Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Propriedades homológicas de grupos pro-p

por

Aline G. S. Pinto [†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientadora: **Prof. Dra. Dessislava H. Kochloukova**

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP.

Propriedades homológicas de grupos pro-p

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Aline Gomes da Silva Pinto** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 22 de Julho de 2005.

Prof. Dra. Dessislava H. Kochloukova
(Orientadora)

Banca examinadora:

Prof. Dra. Dessislava H. Kochloukova.

Prof. Dr. Antônio José Engler.

Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho.

Prof. Dr. Pavel Zalesski.

Prof. Dr. Said Najati Sidki.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

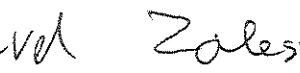
Tese de Doutorado defendida em 22 de julho de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

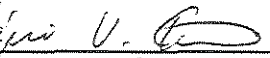
Prof (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof. (a). Dr (a). SAID NAJATI SIDKI



Prof. (a). Dr (a). PAVEL ZALESSKI



Prof. (a) Dr. (a) FLÁVIO ULHOA COELHO

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Pinto, Aline Gomes da Silva

P658p Propriedades homológicas de grupos pro-p / Aline Gomes da Silva Pinto -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientadora : Dessislava Hristova Kochloukova

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos profinitos. 2. Teoria dos grupos. 3. Álgebra homológica. I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Homological properties of pro-p groups.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Profinite groups. 2. Group theory. 3. Homological algebra.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dra. Dessislava H. Kochloukova (IME-UNICAP)
Prof. Dr. Antônio José Engler (IME-UNICAP)
Prof. Dr. Said Najati Sidki (UNB-Brasilia)
Prof. Dr. Pavel Zalesski (UNB-Brasilia)
Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (USP-SP)

Data da defesa: 22/07/2005

Dedico este trabalho aos meus pais e ao Marcelo

AGRADECIMENTOS

- Ao Marcelo que esteve ao meu lado participando de todos os momentos.
- Aos meus pais que sempre me incentivaram, lutaram e se sacrificaram pela minha formação.
- À professora Dessislava, pela orientação, acompanhando de perto todos os passos, sugerindo os temas e esclarecendo dúvidas.
- Aos professores da banca, em especial ao professor Pavel pelas correções e pelo seu incentivo.
- A todos os amigos, pelos momentos de descontração.
- A todos os professores e funcionários do IMECC.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, provamos dois resultados sobre propriedades homológicas de grupos pro-p. O primeiro responde positivamente à conjectura de J. King que afirma que, se G é um grupo pro-p metabeliano finitamente gerado e m um inteiro positivo, então G mergulha como subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano de tipo homológico FP_m. O segundo resultado caracteriza módulos pro-p B de tipo homológico FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$, onde G é um grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado, dado pela extensão de um grupo pro-p abeliano A por um grupo pro-p abeliano Q, e B é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado que é visto como um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p via a projeção de $G \to Q$. A caracterização é dada em termos do invariante para grupos pro-p metabelianos introduzido por J. King [15] e é uma generalização do caso onde $B = \mathbb{Z}_p$ é o anel de inteiros p-ádicos considerado como G-módulo trivial, que dá a classificação dos grupos pro-p metabelianos de tipo homológico FP_m, provado por D. Kochloukova [18].

ABSTRACT

In this work, we prove two results about homological properties of metabelian pro-p groups. The first one answers positively a conjecture suggested by J. King that, if G is a finitely generated metabelian pro-p group and m a positive integer, G embeds in a metabelian pro-p group of homological type FP_m. The second result caracterize the modules B of homological type FP_m over $[[\mathbb{Z}_pG]]$, where G is a topologically finitely generated metabelian pro-p group that is an extension of A by Q, with A and Q abelian, and B is a finitely generated pro-p $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-module that is viewed as a pro-p $[[\mathbb{Z}_pG]]$-module via the projection $G \longrightarrow Q$. The characterization is given in terms of the invariant introduced by J. King [15] and is a generalization of the case when $B = \mathbb{Z}_p$ is considered as a trivial $[[\mathbb{Z}_pG]]$-module, that gives the classification of metabelian pro-p groups of type FP_m, proved by D. Kochloukova [18].

CONTEÚDO

Introdução

Neste trabalho estudamos propriedades homológicas de grupos pro-p metabelianos finitamente gerados e de módulos pro-p sobre tais grupos. A motivação dos problemas estudados vem de perguntas semelhantes dentro da categoria de grupos abstratos.

Um grupo abstrato G é metabeliano se existe uma seqüência exata curta de grupos

$$0 \to A \to G \to Q \to 0$$

com A e Q abelianos. Como A mergulha como um subgrupo normal abeliano em G, temos que G age via conjugação em A. Como a ação conjugação de A nele mesmo é trivial, segue que A é um Q-módulo via conjugação em G. Além disso, é bem conhecido que G é finitamente gerado se, e somente se, Q é um grupo abeliano finitamente gerado e A é finitamente gerado como um Q-módulo.

O estudo sobre grupos abstratos metabelianos finitamente apresentáveis ganhou um novo ponto de vista quando, em 1980, Bieri e Strebel [6] definiram um novo invariante para grupos metabelianos finitamente gerados. O invariante de Bieri e Strebel Σ_A está associado ao Q-módulo finitamente gerado A. A partir deste invariante, os autores estabeleceram uma condição necessária e suficiente para determinar, dentre os grupos G metabelianos finitamente gerados, quais eram finitamente apresentáveis [6, Teorema A]. Os métodos utilizados também estabeleceram quando G é finitamente apresentável em termos de suas propriedades homológicas. Um grupo G é de tipo homológico FP_m (sobre $\mathbb{Z}$) se o anel de inteiros $\mathbb{Z}$ considerado como G-módulo trivial possui uma resolução projetiva, na categoria de G-módulos abstratos, tal que os módulos em dimensões menor ou igual a m são finitamente gerados.

Bieri e Strebel provaram que um grupo metabeliano G é finitamente apresentável se, e somente se, G é de tipo FP_2 [6, Teorema 5.4].

Posteriormente, o invariante de Bieri e Strebel foi utilizado para o estudo de propriedades homológicas FP_m de grupos metabelianos, para m arbitrário, por Bieri e Groves [3]. Este estudo deu origem à conhecida Conjectura FP_m.

Conjectura FP_m [3]. Seja $A \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$ uma seqüência exata curta de grupos (abstratos) com A e Q abelianos e G finitamente gerado. Então G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, A é "m-tame" como $\mathbb{Z}Q$-módulo.

A condição "m-tame" é dada em termos do invariante Σ_A de Bieri e Strebel que, para $m = 2$, reduz-se à mesma estabelecida para garantir que G é finitamente apresentável. A Conjectura FP_m foi sugerida em 1982 por Bieri e Groves e ainda é um problema em aberto, estando já resolvida em alguns casos particulares [6, 5, 1, 16].

Em sua tese de doutorado [12] Jeremy King estudou, entre outras coisas, de que forma resultados conhecidos sobre grupos abstratos finitamente apresentáveis se comportavam dentro da categoria de grupos pro-p como, por exemplo, a relação entre ser finitamente apresentável e propriedades homológicas, teoremas de imersão e o invariante de Bieri e Strebel. Além disso, King estudou propriedades homológicas gerais de grupos pro-p e estabeleceu a versão pro-p da Conjectura FP_m. Em alguns casos ele provou teoremas análogos e em outros apareceram diferenças importantes.

Um grupo pro-p é um grupo topológico G dado pelo limite inverso de um sistema de p-grupos finitos, cada um equipado com a topologia discreta. Um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p é um grupo pro-p abeliano M junto com uma aplicação contínua $[[\mathbb{Z}_pG]] \times M \to M$ cuja restrição $\mathbb{Z}_p \times M \to M$ é dada pela ação natural de $\mathbb{Z}_p$ em M. Aqui, $[[\mathbb{Z}_pG]]$ é a álgebra de grupo completa de G sobre o anel de inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ que pode ser definida como o limite inverso de álgebras de grupo abstratas (veja Seção 1.2). Um grupo pro-p G é de tipo homológico FP_m (sobre $\mathbb{Z}_p$) se $\mathbb{Z}_p$, considerado como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p via a ação trivial de G, possui uma resolução projetiva, dentro da categoria de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p, tal que os módulos em dimensão menor ou igual a m são finitamente gerados. Mais detalhes sobre a categoria de grupos pro-p e suas propriedades homológicas encontram-se no Capítulo 1.

A principal diferença, sobre as propriedades homológicas, entre as categorias de grupos pro-p e grupos abstratos é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 1.26 [14]. Seja G um grupo pro-p e m um inteiro positivo (ou $m = \infty$). Suponha

que S é um anel pro-p, Noetheriano, quociente de $[[\mathbb{Z}_pG]]$. Então G é de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, o i-ésimo grupo de homologia $H_i(G,S)$ de G com coeficientes em S é finitamente gerado como um S-módulo pro-p à direita para $i \leq m$ (para todo i se $m = \infty$).

