



Lucas Magalhães Pereira Castello Branco

Mapas Momento em Teoria de Calibre

**CAMPINAS
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Lucas Magalhães Pereira Castello Branco

Mapas Momento em Teoria de Calibre

Orientador: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO LUCAS MAGALHÃES PEREIRA CASTELLO BRANCO,
E ORIENTADA PELO PROF.DR MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, reading "Marcos Jardim", written over a horizontal line.

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

B732m Branco, Lucas Magalhães Pereira Castello, 1988-
Mapas momento em teoria de calibre / Lucas Magalhães Pereira Castello
Branco. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Instantons. 2. Geometria simplética. 3. Fibrados vetoriais. 4. Conexões
(Matemática). 5. Yang-Mills, Teoria de. I. Jardim, Marcos Benevenuto, 1973-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Moment maps in gauge theory

Palavras-chave em inglês:

Instantons

Symplectic geometry

Vector bundles

Connections (Mathematics)

Yang-Mills theory

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Marcos Benevenuto Jardim [Orientador]

Henrique Bursztyn

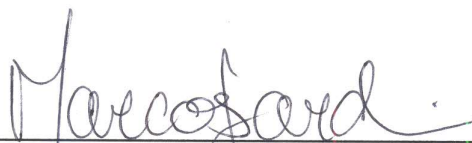
Rafael de Freitas Leão

Data de defesa: 27-06-2013

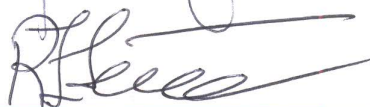
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de junho de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



Prof.(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO



Prof.(a). Dr(a). HENRIQUE BURSZTYN

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marcos Jardim, pela orientação, apoio e por ter me aberto as portas para a pesquisa em matemática.

Agradeço aos Profs. Drs. Rafael de Freitas Leão e Henrique Sá Earp, pelos seminários, entusiasmo, discussões matemáticas e pela atenção.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica como um todo, que foi meu lar durante esses anos. Em especial, não poderia deixar de citar os Profs. Drs. Ary Orozimbo, San Martin, Adriano de Moura e Dessislava Kochloukova, que tiveram influência direta na minha formação matemática e consequentemente na realização desse trabalho. Aos funcionários do IMECC, agradeço pelo zelo e cuidado. Em particular, à equipe da biblioteca, à Tânia e Livia da secretaria, ao pessoal da limpeza e à Dona Zefa, pela simpatia e pelo cafezinho. Agradeço de forma muito especial aos amigos Valter Camargo, Matheus Brito, Marcelo de Martino, Deborah Rangel, Jordan Lambert e Rodrigo Barbosa, sempre presentes nos dias bons e nos não tão bons, e à minha namorada e amiga Beatriz Guedes pelo cuidado, companheirismo e incentivo.

Aos meus pais e avós, primeiros e eternos professores, um carinhoso obrigado. A vocês devo tudo que sou.

Por fim, ao CNPq por ter financiado este trabalho.

Resumo

Neste trabalho os aspectos básicos da teoria de calibre são abordados, incluindo as noções de conexão e curvatura em fibrados principais e vetoriais, considerações sobre o grupo de transformações de calibre e o espaço de moduli de soluções para a equação anti-auto-dual em dimensão quatro (o espaço de moduli de instantons). Posteriormente, mapas momento e redução são introduzidos. Primeiramente, no contexto clássico de geometria simplética e depois no contexto de geometria hyperkähler. Por fim, são apresentadas aplicações da teoria de mapas momento e redução em teoria de calibre. As equações ADHM são introduzidas e mostra-se que estas podem ser dadas como o conjunto de zeros de um mapa momento hyperkähler. Além disso, considerações são feitas acerca da construção ADHM de instantons, que relaciona soluções dessas equações com as soluções da equação de anti-auto-dualidade. O espaço de moduli de conexões planas é também abordado. Neste caso, a curvatura é vista como um mapa momento e os cálculos podem ser generalizados para o espaço de moduli de conexões planas sobre variedades Kähler de dimensões mais altas e para o espaço de moduli de instantons sobre variedades hyperkähler de dimensão quatro.

Palavras-chave: fibrado principal, fibrado vetorial, conexão, curvatura, instanton, espaço de moduli, geometria Kähler, geometria hyperkähler, mapa momento, redução simplética, quociente hyperkähler, ADHM.

Abstract

In this work it is developed the basic concepts of gauge theory, including the notions of connections and curvature on principal bundles and vector bundles, considerations on the group of gauge transformations and the moduli space of anti-self-dual connections in dimension four (the instanton moduli space). After, moment maps and reduction are introduced. First in the classical context of symplectic geometry, then in hyperkähler geometry. At last, applications to the theory of moment maps and reduction in gauge theory are given. The ADHM equations are introduced and it is shown that solutions to these equations can be given by the zeros of a hyperkähler moment map. Furthermore, the ADHM construction, that relates the ADHM equations to instanton solutions, is discussed. The moduli space of flat connections over a Riemann surface is also treated. In this case, the curvature is seen as a moment map and the calculations can be generalized to flat connections over higher-dimensional Kähler manifolds and to the instanton moduli space over four dimensional hyperkähler manifolds.

Keywords: principal bundles, vector bundles, connection, curvature, instanton, moduli space, Kähler geometry, hyperkähler geometry, moment map, symplectic reduction, hyperkähler reduction, ADHM.

Sumário

Resumo	ix
Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução	xv
1 Teoria de Calibre	1
1.1 Fibrados Principais	1
1.2 Fibrados Vetoriais	8
1.2.1 Considerações Gerais	8
1.2.2 Fibrados Associados	14
1.3 Conexão e Curvatura	16
1.3.1 Conexão e Curvatura em Fibrados Principais	16
1.3.2 Conexão e Curvatura em Fibrados Vetoriais	26
1.3.3 Derivada Covariante no Fibrado Associado	30
1.4 Grupo de Transformações de Calibre	33
1.4.1 Ação do Grupo de Transformações de Calibre	35
1.5 Instantons	37
1.6 Espaço de Moduli de Instantons	39
2 Mapas Momento e Redução	43
2.1 Geometria Simplética	43
2.1.1 Mapa Momento	48
2.1.2 Redução	54
2.2 Geometria Kähler	55

2.3	Geometria Hyperkähler	71
2.3.1	Mapa Momento e Redução	73
3	Aplicações	79
3.1	Equações ADHM	79
3.1.1	Considerações sobre a construção ADHM de instantons	84
3.2	Espaço de Moduli de Conexões Planas	86
A	Formas Diferenciais	93
B	Forma volume e Estrela de Hodge	99
C	Geometria Riemanniana	103
D	Sobre o fibrado vetorial $\mathfrak{g}_E$	107
	Referência Bibliográfica	109

Introdução

A interação entre a física e a matemática ao longo do tempo é evidente. A mecânica newtoniana e o cálculo, a teoria da relatividade geral de Einstein e a geometria riemanniana e, mais recentemente, a teoria das cordas e a geometria algébrica são alguns exemplos onde esta interação se mostrou vital para ambas as áreas. Outro personagem importante dessa história é a teoria de calibre. Formulada por físicos na década de 50 e 60, a teoria de calibre, cujas raízes remontam ao estudo do electromagnetismo, despertou o interesse da comunidade matemática apenas no final da década de 70, quando percebeu-se que a teoria física podia ser entendida a partir do conceito de fibrados e conexões. A teoria de calibre gerou espetaculares avanços em topologia e na geometria, incluindo um melhor entendimento das variedades de dimensão quatro através dos invariantes definidos no espaço de moduli de instantons, introduzidos pelo medalhista Fields Simon Donaldson.

Outro assunto abordado é o de mapa momento. Historicamente, estes objetos aparecem de maneira natural em mecânica clássica, como o momento linear e angular, antes mesmo de sua formalização como objeto de estudo em geometria simplética. O conceito de mapa momento e redução se mostrou extremamente frutífero em teoria de representações e geometria, sendo generalizado no contexto de geometria Kähler e hyperkähler (por Nigel Hitchin, em [20]) e, mais recentemente, para geometria complexa generalizada, por Marco Gualtieri, Gil Cavalcanti e Henrique Bursztyn. Como observado por Atiyah e Bott em [5], a curvatura de um fibrado pode ser vista como um mapa momento para a ação do grupo de transformações de calibre no espaço de conexões e, desde então, a teoria ganhou aplicações no estudo de espaços de moduli oriundos da teoria de calibre.

Esta dissertação é uma introdução à teoria de calibre e como mapas momento e redução fornecem uma maneira elegante de entender alguns aspectos da mesma. O texto está organizada da seguinte maneira. No capítulo 1 é dada uma introdução aos conceitos que permeiam a teoria de calibre. Fibrados principais (seção 1.1) e vetoriais (seção 1.2) são abordados, assim como a relação entre eles. As noções de conexão e curvatura são então discutidas (seção 1.3).

Definições equivalentes desses objetos são dadas e mostra-se a relação existente entre elas. Em particular, uma conexão num fibrado principal induz uma derivada exterior covariante nos fibrados associados e uma expressão explícita para este mapa é fornecida em 1.3.3. O grupo de transformações de calibre é introduzido, diferentes caracterizações são dadas e define-se a ação deste grupo no espaço de conexões. A noção de instantons (i.e., uma conexão cuja curvatura é anti-auto-dual) é abordada na seção 1.5 e comentários são feitos acerca do seu espaço de moduli. No segundo capítulo é feita uma introdução básica à geometria simplética, Kähler e hyperkähler, incluindo caracterizações através da conexão de Levi-Civita para as duas últimas geometrias. Mapas momento e o conceito de redução são introduzidos no contexto de geometria simplética e posteriormente generalizados para geometria hyperkähler. Por fim, aplicações da teoria são elaboradas no capítulo 3. Mostra-se que as equações ADHM podem ser entendidas como o conjunto de zeros de um mapa momento hyperkähler e são feitos comentários sobre a relação entre o espaço de soluções dessas equações, que possui uma estrutura hyperkahler, e o espaço de moduli de instantons. Por fim, o espaço de moduli de conexões planas é abordado no contexto de mapas momento e redução (Kähler) e é discutido como generalizar os resultados (clássicos) obtidos para fibrados sobre variedades Kähler mais gerais.

Capítulo 1

Teoria de Calibre

1.1 Fibrados Principais

Seja M uma variedade e G um grupo de Lie.

Definição 1.1.1. *Um G -fibrado principal (diferenciável) sobre M é uma tripla (P, π, ψ) , onde P é uma variedade diferenciável, $\pi : P \longrightarrow M$ é uma aplicação diferenciável sobrejetora e $\psi : P \times G \longrightarrow P$ uma ação (à direita) diferenciável, $\psi(p, g) = p \cdot g$, satisfazendo:*

1. ψ é invariante por π , i.e.,

$$\pi(p \cdot g) = \pi(p),$$

para todo $p \in P$ e $g \in G$.

2. (trivialidade local equivariante) Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M e uma família de difeomorfismos $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$ da forma

$$\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p)),$$

onde $g_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$ satisfaz

$$g_\alpha(p \cdot g) = g_\alpha(p)g,$$

para todo $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ e $g \in G$.

Denotaremos um G -fibrado principal sobre M por $P(M, G)$ e chamaremos P de *espaço total*, M de *espaço base*, π de *projeção*, G de *grupo estrutural*, $P_m \doteq \pi^{-1}(m)$ de *fibra* de P sobre m , U_α de *aberto trivializante* e φ_α de *trivialização local* (às vezes chamaremos também de trivialização local o par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$).

Definição 1.1.2. *Seja $P(M, G)$ um G -fibrado principal. Uma seção local é um mapa $s : U \subseteq M \longrightarrow P$ diferenciável (onde U é um aberto de M), tal que $\pi \circ s = Id_U$. Denotaremos o espaço de tais seções locais por $\Gamma(U, P)$ (ou, simplesmente, $\Gamma(U)$, se o fibrado estiver subentendido). Caso $U = M$, dizemos que s é uma seção global do fibrado.*

Seguem das definições algumas observações imediatas:

1. $\dim P = \dim M + \dim G$

Basta notar que uma trivialização local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ nos dá o isomorfismo $d\varphi_\alpha(p) : T_p P \longrightarrow T_{\pi(p)} M \times T_{g_\alpha(p)} G$ (onde identificamos da maneira natural $T_{(\pi(p), g_\alpha(p))}(M \times G) \cong T_{\pi(p)} M \times T_{g_\alpha(p)} G$).

2. π é submersão (i.e., $d\pi_p$ é sobrejetora para todo $p \in P$)

Sabe-se que a projeção no primeiro fator $p_1 : M \times G \longrightarrow M$ é uma submersão. Sendo assim, dado $m \in U_\alpha \subseteq M$ (onde $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é uma trivialização local), $p \in P_m$ e $\tau \in T_m M$, existe $(\varsigma, \nu) \in T_m M \times T_{g_\alpha(p)} G$ (p_1 é submersão), tal que $dp_1(m, g_\alpha(p))(\varsigma, \nu) = \tau$. Além disso, existe único $v \in T_p P$ tal que $d\varphi_\alpha(p)(v) = (\varsigma, \nu)$. Segue que $\tau = dp_1(m, g_\alpha(p))(\varsigma, \nu) = dp_1(m, g_\alpha(p))d\varphi_\alpha(p)(v) = d(p_1 \circ \varphi_\alpha)(p)(v) = d\pi(p)(v)$.

3. $\pi^{-1}(\pi(p)) = \{p \cdot g \mid g \in G\} = p \cdot G$, para todo $p \in P$:

De fato, dado $q \in \pi^{-1}(\pi(p))$, seja U_α um aberto trivializante contendo $\pi(q) = \pi(p) = m$ e $\varphi_\alpha = (\pi, g_\alpha)$ a trivialização local associada. Então, colocando $h = g_\alpha(p)^{-1}g_\alpha(q) \in G$ (produto em G), $\varphi_\alpha(p \cdot h) = (m, g_\alpha(p)h) = (m, g_\alpha(q)) = \varphi_\alpha(q)$ e temos $q = p \cdot h \in p \cdot G$ (φ_α é, em particular, injetora). A outra inclusão segue diretamente do item 1 da definição de fibrado principal.

Segue diretamente que $P_m \cong G$. Além disso, como π é submersão, as fibras P_m particionam P em subvariedades de dimensão $\dim G$.

4. A ação de G em P é livre (i.e., se $p \cdot g = p \Rightarrow g = e$, onde $e \in G$ é o elemento neutro de G)

Seja $p \in P$, com $\pi(p) = m \in U_\alpha$, e $g \in G$. Se $p \cdot g = p$, $\varphi_\alpha(p \cdot g) = (m, g_\alpha(p)g)$. Mas, $\varphi_\alpha(p) = (m, g_\alpha(p))$, logo $g_\alpha(p)g = g_\alpha(p)$ e $g = e$.

5. Note que, dada uma trivialização local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, temos um difeomorfismo entre a fibra sobre um ponto do aberto trivializante e G , a saber, $g_\alpha|_{P_m} : P_m \rightarrow G$. A estrutura natural de grupo em P_m herdada pelo difeomorfismo é simplesmente $p * q \doteq g_\alpha^{-1}(g_\alpha(p)g_\alpha(q))$. Como $q = p \cdot g$, para um único $g \in G$, e g_α é G -equivariante, chegamos na expressão $p * q = p \cdot g_\alpha(q)$ e $g_\alpha^{-1}(e)$ é claramente o elemento neutro. No entanto, como não existe um elemento neutro preferencial (ele depende da trivialização tomada), as fibras não são grupos de Lie.

Observação 1.1.1. *Nossa definição de fibrados principais está de acordo com [35]. Encontra-se também na literatura uma definição alternativa de fibrado principal. Pede-se, além da trivialidade local equivariante, que a ação de G seja livre e P/G seja uma variedade difeomorfa a M , de modo que a projeção seja uma submersão. Se o grupo de Lie G é compacto, por exemplo, as definições são equivalentes.*

Exemplo 1.1.1. *(fibrado trivial) Um G -fibrado principal trivial sobre uma variedade M é simplesmente $P = M \times G$ (G age naturalmente em P por multiplicação à direita, i.e., $(m, h) \cdot g = (m, hg)$, onde $m \in M$ e $g, h \in G$), com $\pi =$ projeção no primeiro fator. Dessa forma, temos uma trivialização global dada pela identidade.*

Note que pela proposição 1.1.1, mais adiante, um fibrado principal é trivial se, e somente se, admite uma seção global.

Exemplo 1.1.2. *(fibrado de referenciais) Dada uma variedade M (com $\dim M = n$), podemos associar um $GL(n, \mathbb{R})$ -fibrado principal, chamado fibrado de referenciais de M . Definimos o espaço total como o conjunto*

$$B(M) = \{(m, v_1, \dots, v_n) \mid m \in M \text{ e } (v_1, \dots, v_n) \text{ é uma base de } T_m M\}$$

Considere a seguinte ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em $B(M)$

$$(m, v_1, \dots, v_n) \cdot g = (m, v'_1, \dots, v'_n)$$

onde $g = (g_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ e $v'_j = \sum_{i=1}^n g_j^i v_i$.

A expressão acima é, de fato, uma ação à direita, pois $(m, v_1, \dots, v_n) \cdot 1_n = (m, v_1, \dots, v_n)$ (onde $1_n = (\delta_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ é a matriz identidade) e dado $h = (h_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$, temos que $((m, v_1, \dots, v_n) \cdot g) \cdot h = (m, v''_1, \dots, v''_n)$, onde $v''_j = \sum_{k=1}^n h_j^k v'_k = \sum_{k,i=1}^n h_j^k g_k^i v_i = \sum_{i=1}^n (gh)_j^i v_i$. Essa é exatamente a expressão do j -ésimo vetor da base de $(m, v_1, \dots, v_n) \cdot (gh)$.

Além disso, definindo $\pi : B(M) \longrightarrow M$ como a projeção natural em M , temos que a ação é claramente invariante por π .

Vamos dar agora estrutura de variedade para $B(M)$ e descrever as trivializações equivariantes do fibrado. Para isso, considere um sistema de coordenadas locais de M , $(U, \phi = (x_1, \dots, x_n))$. Assim, dado $(m, v_1, \dots, v_n) \in B(M)$, $m \in U$, podemos escrever

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m, \text{ onde } a_j^i = dx^i(m)(v_j) \in \mathbb{R}$$

Defina então o seguinte mapa

$$\begin{aligned} \varphi_U : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times GL(n, \mathbb{R}) \\ (m, v_1, \dots, v_n) &\longmapsto (m, A), \end{aligned}$$

onde $A = (a_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ (pois é uma mudança de base)

Este mapa é uma bijeção, com inversa $\varphi_U^{-1} : (m, g) \longmapsto (m, \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_m) \cdot g$. De fato, $(m, \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_m) \cdot g = (m, v_1, \dots, v_n)$, onde $v_j = \sum_{i=1}^n g_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m$ e como $dx^i(m)(v_j) = g_j^i$, temos que $\varphi \circ \varphi_U^{-1} = Id_{U \times GL(n, \mathbb{R})}$. Temos também $\varphi_U^{-1} \circ \varphi = Id_{\pi^{-1}(U)}$, pois $\varphi_U^{-1} \circ \varphi : (m, v_1, \dots, v_n) \longmapsto (m, A) \longmapsto (m, \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_m) \cdot A = (m, v_1, \dots, v_n)$.

Note ainda que φ é equivariante: $(m, v_1, \dots, v_n) \cdot g = (m, v'_1, \dots, v'_n)$, com $v'_j = \sum_{i=1}^n g_j^i v_i$ (como anteriormente). Seja, $A = (a_j^i)$, onde $a_j^i = dx^i(m)(v_j)$, e $gA = (c_j^i)$. Assim, $\varphi_U(m, v'_1, \dots, v'_n) = (m, B)$, $B = (b_j^i)$, onde $b_j^i = dx^i(m)(v'_j) = \sum_{k=1}^n g_j^k dx^i(m)(v_k) = \sum_{k=1}^n g_j^k a_k^i = c_j^i$.

Definimos, enfim, um sistema de coordenadas locais de $B(M)$ (a partir do sistema de coordenada

de $M(U, \phi)$ por $(\pi^{-1}(U), (\phi \circ \text{Id}_{GL(n, \mathbb{R})}) \circ \varphi_U)$ (onde pensamos em $GL(n, \mathbb{R})$ como um aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$). Verificando a compatibilidade de tais sistemas de coordenadas, e assim mostrando que de fato isso fornece uma estrutura diferenciável em $B(M)$, tem-se que π é diferenciável e φ_U é difeomorfismo (trivialização do fibrado).

Exemplo 1.1.3. (fibrado de Hopf quaterniônico) A construção do espaço projetivo quaterniônico é análoga à construção de $\mathbb{P}^n$ (exemplo 2.2.10), tomando cuidado apenas com o fato da multiplicação dos quaternions não ser comutativa. Em particular, podemos identificá-lo com S^{4n-1}/S^3 e considerar a projeção $\pi : S^{4n-1} \longrightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1}$. Temos que $G = Sp(1)$ (quaternions de norma 1) age à direita livremente em $S^{4n-1} \subseteq \mathbb{H}^n$ por multiplicação (à direita) em cada entrada. Os detalhes da construção do fibrado principal $S^{4n-1}(\mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1}, Sp(1))$ pode ser encontrada em [35]. Em particular, para $n=2$, $\mathbb{H}\mathbb{P}^1 \simeq S^4$ e temos o fibrado principal $S^7(S^4, Sp(1))$, que desempenha papel importante na teoria de calibre.

Proposição 1.1.1. Existe uma bijeção entre trivializações locais e seções locais do fibrado principal $P(M, G)$.

Prova. Dada uma trivialização local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, temos uma seção local, $s_\alpha : U_\alpha \subseteq M \longrightarrow P$, associada; basta colocar $s_\alpha(m) \doteq \varphi_\alpha^{-1}(m, e)$. De fato, $\exists! p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ tal que $\varphi_\alpha(p) = (m, e)$, mas $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$. Logo, $\pi(p) = m$ e $\pi \circ s_\alpha(m) = \pi(p) = m$. Além disso, s_α é diferenciável, pois é composição de aplicações diferenciáveis $m \mapsto (m, e) \mapsto \varphi_\alpha^{-1}(m, e)$.

Para a recíproca, considere $s \in \Gamma(U)$ e $p \in \pi^{-1}(U)$. Como $P_{\pi(p)} = s(\pi(p)) \cdot G$, existe um único $g(p) \in G$ tal que $p = s(\pi(p)) \cdot g(p)$ (i.e., temos um mapa $g : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$). Defina $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ por $\varphi(p) = (m, g(p))$. Se $\varphi(p) = \varphi(q)$, $\pi(p) = \pi(q)$ e $g(p) = g(q)$. Assim, $p = s(\pi(p)) \cdot g(p) = s(\pi(q)) \cdot g(q) = q$ e φ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(m, h) \in U \times G$, $\varphi(s(m) \cdot h) = (m, h)$, pois $g(s(m) \cdot h)$ é definido como o único elemento de G satisfazendo $s(m) \cdot h = s(\pi(s(m) \cdot h)) \cdot g(s(m) \cdot h) = s(m) \cdot g(s(m) \cdot h)$ e como a ação é livre, obtemos $g(s(m) \cdot h) = h$. Note também que φ é equivariante. De fato, dados $p \in \pi^{-1}(U)$ e $h \in G$, $p \cdot h = s(\pi(p \cdot h)) \cdot g(p \cdot h) = (s(\pi(p)) \cdot g(p)) \cdot g(p)^{-1}g(p \cdot h) = p \cdot g(p)^{-1}g(p \cdot h)$. Logo, pela ação ser livre, temos $g(p \cdot h) = g(p)h$. $\square$

Considere agora duas trivializações locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (\pi, g_\alpha))$ e $(U_\beta, \varphi_\beta = (\pi, g_\beta))$, com $U_{\alpha\beta} \doteq U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Podemos definir a aplicação diferenciável $\bar{g}_{\alpha\beta} : \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \longrightarrow G$, $p \mapsto g_\alpha(p)g_\beta(p)^{-1}$ ($\bar{g}_{\alpha\beta}$ é diferenciável, pois é uma composição de aplicações diferenciáveis, $p \mapsto (g_\alpha(p), g_\beta(p)) \mapsto g_\alpha(p)g_\beta(p)^{-1}$). Note que $\bar{g}_{\alpha\beta}$ é constante nas fibras

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(p \cdot g) = g_\alpha(p \cdot g)g_\beta(p \cdot g)^{-1} = g_\alpha(p)g(g_\beta(p)g)^{-1} = g_\alpha(p)gg^{-1}g_\beta(p)^{-1} = \bar{g}_{\alpha\beta}(p)$$

Dessa forma, temos a aplicação $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$, definida por

$$g_{\alpha\beta}(m) = \bar{g}_{\alpha\beta}(p),$$

onde $p \in P_m$ é qualquer elemento da fibra de $m \in U_{\alpha\beta}$. A diferenciabilidade de $g_{\alpha\beta}$ segue do seguinte lema (tomando $F = g_{\alpha\beta}$, $X = G$ e notando que $g_{\alpha\beta} \circ \pi = \bar{g}_{\alpha\beta}$, com $\bar{g}_{\alpha\beta}$ diferenciável).

Lema 1.1.1. *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal, Y uma variedade diferenciável e $F : M \longrightarrow Y$ uma aplicação. Então, F é diferenciável se, e somente se, $F \circ \pi$ é diferenciável.*

Prova. Se F é diferenciável, $F \circ \pi$ também será por ser composição de aplicações diferenciáveis.

Suponha agora $F \circ \pi$ diferenciável. Localmente, em um aberto trivializante U_α do fibrado, temos

$$F|_{U_\alpha} = F \circ Id_{U_\alpha} = F \circ (\pi \circ s_\alpha) = (F \circ \pi) \circ s_\alpha$$

onde s_α é a seção local associada à trivialização com aberto trivializante U_α . Como diferenciabilidade é um conceito local, temos que F é diferenciável por ser composição de aplicações diferenciáveis. $\square$

Note que as função de transição $g_{\alpha\beta}$ aparecem naturalmente quando consideramos as trivializações locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) (com $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$). De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times G &\longrightarrow U_{\alpha\beta} \times G \\ (m, h) &\longmapsto (m, g_{\alpha\beta}(m)h) \end{aligned}$$

Basta observar que se $\varphi_\beta^{-1}(m, h) = p$, temos $\pi(p) = m$ e $g_\beta(p) = h$. Assim, $\varphi_\alpha(p) = (m, g_\alpha(p)) = (m, g_\alpha(p)g_\beta(p)^{-1}g_\beta(p)) = (m, g_{\alpha\beta}(m)h)$.

Além disso, tomando as seções locais, s_α e s_β , associadas as trivializações locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) , respectivamente, vale a seguinte relação:

$$s_\beta(m) = s_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m), \quad m \in U_{\alpha\beta}$$

De fato, suponha $s_\alpha(m) = \varphi_\alpha^{-1}(m, e) = p$. Assim, $\pi(p) = m$, $g_\alpha(p) = e$ e temos que $\varphi_\beta(p \cdot g_{\alpha\beta})(m) = (m, g_\beta(p)g_\alpha(p)g_\beta(p)^{-1}) = (m, e)$. Logo, segue o resultado.

As aplicações $g_{\alpha\beta}$ são chamadas *funções de transição* do fibrado principal $P(M, G)$ associadas às trivializações locais $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Elas satisfazem a chamada condição de cociclo:

Se $U_{\alpha\beta\gamma} \doteq U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$,

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}, \text{ em } U_{\alpha\beta\gamma} \text{ (condição de cociclo)}$$

De fato, dado $m \in U_{\alpha\beta\gamma}$ e $p \in P_m$,

$$g_{\alpha\beta}(m)g_{\beta\gamma}(m) = \bar{g}_{\alpha\beta}(p)\bar{g}_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha}(p)g_{\beta}(p)^{-1}g_{\beta}(p)g_{\gamma}(p)^{-1} = \bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(m)$$

Em particular, temos que:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha}(m) &= e \text{ (fazendo } U_{\beta} = U_{\gamma} = U_{\alpha}) \\ g_{\alpha\beta}(m) &= (g_{\beta\alpha}(m))^{-1} \text{ (fazendo } U_{\gamma} = U_{\alpha} \text{ e usando o item acima)} \end{aligned}$$

Vamos introduzir a noção de morfismos entre G-fibrados principais.

Definição 1.1.3. *Sejam $P_1(M_1, G)$ e $P_2(M_2, G)$ G-fibrados principais. Um morfismo de G-fibrados principais é um mapa diferenciável $f : P_1 \rightarrow P_2$, satisfazendo*

$$f(p \cdot g) = f(p) \cdot g,$$

onde $p \in P_1$, $g \in G$ (e estamos denotando as duas projeções por π).

Observações

1. A aplicação f induz uma aplicação diferenciável $\bar{f}$ entre os espaços base que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & M_2 \end{array}$$

De fato, dado $m \in U_{\alpha} \subseteq M_1$ (onde U_{α} é aberto trivializante de M_1 , com $s_{\alpha} \in \Gamma(U_{\alpha})$) defina

$$\bar{f}(m) = \pi(f(s_{\alpha}(m)))$$

Note que tal mapa é bem definido, pois se $m \in U_{\alpha\beta}$ (U_{α} e U_{β} abertos trivializantes), $s_{\beta}(m) = s_{\alpha}(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m)$ e $\pi(f(s_{\alpha}(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m))) = \pi(f(s_{\alpha}(m)) \cdot g_{\alpha\beta}(m)) = \pi(f(s_{\alpha}(m)))$. Segue imediatamente que $\bar{f}$ é diferenciável, pois composição de aplicações diferenciáveis, e $\bar{f}$ faz o diagrama comutar.

2. A restrição de f à $(P_1)_m$ nos dá um difeomorfismo entre esta fibra e a fibra $(P_2)_{\bar{f}(m)}$.
Dado $p \in (P_1)_m$, como o diagrama comuta devemos ter $\pi(f(p)) = \bar{f}(\pi(p)) = \bar{f}(m)$, de modo que a imagem da fibra $(P_1)_m$ por f está contida na fibra $(P_2)_{\bar{f}(m)}$. Além disso, como $(P_1)_m = p \cdot G$, $(P_2)_{\bar{f}(m)} = f(p) \cdot G$ e $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$, temos uma bijeção entre as fibras pela f .
3. Claramente, a definição acima pode ser generalizada para fibrados principais com grupos estruturais diferentes (basta tomarmos, além da aplicação entre os espaços totais, um homomorfismo de Lie entre os grupos estruturais, de modo que nossa definição seria o caso particular de tal homomorfismo ser a identidade). A definição apresentada, no entanto, será suficiente para os propósitos do texto.

Desempenhará no texto um papel de destaque o conceito de morfismos de G -fibrados principais com mesma base (ou seja, $M_1 = M_2 = M$ e $\bar{f} = Id_M$). Em particular, o conjunto dos isomorfismos do fibrado $P(M, G)$ será denotado por $\text{Aut}(P)$ e este será discutido de forma mais detalhada na seção 1.4.

Dadas funções satisfazendo as condições de cociclo é possível reconstruir o fibrado. Nos referimos à proposição 5.2 do [26] para a demonstração desse resultado.

Teorema 1.1.1. *Seja G um grupo de Lie, M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M . Dadas funções $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$, satisfazendo as condições de cociclo, existe um fibrado principal sobre M , $P(M, G)$, cujas funções de transição são exatamente $\{g_{\alpha\beta}\}$. Além disso, esse fibrado é única (a menos de equivalência).*

1.2 Fibrados Vetoriais

1.2.1 Considerações Gerais

Seja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.2.1. *Um $\mathbb{F}$ -fibrado vetorial (diferenciável), de posto r , sobre uma variedade M é um par (π, E) , onde E é uma variedade e $\pi : E \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável sobrejetora, satisfazendo:*

1. *Para cada $m \in M$, a fibra $E_m \doteq \pi^{-1}(m)$ é um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial.*

2. (*trivialidade local*) Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M e uma família de difeomorfismos $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V$ da forma $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), \phi_\alpha(p))$, de modo que

$$\phi_\alpha|_{E_m} : E_m \longrightarrow V \text{ é um isomorfismo } \mathbb{F}\text{-linear},$$

onde V é um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial de dimensão $\dim_{\mathbb{F}} V = r$.

Chamamos E de *espaço total* (ou, por abuso de notação, de $\mathbb{F}$ -fibrado vetorial, ou simplesmente de fibrado vetorial, caso $\mathbb{F}$ não seja importante ou esteja subentendido), M de *espaço base*, π de *projeção*, $E_m \doteq \pi^{-1}(m)$ de *fibra de E sobre m* , U_α de *aberto trivializante* e φ_α de *trivialização local* (às vezes chamaremos também de trivialização local o par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$). É interessante permitir que V seja um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial qualquer, mas não há perda de generalidade em supor que $V = \mathbb{F}^r$ e $GL(r, \mathbb{F})$ é dito o *grupo de estrutura* do fibrado. Chamaremos E de *fibrado vetorial complexo (real)* se E é um $\mathbb{C}$ -fibrado vetorial ($\mathbb{R}$ -). Além disso, fibrados de posto $r = 1$, serão chamados de *fibrados de linha*.

Seja $m \in U_{\alpha\beta}$. Então, temos dois isomorfismos $\mathbb{F}$ -lineares:

$$\begin{aligned} \phi_\alpha|_{E_m} : E_m &\longrightarrow V \\ \phi_\beta|_{E_m} : E_m &\longrightarrow V \end{aligned}$$

Defina então,

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\longrightarrow GL(V) \\ m &\longmapsto \phi_\alpha|_{E_m} \circ \phi_\beta|_{E_m}^{-1} \end{aligned}$$

As aplicações diferenciáveis $\phi_{\alpha\beta}$ são chamadas de *funções de transição* do fibrado vetorial E e $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ é chamado de *cociclo*, com respeito a $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, e claramente vale a seguinte relação:

Se $U_{\alpha\beta\gamma} \doteq U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$,

$$\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma} = \phi_{\alpha\gamma}, \text{ em } U_{\alpha\beta\gamma} \text{ (condição de cociclo)}$$

Observação 1.2.1. O termo *cociclo* é motivado por $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ ser, de fato, um cociclo em uma teoria de cohomologia (a cohomologia de Čech de feixes [43], [8]).

Definição 1.2.2. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial de posto r e $U \subseteq M$ um aberto.*

- a) *Uma aplicação suave $s : U \longrightarrow E$ satisfazendo $\pi \circ s = Id_U$ é chamada seção local de E , e seu conjunto denotado por $\Gamma(U)$. Se $U = M$, dizemos que s é uma seção global.*
- b) *Um referencial local de E é um conjunto de seções locais $s_i \in \Gamma(U)$, $i = 1, \dots, r$, tal que $\{(s_1)_m, \dots, (s_r)_m\}$, é uma base de E_m , para todo $m \in U$.*

Claramente, se $E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial real e $U \subseteq M$ é um aberto, temos que $\Gamma(U)$ é um módulo sobre o anel de funções em U , $C^\infty(U)$. De fato, se $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ e $s \in \Gamma(U)$, $(fs)(m) \doteq f(m)s(m)$ é outra seção em $\Gamma(U)$. No caso em que E é um fibrado vetorial complexo, $\Gamma(U)$ é um módulo também sobre funções suaves com valores em $\mathbb{C}$, $C^\infty(U; \mathbb{C})$ (que claramente é o mesmo que $C^\infty(U) \otimes \mathbb{C}$).

Proposição 1.2.1. *A escolha de uma trivialização local sobre um aberto $U \subseteq M$ é equivalente à escolha de um referencial local.*

Prova. Dada uma trivialização $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$, tome $\{v_1, \dots, v_r\}$ uma base de V e defina, para $m \in U$, $s_i(m) = \varphi^{-1}(m, v_i)$, $i = 1, \dots, r$. Este é claramente um referencial local, pois $(m, v_i) = \varphi(s_i(m)) = (\pi(s_i(m)), \phi(s_i(m)))$. Logo, $\pi(s_i(m)) = m$ e $\phi(s_i(m)) = v_i$. Como, $\phi|_{E_m}$ é isomorfismo, $\phi(s_i(m)) = v_i$ nos diz que $\{(s_1)_m, \dots, (s_r)_m\}$ é base de E_m . Se um referencial $\{s_1, \dots, s_r\}$ é dado, a trivialização φ correspondente é dada por $\varphi^{-1}(m, v) = \sum_{i=1}^r v^i(m)s_i(m)$, onde $v^i(m)$ são as componentes de v na base $\{(s_1)_m, \dots, (s_r)_m\}$. $\square$

Observação 1.2.2. *Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ uma base de V , φ_α e φ_β trivializações do fibrado, e $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\}$ e $\{s_1^\beta, \dots, s_r^\beta\}$ seus respectivos referenciais locais. A função de transição $\phi_{\alpha\beta}(m) \in GL(V)$ pode ser vista como a matriz $(h_j^i(m))$, dada por $\phi_{\alpha\beta}(m)v_i = \sum_{j=1}^r h_j^i(m)v_j$. No entanto, $s_i^\alpha(m) = \varphi_\alpha^{-1}(m, v_i)$, e assim, $\phi_\alpha(s_i^\alpha(m)) = v_i$. Aplicando o isomorfismo linear $\phi_\alpha|_{E_m}^{-1}$ na expressão que define $(h_j^i(m))$, obtemos $s_i^\beta(m) = \sum_{j=1}^r h_j^i(m)s_j^\alpha(m)$. Ou seja, fixada uma base de V , as funções de transição $\phi_{\alpha\beta}$ nos dão as matrizes de mudança de base do referencial β para o α .*

Exemplo 1.2.3. a) $M \times \mathbb{F}^r \longrightarrow M$ é claramente um fibrado vetorial de posto r , com $\pi =$ projeção em M (a trivialização é global e dada pela identidade). Tal fibrado é chamado trivial. Mais geralmente, dizemos que um fibrado de posto r é trivial se isomorfo a este. A

definição de morfismos entre fibrados será dada a seguir.

b) $TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$ e $\Lambda^k(T^*M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda^k(T_m M)^*$, com as projeções naturais em M são fibrados vetoriais. Suas seções globais são exatamente $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ (campos de vetores de M) e $\Gamma(\Lambda^k(T^*M)) = \Omega^k(M)$ (k -formas diferenciais de M). As trivializações do fibrado tangente, por exemplo, são dadas a partir de um sistema de coordenadas locais de M^n ($U, (x^1, \dots, x^n)$). Basta projetar um vetor de $T_m M$ em m , em U , e nas componentes desse vetor, com respeito à base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_m ; i = 1, \dots, n\}$, em $\mathbb{R}^n$. No caso em que a variedade M é complexa, os espaços tangentes são naturalmente espaços vetoriais complexos e o fibrado tangente será um fibrado vetorial complexo (teremos mais a dizer sobre variedades complexas e fibrados complexos ao longo do texto).

Definição 1.2.3. *Seja $E \rightarrow M$ um fibrado vetorial real. Uma métrica em E consiste numa escolha de produto interno $h_m : E_m \times E_m \rightarrow \mathbb{R}$ em cada fibra para cada $m \in M$. Essa escolha deve ser suave no sentido de que dadas seções locais s e t , contendo $m \in M$ em seus domínios, a função $m \mapsto h_m(s(m), t(m))$ é suave. Se o fibrado é complexo, pedimos que o produto interno seja hermitiano (com a mesma condição de suavidade) e chamamos tal fibrado de fibrado vetorial hermitiano.*

Observação 1.2.4. a) *A métrica riemanniana é um exemplo de métrica no fibrado tangente.*
b) *A presença de uma métrica num fibrado vetorial real de posto r nos permite ortonormalizar referenciais locais, de modo que as funções de transição associadas tomam valores em $O(r) \subseteq GL(r, \mathbb{R})$, dizemos nesse caso que o grupo de estrutura de E foi reduzido a $O(r)$ (no caso de fibrados hermitianos, o grupo de estrutura do fibrado pode ser reduzido a $U(r)$). Além disso, dizemos que um fibrado vetorial real de posto r é orientável se seu grupo de estrutura pode ser reduzido a $GL^+(r, \mathbb{R})$. Essa noção generaliza a orientabilidade de uma variedade, que, nesse caso, corresponde à orientabilidade de seu fibrado tangente. Assim, por exemplo, o grupo de estrutura de uma variedade riemanniana orientável de dimensão n pode ser reduzido a $SO(n)$.*

Definição 1.2.4. *Dados dois fibrados vetoriais sobre M , $\pi_E : E \rightarrow M$ e $\pi_F : F \rightarrow M$. Um mapa diferenciável $\psi : E \rightarrow F$ é dito um morfismo entre os fibrados E e F , se*

1. $\pi_E = \pi_F \circ \psi$

2. Para todo $m \in M$, $\psi_m \doteq \psi|_{E_m} : E_m \rightarrow F_m$ é uma aplicação $\mathbb{F}$ -linear

Além disso, se ψ é um morfismo bijetor, dizemos que E e F são fibrados vetoriais isomorfos, e ψ é um isomorfismo de fibrados. Denotaremos por $\text{Hom}(E, F)$ o conjunto de morfismos entre E e F e, em particular, denotaremos por $\text{End}(E) = \text{Hom}(E, E)$.

Note que a condição 1 garante $\psi_m(E_m) \subseteq F_m$. De fato, se $p \in E_m$, $\pi_F \circ \psi(p) = \pi_E(p) = m$.

Isomorfismos entre fibrados podem ser caracterizados a partir das funções de transição.

