_n + 2a_{n-2} = 0.$$

Segue a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{2a_{n-2}}{n(2n+3)}, \tag{A.50}$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$ da qual podemos concluir que

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$$

ou seja, todos os a_n, para n ímpar, são nulos.

Como a_0 pode ser escolhido arbitrariamente, com a única restrição que seja diferente de zero, escolhemos $a_0 = 1$.

Com esta escolha obtemos

$$a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{2}{2.7} \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{2^2}{2.4.7.11} \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\frac{2^3}{2.4.6.7.11.15}.$$

Simplificando temos,

$$a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{1.7} \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{1.2.7.11} \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\frac{1}{1.2.3.7.11.15}.$$

A expressão geral é

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!\,[7.11.15\ldots(4n+3)]}, \tag{A.51}$$

com $n \geq 1$.

A partir da raiz indicial $r_1 = 1/2$ e da relação de recorrência para os coeficientes, a primeira solução da equação diferencial é

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,[7.11.15\ldots(4n+3)]}\, x^{2n}\right]. \tag{A.52}$$

Observe que esta solução pode ser reescrita na forma de um único somatório

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{3}{n!\,[3.7.11.15\ldots(4n+3)]}\, x^{2n}\right]. \tag{A.53}$$

2ª solução. Tomando $r_2 = -1$ na equação (A.48) temos

$$[(-1+1)\,(-2+3) - 1]\, a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0.$$

Agora, inserindo $r_2 = -1$ na relação de recorrência (A.49) temos

$$[(2n-1)(n-1)-1]\, a_n + 2a_{n-2} = 0,$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$, ou seja,

$$\left(2n^2 - 3n\right) a_n + 2a_{n-2} = 0.$$

Segue a relação de recorrência

$$a_n = \frac{2a_{n-2}}{n(2n-3)}, \tag{A.54}$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$ que, em analogia a outra raiz, fornece

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 \ldots$$

ou seja, todos os a_n, para n ímpar, são nulos.

Escolhendo, novamente, $a_0 = 1$ temos

$$a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{2}{2.1} \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{2^2}{2.4.1.5} \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\frac{2^3}{2.4.6.1.5.9}.$$

Simplificando obtemos,

$$a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{1.1} \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{1.2.1.5} \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\frac{1}{1.2.3.1.5.9}.$$

A expressão geral é

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!\,[1.5.9\ldots(4n-3)]}, \tag{A.55}$$

com $n \geq 1$.

A partir da raiz indicial $r_2 = -1$ e da relação de recorrência para os coeficientes, a segunda solução da equação diferencial é

$$y_2(x) = x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,[1.5.9\ldots(4n-3)]}\, x^{2n}\right]. \tag{A.56}$$

Verifica-se que o Wronskiano das soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não se anula para $x > 0$, isto é, neste intervalo $W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x) \neq 0$. Com isso, encontramos duas soluções linearmente independentes para a equação diferencial, ou seja, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções e

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x),$$

é a solução geral com C_1 e C_2 constantes arbitrárias.

A.4 Funções de Bessel

As funções de Bessel são certas soluções da seguinte classe de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) + \left(x^2 - \upsilon^2\right) y(x) = 0. \tag{A.57}$$

onde υ é um parâmetro real ou complexo.

A equação (A.57) é conhecida como a equação de Bessel de ordem υ, e aparece com freqüência no estudo de propagação de ondas, de condução de calor e de equilíbrio eletrostático em domínios cilíndricos. Devido a grande importância prática, com aplicações nos mais diversos campos da física, engenharia e matemática, as funções de Bessel mereceram estudo detalhado, cujos resultados encontram-se catalogados em vários tratados inteiramente dedicados a elas [8].

O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular da equação (A.57). Assim, em torno de $x = 0$, podemos obter soluções na forma de uma série de potências pelo método de Frobenius. Vamos, então, construir soluções desta equação na forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+r}, \tag{A.58}$$

com $a_0 \neq 0$. Valem as expressões para as derivadas

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \, x^{n+r-1} \tag{A.59}$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n \, x^{n+r-2}. \tag{A.60}$$

Substituindo $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ na equação (A.57) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)^2 - \upsilon^2\right] a_n \, x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+r+2} = 0, \tag{A.61}$$

que pode ser reduzida a um único somatório, através de mudanças de índices

$$\left(r^2-\upsilon^2\right)a_0x^r+\left[(r+1)^2-\upsilon^2\right]a_1x^{r+1}+ \\ +\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+r)^2-\upsilon^2\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{n+r}=0. \quad \text{(A.62)}$$