No caso de grupos abstratos, a condição sobre os grupos de homologia no Teorema 1.26 é necessária, conforme provado por Bieri e Groves em [3]. Contudo, a condição não é suficiente mesmo no caso de grupos abstratos metabelianos. Considere, por exemplo, o grupo dado pelo produto semi-direto $\langle t \rangle \ltimes \mathbb{Z}[1/6]$, onde t tem ordem infinita e age em $\mathbb{Z}[1/6]$ por multiplicação por $2/3$. Temos que $H_1(G,\mathbb{Z})$ é isomorfo a $G/[G,G]$, que neste exemplo é cíclico infinito, e $H_2(G,\mathbb{Z})$ é o multiplicador de Schur de G, que neste caso é trivial, mas G não é de tipo FP_2 sobre $\mathbb{Z}$ [30, pg. 269].

Um grupo pro-p G é topologicamente gerado por um subconjunto X se o subgrupo abstrato gerado por X é denso em G. Se existe um tal subconjunto X finito, G é dito topologicamente finitamente gerado. As dimensões de $H_1(G,\mathbb{F}_p)$ e $H_2(G,\mathbb{F}_p)$ são o número minimal de geradores topológicos e relações de G, respectivamente (veja Corolário 1.25). Então segue do Teorema 1.26 que G é finitamente apresentável se, e somente se, G é de tipo homológico FP_2 sobre $\mathbb{Z}_p$ (Corolário 1.27). Este resultado é verdadeiro para grupos abstratos somente na direção "$\Leftarrow$", já que segue da versão abstrata do Teorema 1.26. Entretanto se exigirmos que G seja metabeliano, Bieri e Strebel [6, Teorema 5.4] provaram que o resultado também é verdadeiro na outra direção. Bestvina e Brady [2] mostraram que existem grupos abstratos (não metabelianos) de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}$ que não são finitamente apresentáveis.

Um grupo pro-p G é metabeliano se possui um subgrupo normal fechado abeliano A tal que $Q = G/A$ também é abeliano ou, equivalentemente, existe uma seqüência exata de grupos pro-p

$$0 \to A \to G \to Q \to 0$$

com homomorfismos contínuos tal que A e Q são abelianos. Temos que um grupo pro-p metabeliano G é topologicamente finitamente gerado se, e somente se, Q é um grupo pro-p abeliano finitamente gerado e A é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p (veja Lema 1.32).

Baseando-se no invariante de Bieri e Strebel, King definiu um invariante para grupos pro-p metabelianos topologicamente finitamente gerados (veja Seção 1.6). Seja $\mathbb{F}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}_p$ e $\mathbb{F}[[T]]$ a álgebra das séries de potências formais com grupo de unidades $\mathbb{F}[[T]]^\times$. Seja Q um grupo pro-p abeliano topologicamente finitamente gerado e A um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo

pro-p finitamente gerado. O invariante de King é definido por

$$\Delta_A(Q) = \left\{v \in \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{F}[[T]]^\times) \mid Ann_{[[\mathbb{Z}_pQ]]}(A) \leq \mathrm{Ker}\overline{v}\right\} \cup \{1\},$$

onde $\overline{v} : [[\mathbb{Z}_pQ]] \to \mathbb{F}[[T]]$ é a extensão do homomorfismo contínuo $v : Q \to \mathbb{F}[[T]]^\times$ dada pela propriedade universal da álgebra de grupo completa $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ (Definição 1.9). Propriedades semelhantes às do invariante de Bieri e Strebel foram provadas para $\Delta_A(Q)$, mas também apareceram diferenças. O invariante de grupos pro-p não possui nenhuma geometria, enquanto o invariante de Bieri e Strebel tem muitas propriedades geométricas. Em geral, toda a geometria dos métodos existentes no caso discreto é perdida no caso de grupos pro-p. Isso estabelece uma grande diferença entre as duas categorias, embora normalmente os métodos homológicos traduzam-se do caso discreto para o caso pro-p.

Devido às diferenças entre as duas categorias, problemas que na categoria de grupos abstratos ainda não foram resolvidos têm se revelado possíveis de resolver no caso de grupos pro-p. Um exemplo importante é a Conjectura FP_m. Sua versão pro-p foi sugerida por King em sua tese de doutorado em 1995 e foi completamente resolvida por Kochloukova em 2000 [18, Teorema D], classificando assim os grupos pro-p metabelianos de tipo FP_m.

Teorema 1.42 [18, Teorema D]. Suponha que $1 \to A \to G \to Q \to 1$ é uma seqüência exata de grupos pro-p, onde G é topologicamente finitamente gerado, A e Q são abelianos. Considere A como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p via conjugação em G. Então são equivalentes:

(i) G é de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$;

(ii) o m-ésimo produto tensorial completo $\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p} A$ de A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q;

(iii) a m-ésima potência exterior completa $\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}(A)$ de A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q;

(iv) o m-ésimo produto tensorial simétrico completo $\widehat{S}^m_{\mathbb{Z}_p}(A)$ de A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q;

(v) A é "m-tame" sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]$, isto é, se $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \Delta_A(Q)$ satisfazem $v_1v_2\cdots v_m = 1$ então $v_1 = v_2 = \cdots = v_m = 1$.

Os resultados apresentados nesta tese estão exatamente nesta direção. Nos propomos a resolver, na categoria de grupos pro-p, dois problemas formulados inicialmente para grupos abstratos e que ainda não foram totalmente resolvidos nesta categoria.

No Capítulo 1 apresentamos as definições e os resultados sobre propriedades homológicas de grupos pro-p provados por King e Kochloukova [13, 14, 15, 18]. A proposta do capítulo é juntar definições e resultados importantes para a leitura dos capítulos seguintes, onde apresentamos nossos resultados.

No Capítulo 2 provamos um resultado de imersão de grupos pro-p metabelianos. King provou em sua tese de doutorado [12] que todo grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado G mergulha em um grupo pro-p metabeliano finitamente apresentável (veja Teorema 1.41) e conjecturou que, para cada m fixado, G mergulha em um grupo pro-p de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$. O Capítulo 2 é dedicado à prova desta conjectura.

Teorema A. *Seja G um grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado. Então, para cada número natural m, G mergulha como subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$.*

No caso de grupos abstratos é ainda um problema em aberto se todo grupo metabeliano finitamente gerado G mergulha em um grupo metabeliano de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}$. Atualmente isso é válido para $m = 4$ [11, Corolário 1] e está provado que um grupo abstrato metabeliano finitamente gerado G mergulha em um quociente de um grupo metabeliano de tipo FP_m [11, Teorema 2]. No caso de álgebras de Lie essa propriedade está completamente entendida. Uma álgebra de Lie metabeliana finitamente gerada sobre um corpo k mergulha em uma álgebra de Lie metabeliana de tipo FP_m se, e somente se, a característica p de k é 0 ou $0 \leq m < p$ [11, Teorema 1].

É interessante observar que nossa prova para o Teorema A não está contida na categoria de grupos pro-p. Apesar de o invariante $\Delta_A(Q)$ capturar todas as informações necessárias para estabelecer o tipo homológico de um grupo pro-p metabeliano finitamente gerado, fazer cálculos diretos com o invariante é bastante difícil. Nossa prova evita tais cálculos utilizando alguns resultados conhecidos que relacionam valorizações com produtos tensoriais abstratos finitamente gerados [4]. Tais resultados são apresentados na Seção 2.1, bem como nosso primeiro resultado auxiliar para a prova do Teorema A (veja Teorema 2.5). Voltamos para os grupos pro-p através de alguns sistemas e limites inversos específicos que apresentamos na Seção 2.2 (Lema 2.8) a qual é dedicada à prova do Teorema A. Os resultados do Capítulo 2 estão submetidos para publicação [21].

Seja G um grupo pro-p e B um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p. Dizemos que B é de tipo homológico FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se B tem uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva onde todos os módulos em

dimensão menor ou igual a m são finitamente gerados. No Capítulo 3 damos uma resposta positiva para a versão pro-p de uma conjectura que pode ser vista como uma generalização da Conjectura FP_m e que classifica o tipo homológico de certos módulos pro-p sobre grupos pro-p metabelianos finitamente gerados. Estamos interessados em módulos pro-p B sobre a álgebra de grupo completa $[[\mathbb{Z}_pG]]$, onde G é um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado que é visto como uma extensão de A por Q, com A e Q abelianos, e B é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado que é visto como um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p via a projeção $G \to Q$. A classificação é dada em termos do invariante $\Delta_*(Q)$ associado a um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado.

A Conjectura FP_m generalizada foi primeiramente sugerida para o caso de módulos sobre grupos abstratos metabelianos finitamente gerados [17, Conjectura 7]. Esse caso está provado somente para $m = 1$ [17] e $m = 2$ [20] com G sendo uma extensão cindida ("split") de grupos abelianos. O mesmo problema foi também formulado e provado, para qualquer m, para módulos sobre álgebras de Lie que são extensões cindidas de um ideal abeliano por uma subálgebra de Lie abeliana [19]. Nosso resultado principal é a prova do caso pro-p sem nenhuma restrição no tipo de extensão.