Proposição 1.2.2. *Dois fibrados vetoriais, de posto r , $E \longrightarrow M$ e $F \longrightarrow M$ são isomorfos se, e somente se, existe uma cobertura de M $\{U_\alpha\}$ por abertos trivializantes e funções diferenciáveis $\lambda_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbb{F})$, satisfazendo:*

$$\phi_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \tau_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}, \text{ em } U_{\alpha\beta},$$

onde $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ e $\{\tau_{\alpha\beta}\}$ são os cociclos dos fibrados E e F , respectivamente (com respeito a $\{U_\alpha\}$).

Prova. Primeiramente, note que não há perda de generalidade em supor que o espaço vetorial V da definição de fibrado vetorial de posto r é $\mathbb{F}^r$ para ambos os fibrados E e F . Além disso, dados dois cociclos podemos supor sem perda de generalidade que estes são subordinados à mesma cobertura por abertos trivializantes (basta tomar interseções entre os abertos).

($\Rightarrow$) Seja $\psi : E \longrightarrow F$ um isomorfismo entre os fibrados, então $\psi_m : E_m \longrightarrow F_m$ é um isomorfismo linear. Defina para $m \in U_\alpha$:

$$\lambda_\alpha(m) = \phi_\alpha|_{E_m} \circ \psi_m^{-1} \circ (\tau_\alpha|_{F_m})^{-1} \in GL(r, \mathbb{F})$$

Defina λ_β da mesma forma, trocando α por β . Então, se $m \in U_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha(m) \tau_{\alpha\beta}(m) (\lambda_\beta(m))^{-1} &= \\ \phi_\alpha|_{E_m} \circ \psi_m^{-1} \circ (\tau_\alpha|_{F_m})^{-1} \circ \tau_\alpha|_{F_m} \circ \tau_\beta|_{F_m}^{-1} \circ \tau_\beta|_{F_m} \circ \psi_m \circ \phi_\alpha|_{E_m}^{-1} &= \\ \phi_{\alpha\beta}(m) & \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Se $m \in U_\alpha$, defina $\psi_m = (\tau_\alpha|_{F_m})^{-1} \circ (\lambda_\alpha(m))^{-1} \circ \phi_\alpha|_{E_m} : E_m \longrightarrow F_m$ que é, por definição, linear. A relação entre as funções de transição nos dá que

$$(\tau_\alpha|_{F_m})^{-1} \circ (\lambda_\alpha(m))^{-1} \circ \phi_\alpha|_{E_m} = (\tau_\beta|_{F_m})^{-1} \circ (\lambda_\beta(m))^{-1} \circ \phi_\beta|_{E_m}$$

e assim ψ_m está bem definida e definimos ψ por $\psi|_{E_m} = \psi_m$. Basta verificar a diferenciabilidade de ψ . Dado $p \in P$, $m \doteq \pi(p) \in U_\alpha$, para algum α . Tome a vizinhança $P|_{U_\alpha}$ de p , onde U_α é também um aberto de um sistema de coordenadas locais da variedade M (basta restringir, se necessário, o aberto trivializante U_α). Podemos pensar, por abuso de notação, que o difeomorfismo $(\pi_E, \phi_\alpha) : E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ é um sistema de coordenadas locais para $p \in E$. Pelo mesmo raciocínio, $(\pi_F, \tau_\alpha) : F|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ é um sistema de coordenadas locais para $\psi(p) \in F_m \subseteq F$. Queremos entender a diferenciabilidade da

aplicação $\tilde{\psi} \doteq (\pi_F, \tau_\alpha) \circ \psi \circ (\pi_E, \phi_\alpha)^{-1}$. Seja $(m', v) \in U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ e $(\pi_E, \phi_\alpha)(q) = (m', v)$ (i.e., $\pi_E(q) = m'$ e $\phi_\alpha(q) = v$). Agora, $q' \doteq \psi(q) = \psi_{m'}(q) = \tau_\alpha^{-1}(\lambda_\alpha(m'))^{-1}\phi_\alpha(q)$. Daí, $\tilde{\psi}(m', v) = (\pi_F, \tau_\alpha)(q') = (m', \lambda_\alpha(m')^{-1}v)$ e a aplicação $\tilde{\psi}$ é um difeomorfismo (e assim, ψ é difeomorfismo). $\square$

Assim como no caso de fibrados principais, as funções de transição determinam o fibrado vetorial.

Proposição 1.2.3. *Seja M uma variedade, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M e $\{g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(r, \mathbb{F})\}$ aplicações suaves satisfazendo as condições de cociclo. Então, existe um fibrado vetorial que admite trivializações para as quais as funções de transição são $\{g_{\alpha\beta}\}$. Além disso, se $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ satisfazem as condições de cociclo e estão relacionadas por aplicações $\lambda_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbb{F})$, como na Prop. 1.2.1, então os fibrados vetoriais determinados pelas duas famílias são isomorfos.*

Prova. Vamos dar um esboço da prova sem se importar com os detalhes mais técnicos. Seja $\{g_{\alpha\beta}\}$ satisfazendo a condição de cociclo. Defina o seguinte quociente:

$$E = \bigcup_{\alpha} (U_\alpha \times \mathbb{F}^r) / \sim$$

onde, $(m, v, \alpha) \sim (m', v', \beta) \Leftrightarrow m = m' \text{ e } g_{\beta\alpha}(m)v = v'$ (aqui, (m, v, α) é apenas uma notação para dizer que $m \in U_\alpha$).

Note que $[m, v, \alpha] = [m, g_{\beta\alpha}(m)v, \beta]$ e $\pi([m, v, \alpha]) \doteq m$ claramente está bem definida e é sobrejetora. Fixado α fica claro que a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r \\ [m, v, \alpha] &\longmapsto (m, v) \end{aligned}$$

será uma trivialização para o fibrado E (onde a estrutura diferenciável de E é dada para que isso seja um difeomorfismo).

Dessa forma, seguindo a notação do início da seção, $\varphi_\alpha = (\pi, \phi_\alpha)$, onde $\phi_\alpha([m, v, \alpha]) = v$. Vamos calcular as funções de transição para essas trivializações:

$$\phi_{\alpha\beta}(m)v = \phi_\alpha|_{E_m} \circ \phi_\beta|_{E_m}^{-1} v$$

Seja $q = \phi_\beta|_{E_m}^{-1} v \in E_m$ (i.e. $q = [m, v, \beta]$). Daí, $\phi_\alpha(q) = \phi_\alpha([m, g_{\alpha\beta}(m)v, \alpha]) = g_{\alpha\beta}(m)v$. Para a segunda parte, sejam E e E' os fibrados vetoriais determinados por $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$, respectivamente. Defina, para cada α , ψ_α em $E|_{U_\alpha}$ por $[m, v, \alpha] \longmapsto [m, \lambda_\alpha(m)v, \alpha]$. Primeiro, a aplicação está bem definida, pois para $m \in U_{\alpha\beta}$:

$$\psi_\alpha[m, v, \alpha] = [m, \lambda_\alpha(m)v, \alpha] = [m, g'_{\beta\alpha}(m)\lambda_\alpha(m)v, \beta]$$

Por outro lado,

$$\psi_\beta[m, v, \alpha] = \psi_\beta[m, g_{\beta\alpha}(m)v, \beta] = [m, \lambda_\beta(m)g_{\beta\alpha}(m)v, \beta]$$

Mas, a relação entre os cociclos dá que $g_{\beta\alpha}(m) = g'_{\beta\alpha}(m)\lambda_\alpha(m)$ e assim temos um difeomorfismo $\psi : E \longrightarrow E'$ que é um isomorfismo entre fibrados. $\square$

Observação 1.2.5. *Dados os fibrados vetoriais $E \longrightarrow M$, com cociclo $\{\phi_{\alpha\beta}\}$, e $F \longrightarrow M$, com cociclo $\{\tau_{\alpha\beta}\}$, podemos construir novos fibrados vetoriais, baseados nas construções da álgebra linear, a partir das funções de transição. Ao considerarmos as funções $(\phi_{\alpha\beta}^t)^{-1}$, que certamente satisfazem a condição de cociclo, obtemos o chamado fibrado dual a E (denotado por E^*), cujas fibras são identificadas com E_m^* . Isso está de acordo com a intuição, pois trivializações do fibrado correspondem a referenciais locais e uma função de transição $\phi_{\alpha\beta}$, visto como matriz, nada mais é que a mudança entre referenciais distintos (correspondentes a φ_α e φ_β). Agora, ao tomarmos os espaços vetoriais duais E_m^* , e considerarmos as bases duais, por álgebra linear, a matriz correspondente será a matriz inversa transposta da original. Outros exemplos são o fibrado produto tensorial $(E \otimes F)$, cujas funções de transição são $\phi_{\alpha\beta} \otimes \tau_{\alpha\beta}$ e o fibrado soma direta $(E \oplus F)$, cujas funções de transição são $\phi_{\alpha\beta} \oplus \tau_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \phi_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \tau_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$.*

Vimos no exemplo 1.1.2 que dada uma variedade M de dimensão n , podemos associar um $GL(n, \mathbb{R})$ -fibrado principal a partir do fibrado tangente $T(M)$, que é um fibrado vetorial. Mais geralmente, essa construção pode ser feita para fibrados vetoriais quaisquer $E \longrightarrow M$, onde definimos $B(E)$ como o conjunto de $(m, s_1(m), \dots, s_n(m))$, onde $\{s_1, \dots, s_n\}$ é um referencial local que contém m em seu domínio. Se o posto de E é r , $B(E)$ é um $GL(r, \mathbb{R})$ -fibrado principal. A seguir, veremos como, a partir de um fibrado principal, podemos associar um fibrado vetorial.

1.2.2 Fibrados Associados

Seja $\pi : P \longrightarrow M$ um G -fibrado principal, V um espaço vetorial e $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação (ou, equivalentemente uma ação à esquerda de G em V , $g \cdot v = \rho(g)v$). Dessa forma, existe uma ação à direita natural de G em $P \times V$ dada por:

$$(p, v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$$

De fato, $(p, v) \cdot e = (p, v)$ e $(p, v) \cdot gh = (p \cdot gh, \rho(h^{-1}g^{-1})v) = ((p \cdot g) \cdot h, \rho(h^{-1})\rho(g^{-1})v) = ((p, v) \cdot g) \cdot h$. Como a ação de G em P é livre, G age livremente em $P \times V$. Seja $E = (P \times V) / G$

(também denotado $P \times_\rho V$) e defina $\pi_E : E \longrightarrow M$, por $\pi_E([p, v]) = \pi(p)$. Essa aplicação está bem definida, pois $\pi(p \cdot g) = \pi(p)$.

Se $\varphi_\alpha = (\pi, g_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$ é uma trivialização de P , vale que $p = s_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p)$, para todo $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. De fato, p e $s_\alpha(\pi(p))$ estão na mesma fibra, então existe uma aplicação $h : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$ tal que $p \cdot h(p) = s_\alpha(\pi(p))$. Aplicando φ_α , obtemos $(\pi(p), g_\alpha(p)h(p)) = (\pi(p), e)$, logo segue o resultado. Assim, $[p, v] = [s_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p), v] = [s_\alpha(\pi(p)), \rho(g_\alpha(p))v]$. Então, defina:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times V \\ [p, v] &\longmapsto (\pi(p), \rho(g_\alpha(p))v)\end{aligned}$$

Como $p = s_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p)$ e $g_\alpha(s_\alpha(m)) = e$, a aplicação $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1} : (m, v) \longmapsto [s_\alpha(m), v]$ é inversa de $\tilde{\varphi}_\alpha$, e assim $\tilde{\varphi}_\alpha$ é uma bijeção.

Dado $[p, v] \in \pi_E^{-1}(U_\alpha)$ é sempre possível encontrar $U'_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq M$ que é um aberto de um sistema de coordenadas locais centrados em $\pi(p) \in M$. Assim, pedindo que $\pi_E^{-1}(U'_\alpha)$ seja um aberto de E , podemos pensar na restrição de $\tilde{\varphi}_\alpha$ a $\pi_E^{-1}(U'_\alpha)$ como um sistema de coordenadas para E . Dessa forma, $\tilde{\varphi}_\alpha$ é difeomorfismo, sua restrição à uma fibra induz um isomorfismo linear entre esta e V e π_E é suave, de modo que $E = P \times_\rho V \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial com fibra V ; o chamado *fibrado vetorial associado* a $P(M, G)$ e ρ .

Vamos agora entender as funções de transição do fibrado associado a partir das funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$ do fibrado principal. Lembre que $g_{\alpha\beta}(m) = g_\alpha(p)g_\beta(p)^{-1}$ para qualquer $p \in P_m$. Em particular, podemos colocar $p = s_\beta(m)$ (onde, $s_\beta(m)$ era a seção associada à trivialização $\varphi_\beta = (\pi, g_\beta)$) e obtemos $g_{\alpha\beta}(m) = g_\alpha(s_\beta(m))$. Tome $m \in U_{\alpha\beta}$ e $v \in V$. Queremos calcular $\phi_{\alpha\beta}(m)v = \phi_\alpha|_{E_m} \circ \phi_\beta|_{E_m}^{-1}v$, onde $\tilde{\varphi}_\alpha = (\pi, \phi_\alpha)$ e $\tilde{\varphi}_\beta = (\pi, \phi_\beta)$ são as trivializações de E correspondentes às trivializações do fibrado principal $\varphi_\alpha = (\pi, g_\alpha)$ e $\varphi_\beta = (\pi, g_\beta)$, respectivamente. Como, $\phi_\beta([p, v]) = \rho(g_\beta(p))v$, $\phi_\beta|_{E_m}^{-1}v = [p, \rho(g_\beta(p)^{-1})v]$. Colocando $p = s_\beta(m)$, $\phi_\beta|_{E_m}^{-1}v = [s_\beta(m), v]$ e assim, $\phi_{\alpha\beta}(m)v = \rho(g_\alpha(s_\beta(m)))v = \rho(g_{\alpha\beta}(m))v$. Resumindo:

Proposição 1.2.4. *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$ e $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação, onde V é um espaço vetorial. Então o fibrado vetorial associado $E = P \times_\rho V \longrightarrow M$ é o fibrado dado pelas funções de transição $\rho(g_{\alpha\beta}) : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(V)$.*

Observação 1.2.6. *Seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ uma base de V . Dada a trivialização $\tilde{\varphi}_\alpha$, obtemos o referencial local $\{s_1^\alpha, \dots, s_m^\alpha\}$, definido por $s_i^\alpha(m) = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(m, v_i) = [s_\alpha(m), v_i]$, para $i = 1, \dots, m$.*

Exemplo 1.2.7. *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal.*

- a) *Se $G \subseteq GL(V)$, temos a representação canônica $G \hookrightarrow GL(V)$ e assim o fibrado vetorial associado tem as mesmas funções de transição do fibrado principal original. Em particular, o grupo de estrutura do fibrado associado foi reduzido ao grupo estrutural do fibrado principal.*
- b) *Tomando $V = \mathfrak{g}$, o grupo age na álgebra de Lie através da representação adjunta $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$. Chamamos o fibrado vetorial $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ de fibrado de álgebras de Lie, e denotamos esse fibrado por $\mathfrak{g}_P$.*

Observação 1.2.8. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial real de posto r , com funções de transição $\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(r, \mathbb{R})$. Vimos que era possível associar um $GL(r, \mathbb{R})$ -fibrado principal, o fibrado de referenciais $B(E)$. Cada referencial S em $m \in M$ pode ser visto como um isomorfismo linear $S : \mathbb{R}^r \longrightarrow E_m$ (que leva a base canônica de $\mathbb{R}^r$ no referencial em m). Daí, se (π, ϕ_α) é uma trivialização de E , definimos uma trivialização de $B(E)$, $\varphi_\alpha = (\pi_{B(E)}, g_\alpha) : B(E)|_{U_\alpha} \longrightarrow GL(r, \mathbb{R})$, por $\varphi_\alpha(m, p) \mapsto (m, \phi_\alpha|_{E_m} \circ p)$. Portanto, as funções de transição de $B(E)$ são $g_{\alpha\beta}(m) = g_\alpha(m, p)g_\beta(m, p)^{-1} = \phi_\alpha|_{E_m} \circ p \circ p^{-1} \circ \phi_\beta|_{E_m}^{-1} = \phi_{\alpha\beta}(m)$. Logo, as funções de transição de E e $B(E)$ são as mesmas. Agora, $GL(r, \mathbb{R})$ age em $\mathbb{R}^r$ por multiplicação de matrizes (i.e. a representação é a identidade). Daí o fibrado associado a $B(E)$ por essa ação canônica tem funções de transição iguais ao do fibrado E e, portanto, tal fibrado associado deve ser isomorfo ao fibrado vetorial original.*

1.3 Conexão e Curvatura

1.3.1 Conexão e Curvatura em Fibrados Principais

Conexão

Seja $\pi : P \longrightarrow M$ um G -fibrado principal e $\psi(p, g) = p \cdot g$ a ação à direita de G em P . Dados $p \in P$ e $g \in G$, denotaremos por $\psi_g : P \longrightarrow P$ ($\psi_p : G \longrightarrow P$) a aplicação diferenciável $p \longmapsto p \cdot g$ ($g \longmapsto p \cdot g$).

Definição 1.3.1. *Dado $p \in P$, $d\pi_p : T_p P \longrightarrow T_{\pi(p)} M$ é uma aplicação linear e podemos definir o subespaço vetorial $V_p = \ker d\pi_p \subseteq T_p P$, chamado subespaço vertical de $T_p P$. Se um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(P)$ satisfaz $X_p \in V_p$, para todo $p \in P$, este será chamado de vertical, e o conjunto de tais campos denotado por $\mathfrak{X}^V(P)$.*

Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie do grupo G . Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, a partir da ação de G em P , é possível associar um campo de vetores $X_\xi \in \mathfrak{X}(P)$, chamado campo de vetores fundamental associado a ξ , dado por

$$(X_\xi)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \cdot \exp(t\xi)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_p \circ \exp(t\xi) = d\psi_p(e)\xi$$

Denotemos por $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ a aplicação $\xi \longmapsto X_\xi$.

Proposição 1.3.1. *A aplicação $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Além disso, se $\sigma(\xi) = X_\xi$ se anula em algum ponto de P , então $\xi = 0$.*

Prova. Veja página 310, capítulo 8, de [41] □

Campos fundamentais são verticais, pois dado $\xi \in \mathfrak{g}$, temos que $d\pi_p d\psi_p(e)\xi = d(\pi \circ \psi_p)(e)\xi$, mas $\pi \circ \psi_p : g \in G \longmapsto \pi(p \cdot g) = \pi(p) \in M$, ou seja, é uma aplicação constante e assim, $d\pi_p d\psi_p(e)\xi = 0$. Portanto, $d\psi_p(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow V_p$ e $X_\xi \in \mathfrak{X}^V(P)$. Mas, como π é uma submersão, pelo teorema do núcleo e imagem, devemos ter que $\dim V_p = \dim M - \dim P = \dim G = \dim \mathfrak{g}$ e pela proposição acima, $d\psi_p(e)$ é injetiva (pois, se $d\psi_p(e)\xi = \sigma(\xi)_p = 0 \Rightarrow \xi = 0$). Concluimos assim que $d\psi_p(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow V_p$ é um isomorfismo linear.

Observação 1.3.1. *Como π é uma submersão, as fibras são subvariedades (difeomorfas a G), e o espaço vertical V_p nada mais é que $T_p\pi^{-1}(\pi(p))$. De fato, dado $v \in T_p\pi^{-1}(\pi(p))$, existe uma curva diferenciável $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \pi^{-1}(\pi(p))$, com $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Logo, $\pi \circ c(t) = \pi(p)$ e derivando em $t = 0$ obtemos $d\pi(p)v = 0$ (i.e., $v \in V_p$). Por outro lado, se $v \in V_p$, $\exists! \xi \in \mathfrak{g}$, tal que $v = d\psi_p(e)\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \cdot \exp(t\xi))$. Como a curva $\gamma(t) = p \cdot \exp(t\xi)$ é tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ e $\pi \circ \gamma(t)$ é constante igual a $\pi(p)$, segue que $v \in T_p\pi^{-1}(\pi(p))$.*

O subespaço vertical associado a um ponto $p \in P$ determina todos os outros espaços verticais associados a pontos da mesma fibra de p , através da ação à direita de G em P .

Lema 1.3.1. $d\psi_g(p)V_p = V_{p \cdot g}$

Prova. Seja $v \in V_p$ (i.e., $d\pi_p v = 0$). Então, $d\pi(p \cdot g)d\psi_g(p)v = d(\pi \circ \psi_g)(p)v = d\pi(p)v = 0$, onde usamos que $\pi \circ \psi_g(p) = \pi(p \cdot g) = \pi(p)$, e assim obtemos que $d\psi_g(p)V_p \subseteq V_{p \cdot g}$. Para a outra inclusão, tome $v \in V_{p \cdot g}$. Como $d\psi_{p \cdot g}(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow V_{p \cdot g}$ é um isomorfismo linear, $\exists! \xi \in \mathfrak{g}$, tal que $v = d\psi_{p \cdot g}(e)\xi = d(\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g})(e)\xi = d\psi_g(p)d(\psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g})(e)\xi$. Mas, $d\pi(p)d(\psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g})(e)\xi = d(\pi \circ \psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g})(e)\xi$. Como $\pi \circ \psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g} : h \in G \longmapsto \pi(p \cdot ghg^{-1}) = \pi(p)$, ou seja, é uma aplicação constante, devemos ter $d(\psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g})(e)\xi \in V_p$. □

Além disso, vale a seguinte relação.

Lema 1.3.2. $d\psi_g X_\xi = X_{Ad(g^{-1})\xi}$

Prova. Isso segue do seguinte cálculo

$$\begin{aligned} (X_{Ad(g^{-1})\xi})_{p \cdot g} &= d\psi_{p \cdot g}(e) Ad(g^{-1})\xi = d\psi_{p \cdot g}(e) dC_{g^{-1}}(e)\xi = d(\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g} \circ C_{g^{-1}})(e)\xi \\ &= d\psi_g(p) d(\psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g} \circ C_{g^{-1}})(e)\xi \end{aligned}$$

Como $\psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g} \circ C_{g^{-1}} : h \in G \mapsto ((p \cdot g) \cdot (g^{-1}hg)) \cdot g^{-1} = p \cdot h$, temos que $\psi_{g^{-1}} \circ \psi_{p \cdot g} \circ C_{g^{-1}} = \psi_p$. Logo, $(X_{Ad(g^{-1})\xi})_{p \cdot g} = d\psi_g(p)(X_\xi)_p$. $\square$

Definição 1.3.2. *Seja P uma variedade de dimensão d e k um inteiro, com $1 \leq k \leq d$. Uma distribuição D , k -dimensional, é uma aplicação que associa a cada $p \in P$ um subespaço $D_p \subseteq T_p P$ de dimensão k . Dizemos que a distribuição D é suave se, para cada $p \in P$, existir uma vizinhança U de p e campos de vetores $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, tais que $\{(X_1)_q, \dots, (X_k)_q\}$ é uma base de D_q , para todo $q \in U$.*

Até aqui associamos a cada ponto $p \in P$ um subespaço de $T_p P$ isomorfo à álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de maneira G -invariante. Esta é uma distribuição suave, visto que uma base de $\mathfrak{g}$ fornece (via σ) a condição de suavidade. Não existe, no entanto, um complemento natural para V_p em $T_p P$. Esse problema será sanado a partir da introdução do conceito de conexão no fibrado principal $P(M, G)$.

Definição 1.3.3. *Uma conexão (de Ehresmann) no fibrado principal $P(M, G)$ é uma distribuição suave H (chamada de horizontal), satisfazendo:*

1. $T_p P = V_p \oplus H_p$, para todo $p \in P$
2. $d\psi_g(p)H_p = H_{p \cdot g}$, para todo $p \in P$ e $g \in G$ (i.e. H é G -invariante).

Observação 1.3.2. *Segue do primeiro item da definição que a distribuição horizontal deve ter dimensão igual a $\dim P - \dim G = \dim M$. Além disso, como $V_p = \ker d\pi_p$, obtemos que $d\pi_p : H_p \xrightarrow{\sim} T_{\pi(p)} M$ é um isomorfismo linear.*

Exemplo 1.3.3. *Seja g uma métrica Riemanniana G -invariante de P . Então, $H_p \doteq V_p^\perp = \{v \in T_p P \mid g_p(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in V_p\}$ nos fornece uma conexão em $P(M, G)$.*

O primeiro item da definição é claramente satisfeito.

Vamos mostrar a G -invariância, ou seja, $d\psi_g(p)V_p^\perp = V_{p \cdot g}^\perp$.

i) Dado $v \in V_p^\perp$, queremos mostrar que $g_{p \cdot g}(d\psi_g(p)v, u) = 0$, para todo $u \in V_{p \cdot g}$. Como

$d\psi_g(p)V_p = V_{p \cdot g}$, seja $v_1 \in V_p$ tal que $d\psi_g(p)v_1 = v$. Pela G -invariância da métrica, $g_{p \cdot g}(d\psi_g(p)v, d\psi_g(p)v_1) = g_p(v, v_1) = 0$. A última igualdade vem do fato de $v \in V_p^\perp$ e $v_1 \in V_p$.
ii) Dado $v \in V_{p \cdot g}^\perp$. Então, podemos escrever $v = d\psi_g(p)d\psi_{g^{-1}}(p \cdot g)v$. Vamos mostrar que $d\psi_{g^{-1}}(p \cdot g)v \in V_p^\perp$. Seja $u \in V_p$, então $g_p(d\psi_{g^{-1}}(p \cdot g)v, u) = g_{p \cdot g}(v, d\psi_g(p)u) = 0$, pois $u \in V_p \Rightarrow d\psi_g(p)u \in V_{p \cdot g}$.

Conexões aparecem de maneira intuitiva, quando definidas a partir de distribuições suaves. No entanto, distribuições não necessariamente fornecem a maneira mais fácil de lidar com tais objetos. Alternativamente, podemos tentar caracterizar as conexões como projeções em subespaços verticais (que, como vimos, podem ser pensados como a álgebra de Lie de G), satisfazendo algum tipo de invariância pela ação de G em P . Isso será obtido através do conceito de uma 1-forma de conexão.

Definição 1.3.4. Uma 1-forma de conexão é uma 1-forma diferencial de P com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, satisfazendo:

1. $\omega(\sigma(\xi)) = \xi$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$
2. $\psi_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$, para todo $g \in G$

Observação 1.3.4. Abrindo os itens da definição, temos que:

1. $\omega(p)(d\psi_p(e)\xi) = \xi$, onde $p \in P$, $\xi \in \mathfrak{g}$
2. $\omega(p \cdot g)(d\psi_g(p)v) = Ad_{g^{-1}}(\omega(p)v)$, onde $g \in G$, $v \in T_p P$.

Denotaremos o espaço das 1-formas de conexão por $\mathcal{A}$.

Proposição 1.3.2. $\mathcal{A} \neq \emptyset$

Prova. Seja θ a forma de Maurer-Cartan (ver apêndice A). Então, $\omega_\alpha \doteq g_\alpha^* \theta$ é uma 1-forma de conexão para o fibrado trivial $P|_{U_\alpha}$ (onde $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (\pi, g_\alpha))$ é uma trivialização do fibrado $P(M, G)$). De fato,

- i) Dado $p \in P|_\alpha$ e $\xi \in \mathfrak{g}$, $\omega_\alpha(p)(d\psi_p(e)\xi) = \theta(g_\alpha(p))(dg_\alpha(p)d\psi_p(e)\xi) = d(L_{g_\alpha(p)^{-1}} \circ g_\alpha \circ \psi_p)(e)\xi$. Como, $L_{g_\alpha(p)^{-1}} \circ g_\alpha \circ \psi_p : h \in G \mapsto g_\alpha(p)^{-1}g_\alpha(p \cdot h) = h$, temos $\omega_\alpha(p)(d\psi_p(e)\xi) = dId_G(e)\xi = \xi$.
- ii) $\psi_g^* g_\alpha^* \theta = (g_\alpha \circ \psi_g)^* \theta$, Mas, pela equivariância de g_α , $g_\alpha \circ \psi_g = R_g \circ g_\alpha$ e assim, $\psi_g^* g_\alpha^* \theta = g_\alpha^* R_g^* \theta = g_\alpha^* (Ad_g^{-1} \theta) = Ad_g^{-1} g_\alpha^* \theta$

Agora, basta tomar uma partição da unidade $\{\lambda_\alpha\}$ subordinada à cobertura aberta de M , $\{U_\alpha\}$, por abertos trivializantes do fibrado. Assim, definimos $\omega = \sum_\alpha \lambda_\alpha \omega_\alpha$. Sendo esta uma combinação afim de 1-formas, temos uma 1-forma de conexão em todo P (a combinação deve ser afim para que a primeira condição da definição de 1-forma de conexão seja satisfeita). $\square$

Lema 1.3.3. *O espaço das 1-formas de conexão $\mathcal{A}$ é um espaço afim modelado no espaço vetorial $\Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$.*

Prova. Isso segue diretamente da Prop. A.0.3 do apêndice. Dadas duas conexões $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, temos que $\omega_1 - \omega_2$ é uma forma básica e assim corresponde a um elemento de $\Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$. Além disso, fixado $\omega \in \mathcal{A}$, dado $\zeta \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$, $\omega + \zeta \in \mathcal{A}$ (onde usamos novamente a bijeção entre $\Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$ e $\Omega_G^1(P; \mathfrak{g})$). $\square$

Proposição 1.3.3. *Existe uma bijeção entre conexões (de Ehresmann) e 1-formas de conexão.*

Prova. i) Seja H uma conexão. Dado $v \in T_p P$, sejam $v^H \in H_p$ e $v^V \in V_p$, tais que $v = v^H + v^V$. Em particular, $\exists! \xi \in \mathfrak{g}$ com $v^V = d\psi_p(e)\xi$. Defina então, $\omega(p)v = \xi$ e note que $\omega_p : T_p P \rightarrow \mathfrak{g}$ é linear, pois $d\psi_p(e)$ é linear. Se $\zeta \in \mathfrak{g}$, $\sigma(\zeta) \in \mathfrak{X}^V(P)$ e a primeira condição para ω ser uma 1-forma de conexão é automaticamente satisfeita. A segunda condição é consequência do lema 1.3.2. De fato, tomando $v = v^V + v^H$ como anteriormente, pela G -invariância das distribuições (vertical e horizontal) $\omega(p \cdot g)(d\psi_g(p)v) = \omega(p \cdot g)(d\psi_g(p)d\psi_p(e)\xi) = \omega(p \cdot g)(d(\psi_g \circ \psi_p)(e)\xi)$. Mas, $\psi_g \circ \psi_p : h \in G \mapsto (p \cdot h) \cdot g = (p \cdot g) \cdot g^{-1}hg = \psi_{p \cdot g} \circ C_{g^{-1}}(h)$. Agora, $d(\psi_{p \cdot g} \circ C_{g^{-1}})(e)\xi = d\psi_{p \cdot g}(e)(Ad_{g^{-1}}\xi)$, logo $\omega(p \cdot g)(d\psi_g(p)v) = Ad_{g^{-1}}\xi = Ad_{g^{-1}}(\omega(p)v)$. Ainda precisamos verificar a diferenciabilidade de ω . Suponha $\dim G = k$ e $\dim M = n$ (e assim, $\dim P = n + k$). Numa vizinhança de P é possível, pela suavidade da distribuição horizontal, achar campos de vetores $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ que formam uma base para os espaços horizontais nessa vizinhança. Se $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$, temos uma base para os espaços tangentes nessa vizinhança dada pelos campos $\{Y_1, \dots, Y_n, \dots, \sigma(\xi_1), \dots, \sigma(\xi_k)\}$. Podemos escrever, $\omega = \sum_{j=1}^k \omega^j \xi_j$, onde ω^j são 1-formas de P . A 1-forma ω é diferenciável se cada ω^j o for. Uma 1-forma em P pode ser vista como uma aplicação $C^\infty(P)$ -linear de $\mathfrak{X}(P)$ a $C^\infty(P)$. Como $\omega^j(\sigma(\xi_i)) = \delta_j^i \in C^\infty(P)$ e $\omega^j(Y_i) = 0 \in C^\infty(P)$, ω é diferenciável.

ii) Seja agora $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ uma 1-forma de conexão. Como, dado $\xi \in \mathfrak{g}$, $\omega(p)(d\psi_p(e)\xi) = \xi$, i.e., ω_p é sobrejetiva para todo $p \in P$, o subespaço $H_p \doteq \ker(\omega_p) \subseteq T_p P$ tem dimensão constante para todo $p \in P$ (igual a $\dim M$). Primeiramente, $V_p \cap H_p = \{0\}$, pois se $v \in V_p \cap H_p$, $v = d\psi_p(e)\xi$, para algum $\xi \in \mathfrak{g}$, com $\omega(p)v = 0$, mas $\omega(p)v = \xi$. Além disso, dado $v \in T_p P$, $v = (v - d\psi_p(e)(\omega(p)v)) + d\psi_p(e)(\omega(p)v)$, claramente $v - d\psi_p(e)(\omega(p)v) \in H_p$ e $d\psi_p(e)(\omega(p)v) \in V_p$, de modo que, $T_p P = V_p \oplus H_p$. Vamos mostrar que essa distribuição, definida pelo núcleo da 1-forma de conexão, é G -invariante. Se $v \in H_p$, $\omega(p \cdot g)(d\psi_g(p)v) = Ad_{g^{-1}}(\omega(p)v) = 0$, logo $d\psi_g(p)H_p \subseteq H_{p \cdot g}$. Agora, dado $u \in H_{p \cdot g}$, $u = d(\psi_g \circ \psi_{g^{-1}})(p \cdot g)u = d\psi_g(p)d\psi_{g^{-1}}(p \cdot g)u$, e

$\omega(p)((d\psi_{g^{-1}})(p \cdot g)u) = \omega((p \cdot g) \cdot g^{-1})((d\psi_{g^{-1}})(p \cdot g)u) = Ad_g(\omega(p \cdot g)u) = 0$, logo temos também $H_{p \cdot g} \subseteq d\psi_g(p)H_p$ (mais diretamente, poderíamos notar que $d\psi_g$ é injetivo, pois ψ_g é difeomorfismo, e se $d\psi_g(p)H_p \subseteq H_{p \cdot g}$, como $\dim H_p = \dim H_{p \cdot g}$, vale $d\psi_g(p)H_p = H_{p \cdot g}$). Falta mostrar que a distribuição assim definida é suave. Para cada ponto, considere um aberto de um sistema de coordenadas locais de P e campos de vetores nessa vizinhança $\{Y_1, \dots, Y_{n+k}\}$ que fornecem uma base para o espaço tangente em cada ponto da vizinhança. Seja também $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ e $\omega = \sum_{j=1}^k \omega^j \xi_j$, onde ω^j são 1-formas de P . Para $i = 1, \dots, n+k$, defina

$$\bar{Y}_i = Y_i - \sum_{j=1}^k \omega^j(Y_i) \sigma(\xi_j)$$

Claramente, tais campos são horizontais. Além disso, dado um vetor horizontal, ele pode ser escrito como uma combinação linear $\sum_{r=1}^{n+k} b^r Y_r = \sum_{r=1}^{n+k} b^r \bar{Y}_r$, pois todos outros termos são verticais. Sendo assim, os $\bar{Y}_i$'s geram os espaços horizontais nessa vizinhança e é possível escolher n deles linearmente independentes (numa vizinhança possivelmente menor). $\square$

É possível dar uma terceira caracterização para conexões num fibrado principal $P(M, G)$, em termos de objetos da base M . Sejam $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha = (\pi, g_\alpha))\}$ as trivializações do fibrado, $\{s_\alpha\}$ as seções correspondentes e $\{g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G\}$ as funções de transição do fibrado (lembre que $s_\beta = s_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}$). Considere também a forma de Maurer-Cartan $\theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$, definida por $\theta_g = dL_{g^{-1}}$. Dada uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, denotemos por $\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^*(\omega) \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$ (chamados *potenciais de calibre*) e $\theta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^* \omega \in \Omega^1(U_{\alpha\beta}; \mathfrak{g})$. Apesar de $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ não formar uma 1-forma global em M (i.e. os pull-backs não coincidem), vale o seguinte

Proposição 1.3.4. *Dada uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, temos que*

$$\mathcal{A}_\beta = Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathcal{A}_\alpha + \theta_{\alpha\beta}, \text{ em } U_{\alpha\beta}$$

Antes de demonstrar a proposição precisamos do seguinte lema:

Lema 1.3.4. *Seja $\psi : P \times G \rightarrow P$, uma aplicação diferenciável. Então, podemos identificar naturalmente $T_{(p,g)}(P \times G) \simeq T_p P \times T_g G$ e vale*

$$d\psi_{(p,g)}(u, v) = d\psi_g(p)u + d\psi_p(g)v$$

para todo $p \in P$, $g \in G$, $u \in T_p P$ e $v \in T_g G$.

Prova. (Prop 1.3.3) Seja $m \in U_{\alpha\beta}$ e $v \in T_m M$. Temos que $s_\beta = \psi \circ (s_\alpha, g_{\alpha\beta})$ e pela regra da cadeia, aplicando o lema anterior para a ação ψ , obtemos

$$\begin{aligned} ds_\beta(m)v &= d\psi(s_\alpha(m), g_{\alpha\beta}(m))(ds_\alpha(m)v, dg_{\alpha\beta}(m)v) = \\ &= d\psi_{s_\alpha(m)}(g_{\alpha\beta}(m))(dg_{\alpha\beta}(m)v) + d\psi_{g_{\alpha\beta}(m)}(s_\alpha(m))(ds_\alpha(m)v) \end{aligned}$$

Vamos chamar o primeiro termo dessa soma de x e o segundo de y . Pelo segundo item da definição da 1-forma de conexão ω ,

$$\omega_{s_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m)}(y) = Ad_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}}(\omega_{s_\alpha(m)}(ds_\alpha(m)v)) =$$

$$Ad_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}}((s_\alpha^* \omega)_m v) = Ad_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}}(\mathcal{A}_\alpha(m)v)$$

Agora, $x = d(\psi_{s_\alpha(m)} \circ g_{\alpha\beta})(m)v$. Mas, $\psi_{s_\alpha(m)} \circ g_{\alpha\beta} = \psi_{s_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m)} \circ L_{g^{-1}} \circ g_{\alpha\beta}$. Logo, $x = d\psi_{s_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m)}(e)\xi$, onde $\xi = dL_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}}(g_{\alpha\beta}(m))dg_{\alpha\beta}(m)v \in \mathfrak{g}$. Temos então que $\omega_{s_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m)}(x) = \xi$. Por outro lado, $\theta_{\alpha\beta}(m)v = (g_{\alpha\beta}^* \omega)_m v = \theta_{g_{\alpha\beta}(m)}(dg_{\alpha\beta}(m)v) = dL_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}}(g_{\alpha\beta}(m))dg_{\alpha\beta}(m)v = \xi$. $\square$

Dada uma 1-forma de conexão ω , denote por ω_α sua restrição a $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Essas $\omega_\alpha \in \Omega^1(P|_{U_\alpha}; \mathfrak{g})$ podem ser descritas a partir das $\mathcal{A}_\alpha$. Antes de explicitar a relação, precisamos da seguinte observação. Seja $m \in U_\alpha$ e denote por $p = s_\alpha(m)$.

$$P|_{U_\alpha} \xrightarrow{\pi} U_\alpha \xrightarrow{s_\alpha} P|_{U_\alpha}$$

Chamemos, provisoriamente, de T a aplicação linear $d(s_\alpha \circ \pi)_p : T_p P \longrightarrow T_p P$. Como $\pi \circ s_\alpha = Id_{U_\alpha}$, vale $d\pi(p)ds_\alpha(m) = Id_{T_p P}$ e $T^2 = T \circ T = ds_\alpha(m)(d\pi(p)ds_\alpha(m))d\pi(p) = T$ (i.e., T é um operador de projeção). Sendo assim, por álgebra linear, $T_p P = \ker T \oplus \text{im} T$ (cada elemento $v \in T_p P$ é da forma $Tv + (v - Tv)$). No entanto, de $d\pi(p)ds_\alpha(m) = Id_{T_p P}$, concluímos que $ds_\alpha(m)$ é injetivo e assim, $\ker T = \ker(ds_\alpha(m)d\pi(p)) = \ker d(\pi_p) = V_p$. Portanto, provamos o seguinte lema:

Lema 1.3.5. *Seja $s : U \longrightarrow P|_U$ um seção do fibrado $P(M, \tilde{\alpha})$, se $p = s(m)$, onde $m \in U$, então $T_p P = \text{im}(d(s_\alpha \circ \pi)_p) \oplus V_p$*

Proposição 1.3.5. *Seja $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ uma 1-forma de conexão do fibrado $P(M, G)$. Então,*

$$\omega_\alpha = Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ \pi^* \mathcal{A}_\alpha + g_\alpha^* \theta$$

Prova. i) Vamos mostrar que a proposição é válida para $p = s_\alpha(m)$, onde $m \in U_\alpha$ e $v \in T_p P$. Pelo lema anterior, $v = ds_\alpha(m)d\pi(p)v + d\psi_p(e)\xi$, para um único $\xi \in \mathfrak{g}$. Como $g_\alpha(p) = e$ (pois, $s_\alpha(m) = \varphi_\alpha^{-1}(m, e)$ e $\varphi_\alpha = (\pi, g_\alpha)$):

$$\begin{aligned} Ad_{g_\alpha(p)^{-1}}(\pi^* \mathcal{A}_\alpha)_p v + (g_\alpha^* \theta)_p v = \\ \mathcal{A}_\alpha(m)(d\pi(p)v) + \theta(e)(dg_\alpha(p)v) = \omega_p(ds_\alpha(m)d\pi(p)v) + dg_\alpha(p)v \end{aligned}$$

Vamos usar a decomposição de $v = ds_\alpha(m)d\pi(p)v + d\psi_p(e)\xi$ para calcular $dg_\alpha(p)v$. Como $g_\alpha \circ s_\alpha \circ \pi$ é a aplicação constante igual ao elemento neutro de G e $g_\alpha \circ \psi_p : h \in G \mapsto g_\alpha(p \cdot h) = g_\alpha(p)h = h$, i.e., é a aplicação identidade de G , obtemos, pela regra da cadeia, que $dg_\alpha(p)v = \xi = \omega_p(d\psi_p(e)\xi)$. Portanto, obtemos $\omega_p(ds_\alpha(m)d\pi(p)v + d\psi_p(e)\xi) = \omega_p v$.

ii) Agora, como $P|_{U_\alpha} = \bigcup_{m \in U_\alpha} (s_\alpha(m) \cdot G)$, basta verificar a relação nos pontos $p \cdot g$, onde $p = s_\alpha(m)$. Note ainda que qualquer vetor de $T_{(p \cdot g)} P$ pode ser escrito como $d\psi_g(p)v$, onde $v \in T_p P$ (pois, $d\psi_g(p)$ é isomorfismo linear) e $g_\alpha(p \cdot g) = g_\alpha(p)g = g$. Assim, devemos mostrar que

$$\omega(p \cdot g)(d\psi_g(p)v) = Ad_{g_\alpha(p \cdot g)^{-1}}((\pi^* \mathcal{A}_\alpha)(p \cdot g)d\psi_g(p)v) + (g_\alpha^* \theta)_{p \cdot g} d\psi_g(p)v$$

O lado direito da equação a ser mostrada pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} Ad_{g^{-1}}(\mathcal{A}_\alpha(m)d\pi(p \cdot g)d\psi_g(p)v) + \theta_g(dg_\alpha(p \cdot g)d\psi_g(p)v) = \\ \mathcal{A}_{g^{-1}\mathcal{A}_\alpha(m)}d\pi(p)v + d(L_{g^{-1}} \circ g_\alpha \circ \psi_g)(p)v = (\text{pois, } \pi \circ \psi_g = \pi) \\ Ad_{g^{-1}}(\pi^* \mathcal{A}_\alpha)_p v + Ad_{g^{-1}}dg_\alpha(p)v = (\text{pois, } L_{g^{-1}} \circ g_\alpha \circ \psi_g = C_{g^{-1}} \circ g_\alpha) \\ Ad_{g^{-1}}(\omega_p v) \end{aligned}$$

Mas, pela definição de uma 1-forma, $Ad_{g^{-1}}(\omega_p v) = \omega(p \cdot g)(d\psi_g(p)v)$ como queríamos. $\square$

Dada uma coleção de 1-formas $\{\mathcal{A}_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})\}$, onde $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ são as trivializações do fibrado $P(M, G)$, satisfazendo, nas interseções, a relação descrita na Prop. 1.3.3, existe uma única 1-forma de conexão ω , tal que $\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^*(\omega) \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$. Esta 1-forma de conexão é definida localmente (em $P|_{U_\alpha}$) pelo lado direito da equação da Prop. 1.3.4. Fazendo cálculos muito similares aos realizados até aqui, verifica-se que, de fato, essas 1-formas locais de P coincidem nas interseções $U_{\alpha\beta}$ (ou seja, representam uma 1-forma global $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$) e ω satisfaz as condições da definição de uma 1-forma de conexão.