Para que tenhamos (A.62) satisfeita, em qualquer ponto x, é necessário que todos os coeficientes sejam nulos. Assim,

i) Tendo em vista a condição $a_0 \neq 0$, o coeficiente de x^r

$$r^2-\upsilon^2=0, \quad \text{(A.63)}$$

ii) o coeficiente de x^{r+1}

$$\left[(r+1)^2-\upsilon^2\right]a_1=0, \quad \text{(A.64)}$$

iii) Para $n=2,3,4,\ldots$, o coeficiente de x^{n+r}

$$\left[(n+r)^2-\upsilon^2\right]a_n+a_{n-2}=0, \quad \text{(A.65)}$$

sendo (A.63) a equação indicial e (A.65) é a relação de recorrência.

A equação indicial (A.63) é uma equação do segundo grau, cujas raízes fornecem os possíveis valores de r. Neste caso temos $r^2-\upsilon^2=0$, cujas raízes são $r_1=\upsilon$ e $r_2=-\upsilon$.

Para se obter as soluções linearmente independentes, devemos separar os casos em que 2υ é inteiro, zero ou não inteiro, respectivamente.

Para o caso em que 2υ é não inteiro, as duas soluções linearmente independentes são obtidas tomando-se $r_1=\upsilon$ e $r_2=-\upsilon$.

1ª solução Tomando $r_1=\upsilon\geq 0$ na equação (A.64) temos

$$\left[(r+1)^2-\upsilon^2\right]a_1=0 \;\Rightarrow\; \left[(\upsilon+1)^2-\upsilon^2\right]a_1=0 \;\Rightarrow\; (2\upsilon+1)\,a_1=0 \;\Rightarrow\; a_1=0.$$

Agora, inserindo $r_1=\upsilon$ na relação (A.65) temos

$$\left[(n+\upsilon)^2-\upsilon^2\right]a_n+a_{n-2}=0,$$

para $n=2,3,4,\ldots$.

Segue a relação de recorrência

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+\upsilon)^2-\upsilon^2}=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\upsilon)}, \tag{A.66}$$

para $n=2,3,4,\ldots$ da qual concluímos que

$$0=a_1=a_3=a_5\ldots$$

ou seja, todos os a_n, para n ímpar, são nulos.

Usando (A.66) e deixando para escolher a_0 depois, obtemos

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2+2\upsilon)}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\upsilon)}=\frac{a_0}{2.4.(2+2\upsilon).(4+2\upsilon)}=\frac{a_0}{2^4.2.1(1+\upsilon)(2+\upsilon)}$$

$$a_6=-\frac{a_2}{6(6+2\upsilon)}=-\frac{a_0}{2^6.3.2.1.(1+\upsilon)(2+\upsilon)(3+\upsilon)}.$$

Em geral,

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n\,a_0}{2^{2n}n!(n+\upsilon)\ldots(1+\upsilon)}. \tag{A.67}$$

Logo, a primeira solução linearmente independente da equação diferencial de Bessel de ordem υ é

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^{\upsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_0}{n!(n+\upsilon)\ldots(1+\upsilon)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \tag{A.68}$$

com $a_0\neq 0$, arbitrário e para uma vizinhança à direita de $x_0=0$.

Para a equação de Bessel (A.57), escrita na forma da equação (A.31), temos que $xP(x)=1$ e $x^2Q(x)=x^2-\upsilon^2$, são funções analíticas em toda a reta (raio de convergência infinito). Assim, a primeira solução da equação diferencial ordinária de Bessel obtida é válida para todo $x>0$.

A fim de expressarmos a função de Bessel como aparece (normalizada) na literatura especializada, vamos introduzir a chamada função gama.

A.4.1 Função gama

Antes de fixarmos arbitrariamente a_0, vamos introduzir uma função especial, chamada função gama. Esta função é uma generalização da função fatorial para os números complexos, exceto o zero e os inteiros negativos, chamados pólos da função [7].