Teorema B: *Seja* $1 \to A \to G \to Q \to 1$ *uma seqüência exata de grupos pro-p tais que* A *e* Q *são abelianos e* G *é finitamente gerado. Seja* B *um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado visto como um* $[[\mathbb{Z}_pG]]$*-módulo pro-p via o epimorfismo* $G \to Q$*. Então são equivalentes:*

(i) B *é de tipo homológico* FP_m *sobre* $[[\mathbb{Z}_pG]]$*;*

(ii) $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ *é um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de* Q*;*

(iii) $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ *é um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de* Q*;*

(iv) *se* $v_1 \in \Delta_B(Q)$ *e* $v_2, \ldots, v_{m+1} \in \Delta_A(Q)$ *são tais que* $v_1v_2\cdots v_{m+1} = 1$*, então* $v_1 = v_2 = \cdots = v_{m+1} = 1$*.*

Note que, no Teorema B, o caso $B = \mathbb{Z}_p$ é exatamente a classificação dos grupos pro-p metabelianos finitamente gerados de tipo FP_m que enunciamos no Teorema 1.42. O caso onde B é zero é degenerado e vamos excluí-lo. É importante mencionar que, apesar de nosso teorema ser mais geral que o Teorema 1.42, usamos na nossa prova o fato que o resultado vale para $B = \mathbb{Z}_p$.

Destacamos também que se B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$, a equivalência de (i) e (iv) no Teorema B implica que, quando m elementos de $\Delta_A(Q)$ têm produto trivial, cada um é trivial (i.e., A é "m-tame"). Então podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário C: *Seja* $1 \to A \to G \to Q \to 1$ *uma seqüência exata de grupos pro-p tais que* A *e* Q *são abelianos e* G *é finitamente gerado. Seja* B *um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado visto como um* $[[\mathbb{Z}_pG]]$*-módulo pro-p via a projeção natural* $G \to Q$*. Se* B *é de tipo homológico* FP_m *sobre* $[[\mathbb{Z}_pG]]$*, então* G *é de tipo homológico* FP_m *sobre* $\mathbb{Z}_p$*.*

A prova do Teorema B é feita em vários passos. Em um dos passos (veja Teorema 3.4), obtemos a seguinte equivalência auxiliar: B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se, e somente se, $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B, \mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulo pro-p, para todo $i \leq m$. Este resultado é uma importante ferramenta para a prova do Teorema B e é uma generalização do caso $B = \mathbb{Z}_p$, onde $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p) = H_i(A, \mathbb{F}_p)$, que enunciamos no Teorema 1.30. Em outro passo, aplicamos o Teorema dos Coeficientes Universais para obter uma relação entre $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B, \mathbb{F}_p)$ e $H_i(A, \mathbb{Z}_p)$. Essa relação e alguns resultados sobre a estrutura do módulo $H_i(A, \mathbb{Z}_p)$ enunciados na Seção 1.5, nos permite verificar que (i) implica em (iii) e que (ii) implica em (i) (veja Teoremas 3.5 e 3.9).

O Capítulo 3 é organizado em duas seções. Na Seção 3.1 apresentamos algumas definições básicas e provamos resultados sobre homologia de módulos pro-p, inclusive a equivalência auxiliar acima mencionada. Por fim, a Seção 3.2 é dedicada à prova do Teorema B. Os resultados apresentados no Capítulos 3 estão submetidos para publicação [26].

CAPÍTULO 1

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo fazemos uma coletânea das definições e dos resultados conhecidos que serão importantes para a leitura dos Capítulos 2 e 3. Começamos com definições básicas como limites inversos e grupos profinitos e terminamos com os teoremas de classificação dos grupos pro-p metabelianos de tipo homológico FP_m.

Mesmo nosso estudo sendo restrito a grupos pro-p, as duas primeiras seções são sobre grupos e módulos profinitos. Isso porque, além de simplificar a notação, julgamos que a restrição à categoria de grupos e módulos pro-p é irrelevante neste ponto. Essa restrição é feita à partir da Seção 1.3.

As principais referências para a escrita deste capítulo foram os livros [28] e [31], a tese de doutorado de J. King [12], cujos resultados foram publicados em [13], [14] e [15], e o artigo de Kochloukova [18] onde foi provada a versão pro-p da Conjectura FP_m.

1.1 Grupos e anéis profinitos

As definições de grupos e anéis profinitos são baseadas no conceito de *limite inverso*. Vamos então relembrar brevemente este conceito e algumas de suas propriedades.

Um *conjunto dirigido* é um conjunto não vazio parcialmente ordenado $(I, \preceq)$ com a propriedade que para quaisquer $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i, j \preceq k$. Um *sistema inverso* de espaços (grupos, anéis) topológicos sobre I é uma família de espaços (grupos, anéis) topológicos $\{X_i \mid i \in I\}$, e uma família de aplicações contínuas (homomorfismos contínuos)

$\pi_{ij} : X_i \to X_j$ definidas quando $i \succeq j$, satisfazendo as condições naturais de compatibilidade $\pi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$ e $\pi_{ij}\pi_{jk} = \pi_{ik}$, sempre que $i \succeq j \succeq k$.

Seja Y um espaço (grupo, anel) topológico, $\{X_i, \pi_{ij}, I\}$ um sistema inverso sobre um conjunto dirigido I e $\psi_i : Y \to X_i$, para cada $i \in I$, aplicações contínuas (homomorfismos contínuos). As aplicações ψ_i são *compatíveis* se $\pi_{ij}\psi_i = \psi_j$ quando $i \succeq j$. Um espaço (grupo, anel) topológico X junto com aplicações contínuas (homomorfismos contínuos) compatíveis $\varphi_i : Y \to X_i$, $i \in I$, é um *limite inverso* do sistema inverso $\{X_i, \pi_{ij}, I\}$ se a seguinte propriedade universal é satisfeita:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\exists!\ \psi}{\dashleftarrow} & Y \\ {\scriptstyle \varphi_i}\downarrow & \swarrow_{\psi_i} & \\ X_i & & \end{array}$$

se Y é um espaço (grupo, anel) topológico e $\psi_i : Y \to X_i$, $i \in I$, é um conjunto de aplicações contínuas (homomorfismos contínuos) compatíveis, então existe uma única aplicação contínua (um único homomorfismo contínuo) $\psi : Y \to X$ tal que $\varphi_i\psi = \psi_i$, para todo $i \in I$.

O limite inverso X de um sistema inverso $\{X_i, \pi_{ij}, I\}$ existe e é único a menos de isomorfismo, podendo ser construído como o subespaço (subgrupo, subanel) do produto direto $\prod_{i\in I} X_i$, munido da topologia produto, formado pelos elementos $(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i$ tais que $\pi_{ij}x_i = x_j$, para todo $i \succeq j$, onde as aplicações (homomorfismos) $\varphi_i : X \to X_i$ são as restrições das projeções $\prod_{i\in I} X_i \to X_i$, para cada $i \in I$. Então X é denotado por $\varprojlim_{i\in I} X_i$ e as aplicações φ_i são omitidas. Temos que $X = \varprojlim_{i\in I} X_i$ é um subespaço (subgrupo, subanel) fechado de $\prod_{i\in I} X_i$. Se cada X_i é compacto e Hausdorff, então $\prod_{i\in I} X_i$ também é compacto (pelo teorema de Tychonoff) e Hausdorff. Assim, o mesmo é válido para X.

Definição 1.1. *Um grupo G é um* grupo profinito *se é um limite inverso $\varprojlim_{i\in I} G_i$ de grupos finitos, onde cada grupo G_i tem topologia discreta.*

Os grupos profinitos são caracterizados de várias maneiras, como podemos ver abaixo.

Teorema 1.2 ([28], 2.1.3). *Seja G um grupo topológico. Então são equivalentes:*

(i) *G é profinito;*

(ii) *G é compacto, Hausdorff e a identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas tais que $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = 1$ e cada U é um subgrupo normal aberto;*

(iii) *A identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas tal que cada $U \in \mathcal{U}$ é um subgrupo normal aberto de G e $G = \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} G/U$.*

Observe que um grupo discreto é profinito se, e somente se, é um grupo finito. Todo subgrupo aberto de um grupo profinito G é fechado. Além disso, um subgrupo fechado de um grupo profinito G é aberto se, e somente se, tem índice finito. Se H é um subgrupo fechado de G, então H é um grupo profinito com a topologia induzida. Se N é um subgrupo normal fechado de G, então G/N é um grupo profinito (com a topologia quociente) e o epimorfismo natural $G \to G/N$ é uma aplicação contínua aberta e fechada.