Curvatura

Seja $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ uma 1-forma de conexão no fibrado principal $P(M, G)$, e $H \subseteq TP$ a distribuição horizontal associada (como vimos, $H_p = \ker(\omega_p)$). Definimos, através da aplicação $D_\omega : \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^2(P, \mathfrak{g})$, a 2-forma de curvatura $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ por:

$$\Omega_p(u, v) = (D_\omega \omega)_p(u, v) = d\omega_p(u^H, v^H)$$

onde $p \in P$, $u, v \in T_p P$ e u^H (v^H) é a projeção de u (v) em H_p .

Ao contrário da distribuição vertical, a distribuição horizontal H nem sempre é integrável. A 2-forma de curvatura mede o quanto H deixa de ser integrável. De fato, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$:

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H) = X^H(\omega(Y^H)) - Y^H(\omega(X^H)) - \omega([X^H, Y^H]) = -\omega([X^H, Y^H])$$

pois vetores horizontais se anulam, por definição, na 1-forma de conexão. Portanto, H é integrável se, e somente se, $\Omega = 0$. Chamamos ω de *conexão plana* se sua 2-forma de curvatura é nula.

Se $\eta_1, \eta_2 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, podemos generalizar o produto exterior para formas com valores em $\mathfrak{g}$ por meio do colchete de Lie. Assim, definimos $[\eta_1, \eta_2] \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ por:

$$[\eta_1, \eta_2](X, Y) = [\eta_1(X), \eta_2(Y)] - [\eta_1(Y), \eta_2(X)]$$

No caso $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, temos $[\eta, \eta](X, Y) = 2[\eta(X), \eta(Y)]$.

Com essa notação mostraremos a *equação estrutural de Cartan*:

Proposição 1.3.6. *A 2-forma de curvatura satisfaz:*

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

Prova. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, devemos mostrar que $d\omega(X^H, Y^H) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$. Vamos dividir em casos:

- i) $X, Y \in \mathfrak{X}^H(P)$: como a projeção horizontal de um vetor horizontal é ele mesmo e estes se anulam em ω segue o resultado.
- ii) $X, Y \in \mathfrak{X}^V(P)$: $X = \sigma(\xi_1)$, $Y = \sigma(\xi_2)$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$. O lado esquerdo da equação se anula, pois $X^H = Y^H = 0$. Agora,

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

Mas, $X(\omega(Y)) = X(\omega(\sigma(\xi_2))) = X(\xi_2)$, onde ξ_2 é visto como a aplicação constante igual a ξ_2 , de P em $\mathfrak{g}$. Logo, $X(\omega(Y)) = 0$ (o mesmo para $Y(\omega(X))$). Como $[\sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2)] = \sigma([\xi_1, \xi_2])$, $\omega([X, Y]) = \omega(\sigma([\xi_1, \xi_2])) = [\xi_1, \xi_2] = [\omega(X), \omega(Y)]$ e a equação vale nesse caso.

iii) $X = \sigma(\xi) \in \mathfrak{X}^V(P)$ e $Y \in \mathfrak{X}^H(P)$: o lado esquerdo da equação é novamente zero, assim como o termo $[\omega(X), \omega(Y)]$. Mas, $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y])$. Mas, o comutador de dois vetores é a derivada de Lie de um com respeito ao outro, $[X, Y]_p = (\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d\phi_X^{-t}(\phi_X^t(p))Y_{\phi_X^t(p)} - Y_p)$, onde ϕ_X^t é o fluxo de X . Como $X = \sigma(\xi)$, temos que $\phi_X^t = \psi_{\exp(t\xi)}$ e $\omega_p([X, Y]_p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\omega_p(d\psi_{\exp(-t\xi)}(\psi_{\exp(t\xi)}(p))Y_{\psi_{\exp(t\xi)}(p)}) - \omega_p(Y_p))$. Pela definição, $\omega_p(Y_p) = 0$ e temos que $\omega_p(d\psi_{\exp(-t\xi)}(\psi_{\exp(t\xi)}(p))Y_{\psi_{\exp(t\xi)}(p)}) = Ad_{\exp(-t\xi)^{-1}}(\omega_{p \cdot \exp(t\xi)}Y_{p \cdot \exp(t\xi)}) = 0$. $\square$

Lema 1.3.6. *A 2-forma de curvatura é básica, i.e., $\Omega \in \Omega_G^2(P; \mathfrak{g})$.*

Prova. Pela definição, Ω se anula em vetores verticais. Agora, dado $g \in G$, utilizando a Prop. 1.3.5,

$$\begin{aligned} \psi_g^* \Omega &= \psi_g^* d\omega + \frac{1}{2} \psi_g^* [\omega, \omega] = d\psi_g^* \omega + \frac{1}{2} [\psi_g^* \omega, \psi_g^* \omega] = \\ &= dAd_{g^{-1}} \omega + \frac{1}{2} [Ad_{g^{-1}} \omega, Ad_{g^{-1}} \omega] = Ad_{g^{-1}} (d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega]) = Ad_{g^{-1}} \Omega \end{aligned}$$

onde foi usado que $\psi_g^* [\omega, \omega] = [\psi_g^* \omega, \psi_g^* \omega]$ (de fato, avaliando num ponto $p \in P$ e em vetores $u, v \in T_p P$, obtemos $2[\omega_{\psi_g(p)}(d\psi_g(p)u), \omega_{\psi_g(p)}(d\psi_g(p)v)]$) e que $Ad_{g^{-1}}$ é um automorfismo de álgebras de Lie. $\square$

Como no caso da 1-forma de conexão, definimos os *campos de calibre* por $\mathcal{F}_\alpha \doteq s_\alpha^* \Omega \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{g})$. Como consequência da Prop. 1.3.5, podemos expressar os campos de calibre a partir dos potenciais de calibre:

$$\mathcal{F}_\alpha = d\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha]$$

De fato, $\mathcal{F}_\alpha = s_\alpha^* \Omega = s_\alpha^* (d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega]) = ds_\alpha^* \omega + \frac{1}{2} [s_\alpha^* \omega, s_\alpha^* \omega]$. Além disso:

Proposição 1.3.7. *Os campos de calibre satisfazem a seguinte relação*

$$\mathcal{F}_\alpha = Ad_{g_{\alpha\beta}} \mathcal{F}_\beta$$

Prova.

$$\mathcal{F}_\alpha = d\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha]$$

pela Prop. 1.3.4, $\mathcal{A}_\alpha = Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}} \mathcal{A}_\beta + g_{\beta\alpha}^* \theta$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha &= d(Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}}\mathcal{A}_\beta + g_{\beta\alpha}^*\theta) + \frac{1}{2}[Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}}\mathcal{A}_\beta + g_{\beta\alpha}^*\theta, Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}}\mathcal{A}_\beta + g_{\beta\alpha}^*\theta] = \\ &= d(Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}}\mathcal{A}_\beta) + g_{\beta\alpha}^*d\theta + Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}}\frac{1}{2}[\mathcal{A}_\beta, \mathcal{A}_\beta] + g_{\beta\alpha}^*\frac{1}{2}[\theta, \theta] + [g_{\beta\alpha}^*\theta, Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}}\mathcal{A}_\beta]\end{aligned}$$

Pelo Lema A.0.7 e a fórmula estrutural da forma de Maurer-Cartan obtemos o resultado. $\square$

Portanto, segue que o campos de calibre definem uma 2-forma global de M com valores no fibrado de álgebras de Lie (ver apêndice), a qual denotaremos $\mathcal{F}_\omega \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$.

Note ainda que $\mathcal{F}_\omega$ é exatamente a 2-forma dada pela correspondência entre $\Omega_G^2(P; \mathfrak{g})$ e $\Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$. De fato, suponha que $\Omega \mapsto \tilde{\Omega} \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$, então no aberto trivializante U_α , temos

$$\tilde{\Omega}(m)(u, v) = [s_\alpha(m), \Omega(s_\alpha(m))(ds_\alpha(m)u, ds_\alpha(m)v)] = [s_\alpha(m), (s_\alpha^*\Omega)(m)(u, v)]$$

pois $d\pi(s_\alpha(m)ds_\alpha(m)) = d(\pi \circ s_\alpha)(m) = Id$.

1.3.2 Conexão e Curvatura em Fibrados Vetoriais

Conexão

Uma conexão no fibrado principal induz uma conexão nos fibrados associados. Antes de mostrar como se dá essa relação, vamos introduzir o conceito de conexão num fibrado vetorial.

Definição 1.3.5. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial real. Uma conexão em E é uma mapa $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$ $\mathbb{R}$ -linear, satisfazendo a regra de Leibniz*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

para todo $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.

Observação 1.3.5. *a) Uma conexão em um fibrado vetorial complexo se dá de forma análoga, pedindo que ∇ seja um mapa $\mathbb{C}$ -linear e a regra de Leibniz valha para $f \in C^\infty(M; \mathbb{C})$.
b) Como descrito no apêndice A, $\Omega^1(M; E) \doteq \Gamma(T^*M \otimes E) \simeq \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$, onde o segundo produto tensorial é tomado sobre o anel de funções suaves de M (produto tensorial de módulos) ([43], pg 68).*

Considere o fibrado vetorial E , de posto r , dotado de uma conexão ∇ . Tal fibrado é localmente descrito pelas trivializações φ_α (ou equivalentemente, pelos referenciais locais correspondentes $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\}$). Vamos entender o comportamento local de ∇ em um referencial local $\{s_1, \dots, s_r\}$, $s_i \in \Gamma(U)$ (por comodidade, suprimimos o índice α). Se

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^r A_i^j \otimes s_j, \text{ onde } A_i^j \in \Omega^1(U)$$

então, dado $\sigma \in \Gamma(U)$, $\sigma = \sum_{j=1}^r \sigma^j s_j$, onde $\sigma^i \in C^\infty(U)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla \sigma &= \nabla \left(\sum_{i=1}^r \sigma^i s_i \right) = \sum_{i=1}^r \nabla (\sigma^i s_i) = \sum_{i=1}^r d\sigma^i \otimes s_i + \sigma^i \nabla s_i = \\ &= \sum_{i=1}^r (d\sigma^i \otimes s_i + \sigma^i \left(\sum_{j=1}^r A_i^j \otimes s_j \right)) = \sum_{k=1}^r (d\sigma^k + \sum_{i=1}^r A_i^k \sigma^i) \otimes s_k \end{aligned}$$

Podemos representar formas com valores no fibrado E (localmente) por vetores coluna, com respeito ao referencial $\{s_1, \dots, s_r\}$. Por exemplo, representamos $\sigma \in \Gamma(E) = \Omega^0(M, E)$, dado

por $\sigma = \sum_{j=1}^r \sigma^j s_j$, por $(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^r \end{pmatrix}$. Assim, o cálculo anterior pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} \nabla \sigma \end{pmatrix} = (d + A) \begin{pmatrix} \sigma \end{pmatrix}$$

onde $A = (A_j^i)$ é uma matriz com entradas em $\Omega^1(U)$, chamada *matriz de conexão* em U .

As matrizes de conexão A^α e A^β definem a conexão para seções em $\Gamma(E|_{U_\alpha})$ e $\Gamma(E|_{U_\beta})$, respectivamente. Pela observação 1.2.2, fixada uma base de V , a função de transição $\phi_{\alpha\beta}$ era representada por uma matriz, a qual, por abuso de notação, nos referiremos também por $\phi_{\alpha\beta}$, que era a matriz de mudança de base do referencial de β para o referencial de α . Assim, se $\sigma \in \Gamma(E|_{U_{\alpha\beta}})$, em notação matricial, $(\sigma)_\alpha = \phi_{\alpha\beta}(\sigma)_\beta$. A proposição a seguir nos diz como essas matrizes se relacionam em $U_{\alpha\beta}$.

Proposição 1.3.8. *Seja E um fibrado vetorial munido de uma conexão ∇ . As matrizes de conexão associadas aos abertos trivializantes U_α , A^α , e U_β , A^β , se relacionam em $U_{\alpha\beta}$ por:*

$$A^\beta = \phi_{\alpha\beta}^{-1} d\phi_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}^{-1} A^\alpha \phi_{\alpha\beta}$$

Prova. Temos que

$$(\nabla \sigma)_\beta = \phi_{\alpha\beta}^{-1} (\nabla \sigma)_\alpha = \phi_{\alpha\beta}^{-1} (d + A^\alpha) \phi_{\alpha\beta} (\sigma)_\beta$$

Por outro lado, $(\nabla\sigma)_\beta = (d + A^\beta)(\sigma)_\beta$. Portanto,

$$d(\sigma)_\beta + A^\beta(\sigma)_\beta = \phi_{\alpha\beta}^{-1}d\phi_{\alpha\beta}(\sigma)_\beta + \phi_{\alpha\beta}^{-1}\phi_{\alpha\beta}d(\sigma)_\beta + \phi_{\alpha\beta}^{-1}A^\alpha\phi_{\alpha\beta}(\sigma)_\beta$$

e segue o resultado. $\square$

Claramente vale a recíproca. Ou seja, se temos matrizes de 1-formas satisfazendo as relações da proposição acima, é possível definir uma conexão localmente por $d + A$ e a relação entre as matrizes garante que a conexão está, de fato, definida globalmente.

Seja agora $P(M, G)$ um fibrado principal, com funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$, e $\rho : G \rightarrow GL(V)$ uma representação de G num espaço vetorial V , de dimensão r . Vimos então que o fibrado vetorial associado $E = P \times_\rho V$ tem funções de transição $\phi_{\alpha\beta} = \rho(g_{\alpha\beta})$.

Proposição 1.3.9. *Seja $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ uma 1-forma de conexão de $P(M, G)$ (e $\{\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})\}$). Assim, $\{d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha)\}$ define uma conexão ∇ no fibrado vetorial associado $E = P \times_\rho V$.*

Prova. Pela Prop. 1.3.3, vale $\mathcal{A}_\beta = Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathcal{A}_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$. Agora, $d\rho(e)Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathcal{A}_\alpha = d(\rho \circ C_{g_{\alpha\beta}^{-1}})(e)\mathcal{A}_\alpha$. Mas ρ ser representação implica que $\rho \circ C_{g_{\alpha\beta}^{-1}} = C_{\rho(g_{\alpha\beta}^{-1})} \circ \rho$, logo $d\rho(e)Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathcal{A}_\alpha = Ad_{\rho(g_{\alpha\beta}^{-1})}(d\rho(e)\mathcal{A}_\alpha)$. Como $\rho(g_{\alpha\beta}^{-1})$ toma valores em $GL(V)$, temos que $Ad_{\rho(g_{\alpha\beta}^{-1})} = C_{\rho(g_{\alpha\beta}^{-1})}$ e assim, $d\rho(e)Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathcal{A}_\alpha = \rho(g_{\alpha\beta}^{-1})\mathcal{A}_\alpha\rho(g_{\alpha\beta})$. Vamos calcular agora $d\rho(e)\theta_{\alpha\beta} = d\rho(e)g_{\alpha\beta}^*\theta$, onde θ é a forma de Maurer-Cartan. Seja $m \in U_{\alpha\beta}$ e $v \in T_m M$. Então, $d\rho(e)(\theta_{g_{\alpha\beta}(m)}(dg_{\alpha\beta}(m)v)) = d\rho(e)dL_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}}(g_{\alpha\beta}(m))dg_{\alpha\beta}(m)v = d(\rho \circ L_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}} \circ g_{\alpha\beta})(m)v$. Mas, $\rho \circ L_{g_{\alpha\beta}(m)^{-1}} \circ g_{\alpha\beta} = L_{\rho(g_{\alpha\beta}(m)^{-1})} \circ \rho(g_{\alpha\beta})$. Logo, $d\rho(e)(\theta_{g_{\alpha\beta}(m)}(dg_{\alpha\beta}(m)v)) = \rho(g_{\alpha\beta}(m)^{-1})d(\rho(g_{\alpha\beta}))_m v$. Onde foi usado que $dL_B(C) = L_B$, se $B, C \in GL(V)$. Portanto, como $\{d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha)\}$ satisfaz a relação da Prop. 1.3.5, obtém-se uma conexão ∇ em E , dada em U_α , em notação matricial subentendendo-se o referencial, por $d + d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha)$ (note que, uma vez fixado o referencial, $d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha)$ é representada por uma matriz com entrada em formas). $\square$

Curvatura

Seja $E \rightarrow M$ um fibrado vetorial munido de uma conexão $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$ $\mathbb{R}$. Como explicado no apêndice, $\Omega(M; E)$ é um módulo graduado sobre a álgebra graduada $\Omega(M)$. Podemos então generalizar a derivada exterior comum para formas com valores no fibrado vetorial E estendendo a conexão ∇

$$\Omega^0(M; E) \xrightarrow{d_\nabla} \Omega^1(M; E) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^k(M; E) \xrightarrow{d_\nabla} \Omega^{k+1}(M; E) \rightarrow \dots$$

de modo que $d_\nabla = \nabla$ em $\Gamma(E) = \Omega^0(M; E)$ e vale a regra de Leibniz:

$$d_\nabla(\eta \wedge \alpha) = d\eta \wedge \alpha + (-1)^r \eta \wedge d_\nabla \alpha$$

onde $\eta \in \Omega^r(M)$ e $\alpha \in \Omega^s(M; E)$.

Definição 1.3.6. Dada uma conexão ∇ em E , chamamos de curvatura dessa conexão $F_\nabla = d_\nabla^2 = d_\nabla \circ d_\nabla$.

Note que a curvatura $F_\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^2(M; E)$ induz a seguinte aplicação:

$$\tilde{F}_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(\text{End}E)$$

dada por $\tilde{F}_\nabla(X, Y)(s) = (F_\nabla s)(X, Y) \in \Gamma(E)$, onde $s \in \Gamma(E)$. Para termos $\tilde{F}_\nabla(X, Y) \in \Gamma(\text{End}E)$, precisamos mostrar que, se $f \in C^\infty(M)$, $\tilde{F}_\nabla(X, Y)(fs) = f\tilde{F}_\nabla(X, Y)(s)$ (ou seja, $F_\nabla(fs) = fF_\nabla(s)$).

$$F_\nabla(fs) = d_\nabla(df \wedge s + fd_\nabla s) = -df \wedge d_\nabla s + df \wedge d_\nabla s + fd_\nabla^2 s = fd_\nabla^2 s$$

Claramente, $\tilde{F}_\nabla$ é $C^\infty(M)$ -linear também nas entradas de campos de vetores e a aplicação é alternada. Concluimos assim, pelos comentários feitos no apêndice, que $\tilde{F}_\nabla \in \Omega^2(M; \text{End}E)$. Abandonaremos esta última notação e pensaremos na curvatura também como essa 2-forma de M com valores no fibrado vetorial de endomorfismos de E .

Investiguemos o comportamento local da curvatura. Considere o referencial local $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\}$, como anteriormente (por hora omitiremos por comodidade α). Então,

$$F_\nabla(s_j) = \sum_{i=1}^r F_j^i s_i$$

e chamamos $F^\alpha = (F_j^i)$ de *matriz de curvatura* com respeito ao referencial local $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\}$.

Lema 1.3.7. Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial munido de uma conexão ∇ , com matriz de conexão A^α e matriz de curvatura F^α (com respeito ao referencial local $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\}$). Então,

$$F^\alpha = dA^\alpha + A^\alpha \wedge A^\alpha$$

Prova. Para a demonstração omitiremos novamente α .

$$\begin{aligned} F_\nabla(s_j) &= d_\nabla(d_\nabla(s_j)) = d_\nabla\left(\sum_{i=1}^r A_j^i s_i\right) = \sum_{i=1}^r d_\nabla(A_j^i s_i) = \\ &= \sum_{i=1}^r dA_j^i \wedge s_i - A_j^i \wedge d_\nabla(s_i) = \sum_{i=1}^r dA_j^i \wedge s_i - A_j^i \wedge \left(\sum_{k=1}^r A_i^k \wedge s_k\right) = \sum_{i=1}^r (dA_j^i + \sum_{k=1}^r A_k^i \wedge A_j^k) \wedge s_i \end{aligned}$$

onde usamos que $-A_j^k \wedge A_i^k = A_k^i \wedge A_j^k$. □

1.3.3 Derivada Covariante no Fibrado Associado

Seja $\omega \in \mathcal{A}$ uma 1-forma de conexão em no fibrado principal $P(M, G)$ e $D_\omega : \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^2(P, \mathfrak{g})$, como definido anteriormente. Considere também uma representação $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, onde V é um espaço vetorial, e $E = P \times_\rho V$ o fibrado associado. Por comodidade, denotaremos por $\mathcal{H}$ o operador definido por $(\mathcal{H}\alpha)(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X_1^H, \dots, X_k^H)$, onde $\alpha \in \Omega^k(P; V)$. Dessa forma, $D_\omega = \mathcal{H}d\alpha$. Veremos que ω define uma derivada covariante $d_\omega : \Omega^k(M; E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M; E)$ no fibrado associado.

Primeiramente, note que $D_\omega|_{\Omega_G^k(P, V)} : \Omega_G^k(P, V) \longrightarrow \Omega_G^{k+1}(P, V)$ (ver definição A.0.1 para o conceito de formas básicas). Claramente, se $\alpha \in \Omega_G^k(P, V)$, $D_\omega\alpha$ se anula em vetores verticais. Agora,

$$\begin{aligned} \psi_g^* D_\omega \alpha &= \psi_g^* \mathcal{H}d\alpha = \mathcal{H}\psi_g^* d\alpha \quad (\text{distrib. horizontal } G\text{-invariante}) \\ &= \mathcal{H}d\psi_g^* \alpha = \mathcal{H}d(\rho(g^{-1}\alpha)) = \rho(g^{-1})\mathcal{H}d\alpha \quad (\text{pois } d \text{ age apenas nas formas}) \\ &= \rho(g^{-1})D_\omega \alpha \end{aligned}$$

Proposição 1.3.10. *Seja $\alpha \in \Omega_G^k(P; V)$.*

a) $D_\omega \alpha = d\alpha + (d\rho(e)\omega) \wedge \alpha$

b) $D_\omega^2 \alpha = (d\rho(e)\omega) \wedge \alpha$

Prova. Antes de demonstrarmos a proposição, note que $d\rho(e)\omega \in \Omega^1(P; \text{End}(V))$ e utilizamos a ação de $\text{End}(V)$ em V para definir o produto exterior (cuja descrição está presente no Apêndice A).

a) Considere agora $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(P)$. Então

$$\begin{aligned} D_\omega \alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) &= d\alpha(X_1^H, \dots, X_{k+1}^H) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i^H (\alpha(X_1^H, \dots, \widehat{X_i^H}, \dots, X_{k+1}^H)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i^H, X_j^H], X_1^H, \dots, \widehat{X_i^H}, \dots, \widehat{X_j^H}, \dots, X_{k+1}^H) \end{aligned}$$

Como estamos interessados no valor de cada um desses campos de vetores num ponto $p \in P$, podemos supor, sem perda de generalidade, que os campos horizontais X_i^H são dados pelo levantamento horizontal de campos em M e ainda que os campos de vetores verticais são dados por $X_i^V = \sigma(\omega(X_i))$, $i = 1, \dots, k+1$. Dessa forma, vale que $[X_i^H, X_j^V] = [X_i^V, X_j^H] = 0$, pois $\omega_p([X_i^V, X_j^H]_p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d\psi_{\exp(-t\omega(X_i))}(X_j^H)_{p \cdot \exp(t\omega(X_i))} - (X_j^H)_p)$ e $d\psi_{\exp(-t\omega(X_i))}(X_j^H)_{p \cdot \exp(t\omega(X_i))} = d\psi_{\exp(-t\omega(X_i))} d\psi_{\exp(t\omega(X_i))}(X_j^H)_p = (X_j^H)_p$. Além disso, como a distribuição vertical é integrável e α se anula em vetores verticais, temos

$$\begin{aligned}
D_\omega \alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (X_i - X_i^V) (\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\
&+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) = \\
&d\alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) - \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i^V (\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}))
\end{aligned}$$

Chamemos função $\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) = \alpha(X_1^H, \dots, \widehat{X}_i^H, \dots, X_{k+1}^H)$ de f_i e $g_i(t) = t\omega(X_i)$. Assim, $X_i^V(f_i) = \mathcal{L}_{X_i^V} f_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{exp(g_i(t))}^* f_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_i \circ \psi_{exp(g_i(t))}$. No entanto, $(X_j^H)_{p \cdot exp(g_i(t))} = d\psi_{exp(g_i(t))}(X_j^H)_p$. Então,

$$\begin{aligned}
X_i^V(f_i) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi_{exp(g_i(t))}^* \alpha)(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) = \\
&\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(g_i(t)^{-1}) f_i = -d\rho(e)(\omega(X_i)) f_i
\end{aligned}$$

concluimos então que

$$D_\omega \alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(\omega(X_i)) (\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}))$$

Note que

$$\frac{1}{k!} \sum_{\theta \in S_{k+1}} (-1)^\theta \rho(\omega(X_{\cdot(1)})) (\alpha(X_{\theta_2}, \dots, \widehat{X}_{\theta_1}, \dots, X_{\theta_{k+1}})) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(\omega(X_i)) (\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}))$$

De fato, $\#\{\theta \in S_{k+1}; \theta(1) = i\} = \#S_k = k!$. Além disso, reordenamos os $\theta(i)$ em ordem crescente multiplicando por $(-1)^\theta$ e colocamos o i -ésimo campo na primeira entrada com $(-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$. Ou seja,

$$\rho(\omega(X_i)) (\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) = (-1)^\theta (-1)^{i+1} \rho(\omega(X_{\theta(1)})) (\alpha(X_{\theta(2)}, \dots, \widehat{X}_{\theta(1)}, \dots, X_{\theta(k+1)}))$$

e segue o resultado.

b) $D_\omega^2 \alpha = D_\omega(d\alpha + (d\rho(e)\omega) \wedge \alpha) = \mathcal{H}d(d\alpha + (d\rho(e)\omega) \wedge \alpha)$. Agora $d^2 = 0$ e pelo item 3 do Lema A.0.1, temos que $d((d\rho(e)\omega) \wedge \alpha) = (d\rho(e)d\omega) \wedge \alpha - (d\rho(e)\omega) \wedge d\alpha$. Como α se anula em vetores verticais, $\mathcal{H}((d\rho(e)d\omega) \wedge \alpha) = (d\rho(e)\mathcal{H}d\omega) \wedge \alpha$. Além disso, como vetores horizontais são aqueles que se anulam em ω , $\mathcal{H}((d\rho(e)\omega) \wedge d\alpha) = 0$. Dessa forma,

$$D_\omega^2 \alpha = (d\rho(e)\mathcal{H}d\omega) \wedge \alpha = (d\rho(e)\Omega) \wedge \alpha$$

□

Note que, para $E = \mathfrak{g}_P$, temos que $D_\omega \alpha = d\alpha + [\omega, \alpha]$, onde $\alpha \in \Omega_G^K(P; \mathfrak{g})$. Em particular, vale:

Proposição 1.3.11. (*Identidade de Bianchi*) Seja ω uma 1-forma de conexão e Ω a 2-forma de curvatura associada. Então

$$D_\omega \Omega = 0$$

ou, equivalentemente,

$$d\Omega = [\Omega, \omega]$$

Prova. Claramente as afirmações são equivalentes, pois

$$D_\omega \Omega = d\Omega + [\omega, \Omega] = d\Omega - [\Omega, \omega]$$

Para provar a afirmação, lembre que $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ (Prop. 1.3.5). Assim, utilizando novamente o Lema A.0.1

$$d\Omega = \frac{1}{2}d[\omega, \omega] = \frac{1}{2}([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega]) = [d\omega, \omega]$$

Mas, pelo item 3 do Lema A.0.1, $[\omega, [\omega, \omega]] = 0$, de modo que

$$[\Omega, \omega] = [d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \omega] = [d\omega, \omega]$$

□

Nosso objetivo era definir, a partir de $\omega \in \mathcal{A}$, uma derivada covariante exterior no fibrado associado $E = P \times_\rho V$. Pela correspondência $\Omega_G^k(P, V) \leftrightarrow \Omega^k(M, E)$ (Prop. A.0.3), podemos considerar o mapa

$$d_\omega : \Omega^k(M, E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M, E)$$

Ou seja, $\alpha \in \Omega^k(M, E) \mapsto \tilde{\alpha} \in \Omega_G^k(P, V) \mapsto D_\omega \tilde{\alpha} \in \Omega_G^{k+1}(P, V) \mapsto d_\omega \alpha = \widehat{D_\omega \tilde{\alpha}} \in \Omega^{k+1}(M, E)$.

Vamos entender melhor esse mapa. Como discutido no apêndice, uma forma $\zeta \in \Omega^k(M; E)$ pode ser dada por uma coleção $\{\zeta_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha; V)\}$, satisfazendo $\zeta_\alpha = \rho(g_{\alpha\beta})\zeta_\beta$ (em particular, $\zeta_\alpha = s_\alpha^* \tilde{\zeta}$), onde $\tilde{\zeta}$ é a forma básica que corresponde a ζ . Como vimos, $D_\omega \tilde{\zeta} \in \Omega_G^{k+1}(P; V)$ e assim, $d_\omega \zeta$ é dado por $\{(d_\omega \zeta)_\alpha \in \Omega^{k+1}(U_\alpha; V)\}$.

Proposição 1.3.12. *Temos que*

$$a) (d_\omega \zeta)_\alpha = d\zeta_\alpha + d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha) \wedge \zeta_\alpha$$

$$b) (d_\omega^2 \zeta)_\alpha = d\rho(e)(\mathcal{F}_\alpha) \wedge \zeta_\alpha$$

Prova.

a)

$$s_\alpha^*(D_\omega \tilde{\zeta}) = s_\alpha^*(d\tilde{\zeta} + d\rho(e)(\omega) \wedge \tilde{\zeta}) = ds_\alpha^* \tilde{\zeta} + d\rho(e)(s_\alpha^* \omega) \wedge s_\alpha^* \tilde{\zeta} = d\zeta_\alpha + d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha) \wedge \zeta_\alpha$$

b)

$$\begin{aligned} (d_\omega^2 \zeta)_\alpha &= d(d_\omega \zeta)_\alpha + d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha \wedge (d_\omega \zeta)_\alpha) = \\ d\rho(e)(d\mathcal{A}_\alpha) \wedge \zeta_\alpha - d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha) \wedge d\zeta_\alpha + d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha) \wedge d\zeta_\alpha + d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha) \wedge d\rho(e)(\mathcal{A}_\alpha) \wedge \zeta_\alpha = \\ d\rho(e)(d\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha]) \wedge \zeta_\alpha \end{aligned}$$

□

Note que essa é exatamente a conexão ∇ (em $k = 0$) encontrada na Prop. 1.3.8. Além disso, a curvatura $\mathcal{F}_\omega$ nos dá o quanto d_ω deixa de ser um complexo.

Em particular, o fibrado de álgebras de Lie desempenha um papel importante na teoria de calibre. Nesse caso, a proposição acima nos dá que

$$\begin{aligned} (d_\omega \zeta)_\alpha &= d\zeta_\alpha + [\mathcal{A}_\alpha, \zeta_\alpha] \text{ e} \\ (d_\omega^2 \zeta)_\alpha &= [\mathcal{F}_\alpha, \zeta_\alpha] \end{aligned}$$

Observação 1.3.6. *Claramente, pelo que foi discutido, vale que $d_\omega \mathcal{F}_\omega = 0$ (ou, localmente, $(d_\omega \mathcal{F}_\omega)_\alpha = d\mathcal{F}_\alpha + [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha] = 0$, para todo α).*

1.4 Grupo de Transformações de Calibre

Em geometria diferencial temos a noção de mudança local de coordenadas, oriunda de cartas locais da variedade que se intersectam, e de mudança global de coordenadas, resultante de difeomorfismos. Em teoria de calibre, temos uma analogia entre transformações de calibre locais (escolha de seção local, ou, equivalentemente, trivialização do fibrado principal) e transformações de calibre globais dadas pelo grupo de transformações de calibre.

Definição 1.4.1. *Seja $\pi : P \longrightarrow M$ um G -fibrado principal. Uma transformação de calibre de P é um automorfismo do fibrado, $\phi \in \text{Aut}(P)$. Ou seja, $\phi : P \longrightarrow P$ é um difeomorfismo, satisfazendo:*

$$1. \pi \circ \phi = \pi$$

$$2. \phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g$$

Claramente, $\text{Aut}(P)$ é um grupo com a composição de mapas. Existem outras caracterizações para o grupo de transformações de calibre. Antes de exibi-las, uma observação. O grupo de Lie G age nele mesmo (à esquerda) por conjugação. Podemos então imitar a construção do fibrado associado para a conjugação. O fibrado construído, $P \times_C G$, não é em geral um fibrado vetorial, ou um fibrado principal, porém possui a propriedade de trivialidade local e suas fibras são cópias de G .

Proposição 1.4.1. *Os grupos abaixo são isomorfos:*

$$1. \text{Aut}(P)$$

$$2. C_C^\infty(P; G) = \{f : P \xrightarrow{C^\infty} G; f(p \cdot g) = g^{-1}f(p)g\}$$

$$3. \Gamma(P \times_C G)$$

Prova. $(1 \leftrightarrow 2)$ Seja $\phi \in \text{Aut}(P)$. Como $p, \phi(p) \in \pi^{-1}(\pi(p))$, segue que $\phi(p) = p \cdot f(p)$. Como ϕ é um difeomorfismo, f deve ser suave e $\phi(p \cdot g) = \phi(p)g = p \cdot f(p)g$. Por outro lado, $\phi(p \cdot g) = (p \cdot g) \cdot f(p \cdot g) = p \cdot gf(p \cdot g)$ e, como a ação de G em P é livre, concluímos que $f(p \cdot g) = g^{-1}f(p)g$. Agora, dado $f \in C_C^\infty(P; G)$, defina $\phi(p) = p \cdot f(p)$. Claramente $\phi \in \text{Aut}(P)$, uma vez que $\phi(p \cdot g) = (p \cdot g) \cdot f(p \cdot g) = (p \cdot g) \cdot g^{-1}f(p)g = (p \cdot f(p)) \cdot g = \phi(p) \cdot g$. Seja $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \in \text{Aut}(P)$ e suponha que $\phi \mapsto f$, $\phi_1 \mapsto f_1$ e $\phi_2 \mapsto f_2$, $f, f_1, f_2 \in C_C^\infty(P; G)$. O produto em $C_C^\infty(P; G)$ é dado pelo produto em G , i.e., $(f_1 f_2)(p) = f_1(p)f_2(p)$, então $f = f_1 f_2$ e temos um isomorfismo de grupos. De fato, $p \cdot f(p) = \phi(p) = \phi_1(\phi_2(p)) = \phi_1(p \cdot f_2(p)) = \phi_1(p) \cdot f_2(p) = p \cdot f_1(p)f_2(p)$. Logo, $f = f_1 f_2$.

$(2 \leftrightarrow 3)$ Seja $f \in C_C^\infty(P; G)$. Dado $m \in U_\alpha$, defina $s(m) = [s_\alpha(m), f(s_\alpha(m))]$. Esta seção de $P \times_C G$ está bem definida uma vez que, se $m \in U_{\alpha\beta}$, $s_\beta(m) = s_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m)$ e $[s_\beta(m), f(s_\beta(m))] = [s_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m), g_{\alpha\beta}(m)^{-1}f(s_\alpha(m))g_{\alpha\beta}(m)] = [s_\alpha(m), f(s_\alpha(m))]$. Dada uma seção $s \in \Gamma(P \times_C G)$, temos que $s(\pi(p)) = [p, f(p)]$, para alguma $f : P \rightarrow G$ suave. Daí, $s(\pi(p \cdot g)) = [p \cdot g, f(p \cdot g)] = [p, gf(p \cdot g)g^{-1}]$. Como $s(\pi(p \cdot g)) = s(\pi(p))$, segue que $f(p \cdot g) = g^{-1}f(p)g$. Novamente temos um isomorfismo de grupos, pois, se $f = f_1 f_2$ (com $f \mapsto s$, $f_1 \mapsto s_1$ e $f_2 \mapsto s_2$), temos que $s(m) = [s_\alpha(m), f(s_\alpha(m))] = [s_\alpha(m), f_1(s_\alpha(m))f_2(s_\alpha(m))] = (s_1 s_2)(m)$. $\square$

O grupo de transformações de calibre será denotado por $\mathcal{G}$ sempre que não especificarmos qual das 3 versões estamos utilizando.

Note que existe uma aplicação exponencial fibra a fibra natural:

$$\exp : \Gamma(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Gamma(P \times_C G)$$

dada por $\exp(\sigma)(m) = \exp(\sigma(m))$, onde $\sigma \in \Gamma(\mathfrak{g}_P)$. Ou seja, se $\sigma(m) = [p, x]$ ($x \in \mathfrak{g}$ e $\pi(p) = m$), então $\exp(\sigma)(m) = [p, \exp(x)]$. Essa aplicação está bem definida, pois $[p, x] = [p \cdot g, Ad_{g^{-1}}x]$ e o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_{g^{-1}}} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{C_{g^{-1}}} & G \end{array}$$

Ou seja, $[p \cdot g, \exp(Ad_{g^{-1}}x)] = [p \cdot g, C_{g^{-1}}(\exp(x))] = [p, \exp(x)]$.

As seções de $P \times_C G$ podem ser dotadas de uma estrutura de variedade diferenciável (de dimensão infinita) modeladas em espaços de Hilbert. Nesse contexto, $\mathcal{G}$ pode ser visto como um grupo de Lie de dimensão infinita e mostra-se [33] que o mapa exponencial definido acima identifica $\Gamma(\mathfrak{g}_P)$ com o espaço tangente na seção identidade ($e(m) = [p, e]$, onde $\pi(p) = m$) de $\Gamma(P \times_C G)$. Desse modo, podemos pensar em $\Gamma(\mathfrak{g}_P)$ como a álgebra de Lie de $\Gamma(P \times_C G)$.

1.4.1 Ação do Grupo de Transformações de Calibre

Seja $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ uma 1-forma de conexão do fibrado principal $P(M, G)$.