Existem pelo menos três definições diferentes da função gama: limite infinito (Euler), produto infinito (Weierstrass) e forma integral (Euler). Entre as quais destacamos:

i) Produto infinito (Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, \mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-z/n} \tag{A.69}$$

exceto em $z = 0, -1, -2, \ldots,$, onde a função não é analítica e apresenta pólos simples [9], sendo γ a constante de Euler-Mascheroni[4] $(1750 - 1800)$ cujo valor é

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln(m)\right) = 0,5772156619$$

ii) Forma integral (Euler)

Uma segunda forma de definir $\Gamma(z)$ é por meio de uma integral imprópria, denominada integral de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\, dt \tag{A.70}$$

com $\mathrm{Re}(z) > 0$, na qual devemos determinar os valores de z de modo que a integral seja convergente.

Para todo $z > 0$, a função gama satisfaz a *equação funcional*

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{A.71}$$

[4]Lorenzo Mascheroni, matemático italiano.

Este resultado segue diretamente da forma integral (A.70) e pode ser mostrado mediante integração por partes:
Com efeito, seja

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^z dt. \tag{A.72}$$

Integrando a equação (A.72) por partes obtemos

$$\Gamma(z+1) = -\mathrm{e}^{-t}\, t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1} dt. \tag{A.73}$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (A.73) se anula e a integral é $\Gamma(z)$. Logo, $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.

Os fatos expostos, relativos à função gama, possibilitam as seguintes deduções:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

e

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi},$$

válidas para n inteiro positivo. A primeira delas justifica o fato de a função $\Gamma(z)$ ser considerada uma extensão do fatorial.

Uma conseqüência importante da equação funcional (A.71) é que ela permite a extensão da definição da função gama para valores negativos não-inteiros de seu argumento. Em geral, para z diferente de um inteiro negativo temos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\cdots(z+m)},$$

onde m é qualquer inteiro positivo.

Aqui, encerramos esta breve apresentação da função gama, ressaltando que existem outros resultados interessantes e identidades importantes relacionados com a função gama.

Voltando à primeira solução da equação de Bessel, vamos fixar o valor de a_0. Escolhe-se arbitrariamente a_0, tal que $2^{\upsilon}\Gamma(\upsilon+1)a_0 = 1$ ou

$$a_0 = \frac{1}{2^{\upsilon}\Gamma(\upsilon+1)}. \tag{A.74}$$

Utilizando repetidas vezes a propriedade (A.71) obtemos

$$\begin{aligned}(n+\upsilon)\cdots(2+\upsilon)(1+\upsilon)\Gamma(1+\upsilon) &= (n+\upsilon)\cdots(2+\upsilon)\Gamma(2+\upsilon) = \\ = (n+\upsilon)\cdots(3+\upsilon)\Gamma(3+\upsilon) &= \cdots = \Gamma(n+\upsilon+1). \qquad (A.75)\end{aligned}$$

Assim, com a escolha (A.74), obtemos $y_1(x)$ chamada de função de Bessel de primeira espécie de ordem υ e denotada por $J_\upsilon(x)$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= J_\upsilon(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\upsilon}, \qquad (A.76)\end{aligned}$$

com $x > 0$.

Em particular, sendo $z = m$ um número inteiro e positivo, usando a equação funcional (A.71) m vezes obtém-se

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)(m-2)\ldots 1. \qquad (A.77)$$

Com isso, podemos escrever

$$\Gamma(m+1) = m!. \qquad (A.78)$$

que, como havíamos mencionado, é o fatorial.

Logo, para $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, obtemos

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}, \qquad (A.79)$$

com $x > 0$.

Desta forma, temos, em particular

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \text{etc.}$$

A série (A.76) converge[5] para todos os valores de x, não importa qual o valor de υ. Se υ for um inteiro ($\upsilon = m$), então $J_m(x)$ é unívoca, e a série citada é

[5]Verificar pelo teste de razão.

uma série de MacLaurin. Se υ não for um inteiro, então $J_\upsilon(x)$ possuirá um ponto de ramificação na origem. Os ramos de $J_\upsilon(x)$ são determinados pelos ramos de x^υ e sua quantidade pode ser finita (υ racional) ou infinita (υ irracional). É interessante observar que se fizermos υ variar continuamente, então $J_\upsilon(x)$ será uma função contínua de υ para qualquer x fixo não nulo [4].

Vamos agora procurar a segunda solução linearmente independente da equação de Bessel. Inserindo $r_2 = -\upsilon$ nas equações (A.64) e (A.65) temos, respectivamente

$$\left[(r+1)^2 - \upsilon^2\right] a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[(-\upsilon+1)^2 - \upsilon^2\right] a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-2\upsilon)\, a_1 = 0. \tag{A.80}$$

e

$$\left[(n-\upsilon)^2 - \upsilon^2\right] a_n + a_{n-2} = 0,$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$, donde segue a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-\upsilon)^2 - \upsilon^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\upsilon)}, \tag{A.81}$$

Podemos observar que nas equações (A.80) e (A.81) teremos problemas quando

a) υ é um inteiro e b) υ é um semi-inteiro.