Completamentos. Exemplos naturais e importantes de grupos profinitos provém de completamentos de grupos abstratos. Seja $\mathcal{C}$ uma família não vazia de grupos finitos com a propriedade que, para todo $U_1, U_2 \in \mathcal{C}$, existe um grupo $V \in \mathcal{C}$ tal que $V \leq U_1 \cap U_2$ (por exemplo, se $\mathcal{C}$ é fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos finitos). Seja G um grupo abstrato e considere

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G) = \{N \lhd_f G \mid G/N \in \mathcal{C}\}$$

a coleção de todos os subgrupos normais de índice finito N em G tais que $G/N \in \mathcal{C}$ ordenado pela inclusão inversa: $M \preceq N$ se, e somente se, $N \leq M$. Note que $\mathcal{N}$ é não vazio, já que $G \in \mathcal{N}$. Se $M, N \in \mathcal{N}$ e $N \succeq M$, seja $\varphi_{NM} : G/N \to G/M$ o epimorfismo natural. Então $\{G/N, \varphi_{NM}\}$ é um sistema inverso de grupos em $\mathcal{C}$ e

$$G_{\widehat{\mathcal{C}}} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$$

é chamado o *completamento pro-$\mathcal{C}$ de G*. Assim, $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é um grupo profinito e por ser o limite inverso de grupos finitos em $\mathcal{C}$ é chamado de *grupo pro-$\mathcal{C}$*. Se $\mathcal{C}$ é a família de todos os grupos finitos, então $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é chamado de *completamento profinito* de G. Se p é um primo e $\mathcal{C}$ é a classe de todos os p-grupos finitos, então $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é chamado de completamento pro-p de G e é normalmente denotado por $G_{\widehat{p}}$.

O completamento pro-$\mathcal{C}$ é também caracterizado como segue [28, 3.2.1]. A aplicação $j : G \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ definida por $g \mapsto \prod_{N \in \mathcal{N}} Ng$ é um homomorfismo contínuo, onde G é munido da topologia pro-$\mathcal{C}$, ou seja, a topologia determinada por $\mathcal{N}$. Além disso, $j(G)$ é um subconjunto denso em $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ e a seguinte propriedade universal é satisfeita: se H é um grupo pro-$\mathcal{C}$ e $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo contínuo, existe um homomorfismo contínuo $\overline{\varphi} : G_{\widehat{\mathcal{C}}} \to H$ tal que $\overline{\varphi} j = \varphi$. O núcleo de j é $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$. Então, se $\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = 1$, temos que j é injetiva e podemos

considerar G como um subconjunto denso de $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ (o que justifica a palavra "completamento"). Neste caso, dizemos que G é *residualmente* $\mathcal{C}$.

Outra propriedade importante é o fato de o completamento pro-$\mathcal{C}$ ser um funtor da categoria de grupos discretos na categoria de grupos profinitos (veja [28, 3.2.3]). Assim, se $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos discretos e $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ e $H_{\widehat{\mathcal{C}}}$ são os completamentos pro-$\mathcal{C}$ de G e H, então existe um correspondente homomorfismo contínuo $\varphi_{\widehat{\mathcal{C}}} : G_{\widehat{\mathcal{C}}} \to H_{\widehat{\mathcal{C}}}$. O funtor completamento preserva epimorfismos, mas em geral não preserva monomorfismos. O seguinte lema dá uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra.

Lema 1.3 ([28], 3.2.6). *Seja $\mathcal{C}$ uma família de grupos finitos fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos finitos. Suponha que $K \leq G$ e seja $i : K \to G$ a aplicação inclusão. Então $i_{\widehat{\mathcal{C}}} : K_{\widehat{\mathcal{C}}} \to G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ é injetiva se, e somente se, a topologia pro-$\mathcal{C}$ de G induz em K sua topologia pro-$\mathcal{C}$, ou seja, para cada $M \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(K)$, existe $N \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(G)$ tal que $K \cap N \leq M$.*

Definição 1.4. *Um anel R é um* anel profinito *se é o limite inverso de anéis finitos (todos os anéis são assumidos com identidade e todos os homomorfismos de anéis levam identidades em identidades).*

Os anéis profinitos possuem caracterizações análogas às de grupos profinitos em termos dos seus ideais abertos.

Teorema 1.5 ([28], 5.1.2). *Seja R um anel topológico. São equivalentes:*

(i) *R é profinito;*

(ii) *R é compacto e Hausdorff;*

(iii) *R é compacto e o elemento 0 de R tem um sistema fundamental de vizinhanças formado pelos ideais abertos;*

(iv) *O elemento 0 de R admite um sistema fundamental $\{T_i \mid i \in I\}$ de vizinhanças abertas tal que cada T_i é um ideal aberto de R e $R = \varprojlim_{i \in I} R/T_i$;*

1.2 Módulos profinitos

No decorrer desta seção R denota um anel profinito.

Definição 1.6. *Um* R-módulo profinito à direita *é um grupo profinito abeliano* M *com uma aplicação contínua* $M \times R \to M$ *que satisfaz as propriedades usuais de um* R*-módulo abstrato.*

Todo R-módulo profinito M tem uma base de vizinhanças abertas do 0 formada pelos subgrupos abertos de M que são invariantes sob a ação de R, ou seja, formada pelos R-submódulos abertos. Na categoria de R-módulos profinitos todos os morfismos $f : M \to N$ entre R-módulos profinitos são homomorfismos contínuos com imagens fechadas, os quais vamos nos referir apenas como homomorfismos.

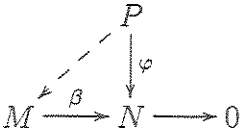
Seja X um subconjunto de um R-módulo profinito M. O R-submódulo fechado N *topologicamente gerado* por X é o fecho do R-submódulo abstrato gerado por X, ou seja, a interseção de todos os R-submódulos fechados de M que contém X. Se X é um conjunto finito, dizemos que N é (topologicamente) finitamente gerado. Neste caso, o seguinte lema diz que as definições de módulos profinitos topologicamente e abstratamente finitamente gerado coincidem.

Lema 1.7 ([31], 7.2.2). *Seja* R *um anel profinito,* M *um* R*-módulo profinito e* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *um subconjunto finito de* M*. Então o conjunto* $M_1 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \mid u_i \in R\}$ *é um submódulo fechado.*

Módulos profinitos livres. Uma aplicação f de um conjunto X em um módulo profinito M é dita 0-*convergente* se, para cada submódulo aberto N de M, o conjunto $\{x \in X \mid f(x) \notin N\}$ é finito. Um R-*módulo profinito livre* F em um conjunto X é um R-módulo profinito contendo X tal que a aplicação inclusão de X em F é 0-convergente e satisfaz a seguinte propriedade universal: cada aplicação 0-convergente de X em um R-módulo profinito M pode ser estendida unicamente a um homomorfismo de R-módulos profinitos de F em M.

O R-módulo profinito livre em X existe e é único a menos de isomorfismo, podendo também ser construído como o completamento do R-módulo livre abstrato em X (com respeito à familia de submódulos U de índice finito tais que $X \setminus U$ é finito) ou como o produto cartesiano de cópias de R indexadas pelos elementos de X ([31, 7.4.1]).

Módulos profinitos projetivos. Um R-módulo profinito P é *projetivo* se para todo diagrama



de R-módulos profinitos com β sobrejetivo, existe um homomorfismo $\theta : P \to M$ que faz o triângulo comutar, i.e., $\beta\theta = \varphi$.

Todo módulo profinito livre é projetivo [31, 7.4.2]. Além disso, os módulos profinitos projetivos são precisamente os "somandos diretos" dos módulos profinitos livres [31, 7.4.7]. Quando o anel profinito é *local*, ou seja, se possui um único ideal à direita aberto maximal (que é um ideal dos dois lados), temos que módulos profinitos livres e projetivos coincidem [31, 7.5.1].

Módulos profinitos Noetherianos. Um módulo profinito é *topologicamente Noetheriano* se toda família de submódulos fechados tem um elemento maximal ou, equivalentemente, se toda cadeia ascendente de submódulos fechados estabiliza. Claramente, um módulo profinito que é abstratamente Noetheriano é também topologicamente Noetheriano. Se um módulo profinito é topologicamente Noetheriano, então todo submódulo fechado é finitamente gerado, mas a recíproca não é verdadeira neste caso. Por exemplo, o produto cartesiano de qualquer família infinita de corpos finitos dois a dois não isomorfos é um anel comutativo cujos ideais são gerados por um elemento mas não é topologicamente Noetheriano.

Nos Capítulos 2 e 3, vamos trabalhar com anéis especiais – certas álgebras de grupos que definiremos mais adiante – que têm a propriedade de serem anéis locais. A próxima proposição diz que anéis profinitos locais R que são topologicamente Noetherianos são também abstratamente Noetherianos (já observamos que a recíproca é verdadeira independente de o anel ser local).