- Dado $\phi \in Aut(P)$, $\phi^*\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ é uma 1-forma de conexão:
 - i) $(\phi^*\omega)_p(d\psi_p(e)\xi) = \omega_{\phi(p)}(d\phi(p)d\psi_p(e)\xi) = \omega_{\phi(p)}d(\phi \circ \psi_g)(e)\xi$. Como $\phi \circ \psi_g = \psi_{\phi(p)}$, $(\phi^*\omega)_p(d\psi_p(e)\xi) = \xi$, para todo $p \in P$ e $\xi \in \mathfrak{g}$.
 - ii) $\psi_g^*\phi^*\omega = (\phi \circ \psi_g)^*\omega$. Mas $\phi \circ \psi_g = \psi_g \circ \phi$, logo, $\psi_g^*\phi^*\omega = (\psi_g \circ \phi)^*\omega = \phi^*\psi_g^*\omega = \phi^*(Ad_{g^{-1}}\omega) = Ad_{g^{-1}}(\phi^*\omega)$.

Temos então o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} Aut(P) \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\phi, \omega) &\longmapsto \phi \cdot \omega \doteq \phi^*\omega \end{aligned}$$

como $(Id_P)^*\omega = \omega$ e $(\omega \cdot \phi_1) \cdot \phi_2 = \phi_2^*\phi_1^*\omega = (\phi_1 \circ \phi_2)^*\omega = \omega \cdot \phi_1\phi_2$, temos que o grupo de transformações de calibre age à direita no espaço de conexões via pull-back. Denotaremos também por $\omega^\phi \doteq \phi^*\omega \in \mathcal{A}$ e a curvatura associada por Ω^ϕ .

Lema 1.4.1. *Seja $\omega \in \mathcal{A}$, com 2-forma de curvatura Ω , então a 2-forma de curvatura Ω^ϕ associada a $\omega^\phi = \phi^*\omega$, onde $\phi \in \text{Aut}(P)$, é $\phi^*\Omega$.*

Prova. Denote por H e $\hat{H}$ as distribuições horizontais associadas a ω e ω^ϕ , respectivamente. Então, $\Omega^\phi(p)(u, v) = d\omega^\phi(p)(u^{\hat{H}}, v^{\hat{H}})$, onde $u = u^V + u^{\hat{H}}, v = v^V + v^{\hat{H}} \in V_p \oplus \hat{H}_p = T_pP$ (i.e., $u^{\hat{H}}, v^{\hat{H}} \in \text{Ker}(\phi^*\omega)_p$ e $u^V = d\psi_p(e)\xi, v^V = d\psi_p(e)\eta$, para algum $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$). Daí, $\omega(\phi(p))(d\phi(p)u^{\hat{H}}) = 0$ e $d\phi(p)u^{\hat{H}} \in H_{\phi(p)}$ (o mesmo vale para $v^{\hat{H}}$). Além disso, $d\phi(p)u^V = d(\phi \circ \psi_p)(e)\xi$, e como $\phi \circ \psi_p = \psi_{\phi(p)}$, temos que $d\phi(p)u^V \in V_{\phi(p)}$. Concluimos então que $(d\phi(p)u)^H = d\phi(p)u^{\hat{H}}$. Agora, como a derivada exterior comuta com o pull-back, obtemos que $\Omega^\phi(p)(u, v) = d\omega(\phi(p))(d\phi(p)u^{\hat{H}}, d\phi(p)v^{\hat{H}}) = d\omega(\phi(p))((d\phi(p)u)^H, (d\phi(p)v)^H) = (\phi^*\Omega)(p)(u, v)$
□

É útil caracterizar a ação de $\text{Aut}(P)$ em $\mathcal{A}$ a partir da função em $C_C^\infty(P; G)$ correspondente.

Proposição 1.4.2. *Seja $\omega \in \mathcal{A}$, $\phi \in \text{Aut}(P)$ e $f \in C_C^\infty(P; G)$ correspondente (i.e., $\phi(p) = p \cdot f(p)$). Então,*

$$1. \phi^*\omega = \text{Ad}_{f^{-1}}\omega + f^*\theta$$

$$2. \phi^*\Omega = \text{Ad}_{f^{-1}}\Omega$$

Prova. i) ϕ é dado pela composição dos mapas $p \xrightarrow{(id, f)} (p, f(p)) \xrightarrow{\sigma} p \cdot f(p)$, i.e., $\phi = \sigma \circ (id, f)$ e podemos calcular sua derivada utilizando a regra da cadeia e o Lema 1.3.4:

$$d\phi(p)v = d\sigma(p, f(p))d(id, f)(p)v = d\sigma(p, f(p))(v, df(p)v) = d\psi_p(f(p))df(p)v + d\psi_{f(p)}(p)v$$

Assim,

$$(\phi^*\omega)(p)v = \omega_{p \cdot f(p)}(d\psi_p(f(p))df(p)v + d\psi_{f(p)}(p)v) = \omega_{p \cdot f(p)}(d\psi_p(f(p))df(p)v) + \text{Ad}_{f(p)^{-1}}(\omega(p)v)$$

Agora, note que $\psi_p : h \in G \mapsto p \cdot h = (p \cdot f(p)) \cdot (f(p)^{-1}h)$. Ou seja, $\psi_p = \psi_{p \cdot f(p)} \circ L_{f(p)^{-1}}$.

Daí,

$$\begin{aligned} \omega_{p \cdot f(p)}(d\psi_p(f(p))df(p)v) &= \omega_{p \cdot f(p)}(d\psi_{p \cdot f(p)}(e)dL_{f(p)^{-1}}(f(p))df(p)v) = \\ &= \omega_{p \cdot f(p)}(d\psi_{p \cdot f(p)}(e)(f^*\theta)(p)v) = (f^*\theta)(p)v \end{aligned}$$

ii) Visto que $\phi^*\Omega = d\omega^\phi + \frac{1}{2}[\omega^\phi, \omega^\phi]$ e temos que $\omega^\phi = \text{Ad}_{f^{-1}}\omega + f^*\theta$, a demonstração (usando o Lema A.0.7) é completamente análoga à demonstração da Prop. 1.3.7. □

Vimos que uma 1-forma de conexão ω pode ser caracterizada por $\{\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})\}$, pois em $P|_{U_\alpha}$, ω é dada por $\mathcal{A}_\alpha$ (Prop. 1.3.4). Reciprocamente, um conjunto $\{\mathcal{A}_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})\}$ satisfazendo a relação da Prop. 1.3.3, nos possibilita definir uma forma global $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, tal que $s_\alpha^* \omega = \mathcal{A}_\alpha$. Vamos entender como o grupo de transformações de calibre age nessas 1-formas locais $\mathcal{A}_\alpha$.

Proposição 1.4.3. *Seja $\omega \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$. Considere também $\phi \in \text{Aut}(P)$ com $f \in C_C^\infty(P; G)$ correspondente e defina $\phi_\alpha = f \circ s_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$. Então, se $\mathcal{A}_\alpha^\phi = s_\alpha^* \omega^\phi$ e $\mathcal{F}_\alpha^\phi = s_\alpha^* \Omega^\phi$, temos*

$$1. \mathcal{A}_\alpha^\phi = \text{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathcal{A}_\alpha + \phi_\alpha^* \theta$$

$$2. \mathcal{F}_\alpha^\phi = \text{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}}(\mathcal{F}_\alpha)$$

Prova.

1. Da Prop. 1.4.2, temos que $\omega^\phi = \text{Ad}_{f^{-1}} \omega + f^* \theta$. Denote, temporariamente, por $\eta = \text{Ad}_{f^{-1}} \omega$. Então, $(s_\alpha^* \eta)(m)u = \eta(s_\alpha(m))(ds_\alpha(m)u) = \text{Ad}_{f(s_\alpha(m))^{-1}}(\omega(s_\alpha(m))ds_\alpha(m)u) = \text{Ad}_{\phi_\alpha(m)^{-1}}((s_\alpha^* \omega)(m)u)$, ou seja, $s_\alpha^*(\text{Ad}_{f^{-1}} \omega) = \text{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathcal{A}_\alpha$. Claramente, $s_\alpha^* f^* \theta = (f \circ s_\alpha)^* \theta = \phi_\alpha^* \theta$ e segue o resultado.
2. Como $\phi^* \Omega = \text{Ad}_{f^{-1}} \Omega$, aplicando s_α^* o resultado é imediato. $\square$

Observação 1.4.1. *Note que ϕ_α , definido na proposição acima, nada mais é que o correspondente local de $\phi \in \text{Aut}(P) \leftrightarrow f \in C_C^\infty(P; G)$ em $\Gamma(P \times_C G)$. De fato, se $\sigma \in \Gamma(P \times_C G)$ é este elemento correspondente, pela proposição 1.4.1, temos que, se $m \in U_\alpha$, $\sigma(m) = [s_\alpha(m), f(s_\alpha(m))] = [s_\alpha(m), \phi_\alpha(m)]$.*

1.5 Instantons

Como descrito no apêndice B, a estrela de Hodge de uma variedade riemanniana orientada (M, g) , é uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$, que satisfaz $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$. Podemos estender a estrela de Hodge para formas com valores em um fibrado vetorial E de maneira natural

$$* : \Omega^k(M; E) \rightarrow \Omega^{n-k}(M; E)$$

definindo $*(\alpha \otimes s) = *\alpha \otimes s$, onde $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $s \in \Gamma(E)$ (e estendendo por linearidade).

Em particular, se M tem dimensão igual a $n = 4$, em $k = 2$, $*$: $\Omega^2(M) \rightarrow \Omega^2(M)$ e $*^2 = 1$. Portanto, o espaço de 2-formas se decompõe como $\Omega^2(M) = \Omega_+^2(M) \oplus \Omega_-^2(M)$, onde $\Omega_\pm^2(M)$ representa o autoespaço cujo autovalor é ± 1 . Em particular, se $\alpha \in \Omega^2(M)$,

$$\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$$

onde, $\alpha_+ = \frac{1}{2}(\alpha + *\alpha)$ e $\alpha_- = \frac{1}{2}(\alpha - *\alpha)$.

Dada uma 1-forma de conexão $\omega \in \mathcal{A}$ do fibrado principal $P(M, G)$, vimos que a 2-forma de curvatura corresponde a $\mathcal{F}_\omega \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$. Estendendo, portanto, a estrela de Hodge para formas com valores no fibrado vetorial de álgebras de Lie, temos a seguinte definição.

Definição 1.5.1. *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal, onde M é uma 4-variedade riemanniana orientada. Uma 1-forma de conexão ω em P é dita anti-auto-dual, ou instanton, se $*\mathcal{F}_\omega = -\mathcal{F}_\omega$. No caso em que $*\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}_\omega$, a conexão é dita auto-dual.*

Observação 1.5.1. *Trocando a orientação de M , conexões anti-auto-duais viram duais, e vice-versa, de modo que as teorias obtidas através da escolha entre auto-dual e anti-auto-dual são equivalentes. Como observado em [33], superfícies complexas têm uma orientação natural e conexões anti-auto-duais estão relacionadas com estabilidade de fibrados vetoriais holomorfos (enquanto conexões auto-duais se relacionam com fibrados anti-holomorfos). Por esse motivo, escolheremos o sinal negativo e trabalharemos com instantons.*

Comentários sobre o funcional de Yang-Mills

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre uma variedade riemanniana 4-dimensional compacta e orientada (M, g) . Vamos definir uma norma em $\Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$, onde moram as curvaturas $\mathcal{F}_\omega$, associadas às conexões $\omega \in \mathcal{A}$ de $P(M, G)$.

Seja $\zeta \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$. Como observado no apêndice A, ζ é dado localmente por $\{\zeta_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{g})\}$, satisfazendo $\zeta_\alpha = Ad(g_{\alpha\beta})(\zeta_\beta)$ em $U_{\alpha\beta}$. Portanto, se a álgebra de Lie de G admite um produto interno Ad-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$, podemos considerar o pareamento entre esse produto interno em $\mathfrak{g}$ com $\zeta_\alpha \mapsto \zeta_\alpha \wedge *\zeta_\alpha$. Como o produto interno em $\mathfrak{g}$ é Ad-invariante o pareamento citado concorda nas interseções $U_{\alpha\beta}$ e está globalmente definido. Este será denotado por $\langle \zeta \wedge *\zeta \rangle_{\mathfrak{g}}$.

Definição 1.5.2. *O funcional de Yang-Mills é definido por*

$$YM : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \|\omega\|_{L^2}^2 = \int_M \langle \mathcal{F}_\omega \wedge *\mathcal{F}_\omega \rangle_{\mathfrak{g}}$$

Observação 1.5.2. 1. *Se M não é compacta, ainda podemos definir o funcional de Yang-Mills para as conexões com $\int_M \langle \mathcal{F}_\omega \wedge *\mathcal{F}_\omega \rangle_{\mathfrak{g}} < \infty$.*

2. A Prop. 1.4.3 nos dá que a ação de um elemento do grupo de transformações de calibre em $\mathcal{F}_\alpha$ é dada por $\mathcal{F}_\alpha^\phi = Ad_{\phi_\alpha^{-1}}(\mathcal{F}_\alpha)$. Portanto, pela Ad-invariância do produto interno em $\mathfrak{g}$, temos que o funcional de Yang-Mills é invariante pela ação de $\mathcal{G}$ e assim fica bem definido

$$YM : \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

3. Geralmente, em teoria de calibre, considera-se grupos de Lie de matrizes conexos, compactos e semi-simples ($SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$). Neste caso, a forma de Killing $k(x, y) = \text{tr}(ad(x) \circ ad(y))$, $x, y \in \mathfrak{g}$, é negativa definida e $\langle x, y \rangle = -\text{tr}(ad(x) \circ ad(y))$ define um produto interno Ad-invariante. Por isso, muitas vezes, encontra-se na literatura a seguinte notação para o funcional de Yang-Mills $-\int_M \text{tr}(\mathcal{F}_\omega \wedge *\mathcal{F}_\omega)$ (ou alguma normalização do mesmo).
4. Mostra-se que, se a segunda classe de Chern do fibrado vetorial complexo associado ao principal pela representação natural (supõe-se G um grupo de Lie de matrizes, em geral compacto, conexo e semi-simples) for positiva, instantons são mínimos globais desse funcional (similarmente, mínimos globais quando a segunda classe de Chern é negativa são as conexões auto-duais). Do funcional de Yang-Mills, obtemos as equações de Yang-Mills ($d_\omega * \mathcal{F}_\omega = 0$) e soluções desta são os mínimos locais do funcional. Note que, pela identidade de Bianchi, instantons e formas auto-duais são imediatamente soluções para a equação. Existem, no entanto, soluções da equação de Yang-Mills que não são instantons nem conexões auto-duais (ver, por exemplo, [39]).

1.6 Espaço de Moduli de Instantons

Comentários

Esta seção foi incluída apenas à título de completude. Os resultados não serão demonstrados (e muitos deles dependem de ferramentas de análise e considerações técnicas sobre teoria de variedades de dimensão infinita). Boas referências para a teoria de calibre são [3], [11], [14] e [33].

Seja (M^4, g) uma variedade riemanniana compacta e orientável, G um grupo de Lie de matrizes compacto, conexo e semi-simples ($SU(r)$, por exemplo) e $P(M, G)$ um fibrado principal.

Dado um instanton $\omega \in \mathcal{A}^-$ (i.e. $\mathcal{F}_\omega = - * \mathcal{F}_\omega$), temos o seguinte complexo

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M; \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d_\omega} \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d_\omega^+} \Omega_+^2(M; \mathfrak{g}_P) \longrightarrow 0$$

onde d_ω^+ denota a composição de d_ω com a projeção no espaço das formas auto-duais (e, de fato temos um complexo, pois $\mathcal{F}_\omega^+ = 0$).

Já vimos que $\Omega^0(M; \mathfrak{g}_P) = \Gamma(\mathfrak{g}_P) = \text{Lie}(\mathcal{G})$ e também que $\Omega^1(M; \mathfrak{g}_P) \simeq T_\omega \mathcal{A}$, pois o espaço das conexões é um espaço afim modelado em $\Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$. Utilizando as ferramentas desenvolvidas no texto é possível mostrar que $\text{Im} d_\omega = T_\omega(\omega \cdot \mathcal{G})$ e que $\text{Ker} d_\omega^+ = T_\omega \mathcal{A}^-$.

É importante (e natural) excluir conexões cujos grupos de isotropia são "grandes". Para isso, vamos definir informalmente a holonomia de uma conexão.

Definição 1.6.1. *Seja $\omega \in \mathcal{A}$*

1. *Uma curva suave $\gamma : [0, 1] \longrightarrow P$ é dita horizontal, se $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ (ou seja, os vetores tangentes à curva estão na distribuição horizontal determinada pela 1-forma de conexão ω)*
2. *Dados $p, q \in P$. Definimos uma relação de equivalência em P pedindo que $p \sim q$ se existir uma curva horizontal (suave por caminhos).*
3. *$\text{Hol}_p(\omega) \doteq \{g \in G ; p \cdot g \sim p\}$*

Mostra-se que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência, e que $\text{Hol}_p(\omega)$ forma um grupo, chamado *grupo de holonomia de ω em p* . Para pontos que podem ser ligados por um caminho, esses grupos são conjugados (e portanto isomorfos). Assim, como P é uma variedade conexa, podemos falar no grupo de holonomia $\text{Hol}(\omega)$.

Definição 1.6.2. *Uma conexão é dita irredutível, se $\text{Hol}(\omega) = G$ e redutível caso contrário.*

Considerar apenas conexões irredutíveis é natural, pois se a holonomia $H = \text{Hol}(\omega)$ é um subgrupo próprio de G é possível reduzir o grupo de estrutura do fibrado para H . Além disso, é possível provar (para os grupos de Lie considerados no início da seção) que o grupo de isotropia de conexões irredutíveis corresponde ao centro do grupo. Daí, mostra-se que $H_\omega^0(M; \mathfrak{g}_P) = \text{Ker} d_\omega = \text{Lie}(\Gamma_\omega) = \text{Lie}(Z(G)) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ que, por sua vez, é um ideal abeliano de $\mathfrak{g}$ e deve ser zero se a álgebra é semi-simples.

Sejam $H^i(M; \mathfrak{g}_P)$, $i = 0, 1, 2$, os grupos de cohomologia do complexo e denote por h_i suas dimensões. Se nos restringirmos aos instantons com $h_0 = h_2 = 0$, é possível usar um teorema

de Atiyah, Hitchin e Singer, que garante que o quociente $\mathcal{M} \doteq \frac{\{\omega \in \mathcal{A}^- ; h_0 = h_2 = 0\}}{\mathcal{G}}$ é uma variedade diferenciável, cuja dimensão pode ser calculada através de invariantes topológicos. O teorema do índice é utilizado quando se demonstra que o operador de deformação $\delta_\omega : \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^0(M; \mathfrak{g}_P) \oplus \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$, dado por $\delta_\omega = d_\omega^* \oplus d_\omega$ é elíptico e assim Freedholm (i.e., tem núcleo e conúcleo de dimensão finita). Daí, identifica-se o espaço tangente de uma classe de conexão no espaço de moduli de instantons com o núcleo desse operador, de modo que a dimensão de $\mathcal{M}$ é o índice do operador δ (calculado pelo teorema do índice). Chamamos esse espaço de *espaço de moduli de instantons*. Em particular, fixada a classe de Chern do fibrado vetorial complexo associado $c_2(E) = n$ e seu posto, $rank(E) = r$, denota-se tal espaço de moduli por $\mathcal{M}(r, n)$.

Cabe ressaltar que problemas (da análise) surgem rapidamente quando se se considera espaços de moduli de instantons, uma vez que tanto o grupo de transformações de calibre quanto o espaço de conexões têm dimensão infinita. Se faz necessário, portanto, introduzir ferramentas pesadas para se obter informações sobre esses quocientes.

Capítulo 2

Mapas Momento e Redução

2.1 Geometria Simplética

Definição 2.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^2(M)$. Dizemos que o par (M, ω) é uma **variedade simplética**, se*

1. $d\omega = 0$ (i.e., ω é uma dois forma fechada)
2. ω é não-degenerada (i.e., dado $p \in M$ e $v_1 \in T_pM$, $v_1 \neq 0$, existe $v_2 \in T_pM$ com $\omega_p(v_1, v_2) \neq 0$)

Segue da definição algumas consequências imediatas

1. Como $\omega_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é bilinear e anti-simétrico, $p \in M$, temos, pela álgebra linear, que existe uma base de T_pM , $\{o_1, \dots, o_k, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$, tal que, com relação à essa base, ω_p é representada pela seguinte matriz quadrada anti-simétrica

$$\begin{pmatrix} 0_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_n \\ 0 & -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

onde 0_k é a matriz nula $k \times k$, 1_n a matriz identidade $n \times n$, $k = \dim\{u \in T_pM \mid \omega_p(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in T_pM\}$ e $k + 2n = \dim T_pM$. Como ω é não-degenerada, $k = 0$ e variedades simpléticas têm obrigatoriamente dimensão par. Em particular, chama-se tal base, $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$, de base simplética.

2. A não-degenerescência de ω dá um isomorfismo natural entre os fibrados tangente e co-tangente de M . Denotaremos também por ω o seguinte mapa

$$\begin{aligned}\omega : TM &\longrightarrow T^*M \\ v \in T_pM &\longmapsto \omega_p(v, \cdot) \in T_p^*M\end{aligned}$$

Este é claramente um mapa (diferenciável) entre os fibrados vetoriais. Como $\dim T_pM = \dim T_p^*M$, pelo teorema do núcleo e imagem, basta mostrar que $\omega|_{T_pM}$ é injetivo. Mas, se $\omega(v_1) = 0$, $v_1 \in T_pM$, devemos ter $v_1 = 0$ (caso contrário, pela não-degenerescência de ω , $\exists v_2 \in T_pM$ com $\omega_p(v_1, v_2) \neq 0$).

Em particular ω dá uma correspondência entre as seções dos fibrados tangente e co-tangente, a saber, campos de vetores e 1-formas de M , respectivamente ($X \in \mathfrak{X}(M) \doteq \Gamma(TM) \longmapsto i_X\omega \in \Omega^1(M)$, onde i_X é a contração de ω pelo campo X).

3. Se (M^{2n}, ω) é uma variedade simplética, M é orientável e, em particular, $\omega^n \doteq \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n vezes) é uma forma volume. De fato, dado $p \in M$, tome uma base simplética de T_pM como descrita anteriormente. Segue que $\omega^n(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \neq 0$. Em particular, $\frac{1}{n!}\omega^n$ é chamada forma de Liouville.

A noção de equivalência em geometria simplética se dá através dos symplectomorfismos, definidos abaixo.

Definição 2.1.2. *Sejam (M_1^{2n}, ω_1) e (M_2^{2n}, ω_2) variedades simpléticas. Um symplectomorfismo entre tais variedades é um difeomorfismo $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$, tal que $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Em particular, denotamos por $\text{Sympl}(M, \omega)$ o conjunto de symplectomorfismos de (M, ω) .*

Observação 2.1.1. *$\text{Sympl}(M, \omega) \subseteq \text{Diff}(M)$ é claramente um grupo com composição, pois se $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Sympl}(M, \omega)$, $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^*\omega = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*\omega = \omega$ e, se $\varphi \in \text{Sympl}(M, \omega)$, $\omega = (\varphi \circ \varphi^{-1})^*\omega = (\varphi^{-1})^*(\varphi^*\omega) = (\varphi^{-1})^*\omega$, logo $\varphi^{-1} \in \text{Sympl}(M, \omega)$. Este grupo é um objeto muito interessante em geometria simplética. Apesar de não serem utilizadas nesta dissertação, cabem algumas observações a título de curiosidade acerca deste grupo. Podemos dotá-lo, por exemplo, com a topologia C^k , $0 \leq k \leq \infty$, e foi provado por Gromov e Eliashberg que $\text{Sympl}(M, \omega)$ é C^0 -fechado em $\text{Diff}(M)$ (i.e. todo difeomorfismo de M que é limite de symplectomorfismos na topologia C^0 , é um symplectomorfismo). Além disso, symplectomorfismos são difeomorfismos que preservam volume ($\varphi^*(\omega^n) = (\varphi^*\omega)^n$). Uma pergunta natural é a relação entre os espaços dos symplectomorfismos e dos difeomorfismos que preservam volume. Dacorogna e Moser mostraram que é*

sempre possível comprimir uma bola de raio grande num cilindro arbitrariamente pequeno através de um difeomorfismo que preserva volume. Tal resultado, como demonstrado por Mikhail Gromov, em seu trabalho com curvas holomorfas, não vale na categoria simplética, de modo que symplectomorfismos são mais restritivos que difeomorfismos que preservam volume.

Exemplo 2.1.2. Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ e considere

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$$

ω_0 é claramente fechada. Além disso, se $\omega_p(v, \cdot) = 0$, para algum

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p + b_i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \in T_p M, \quad \omega_p(v, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p) = -b_i = 0 \quad \text{e} \quad \omega_p(v, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p) = a_i = 0 \quad \text{e} \quad v = 0.$$

Logo, ω_0 é não-degenerada e $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ uma variedade simplética.

Observação 2.1.3. Podemos identificar $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$ através de $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$. Dessa forma, podemos escrever ω_0 a partir das coordenadas de $\mathbb{C}^n$

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

pois $dz_j \wedge d\bar{z}_j = (dx_j + idy_j) \wedge (dx_j - idy_j) = -2idx_j \wedge dy_j$. Assim, $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ é também variedade simplética.

Diferente de variedades Riemannianas, por exemplo, que possuem estrutura local rica, variedades simpléticas de mesma dimensão são modeladas localmente pelo exemplo anterior, i.e. toda variedade simplética (M^{2n}, ω) é localmente symplectomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Este é o enunciado do teorema de Darboux, cuja demonstração pode ser encontrada em [9].

Teorema 2.1.1. (Darboux) Seja (M^{2n}, ω) uma variedade simplética. Então, dado $p \in M$ existe um sistema de coordenadas locais $(U, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n))$, centrado em p , tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i, \quad \text{em } U$$

Antes de desenvolver um pouco mais a teoria, é instrutivo nos familiarizarmos com mais exemplos.

Exemplo 2.1.4. Seja M^n uma variedade e $\pi : T^*M \rightarrow M$ seu fibrado cotangente. Dado um sistema de coordenadas locais $(U, \phi = (x_1, \dots, x_n))$ de M , considere

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(U) &\longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ \xi &\longmapsto (x_1(\pi(\xi)), \dots, x_n(\pi(\xi)), \xi(\frac{\partial}{\partial x^1}|_{\pi(\xi)}), \dots, \xi(\frac{\partial}{\partial x^n}|_{\pi(\xi)}))\end{aligned}$$

$(\tilde{U} \doteq \pi^{-1}(U), \tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n))$ é um sistema de coordenadas locais de T^*M , onde $a_i \in C^\infty(\tilde{U})$, $a_i(\xi) = \xi(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(\xi)})$ (ou seja, $\xi = \sum_{i=1}^n a_i(\xi) dx_i|_{\pi(\xi)}$) e, por abuso de notação, denotamos $x^i \circ \pi \in C^\infty(\tilde{U})$ por $x^i \in C^\infty(U)$. Considere, então, a seguinte 2-forma em $\tilde{U}$

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge da_i$$

Para mostrar que essa 2-forma independe do sistema de coordenadas locais escolhido, observamos que

$$\omega = -d\alpha, \text{ onde } \alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \text{ é uma 1-forma de } \tilde{U}$$

e verifica-se que α está intrinsecamente definida. Para isso, sejam $(\tilde{U}, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$ e $(\tilde{V}, y_1, \dots, y_n, b_1, \dots, b_n)$ sistemas de coordenadas locais de T^*M (como anteriormente), com $\xi \in T_p^*M$ em $\tilde{U} \cap \tilde{V}$.

$$\xi = \sum_{i=1}^n a_i(\xi) dx_i|_p = \sum_{i=1}^n b_i(\xi) dy_i|_p, \text{ onde } b_j = \sum_{i=1}^n a_i(\xi) dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n a_i(\xi) \left(\frac{\partial x_i}{\partial y^j} \Big|_p \right)$$

Calculando α no segundo sistema de coordenadas obtemos

$$\alpha = \sum_{j=1}^n b_j dy_j = \sum_{i,j=1}^n a_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial y^j} \Big|_{\pi(\cdot)} \right) dy_j = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial y^j} \Big|_{\pi(\cdot)} \right) dy_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$$

Dessa forma, (T^*M, ω) é uma variedade simplética (em particular, demos os sistemas de coordenadas locais do teorema de Darboux).

Exemplo 2.1.5. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas, então o produto $M_1 \times M_2$ é naturalmente uma variedade simplética. Sejam π_1 e π_2 as projeções de $M_1 \times M_2$ em M_1 e M_2 , respectivamente, e considere a 2-forma em $M_1 \times M_2$ dada por

$$\omega = \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2$$

Note que ω é fechada, pois $d\omega = d\pi_1^* \omega_1 + d\pi_2^* \omega_2 = \pi_1^* d\omega_1 + \pi_2^* d\omega_2 = 0$. Além disso, assumindo o isomorfismo $T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$, seja $(u_1, v_1) \in T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$

tal que $\omega_{(p_1, p_2)}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = 0$, para todo $(u_2, v_2) \in T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$. Então, como $d\pi_1(p_1, p_2)(u, v) = u$ (para π_2), temos que

$$\omega_{(p_1, p_2)}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \omega_1(p_1)(u_1, u_2) + \omega_2(p_2)(v_1, v_2)$$

Fazendo $v_2 = 0$, obtemos que $\omega_1(p_1)(u_1, u_2) = 0$, para todo $u_2 \in T_{p_1}M_1$, logo, pela não-degenerescência de ω_1 , devemos ter $u_1 = 0$ (analogamente, concluímos que $v_1 = 0$). Assim, ω é não-degenerada, portanto uma forma simplética.

Observação 2.1.6. Superfícies (i.e. variedades diferenciáveis de dimensão 2) orientáveis são trivialmente variedades simpléticas (tome uma forma volume). Então, produtos de n superfícies de Riemann (que são variedades complexas, logo orientáveis), por exemplo, dão exemplos de variedades simpléticas de dimensão $2n$.

Exemplo 2.1.7. Seja $M = S^2 = \{p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ e defina

$$\omega_p(u, v) = \langle p, u \times v \rangle$$

onde $u, v \in T_p S^2 = \{q \in \mathbb{R}^3 | \langle p, q \rangle = 0\}$ ($\times$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ são o produto exterior e o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, respectivamente). Temos que ω_p é bilinear e alternado, pois o produto exterior o é (e o produto interno é bilinear), logo $\omega \in \Omega^2(S^2)$. Como dimensão de S^2 é 2, segue que ω é fechada. Além disso, ela também é não-degenerada. De fato, se $u \neq 0$, $u \in T_p S^2$, tome $v = u \times p$. Como, $\langle p, u \times (u \times p) \rangle = \langle u \times p, u \times p \rangle \neq 0$, segue que ω é não degenerada e temos que (S^2, ω) é uma variedade simplética.

Existe uma obstrução, a nível de cohomologia, que impede que esferas S^{2n} , com $n \geq 2$, possuam estrutura simplética. Vejamos como se dá essa obstrução. Seja (M^{2n}, ω) uma variedade simplética e assumamos M fechada (i.e. variedade compacta e sem bordo). Como $d\omega = 0$, $[\omega] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{R})$. Além disso, $0 \neq [\omega]^n = [\omega^n] \in H_{dR}^{2n}(M, \mathbb{R})$ (onde $[\omega]^n$ é o produto de $[\omega]$ n vezes na cohomologia de de Rham), pois, caso contrário, ω^n seria uma forma exata e, como M é sem bordo, pelo teorema de Stokes obteríamos que a integral de ω^n sobre M é zero, o que contradiz o fato de ω^n ser forma volume. Portanto, devemos ter $H_{dR}^{2j}(M, \mathbb{R}) \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Como $H_{dR}^k(S^n, \mathbb{R})$ é não trivial apenas para $k = 0, n$ [8], nenhuma esfera de dimensão maior que dois pode ser dotada de estrutura simplética.

2.1.1 Mapa Momento

Seja (M, ω) uma variedade simplética. Dado, $H \in C^\infty(M)$, $dH \in \Omega^1(M)$, e considere o campo X_H dado pelo isomorfismo entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\Omega^1(M)$, i.e.

$$i_{X_H}\omega = dH$$

tal campo é chamado *campo hamiltoniano*.

Note que X_H deixa a forma simplética invariante (i.e. $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$, onde $\mathcal{L}$ é a derivada de Lie). De fato, pela fórmula de Cartan temos que:

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = di_{X_H}\omega + i_{X_H}d\omega = 0$$

pois $i_{X_H}\omega = dH$ (e $d^2 = 0$) e $d\omega = 0$ (forma simplética).

Comecemos agora com um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ que deixa a forma simplética invariante. Então, novamente pela fórmula de Cartan:

$$0 = \mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega = di_X\omega$$

Ou seja, $i_X\omega$ é fechada. Se pedirmos $H_{dR}^1(M) = 0$, $i_X\omega$ é também exata e existe $H \in C^\infty(M)$ satisfazendo $i_X\omega = dH$ (claramente não há unicidade, pois $H + \text{constante}$ também satisfaz a condição). Assim, se $H_{dR}^1(M) = 0$ (M simplesmente conexa, por exemplo), todo campo de vetores que deixa ω invariante é campo hamiltoniano.

Observação 2.1.8. *Campos hamiltonianos nos permitem definir um colchete de Poisson em $C^\infty(M)$, a saber*

$$\{f, g\} = X_f(g) = \omega(X_g, X_f)$$

onde a última igualdade vem de $X_f(g) = dg(X_f) = i_{X_g}\omega(X_f) = \omega(X_g, X_f)$ (aqui, como anteriormente, $df = i_{X_f}\omega$ e $dg = i_{X_g}\omega$). Em particular, o colchete de Poisson torna $C^\infty(M)$ uma álgebra de Lie (de dimensão infinita).

Campos que deixam a forma simplética invariante podem ser obtidos, como veremos a seguir, a partir de uma ação simplética de um grupo de Lie G em (M, ω) , onde (M, ω) é variedade simplética. G age simplecticamente em (M, ω) se existe um homomorfismo de grupos $\psi : G \longrightarrow \text{Diff}(M)$, tal que $\psi_g^*\omega = \omega$, para todo $g \in G$. Ou seja,

$$\psi : G \longrightarrow \text{Sympl}(M, \omega)$$

Dado, $\xi \in \mathfrak{g}$, temos o seguinte campo de vetores associado, $X_\xi \in \mathfrak{X}(M)$, dado por

$$(X_\xi)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(t\xi) \cdot p)$$

Sobre a notação: Em geral, confundiremos ações (à esquerda) de um grupo de Lie G numa variedade M , $G \times M \longrightarrow M$, com homomorfismos de grupos $\psi : G \longrightarrow \text{Diff}(M)$. De fato, as noções são equivalentes e a ação (que denotaremos por $\cdot$) está relacionada com o homomorfismo ψ por $\psi_g(p) = g \cdot p$. Por abuso de notação, fixado um $p \in M$, a aplicação $G \longrightarrow M$, $g \longmapsto g \cdot p$, será denotada por ψ_p .

Dito isso, podemos escrever $(X_\xi)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(t\xi) \cdot p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_p(\exp(t\xi)) = d\psi_p(e)\xi$, onde fazemos a identificação usual de $\mathfrak{g}$ com $T_e G$.

Antes de mostrar que os campos de vetores definidos acima, $X_\xi \in \mathfrak{X}(M)$, deixam a forma simplética invariante, vamos relembrar informal e brevemente a noção de fluxo de um campo. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, dizemos que uma curva diferenciável $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ é uma curva integral de X , se $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$, para todo $t \in I$. Tomando coordenadas locais, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias e conclui-se, pelos teoremas padrões de existência e unicidade de EDOs, que dado $p \in M$ existe uma única curva integral $\gamma_p : (a_p, b_p) \longrightarrow M$, $a_p, b_p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, com $0 \in (a_p, b_p)$ (i), $\gamma_p(0) = p$ (ii) e tal que, se $\eta : (c, d) \longrightarrow M$ é outra curva integral satisfazendo (i) e (ii), então $(c, d) \subseteq (a_p, b_p)$ e $(\gamma_p)|_{(c,d)} = \eta$. Chamamos tal curva de *curva integral maximal* de X por p . Dado $p \in M$, mostra-se que existe $\epsilon > 0$, e um aberto U contendo p , tal que o mapa $(-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$, dado por $(t, q) \longmapsto \phi_X^t(q) \doteq \gamma_q(t)$, é bem definido e diferenciável. Chamamos ϕ_X^t de *fluxo* do campo X (ver, por exemplo, [27] para uma discussão mais detalhada).

Voltando ao nosso caso, dado $\xi \in \mathfrak{g}$, considere a curva $\gamma(t) = \exp(t\xi) \cdot p$, que está definida num aberto contendo 0, $\gamma(0) = p$ e segue diretamente da definição que $\gamma'(0) = (X_\xi)_p$. Mais ainda, γ é curva integral de X_ξ por p . De fato, $(X_\xi)_{\gamma(s)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot (\exp(s\xi) \cdot p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(t\xi)\exp(s\xi)) \cdot p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t+s)\xi \cdot p = \gamma'(s)$.

Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $(\mathcal{L}_X \omega)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\phi_X^t)^* \omega)_p$, onde ϕ_X^t denota o fluxo do campo X . Portanto, como para o campo $X = X_\xi$, $\phi_X^t = \psi_{\exp(t\xi)}$ e a ação é simplética ($\psi_g^* \omega = \omega$, para todo $g \in G$), temos que $\mathcal{L}_{X_\xi} \omega = 0$.

Assim, se $H_{dR}^1(M) = 0$, X_ξ é campo hamiltoniano. Escolhendo, $H_\xi \in C^\infty(M)$, para cada

$\xi \in \mathfrak{g}$, com $dH_\xi = i_{X_\xi}\omega$, temos o seguinte mapa

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \xi &\longmapsto H_\xi\end{aligned}$$

Esse mapa pode ser tomado linear. Para isso, fixe uma base $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ de $\mathfrak{g}$, escolha $H_{\xi_j} \in C^\infty(M)$ satisfazendo $dH_{\xi_j} = i_{X_{\xi_j}}\omega$, $j = 1, \dots, k$, e estenda por linearidade. Dado $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$\xi = \sum_{j=1}^k a_j \xi_j \text{ e } (X_\xi)_p = d\psi_p(e)\xi = \sum_{j=1}^k a_j d\psi_p(e)\xi_j = \sum_{j=1}^k a_j (X_{\xi_j})_p, \text{ logo } X_\xi = \sum_{j=1}^k a_j X_{\xi_j}.$$

Agora, como estendemos o mapa $\mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$ por linearidade, $H_\xi = \sum_{j=1}^k a_j H_{\xi_j} \Rightarrow dH_\xi =$

$$\sum_{j=1}^k a_j dH_{\xi_j} = \sum_{j=1}^k a_j i_{X_{\xi_j}}\omega = \omega\left(\sum_{j=1}^k a_j X_{\xi_j}, \cdot\right) = i_{X_\xi}\omega, \text{ como gostaríamos.}$$

Note que, mesmo pedindo que o mapa $\mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$ seja linear, ainda há uma escolha de constantes. Para tentar remediar essa situação vamos pensar nesse mapa como:

$$\begin{aligned}\mu : M &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \mu(p)(\xi) &= H_\xi(p)\end{aligned}$$

onde $p \in M$ e $\xi \in \mathfrak{g}$. Observe que, ao pedirmos linearidade de $\mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$, garantimos que o mapa está bem definido (i.e. $\mu(p) \in \mathfrak{g}^*$).

Agora, G age no domínio e no contra-domínio do mapa μ . A ação em $\mathfrak{g}^*$ é dada pela representação coadjunta, que relembremos abaixo. Primeiramente, associado ao grupo de Lie G , temos, para cada $g \in G$, os difeomorfismos $L_g, R_g : G \longrightarrow G$ (multiplicação por g à esquerda e à direita, respectivamente). Denotamos por $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ (conjugação). Definimos então a representação adjunta por

$$\begin{aligned}Ad : G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}) \\ Ad(g) &= dC_g(e)\end{aligned}$$

A ação coadjunta define-se como

$$\begin{aligned}Ad^* : G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}^*) \\ Ad_g^*(\delta)(\xi) &= \delta(Ad_{g^{-1}}\xi)\end{aligned}$$

Observação 2.1.9. A presença de g^{-1} na definição da representação coadjunta é necessária para termos de fato uma representação. Primeiramente, $C_{gh}(x) = ghxh^{-1}g^{-1} = C_g \circ C_h(x)$, logo, tomando a derivada no elemento neutro $e \in G$, obtemos $Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$. Agora, $Ad_{gh}^*(\delta)(\xi) = \delta(Ad_{h^{-1}g^{-1}}(\xi)) = \delta(Ad_{h^{-1}}(Ad_{g^{-1}}(\xi))) = Ad_h^*(\delta)(Ad_{g^{-1}}(\xi)) = Ad_g^*(Ad_h^*(\delta))(\xi) = Ad_g^* Ad_h^*(\delta)(\xi)$. Logo, vale $Ad_{gh}^* = Ad_g^* Ad_h^*$.

Podemos pedir, então, que o mapa μ seja compatível com as ações de G em M e em $\mathfrak{g}^*$. Ou seja,

$$Ad_g^* \circ \mu = \mu \circ \psi_g$$

para todo $g \in G$.

Vamos resumir essa discussão na seguinte definição.