Se υ não satisfaz nenhuma das duas situações a) ou b), temos de (A.80) e (A.81) que $a_1 = 0$ e todos os a_n, para n ímpar, são nulos. Verifica-se também que todos os a_n, para n par, ficam bem definidos.

Logo,

$$J_{-\upsilon}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\upsilon+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\upsilon}, \tag{A.82}$$

com $x > 0$, é chamada de função de Bessel de primeira espécie de ordem $-\upsilon$.

O comportamento destas funções próximo ao ponto $x = 0$ é dado pelo primeiro termo da série

$$J_\upsilon(x) \approx \frac{x^\upsilon}{2^\upsilon \Gamma(1+\upsilon)} \qquad \text{e} \qquad J_{-\upsilon}(x) \approx \frac{x^{-\upsilon}}{2^{-\upsilon}\Gamma(1-\upsilon)}, \tag{A.83}$$

quando $x \to 0$.

Podemos observar que uma não é múltipla da outra e, portanto, são linearmente independentes. Sendo assim, a solução geral, da equação de Bessel é dada por

$$y(x) = C_1\, J_\upsilon(x) + C_2\, J_{-\upsilon}(x) \tag{A.84}$$

com $\upsilon \neq$ inteiro, $\upsilon \neq$ semi-inteiro e onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Vamos considerar a situação (b) em que υ é um semi-inteiro. Então, 2υ será um inteiro ímpar. A fórmula de recorrência (A.81) definirá todos os coeficientes pares em função de a_0, como anteriormente. Entretanto, o mesmo não se dá para os coeficientes ímpares: enquanto que a_1, a_3, a_5, $\ldots, a_{2\upsilon-2}$ devem ser nulos, isto não é necessariamente verdadeiro para $a_{2\upsilon}$. No entanto, podemos arbitrariamente tomar $a_{2\upsilon} = 0$. Se isso for feito, então todos os coeficientes ímpares subseqüentes deverão ser nulos e podemos definir $J_{-\upsilon}(x)$ exatamente como anteriormente. A vantagem desta escolha é que $J_{-\upsilon}(x)$ permanece uma função contínua de υ, quando υ passa por um valor semi-inteiro. É ainda verdade que $J_{-\upsilon}(x)$ é linearmente independente de $J_\upsilon(x)$ e ainda temos a solução geral

$$y(x) = C_1\, J_\upsilon(x) + C_2\, J_{-\upsilon}(x),$$

com $\upsilon =$ semi-inteiro e onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias [4].

A.4.2 Exemplo

Vamos investigar, valendo-nos de uma situação particular, se $J_\upsilon(x)$ e $J_{-\upsilon}(x)$ são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem υ no caso em que $\upsilon =$ um semi-inteiro, isto é, resolvendo o seguinte exemplo: Obter as expansões em série de potências das funções de Bessel $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$.

Da equação (A.76) temos

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(n+1/2+1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}, \tag{A.85}$$

com $x > 0$. Utilizando repetidas vezes a identidade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, e o fato que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, obtemos

$$\Gamma(n+1/2+1) = (n+1/2)\,\Gamma(n+1/2) = (n+1/2)(n-1/2)\,\Gamma(n-1/2) =$$
$$= \cdots = (n+1/2)(n-1/2)\cdots 1/2\Gamma(1/2) = \frac{2n+1}{2}\,\frac{2n-1}{2}\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

isto é,

$$\Gamma(n+1/2+1) = \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3.1}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}. \tag{A.86}$$

Logo,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n!1.3.5\cdots(2n+1)}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}, \tag{A.87}$$

e levando-se em conta que

$$n!\,1.3.5\cdots(2n+1)\,2^n = 2.4.5\cdots(2n+1) = (2n+1)! \tag{A.88}$$

temos

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}, \tag{A.89}$$

com $x > 0$.