Proposição 1.8 ([31], 8.6.4). *Seja R um anel profinito local. Se todos os ideais à direita fechados de R são finitamente gerados, então também são todos os ideais à direita.*

Assim, se R é um anel profinito local (topologicamente ou abstratamente) Noetheriano, então todo R-módulo profinito finitamente gerado M é abstratamente Noetheriano e, portanto, topologicamente Noetheriano. Além disso, temos que um R-módulo profinito M sobre um anel local Noetheriano é topologicamente Noetheriano se, e somente se, é abstratamente Noetheriano. De fato, suponha que M é topologicamente Noetheriano e seja N um submódulo abstrato de M. Então o fecho $\overline{N}$ de N é finitamente gerado como R-módulo profinito. Logo, pelas observações feitas no início deste parágrafo, $\overline{N}$ é um R-módulo abstratamente Noetheriano. Como N é um submódulo de $\overline{N}$, temos que N é abstratamente finitamente gerado, de onde segue que M é abstratamente Noetheriano.

A álgebra de grupo completa. Seja k um anel comutativo. Uma k-álgebra é um anel

Λ com um homomorfismo de anéis de k no centro de Λ. Escrevemos $r\lambda$ para o produto da imagem de $r \in k$ e $\lambda \in \Lambda$. Uma aplicação $\theta : \Lambda \to E$, onde E é uma k-álgebra, é um homomorfismo de k-álgebras se é um homomorfismo de anéis e satisfaz $\theta(r\lambda) = r\theta(\lambda)$, para todo $r \in k$ e $\lambda \in \Lambda$. Qualquer anel contendo k no seu centro pode ser considerado como uma k-álgebra.

Seja G um grupo. Denotamos por kG a álgebra de grupo de G sobre k, ou seja, kG é o conjunto formado por todas as somas formais $\sum_{g\in G} r_g g$, tais que $r_g \in k$ e $r_g \neq 0$ somente para um número finito de elementos $g \in G$, com soma e produto usuais. Identificamos k e G com suas imagens naturais em kG. A álgebra de grupo é caracterizada pela seguinte propriedade universal: cada homomorfismo de grupos de G no grupo de unidades $E^\times$ de uma k-álgebra E estende-se unicamente a um homomorfismo de k-álgebras de kG em E.

Suponha agora que k é um anel profinito comutativo. Uma *k-álgebra profinita* é um anel profinito Λ com um homomorfismo contínuo de k no centro de Λ. Note que o centro de Λ é um subanel fechado de Λ, já que é a interseção de núcleos de homomorfismos (de grupos profinitos via $+$) da forma $\varphi_\lambda : x \mapsto x\lambda - \lambda x$, para cada $\lambda \in \Lambda$.

Definição 1.9. *Seja G um grupo profinito. A* álgebra de grupo completa $[[kG]]$ *de G sobre k é uma k-álgebra profinita que contém G no seu grupo de unidades e que satisfaz a seguinte propriedade universal: cada homomorfismo contínuo de G no grupo de unidades $E^\times$ de uma k-álgebra profinita E estende-se a um único homomorfismo contínuo de k-álgebras de $[[kG]]$ em E.*

Note que $E^\times$ é um grupo profinito com a topologia subespaço em E [31, 7.1.1]. A álgebra de grupo completa pode também ser construída como o limite inverso

$$[[kG]] = \varprojlim_{N\in\mathcal{U}} k(G/N),$$

onde $\mathcal{U}$ é a família de todos os subgrupos normais abertos N de G. Temos que G mergulha em $[[kG]]$ via a aplicação $g \mapsto \prod_{N\in\mathcal{U}} Ng$ que estende-se a um mergulho de kG em $[[kG]]$ como uma subalgebra densa de $[[kG]]$ [31, 7.1.2].

A álgebra de grupo abstrata kG de um grupo G sobre um anel comutativo k é um k-módulo abstrato livre no conjunto G. A correspondente propriedade não vale para a álgebra de grupo completa $[[kG]]$ de um grupo profinito G sobre um anel profinito comutativo k. Isso porque a inclusão de G em $[[kG]]$ é 0-convergente somente se G é finito. Esse problema pode ser contornado definindo-se um novo tipo de módulo livre.

Módulos profinitos topologicamente livres. Seja R um anel profinito e X um subconjunto fechado de um R-módulo profinito L. Dizemos que L é um *R-módulo profinito topologicamente livre* com base X se a seguinte propriedade vale: toda aplicação contínua de X em um R-módulo profinito M pode ser estendida unicamente a um homomorfismo (contínuo) de L em M.

Note que se X é finito, então a definição de módulo profinito livre coincide com a definição de módulo profinito topologicamente livre. Na verdade, a definição de módulo profinito topologicamente livre é mais geral que a definição de módulo profinito livre [28, 5.2.5].

Note também que X é o limite inverso de suas imagens nos quocientes de L módulo os submódulos abertos. Portanto X é um espaço topológico que é homeomorfo ao limite inverso de conjuntos finitos, i.e., X é um espaço profinito. Seja $X = \varprojlim X_i$, onde cada X_i é um conjunto finito. Se as aplicações $\varphi_i : X \to X_i$ são sobrejetivas, o R-módulo profinito topologicamente livre $[[RX]]$ pode também ser construído (a menos de isomorfismo) como o limite inverso

$$[[RX]] = \varprojlim RX_i$$

dos R-módulos profinitos livres RX_i ($\cong \prod_{X_i} R$) nos conjuntos finitos X_i e a aplicação canônica de $[[RX]]$ em RX_i é o único homomorfismo de R-módulos estendendo φ_i.

Por [31, 7.6.2], todo módulo profinito topologicamente livre sobre um anel profinito R é projetivo.

Segue da proposição abaixo que a álgebra de grupo completa $[[kG]]$ de um grupo profinito G sobre um anel profinito comutativo k é um k-módulo topologicamente livre com base G. Mais geralmente, a proposição abaixo estabelece propriedades de $[[kH]]$ quando H é um subgrupo fechado de G. Um transversal (à esquerda) para H em G é um subconjunto fechado contendo exatamente um elemento de cada classe lateral gH de H em G. Para todo subgrupo fechado H de G, existe um transversal T para H com $1 \in S$ (veja [31, Seção 1.3] para mais detalhes).

Proposição 1.10. *Seja H um subgrupo fechado de um grupo profinito G, T um transversal (à esquerda) para H em G e k um anel profinito comutativo. Então*

(i) *$[[kG]]$ é o $[[kH]]$-módulo topologicamente livre em T* ([31], 7.6.3);

(ii) *todo $[[kG]]$-módulo profinito projetivo é um $[[kH]]$-módulo profinito projetivo* ([28], 5.7.2).

A aplicação $\varepsilon : [[kG]] \to k$ dada por $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$, é um homomorfismo contínuo de anéis profinitos e é chamada *aplicação "augmentation"*. Seu núcleo $((IG))$ é chamado de *ideal "augmentation"* de $[[kG]]$ e é um k-módulo topologicamente livre em $G - 1 = \{g - 1 \mid g \in G\}$. Mais especificamente, se T é um espaço profinito com $1 \in T$ que gera G topologicamente, então $((IG))$ é topologicamente gerado como um ideal de $[[kG]]$ por $T - 1$ [28, 6.3.2].

Produtos tensoriais completos. No que segue, k denota um anel profinito comutativo, Λ uma k-álgebra profinita, M um Λ-módulo profinito à direita e N um Λ-módulo profinito à esquerda. Um Λ-bihomomorfismo $f : M \times N \to L$, onde L é um k-módulo profinito, é um homomorfismo contínuo de grupos profinitos abelianos tal que $f(m\lambda, n) = f(m, \lambda n)$, para cada $m \in M$, $n \in N$ e $\lambda \in \Lambda$. O *produto tensorial completo* de M e N sobre Λ é um k-módulo profinito, denotado por $M\widehat{\otimes}_\Lambda N$, junto com um Λ-bihomomorfismo $\hat{t} : M \times N \to M\widehat{\otimes}_k N$ definido pela seguinte propriedade universal: dado um Λ-bihomomorfismo f de $M \times N$ em um k-módulo profinito L, existe um único homomorfismo de k-módulos profinitos $\bar{f} : M\widehat{\otimes}_k N \to L$ tal que $\bar{f}\hat{t} = f$ (ou seja, f se *fatora* através de $\hat{t}$).

O produto tensorial completo existe e é único (a menos de isomorfismo), podendo ser construído como o completamento

$$M\widehat{\otimes}_\Lambda N = \varprojlim M/U \otimes_\Lambda N/V$$

do produto tensorial abstrato $M \otimes_\Lambda N$ com respeito à família de todos os núcleos das aplicações canônicas $M \otimes_\Lambda N \to M/U \otimes_\Lambda N/V$, onde U e V são Λ-submódulos abertos de M e N, respectivamente.

Propriedades semelhantes às de produtos tensoriais abstratos também valem para produtos tensoriais completos, como por exemplo (veja [28, 5.5.3])

(i) $M\widehat{\otimes}_\Lambda -$ é um funtor exato à direita e comuta com somas diretas finitas de Λ-módulos profinitos à esquerda;

(ii) $M\widehat{\otimes}_\Lambda \Lambda \cong M$ como Λ-módulos profinitos e o isomorfismo é natural;

(iii) se M projetivo, então o funtor $M\widehat{\otimes}_\Lambda -$ é exato.