Definição 2.1.3. Seja (M, ω) uma variedade simplética, G um grupo de Lie e $\psi : G \longrightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ uma ação simplética. Dizemos que ψ é uma ação hamiltoniana se existe um mapa

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

satisfazendo,

1. $d\mu^\xi = i_{X_\xi} \omega$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ (onde $\mu^\xi \in C^\infty(M)$, $\mu^\xi(p) \doteq \mu(p)(\xi)$)
2. $Ad_g^* \circ \mu = \mu \circ \psi_g$, para todo $g \in G$

O mapa μ é chamado mapa momento.

Lema 2.1.1. Seja (M, ω) uma variedade simplética e G um grupo de Lie agindo de forma simplética em (M, ω) . Se a 2-forma é exata, $\omega = d\theta$, e a ação preserva também a 1-forma θ (i.e. $\psi_g^* \theta = \theta$, para todo $g \in G$), então a aplicação $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, definida por $\mu(m)(\xi) = -\theta(m)(X_\xi)_m$ é um mapa momento para a ação de G em M .

Prova. Como a ação preserva θ , $\mathcal{L}_{X_\xi} \theta = 0$ e pela fórmula de Cartan, obtemos $i_{X_\xi} d\theta = -di_{X_\xi} \theta$. Equivalentemente, $i_{X_\xi} \omega = -d\mu^\xi$. Além disso, para mostrar a G -equivariância, precisamos mostrar que $\theta_p(X_{Ad_{g^{-1}}\xi})_p = \theta_{g \cdot p}(X_\xi)_{g \cdot p}$. Mas, $d\psi_g(p)(X_{Ad_{g^{-1}}\xi})_p = d\psi_g(p)d\psi_p(e)dC_{g^{-1}}(e)\xi = d(\psi_g \circ \psi_p \circ C_{g^{-1}})(e)\xi$ e como $\psi_g \circ \psi_p \circ C_{g^{-1}} = \psi_{g \cdot p}$, temos $d\psi_g(p)(X_{Ad_{g^{-1}}\xi})_p = (X_\xi)_{g \cdot p}$. Sendo assim, $\theta_{g \cdot p}(X_\xi)_{g \cdot p} = \theta_{g \cdot p}(d\psi_g(p)(X_{Ad_{g^{-1}}\xi})_p) = (\psi_g^* \theta)_p(X_{Ad_{g^{-1}}\xi})_p = \theta_p(X_{Ad_{g^{-1}}\xi})_p$ $\square$

Nem toda ação simplética é hamiltoniana (ou seja, mapas momento não necessariamente existem). Além disso, caso a ação seja hamiltoniana, podem existir mais de um mapa momento. Mais à frente teremos mais a dizer sobre a existência e unicidade desses mapas. No momento, nos contentaremos com a seguinte observação. Sejam μ_1 e μ_2 mapas momento para a ação simplética $\psi : G \longrightarrow \text{Sympl}(M, \omega)$, onde M é conexa. Então, dado $\xi \in \mathfrak{g}$, $d(\mu_1^\xi - \mu_2^\xi) = i_{X_\xi} \omega - i_{X_\xi} \omega = 0$, logo, como M é conexa, $\mu_1^\xi - \mu_2^\xi = c(\xi) \in \mathbb{R}$. Como a aplicação $\xi \in \mathfrak{g} \longmapsto \mu^\xi \in C^\infty(M)$ é linear, obtemos $(\mu_1 - \mu_2)(p) = c \in \mathfrak{g}^*$, para todo $p \in M$. Também temos que $(\mu_1 - \mu_2) \circ \psi_g = \text{Ad}_g^*(\mu_1 - \mu_2)$, logo $\text{Ad}_g^*(c) = c$, para todo $g \in G$. Concluimos que dados dois mapas momento, eles diferem por um elemento de $\mathfrak{g}^*$ fixado pela ação coadjunta.

Reciprocamente, dado um mapa momento μ para a ação ψ , considere $\delta \in \mathfrak{g}^*$ fixado pela ação coadjunta. Assim, $\tilde{\mu} : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, dado por $p \longmapsto \mu(p) + \delta$ é claramente mapa momento para ψ e podemos concluir que o conjunto dos mapas momento para a ação dada é parametrizado pelos elementos de $\mathfrak{g}^*$ fixados pela ação coadjunta.

Exemplo 2.1.10. *Seja $M = \mathbb{R}^6$ com coordenadas $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ e forma simplética canônica $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + dx_3 \wedge dy_3$. Considere a seguinte ação de $G = \mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned} \psi : g \times M &\longrightarrow M \\ g \cdot (a_1, a_2) &= (g + a_1, a_2) \end{aligned}$$

onde $a_1, a_2, g \in \mathbb{R}^3$.

A ação é claramente simplética, uma vez que $d\psi_g(p) = \text{Id}$. Além disso, dado $\xi \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ e $a = (a_1, a_2) \in M$

$$(X_\xi)_a = d\psi_a(0)\xi = (\xi, 0)$$

Defina então a função $\mu^\xi : (a_1, a_2) \in M \mapsto \xi \cdot a_2$ (onde $\cdot$ é o produto escalar de $\mathbb{R}^3$). Como μ^ξ é linear, dado $v = (v_1, v_2) \in T_a M = \mathbb{R}^6$,

$$d\mu^\xi(a)v = \mu^\xi \cdot v_2$$

Como $(X_\xi)_a = (\xi, 0)$, $\omega((\xi, 0), (v_1, v_2)) = \mu^\xi \cdot v_2 = d\mu^\xi(a)v$

Como $\text{Ad}_g^* = \text{Id}_{\mathfrak{g}^*}$, temos que $\mu : \mathbb{R}^6 \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^*$, dado por $(\mu(a))\xi = \mu^\xi(a)$, é um mapa momento para a ação descrita $(\mu(g + a_1, a_2) = \mu(a_1, a_2))$.

Em geral, identifica-se $(\mathbb{R}^3)^* \simeq \mathbb{R}^3$ através do produto escalar de $\mathbb{R}^3$ e assim o mapa momento é a projeção $(a_1, a_2) \mapsto a_2$. Se pensarmos em $\mathbb{R}^6$ como o fibrado cotangente de $\mathbb{R}^3$, temos que o mapa momento é o momento linear da física.

Exemplo 2.1.11. Seja $M = \mathbb{C}^n$ e $G = U(n)$ agindo por multiplicação de matriz em M (logo, a ação é simplética, pois linear). Denotemos por $(\cdot, \cdot)$ o produto interno hermitiano usual de $\mathbb{C}^n$. Dados $z \in \mathbb{C}^n$ (visto como vetor coluna) e $\xi \in \mathfrak{u}(n)$ (i.e., $\xi + \xi^\dagger = 0$), defina

$$\mu^\xi(z) = -\frac{i}{2}(\xi z, z)$$

Note que, $(\xi z_1, z_2) = (\xi z_1)^t \overline{z_2} = z_1^t \xi^t \overline{z_2} = -z_1^t \overline{\xi z_2} = -(z_1, \xi z_2) = -\overline{(\xi z_2, z_1)}$. Em particular, $-\frac{i}{2}(\xi z, z) \in \mathbb{R}$. Agora, para $\zeta \in T_z \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$

$$d\mu^\xi(z)\zeta = -\frac{i}{2}((\xi \zeta, z) + (\xi z, \zeta)) = -\frac{i}{2}(2i \operatorname{Im}(\xi z, \zeta)) = \operatorname{Im}(\xi z, \zeta)$$

onde Im denota a parte imaginária.

Temos que $(X_\xi)_z = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} e^{t\xi} z = \xi z$. Note ainda que a parte imaginária do produto interno hermitiano nos dá uma forma bilinear alternada (real) e esta pode ser estendida a uma forma simplética em $\mathbb{C}^n$ (se $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$ são as coordenadas de $\mathbb{C}^n$, pensando as coordenadas de $\mathbb{R}^{2n}$ como $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, a forma achada $\operatorname{Im}(\cdot, \cdot)$ equivale a $dy_1 \wedge dx_1 + \dots + dy_n \wedge dx_n$).

Portanto, vale que $d\mu^\xi(z)\zeta = \omega((X_\xi)_z, \zeta)$. Dado $g \in U(n)$, a equivariância equivale a mostrar que $\mu^{g^{-1}\xi g}(z) = \mu^\xi(gz)$, mas isso é imediato pois $(g^{-1}\xi g z, z) = (\xi g z, g z)$.

Observação. $(\xi z, z) = \operatorname{tr}(z z^\dagger \xi)$. De fato, se $\xi = (\xi_{ij})$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$, temos que a entrada (i, j) de $z z^\dagger$ é $z_i \overline{z_j}$. Portanto, $\operatorname{tr}(z z^\dagger \xi) = \sum_{i,j} z_i \overline{z_j} \xi_{ji} = \sum_j (\sum_i \xi_{ji} z_i) \overline{z_j} = (\xi z, z)$. Daí, usa-se o produto interno invariante de $\mathfrak{u}(n)$, $(\xi_1, \xi_2) = -\operatorname{tr}(\xi_1 \xi_2)$ e podemos pensar no mapa momento como

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathfrak{u}(n) \\ z &\mapsto \frac{i}{2} z z^\dagger \end{aligned}$$

Note que a forma simplética tomada é menos a forma simplética canônica de $\mathbb{C}^n$. Se quisermos trabalhar com $\omega = x_1 \wedge y_1 + \dots + x_n \wedge y_n$, devemos tomar o mapa momento com sinal trocado, i.e., $\mu(z) = \frac{1}{2i} z z^\dagger$.

Lema 2.1.2. Suponha que um grupo de Lie G age hamiltoniamente nas variedades simpléticas (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) (com mapas momento μ_1 e μ_2). Tome a forma simplética em $M_1 \times M_2$ dada por $\omega = \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2$ (ver exemplo 2.1.5) e considere a ação natural de G em $M_1 \times M_2$. Para esta ação, temos um mapa momento $\mu : M_1 \times M_2 \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, definido por $\mu(m_1, m_2) = \mu_1(m_1) + \mu_2(m_2)$.

Prova. A demonstração é óbvia uma vez que, dado $\xi \in \mathfrak{g}$, $(X_\xi)_{(m_1, m_2)} = ((X_\xi)_{m_1}, (X_\xi)_{m_2})$ e $d\mu^\xi(m_1, m_2)(a_1, a_2) = d\mu_1^\xi(m_1)(a_1) + d\mu_2^\xi(m_2)(a_2)$. $\square$

Exemplo 2.1.12. Temos que $U(1) = S^1$ age por multiplicação de um número complexo em cada entrada de $(\mathbb{C}^k, \omega_0)$. Esta, nada mais é que a ação diagonal, como no lema acima, do exemplo anterior, no caso em que $n = 1$. Pelo lema, o mapa momento correspondendo a esta ação é dado por $\mu : \mathbb{C}^k \longrightarrow i\mathbb{R}$, $\mu(z) = \frac{1}{2i}(z_1\bar{z}_1 + \dots z_k\bar{z}_k) = \frac{1}{2i}|z|^2$, onde $z = (z_1, \dots, z_k)$.

Como foi comentado, nem toda ação simplética é hamiltoniana e dada uma ação hamiltoniana, o mapa momento não é necessariamente único. Questões de existência e unicidade do mapa momento podem ser respondida através da introdução de uma teoria de cohomologia de álgebras de Lie. Para maiores informações, consulte [9] (capítulo X, seção 26). Em particular, temos que, se G é um grupo de Lie compacto, conexo e semi-simples, toda ação simplética é hamiltoniana e admite único mapa momento.

2.1.2 Redução

Seja G um grupo de Lie compacto, (M, ω) uma variedade simplética e $\psi : M \longrightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ uma ação hamiltoniana com mapa momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Se $\delta \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular, $\mu^{-1}(\delta)$ é uma subvariedade mergulhada de M , cuja dimensão é $\dim M - \dim G$ (pois $\dim \mathfrak{g}^* = \dim \mathfrak{g} = \dim G$). Se denotarmos por $G_\delta = \{g \in G ; Ad_g^* \delta = \delta\}$ (ou seja, o grupo de isotopia de δ com respeito à ação co-adjunta), fica bem definida a ação quando nos restringimos a

$$G_\delta \times \mu^{-1}(\delta) \longrightarrow \mu^{-1}(\delta)$$

De fato, se $p \in \mu^{-1}(\delta)$ e $g \in G_\delta$, $\mu(g \cdot p) = Ad_g^* \mu(p) = Ad_g^* \delta = \delta$. Então, se assumirmos que G_δ age livremente em $\mu^{-1}(\delta)$, como G é compacto $M_\delta \doteq \mu^{-1}(0)/G_\delta$ é variedade diferenciável e $\pi_\delta : \mu^{-1}(\delta) \longrightarrow M_\delta$ é uma submersão.

Teorema 2.1.13. (Marsden-Weinstein) Nas condições dadas acima, existe uma única forma simplética ω_{red} em M_δ tal que $i^* \omega = \pi_\delta^* \omega_{red}$, onde

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\delta) & \xhookrightarrow{i} & M \\ \pi_\delta \downarrow & & \\ M_\delta & & \end{array}$$

Prova. A demonstração pode ser encontrada em [1](páginas 299-300). □

Observação 2.1.14. O teorema da redução simplética (Marsden-Weinstein) pode ser enunciado de forma mais geral (sempre que M_δ tem estrutura de variedade e ω_{red} está bem definido).

A compacidade do grupo de Lie, por exemplo, pode ser substituída pela hipótese da ação ser própria, de modo que M_δ ainda possui estrutura de variedade (tal que a projeção é uma submersão). Mais geralmente, pode-se também considerar a redução simplética no contexto de dimensão infinita (ver detalhes em [25], página 269, e [1], páginas 299-300).

Exemplo 2.1.15. Considere a ação de $U(1) = S^1$ em $\mathbb{C}^k$, como no exemplo 2.1.12. Assim,

$$\mu^{-1}\left(\frac{1}{2i}\right) = S^{2k-1}$$

Como G é compacto, a ação é livre e $\frac{1}{2i}$ é valor regular segue que $\mathbb{P}^{k-1} \simeq S^{2k-1}/S^1$ tem uma forma simplética satisfazendo a condição do teorema de Marsden-Weinstein. O espaço projetivo complexo será abordado mais à frente. Este espaço é, na verdade, Kähler e é possível verificar que a forma simplética que satisfaz o teorema 2.1.13 é exatamente a forma de Fubini-Study (definida no exemplo 2.2.10).

2.2 Geometria Kähler

Considerações iniciais - Álgebra Linear

Seja V um espaço vetorial real, com $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, e considere $V_{\mathbb{C}} \doteq V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Dessa forma, $V_{\mathbb{C}}$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial complexo, dada por $\lambda_1 \cdot v \otimes \lambda_2 \doteq v \otimes (\lambda_1 \lambda_2)$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e $v \in V$ (e a conjugação em $V_{\mathbb{C}}$ é definida por $\overline{v \otimes \lambda} = v \otimes \bar{\lambda}$). Claramente, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V , $\{v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1\}$ é uma base complexa de $V_{\mathbb{C}}$ e temos $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$.

Se W é outro espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, pedindo linearidade em $\mathbb{C}$ obtemos um mapa $T_{\mathbb{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$, definido por $T_{\mathbb{C}}(v \otimes \lambda) = Tv \otimes \lambda$. Em particular, temos um isomorfismo $(V^*)_{\mathbb{C}} \simeq (V_{\mathbb{C}})^*$, dado por $\phi \otimes \lambda \mapsto \lambda \phi_{\mathbb{C}}$ (este mapa é linear, injetivo e as dimensões coincidem).

Geralmente, pensaremos em $V_{\mathbb{C}}$ como duas cópias de V , através do isomorfismo

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{C}} &\longrightarrow V \oplus iV \\ v \otimes (a + ib) &\mapsto av + ibv \end{aligned}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

Definição 2.2.1. Chamamos $J \in \text{End}(V)$ de estrutura quase-complexa de V se $J^2 = -\text{Id}_V$.

Observação 2.2.1. Se J é uma estrutura quase-complexa em V , devemos ter que $\dim_{\mathbb{R}} V = m$ é par. De fato, $J \in \text{End}(V)$ pode ser representado por uma matriz real de modo que $(\det J)^2 = \det(J^2) = \det(-Id_V) = (-1)^m$. Portanto, m deve ser par.

Cabe observar que na literatura, muitas vezes, uma estrutura quase-complexa J num espaço espaço vetorial é chamada de estrutura complexa. Isso se deve ao fato de, no caso de espaços vetoriais, não temos problemas de integrabilidade.

Se J é uma estrutura quase-complexa de V , considere $J_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$. Daí, $J_{\mathbb{C}}^2 = -Id_{V_{\mathbb{C}}}$, pois $J_{\mathbb{C}}^2(v_1 + iv_2) = J_{\mathbb{C}}(Jv_1 + iJv_2) = -v_1 - iv_2$. Defina então

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \{x \in V_{\mathbb{C}} ; J_{\mathbb{C}}x = ix\} \text{ (autoespaço de autovalor } i) \\ V^{0,1} &= \{x \in V_{\mathbb{C}} ; J_{\mathbb{C}}x = -ix\} \text{ (autoespaço de autovalor } -i) \end{aligned}$$

Assim, $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$, onde a decomposição é dada por

$$x = \frac{1}{2}(x - iJ_{\mathbb{C}}x) + \frac{1}{2}(x + iJ_{\mathbb{C}}x)$$

e a conjugação em $V_{\mathbb{C}}$ nos dá o isomorfismo $V^{1,0} \simeq \overline{V^{0,1}}$. Em particular, se $2n = \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$, então $\dim_{\mathbb{C}} V^{1,0} = \dim_{\mathbb{C}} V^{0,1} = n$.

Observação 2.2.2. Cabe ressaltar que uma estrutura quase-complexa define naturalmente uma estrutura complexa em V , por $(a + bi) \cdot v = av + bJv$. Denotaremos V com a estrutura complexa dada por J por V_J . Em particular, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V_J , $\{v_1, Jv_1, \dots, v_n, Jv_n\}$ é uma base de V . De fato, se temos $a_1v_1 + b_1Jv_1 + \dots + a_nv_n + b_nJv_n = 0$, onde os coeficientes são reais, então essa combinação linear, em V_J , é $(a_1 + b_1i)v_1 + \dots + (a_n + b_ni)v_n = 0$, de modo que cada um dos coeficientes é zero e, conseqüentemente, $\{v_1, Jv_1, \dots, v_n, Jv_n\}$ é LI (em V). Como qualquer elemento de V é dado por $(a_1 + b_1i)v_1 + \dots + (a_n + b_ni)v_n = a_1v_1 + b_1Jv_1 + \dots + a_nv_n + b_nJv_n$, temos de fato uma base em V . Note ainda que

$$\begin{aligned} \varphi : V_J &\longrightarrow V^{1,0} \\ v &\mapsto \frac{1}{2}(v - iJv) \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear. Primeiramente, $J_{\mathbb{C}}(\frac{1}{2}(v - iJv)) = \frac{1}{2}(Jv + iv) = \frac{i}{2}(v - iJv)$, logo $\varphi(Jv) \in V^{1,0}$. O mapa é linear, pois $\varphi(Jv) = \frac{1}{2}(Jv + iv) = \frac{i}{2}(v - iJv)$. Como φ é claramente injetor e as dimensões são iguais, temos o isomorfismo.

Sabe-se da álgebra linear que uma decomposição de um espaço vetorial em soma direta induz uma decomposição em soma direta nas potências exteriores [16]. Em particular, $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \Rightarrow \Lambda^k V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=k} (\Lambda^r V^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^s V^{0,1})$. Definimos então,

$$\Lambda^{r,s} V_{\mathbb{C}} \doteq \Lambda^r V^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^s V^{0,1}$$

De modo que, mais sucintamente, $\Lambda^k V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=k} \Lambda^{r,s} V_{\mathbb{C}}$.

Variedades Complexas e Quase-Complexas

Seja M uma variedade diferenciável.

Definição 2.2.2. *Se M admite um automorfismo do fibrado tangente $J : TM \rightarrow TM$, tal que $J^2 = -Id$, dizemos que M é uma variedade quase-complexa e chamamos J de estrutura quase-complexa.*

Observação 2.2.3. *Uma estrutura quase-complexa J pode ser vista como um $(1,1)$ campo tensorial. Dessa forma, tomando um sistema de coordenadas $(U, (x_1, \dots, x_m))$ de M , $J = \sum_{i,j} J_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ em U (onde $J_j^i \in C^\infty(U)$). Daí, $J(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \sum_i J_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $-\frac{\partial}{\partial x^k} = J^2(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \sum_i J_k^i (\sum_r J_r^i \frac{\partial}{\partial x^r}) = \sum_r (\sum_i J_k^i J_r^i) \frac{\partial}{\partial x^r}$. De modo que, localmente, a condição $J^2 = -Id$, nos dá que $\sum_i J_k^i(p) J_r^i(p) = -\delta_k^r$, para todo $p \in U$.*

Lema 2.2.1. *Toda variedade quase-complexa tem dimensão par*

Prova. De fato, seja (M^m, J) tal variedade e $p \in M$. Então, $J_p \in \text{End}(T_p M)$ pode ser representado por uma matriz real de modo que $(\det J_p)^2 = \det(J_p^2) = \det(-Id_{T_p M}) = (-1)^m$. Portanto, m deve ser par. $\square$

Variedades complexas são o análogo complexo das variedades diferenciáveis. Ou seja, espaços topológicos modelados localmente por abertos em $\mathbb{C}^n$ (por homeomorfismos) de modo que as transições são biholomorfismos.

Proposição 2.2.1. *Toda variedade complexa é quase-complexa.*

Prova. Seja M uma variedade complexa e $(U, (z_1, \dots, z_n))$ um sistema de coordenadas locais, onde $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Claramente, M é também uma variedade diferenciável, de dimensão $2n$, com sistema de coordenadas locais $(U, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n))$ (denotemos esta, provisoriamente por $M_{\mathbb{R}}$). Em particular, dado $p \in U$

$$T_p M_{\mathbb{R}} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Big|_p ; \alpha = 1, \dots, n \right\}$$

Defina então para $p \in U$

$$\begin{aligned} J_p : T_p M_{\mathbb{R}} &\longrightarrow T_p M_{\mathbb{R}} \\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p &\mapsto \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Big|_p \\ \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Big|_p &\mapsto - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p \end{aligned}$$

e estenda por linearidade. Claramente, J_p é uma estrutura quase-complexa em $\mathbb{R}$, uma vez mostrado que nossa definição independe da carta tomada.

Seja $p \in U \cap V$, onde $(V, (u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n))$ é outro sistema de coordenadas locais de M . Então,

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial y_\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \text{ e } \frac{\partial}{\partial v^\beta} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial v^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial y_\alpha}{\partial v^\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

Logo,

$$J_p \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Como a transição é biholomorfa, segue que

$$\begin{cases} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial v^\beta} \\ \frac{\partial x_\alpha}{\partial v^\beta} = - \frac{\partial y_\alpha}{\partial u^\beta} \end{cases}$$

$$\text{e assim, } J_p \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial v^\beta}.$$

Analogamente, $J_p \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} \right) = - \frac{\partial}{\partial u^\beta}$ e J está bem definido. □

Apesar de não nos aprofundarmos no assunto, existem variedades quase-complexas que não admitem estrutura de variedade complexa. A questão de quando uma estrutura quase-complexa vem de uma variedade complexa (como na proposição acima), pode respondida através do anulamento de um tensor N_J , chamado tensor de Nijenhuis. Este é o teorema de Newlander-Nirenberg, que afirma que uma estrutura quase-complexa vem de uma estrutura complexa se,

e somente se, $N_J(X, Y) \doteq [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \equiv 0$. A esfera S^6 , por exemplo, possui uma estrutura quase-complexa, cuja formulação se dá através dos octônios [42], mas seu tensor de Nijenhuis não é nulo. É, na verdade, um problema em aberto saber se a esfera 6-dimensional pode ser munida de uma estrutura de variedade complexa.

Seja agora M^{2n} uma variedade complexa (com a estrutura quase-complexa definida anteriormente). Fixada coordenadas locais $(U, (z_1, \dots, z_n))$, com $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, temos que o espaço tangente (real) da variedade subjacente, para $p \in U$, é dado por

$$T_p M = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right|_p ; \alpha = 1, \dots, n \right\}$$

Complexificando o espaço tangente, obtemos (como explicado anteriormente) a decomposição

$$(T_p M)_{\mathbb{C}} = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M$$

e denotemos por $TM_{\mathbb{C}}$, $T^{1,0} M$, $T^{0,1} M$ os fibrados complexos cujas fibras são $(T_p M)_{\mathbb{C}}$, $T_p^{1,0} M$ e $T_p^{0,1} M$, respectivamente (os chamados *fibrado tangente complexificado*, *holomorfo* e *anti-holomorfo*). Temos que $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p ; \alpha = 1, \dots, n \right\}$ é uma base de $(T_p M)_J$, i.e., $T_p M$ com estrutura de espaço vetorial complexo dada por J e, se denotarmos por TM_J esse fibrado vetorial complexo, temos que este é isomorfo ao fibrado tangente holomorfo. Considerando o isomorfismo $\varphi_p : (T_p M)_J \rightarrow T_p^{1,0} M$ e lembrando que, via conjugação, $T_p^{0,1} M \simeq \overline{T_p^{1,0} M}$, temos que $\left\{ \varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p \right), \overline{\varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p \right)} ; \alpha = 1, \dots, n \right\}$ é uma base de $(T_p M)_{\mathbb{C}}$. Defina

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right|_p \doteq \varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p \right) = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p - i \left. \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right|_p \right) \\ \left. \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right|_p \doteq \overline{\varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p \right)} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_p + i \left. \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right|_p \right) \end{cases}$$

Nessa notação,

$$\begin{aligned} T_p^{1,0} M &= \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right|_p, \alpha = 1, \dots, n \right\} \\ T_p^{0,1} M &= \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right|_p, \alpha = 1, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

Como observado anteriormente, $(T_p^* M)_{\mathbb{C}} = ((T_p M)_{\mathbb{C}})^*$ e é uma conta simples verificar que $\{dz^\alpha(p), d\bar{z}^\alpha(p), \alpha = 1, \dots, n\}$ forma uma base de $((T_p M)_{\mathbb{C}})^*$ dual à base $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right|_p, \alpha = 1, \dots, n \right\}$ de $(T_p M)_{\mathbb{C}}$, onde

$$\begin{cases} dz^\alpha & \doteq dx^\alpha + idy^\alpha \\ d\bar{z}^\alpha & \doteq dx^\alpha - idy^\alpha \end{cases}$$

Definimos o fibrado $\Lambda^{r,s}(TM_{\mathbb{C}})^* \doteq \Lambda^r(T^{1,0}M)^* \otimes \Lambda^s(T^{0,1}M)^*$ e chamamos de (r,s) -formas diferenciais as seções deste fibrado. Denotaremos o espaço dessas seções por $\Omega^{r,s}(M) \doteq \Gamma(\Lambda^{r,s}(TM_{\mathbb{C}})^*)$.

Observação 2.2.4. Localmente (em U), como vimos, a estrutura quase-complexa J considerada leva $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mapsto \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ e $\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \mapsto -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Temos então uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ em cada T_p^*M , para $p \in U$, dada por $(\tilde{J}\delta)v \doteq \delta(Jv)$, onde $\delta \in T_p^*M$ e $v \in T_pM$. Portanto, $(\tilde{J}dx^\alpha)(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = dx^\alpha(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}) = 0$ e $(\tilde{J}dx^\alpha)(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}) = dx^\alpha(-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = -1$, de modo que $\tilde{J}dx^\alpha = -dy^\alpha$. Analogamente, achamos que $\tilde{J}dy^\alpha = dx^\alpha$. Segue então que $\tilde{J}_{\mathbb{C}}dz^\alpha = idz^\alpha$ e $\tilde{J}_{\mathbb{C}}d\bar{z}^\alpha = -id\bar{z}^\alpha$ e assim, obtemos $(T_p^*M)^{1,0} \simeq (T_p^{1,0}M)^*$ e $(T_p^*M)^{0,1} \simeq (T_p^{0,1}M)^*$.

Pelos comentários da seção anterior e pela observação acima, vale que $\Omega^k(M)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=k} \Omega^{r,s}(M)$.

Temos então uma projeção natural

$$\pi_{r,s} : \Omega^{r+s}(M) \longrightarrow \Omega^{r,s}(M)$$

Considere a derivada exterior $d : \Omega^k(M)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)_{\mathbb{C}}$ e denote por

$$\begin{aligned} \partial &= \pi_{r+1,s} \circ d : \Omega^{r,s}(M) \longrightarrow \Omega^{r+1,s}(M) \\ \bar{\partial} &= \pi_{r,s+1} \circ d : \Omega^{r,s}(M) \longrightarrow \Omega^{r,s+1}(M) \end{aligned}$$

Estes são os chamados *operadores de Dolbeaut*.

Dada $\theta \in \Omega^{r,s}(M)$, podemos expressá-la localmente como

$$\theta = \sum_{\substack{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leq n \\ 1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_s \leq n}} \theta_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\beta_s}$$

onde, $\theta_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s} \doteq \theta(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{\alpha_r}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta_s}})$. Por comodidade, denotaremos por $A = \{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leq n\}$ e $B = \{1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_s \leq n\}$, de modo que a expressão acima será simplificada pela seguinte notação:

$$\theta = \sum_{A,B} \theta_{AB} dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

Daí,

$$d\theta = \sum_{A,B} d\theta_{AB} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

mas, $d\theta_{AB} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \theta_{AB}}{\partial z^{\alpha_i}} dz^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \theta_{AB}}{\partial \bar{z}^{\beta_i}} d\bar{z}^{\beta_i}$ Portanto, $d = \partial + \bar{\partial}$ e o fato de $d^2 = 0$, nos diz que

$$0 = \partial^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) + \bar{\partial}^2$$

Como essas três parcelas da soma moram em fibrados distintos, obtemos

$$\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0$$

O fato de $\bar{\partial}^2 = 0$ nos permite introduzir uma teoria de cohomologia, a *cohomologia de Dolbeaut*. Para cada $r \geq 0$, temos um complexo

$$\Omega^{r,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,s-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,s}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,s+1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

e podemos definir o seguinte espaço vetorial complexo

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) = \frac{\ker\{\bar{\partial} : \Omega^{r,s}(M) \longrightarrow \Omega^{r,s+1}(M)\}}{\text{Im}\{\bar{\partial} : \Omega^{r,s-1}(M) \longrightarrow \Omega^{r,s}(M)\}}$$

Existe um resultado análogo ao lema de Poincaré para a cohomologia de Dolbeaut, que afirma que localmente toda forma $\bar{\partial}$ -fechada é $\bar{\partial}$ -exata.

Proposição 2.2.2. (*$\bar{\partial}$ -Lema de Poincaré*) *Seja U uma vizinhança aberta do fecho do polidisco $B \subseteq \bar{B} \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$. Então, se $s > 0$, dado $\alpha \in \Omega^{r,s}(U)$, existe $\beta \in \Omega^{r,s-1}(B)$, tal que, $\bar{\partial}\beta = \alpha$ em B .*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [22] (prop 1.3.8).

Observação 2.2.5. *No contexto de variedades quase-complexas, (r,s) -formas diferenciais e os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ podem ser definidos. No entanto, quando a variedade não é complexa, $d = \sum_{l+m=r+s+1} \pi_{l,m} \circ d = \partial + \bar{\partial} + \dots$. Na verdade, uma estrutura quase-complexa é dita integrável quando $d = \partial + \bar{\partial}$. Mostra-se em [22], que ser integrável é equivalente a, por exemplo, $\pi_{0,2} \circ d = 0$ em $\Omega^{1,0}(M)$, ou $[T^{0,1}M, T^{0,1}M] \subseteq T^{0,1}M$ (onde, $[\cdot, \cdot]$ é o colchete de Lie de campos), ou ainda $\bar{\partial}^2 = 0$. Como citado anteriormente, vale também que o anulamento do tensor de Nijenhuis equivale à integrabilidade da estrutura quase-complexa.*

Variedades Hermitianas e Kähler

Seja (M, J) uma variedade quase-complexa.

Definição 2.2.3. *Uma métrica riemanniana g é dita métrica hermitiana de (M, J) se compatível com a estrutura quase-complexa, i.e.,*

$$g_p(J_p u, J_p v) = g_p(u, v)$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_p M$. Neste caso, chamaremos a tripla (M, J, g) de variedade hermitiana.

Claramente, toda variedade quase-complexa admite uma métrica hermitiana. De fato, toda variedade admite métrica riemanniana g e, a partir desta, podemos definir $\tilde{g}(u, v) \doteq \frac{1}{2}(g(u, v) + g(Ju, Jv))$, onde o termo $\frac{1}{2}$ poderia ser substituído por qualquer outra constante positiva (mas, nesse caso, se g já é hermitiana, $g = \tilde{g}$).

Lema 2.2.2. *Seja (M, J, g) uma variedade hermitiana. Então, se $u \in TM$, u e Ju são ortogonais com relação a g .*

Prova. De fato, $g(u, Ju) = g(Ju, -u) = -g(u, Ju) \Rightarrow g(u, Ju) = 0$ □

Definição 2.2.4. *Se (M, J, g) é uma variedade hermitiana, definimos a forma fundamental ω por*

$$\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$$

Note que a forma fundamental $\omega \in \Omega^2(M)$. Primeiramente, dados $u, v \in T_p M$, $\omega_p(u, v) = g_p(J_p u, v)$ é claramente bilinear para cada $p \in M$ (em geral, omitiremos o ponto por comodidade). Agora ω é anti-simétrica

$$\omega(u, v) = g(Ju, v) = -g(u, Jv) = -g(Jv, u) = \omega(v, u)$$

Dada uma métrica hermitiana g podemos definir um produto interno hermitiano em TM_J (i.e. cada $T_p M$ tem estrutura de $\mathbb{C}$ -espaço vetorial dada por J_p)

$$h : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{C}$$

Dado por $h(u, v) \doteq g(u, v) + ig(u, Jv)$ (ou seja, $h = g - i\omega$).

De fato, h é claramente bilinear e $h(u, u) = g(u, u) + ig(u, Ju) = g(u, u)$ (assim, $h(u, u) \geq 0$, com a igualdade ocorrendo se, e só se, $u = 0$). Além disso,

$$\begin{aligned} h(Ju, v) &= g(Ju, v) + ig(Ju, Jv) = i(g(u, v) + ig(u, Jv)) = ih(u, v) \\ h(u, Jv) &= g(u, Jv) - ig(u, v) = -i(g(u, v) + ig(u, Jv)) = -ih(u, v) \end{aligned}$$

Considere agora uma variedade hermitiana (M, g) , onde M é uma variedade complexa (e assim, a estrutura quase-complexa é a definida anteriormente). Vamos expressar a forma fundamental em termos de um sistema de coordenadas locais de M $(U, (z_1, \dots, z_n))$, onde $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$.

Primeiramente estenda J por $\mathbb{C}$ -linearidade ($J_{\mathbb{C}}$) e g por $\mathbb{C}$ -bilinearidade ($g_{\mathbb{C}}$). Suprimiremos, por comodidade, o índice $\mathbb{C}$ da extensão. Em particular,

$$\overline{g(u + iv, u' + iv')} = g(u, u') - g(v, v') - i(g(u, v') + g(v, u')) = g(u - iv, u' - iv') = g(\overline{u + iv}, \overline{u' + iv'})$$

Como $\{dz^\alpha, d\bar{z}^\alpha, \alpha = 1, \dots, n\}$ fornece uma base local para o fibrado cotangente complexificado, podemos escrever

$$g = \sum g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta + g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} d\bar{z}^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + g_{\bar{\alpha}\beta} d\bar{z}^\alpha \otimes dz^\beta$$

onde $g_{\alpha\bar{\beta}} = g(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}) \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, etc.

Lema 2.2.3. *Temos que*

1. $\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$
2. $g_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{g_{\bar{\alpha}\beta}}$
3. $h_{\alpha\beta} = h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = h_{\alpha\bar{\beta}} = 0$
4. $h_{\alpha\bar{\beta}} = 2g_{\alpha\bar{\beta}}$

Prova.

1.

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}) = g(\overline{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}, \overline{\frac{\partial}{\partial z^\beta}}) = \overline{g_{\alpha\beta}}$$

Mas,

$$g_{\alpha\beta} = g(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}) = g(J \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, J \frac{\partial}{\partial z^\beta}) = g(i \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, i \frac{\partial}{\partial z^\beta}) = -g(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}) - g_{\alpha\beta}$$

Portanto, $\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$.

2.

$$\overline{g_{\alpha\bar{\beta}}} = g(\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}}, \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}}) = g(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}) = g_{\alpha\bar{\beta}}$$

3.

$$\begin{aligned}
h_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + ig\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, J \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right) = g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} = 0 \\
h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + ig\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}, J \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\right) = 2g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0 \\
h_{\bar{\alpha}\beta} &= g_{\bar{\alpha}\beta} + ig\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}, J \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right) = g_{\bar{\alpha}\beta} - g_{\bar{\alpha}\beta} = 0
\end{aligned}$$

4.

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\bar{\beta}} + ig\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, J \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\right) = 2g_{\alpha\bar{\beta}}$$

□

Assim,

$$g = \sum_{\alpha,\beta} g_{\bar{\alpha}\beta} d\bar{z}^\alpha \otimes dz^\beta + g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$$

$$h = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta = 2 \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$$

Dessa forma, $\omega_{\mathbb{C}} \doteq g_{\mathbb{C}}(J_{\mathbb{C}}\cdot, \cdot) \in \Omega^2(M)_{\mathbb{C}}$ (denotaremos esta também por ω) e podemos verificar a sua expressão local. Como $\omega = i(h - g)$, temos que

$$\begin{aligned}
\omega &= i \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta - g_{\bar{\alpha}\beta} d\bar{z}^\alpha \otimes dz^\beta \\
&= i \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta - g_{\bar{\beta}\alpha} d\bar{z}^\beta \otimes dz^\alpha \\
&= i \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} (dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta - d\bar{z}^\alpha \otimes dz^\beta) \\
&= i \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= -i \sum_{\alpha,\beta} \overline{g_{\alpha\bar{\beta}}} \overline{dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta} \\
&= -i \sum_{\alpha,\beta} g_{\bar{\alpha}\beta} d\bar{z}^\alpha \wedge dz^\beta \\
&= i \sum_{\alpha,\beta} g_{\beta\bar{\alpha}} dz^\beta \wedge d\bar{z}^\alpha \\
&= \omega
\end{aligned}$$

Concluimos assim que $\omega \in \Omega^{1,1}(M) \cap \Omega^2(M)$ (i.e., uma (1,1)-forma real de M).

Definição 2.2.5. *Seja M uma variedade complexa. Uma variedade Kähler é uma variedade hermitiana (M, g) cuja forma fundamental é fechada (i.e., $d\omega = 0$). Nesse caso, chamamos g de métrica Kähler e ω de forma de Kähler.*

Observação 2.2.6. *Note que uma variedade Kähler é, em particular, uma variedade simplética, pois a forma fundamental é não-degenerada. De fato, se $u \in T_p M$ é tal que $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in T_p M$, colocando $v = Ju$, obtemos que $g(Ju, Ju) = g(u, u) = 0$ e assim, $u = 0$.*

Exemplo 2.2.7. *Considere $\mathbb{C}^n$ com a métrica hermitiana canônica $h = \sum dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\alpha$. Ou seja, $h_{\alpha\bar{\beta}} = 2g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_\beta^\alpha$ e assim a forma Kahler é a forma simplética canônica em $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$*

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha$$

Exemplo 2.2.8. *Seja Σ uma superfícies de Riemann, i.e., uma variedade complexa de dimensão (complexa) igual a 1. Portanto, dada uma métrica Riemanniana em Σ é sempre possível encontrar uma métrica hermitiana. A forma fundamental, nesse caso, será fechada, por ser uma 2-forma numa variedade diferenciável de dimensão 2. Portanto, uma variedade Kahler.*

Observação 2.2.9. *Vimos que, se M é uma variedade complexa e g uma métrica hermitiana, então a forma fundamental $\omega \in \Omega^{1,1}(M) \cap \Omega^2(M)$ é dada por uma matriz positiva definida e hermitiana, cuja entrada (α, β) é $g_{\alpha\bar{\beta}}$. Reciprocamente, dada uma forma $\omega \in \Omega^{1,1}(M) \cap \Omega^2(M)$, localmente da forma $\omega = i \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$, com $(a_{\alpha\bar{\beta}})$ uma matriz positiva definida, podemos definir uma métrica hermitiana $g = \omega(\cdot, J\cdot)$, cuja forma fundamental associada é claramente ω .*

Exemplo 2.2.10. *(Espaço Projetivo Complexo) Considere a ação natural de $\mathbb{C} - \{0\}$ em $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. O quociente é o chamado espaço projetivo complexo, e denotado $\mathbb{CP}^n$ (ou, simplesmente $\mathbb{P}^n$, caso não haja dúvida que estamos trabalhando sobre os complexos). É comum denotar os pontos de $\mathbb{P}^n$ por $[z_0 : \dots : z_n] \doteq \pi(z_0, \dots, z_n)$, onde $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é a projeção natural. Claramente, $[z_0 : \dots : z_n] = [\lambda z_0 : \dots : \lambda z_n]$, para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ e podemos considerar os abertos (topologia quociente) $U_j \subseteq \mathbb{P}^n$, $j = 0, \dots, n$, correspondentes aos pontos cuja j -ésima entrada é não-nula. Temos então as cartas $\varphi_{U_j} : [z_0 : \dots : z_n] \in U_j \mapsto \frac{1}{z_j}(z_0, \dots, \widehat{z_j}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, que dão uma estrutura de variedade complexa em $\mathbb{P}^n$ (pois, as transições são holomorfas).*

Para cada aberto U_j definimos a seguinte $(1,1)$ -forma

$$\omega_j \doteq \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left(\sum_{r=0}^n |z_r z_j^{-1}|^2 \right)$$

Em $U_j \cap U_k$, temos

$$\log\left(\sum_{r=0}^n |z_r z_j^{-1}|^2\right) = \log(|z_k z_j^{-1}|^2 \sum_{r=0}^n |z_r z_k^{-1}|^2) = \log(|z_k z_j^{-1}|^2) + \log\left(\sum_{r=0}^n |z_r z_k^{-1}|^2\right)$$

Como $z_k z_j^{-1}$ é a k -ésima coordenada de φ_j , chamando de $w_k = z_k z_j^{-1}$,

$$\partial \bar{\partial} \log(|w_k|^2) = \partial \left(\frac{1}{w_k \bar{w}_k} \bar{\partial} (w_k \bar{w}_k) \right) = \partial \left(\frac{w_k d\bar{w}_k}{w_k \bar{w}_k} \right) = \partial \left(\frac{d\bar{w}_k}{\bar{w}_k} \right) = 0$$

e $\omega_j = \omega_k$ em $U_j \cap U_k$. Note que esta forma é fechada, pois $d\partial\bar{\partial} = \partial^2\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}^2 = 0$ e é real, uma vez que $\overline{\partial\bar{\partial}} = \bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$. Denotamos essa forma (global) por ω_{FS} . Essa é a chamada forma de Fubini-Study e prova-se que esta é dada por uma matriz hermitiana positiva definida [22] (exemplo 3.1.9), que pela observação anterior corresponde a uma métrica hermitiana, que, em particular é Kahler, já que ω_{FS} é fechada. Chamamos tal métrica de métrica de Fubini-Study.