A série de potências na equação (A.89) é precisamente a série de MacLaurin para sen(x). Logo, uma solução para a equação de Bessel de ordem 1/2 é

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}(x). \tag{A.90}$$

Analogamente, para $\upsilon = -1/2$, temos a segunda solução da equação de Bessel de ordem 1/2 dada por

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \tag{A.91}$$

onde a série de potências na equação (A.91) é a série de MacLaurin para $\cos(x)$. Logo, uma segunda solução para a equação de Bessel de ordem 1/2 é

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos(x). \tag{A.92}$$

Observamos que os resultados para as funções de Bessel $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$, expressos em termos de funções elementares através das equações (A.90) e (A.92) são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem $1/2$

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y(x) = 0. \tag{A.93}$$

Generalizando, se υ não é um inteiro, então $J_\upsilon(x)$ e $J_{-\upsilon}(x)$ são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem υ. Assim, reescrevemos a equação (A.84), forma geral da solução da equação de Bessel, como

$$y(x) = C_1J_\upsilon(x) + C_2J_{-\upsilon}(x)$$

com $\upsilon \neq$ inteiro, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Para a situação (a) em que $\upsilon =$ inteiro temos apenas uma solução bem definida, expressa por

$$y(x) = CJ_\upsilon(x) \tag{A.94}$$

onde C é uma constante e

$$J_\upsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\upsilon}, \tag{A.95}$$

com $x > 0$ é a chamada função de Bessel de primeira espécie e ordem υ.

Para $\upsilon < 0$, a equação (A.95) resulta em

$$J_{-\upsilon}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\upsilon+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\upsilon}. \tag{A.96}$$

Sendo υ um inteiro e em função disto, $\Gamma(n-\upsilon+1) \rightarrow \infty$ para $n = 0, 1, \ldots, (\upsilon-1)$, vamos tomar a série a partir de $n = \upsilon$. Assim, fazendo a mudança de índice no somatório, substituindo n por $n+\upsilon$ e utilizando a equação funcional, obtemos

$$\begin{aligned} J_{-\upsilon}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\upsilon}}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\upsilon} = \\ &= (-1)^\upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\upsilon}. \end{aligned} \tag{A.97}$$

As equações (A.95) e (A.97) mostram que $J_{-\upsilon}(x) = (-1)^{\upsilon} J_{\upsilon}(x)$, ou seja, $J_{-\upsilon}(x)$ e $(-1)^{\upsilon} J_{\upsilon}(x)$ são linearmente dependentes.

Vamos verificar esta situação mostrando que $J_{-3}(x) = -J_3(x)$. Temos

$$J_{-3}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-3+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-3}. \qquad \text{(A.98)}$$

Sabendo que

$$\frac{1}{\Gamma(-2)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$$

temos que os três primeiros termos da série de potências são nulos e podemos começar o somatório por $n = 3$, ou seja,

$$J_{-3}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-3} \qquad \text{(A.99)}$$

Efetuando uma mudança de índice, para $n = k + 3$ temos,

$$\begin{aligned} J_{-3}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+3}}{(k+3)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+3} = \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+3}}{(k+3)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+3} = -J_3(x). \end{aligned} \qquad \text{(A.100)}$$

Usando os argumentos deste exemplo podemos provar que para $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots$, temos

$$J_{-\upsilon}(x) = (-1)^{\upsilon} J_{\upsilon}(x). \qquad \text{(A.101)}$$

A.4.3 Propriedade da função $J_{\upsilon}(x)$

A partir da expansão

$$J_{\upsilon}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\upsilon}, \qquad \text{(A.102)}$$

com $x > 0$, podemos verificar as seguintes relações:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\upsilon} J_{\upsilon}(x)\right] = x^{\upsilon} J_{\upsilon-1}(x), \qquad \text{(A.103)}$$

com $\upsilon \geq 1$ e

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\upsilon}J_\upsilon(x)\right] = -x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x), \tag{A.104}$$

com $\upsilon \geq 0$, válidas para qualquer υ. Das relações (A.103) e (A.104) podemos obter as relações

$$x\frac{d}{dx}\left[J_\upsilon(x)\right] + \upsilon J_\upsilon(x) = xJ_{\upsilon-1}(x) \tag{A.105}$$

e

$$x\frac{d}{dx}\left[J_\upsilon(x)\right] - \upsilon J_\upsilon(x) = -xJ_{\upsilon+1}(x). \tag{A.106}$$

Combinando as relações (A.105) e (A.106), deduzimos as relações de recorrência

$$J_{\upsilon+1}(x) + J_{\upsilon-1}(x) = \frac{2\upsilon}{x}J_\upsilon(x) \tag{A.107}$$

e

$$J_{\upsilon-1}(x) - J_{\upsilon+1}(x) = 2\frac{d}{dx}\left[J_\upsilon(x)\right], \tag{A.108}$$

com $\upsilon \geq 1$.