Além disso, se M é um Λ-módulo profinito finitamente gerado, então

(iv) $M\widehat{\otimes}_\Lambda N \cong M \otimes_\Lambda N$.

Propriedades análogas valem para o funtor $-\widehat{\otimes}_\Lambda N$.

Considere agora $\Lambda = k$ e sejam S e T k-álgebras profinitas. Suponha que M é um S-módulo profinito à esquerda e N um T-módulo profinito à direita. Temos que $M\widehat{\otimes}_k N$ é um $S\widehat{\otimes}_k T$-módulo profinito [31, 7.7.2]. Enunciamos abaixo uma série de resultados importantes sobre este produto tensorial completo.

Proposição 1.11 ([31], 7.7.4). *Seja $M = \varprojlim M_i$ um limite inverso de S-módulos profinitos tal que todos os homomorfismos do sistema inverso são epimorfismos e $N = \varprojlim N_j$ um limite inverso de T-módulos profinitos tal que todos os homomorfismos do sistema inverso são epimorfismos. Então $M\widehat{\otimes}_k N = \varprojlim M_i\widehat{\otimes}_k N_j$.*

Proposição 1.12 ([31], 7.7.5). *Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de S-módulos profinitos e $\{N_j\}_{j\in I}$ uma família de T-módulos profinitos. Então $(\prod M_i)\widehat{\otimes}_k(\prod N_j) = \prod(M_i\widehat{\otimes}_k N_j)$.*

Lembre que o produto tensorial de módulos abstratos comuta apenas com somas diretas (limites diretos).

Proposição 1.13 ([31], 7.7.6). *Seja M um S-módulo profinito livre com base X e N um T-módulo livre com base Y. Então $M\widehat{\otimes}_k N$ é o $S\widehat{\otimes}_k T$-módulo livre com base $X \times Y$.*

A proposição acima também é válida para módulos profinitos topologicamente livres [31, 7.7.8].

Corolário 1.14 ([31], 7.7.7). *Seja P um S-módulo profinito projetivo e Q um T-módulo profinito projetivo. Então $P\widehat{\otimes}_k Q$ é um $S\widehat{\otimes}_k T$-módulo profinito projetivo.*

Quando S e T são álgebras de grupo completas, temos o seguinte resultado que será bastante utilizado.

Proposição 1.15 ([31], 7.7.9). *Sejam G e H grupos profinitos. Então a álgebra de grupo completa $[[k(G \times H)]]$ é isomorfa ao produto tensorial completo $[[kG]]\widehat{\otimes}_k[[kH]]$ de álgebras de grupo completas.*

Um k-bihomomorfismo alternado $f : M \times N \to L$ é um k-bihomomorfismo (contínuo) satisfazendo $f(m_1, m_2) = -f(m_2, m_1)$, para todo $m_1, m_2 \in M$. O *quadrado exterior completo* de M sobre k é um k-módulo profinito $M\widehat{\wedge}_k M$ junto com um k-bihomomorfismo alternado de $M \times M$ em $M\widehat{\wedge}_k M$ satisfazendo uma propriedade universal para k-bihomomorfismos alternados. $M\widehat{\wedge}_k M$ pode ser construído como o completamento dos quadrados exteriores

abstratos ou como imagem de $M\widehat{\otimes}_k M$. Os produtos tensoriais completos $M_1\widehat{\otimes}_k\cdots\widehat{\otimes}_k M_d$ e as potências exteriores completas $\widehat{\bigwedge}_k^d M = M\widehat{\wedge}_k\cdots\widehat{\wedge}_k M$ com mais de dois fatores são definidos similarmente.

Ações diagonais. Seja G um grupo profinito e $\delta : G \to G^m = G\times G\times\cdots\times G$ a imersão diagonal, isto é, o monomorfismo definido por $g \mapsto (g, g, \ldots, g)$. Identifiquemos G com sua imagem $\delta(G)$. Segue da Proposição 1.15 que $\widehat{\bigotimes}_k^m [[kG]] \cong [[kG^m]]$. Assim, para cada $[[kG]]$-módulo profinito M, o m-ésimo produto tensorial completo $\widehat{\bigotimes}_k^m M$ é um $[[kG^m]]$-módulo profinito e, portanto, um $[[k\delta(G)]]$-módulo profinito. Neste caso, dizemos que $\widehat{\bigotimes}_k^m M$ é um $[[kG]]$-*módulo via a ação diagonal de* G.

1.3 Módulos pro-p

Seja p um inteiro primo fixado. O nosso interesse está em módulos sobre as álgebras de grupo completas $[[kG]]$, onde $k = \mathbb{Z}_p$ é o anel de inteiros p-ádicos ou $k = \mathbb{F}_p$ o corpo finito com p elementos e G é um grupo pro-p. Nas subseções seguintes veremos algumas propriedades especiais desses grupos, álgebras e módulos.

1.3.1 Grupos pro-p

Um *grupo pro-p* é um grupo profinito em que todo subgrupo normal aberto tem índice igual a uma potência de p. Então um grupo finito é pro-p se, e somente se, é um p-grupo finito. Note que, em um grupo pro-p, todo subgrupo aberto H tem índice igual a uma potência de p, já que contém um subgrupo normal aberto $(= \bigcap_{t\in T} H^t$, onde T é um transversal de H em G, chamado o "core" de $H)$. Temos que um grupo topológico é um grupo pro-p se, e somente se, é isomorfo ao limite inverso de p-grupos finitos.

Se $\mathcal{C}$ é a família de todos os p-grupos finitos, então o completamento $G_{\widehat{\mathcal{C}}}$ de um grupo abstrato G é um grupo pro-p chamado de *completamento pro-p* de G e denotado por $G_{\widehat{p}}$. Um caso particular é quando consideramos o grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$. O completamento pro-p de $\mathbb{Z}$ é denotado por $\mathbb{Z}_p$ e

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{(x_n) \mid x_n \in \mathbb{Z}, x_n \equiv x_m (\mathrm{mod}\ p^m) \text{ se } m \leq n\}$$

é chamado de anel de inteiros p-ádicos.

A seguir apresentamos uma série de definições sobre grupos pro-p. Isso poderia ter sido feito no caso geral, para grupos profinitos, mas como nosso estudo tratará apenas do caso pro-p, achamos mais conveniente fazer esta restrição neste momento.

Grupos pro-p finitamente gerados. Seja G um grupo pro-p e X um subconjunto de G. Dizemos que G é *topologicamente gerado* por X se o grupo abstrato $\langle X\rangle$ gerado por X é denso em G. Neste caso, escrevemos $G = \overline{\langle X\rangle}$ e dizemos que X é um conjunto de *geradores topológicos* de G. Se existe um conjunto finito X de geradores topológicos de G, dizemos que G é *topologicamente finitamente gerado*. Se $\{G_i, \pi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo (i.e., tal que cada π_{ij} é um epimorfismo contínuo) de grupos pro-p e $G = \varprojlim G_i$, temos que G é topologicamente gerado por um conjunto X se, e somente se, as imagens de X pelas projeções geram G_i para cada $i \in I$ ([28, 2.4.1]).

Grupos pro-p livres. Seja X um conjunto e G um grupo pro-p. Uma aplicação $\theta : X \to G$ é dita 1-convergente se, para cada subgrupo normal aberto N de G, o conjunto $\{x \in X \mid \theta(x) \notin N\}$ é finito. O *grupo pro-p livre em X* é um grupo pro-p F com uma aplicação 1-convergente $j : X \to F$ com a seguinte propriedade universal: quando $\varphi : X \to G$ é uma aplicação 1-convergente de X num grupo pro-p G, existe um único homomorfismo contínuo $\overline{\varphi} : F \to G$ tal que $\varphi = \overline{\varphi} j$. O grupo pro-$p$ livre em X existe e é único a menos de isomorfismo podendo ser também construído como o completamento do grupo livre abstrato E em X com respeito à família de todos os subgrupo normais U de E que têm índice igual a uma potência de p e $X \setminus U$ é finito. Assim, se X é finito, o grupo pro-p livre em X é o completamento pro-p do grupo livre abstrato com base X. Por [28, 3.3.15], todo grupo abstrato livre é residualmente p, logo mergulha no seu completamento pro-p. Por exemplo, $\mathbb{Z}_p$ é o grupo pro-p livre gerado por um elemento e $\mathbb{Z}$ mergulha em $\mathbb{Z}_p$.

Seja G um grupo pro-p. Então existe um grupo pro-p livre F e um epimorfismo contínuo $\pi : F \to G$. Além disso, se G é topologicamente gerado por um conjunto finito com d elementos, então F pode ser escolhido de posto d, ou seja, gerado por um conjunto com d elementos [28, 3.3.16]. Lembramos que um grupo G é chamado de *torsão* se todo elemento de G tem ordem finita. O seguinte teorema estabelece a estrutura dos grupos pro-p abelianos topologicamente finitamente gerados.

Teorema 1.16 ([28], 4.3.4). *Seja p um primo fixado.*

(i) *Se G é um grupo pro-p abeliano sem torsão topologicamente finitamente gerado, então G é um grupo pro-p abeliano livre de posto finito, isto é, $G \cong \bigoplus_d \mathbb{Z}_p$, onde d é um*

número natural.