Observação 2.2.11. Se M é Kahler, qualquer subvariedade complexa é também Kahler, quando restringimos a forma de Kahler de M à subvariedade. Em particular, pelo exemplo acima, qualquer variedade projetiva será também Kahler.

Proposição 2.2.3. Seja M uma variedade complexa e $\omega \in \Omega^{1,1}(M) \cap \Omega^2(M)$. Então, $d\omega = 0$ se, e somente se, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança aberta U ($p \in U$), tal que $\omega|_U = i\partial\bar{\partial}u$, para alguma função real $u \in C^\infty(U)$.

Prova. Uma das implicações segue do fato de $d\partial\bar{\partial} = (\partial + \bar{\partial})(\partial\bar{\partial}) = \partial^2\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial^2 = -\bar{\partial}(\bar{\partial}\partial) = -\bar{\partial}^2\partial = 0$.

Agora suponha $d\omega = 0$. Dado $p \in M$, pelo lema de Poincaré, existe uma 1-forma diferenciável de M , τ , definida numa vizinhança de p , tal que $\omega = d\tau$ nesse aberto. Como $\Omega^1(M) \subseteq \Omega^1(M)_{\mathbb{C}} = \Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M)$, $\tau = \tau^{1,0} + \tau^{0,1}$, onde $\tau^{1,0} \in \Omega^{1,0}(M)$ e $\tau^{0,1} \in \Omega^{0,1}(M)$. Além disso, devemos ter $\tau = \bar{\tau} \Rightarrow \tau^{1,0} = \overline{\tau^{0,1}}$. Mas,

$$d\tau = (\partial + \bar{\partial})(\tau^{1,0} + \tau^{0,1}) = \underbrace{\partial\tau^{1,0}}_{\in \Omega^{2,0}(M)} + \underbrace{\partial\tau^{0,1} + \bar{\partial}\tau^{1,0}}_{\in \Omega^{1,1}(M)} + \underbrace{\bar{\partial}\tau^{0,1}}_{\in \Omega^{0,2}(M)} = \omega \in \Omega^{1,1}(M)$$

Em particular, $\bar{\partial}\tau^{0,1} = 0$ e pelo $\bar{\partial}$ -lema de Poincaré, existe uma função diferenciável com valores em $\mathbb{C}$ (definida numa vizinhança aberta de p possivelmente ainda menor), com $\tau^{0,1} = \bar{\partial}f$. Assim, $\tau^{1,0} = \overline{\tau^{0,1}} = \overline{\bar{\partial}f} = \partial\bar{f}$.

Vamos mostrar que, de fato, $\overline{\bar{\partial}f} = \partial\bar{f}$. Se s é uma função diferenciável real, $\bar{\partial}s = \sum_{\alpha} \frac{\partial s}{\partial \bar{z}^{\alpha}} d\bar{z}^{\alpha}$

e assim, $\overline{\partial}s = \sum_{\alpha} \frac{\overline{\partial}s}{\overline{\partial}z^{\alpha}} d\overline{z}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial s}{\partial z^{\alpha}} dz^{\alpha} = \partial s$. Sendo $f = s_1 + is_2$, com s_1, s_2 funções diferenciáveis reais, temos que $\overline{\partial}f = \overline{\partial}s_1 - i\overline{\partial}s_2 = \partial s_1 - i\partial s_2 = \partial \overline{f}$.

Portanto,

$$\omega = d\tau = \partial\tau^{0,1} + \overline{\partial}\tau^{1,0} = \partial\overline{\partial}f + \overline{\partial}\partial\overline{f} = \partial\overline{\partial}(f - \overline{f}) = \partial\overline{\partial}(2i\text{Im}(f)) = i\partial\overline{\partial}(2s_2)$$

e definimos $u \doteq 2\text{Im}(f) = 2s_2$ □

Observação 2.2.12. Chamamos tais funções reais, referentes a uma forma de Kähler, de potenciais de Kähler.

Variedades Kähler - Caracterizações

Lembre que, dada uma métrica riemanniana g em M , a conexão de Levi-Civita é a única conexão no fibrado tangente sem torção (i.e., $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$) e compatível com a métrica (i.e., $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$), o que equivale a dizer que a métrica é paralela com respeito à conexão). Mais detalhes sobre a conexão de Levi-Civita podem ser encontradas no apêndice C. Usaremos nesta seção esta conexão para demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.2.4. *Seja (M, J, g) uma variedade hermitiana, ω a 2-forma fundamental e ∇ a conexão de Levi-Civita. São equivalentes:*

1. g é métrica de Kähler (i.e., $N_J = 0$ e $d\omega = 0$)
2. $\nabla\omega = 0$
3. $\nabla J = 0$

Lema 2.2.4. *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\nabla_X \omega(Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z)$$

Prova.

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega(Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) = \\ &= X(g(JY, Z)) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

mas, pela compatibilidade com a métrica, $X(g(JY, Z)) = g(\nabla_X(JY), Z) + g(JY, \nabla_X Z)$.

Além disso, $g(\nabla_X(JY), Z) = g((\nabla_X J)Y, Z) + g(J\nabla_X Y, Z)$ e segue o resultado. □

Como consequência do lema acima, segue que $\nabla\omega = 0 \Leftrightarrow \nabla J = 0$. De fato, $\nabla\omega = 0 \Rightarrow (\nabla_X\omega)(Y, Z) = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, tomando $Z = (\nabla_X J)Y$, obtemos que $(\nabla_X J)Y = 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ou seja, $\nabla J = 0$. Se $\nabla J = 0$, temos imediatamente que $\nabla\omega = 0$.

Provaremos agora $1 \Leftrightarrow 3$. Para isso, precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 2.2.5. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\nabla_X J \circ J = -J \circ \nabla_X J$$

Prova. Sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

i) Pela compatibilidade da conexão de Levi-Civita com g , temos que $g(Y, Z) = g(JY, JZ)$ nos dá que:

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g(\nabla_X(JY), JZ) + g(JY, \nabla_X(JZ)) = g((\nabla_X J)Y, JZ) + g(J(\nabla_X Y), JZ) + g(JY, (\nabla_X J)Z) + g(JY, J(\nabla_X Z)).$$

Como g é métrica hermitiana, obtemos

$$g((\nabla_X J)Y, JZ) = -g(JY, J(\nabla_X Z)) \quad (*)$$

ii) Façamos o mesmo para $g(Y, JZ) = -g(JY, Z)$:

$$g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X(JZ)) = -g(\nabla_X(JY), Z) - g(JY, \nabla_X(Z))$$

Logo,

$$g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, (\nabla_X J)Z) + g(Y, J(\nabla_X Z)) = -g((\nabla_X J)Y, Z) - g(J(\nabla_X Y), Z) - g(JY, \nabla_X Z)$$

novamente pela métrica ser hermitiana, e substituindo Y por Z (e vice-versa) obtemos:

$$g((\nabla_X J)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X J)Z) \quad (**)$$

Assim, substituindo Z por JZ em (**), temos:

$$g(Y, ((\nabla_X J) \circ J)Z) = -g((\nabla_X J)Y, JZ) \stackrel{(*)}{=} g(JY, (\nabla_X J)Z) = -g(Y, (J \circ \nabla_X J)Z)$$

Portanto,]

$$g(Y, (\nabla_X J \circ J + J \circ \nabla_X J)Z) = 0$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Daí, colocando $Y = (\nabla_X J \circ J + J \circ \nabla_X J)Z$, concluímos que $\nabla_X J \circ J + J \circ \nabla_X J = 0$. $\square$

Lema 2.2.6. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$N_J = 0 \Leftrightarrow \nabla_{JX} J = J \nabla_X J$$

Prova. Seja $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
N_J(X, Y) &= [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y(JX)) + J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X) \\
&\quad - \nabla_{JX}(JY) + \nabla_{JY}(JX) \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - (\nabla_Y J)X - J(\nabla_Y X)) \\
&\quad + J((\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y - \nabla_{JY} X) - (\nabla_{JX} J)Y - J(\nabla_{JX} Y) + (\nabla_{JY} J)X + J(\nabla_{JY} X) \\
&= J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y - (J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X)
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Pela expressão acima, temos $N_J = 0$

($\Rightarrow$) Defina o tensor

$$A(X, Y, Z) \doteq g(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y, Z)$$

Temos então que $N_J = 0 \Leftrightarrow A(X, Y, Z) = A(Y, X, Z)$.

Aplicando J em (*) e substituindo X por JX em (**) (do lema anterior), vale

$$\begin{aligned}
A(X, Y, Z) &= g(JY, (\nabla_X J)Z) + g(Y, (\nabla_{JX} J)Z) \\
&= g((\nabla_{JX} J)Z - J(\nabla_X J)Z, Y) \\
&= -A(X, Z, Y)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A(X, Y, Z) &= A(Y, X, Z) = -A(Y, Z, X) = -A(Z, Y, X) = \\
A(Z, X, Y) &= A(X, Z, Y) = -A(X, Y, Z) \Rightarrow A(X, Y, Z) = 0
\end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Como g é produto interno, $J(\nabla_X J) = \nabla_{JX} J$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

Vamos mostrar agora que

$$g \text{ é Kähler} \Leftrightarrow \nabla J = 0$$

Prova.

($\Leftarrow$) Se $\nabla J = 0$, $\nabla_{JX} J = J\nabla_X J$ e, pelo lema anterior, $N_J = 0$. Além disso, pelo Lema 1.2.3, temos que $\nabla\omega = 0$ e como:

$$d\omega(X_0, X_1, X_2) = (\nabla_{X_0}\omega)(X_1, X_2) - (\nabla_{X_1}\omega)(X_0, X_2) + (\nabla_{X_2}\omega)(X_0, X_1)$$

obtemos que $d\omega = 0$.

($\Rightarrow$) Defina, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, o seguinte tensor

$$B(X, Y, Z) \doteq g((\nabla_X J)Y, Z)$$

Note que

$$\begin{aligned}
B(X, Y, JZ) &= g((\nabla_X J)Y, JZ) \\
&= -g(J(\nabla_X J)Y, Z) \\
&= -g((\nabla_{JX} J)Y, Z) \quad (pois, N_J = 0) \\
&= -B(JX, Y, Z)
\end{aligned}$$

Por outro lado, vale

$$\begin{aligned}
B(X, Y, JZ) &= g((\nabla_X J)Y, JZ) \\
&= -g(J(\nabla_X J)Y, Z) \\
&= g((\nabla_X J)JY, Z) \quad (pois, \nabla_X J \circ J = -J \circ \nabla_X J) \\
&= B(X, JY, Z)
\end{aligned}$$

Dessa forma, $B(X, JY, Z) + B(JX, Y, Z) = 0$.

Agora, pelo Lema 1.2.3,

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(X, Y, Z) \\
&= \nabla_X \omega(Y, Z) - \nabla_Y \omega(X, Z) + \nabla_Z \omega(X, Y) \\
&= g((\nabla_X J)Y, Z) - g((\nabla_Y J)X, Z) + g((\nabla_Z J)X, Y)
\end{aligned}$$

Colocando X, Y, JZ na equação anterior, como $g((\nabla_{JZ} J)X, Y) = B(JZ, X, Y) = -B(Z, X, JY)$, obtemos

$$B(X, Y, JZ) - B(Y, X, JZ) - B(Z, X, JY) = 0 \quad (\dagger)$$

Colocando X, JY, Z , temos

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X J)JY, Z) &= -B(JX, Y, Z) = B(X, Y, JZ), \\
g((\nabla_{JY} J)X, Z) &= B(JY, X, Z) = -B(Y, X, JZ)
\end{aligned}$$

obtemos,

$$B(X, Y, JZ) + B(Y, X, JZ) + B(Z, X, JY) = 0 \quad (\dagger\dagger)$$

Fazendo $(\dagger) + (\dagger\dagger)$, achamos $B(X, Y, JZ) = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Fazendo $Z = -J(\nabla_X J)Y$, obtemos $(\nabla_X J)Y = 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e assim $\nabla J = 0$ $\square$

2.3 Geometria Hyperkähler

Definição 2.3.1. *Seja M^m uma variedade diferenciável. Uma estrutura quase-hyperkähler é uma quádrupla (g, J_1, J_2, J_3) , onde J_k são estruturas quase-complexas, $k = 1, 2, 3$, satisfazendo $J_1 J_2 J_3 = -Id$ e g uma métrica riemanniana em M , hermitiana com respeito a cada J_k .*

Observação 2.3.1. *Se (g, J_1, J_2, J_3) é uma estrutura quase-complexa em M^m , então $\dim_{\mathbb{R}} M = m = 4n$, para algum n . De fato, tome $v \in T_p M$, $p \in M$. Se $v \neq 0$, $\{v, J_1 v, J_2 v, J_3 v\}$ é um conjunto linearmente independente, pois é ortogonal entre si. De fato, dada uma combinação linear*

$$a_0 v + a_1 J_1 v + a_2 J_2 v + a_3 J_3 v = 0$$

para $k = 0, 1, 2, 3$, $0 = a_k g(J_k v, J_k v) = a_k g(v, v)$, logo $a_k = 0$ (onde, por comodidade, colocamos $J_0 \doteq Id$). Prosseguindo, (ou seja, considerando um elemento no complemento ortogonal do subespaço de $T_p M$ gerado por $\{v, J_1 v, J_2 v, J_3 v\}$), como temos dimensão finita, a dimensão de $T_p M$ (e por consequência, de M) deve ser múltipla de 4.

Observação 2.3.2. *Note que, J_1, J_2, J_3 serem estruturas quase-complexas com $J_1 J_2 J_3 = -Id$ equivale a pedir que essas aplicações satisfaçam as relações da álgebra dos quatérnios. Note ainda que, dadas (J_1, J_2, J_3) satisfazendo essas condições, é sempre possível encontrar uma métrica hermitiana com respeito a todas as estruturas. De fato, dada uma métrica riemanniana g em M , coloque*

$$\tilde{g}(u, v) \doteq \frac{1}{4}(g(u, v) + g(J_1 u, J_2 v) + g(J_2 u, J_3 v) + g(J_3 u, J_1 v))$$

esta métrica claramente satisfaz o que queremos.

Definição 2.3.2. *Uma estrutura quase-hyperkähler (g, J_1, J_2, J_3) em M é dita uma estrutura hyperkähler, se as estruturas quase-complexas forem paralelas com respeito à conexão de Levi-Civita, i.e.,*

$$\nabla J_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

Neste caso, chamamos (M, g, J_1, J_2, J_3) de variedade hyperkähler e g de métrica hyperkähler.

Note que, numa variedade hyperkähler (M, g, J_1, J_2, J_3) , cada J_k , $k = 1, 2, 3$, é integrável e g é Kahler com respeito a cada J_k . Esse fato segue da Proposição 1.2.4. Mais que isso, podemos dizer que g é Kahler com respeito à uma 2-esfera de estruturas complexas. Ou seja,

se $a = (a_1, a_2, a_3) \in S^2$, definimos $J_a \doteq a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3$. Claramente J_a é uma estrutura quase-complexa, pois

$$\begin{aligned} J_a^2 &= a_1^2 J_1^2 + a_1 a_2 J_1 J_2 + a_1 a_3 J_1 J_3 + a_2 a_1 J_2 J_1 + a_2^2 J_2^2 + a_2 a_3 J_2 J_3 + a_3 a_1 J_3 J_1 + a_3 a_2 J_3 J_2 + a_3^2 J_3^2 \\ &= -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

A métrica g é claramente hermitiana com respeito a J_a e $\nabla J_a = 0$, uma vez que $\nabla J_k = 0$, $k = 1, 2, 3$. Portanto, g é de fato Kahler com respeito a J_a , com forma de Kahler

$\omega_a = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + a_3 \omega_3$, onde ω_k são as formas de Kahler de J_k , $k = 1, 2, 3$.

Observação 2.3.3. *O espaço $\mathbb{H}^n$ é trivialmente uma variedade hyperkähler. Estruturas hyperkähler, diferentemente de estruturas Kahler, são difíceis de construir. Em dimensão 4, por exemplo, as únicas variedades compactas que admitem estrutura hyperkähler são toros e as K3 (superfícies complexas, compactas, simplesmente conexas, com fibrado trivial canônico)*

Fixe uma das estruturas complexas, digamos J_1 , e defina $\omega_{\mathbb{C}} \doteq \omega_2 + i\omega_3 \in \Omega^2(M)_{\mathbb{C}}$. Claramente, $\omega_{\mathbb{C}}$ é não-degenerada (pois ω_2 e ω_3 o são) e fechada (pois, $d\omega_{\mathbb{C}} = d\omega_2 + id\omega_3 = 0$). Além disso,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}}(J_1 u, v) &= \omega_2(J_1 u, v) + i\omega_3(J_1 u, v) \\ &= g(J_2 J_1 u, v) + ig(J_3 J_1 u, v) \\ &= -g(J_3 u, v) + ig(J_2 u, v) \\ &= i(g(J_2 u, v) + ig(g(J_3 u, v))) \\ &= i\omega_{\mathbb{C}}(u, v) \end{aligned}$$

Ou seja, J_1 nos dá uma decomposição de $TM_{\mathbb{C}} = T^{(1,0)J_1} M \oplus T^{(0,1)J_1} M$. Daí, se estendermos por $\mathbb{C}$ linearidade J_1 , ω_2 e ω_3 , tomando $u \in T^{(0,1)J_1} M$ (i.e. $J_1 u = -iu$), obtemos que

$$i\omega_{\mathbb{C}}(u, v) = \omega_{\mathbb{C}}(J_1 u, v) = -i\omega_{\mathbb{C}}(u, v)$$

Portanto, $\omega_{\mathbb{C}}$ é uma $(2,0)$ -forma com respeito a J_1 . Tal forma é comumente chamada de *forma holomorfo-simplética*.

Proposição 2.3.1. *Seja (g, J_1, J_2, J_3) uma estrutura quase-hyperkähler em M^{4n} , ω_k as formas fundamentais de J_k , $k = 1, 2, 3$, e ∇ a conexão de Levi-Civita de (M, g) . São equivalentes:*

1. (g, J_1, J_2, J_3) é uma estrutura hyperkähler
2. $\nabla \omega_k = 0$, $k = 1, 2, 3$

3. $d\omega_k = 0$, $k = 1, 2, 3$

Prova.

(1 $\Leftrightarrow$ 2) Segue da Proposição 1.2.4

(1 $\Rightarrow$ 3) Trivial, pois $d\omega_k(X, Y, Z) = \nabla_X \omega_k(Y, Z) - \nabla_Y \omega_k(X, Z) + \nabla_Z \omega_k(X, Y)$

(3 $\Rightarrow$ 1) Basta mostrar a integrabilidade de cada J_k , $k = 1, 2, 3$, pois podemos utilizar novamente a Proposição 1.2.4 para concluir que $\nabla J_k = 0$. Dados $u, v \in \mathfrak{X}(M)_{\mathbb{C}}$ e estendendo as formas fundamentais

$$\omega_2(u, v) = g(J_2 u, v) = g(J_3 J_1 u, v) = \omega_3(J_1 u, v) \quad (*)$$

Colocando $\omega_{\mathbb{C}} = \omega_2 + i\omega_3$, vale que

$$J_1 u = iu \Leftrightarrow i_u \overline{\omega_{\mathbb{C}}}$$

Ou seja,

$$u \text{ é um } (1,0)\text{-campo com respeito a } J_1 \Leftrightarrow \omega_2(u, \cdot) = i\omega_3(u, \cdot)$$

De fato, se $J_1 u = iu$, pela observação (*),

$$\omega_2(u, v) = \omega_3(J_1 u, v) = \omega_3(iu, v) \Rightarrow \omega_2(u, v) - i\omega_3(u, v) = 0,$$

para todo $v \in \mathfrak{X}(M)_{\mathbb{C}}$, i.e., $\overline{\omega_{\mathbb{C}}}(u, \cdot) = 0$.

Por outro lado, se $i_u \overline{\omega_{\mathbb{C}}} = 0$,

$$0 = \omega_2(u, v) - i\omega_3(u, v) = \omega_3(J_1 u, v) - \omega_3(iu, v) = \omega_3(J_1 u - iu, v), \text{ para todo } v \in \mathfrak{X}(M)_{\mathbb{C}}.$$

Suponha agora $u, v \in \mathfrak{X}(M)_{J_1}^{1,0}$ (ou seja, $J_1 u = iu$ e $J_1 v = iv$)

$$\begin{aligned} i_{[u,v]} \overline{\omega_{\mathbb{C}}} &= [\mathcal{L}_u, i_v] \overline{\omega_{\mathbb{C}}} \\ &= \mathcal{L}_u(i_v \overline{\omega_{\mathbb{C}}}) - i_v \mathcal{L}_u \overline{\omega_{\mathbb{C}}} \\ &= -i_v(d(i_u \overline{\omega_{\mathbb{C}}}) + i_u(d\overline{\omega_{\mathbb{C}}})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $[u, v] \in \mathfrak{X}(M)_{J_1}^{1,0}$ e J_1 é integrável (ver observação 2.2.5). □

2.3.1 Mapa Momento e Redução

Variedades hyperkähler são bastante inflexíveis e difíceis de construir. Uma das formas mais bem sucedidas de dar exemplos de variedades hyperkähler é através do quociente hyperkähler, que generaliza o teorema de Marsden-Weinstein (de redução simplética). Vamos estudar nessa

seção essa construção.

Seja $(M^{4n}, g, J_1, J_2, J_3)$ uma variedade hyperkähler e $\omega_1 = g(J_1 \cdot, \cdot)$, $\omega_2 = g(J_2 \cdot, \cdot)$, $\omega_3 = g(J_3 \cdot, \cdot)$ as formas Kahler associadas.

Suponha que um grupo de Lie G compacto age em M preservando a métrica e as estruturas complexas. Ou seja, se denotarmos a ação por $\psi : G \longrightarrow \text{Diff}(M)$, para todo $h \in G$ vale:

$$\begin{aligned}\psi_h^* g &= g \\ I_{\psi_h(p)}(d\psi_h(p)v) &= d\psi_h(p)(I_p v)\end{aligned}$$

onde, $I \in \{J_1, J_2, J_3\}$, $p \in M$ e $v \in T_p M$.

Note que, nesse caso, G também preserva as formas Kahler associadas. Façamos para ω_1 (para ω_2 e ω_3 é totalmente análogo):

$$\begin{aligned}(\psi_h^* \omega_1)_p(u, v) &= \omega_1(\psi_h(p))(d\psi_h(p)u, d\psi_h(p)v) = g_{\psi_h(p)}(J_1(\psi_h(p))d\psi_h(p)u, d\psi_h(p)v) = \\ &= g_{\psi_h(p)}(d\psi_h(p)(J_1(p)u), d\psi_h(p)v) = g_p(J_1(p)u, v) = \omega_1(p)(u, v)\end{aligned}$$

Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, obtemos o campo $X_\xi \in \mathfrak{X}(M)$, cujo fluxo é dado por $\psi_{\exp(t\xi)}$. Uma vez que a derivada de Lie de um tensor qualquer T com respeito ao campo X_ξ é dado por $(\mathcal{L}_{X_\xi})_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\psi_{\exp(t\xi)}^* T)_p$, o fato da ação preservar a métrica e as estruturas complexas nos dá que:

$$\mathcal{L}_{X_\xi} g = 0, \mathcal{L}_{X_\xi} J_1 = \mathcal{L}_{X_\xi} J_2 = \mathcal{L}_{X_\xi} J_3 = 0 \text{ e } \mathcal{L}_{X_\xi} \omega_1 = \mathcal{L}_{X_\xi} \omega_2 = \mathcal{L}_{X_\xi} \omega_3 = 0$$

Defina $\omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k \in \Omega^2(M; \text{Im}\mathbb{H})$. Assim, $\mathcal{L}_{X_\xi} \omega \doteq \mathcal{L}_{X_\xi} \omega_1 i + \mathcal{L}_{X_\xi} \omega_2 j + \mathcal{L}_{X_\xi} \omega_3 k = 0$ e $d\omega \doteq d\omega_1 i + d\omega_2 j + d\omega_3 k = 0$. Se $\mu_\alpha : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ é um mapa momento para a ação simplética de G na variedade simplética (M, ω_α) , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, podemos condensá-los num único mapa. Este é o chamado mapa momento hyperkähler.

Definição 2.3.3. *Um mapa*

$$\mu = \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k : M \longrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \text{Im}\mathbb{H}$$

é dito mapa momento hyperkähler, se:

1. $d\mu^\xi = i_{X_\xi} \omega$, onde $\mu^\xi : p \in M \longrightarrow \mu(p)(\xi)$
2. $\mu \circ \psi_h = \text{Ad}_h^* \circ \mu$, para todo $h \in G$

Observação 2.3.4. *Note que $\text{Im}\mathbb{H}$ é simplesmente $\mathbb{R}^3$ e implicitamente fazemos a identificação $\mathfrak{g}^* \otimes \text{Im}\mathbb{H} \simeq \text{Hom}(\mathfrak{g}, \text{Im}(\mathbb{H}))$.*

Considere um mapa momento hypekahler μ e tome $\zeta \in \mathfrak{g}^* \otimes \text{Im}\mathbb{H}$ invariante pela ação coadjunta (i.e., $\zeta = \zeta_1 i + \zeta_2 j + \zeta_3 k$, com $\text{Ad}_h^* \zeta_\alpha = \zeta_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, para todo $h \in G$).

Se ζ é valor regular, $\mu^{-1}(\zeta)$ é variedade diferenciável de dimensão $\dim \mu^{-1}(\zeta) = 4n - 3k$, onde $k = \dim G = \dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}^*)$. Além disso $\mu^{-1}(\zeta)$ é invariante por G : se $p \in \mu^{-1}(\zeta)$, $\mu \circ \psi_h(p) = \text{Ad}_h^* \circ \mu(p) = \text{Ad}_h^*(\zeta) = \zeta$. Logo,

$$G \times \mu^{-1}(\zeta) \longrightarrow \mu^{-1}(\zeta)$$

Supondo que G age livremente em $\mu^{-1}(\zeta)$, temos que $M_\zeta \doteq \mu^{-1}(\zeta)/G$ é uma variedade diferenciável de dimensão $\dim M_\zeta = 4n - 4k$.

Teorema 2.3.5. *Seja G um grupo de Lie compacto que age em uma variedade hyperkähler $(M^{4n}, g, J_1, J_2, J_3)$. Tome $\zeta \in \mathfrak{g}^* \otimes \text{Im}\mathbb{H}$ invariante pela ação coadjunta e suponha que G age livremente em $\mu^{-1}(\zeta)$. Então, $M_\zeta = \mu^{-1}(\zeta)/G$ é uma variedade diferenciável e herda uma estrutura hyperkähler de M . Este é o quociente hyperkähler. Mais precisamente,*

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\zeta) & \xhookrightarrow{i} & M \\ \pi \downarrow & & \\ & & M_\zeta \end{array}$$

As formas Kahler ω'_α de M_ζ , são tais que $\phi^* \omega'_\alpha = i^* \omega_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

Antes de demonstrarmos o teorema, vamos entender a métrica induzida em M_ζ . Note que $\pi : \mu^{-1}(\zeta) \longrightarrow M_\zeta$ é um G -fibrado principal e a métrica Riemanniana induzida em $\mu^{-1}(\zeta)$, $g_0 \doteq i^* g$ é G -invariante, logo define uma conexão $H_p \doteq V_p^\perp$. Como vimos, $d\phi_p : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)} M_\zeta$ é um isomorfismo linear e assim, dados $v_1, v_2 \in T_{\pi(p)} M_\zeta$, existem únicos $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in H_p$ com $d\pi_p(\tilde{v}_\alpha) = v_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Defina então,

$$\tilde{g}(v_1, v_2) = g_0(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$$

Esta métrica está bem definida, pois se $q \in \pi^{-1}(\pi(p))$, $q = \psi_a(p)$, para algum $a \in G$. Daí, se $\hat{v}_\alpha \in H_q$, tal que $d\pi_q(\hat{v}_\alpha) = v_\alpha$, como $H_q = d\psi_a(p)H_p$, devemos ter $\hat{v}_\alpha = d\psi_a(p)(\tilde{v}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. De fato, se $\hat{v}_\alpha = d\psi_a(p)(\tilde{\tilde{v}}_\alpha)$, $\tilde{\tilde{v}}_\alpha \in H_p$, $v_\alpha = d\pi_q(\hat{v}_\alpha) = d\pi_q d\psi_a(p)(\tilde{\tilde{v}}_\alpha) = d\pi_p(\tilde{\tilde{v}}_\alpha)$. Logo, $\tilde{\tilde{v}}_\alpha = \tilde{v}_\alpha$. Agora,

$$\tilde{g}(v_1, v_2) = g_0(d\psi_g(p)\tilde{v}_1, d\psi_g(p)\tilde{v}_2) = g_0(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$$

Observação 2.3.6. *A construção dessa métrica permite generalizar naturalmente a redução de Marsden-Weinstein para variedades Kähler. É preciso supor adicionalmente que a ação preserva a métrica Kähler da variedade.*

Prova. (Teorema 2.3.2) Tome ζ como no enunciado e seja $p \in \mu^{-1}(\zeta)$.

1. $V_p, J_1V_p, J_2V_p, J_3V_p$ são ortogonais entre si:

Dados $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$,

$$g(J_1(X_\xi)_p, (X_\eta)_p)i + g(J_2(X_\xi)_p, (X_\eta)_p)j + g(J_3(X_\xi)_p, (X_\eta)_p)k = \omega_p((X_\xi)_p, (X_\eta)_p) = (d\mu^\xi)_p(X_\eta)_p$$

Mas, vale $\mu \circ \psi_h = Ad_h^* \circ \mu$ e, em particular, $\mu(\psi_p(\exp(t\eta))) = \zeta$, para todo t . Daí, $d\mu_p(X_\eta)_p = 0$. Como, $d\mu_p^\xi(X_\eta)_p = (d\mu_p(X_\eta)_p)(\xi)$, obtemos que

$$g(J_1(X_\xi)_p, (X_\eta)_p)i + g(J_2(X_\xi)_p, (X_\eta)_p)j + g(J_3(X_\xi)_p, (X_\eta)_p)k = 0$$

Ou seja, $J_1V_p \perp V_p, J_2V_p \perp V_p$ e $J_3V_p \perp V_p$. O restante segue das relações dos quatérnios e do fato da métrica ser compatível com as estruturas complexas, e.g., $J_3V_p \perp J_1V_p$, pois $g(J_3\cdot, J_1\cdot) = g(J_2\cdot, \cdot)$.

2. $\mu^{-1}(\zeta)$ é subvariedade de M :

Vamos mostrar que ζ é valor regular. Seja $p \in \mu^{-1}(\zeta)$, então $d\mu_p : T_pM \longrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \text{Im}(\mathbb{H})$ e $(d\mu_p(J_1(X_\xi)_p))(\eta) = d\mu^\eta(p)(J_1(X_\xi)_p) = \omega_p((X_\eta)_p, J_1(X_\xi)_p)$ e pelo item anterior, isso vale $g(J_1(X_\eta)_p, J_1(X_\xi)_p)i = g((X_\eta)_p, (X_\xi)_p)i$. Analogamente, $(d\mu_p(J_2(X_\xi)_p))(\eta) = g((X_\eta)_p, (X_\xi)_p)j$ e $(d\mu_p(J_3(X_\xi)_p))(\eta) = g((X_\eta)_p, (X_\xi)_p)k$. Dessa forma, $d\mu_p$ é sobrejetora.

3. Como $(d\mu_p v)(\xi) = g(J_1(X_\xi)_p, v)i + g(J_2(X_\xi)_p, v)j + g(J_3(X_\xi)_p, v)k$, obtemos que

$$\text{Ker}(d\mu_p) = (J_1V_p)^\perp \cap (J_2V_p)^\perp \cap (J_3V_p)^\perp = (J_1V_p \oplus J_2V_p \oplus J_3V_p)^\perp$$

4. Como $\mu^{-1}(\zeta)$ é invariante pela ação de G , devemos ter que $\psi_h : \mu^{-1}(\zeta) \longrightarrow \mu^{-1}(\zeta)$ é um difeomorfismo, para todo $h \in G$. Agora, dados $h \in G$ e $p \in \mu^{-1}(\zeta)$, $\mu(\psi_h(p)) = \zeta \Rightarrow d\mu|_{\mu^{-1}(\zeta)}(\psi_h(p))d(\psi_h|_{\mu^{-1}(\zeta)})(p) = 0 \Rightarrow d\mu|_{\mu^{-1}(\zeta)}(\psi_h(p)) = 0$. Logo, $d\mu(p)|_{T_p\mu^{-1}(\zeta)} \equiv 0$. Sendo assim:

i) $J_\alpha(T_p\mu^{-1}(\zeta)) \perp V_p, \alpha = 1, 2, 3$:

Façamos para $\alpha = 1$ (os outros casos são análogos).

$g(J_1v, (X_\xi)_p) = \omega_1(v, (X_\xi)_p) = -\omega_1((X_\xi)_p, v) = -d\mu_1^\xi(p)v = -(d\mu_1(p)v)(\xi) = 0$.
Em particular, obtemos $J_1V_p \oplus J_2V_p \oplus J_3V_p \subseteq (T_p\mu^{-1}(\zeta))^\perp \subseteq T_pM$.

ii) $J_\alpha H_p \subseteq \ker(d\mu_p)$, $\alpha = 1, 2, 3$:

Tome $v \in H_p$. Façamos o caso $\alpha = 1$ (os outros são análogos).

$$(d\mu_1(p)J_1v, \xi) = d\mu_1^\xi(p)(J_1v) = \omega_1((X_\xi)_p, J_1v) = g(J_1(X_\xi)_p, J_1v) = g((X_\xi)_p, v) = 0$$

$$(d\mu_2(p)J_1v, \xi) = d\mu_2^\xi(p)(J_1v) = \omega_2((X_\xi)_p, J_1v) = g(J_2(X_\xi)_p, J_1v) = g((X_\xi)_p, J_3v) = 0$$

$$(d\mu_3(p)J_1v, \xi) = d\mu_3^\xi(p)(J_1v) = \omega_3((X_\xi)_p, J_1v) = g(J_3(X_\xi)_p, J_1v) = -g((X_\xi)_p, J_2v) = 0$$

5. Temos que $T_pM = T_p\mu^{-1}(\zeta) \oplus (T_p\mu^{-1}(\zeta))^\perp = V_p \oplus H_p \oplus (T_p\mu^{-1}(\zeta))^\perp$
mas, $J_1V_p \oplus J_2V_p \oplus J_3V_p \subseteq (T_p\mu^{-1}(\zeta))^\perp$ e como $\dim V_p + \dim H_p + \dim J_1V_p + \dim J_2V_p + \dim J_3V_p = k + (4n - 4k) + k + k + k = 4n = \dim T_pM$, vale a decomposição ortogonal:

$$T_pM = V_p \oplus H_p \oplus J_1V_p \oplus J_2V_p \oplus J_3V_p$$

Note que, de fato, $\dim H_p = 4n - 4k$ pelo isomorfismo linear $d\pi : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}M_\zeta$.

6. Por i) e ii) do item 4, para $\alpha = 1, 2, 3$, $J_\alpha H_p \perp V_p$ e $J_\alpha H_p \subseteq \ker d\mu_p$. Então, pelo item 3, concluímos que $J_\alpha H_p \subseteq H_p$.
7. Vamos usar o isomorfismo $d\pi : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}M_\zeta$ e o fato de que $J_\alpha H_p \subseteq H_p$ e que J_α é invariante por G para definir as estruturas quase-complexas em M_ζ :

$$\tilde{J}_{\alpha\pi(p)}(\tilde{v}) \doteq d\pi_p(J_\alpha v)$$

para $\alpha = 1, 2, 3$, onde $\tilde{v} = d\pi_p v$, com $v \in H_p$.

Bem definido: Se considerarmos o isomorfismo $d\pi_{\psi_h(p)} : H_{\psi_h(p)} \longrightarrow T_{\pi(p)}M_\zeta$, como $H_{\psi_h(p)} = d\psi_h(p)H_p$, obtemos que $\tilde{J}_{\alpha\pi(p)}(\tilde{v}) = d\pi_{\psi_h(p)}(J_\alpha d\psi_h(p)v) = d\pi_{\psi_h(p)}d\psi_h(p)J_\alpha v = d(\pi \circ \psi_h)_p(J_\alpha v) = d\pi_p(J_\alpha v)$.

Claramente, $\tilde{J}_\alpha$, para $\alpha = 1, 2, 3$, satisfazem as condições dos quatérnios (pois J_α satisfazem tais condições) e são estruturas quase-complexas. Além disso, defina $\tilde{\omega}_\alpha(\cdot, \cdot) \doteq \tilde{g}(\tilde{J}_\alpha \cdot, \cdot)$. Ou seja, se $p \in \mu^{-1}(\zeta)$ e $\tilde{v}_l = d\pi_p v_l \in T_{\pi(p)}M_\zeta$, com $v_l \in H_p$, $l = 1, 2$, temos:

$$\tilde{\omega}_\alpha(\pi(p))(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = \tilde{g}_{\pi(p)}(\tilde{J}_\alpha \tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = (i^*g)_p(J_\alpha v_1, v_2) = g_p(J_\alpha v_1, v_2)$$

Vale $i^*\omega_\alpha = \pi^*\tilde{\omega}_\alpha$. De fato, se $\mu^{-1}(\zeta)$ e $v_1, v_2 \in T_p\mu^{-1}(\zeta)$ (decomponha cada um na parte vertical e horizontal, $v = v^V + v^H$):

$$\begin{aligned}
(i^*\omega_\alpha)_p(v_1, v_2) &= \omega_\alpha(p)(v_1, v_2) = g(J_\alpha v_1, v_2) = \\
&g(J_\alpha v_1^H, v_2^H) + g(J_\alpha v_1^H, v_2^V) + g(J_\alpha v_1^V, v_2^H) + g(J_\alpha v_1^V, v_2^V) = g(J_\alpha v_1^H, v_2^H) = \\
\omega_\alpha(p)(v_1^H, v_2^H) &= \tilde{\omega}_\alpha(\pi(p))(d\pi_p v_1^H, d\pi_p v_2^H) = \tilde{\omega}_\alpha(\pi(p))(d\pi_p v_1, d\pi_p v_2) = (\pi^*\omega_\alpha)_p(v_1, v_2)
\end{aligned}$$

onde, na quarta igualdade, foi usado i) do item 4 e a invariância da métrica pelas estruturas complexas.

Por fim, vamos mostrar que essas 2-formas definidas em M_ζ são fechadas.

$$\pi^*(d\tilde{\omega}_\alpha) = d\pi^*\tilde{\omega}_\alpha = d(i^*\omega_\alpha) = i^*d\omega_\alpha = 0$$

Mas, $\pi^*(d\tilde{\omega}_\alpha) = 0 \Rightarrow d\tilde{\omega}_{\alpha\pi(p)}(d\pi_p v_1, d\pi_p v_2, d\pi_p v_3) = 0$. Como $\pi : \mu^{-1}(\zeta) \rightarrow M_\zeta$ é submersão sobrejetiva, segue que $d\tilde{\omega}_\alpha = 0$.

□

Observação 2.3.7. *Assim como na redução simplética, o quociente hyperkähler pode ser formulado mais geralmente quando o quociente possui estrutura de variedade (inclusive quando o grupo não é compacto e no contexto de dimensão infinita, como observado em [37], página 68).*

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Equações ADHM

Sejam V e W espaços vetoriais complexos com métrica (produto interno) hermitiana e suponha $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ e $\dim_{\mathbb{C}} W = r$.