A relação (A.104) nos permite deduzir uma fórmula interessante que exprime $J_m(x)$ em função de $J_0(x)$ [ou, em geral, $J_\upsilon(x)$ em termos de $J_{\upsilon-k}(x)$]. Dividindo esta relação por x obtemos

$$\frac{J_{\upsilon+1}(x)}{x^{\upsilon+1}} = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\upsilon(x)}{x^\upsilon}\right] \tag{A.109}$$

que mostra o que devemos fazer com $x^{-\upsilon}J_\upsilon(x)$ a fim de obter uma razão semelhante de ordem imediatamente superior, ou seja $J_{\upsilon+1}(x)/x^{\upsilon+1}$. Começando com $\upsilon = 0$ e aplicando esta regra m vezes, obtemos

$$\frac{J_m(x)}{x^m} = \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m\left[J_0(x)\right] \quad \text{ou} \quad J_m(x) = x^m\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m\left[J_0(x)\right] \tag{A.110}$$

que significa que o operador diferencial $\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)$ deve ser aplicado m vezes a $J_0(x)$, e o resultado multiplicado por x^m para obtermos $J_m(x)$ [4].

A relação (A.107) permite o cálculo dos valores numéricos de $J_\upsilon(x)$ para qualquer valor inteiro de υ, a partir do conhecimento destes valores para as funções $J_0(x)$ e $J_1(x)$. Esta relação é conhecida pelo nome de relação de recorrência pura por não envolver a derivada.

A.4.4 Função geradora para ordem inteira

Para funções de Bessel de ordem inteira, introduzimos uma função de duas varáveis,

$$g(x,t) = \exp\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]. \tag{A.111}$$

Expandindo essa função em uma série de Laurent que é uma série de potências negativas e positivas de $(x-a)$ desenvolvida a partir de uma função $f(x)$ analítica em um anel $R_1 < |x-a| < R_2$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, (x-a)^n \,, \tag{A.112}$$

onde c_n são chamados coeficientes de Laurent, obtemos

$$\exp\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_m(x) t^m, \tag{A.113}$$

onde o coeficiente de t^m, $J_m(x)$, é definido como sendo uma função de Bessel de primeira espécie de ordem inteira m.

Expandindo as exponenciais, mostra-se que para $m \geq 0$ o coeficiente de t^m é

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} = \frac{x^m}{2^m m!} - \frac{x^{m+2}}{2^{m+2}(m+1)!} + \cdots \tag{A.114}$$

Essa forma de série exibe o comportamento da função de Bessel $J_m(x)$ para x pequeno e permite avaliação numérica de $J_m(x)$.

Para $m < 0$, a equação (A.114) resulta em

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}. \tag{A.115}$$

Uma vez que m é um inteiro, $(m-n)! \to \infty$, para $m = 0, 1, \ldots, (n-1)$. Por conseguinte, pode-se considerar que a série começa com $m = n$. Substituindo m por $m+n$, obtemos

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}, \tag{A.116}$$

que mostra, como foi citado na igualdade (A.101), que $J_m(x)$ e $J_{-m}(x)$ não são independentes, mas estão relacionados por

$$J_m(x) = (-1)^m J_{-m}(x). \tag{A.117}$$

Essas expressões de séries para $J_m(x)$ podem ser usadas por m substituído por υ para definir $J_\upsilon(x)$ e $J_{-\upsilon}(x)$ não inteiro [1].

O caso em que υ é um inteiro, existe uma segunda solução linearmente independente da equação de Bessel (A.57). Ela envolve uma função não-analítica (singular) na origem a qual não pode ser expressa em forma de uma série de potência. Essa solução singular é conhecida como função de Bessel de segunda espécie e ordem υ, representada por $Y_\upsilon(x)$ ou função de Neumann de ordem υ representada por $N_\upsilon(x)$, sendo

$$y_2(x) = N_\upsilon(x) = \frac{J_\upsilon(x)\,\cos(\upsilon x) - J_{-\upsilon}(x)}{\mathrm{sen}(\upsilon x)}. \tag{A.118}$$

Para υ não inteiro, $N_\upsilon(x)$, satisfaz a equação de Bessel, porque é uma combinação linear de soluções conhecidas $J_\upsilon(x)$ e $J_{-\upsilon}(x)$.