(ii) *Se G é um grupo pro-p abeliano topologicamente finitamente gerado, então o subgrupo torsão $tor(G)$ de G é finito e*

$$G \cong F \oplus tor(G),$$

onde F é um grupo pro-p abeliano livre de posto finito.

O posto de grupos pro-p. Seja G um grupo pro-p. Escrevemos

$$d(G) = \min\{|X| \ ; \ X \subseteq G, \ X \text{ gera } G \text{ topologicamente}\}$$

para o número mínimo de elementos (possivelmente infinito) necessários para gerar G topologicamente. Temos que $d(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} G/\Phi_p(G)$, onde $\Phi_p(G) = \overline{G^p[G,G]}$ é o subgrupo de Frattini de G. O *posto* de G é definido por

$$rk(G) = \max\{d(H) \ ; \ H \text{ é um subgrupo fechado de } G\}.$$

A classe de grupos pro-p de posto finito é fechada para subgrupos, quocientes e extensões [31, 8.1.1]. Segue do Teorema 1.16 que grupos pro-p abelianos finitamente gerados têm posto finito. Na verdade, vale o resultado mais geral que diz que os grupos pro-p analíticos são precisamente os grupos pro-p de posto finito [10, Corolário 8.34].

Grupos pro-p finitamente apresentáveis. Seja E um grupo pro-p e R um subgrupo normal fechado de E. Dizemos que R é (topologicamente) gerado como subgrupo normal de E por um conjunto X se

$$R = \overline{\langle X^E \rangle} = \overline{\langle e^{-1}xe \mid e \in E, \ x \in X \rangle}$$

é o menor subgrupo normal fechado de E contendo X. Defina $d_E(R)$ como a cardinalidade (possivelmente infinita) de um tal conjunto X. Uma *apresentação* de um grupo pro-p G é um epimorfismo $\pi : F \to G$, onde F é um grupo pro-p livre em algum conjunto X. Dizemos que G é *finitamente apresentável* se existe uma apresentação π de G tal que $d(F)$ e $d_F(\mathrm{Ker}\pi)$ são finitos. Claramente grupos pro-p livres finitamente gerados são finitamente apresentáveis. Todos os p-grupos finitos são finitamente apresentáveis considerados como grupos pro-p [31, 12.1.3]. Além disso, o produto direto finito de grupos pro-p finitamente apresentáveis é finitamente apresentável. Então, pelo Teorema 1.16, todos os grupos pro-p abelianos finitamente gerados são finitamente apresentáveis.

1.3.2 A álgebra de grupo completa de grupos pro-p

Um anel pro-p é um anel profinito tal que o grupo aditivo de cada anel finito no limite inverso é um p-grupo finito. Quando k é um anel pro-p comutativo e G é um grupo pro-p, a álgebra de grupo completa $[[kG]]$ possui propriedades especiais. A primeira é que $[[kG]]$ é um anel local.

Proposição 1.17 ([31], 7.5.3). *Seja k um anel profinito comutativo e G um grupo profinito. Então $[[kG]]$ é um anel profinito local se, e somente se, existe um primo p tal que k é um anel pro-p local e G é um grupo pro-p.*

Em geral, os elementos de uma álgebra de grupo completa não podem ser descritos de uma forma tão simples como os elementos de uma álgebra de grupo abstrata. Entretanto, no caso em que k é um anel pro-p e G é um grupo pro-p livre finitamente gerado, $[[kG]]$ pode ser descrita de forma especial. O teorema abaixo descreve $[[kG]]$ quando k é um anel pro-p comutativo e G é um grupo pro-p abeliano livre finitamente gerado, mas um resultado análogo é válido sem que k seja comutativo e G abeliano [31, 7.3.3].

Teorema 1.18 ([31], 12.4.1). *Seja k um anel pro-p comutativo, $P = k[[x_1, x_2, \ldots, x_d]]$ a álgebra das séries de potências formais sobre k nas indeterminadas comutativas $x_1, x_2, \ldots, x_d$, e escreva $t_i = 1 + x_i$, para $i = 1, 2, \ldots, d$. Então o subgrupo profinito F de $P^\times$ gerado por $t_1, t_2, \ldots, t_d$ é o grupo pro-p abeliano livre com base $t_1, t_2, \ldots, t_d$ e P é a álgebra completa $[[kF]]$ do grupo F.*

O seguinte resultado é uma conseqüência do teorema acima, da Proposição 1.13 e do Teorema 1.15.

Corolário 1.19. *Seja k um anel pro-p comutativo e $k[[t_1, \ldots, t_s]]$ e $k[[t_{s+1}, \ldots, t_d]]$ álgebras de séries de potências formais em indeterminadas comutativas. Então*

$$k[[t_1, \ldots, t_s]] \widehat{\otimes}_k k[[t_{s+1}, \ldots, t_d]] \cong k[[t_1, \ldots, t_s, t_{s+1}, \ldots, t_d]].$$

como k-álgebras pro-p abelianas.

Quando G é um grupo pro-p de posto finito, $[[\mathbb{Z}_p G]]$ tem uma propriedade que é essencial no estudo de módulos pro-p. Lembre que $[[\mathbb{Z}_p G]]$ é um anel local.

Teorema 1.20 ([24], V.2.2.4). *Seja G um grupo pro-p de posto finito. Então a álgebra de grupo completa $[[kG]]$ é um anel Noetheriano, onde $k = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$.*

1.3.3 Módulos sobre grupos pro-p

Seja G um grupo pro-p. Um *G-módulo pro-p (à direita)* é um grupo pro-p abeliano M com uma ação contínua $\mathbb{Z}_p$-linear $M \times G \longrightarrow M$ que satisfaz as propriedades de um G-módulo abstrato.

Cada grupo pro-p abeliano M tem uma ação natural contínua e linear de $\mathbb{Z}_p$, como podemos ver pela seguinte proposição.

Proposição 1.21 ([31], 1.5.3). *Seja M um grupo pro-p abeliano e considere $\mathbb{Z}$ identificado com sua imagem no seu completamento pro-p $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Fixe $m \in M$. A aplicação $n \mapsto mn := m + \cdots + m$ de $\mathbb{Z}$ em M é um homomorfismo contínuo logo, pela propriedade universal do completamento pro-p, ela se estende a um único homomorfismo contínuo $\theta_m : \mathbb{Z}_p \longrightarrow M$. Então a aplicação $\theta : M \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow M$ definida por $(m, z) \mapsto mz := \theta_m(z)$ é contínua. Se $m, m' \in M$ e $z, z' \in \mathbb{Z}_p$, então $m(z + z') = mz + mz'$, $(mz)z' = m(zz')$ e $(m + m')z = mz + m'z$.*

Para cada grupo pro-p G, podemos definir uma ação contínua trivial de G em M pondo $(m, g) \mapsto m$, para cada $m \in M$ e $g \in G$. Neste caso, dizemos que M é um *G-módulo trivial*. Se M é isomorfo ao grupo aditivo de $\mathbb{F}_p$, então o grupo de automorfismos $Aut(M)$ de M tem ordem $p - 1$ e, portanto, a ação de qualquer grupo pro-p G em M deve ser trivial.

Se M é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p, então M é um G-módulo pro-p, já que $\mathbb{Z}_pG$ mergulha em $[[\mathbb{Z}_pG]]$. Reciprocamente, por [31, 7.2.4], se M é um G-módulo pro-p, então M tem uma estrutura natural de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p, em que a aplicação $M \times [[\mathbb{Z}_pG]] \longrightarrow M$ estende $M \times G \longrightarrow M$ e os $[[\mathbb{Z}_pG]]$-submódulos fechados de M são exatamente os G-submódulos fechados de M. Assim, a categoria de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p coincide com a categoria de G-módulos pro-p.

Note que, pela Proposição 1.17, $[[\mathbb{Z}_pG]]$ é um anel local e lembre que, pelo Lema 1.7, as definições de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p abstratamente e topologicamente finitamente gerados coincidem. Então podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 1.22 ([8], Corolário 1.5). *Seja M um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-modulo pro-p. Então M é abstratamente ou topologicamente finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se, e somente se, $M/\Delta M \cong M\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}\mathbb{F}_p$ tem dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$, onde Δ é o único ideal maximal aberto de $[[\mathbb{Z}_pG]]$. Além disso, $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_d$ é uma base de $M/\Delta M$ sobre $\mathbb{F}_p$ se, e somente se, $x_1, x_2, \ldots, x_d$ é um conjunto minimal de geradores de M como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p.*

1.4 Homologia de grupos pro-p

Seja G um grupo pro-p e considere $\mathbb{Z}_p$ como G-módulo trivial. Uma *resolução* $[[\mathbb{Z}_pG]]$-*projetiva (à direita)* de $\mathbb{Z}_p$ é uma seqüência exata

$$\mathcal{P}: \quad \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

na categoria de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p (à direita), onde cada P_i é projetivo. Seja L um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p à esquerda e considere uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva $\mathcal{P}$ de $\mathbb{Z}_p$. Aplicando o funtor $-\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L$ no complexo apagado

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p} = \quad \cdots \to P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to P_0 \to 0,$$

obtemos o complexo

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L: \quad \cdots \to P_2\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \to P_1\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \to P_0\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \to 0$$

com aplicações contínuas. O *i-ésimo grupo de homologia* $H_i(G,L)$ de G com coeficientes em L é o i-ésimo grupo de homologia

$$H_i(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L) = \frac{\mathrm{Ker}(P_i\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \to P_{i-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L)}{\mathrm{Im}(P_{i+1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \to P_i\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L)}$$

desse complexo.