Considere o seguinte espaço vetorial:

$$\mathbf{M} = \text{End}(V) \oplus \text{End}(V) \oplus \text{Hom}(W, V) \oplus \text{Hom}(V, W)$$

Uma vez escolhidas bases ortonormais para V e W , podemos pensar em $V = \mathbb{C}^n$ e $W = \mathbb{C}^r$ com as métricas hermitianas canônicas. Daí, $\mathbf{M} = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C}) \oplus M_{n \times r}(\mathbb{C}) \oplus M_{r \times n}(\mathbb{C})$.

Dado $x = (B_1, B_2, I, J) \in \mathbf{M}$, as equações ADHM são:

$$\begin{cases} [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J &= 0 \\ [B_1, B_2] + IJ &= 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\mathbf{M}$ é uma variedade (no caso, espaço vetorial) hyperkähler:

1. Lembremos dois fatos básicos da álgebra linear:

i) Se U é um espaço vetorial complexo e h uma métrica hermitiana, a parte real de h é uma métrica (produto interno) no espaço vetorial real subjacente.

ii) Sejam (U_1, h_1) e (U_2, h_2) espaços vetoriais hermitianos. Então, $U_1 \oplus U_2$ é naturalmente um espaço vetorial complexo e $h((u_1, u_2), (u'_1, u'_2)) = h_1(u_1, u'_1) + h_2(u_2, u'_2)$ é uma métrica

hermitiana em $U_1 \oplus U_2$.

Como $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $h(\alpha, \beta) = tr(\alpha\beta^\dagger)$ é uma métrica hermitiana em $M_{s \times t}(\mathbb{C})$, dados $x = (B_1, B_2, I, J)$, $y = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{I}, \tilde{J}) \in \mathbf{M}$, temos a seguinte métrica em $\mathbf{M}$:

$$g(x, y) = \frac{1}{2}tr(B_1\tilde{B}_1^\dagger + \tilde{B}_1B_1^\dagger + B_2\tilde{B}_2^\dagger + \tilde{B}_2B_2^\dagger + I\tilde{I}^\dagger + \tilde{I}I^\dagger + J\tilde{J}^\dagger + \tilde{J}J^\dagger)$$

Ou, como o traço é um operador comutativo, podemos escrever os últimos dois termos como $\tilde{J}^\dagger J + J^\dagger \tilde{J}$, de modo que as somas dentro do traço se fazem por matrizes n por n (usaremos esta forma para a métrica daqui para frente).

2. Temos 3 estruturas complexas em $\mathbf{M}$, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$:

$$\begin{cases} \hat{i}(B_1, B_2, I, J) &= (iB_1, iB_2, iI, iJ) \\ \hat{j}(B_1, B_2, I, J) &= (-B_2^\dagger, B_1^\dagger, -J^\dagger, I^\dagger) \\ \hat{k} &= \hat{i}\hat{j} \end{cases}$$

Note que $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ satisfazem as condições dos quatérnios ($\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1$). Como $\hat{k} = \hat{i}\hat{j}$, basta mostrar que $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = -1$ e que $\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i}$. É claro que $\hat{i}^2 = -1$, $\hat{j}^2(B_1, B_2, I, J) = \hat{j}(-B_2^\dagger, B_1^\dagger, -J^\dagger, I^\dagger) = -(B_1, B_2, I, J)$ e $\hat{i}\hat{j}(B_1, B_2, I, J) = (-iB_2^\dagger, iB_1^\dagger, -iJ^\dagger, iI^\dagger)$, enquanto $\hat{j}\hat{i}(B_1, B_2, I, J) = (iB_2^\dagger, -iB_1^\dagger, iJ^\dagger, -iI^\dagger)$.

3. A métrica g é compatível com as estruturas complexas acima definidas:

$$g(x, y) = g(\hat{i}x, \hat{i}y) = g(\hat{j}x, \hat{j}y) = g(\hat{k}x, \hat{k}y)$$

A compatibilidade de $\hat{i}$ é clara, enquanto a de $\hat{j}$ é uma conta simples levando em consideração a comutatividade do traço. A compatibilidade de $\hat{k}$ é consequência direta das outras duas.

4. Considere as formas $\omega_1(x, y) = g(\hat{i}x, y)$, $\omega_2(x, y) = g(\hat{j}x, y)$ e $\omega_3(x, y) = g(\hat{k}x, y)$. Visto que g é métrica, segue que as formas são não-degeneradas. Além disso, como $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são estruturas complexas e temos a compatibilidade com a métrica, tais formas são anti-simétricas (por exemplo, $\omega_1(x, y) = g(\hat{i}x, y) = g(-x, \hat{i}y) = -g(\hat{i}y, x) = -\omega_1(y, x)$).

Considere agora a ação de $U(n)$ em $\mathbf{M}$:

$$h \cdot (B_1, B_2, I, J) = (hB_1h^{-1}, hB_2h^{-1}, hI, Jh^{-1})$$

Esta ação preserva as estruturas complexas:

$$\begin{cases} \widehat{i}(h \cdot x) = h \cdot (\widehat{i}x) \\ \widehat{j}(h \cdot x) = h \cdot (\widehat{j}x) \\ \widehat{k}(h \cdot x) = h \cdot (\widehat{k}x) \end{cases}$$

A primeira relação é óbvia. Para a segunda, precisamos usar que $h \in U(n) \Rightarrow h^{-1} = h^\dagger$:

$$\begin{aligned} \widehat{j}(h \cdot (B_1, B_2, I, J)) &= \widehat{j}(hB_1h^{-1}, hB_2h^{-1}, hI, Jh^{-1}) = \widehat{j}(hB_1h^\dagger, hB_2h^\dagger, hI, Jh^\dagger) = \\ &= (-hB_2^\dagger h^\dagger, hB_1^\dagger h^\dagger, -hJ^\dagger, I^\dagger h^\dagger) = (h(-B_2)^\dagger h^{-1}, hB_1^\dagger h^{-1}, h(-J^\dagger), I^\dagger h^{-1}) = \\ &= h \cdot (-B_2^\dagger, B_1^\dagger, -J^\dagger, I^\dagger) = h \cdot (\widehat{j}(B_1, B_2, I, J)) \end{aligned}$$

A terceira relação segue diretamente das duas anteriores.

Note que a ação também preserva a métrica pela comutatividade do traço (e usando o fato que $h^{-1} = h^\dagger$, para $h \in U(n)$):

$$\begin{aligned} g(h \cdot x, h \cdot y) &= g((hB_1h^{-1}, hB_2h^{-1}, hI, Jh^{-1}), (h\tilde{B}_1h^{-1}, h\tilde{B}_2h^{-1}, h\tilde{I}, \tilde{J}h^{-1})) = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(hB_1\tilde{B}_1^\dagger h^{-1} + h\tilde{B}_1B_1^\dagger h^{-1} + hB_2\tilde{B}_2^\dagger h^{-1} + h\tilde{B}_2B_2^\dagger h^{-1} + hI\tilde{I}^\dagger h^{-1} + h\tilde{I}I^\dagger h^{-1} + hJ^d \text{ag} \tilde{J}h^{-1} + \\ &= h\tilde{J}^\dagger Jh^{-1}) = g(x, y) \end{aligned}$$

Dado $\xi \in \mathfrak{u}(n)$ (i.e. $\xi \in M_n(\mathbb{C})$, tal que $\xi + \xi^\dagger = 0$), vamos calcular o campo de vetores fundamental X_ξ :

Seja $x \in \mathbf{M}$, $(X_\xi)_x = d\psi_x(1_n)\xi$, onde $\psi_x : h \in U(n) \mapsto h \cdot x \in \mathbf{M}$.

Considere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U(n)$ diferenciável, com $\gamma(0) = 1_n$ e $\gamma'(0) = \xi$. Então,

$(X_\xi)_x = (\psi_x \circ \gamma)'(0)$. Como $\gamma(t)^\dagger = \gamma(t)^{-1}$, $\psi_x \circ \gamma(t) = (\gamma(t)B_1\gamma(t)^\dagger, \gamma(t)B_2\gamma(t)^\dagger, \gamma(t)I, J\gamma(t)^\dagger)$.

Portanto, derivando em $t=0$ e usando que $\gamma'(t) \in \mathfrak{u}(n)$, obtemos:

$$(X_\xi)_x = ([\xi, B_1], [\xi, B_2], \xi I, -J\xi)$$

onde $x = (B_1, B_2, I, J) \in \mathbf{M}$ e $[\cdot, \cdot]$ é o colchete de Lie de matrizes (comutador).

Calculando ω_1 obtemos:

$$\omega_1(x, y) = g(\widehat{i}x, y) = \frac{i}{2} \text{tr}(B_1\tilde{B}_1^\dagger - \tilde{B}_1B_1^\dagger + B_2\tilde{B}_2^\dagger - \tilde{B}_2B_2^\dagger + I\tilde{I}^\dagger - \tilde{I}I^\dagger - J^\dagger\tilde{J} + \tilde{J}^\dagger J)$$

Podemos pensar em B_1 como a função que projeta $\mathbf{M}$ em seu primeiro fator (i.e., $M_n(\mathbb{C})$) e seguindo essa linha, podemos introduzir a seguinte 2-forma $dB_1 \wedge dB_1^\dagger((B_1, B_2, I, J), (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{I}, \tilde{J})) = B_1\tilde{B}_1^\dagger - \tilde{B}_1B_1^\dagger$. Seguindo esse raciocínio, a forma ω_1 se escreve como:

$$\omega_1 = \frac{i}{2} \text{tr}(dB_1 \wedge dB_1^\dagger + dB_2 \wedge dB_2^\dagger + dI \wedge dI^\dagger - dJ^\dagger \wedge dJ) = d\theta_1$$

onde $\theta_1 = \frac{i}{2}tr(B_1dB_1^\dagger + B_2dB_2^\dagger + IdI^\dagger - J^\dagger \wedge dJ)$.

Vamos calcular $(X_\xi)_x = ([\xi, B_1], [\xi, B_2], \xi I, -J\xi)$ em θ_1 :

$$\theta_1(X_\xi)_x = \frac{i}{2}tr(B_1[\xi, B_1]^\dagger + B_2[\xi, B_2]^\dagger + II^\dagger\xi^\dagger + J^\dagger J\xi)$$

Mas, $\xi^\dagger = -\xi$ e $[\xi, B_1]^\dagger = (\xi B_1)^\dagger - (B_1\xi)^\dagger = -B_1^\dagger\xi + \xi B_1^\dagger = [\xi, B_1^\dagger]$, logo:

$$\begin{aligned}\theta_1(X_\xi)_x &= \frac{i}{2}tr(-B_1B_1^\dagger\xi + B_1\xi B_1^\dagger - B_2B_2^\dagger\xi + B_2\xi B_2^\dagger - II^\dagger\xi + J^\dagger J\xi) = \\ &\frac{i}{2}tr(-B_1B_1^\dagger\xi + B_1^\dagger B_1\xi - B_2B_2^\dagger\xi + B_2^\dagger B_2\xi - II^\dagger\xi + J^\dagger J\xi) = \\ &\frac{i}{2}tr(([B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J)\xi^\dagger)\end{aligned}$$

Note que, se denotarmos por $\psi_h : x \in \mathbf{M} \mapsto h \cdot x$, temos que $\psi_h^*\theta = \theta$ (uma vez que $d\psi_h = \psi_h$) e assim, aplicando o Lema 2.1.1, temos um mapa momento $\mu_1 : \mathbf{M} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ para a ação de $U(n)$ na variedade simplética $(\mathbf{M}, \omega_1)$, dado por:

$$\mu_1(x)(\xi) = -\theta_1(X_\xi)_x = \frac{i}{2}tr(([B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J)\xi)$$

Vamos identificar $\mathfrak{u}(n) \simeq \mathfrak{u}(n)^*$ via o produto interno $(A, B) = tr(AB^\dagger)$. Obtemos assim,

$$\mu_1(x) = \frac{1}{2i}([B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J)$$

Calculemos agora ω_2 :

$$\omega_2(x, y) = g(\hat{j}x, y) = \frac{-1}{2}tr(\tilde{B}_1B_2 + B_2^\dagger\tilde{B}_1^\dagger - \tilde{B}_2B_1 - B_1^\dagger\tilde{B}_2^\dagger + \tilde{I}J + J^\dagger\tilde{I}^\dagger - I\tilde{J} - \tilde{J}^\dagger I^\dagger)$$

E assim,

$$\omega_2 = \frac{-1}{2}tr(dB_2 \wedge dB_1 + dB_2^\dagger \wedge dB_1^\dagger + dJ \wedge dI + dJ^\dagger \wedge dI^\dagger) = d\theta_2$$

onde $\theta_2 = \frac{1}{2}tr(B_1dB_2 + B_1^\dagger dB_2^\dagger + IdJ - J^\dagger dI^\dagger)$.

Temos que:

$$\begin{aligned}\theta_2(X_\xi)_x &= \frac{1}{2}tr(B_1dB_2 + B_1^\dagger dB_2^\dagger + IdJ - J^\dagger dI^\dagger)([\xi, B_1], [\xi, B_2], \xi I, -J\xi) = \\ &\frac{1}{2}tr(B_1[\xi, B_2] + B_2^\dagger[\xi, B_2]^\dagger - IJ\xi + J^\dagger I^\dagger\xi) = \frac{1}{2}tr(B_1\xi B_2 - B_1B_2\xi - B_1^\dagger B_2^\dagger\xi + B_1^\dagger B_1^\dagger\xi B_2^\dagger - \\ &IJ\xi + J^\dagger I^\dagger\xi + B_2B_1\xi - B_2B_1\xi + B_2^\dagger B_1^\dagger\xi - B_2^\dagger B_1^\dagger\xi) = \frac{-1}{2}tr(([B_1, B_2] + [B_1^\dagger, B_2^\dagger] + IJ - J^\dagger I^\dagger)\xi)\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo raciocínio anterior, o mapa momento associado à ação de $U(n)$ na variedade simplética $(\mathbf{M}, \omega_2)$ é:

$$\mu_2(x) = \frac{-1}{2}([B_1, B_2] + [B_1^\dagger, B_2^\dagger] + IJ - J^\dagger I^\dagger)$$

Para ω_3 :

$$\begin{aligned} \omega_3(x, y) &= g(\widehat{kx}, y) = g((-iB_2^\dagger, iB_1^\dagger, -iJ^\dagger, iI^\dagger), (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{I}, \tilde{J})) = \\ &= \frac{1}{2}tr(-iB_2^\dagger \tilde{B}_1^\dagger + i\tilde{B}_1 B_2 + iB_1^\dagger \tilde{B}_2^\dagger - i\tilde{B}_2 B_1 - iJ^\dagger \tilde{I}^\dagger + i\tilde{I} J + i\tilde{J}^\dagger I^\dagger - iI \tilde{J}) = \\ &= \frac{1}{2i}tr(\tilde{B}_1^\dagger B_2^\dagger - \tilde{B}_1 B_2 - B_1^\dagger \tilde{B}_2^\dagger + B_1 \tilde{B}_2 + J^\dagger \tilde{I}^\dagger - \tilde{I} J - \tilde{J}^\dagger I^\dagger + I \tilde{J}) \end{aligned}$$

Daí, $\omega_3 = d\theta_3$, onde $\theta_3 = \frac{1}{2i}tr(B_1 dB_2 - B_1^\dagger dB_2^\dagger + IdJ + J^\dagger dI^\dagger)$.

Além disso:

$$\begin{aligned} \theta_3(X_\xi)_x &= \frac{1}{2i}tr(B_1 dB_2 - B_1^\dagger dB_2^\dagger + IdJ + J^\dagger dI^\dagger)([\xi, B_1], [\xi, B_2], \xi I, -J\xi) = \\ &= \frac{1}{2i}tr(B_1[\xi, B_2] - B_1^\dagger[\xi, B_2]^\dagger - IJ\xi - J^\dagger I^\dagger \xi) = \\ &= \frac{1}{2i}tr(B_1 \xi B_2 - B_1 B_2 \xi + B_1^\dagger B_2^\dagger \xi - B_1^\dagger \xi B_2^\dagger - IJ\xi - J^\dagger I^\dagger \xi) = \\ &= \frac{1}{2i}tr(B_2 B_1 \xi - B_1 B_2 \xi + B_1^\dagger B_2^\dagger \xi - B_2^\dagger B_1^\dagger \xi - IJ\xi - J^\dagger I^\dagger \xi) = \\ &= \frac{-1}{2i}tr([B_1, B_2] - [B_1^\dagger, B_2^\dagger] + IJ + J^\dagger I^\dagger)\xi \end{aligned}$$

O mapa momento associado à ação de $U(n)$ na variedade simplética $(\mathbf{M}, \omega_3)$ é:

$$\mu_3(x) = \frac{-1}{2i}([B_1, B_2] - [B_1^\dagger, B_2^\dagger] + IJ + J^\dagger I^\dagger)$$

É conveniente introduzir a seguinte forma complexa:

$$\omega_{\mathbb{C}} = \omega_2 + i\omega_3 = dtr(B_1 dB_2 + IdJ) = d\theta_{\mathbb{C}}$$

onde $\theta_{\mathbb{C}} = \theta_2 + i\theta_3$. Assim, temos o seguinte mapa momento complexo:

$$\mu_{\mathbb{C}}(x) = (\mu_2 + i\mu_3)(x) = -([B_1, B_2] + IJ)$$

Esses 3 mapas momento constituem um mapa momento hyperkähler $(\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3))$ e podemos considerar o seguinte quociente

$$\mathcal{M}(r, n) \doteq \frac{\mu_1^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)}{U(n)}$$

Como este espaço possui singularidades, podemos considerar o subconjunto no qual ele é uma variedade diferenciável (que, como vimos, corresponde aos pontos onde a ação é livre). Defina então

$$\mathcal{M}^{reg}(r, n) = \{[(B_1, B_2, I, J)] \in \mathcal{M}(r, n) ; (B_1, B_2, I, J) \text{ tem estabilizador trivial em } U(n)\}$$

Note que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}^{reg}(r, n) = 4(n^2 + nr) - 4n^2 = 4nr$ (pois $\dim_{\mathbb{R}} G = \dim_{\mathbb{R}} U(n) = n^2$) e este espaço é hyperkähler. Certos subespaços de $\mathcal{M}(r, n)$ desempenham um papel muito importante na teoria de calibre, como será explicado na próxima seção.

3.1.1 Considerações sobre a construção ADHM de instantons

A equação de anti-auto-dualidade ($F_{\omega} = -*F_{\omega}$) é uma equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem, que, pelo menos localmente, pode ser considerada elíptica. Apesar de, em geral, soluções serem bastante difíceis de encontrar, no caso em que a variedade base é $\mathbb{R}^4$, todas soluções podem ser dadas a partir de métodos de álgebra linear. Esta é a chamada construção ADHM de instantons e sua formulação é devida a M. Atiyah, V. Drinfeld, N. Hitchin e Y. Manin [2].

Vamos esboçar a idéia de como, a partir de matrizes satisfazendo as equações ADHM, é possível se obter um instanton. Um tratamento preciso da correspondência pode ser encontrado em [11], [2], [10].

Seja $(B_1, B_2, I, J) \in \mu^{-1}(0) \subseteq \mathbf{M}$ (i.e., satisfazendo as equações ADHM). Identifiquemos $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$, por $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (z_1, z_2)$, onde $z_1 = x_1 + ix_2$ e $z_2 = x_3 + ix_4$. Defina para cada $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\alpha_z : V \longrightarrow V \oplus V \oplus W$$

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} B_1 + z_1 1 \\ B_2 + z_2 1 \\ J \end{pmatrix}$$

$$\beta_z : V \oplus V \oplus W \longrightarrow V$$

$$\beta_z = \begin{pmatrix} -B_2 - z_2 1 & B_1 + z_1 1 & I \end{pmatrix}$$

onde 1 representa a matriz identidade $n \times n$ (Id_V). Se pedirmos que essa associação varie de maneira suave, ou seja, se temos mapas suaves $\alpha : \mathbb{C}^2 \longrightarrow Hom(V, V \oplus V \oplus W)$ e

$\beta : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \text{Hom}(V \oplus V \oplus W, V)$, obtemos o seguinte mapa entre fibrados triviais sobre $\mathbb{R}^4$

$$\underline{V} \xrightarrow{\alpha} \underline{V \oplus V \oplus W} \xrightarrow{\beta} \underline{V}$$

Temos que $[B_1, B_2] + IJ = 0 \Rightarrow \beta \circ \alpha = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \beta_z \circ \alpha_z &= (-B_2 - z_2 1)(B_1 + z_1 1) + (B_1 + z_1 1)(B_2 + z_2 1) + IJ = \\ &= -B_2 B_1 - z_1 B_2 - z_2 B_1 - z_1 z_2 1 + B_1 B_2 + z_2 B_1 + z_1 B_2 + z_1 z_2 1 + IJ = B_1 B_2 - B_2 B_1 + IJ = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Im} \alpha_z \subseteq \text{Ker} \beta_z$, para todo $z \in \mathbb{R}^4$. Defina então, $E_z \doteq \frac{\text{Ker} \beta_z}{\text{Im} \alpha_z}$.

Observação 3.1.1. *Como os espaços vetoriais tem produto interno hermitiano, $\text{Im} \alpha_z \oplus (\text{Im} \alpha_z)^\perp = V \oplus V \oplus W$ e assim, $\text{ker} \beta_z = \text{Im} \alpha_z \oplus ((\text{Ker} \beta_z \oplus (\text{Im} \alpha_z)^\perp))$. Portanto, $E_z \simeq (\text{Ker} \beta_z \oplus (\text{Im} \alpha_z)^\perp) \hookrightarrow (V \oplus V \oplus W) \times \{z\}$.*

Se α_z é injetora e β_z é sobrejetora, para todo $z \in \mathbb{R}^4$ (condição de regularidade), os espaços vetoriais E_z formam um fibrado sobre $\mathbb{R}^4$, o qual denotaremos por E (quando as aplicações α e β são holomorfas, o fibrado E é um fibrado holomorfo, geralmente denominado cohomologia da mônada dada por α e β). Este tem posto igual a $\text{rank}(E) = \dim \text{Ker} \beta_z - \dim \text{Im} \alpha_z = n + r - n = r$.

Note ainda que, se introduzirmos o mapa $R : \underline{V \oplus V \oplus W} \longrightarrow \underline{V \oplus V}$

$$R_z = \begin{pmatrix} \beta_z \\ \alpha_z^\dagger \end{pmatrix}$$

temos que $\text{Ker} R_z = \text{Ker} \beta_z \cap \text{Ker} \alpha_z^\dagger$. Mas, $\alpha_z^\dagger = (\text{Im} \alpha_z)^\perp$ e assim, $\text{Ker} R_z = E_z$.

A idéia agora é achar a projeção ortogonal $P : \underline{V \oplus V \oplus W} \longrightarrow E$. Com isso, podemos definir uma conexão em E projetando por P a conexão trivial do fibrado $\underline{V \oplus V \oplus W}$ e verifica-se que esta é um instanton. O mapa R é usado para mostrar que as fibras de E satisfazem a propriedade $E_{(z_1, z_2)} = E_{(z_1 q, z_2 q)}$, onde $q \in \mathbb{H}$, visto através da identificação $q = \begin{pmatrix} \overline{q_2} & -q_1 \\ \overline{q_1} & q_2 \end{pmatrix}$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$. Portanto, pode-se considerar E como um fibrado sobre a variedade $\mathbb{H}\mathbb{P}^1 \simeq S^4$ e calcula-se a carga topológica (que é simplesmente a segunda classe de Chern do fibrado, para $G = SU(r)$, por exemplo). A correspondência precisa é:

Teorema 3.1.2. *Existe uma correspondência 1-1 entre o espaço de moduli de $SU(r)$ -instantons framed com segunda classe de Chern igual a n e soluções regulares da equação ADHM módulo $U(V)$, onde $\dim V = n$ e $\dim W = r$.*

Observação 3.1.3. Considerando um $SU(r)$ -fibrado principal P sobre S^4 e fixando um ponto $m_0 \in S^4$, um instanton framed é um par (ω, ϕ) , onde $\phi \in P_{m_0}$ é um ponto na fibra de m_0 e ω um instanton. Quocienta-se o espaço dos instantons framed pelo grupo das transformações de calibre que fixam m_0 . Este é o espaço de moduli do enunciado do teorema. Neste caso, costuma-se pensar em $S^4 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$ (i.e., a compactificação a um ponto de $\mathbb{C}^2$).

3.2 Espaço de Moduli de Conexões Planas

Seja Σ uma superfície de Riemann conexa e fechada (i.e., uma variedade complexa de dimensão 1, compacta e sem bordo), G um grupo de Lie compacto e conexo, e $\pi : P \rightarrow \Sigma$ um G -fibrado principal.

Vimos que o grupo de transformações de calibre $\mathcal{G}$, que pode ser visto como $C_c^\infty(P; G)$, age à direita no espaço de conexões $\mathcal{A}$ do fibrado principal $P(\Sigma, G)$. Dada $A \in \mathcal{A} \subseteq \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ (reservamos a letra ω para a forma simplética definida mais à frente), considere a 2-forma de curvatura associada $\Omega_A \in \Omega_G^2(P; \mathfrak{g})$ (dada, pela Proposição 1.3.5, por $\Omega_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$). Temos então que $f \in C_c^\infty(P; G)$ age em A e Ω_A (Proposição 1.4.2) por

$$\begin{aligned} A \cdot f &= Ad_{f^{-1}}(A) + f^*\theta \\ \Omega_{A \cdot f} &= \Omega_A \cdot f = Ad_{f^{-1}}(\Omega_A) \end{aligned}$$

Sendo G um grupo de Lie compacto, existe produto interno Ad -invariante na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e podemos considerar o pareamento induzido

$$\langle \cdot \wedge \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} : \Omega^r(\Sigma; \mathfrak{g}_P) \times \Omega^s(\Sigma; \mathfrak{g}_P) \rightarrow \Omega^{r+s}(\Sigma)$$

Além disso, dada uma 1-forma de conexão $A \in \mathcal{A} \subseteq \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ e $\alpha, \beta \in T_A \mathcal{A} \simeq \Omega^1(\Sigma; \mathfrak{g}_P)$, a compacidade da superfície nos permite definir

$$\omega_A(\alpha, \beta) = \int_{\Sigma} \langle \alpha \wedge \beta \rangle_{\mathfrak{g}}$$

Observação 3.2.1. Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno Ad -invariante de $\mathfrak{g}$. Então, dados $x, y, z \in \mathfrak{g}$, temos que $\langle Ad(\exp(tx))y, Ad(\exp(tx))z \rangle = \langle y, z \rangle$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Uma vez que $Ad(\exp(tx)) = \exp(ad(tx))$, derivando em $t = 0$, temos que

$$\langle [x, y], z \rangle + \langle y, [x, z] \rangle = 0$$

Vimos que, dada $A \in \mathcal{A}$, temos uma derivada covariante $d_A : \Omega^q(M; \mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M; \mathfrak{g}_P)$. Vamos mostrar o seguinte lema técnico, que será utilizado mais à frente na demonstração da Proposição 3.4.1.

Lema 3.2.1. *Seja $A \in \mathcal{A}$ e considere $\phi \in \Omega^r(\Sigma; \mathfrak{g}_P)$, $\eta \in \Omega^s(\Sigma; \mathfrak{g}_P)$, então*

$$d \langle \phi \wedge \eta \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle d_A \phi \wedge \eta \rangle_{\mathfrak{g}} + (-1)^r \langle \phi \wedge d_A \eta \rangle_{\mathfrak{g}}$$

Prova. As formas ϕ e η são descritas localmente (em U_α) por formas $\phi_\alpha \in \Omega^r(U_\alpha; \mathfrak{g})$ e $\eta_\alpha \in \Omega^s(U_\alpha; \mathfrak{g})$. Vamos suprimir o índice α para não deixar a notação tão carregada, de modo que, se $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$, escrevemos

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^i \otimes \xi_i \\ \eta &= \eta^i \otimes \xi_i\end{aligned}$$

onde, $\phi^i \in \Omega^r(U_\alpha)$ e $\eta^i \in \Omega^s(U_\alpha)$. Note que estamos usando a notação de Einstein, ou seja, subentendemos o somatório sempre que tivermos índices iguais em posições diferente (i.e., um em cima outro embaixo). Dessa forma, $\langle \phi \wedge \eta \rangle_{\mathfrak{g}} \in \Omega^{r+s}(M)$ é dado em U_α por

$$\phi^i \wedge \eta^j \langle \xi_i, \xi_j \rangle$$

e assim, $d \langle \phi \wedge \eta \rangle_{\mathfrak{g}}$ é dado por

$$d(\phi^i \wedge \eta^j) \langle \xi_i, \xi_j \rangle = (d\phi^i \wedge \eta^j + (-1)^r \phi^i \wedge d\eta^j) \langle \xi_i, \xi_j \rangle$$

Agora, pela Proposição 1.3.11, $(d_\omega \zeta)_\alpha = d\zeta_\alpha + [s_\alpha^* A, \zeta_\alpha]$, onde $\zeta \in \Omega^q(M; \mathfrak{g}_P)$. Coloquemos então $s_\alpha^* A = a^i \otimes \xi_i$, onde $a^i \in \Omega^1(U_\alpha)$. Portanto,

$$(\langle d_A \phi \wedge \eta \rangle_{\mathfrak{g}})_\alpha = d\phi^i \wedge \eta^s \langle \xi_i, \xi_s \rangle + a^i \wedge \phi^r \wedge \eta^s \langle [\xi_j, \xi_r], \xi_s \rangle$$

e

$$(\langle \phi \wedge d_A \eta \rangle_{\mathfrak{g}})_\alpha = \phi^i \wedge d\eta^s \langle \xi_i, \xi_s \rangle + \phi^r \wedge a^i \wedge \eta^s \langle \xi_r, [\xi_i, \xi_s] \rangle$$

Mas, $\phi^r \wedge a^i \wedge \eta^s = (-1)^r a^i \wedge \phi^r \wedge \eta^s$ e, pela Observação 3.4.1,

temos que $\langle \xi_r, [\xi_i, \xi_s] \rangle = - \langle [\xi_j, \xi_r], \xi_s \rangle$. Portanto, os termos com a^i 's cancelam e obtemos

$$(\langle d_A \phi \wedge \eta \rangle_{\mathfrak{g}} + (-1)^r \langle \phi \wedge d_A \eta \rangle_{\mathfrak{g}})_\alpha = (d\phi^i \wedge \eta^s + (-1)^r \phi^i \wedge d\eta^s) \langle \xi_i, \xi_s \rangle$$

□

Lema 3.2.2. ω é uma forma simplética em $\mathcal{A}$.

Prova. Claramente ω_A é bilinear, pela linearidade da integral e bilinearidade do produto exterior de formas e produto interno. Como o produto exterior de formas é anti-simétrico, o pareamento considerado também será e temos $\omega \in \Omega^2(\mathcal{A})$.

Como o espaço das 1-formas de conexão $\mathcal{A}$ é um espaço afim, modelado em $\Omega^1(\Sigma; \mathfrak{g}_P)$, podemos identificar cada $T_A\mathcal{A} \simeq \Omega^1(\Sigma; \mathfrak{g}_P)$ e, como ω_A independe de A , concluímos que $d\omega = 0$.

Além disso, ω é não-degenerada. De fato, dada $A \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in T_A\mathcal{A}$, temos que

$$\omega_A(\alpha, *\alpha) = \int_{\Sigma} \langle \alpha \wedge *\alpha \rangle_{\mathfrak{g}} = \|\alpha\|_{L^2(\Lambda^2(T^*\Sigma) \otimes \mathfrak{g}_P)}^2$$

Assim, $\omega_A(\alpha, *\alpha) \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $\alpha = 0$. □

Observação 3.2.2. Dado $\xi \in \text{Lie}(\mathcal{G}) \simeq \Gamma(\mathfrak{g}_P)$, $\xi(m) = [p, \varphi(p)]$, para algum mapa diferenciável $\varphi : P_m \rightarrow \mathfrak{g}$, satisfazendo $\varphi(p \cdot g) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\varphi(p))$. Definimos, em 1.4, $\exp(\xi) \in \Gamma(P \times_C G)$ por $\exp(\xi)(m) = [p, \exp(\varphi(p))]$, que corresponde à função $f_{\xi}(p) = \exp(\varphi(p))$, uma vez que $f_{\xi}(p \cdot g) = \exp(\text{Ad}_{g^{-1}}(\varphi(p))) = C_{g^{-1}}\exp(\varphi(p)) = g^{-1}f_{\xi}(p)g$. No que segue, confundiremos $\exp(\xi)$ e f_{ξ} , sempre que estiver claro qual dos dois estamos considerando.

Lema 3.2.3. Seja $\xi \in \text{Lie}(\mathcal{G}) \simeq \Gamma(\mathfrak{g}_P)$. O campo de vetores fundamental $X_{\xi} \in \mathfrak{X}(\mathcal{A})$, induzido pela ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{A}$ é dado por

$$(X_{\xi})_A = d_A\xi$$

para cada $A \in \mathcal{A}$.

Prova. Temos que Pela definição,

$$\begin{aligned} (X_{\xi})_A &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A \cdot \exp(t\xi) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}_{\exp(-t\xi)}A + \exp(t\xi)^*\theta) \\ &= \text{ad}_{-\xi}(A) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dL_{\exp(-t\xi)}d\exp(t\xi) \\ &= -[\xi, A] + d\xi \\ &= d\xi + [A, \xi] \\ &= d_A\xi \end{aligned}$$

onde foi usado que $dL_{\exp(0)} = \text{Id}$ e $d\exp(0) = 0$ (além da proposição 1.3.11 para $E = \mathfrak{g}_P$). □

Dado $f \in C_c^\infty(P; G)$, denote

$$\begin{aligned} \psi_f : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ A &\mapsto A \cdot f \end{aligned}$$

Vamos mostrar que essa ação é simplética (i.e., $\psi_f^* \omega = \omega$). Para isso precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2.4. *Seja $\alpha \in T_A \mathcal{A}$, então*

$$d\psi_f(A)\alpha = Ad_{f^{-1}}(\alpha)$$

Prova. Seja $\gamma(t) = A + t\alpha$. Como $\mathcal{A}$ é espaço afim modelado em $\Omega^1(\Sigma; \mathfrak{g}_P)$, a curva γ é uma curva diferenciável em $\mathcal{A}$, com $\gamma(0) = A$ e $\gamma'(0) = \alpha$, de modo que $d\psi_f(A)\alpha = (\psi_f \circ \gamma)'(0)$. Lembrando que o produto interno em $\mathfrak{g}$ é Ad-invariante, o resultado segue do seguinte cálculo direto

$$\begin{aligned} d\psi_f(A)\alpha &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A + t\alpha) \cdot f \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{f^{-1}}(A) + tAd_{f^{-1}}(\alpha) + f^*\theta \\ &= Ad_{f^{-1}}(\alpha) \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.5. *$\mathcal{G}$ age simplecticamente em $(\mathcal{A}, \omega)$.*

Prova. Dados $A \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in T_A \mathcal{A}$ e $f \in C_C^\infty(P; G)$,

$$\begin{aligned} (\psi_f^* \omega)_A(\alpha, \beta) &= \omega_{A \cdot f}(d\psi_f(A)\alpha, d\psi_f(A)\beta) \\ &= \omega_{A \cdot f}(Ad_{f^{-1}}(A), Ad_{f^{-1}}(B)) \\ &= \int_\Sigma \langle Ad_{f^{-1}}\alpha \wedge Ad_{f^{-1}}\beta \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \int_\Sigma \langle \alpha \wedge \beta \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \omega_A(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

□

Vimos que, dada $A \in \mathcal{A}$, a 2-forma de curvatura Ω_A correspondia à uma 2-forma $F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$. Podemos considerar então o mapa

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \Omega^2(\Sigma; \mathfrak{g}_P) \simeq (\Omega^0(\Sigma; \mathfrak{g}_P))^* \simeq (Lie(\mathcal{G}))^*$$

onde o isomorfismo $\Omega^2(\Sigma; \mathfrak{g}_P) \simeq (\Omega^0(\Sigma; \mathfrak{g}_P))^*$ é dado pelo pareamento definido anteriormente, ou seja, $\eta \in \Omega^2(\Sigma; \mathfrak{g}_P)$ corresponde a $\int_\Sigma \langle \eta \wedge \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} \in (\Omega^0(\Sigma; \mathfrak{g}_P))^*$.

Observação 3.2.3. *Dado $A \in \mathcal{A}$, F_A é dada localmente (em U_α) por $(F_A)_\alpha = s_\alpha^* \Omega_A \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{g})$, e vale $(F_A)_\alpha = d(s_\alpha^* A) + \frac{1}{2}[s_\alpha^* A, s_\alpha^* A]$. Tomando $\nu \in T_A \mathcal{A}$,*

$$(F_{A+t\nu})_\alpha = d(s_\alpha^* A) + \frac{1}{2}[s_\alpha^* A, s_\alpha^* A] + t(d(s_\alpha^* \nu) + \frac{1}{2}([s_\alpha^* \nu, s_\alpha^* A] + [s_\alpha^* A, s_\alpha^* \nu])) + \frac{t^2}{2}[s_\alpha^* \nu, s_\alpha^* \nu]$$

Como $[s_\alpha^* A, s_\alpha^* \nu] = (-1)^{1 \cdot 1 + 1} [s_\alpha^* \nu, s_\alpha^* A]$ e $(d_A \nu)_\alpha = d(s_\alpha^* \nu) + [s_\alpha^* A, s_\alpha^* \nu]$, obtemos que

$$(F_{A+t\nu})_\alpha = (F_A)_\alpha + t(d_A \nu)_\alpha + \frac{t^2}{2} [s_\alpha^* \nu, s_\alpha^* \nu]$$

e, em particular,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_{A+t\nu})_\alpha = (d_A \nu)_\alpha$$

Proposição 3.2.1. *A aplicação*

$$\mu = -F : \mathcal{A} \longrightarrow (Lie(\mathcal{G}))^*$$

é um mapa momento para a ação do grupo de transformações de calibre no espaço de conexões de $P(\Sigma, G)$.

Prova. Vamos mostrar que

i) Dados $f \in C_C^\infty(P; G)$, $A \in \mathcal{A}$ e $\sigma \in Lie(\mathcal{G})$

$$(\mu(\psi_f(A)))(\sigma) = - \int_\Sigma \langle F_{A \cdot f} \wedge \sigma \rangle_{\mathfrak{g}}$$

mas, $F_{A \cdot f} = Ad_{f^{-1}}(F_A)$. Aqui há um pouco de abuso de notação. Como vimos F_A é dada por $\{(F_A)_\alpha = s_\alpha^* F_A \in \Omega^2(U_\alpha, \mathfrak{g})\}$. Daí, se $m \in U_\alpha$, $F_A(m)(u, v) = [s_\alpha(m), F_\alpha(m)(u, v)]$. Mas, $\Omega_{A \cdot f} = \Omega_A \cdot f = Ad_{f^{-1}}(\Omega_A)$ e aplicando o pullback de s_α , obtemos que $(F_{A \cdot f})_\alpha = Ad_{f^{-1}}((F_A)_\alpha)$ e assim, pela Ad-invariância do produto interno em $\mathfrak{g}$, obtemos

$$\begin{aligned} (\mu(\psi_f(A)))(\sigma) &= - \int_\Sigma \langle Ad_{f^{-1}}(F_A) \wedge \sigma \rangle_{\mathfrak{g}} = \\ &= - \int_\Sigma \langle (F_A) \wedge Ad_{f^{-1}}(\sigma) \rangle_{\mathfrak{g}} = \mu(A)(Ad_{f^{-1}}\sigma) = ((Ad_f^* \circ \mu)(A))(\sigma) \end{aligned}$$

ii) Dado $\sigma \in Lie(\mathcal{G})$, $\mu^\sigma(A) \doteq (\mu(A))(\sigma) = \int_\Sigma \langle -F_A \wedge \sigma \rangle$, temos assim que, dado $\nu \in T_A \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} d\mu^\sigma(A)\nu &= d\left(\int_\Sigma \langle -F \wedge \sigma \rangle_{\mathfrak{g}}\right)(A)\nu \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_\Sigma \langle -F_{A+t\nu} \wedge \sigma \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &\stackrel{Obs3.4.3}{=} - \int_\Sigma \langle d_A \nu \wedge \sigma \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &\stackrel{Lema3.4.1}{=} \int_\Sigma - \int_\Sigma d \langle \nu \wedge \sigma \rangle_{\mathfrak{g}} - \int_\Sigma \langle \nu \wedge d_A \sigma \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &\stackrel{Stokes}{=} - \int_\Sigma \langle \nu \wedge d_A \sigma \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= - \int_\Sigma \langle \nu \wedge (X_\sigma)_A \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \int_\Sigma \langle (X_\sigma)_A \wedge \nu \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \omega_A((X_\sigma)_A, \nu) \end{aligned}$$

□

Note que, a estrela de Hodge (estendida para formas com valores no fibrado $\mathfrak{g}_P$) em 1-formas $*\Omega^1(M; \mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$ satisfaz $*^2 = -Id$. Logo, podemos definir uma estrutura quase-complexa em $\mathcal{A}$

$$J_A(\alpha) \doteq *\alpha$$

onde $\alpha \in T_A\mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$. A estrela de Hodge também nos dá uma métrica no espaço de conexões

$$g_A(\alpha, \beta) \doteq \int_{\Sigma} \langle \alpha \wedge *\beta \rangle_{\mathfrak{g}}$$

$\alpha, \beta \in T_A\mathcal{A}$. Claramente esta métrica é hermitiana, pois

$$g(J\alpha, J\beta) = - \int_{\Sigma} \langle *\alpha \wedge \beta \rangle_{\mathfrak{g}} = \int_{\Sigma} \langle \alpha \wedge *\beta \rangle_{\mathfrak{g}}$$

onde usamos que $*\alpha \wedge \beta = *^2\alpha \wedge *\beta = -\alpha \wedge *\beta$.