A.4.5 Equação de Bessel modificada

A equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) - \left(x^2 + \upsilon^2\right) y(x) = 0. \tag{A.119}$$

é denominada equação de Bessel modificada de ordem υ. Os pontos singulares são os mesmo da equação de Bessel (A.57) e as soluções podem ser obtidas diretamente das soluções da equação de Bessel correspondentes pela substituição $x \rightarrow ix$ nestas últimas. As soluções são chamadas de funções de Bessel modificadas e podem ser escritas na forma

$$y(x) = C_1 I_\upsilon(x) + C_2 K_\upsilon(x) \tag{A.120}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e $I_\upsilon(x)$ e $K_\upsilon(x)$ são denominadas funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécies, respectivamente.

A primeira solução, $I_\upsilon(x)$ é dada por

$$I_\upsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\upsilon+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\upsilon}, \tag{A.121}$$

para qualquer valor de υ. Observa-se que da expansão em série de potências podemos escrever a relação entre $J_\upsilon(x)$ e $I_\upsilon(x)$ dada por

$$I_\upsilon(x) = (-i)^{-\upsilon} J_\upsilon(ix). \tag{A.122}$$

onde $I_\upsilon(x)$ é sempre uma função real (mesmo que υ não é inteiro) [9].

A discussão das soluções da equação (A.119) conforme valores de 2υ é idêntica ao caso das funções $J_\upsilon(x)$. A solução $I_{-\upsilon}(x)$ só será linearmente independente de $I_\upsilon(x)$ quando 2υ não for inteiro. Se υ for inteiro, tem-se

$$I_{-\upsilon}(x) = (-1)^\upsilon I_\upsilon(x). \tag{A.123}$$

Em termos de série infinita, a nova forma de série equivale a remover o sinal $(-1)^n$ na equação (A.95).

As relações de recorrência mais importantes satisfeitas por $I_\upsilon(x)$ são obtidas a partir das relações de recorrência existentes para $J_\upsilon(x)$. Para tanto vamos substituir x por $-ix$ e reescrever a equação (A.122) como

$$I_\upsilon(-ix) = (i)^{-\upsilon} J_\upsilon(x) \quad \Rightarrow \quad J_\upsilon(x) = i^\upsilon I_\upsilon(-ix). \tag{A.124}$$

Então, a equação (A.107) pode ser escrita como

$$I_{\upsilon-1}(x) - I_{\upsilon+1}(x) = \frac{2\upsilon}{x} I_\upsilon(x), \tag{A.125}$$

enquanto que a equação (A.108) se transforma em

$$I_{\upsilon-1}(x) + I_{\upsilon+1}(x) = 2\frac{d}{dx}\left[I_\upsilon(x)\right]. \tag{A.126}$$

Observando a equação (A.123) podemos concluir que temos apenas uma solução linearmente independente quando υ é um inteiro, exatamente como nas funções de Bessel $J_\upsilon(x)$.

A segunda solução $K_\upsilon(x)$, função de Bessel modificada de ordem υ de segunda espécie é definida por

$$K_\upsilon(x) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_{-\upsilon}(x) - I_\upsilon(x)}{\text{sen}\,(\upsilon x)}\right], \tag{A.127}$$

para $\upsilon \neq$ inteiro, análoga à equação (A.118) para $N_\upsilon(x)$. Para $\upsilon = m =$ inteiro, temos

$$\begin{aligned} K_m(x) &= \frac{(-1)^m}{2}\left[\frac{\partial I_{-\upsilon}(x)}{\partial \upsilon} - \frac{\partial I_\upsilon(x)}{\partial \upsilon}\right]_{\upsilon=m} = \\ &= \lim_{\upsilon \to m} \frac{(-1)^m}{2}\left[\frac{I_{-\upsilon}(x) - I_\upsilon(x)}{\upsilon - m}\right]. \end{aligned} \tag{A.128}$$

As funções $K_\upsilon(x)$ apresentam as seguintes relações de recorrência, também análogas àquelas satisfeitas pelas funções $J_\upsilon(x)$:

$$K_{\upsilon-1}(x) + K_{\upsilon+1}(x) = 2\frac{d}{dx}\left[K_\upsilon(x)\right]. \tag{A.129}$$

e

$$K_{\upsilon-1}(x) - K_{\upsilon+1}(x) = \frac{2\upsilon}{x}K_\upsilon(x). \tag{A.130}$$

As funções modificadas de Bessel são soluções da equação modificada de Bessel, que é uma equação encontrada com muita freqüência. Por exemplo, elas são necessárias para resolução de problemas físicos específicos, tais como os de difusão, ou em geral, onde temos simetria cilíndrica.

Referências Bibliográficas

[1] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, Elsevier/Campus, Rio de Janeiro, (2007).

O tema do livro é a teoria matemática sob a ótica das aplicações à física. Assim, em cada capítulo os autores procuram relacionar o assunto em questão a certos conceitos da física. O livro é bastante abrangente e apresenta os principais métodos matemáticos usados na resolução dos problemas de física. Vai além da edição anterior ao introduzir as seções sobre métodos não-lineares e probabilidade. Trata-se de um texto que pretende ser um compêndio sobre a matemática básica necessária a um estudante das disciplinas da física.

[2] J. Bellandi Filho, *Funções Especiais*, Editora Papirus, Campinas, (1985).

Este livro apresenta as funções especiais gama e beta, funções de Bessel, funções hipergeométricas e hipergeométricas confluentes, com suas propriedades usuais e aquelas que não são muito comuns na maioria dos textos didáticos, tais como representações integrais e teoremas de adição. Nele o rigor matemático é aplicado apenas quando absolutamente necessário.

[3] W. E. Boyce e R. C. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora LTC, Rio de Janeiro, (2002).

Este livro foi escrito do ponto de vista do matemático aplicado, cujo interesse pelas equações diferenciais pode ser teórico, prático ou uma mistura das duas coisas. Os autores procuraram combinar uma exposição precisa (mas não muito abstrata) da teoria elementar das equações diferenciais com muito material a respeito dos métodos de solução, análise e aproximação que se revelaram úteis em uma grande variedade de aplicações. Este livro foi escrito principalmente para estudantes de graduação em matemática, física e engenharia, que normalmente fazem um curso de equações diferenciais no primeiro ou segundo ano. O pré-requisito principal para ler este livro é um conhecimento razoável de cálculo.

[4] E. Butkov, *Física Matemática*, Editora LTC, Rio de Janeiro, (1988).

O método indutivo é usado em cada capítulo do livro. Da mesma forma, quase todo capítulo começa com um exemplo ou discussão de natureza elementar, com assunto que é provavelmente familiar ao leitor. As observações e as muitas notas de rodapé visam responder algumas perguntas que estão na mente do estudante, estimulando o interesse pela pesquisa mais avançada. A ausência de fórmulas numeradas é proposital - se o estudante procura a seção ou página indicada, ele não deveria simplesmente verificar se a fórmula citada está realmente ali mas, preferivelmente percorrer o texto e lembrar-se de sua origem e de seu significado.

[5] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).

Estudantes de ciências naturais, economia e engenharias precisam ter um conhecimento razoável da teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais. As EDOs possuem como soluções as chamadas funções especiais. O texto irá auxiliar aqueles que precisem enfrentar problemas nos quais as funções especiais aparecem.

[6] E. Capelas de Oliveira e M. Tygel, *Métodos Matemáticos para Engenharia*, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, (2005).

O livro tem como tema central a obtenção de soluções analíticas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e lineares de segunda ordem, bem como das equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem conhecidas como equações do potencial, do calor e da onda.

[7] E. Kreyszig, *Matemática Superior,* Volume 2, Editora LTC, Rio de Janeiro, (1969).

Destinado a apresentar a estudantes de engenharia e física os conhecimentos matemáticos significativos para os problemas práticos. Este livro é adequado tanto para um ensino aprofundado da matemática, como para ampliação de programas de ensino da disciplina. O único pré-requisito dele é um curso elementar de cálculo.

[8] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, (1966).

Apesar de antigo é um clássico sobre as funções de Bessel. Apresenta um rigoroso tratamento matemático de todos os tipos de funções de Bessel, estudando propriedades e apresentando várias tabelas.

[9] D. G. Zill, *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, (2003).

O livro traz uma visão teórica completa sobre o tema, com generosa oferta de exemplos, exercícios e aplicações. Apresenta as três grandes abordagens para as equações diferenciais - a analítica, a qualitativa e a numérica -, oferecendo amplo enfoque de modelos numéricos e equações lineares. Ao longo do texto, modelos matemáticos permitem a aplicação da teoria ao mundo real, e exercícios ao final dos capítulos proporcionam melhor assimilação do conteúdo.