Note ainda que nossa forma simplética $\omega(\alpha, \beta) = g(J\alpha, \beta)$

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_{\Sigma} \langle \alpha \wedge \beta \rangle_{\mathfrak{g}} = \int_{\Sigma} \langle *\alpha \wedge *\beta \rangle_{\mathfrak{g}} = g(J\alpha, \beta)$$

Portanto, temos uma estrutura Kahler em $\mathcal{A}$.

Essa discussão pode ser facilmente generalizada para o caso em que a base do fibrado é uma variedade simplética compacta X^{2n} (ou Kähler). Como a forma simplética é fechada, temos uma forma simplética no espaço de conexões

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_X \langle \alpha \wedge \beta \rangle_{\mathfrak{g}} \wedge \omega^{n-1}$$

E de maneira análoga, a ação do grupo de transformações de calibre $\mathcal{G}$ em $\mathcal{A}$ nos fornece o mapa momento

$$\mu(A) = -\mathcal{F}_A \wedge \omega^{n-1}$$

Este assunto é tratado com detalhes em [11] (capítulo 6).

Note ainda que, se X é uma variedade hyperkähler de dimensão quatro, temos para cada forma Kähler ω_j , $j = 1, 2, 3$, de X , uma forma simplética (Kähler, uma vez fixada a métrica $g(\alpha, \beta) = \int_X \langle \alpha \wedge *\beta \rangle_{\mathfrak{g}}$ em $\mathcal{A}$) no espaço de conexões. Em particular, as estruturas complexas de X induzem estruturas complexas no espaço de conexões, que herda uma estrutura hyperkähler. Além disso, temos mapas momento dados por $\mu_j(A) = -\mathcal{F}_A \wedge \omega_j$ e podemos condensá-los num mapa momento hyperkähler $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Como observado em [37] (seção 3.2), as formas $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ geram o espaço das 2-formas auto-duais, de modo que

$$\frac{\mu^{-1}(0)}{\mathcal{G}} \simeq \frac{\{A \in \mathcal{A} ; \mathcal{F}_A^+ = 0\}}{\mathcal{G}}$$

Ou seja, o espaço de moduli de instantons (com singularidades). Em particular, eliminando pontos ruins, têm-se uma estrutura hyperkähler nesse espaço.

Apesar de estarmos trabalhando em espaços compactos, é possível entender essa construção em espaços não-compactos, como $\mathbb{R}^4$ (que é hyperkähler). Com as ferramentas de análise apropriadas obtém-se uma estrutura de variedade hyperkähler no espaço de moduli de $SU(r)$ -instantons *framed* (com segunda classe de Chern fixada).

Para finalizar, cabe comentar que a correspondência dada pela construção ADHM de instantons (teorema 3.1.2) é, na verdade, uma isometria hyperkähler. Tal fato está provado em [30].

Apêndice A

Formas Diferenciais

Com o intuito de estabelecer notação e enunciar alguns resultados clássicos usados no texto, vamos discutir alguns aspectos da teoria de formas diferenciais usuais e com valores em fibrados vetoriais. Esta seção é baseada em [28], [34].

Se M é uma variedade diferenciável, uma k -forma diferencial $\alpha \in \Omega^k(M)$ é uma seção do fibrado vetorial $\Lambda^k T^*M \rightarrow M$, e dado $p \in M$,

$$\alpha_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação k -linear alternada. Alternativamente, é possível pensar em α como uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear em cada uma das k entradas e alternada

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definida da maneira natural (i.e., $\alpha(X_1, \dots, X_k)(p) = \alpha_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p)$, onde $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ e, por abuso de notação, denotamos as duas aplicações por α).

Com essa identificação, a derivada exterior se dá por:

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

onde $\widehat{X}_i$ significa que o campo X_i foi omitido e, dada $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X(f) \in C^\infty(M)$ é definida por $X(f)(p) = X_p(f) = df_p(X_p)$. Além disso, $[X_i, X_j] \in \mathfrak{X}(M)$ é o colchete de Lie de dois campos (i.e., $[X_i, X_j](f) = X_i(X_j(f)) - X_j(X_i(f))$, onde $f \in C^\infty(M)$).

Em particular, se α é uma 1-forma, vale que:

$$d\alpha(X_1, X_2) = X_1(\alpha(X_2)) - X_2(\alpha(X_1)) - \alpha([X_1, X_2])$$

De uma forma mais geral, podemos definir uma k -forma de M com valores num fibrado vetorial $E \rightarrow M$ como uma seção do produto tensorial dos fibrados em questão, i.e., $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E)$ e denotaremos esse espaço por $\Omega^k(M; E)$. Assim, dado $p \in M$:

$$\alpha_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow E_p$$

é uma aplicação k -linear alternada. Em particular, se V é um espaço vetorial e $\underline{V} = M \times V \rightarrow M$ é o fibrado trivial, denotamos por $\Omega^k(M; V) \doteq \Omega^k(M; \underline{V})$.

Além disso, a nossa identificação para formas usuais se traduz, nesse contexto, em uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear em cada uma das k entradas e alternada

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(E)$$

Denotemos por

$$\Omega(M; E) = \bigoplus \Omega^k(M; E)$$

Este é naturalmente um módulo graduado sobre a álgebra graduada $\Omega(M)$, onde a ação (à esquerda)

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M; E) \rightarrow \Omega^{l+k}(M; E)$$

é definida estendendo por linearidade

$$\alpha \wedge (\beta \otimes s) \doteq (\alpha \wedge \beta) \otimes s$$

onde $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\Omega^l(M)$ e $s \in \Gamma(E)$. De maneira análoga, temos uma ação à esquerda e vale $\alpha \wedge \gamma = (-1)^{kl} \gamma \wedge \alpha$, onde $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\gamma \in \Omega^l(M; E)$.

Vamos voltar nossa atenção para $\Omega^k(M; V)$. Seja $\alpha \in \Omega^k(M; V)$. Fixada uma base de V $\{v_1, \dots, v_r\}$, temos que

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$$

onde $v_i \in \Omega^k(M)$. Podemos então definir

$$d\alpha = \sum_{i=1}^r d\alpha_i v_i$$

e claramente essa definição independe da base de V tomada. O produto exterior, no entanto, não se generaliza tão facilmente. Temos um mapa natural

$$\wedge : \Omega^p(M; V) \times \Omega^q(M; V) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M; V \otimes V)$$

que associa $(\alpha, \beta) \in \Omega^p(M; V) \times \Omega^q(M; V)$, onde $\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$ e $\beta = \sum_{i=1}^r \beta_i v_i$, ao elemento

$\alpha \wedge \beta \doteq \sum_{i,j=1}^r (\alpha_i \wedge \beta_j) v_i \otimes v_j$. Se V é dotado de multiplicação (i.e. uma aplicação linear $V \otimes V \longrightarrow V$), obtemos, por composição, um mapa $\Omega^p(M; V) \times \Omega^q(M; V) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M; V)$. Note que, se W é outro espaço vetorial e temos uma ação $W \times V \longrightarrow V$, podemos definir de maneira análoga $\Omega^p(M; W) \times \Omega^q(M; V) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M; V)$ (em particular, $W = \text{End}(V)$ fornece um exemplo dessa situação).

Um caso de extrema importância ocorre quando V é a álgebra de Lie de um grupo de Lie G . Neste caso, a multiplicação é o colchete de Lie e denotamos também por colchetes o mapa $[\cdot, \cdot] : \Omega^p(M; \mathfrak{g}) \times \Omega^q(M; \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M; \mathfrak{g})$.

Em particular, se $\alpha \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$,

$$[\alpha, \alpha](X, Y) = [\alpha(X), \alpha(Y)] - [\alpha(Y), \alpha(X)] = 2[\alpha(X), \alpha(Y)]$$

Lema A.0.6. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(M; \mathfrak{g})$ formas cujos graus são p, q e r , respectivamente. Então*

1. $[\beta, \alpha] = (-1)^{pq+1}[\alpha, \beta]$
2. $(-1)^{rq}[\gamma, [\alpha, \beta]] + (-1)^{qp}[\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{pr}[\alpha, [\beta, \gamma]] = 0$
3. $d[\alpha, \beta] = [d\alpha, \beta] + (-1)^p[\alpha, d\beta]$

O lema acima segue diretamente das propriedades das formas diferenciais usuais e do fato do colchete de Lie ser anti-simétrico e satisfazer a identidade de Jacobi.

Note que, todo grupo de Lie G vem equipado com uma 1-forma com valores na álgebra de Lie, a forma de Maurer-Cartan θ . Dado $g \in G$, esta forma é definida por $\theta(g) = dL_{g^{-1}}(g) : T_g G \longrightarrow \mathfrak{g}$.

Proposição A.0.2. *A forma de Maurer-Cartan satisfaz:*

1. $L_g^* \theta = \theta$
2. $R_g^* \theta = \text{Ad}_{g^{-1}} \theta$

$$3. d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0 \text{ (equação estrutural)}$$

Lema A.0.7. *Seja P uma variedade e G um grupo de Lie. Se $\alpha \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ e $f : P \rightarrow G$, então $Ad_{f^{-1}}\alpha \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ e temos*

$$d(Ad_{f^{-1}}\alpha) = Ad_{f^{-1}}d\alpha - [f^*\theta, Ad_{f^{-1}}\alpha]$$

Prova. Podemos ver $Ad_{f^{-1}} \in \Omega^0(P; GL(\mathfrak{g}))$ e temos o pareamento natural com formas com valores na álgebra de Lie. Assim,

$$d(Ad_{f^{-1}}\alpha) = d(Ad_{f^{-1}}) \wedge \alpha + Ad_{f^{-1}}d\alpha$$

Vamos calcular $d(Ad_{f^{-1}}) \in \Omega^1(P; GL(\mathfrak{g}))$. Seja então γ uma curva suave em P com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Assim, $d(Ad_{f^{-1}})_p v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Ad_{f^{-1}(\gamma(t))}$.

Escreva, $f^{-1}(\gamma(t)) = f^{-1}(p)h(t)$, onde $h(t) = L_{f(p)}f^{-1}(\gamma(t))$. Ou seja, $h(0) = e \in G$ e $h'(0) = ((f^{-1})^*\theta)_p v$.

Temos então que $Ad_{f^{-1}(\gamma(t))} = Ad_{f^{-1}(p)}Ad_{h(t)}$. Portanto,

$$d(Ad_{f^{-1}})_p v = Ad_{f^{-1}(p)}ad_{h'(0)} = Ad_{f^{-1}(p)}[((f^{-1})^*\theta)_p v, \cdot]$$

Dessa forma,

$$(d(Ad_{f^{-1}}) \wedge \alpha)_p = Ad_{f^{-1}(p)}[(f^{-1})^*\theta, \alpha]_p = [Ad_{f^{-1}(p)}(f^{-1})^*\theta, Ad_{f^{-1}(p)}\alpha_p] = -[(f^*\theta)_p, Ad_{f^{-1}(p)}\alpha_p]$$

Na última igualdade foi usado implicitamente que se $a : P \rightarrow G$, $aa^{-1} : P \rightarrow \{e\} \subseteq G$ e assim $(da)a^{-1} + a(da^{-1}) = 0$. $\square$

Mostraremos a seguir que dado um fibrado principal $P(M, G)$ e uma representação $\rho : G \rightarrow GL(V)$, onde V é um espaço vetorial, as formas de M com valores no fibrado associado $E = P \times_\rho V$ correspondem a certas formas em P com valores em V .

Definição A.0.1. *Dizemos que uma forma $\alpha \in \Omega^k(P, V)$ é básica, se*

1. $\psi_g^*\alpha = \rho(g^{-1})\alpha$, para todo $g \in G$
2. A forma se anula quando aplicada em vetores verticais (em qualquer uma de suas entradas)

Denotaremos o espaço das k -formas básicas por $\Omega_G^k(P, V)$.

Proposição A.0.3. *Existe uma isomorfismo entre $\Omega_G^k(P, V)$ e $\Omega^k(M, E)$, onde $E = P \times_\rho V$.*

Prova. Seja $\alpha \in \Omega_G^k(P, V)$. Vamos definir $\tilde{\alpha} \in \Omega^k(M, E)$. Dados $m \in M$, $\tau_j \in T_m M$, $j = 1, \dots, k$, e $p \in \pi^{-1}(m) \subseteq P$, como π é submersão, existem $\tilde{\tau}_j \in T_p P$ tais que $d\pi(p)\tilde{\tau}_j = \tau_j$. Definimos então

$$\tilde{\alpha}(m)(\tau_1, \dots, \tau_k) = [p, \alpha(p)(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)]$$

Primeiramente, observe que se $d\pi(p)\tilde{\tau}_j = \tau_j$, $\tilde{\tau}_j - \tau_j \in V_p = \ker(d\pi_p)$ e como α é uma forma básica, $\alpha(p)(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_j, \dots, \tilde{\tau}_k) = \alpha(p)(\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_k)$. Portanto, não há problemas na escolha dos vetores $\tilde{\tau}_j$. Para mostrar que $\tilde{\alpha}$ está bem definida ainda precisamos mostrar que não importa o elemento de P_m tomado. Como qualquer outro elemento da fibra é da forma $p \cdot g$, para algum $g \in G$, e $d\pi(p \cdot g)d\psi_g(p)\tilde{\tau}_j = d\pi(p)\tilde{\tau}_j = \tau_j$, ficamos com a seguinte expressão

$$\begin{aligned} [p \cdot g, \alpha(p \cdot g)(d\psi_g(p)\tilde{\tau}_1, \dots, d\psi_g(p)\tilde{\tau}_k)] &= [p \cdot g, (\psi_g^* \alpha)(p)(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)] = \\ &= [p \cdot g, \rho(g^{-1})(\alpha(p)(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k))] = [p, \alpha(p)(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)] \end{aligned}$$

Essa associação é claramente linear. Por outro lado, dado $\beta \in \Omega^k(M, E)$, definimos $\tilde{\beta}(p)(\tau_1, \dots, \tau_k) = v$, onde o elemento de V é dado por $\beta(\pi(p))(d\pi(p)\tau_1, \dots, d\pi(p)\tau_k) = [p, v]$. Claramente, $\tilde{\beta} \in \Omega_G^k(P, V)$ e esta se anula em vetores verticais. Agora, $\beta(\pi(p \cdot g))(d\pi(p)d\psi_g(p)\tau_1, \dots, d\pi(p)d\psi_g(p)\tau_k) = \beta(\pi(p))(d\pi(p)\tau_1, \dots, d\pi(p)\tau_k) = [p, v] = [p \cdot g, \rho(g^{-1})v]$. Portanto,

$$(\psi_g^* \tilde{\beta})(p)(\tau_1, \dots, \tau_k) = \tilde{\beta}(p \cdot g)(d\psi_g(p)\tau_1, \dots, d\psi_g(p)\tau_k) = \rho(g^{-1})v = \rho(g^{-1})(\tilde{\beta}(p)(\tau_1, \dots, \tau_k))$$

e assim, $\tilde{\beta} \in \Omega_G^k(P, V)$.

Esta é uma bijeção. De fato, considere $\alpha \in \Omega_G^k(P, V) \mapsto \tilde{\alpha} \in \Omega^k(M, E) \mapsto \tilde{\tilde{\alpha}} \in \Omega_G^k(P, V)$. Assim, $\tilde{\tilde{\alpha}}(\pi(p))(d\pi(p)\tau_1, \dots, d\pi(p)\tau_k) = [p, \alpha(p)(\tau_1, \dots, \tau_k)]$ e assim, $\alpha = \tilde{\tilde{\alpha}}$. Considere agora $\beta \in \Omega^k(M, E) \mapsto \tilde{\beta} \in \Omega_G^k(P, V) \mapsto \tilde{\tilde{\beta}} \in \Omega^k(M, E)$. Se $d\pi(p)\tilde{\tau}_j = \tau_j$, $j = 1, \dots, k$, com $\pi(p) = m$, temos que $\tilde{\tilde{\beta}}(m)(\tau_1, \dots, \tau_k) = [p, \tilde{\beta}(p)(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_k)] = \beta(m)(d\pi(p)\tilde{\tau}_1, \dots, d\pi(p)\tilde{\tau}_k) = \beta(m)(\tau_1, \dots, \tau_k)$. $\square$

Para finalizar essa seção vamos fazer um comentário sobre formas com valores no fibrado associado $E = P \times_\rho V$, onde $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow P|_{U_\alpha}$ são as seções que correspondem às trivializações do fibrado $P(M, G)$. Dada $\zeta \in \Omega^k(M, E)$, em U_α , podemos definir $\zeta_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha, V)$ por $\zeta = [s_\alpha, \zeta_\alpha]$. Note que em $U_{\alpha\beta}$ as definições devem coincidir, de modo que, como $s_\beta = s_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}$, devemos ter que, nos pontos da interseção, $[s_\alpha, \zeta_\alpha] = [s_\beta, \zeta_\beta] = [s_\alpha, \rho(g_{\alpha\beta})\zeta_\beta]$. Ou seja, $\zeta_\alpha = \rho(g_{\alpha\beta})\zeta_\beta$. Reciprocamente, dadas k -formas $\zeta_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha, V)$ satisfazendo $\zeta_\alpha = \rho(g_{\alpha\beta})\zeta_\beta$ em $U_{\alpha\beta}$, obtemos uma forma global $\zeta \in \Omega^k(M, E)$ dada localmente (em U_α) por $[s_\alpha, \zeta_\alpha]$.

Seja $\tilde{\zeta} \in \Omega_G^k(P, V)$ a forma que corresponde a ζ . Temos então que $\zeta_\alpha = s_\alpha^* \tilde{\zeta}$. De fato, $(s_\alpha^* \tilde{\zeta})_m(\tau_1, \dots, \tau_k) = \tilde{\zeta}(s_\alpha(m))(ds_\alpha(m)\tau_1, \dots, ds_\alpha(m)\tau_k)$. Como $\pi \circ s_\alpha = Id_{U_\alpha}$, vale $d\pi(p)ds_\alpha(m)\tau_j = \tau_j$, para cada j , e assim $\zeta(m)(\tau_1, \dots, \tau_k) = [s_\alpha(m), \tilde{\zeta}(s_\alpha(m))(ds_\alpha(m)\tau_1, \dots, ds_\alpha(m)\tau_k)]$.

Formas Diferenciais Complexas

Seja M uma variedade diferenciável. Como vimos anteriormente podemos considerar formas diferenciais em espaços vetoriais V . Se $V = \mathbb{C}$, chamamos $\alpha \in \Omega^k(M; \mathbb{C})$ de k -forma diferencial complexa. Em particular, como $\mathbb{C}$ é um corpo, o produto exterior se generaliza naturalmente. Geralmente, denotaremos $\Omega^k(M; \mathbb{C})$ por $\Omega^k(M)_{\mathbb{C}}$ e pensaremos num elemento $\alpha \in \Omega^k(M)_{\mathbb{C}}$, como $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^k(M)$; o que condiz com o fato de tal forma poder ser vista como uma seção diferenciável do fibrado vetorial complexo cujas fibras são $\Lambda^k((T_p M)_{\mathbb{C}})^*$.

Sejam $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \Omega^r(M)_{\mathbb{C}}$ e $\beta = \beta_1 + i\beta_2 \in \Omega^s(M)_{\mathbb{C}}$. Então,

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \alpha_1 \wedge \beta_1 - \alpha_2 \wedge \beta_2 + i(\alpha_1 \wedge \beta_2 + \alpha_2 \wedge \beta_1) \\ d\alpha &= d\alpha_1 + id\alpha_2\end{aligned}$$

e assim temos,

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha \\ d^2 &= 0 \\ \overline{\alpha \wedge \beta} &= \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}\end{aligned}$$

A última afirmação segue do seguinte cálculo $\overline{\alpha \wedge \beta} = \alpha_1 \wedge \beta_1 - \alpha_2 \wedge \beta_2 - i(\alpha_1 \wedge \beta_2 + \alpha_2 \wedge \beta_1) = (\alpha_1 - i\alpha_2) \wedge (\beta_1 - i\beta_2)$.

Apêndice B

Forma volume e Estrela de Hodge

Seja V um espaço vetorial. Considere o seguinte espaço vetorial

$$T_s^r(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s$$

Temos da álgebra linear os seguintes isomorfismos:

Proposição B.0.4. *Se V é um espaço vetorial real, então*

$$\begin{aligned} T_s(V) &\doteq T_s^0(V) \simeq \{f : \underbrace{V \times \dots \times V}_s \longrightarrow \mathbb{R} \mid s\text{-lineares}\} \\ T^r(V) &\doteq T_0^r(V) \simeq \{f : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_r \longrightarrow \mathbb{R} \mid r\text{-lineares}\} \end{aligned}$$

Definição B.0.2. *Seja M uma variedade. $T_s^r(M) \doteq \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_p M)$ é naturalmente um fibrado vetorial sobre M . Chamamos de campo tensorial de grau (r, s) uma seção deste fibrado.*

Definição B.0.3. *Uma métrica riemanniana numa variedade diferenciável M é um campo tensorial g simétrico de grau $(0, 2)$ positivo definido.*

Dessa forma, $g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno, para cada $p \in M$. Além disso, dada uma carta local $\{U, (x_1, \dots, x_n)\}$ de M , podemos escrever a métrica como

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

onde $g_{ij}(p) = g_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p)$, $g_{ij} \in C^\infty(U)$, e $(g_{ij}(p))$ é uma matriz simétrica e positiva definida.

O fato de $g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ ser positivo definido, nos dá, em particular, que esta forma bilinear é não-degenerada. De fato, se $g_p(u, v) = 0$, para todo $v \in T_p M$, tomando $v = u$, obtemos que $u = 0$. Assim, a métrica nos dá um isomorfismo entre $T_p M$ e $T_p^* M$, que se estende a um isomorfismo entre campos de vetores e 1-formas de M .

Podemos então, através desse isomorfismo, produzir um produto interno em cada $T_p^* M$ e assim uma métrica (como na definição 1.2.3) no fibrado cotangente.

O isomorfismo $\widehat{g}_p : T_p M \longrightarrow T_p^* M$, $u \mapsto g_p(\cdot, u)$, nos dá que $\{g(\cdot, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p)\}$ é uma base de $T_p^* M$, para cada $p \in U$. Assim,

$$dx^i = \sum_{j=1}^n a_{ji} g(\cdot, \frac{\partial}{\partial x^j})$$

Portanto, $\sum_{j=1}^n g_{kj} a_{ji} = \delta_i^k$. Ou seja, (a_{ij}) é a matriz inversa de (g_{ij}) e denotaremos a_{ij} por g^{ij} .

Dessa forma, a 1-forma local dx^i corresponde ao campo local $\sum_{j=1}^n g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^j}$. Defina assim

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \tilde{g}(dx^i, dx^j) = g(\sum_{r=1}^n g^{ri} \frac{\partial}{\partial x^r}, \sum_{s=1}^n g^{sj} \frac{\partial}{\partial x^s}) \\ \sum_{r,s=1}^n g^{ri} g_{rs} g^{sj} &= \sum_{r,s=1}^n g^{ri} g_{sr} g^{sj} = \sum_{s=1}^n \delta_i^s g^{sj} = g^{ij} \end{aligned}$$

em U , e estenda por bilinearidade.

Podemos generalizar essa métrica para o fibrado vetorial das k -formas através do determinante. Se $\alpha_i, \beta_i \in \Omega^1(M)$, $i = 1, \dots, k$

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \doteq \det((\tilde{g}(\alpha_i, \beta_j)))$$

e novamente estenda por bilinearidade.

Note que, dada uma variedade riemanniana (M, g) existe uma forma volume privilegiada, a qual denotaremos $dvol$. Esta tem a propriedade de que, se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortonormal orientada de $T_p M$, então $dvol(u_1, \dots, u_n) = 1$. De fato, seja $(U, (x_1, \dots, x_n))$ uma carta local de M . Então, aplicando o processo de Gram-Schmidt para os campos locais $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$, obtemos um referencial local ortonormal cujo dual $\omega_1, \dots, \omega_n$, como vimos, fornece uma base ortonormal para T^*U . Se $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ é outra base ortonormal, com respeito ao aberto U' , temos que $A\omega_i = \omega'_i$ em $U \cap U'$, para alguma $A \in O(n)$ e

$$A\omega_1 \wedge \dots \wedge A\omega_n = \det(A)\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \pm \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$$

daí, no caso em que $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ e $\{\omega'_1, \dots, \omega'_n\}$ pertencem à mesma orientação, $\det(A) = 1$ e estas formas definem uma n -forma global em M . Em particular, se $(U, (x_1, \dots, x_n))$ é uma carta local que define a orientação,

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \det(g^{ij}) = \frac{1}{\det(g_{ij})}$$

e assim,

$$dvol|_U = \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Se M é compacto, definimos o *volume* de M por

$$vol(M) = \int_M dvol$$

Em uma variedade riemanniana orientada (M^n, g) , temos um isomorfismo natural entre $\Lambda^k T_p^* M \simeq \Lambda^{n-k} T_p^* M$, para cada $p \in M$. De fato, se $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p^* M$, então definimos $*$: $\Lambda^k T_p^* M \longrightarrow \Lambda^{n-k} T_p^* M$ por

$$*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) = \pm \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n$$

onde o sinal positivo é tomado se a base ordenada $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ está na mesma classe da orientação, i.e., da forma de volume (caso contrário, toma-se o sinal negativo).

Note que, em particular, se $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ é orientado positivamente,

$$*1 = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \text{ e } *(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = 1$$

A *estrela de Hodge* será o operador definido globalmente $*$: $\Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$. Concluimos que a imagem de uma k -forma diferenciável por $*$ é, de fato, uma $(n-k)$ -forma diferenciável considerando sua expressão local por um referencial ortonormal positivo. Vamos resumir as propriedades da estrela de Hodge abaixo.

Proposição B.0.5. *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$ e $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$. Então,*

$$1. \quad *(f\alpha + g\beta) = f*\alpha + g*\beta$$

$$2. \quad **\alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha$$

$$3. \quad \alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta) dvol$$

$$4. \quad *(\alpha \wedge *\beta) = (\alpha, \beta)$$

$$5. \quad (*\alpha, *\beta) = (\alpha, \beta)$$

A demonstração da proposição (ver [34] , página 152, por exemplo) é simples, uma vez que é suficiente provar cada identidade no caso de espaços vetoriais tomando uma base ortonormal positiva e analisando os sinais.

Sejam $\alpha, \beta \in \Omega_c^k(M)$ k-formas com suporte compacto (ou, simplesmente, k-formas, supondo M compacto). Definimos então o produto interno L^2 por

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \int_M (\alpha, \beta) dvol \\ &= \int_M \alpha \wedge * \beta \end{aligned}$$

Em particular, a norma L^2 será denotada por $\|\alpha\|_{L^2}^2 = \int_M \alpha \wedge * \alpha$.

Apêndice C

Geometria Riemanniana

Seja M uma variedade e $E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Como vimos, uma conexão em E é uma aplicação linear

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$$

satisfazendo a regra de Leibniz. Como vimos no apêndice A, $\Omega^1(M; E)$ corresponde às aplicações $C^\infty(M)$ -lineares $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(E)$ (a condição da aplicação ser alternada é vácuca nesse caso). Então, dados $s \in \Gamma(E)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que $\tilde{\nabla}_X s \doteq (\nabla s)X \in \Gamma(E)$ e $\tilde{\nabla}_{fX} s = f\tilde{\nabla}_X s$, onde $f \in C^\infty(M)$. Além disso, a regra de Leibniz nos dá que

$$(\nabla f s)X = df(X)s + f(\nabla s)X$$

Ou seja, como $X(f) = df(X)$, obtemos

$$\tilde{\nabla}_X f s = X(f)s + f\tilde{\nabla}_X s$$

Na literatura, muitas vezes, uma conexão no fibrado vetorial é apresentada como um mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ bilinear que é $C^\infty(M)$ -linear na primeira entrada e satisfaz $\nabla_X f s = X(f)s + f\nabla_X s$ (como $\tilde{\nabla}$ definida acima). Em particular. Claramente essas noções são equivalentes através de $\tilde{\nabla}_X s = (\nabla s)X$. Denotaremos ambas pelo mesmo símbolo ∇ e o contexto deixará claro qual dos mapas estamos tomando.

Considere agora o fibrado tangente $E = TM$. Uma conexão em M (i.e., em TM) é um mapa

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

Em particular, é comum chamar $\nabla_X Y$ de *derivada covariante de Y na direção de X* .

Uma conexão ∇ em M induz uma conexão em cada fibrado vetorial $T_s^r(M) \longrightarrow M$, que, por abuso de notação, denotaremos também por ∇ . Esta conexão é única e pode ser obtida pedindo que

1. Em TM , a conexão concorda com a conexão dada
2. Para funções $f \in C^\infty(M)$ (i.e., $T_0^0(M)$), $\nabla_X f = X(f)$
3. Para campos tensoriais quaisquer, F e G , vale a regra do produto com respeito ao produto tensorial desses campos

$$\nabla_X(F \otimes G) = \nabla_X F \otimes G + F \otimes \nabla_X G$$

4. ∇ comuta com a contração entre campos de tensores.

Pelo item 4, se $\omega \in \Omega^1(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, devemos ter $\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)Y + \omega(\nabla_X Y)$ e como $\omega(Y) \in C^\infty(M)$, $(\nabla_X \omega)Y = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$. Aplicando as propriedades acima, chegamos que para um (r,s) -campo tensorial F , e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X F)(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s) &= X(F(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r F(\omega_1, \dots, \nabla_X \omega_i, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s F(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s) \end{aligned}$$

onde, os $\omega_i \in \Omega^1(M)$, $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$.

Aqui, vemos $F : \underbrace{\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M)}_r \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_s \longrightarrow C^\infty(M)$, $C^\infty(M)$ -linear em cada uma das entradas. Note que ∇ em 1-formas ((0,1) campos tensoriais) é $C^\infty(M)$ -linear na primeira entrada e assim ∇ é $C^\infty(M)$ -linear na primeira entrada para campos de tensores gerais, pela fórmula anterior. Além disso, se $f, g \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, $(fX)(g) = dg(fX) = f dgX = fX(g)$ e $X(fg) = d(fg)X = df(gX) + fdgX = gX(f) + fX(g)$. Portanto, $\nabla_X fF = X(f)F + f\nabla_X F$ e ∇ , pela fórmula deduzida, é de fato uma conexão em $T_s^r(M)$. Como $\nabla_X F$ foi unicamente deduzido pelas condições pedidas, temos que, esta é a única conexão satisfazendo essas propriedades.

Observação C.0.4. Se F é um (r,s) campo tensorial, $\nabla F \in \Omega^1(M; T_s^r(M))$. Ou seja, $\nabla F : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(T_s^r(M))$, $C^\infty(M)$ -linear. Mas, $\Gamma(T_s^r(M)) = \mathfrak{X}(M)^{\otimes r} \otimes \Omega^1(M)^{\otimes s}$ e o fato da

aplicação ser $C^\infty(M)$ -linear, nos permite pensar em $\nabla F \in \Gamma(T_{s+1}^r(M))$, i.e., um $(r, s+1)$ campo tensorial. Mais explicitamente,

$$\nabla F(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s, X) = \nabla_X F(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s)$$

onde os $\omega_i \in \Omega^1(M)$ e $X, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$.

Considere agora uma métrica riemanniana g em M . Um célebre teorema devido a John Nash [38] diz que, dada uma variedade riemanniana (M, g) , existe um mergulho isométrico $i : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^N, \bar{g})$ (i.e., i é mergulho e $g = i^*\bar{g}$) para algum N . Aqui, se $(x_1, \dots, x_N)$ são as coordenadas de $\mathbb{R}^N$, $\bar{g} = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_N \otimes dx_N$. No espaço euclidiano temos uma conexão canônica dada por $\bar{\nabla}_X Y = \sum_{i=1}^N X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$, onde $Y = \sum_{i=1}^N Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Isso induz uma conexão em M tomando as projeções ortogonais de $\bar{\nabla}_X Y$ em TM , onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ foram estendidos de maneira arbitrária a $\mathbb{R}^N$. Essa conexão em M , ∇ , é compatível com a métrica, ou seja,

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

e é sem torção, no sentido que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

É um resultado célebre de geometria riemanniana que, dada uma variedade riemanniana (M, g) , existe uma única conexão em M compatível com a métrica e sem torção. Esta é a chamada *conexão de Levi-Civita*.

Observação C.0.5. Como vimos anteriormente, $(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$. Portanto, a compatibilidade de uma conexão ∇ com a métrica equivale a $\nabla g = 0$ (i.e., que o tensor métrica seja paralelo à conexão).

Considere então (M, g) munida da conexão de Levi-Civita ∇ . Assim como feito para fibrados tensoriais, uma conexão em M também induz, de maneira natural, conexões nos fibrados das potências exteriores. Em particular, se $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X \alpha(Y_1, \dots, Y_k) = X(\alpha(Y_1, \dots, Y_k)) - \sum_{i=1}^k \alpha(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k)$$

Mas, como vimos no apêndice A,

$$d\alpha(Y_0, \dots, Y_k) = \sum_{i=0}^k Y_i(\alpha(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_k)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_k)$$

Se ∇ é a conexão de Levi-Civita, temos, em particular, que $[Y_i, Y_j] = \nabla_{Y_i} Y_j - \nabla_{Y_j} Y_i$. Daí, notando que se $i < j$, vale

$$\nabla_{Y_i} \alpha(Y_0, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, Y_k) = Y_i(\alpha(Y_0, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, Y_k)) - \sum_{j=1}^k \alpha(Y_0, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, \nabla_{Y_i} Y_j, \dots, Y_k)$$

e podemos concluir que

$$d\alpha(Y_0, \dots, Y_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \nabla_{Y_i} \alpha(Y_0, \dots, \widehat{Y_i}, \dots, Y_k)$$

Apêndice D

Sobre o fibrado vetorial $\mathfrak{g}_E$

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e $E = P \times_{\rho} V$ o fibrado vetorial associado à representação $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. Temos um mapa natural de fibrados (vetoriais)

$$\Xi : \mathfrak{g}_P \longrightarrow \text{End}(E)$$

Este deve ser dado, para cada $m \in M$, por uma aplicação linear

$$\Xi_m : (\mathfrak{g}_P)_m \longrightarrow \text{End}(E_m)$$

Seja então, $[p, \varphi(p)] \in (\mathfrak{g}_P)_m$ (i.e., $\pi(p) = m$ e $\varphi(p \cdot g) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\varphi(p))$). Defina

$$\begin{aligned} \Xi_m([p, \varphi(p)]) : E_m &\longrightarrow E_m \\ [p, v] &\mapsto [p, d\rho(e)(\varphi(p))v] \end{aligned}$$

Note que, se este mapa estiver bem definido, temos imediatamente que $\Xi_m([p, \varphi(p)]) \in \text{End}(E_m)$ e $\Xi_m \in \text{Hom}((\mathfrak{g}_P)_m, \text{End}(E_m))$ e assim Ξ é, de fato, um mapa entre fibrados. Vamos ver que tal aplicação está bem definido.

Considere $[p \cdot g, \varphi(p \cdot g)] = [p, \varphi(p)]$. Então,

$$\begin{aligned} \Xi_m([p \cdot g, \varphi(p \cdot g)])([p, v]) &= \Xi_m([p \cdot g, \varphi(p \cdot g)])([p \cdot g, \rho(g^{-1})v]) \\ &= [p \cdot g, d\rho(e)(\text{Ad}_{g^{-1}}\varphi(p))\rho(g^{-1})v] \\ &= [p, \rho(e)d\rho(e)(\text{Ad}_{g^{-1}}\varphi(p))\rho(g^{-1})v] \end{aligned}$$

Mas, $\rho(e)d\rho(e)(\text{Ad}_{g^{-1}}\varphi(p))\rho(g^{-1}) = C_{\rho(g)}d\rho(e)(\text{Ad}_{g^{-1}}\varphi(p))$. Como $\rho(g) \in GL(V)$, temos que $C_{\rho(g)} = dC_{\rho(g)}(e)$ e assim, pela regra da cadeia, $\rho(e)d\rho(e)(\text{Ad}_{g^{-1}}\varphi(p))\rho(g^{-1})v = d(C_{\rho(g)} \circ \rho \circ C_{g^{-1}})(e)(\varphi(p))v$. Agora, $C_{\rho(g)} \circ \rho \circ C_{g^{-1}} : h \in G \mapsto \rho(g)\rho(g^{-1}hg)\rho(g^{-1}) = \rho(h)$. Portanto, $\Xi_m([p \cdot g, \varphi(p \cdot g)]) = \Xi_m([p, \varphi(p)])$.

Nesse trabalho, optamos por trabalhar no âmbito mais geral dos fibrados principais. Muitas vezes na literatura, no entanto, a teoria de calibre é desenvolvida em fibrados vetoriais, cujos grupos de estrutura foram reduzidos a um grupo de Lie de matrizes G . Nessa formulação, o fibrado vetorial é o associado ao principal, via a representação natural de inclusão. Nesse caso, a imagem do fibrado de álgebras de Lie (inclusão) pelo mapa acima é usualmente denotada por $\mathfrak{g}_E$ (i.e., $\Xi(\mathfrak{g}_P) \doteq \mathfrak{g}_E$).

Em particular, a curvatura $\mathcal{F}_\omega \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$ pode ser vista como $\mathcal{F}_\omega \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_E)$. Isso condiz com o fato da curvatura em fibrados vetoriais poder ser vista localmente como uma matriz de 2-formas locais, uma vez que $\mathfrak{g}_E \subseteq \text{End}(E)$.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison–Wesley, 1994.
- [2] Atiyah, M., Drinfeld, V., Hitchin, N., Manin, Yu, *Construction of instantons*, Phys. Lett. 65A (1978) 185-187.
- [3] M.F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills Fields*, Accademia Nazionale Dei Lincei Scuola Normale Superiore (1979).
- [4] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, I.M. Singer, *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 362, 425-61 (1978).
- [5] M. Atiyah, R. Bott. *The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces*. Philosophical Transactions of the Royal Society A, Mathematical, Physical and Engineering Sciences, March 1983.
- [6] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques, 68 (1988), 175-186.
- [7] J. Baez, J. Munian, *Gauge fields, knots and gravity*, Singapore: World Scientific, 1994. 465 p. (Series on knots on everything, 4).
- [8] R. Bott, L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1995.
- [9] A. Cannas, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer-Verlag, 2001.
- [10] B. Charbonneau, *Analytic Aspects of Periodic Instantons*, thesis, 2004.
- [11] S. Donaldson, P. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, 1990.

- [12] S. Donaldson, *Instantons and Geometric Invariant Theory*, Comm. Math. Phys., 93 (1984) 453-460.
- [13] P.M.N. Feehan, *Geometry of the Moduli Space of Self-Dual Connections over the Four-Sphere*, Columbia University (1992).
- [14] D.S. Freed, K.K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds*, Springer-Verlag (1984).
- [15] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag (1972).
- [16] W.H. Greub, *Multilinear Algebra*, Springer-Verlag (1967).
- [17] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.
- [18] M. Gross, D. Huybrechts, D. Joyce, *Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Springer-Verlag, 2003.
- [19] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.
- [20] N. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Communications in Mathematical Physics 108 (4): 535–589 (1987).
- [21] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc., 1987.
- [22] D. Huybrechts, *Complex Geometry, an introduction*. Universitext. Springer, (2004).
- [23] D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford University Press, 2000.
- [24] D. Joyce, *Riemannian holonomy groups and calibrated geometry*, Oxford University Press, 2007.
- [25] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Princeton University Press, New Jersey, 1987.
- [26] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry, vol. 1*, Wiley, 1963.
- [27] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag (2003).
- [28] J.M. Lee, *Manifolds and differential geometry*, Providence, RI: American Mathematical Society, c2009.

- [29] J.M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag (1997).
- [30] A. Maciocia, *Metrics on the Moduli Spaces of Instantons Over Euclidean 4-Space*, Commun. Math. Phys, 1991,
- [31] R. McLean, *Deformations of calibrated submanifolds*, Communications in Analysis and Geometry, 6 (1998), 705-747.
- [32] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [33] R. Friedman, J. Morgan, *Gauge theory and the topology of four-manifolds*, American Mathematical Society, 1998.
- [34] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Soc., 2001.
- [35] G. Naber, *Topology, Geometry and Gauge Fields: Interactions*, Springer-Verlag, New York, Berlin.
- [36] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Taylor and Francis Group, Second Edition (2003).
- [37] Nakajima, H., *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Providence: American Mathematical Society, 1999.
- [38] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math., 63:20-63, 1956.
- [39] L. Sadun, J. Segert, *Non-self-dual Yang-Mills connections with nonzero Chern number*, Bull. Amer. Math. Soc., Providence, v. 24, n.1, p.163 - 170, Jan 1991.
- [40] S. Salamon, *Riemannian geometry and holonomy groups*, Pitman Research Notes in Mathematics, 1989.
- [41] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Volume Two*, Publish or Perish, Third Edition (1999).
- [42] N. Steenrod, *Groupes de Lie et puissances réduits*, American Journal Mathematics, 75, pages 409-448 (1953) .
- [43] R. O. Wells, Jr., *Differential Analysis on Complex Manifolds*, 2nd edition, New York: Springer, 1980. 260 p. (Graduate texts in mathematics, 65).