É conhecido que cada módulo possui uma resolução livre, e portanto projetiva, e que o grupo de homologia independe (a menos de isomorfismo) da escolha da resolução. Mais detalhes sobre homologia de grupos podem ser encontrados em [29] no caso abstrato e em [28] no caso profinito. Em dimensões pequenas, os grupos de homologia $H_i(G,L)$ são bem conhecidos.

Lema 1.23 ([28], 6.3.3 e 6.8.6). *Seja G um grupo pro-p.*

(i) *Se L é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p à esquerda, então $H_0(G,L) \cong \mathbb{Z}_p\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \cong L/((IG))L$, onde $((IG))$ é o ideal "augmentation" de G.*

(ii) *$H_1(G,\mathbb{Z}_p) \cong G/\overline{[G,G]}$ e $H_1(G,\mathbb{F}_p) \cong G/\Phi_p(G) = G/\overline{G^p[G,G]}$, onde $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{F}_p$ são considerados como G-módulos triviais.*

Lema 1.24 ([28], 7.8.3). *Seja G um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado e $\pi : F \to G$ uma apresentação de G. Então $d_F(Ker\pi) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, \mathbb{F}_p)$.*

Uma conseqüência bem conhecida dos Lemas 1.23 e 1.24 é a seguinte.

Corolário 1.25. *Seja G um grupo pro-p. Então G é finitamente apresentável se, e somente se, $H_1(G, \mathbb{F}_p)$ e $H_2(G, \mathbb{F}_p)$ têm dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$.*

No caso de grupos abstratos, a condição nos grupos de homologia no Corolário 1.25 é apenas necessária.

1.5 Grupos pro-p metabelianos de tipo FP_m

Nesta seção G denota um grupo pro-p. Dizemos que G é de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$, onde $0 \leq m \leq \infty$, se $\mathbb{Z}_p$ considerado como G-módulo trivial possui uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva

$$\cdots \to P_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

onde cada P_i é finitamente gerado como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p, para cada $0 \leq i \leq m$ (para todo i se $m = \infty$). Observe que todo grupo pro-p é de tipo FP_0 sobre $\mathbb{Z}_p$, já que

$$[[\mathbb{Z}_pG]] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_p \to 0,$$

onde ε é a aplicação "augmentation", é uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-livre parcial de $\mathbb{Z}_p$.

O tipo homológico de G pode também ser caracterizado em termos de seus grupos de homologia, como podemos ver no seguinte resultado.

Teorema 1.26 ([14], Teorema A). *Seja G um grupo pro-p e $0 \leq m \leq \infty$. Suponha que S é um anel pro-p, Noetheriano, quociente de $[[\mathbb{Z}_pG]]$. Então G é de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, $H_i(G, S)$ é finitamente gerado como um S-módulo pro-p à direita para $i \leq m$ (para todo i se $m = \infty$).*

O caso $S = \mathbb{F}_p$ do Teorema 1.26 foi mostrado por Pletch em [27, Teorema 1.6]. A condição nos grupos de homologia no Teorema 1.26 é apenas necessária para que um grupo abstrato seja de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}$, o que foi provado por Bieri e Groves em [3]. Contudo, a condição não é suficiente mesmo no caso de grupos abstratos metabelianos [30, pg. 269].

Tomando $S = \mathbb{F}_p$ segue do Lema 1.23(ii), do fato que $d(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} G/\Phi_p(G)$ e do Corolário 1.25, o seguinte resultado.

Corolário 1.27 ([14], Corolário A). *Seja G um grupo pro-p. Então*

(i) *G é de tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, G é topologicamente finitamente gerado;*

(ii) *G é de tipo FP_2 sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, G é finitamente apresentável.*

O Corolário 1.27 é verdadeiro para grupos abstratos somente na direção "$\Leftarrow$", já que segue do Teorema 1.26. Entretanto se exigirmos que G seja metabeliano, Bieri e Strebel [6, Teorema 5.4] provaram que o resultado também é verdadeiro na outra direção. Bestvina e Brady [2] mostraram que existem grupos abstratos de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}$ que não são finitamente apresentáveis.

O próximo resultado generaliza a versão pro-p do resultado clássico de Hall que afirma que a classe de grupos abstratos finitamente apresentáveis é fechada para extensões. A demonstração utiliza seqüências espectrais, uma técnica importante em homologia de grupos.

Proposição 1.28 ([14], Teorema 2.2). *Seja G um grupo pro-p e N um subgrupo normal (fechado) tal que N é de tipo FP_n sobre $\mathbb{Z}_p$, onde $0 \leq n \leq \infty$. Suponha que $0 \leq m \leq \infty$ e seja $s = \min\{m, n\}$.*

(i) *Se G/N é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$, então G é de tipo FP_s sobre $\mathbb{Z}_p$.*

(ii) *Se G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$, então G/N é de tipo FP_s sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Observamos que, em geral, o fato de G e G/N terem tipo homológico FP_m não diz nada sobre o tipo homológico de N.

Veremos a seguir que precisamos somente calcular os grupos de homologia de subgrupos especiais de um grupo pro-p G para saber se G é de tipo FP_m. O Teorema 1.30 segue diretamente do Teorema 1.26 e do lema abaixo.

Lema 1.29 (Lema de Shapiro [28], 6.10.9). *Seja G um grupo pro-p e N um subgrupo normal fechado de G. Então $H_i(N, k)$, onde $k = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$, é um $[[k(G/N)]]$-módulo pro-p à direita isomorfo a $H_i(G, [[k(G/N)]])$, para todo i.*

Teorema 1.30 ([14], Teorema 3.2). *Seja G um grupo pro-p. Suponha que N é um subgrupo normal fechado de G tal que $[[k(G/N)]]$ é Noetheriano, onde $k = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$, e que $0 \leq m \leq \infty$. Então G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, $H_i(N, k)$ é finitamente gerado como um $[[k(G/N)]]$-módulo pro-p à direita, para todo $i \leq m$ (para todo i se $m = \infty$).*

Definição 1.31. *Um grupo pro-p G é* metabeliano *se G possui um subgrupo normal fechado abeliano A tal que $Q = G/A$ é abeliano.*

Observe que, seguindo a notação acima, G age continuamente em A via conjugação. Como a conjugação de A nele mesmo é trivial, G/A age continuamente em A e portanto A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p. Agora se G é topologicamente finitamente gerado o seguinte lema diz que A é finitamente gerado como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p. Como o lema abaixo é sempre mencionado sem referência, resolvemos apresentar aqui um prova.

Lema 1.32. *Sejam G, A e Q como na Definição 1.31. Então G é topologicamente finitamente gerado se, e somente se, Q é um grupo pro-p abeliano finitamente gerado e A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado, onde a ação de Q é via conjugação.*

Demonstração. Suponha primeiro que A é finitamente gerado como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ módulo pro-p e que $Q = G/A$ é um grupo pro-p abeliano finitamente gerado. Pelo Teorema 1.16, G tem subgrupo fechado G_0 de índice finito, portanto aberto, tal que $A \subseteq G_0$ e G_0/A um grupo pro-p abeliano livre de posto finito. Além disso, G é finitamente gerado como grupo pro-p se, e somente se, G_0 é finitamente gerado como grupo pro-p. Da Proposição 1.10, segue que A é finitamente gerado como G/A-módulo pro-p se, e somente se, A é finitamente gerado como G_0/A-módulo pro-p. Assim, podemos supor que $G = G_0$.

Seja $\{a_1, \ldots, a_d\}$ um conjunto de geradores de A como G/A-módulo pro-p e $\{b_1, \ldots, b_n\}$ um conjunto de geradores topológicos de $G/A \cong \mathbb{Z}_p^n$. Escolha elementos $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que $g_iA = b_i$, ou seja, g_i é levado em b_i pela projeção $G \to G/A$, e defina H como o subgrupo pro-p de G topologicamente gerado por $a_1, \ldots, a_d, g_1, \ldots, g_n$. O objetivo é mostrar que $H = G$. Temos que HA/A é um subgrupo fechado de G/A que contém o conjunto de geradores $b_1, \ldots, b_n$, logo $HA = G$. Então a seqüência exata curta

$$1 \to A \to G \to G/A = Q \to 1 \tag{1}$$

induz uma outra seqüência exata curta

$$1 \to A \cap H \to H \to H/(A \cap H) \cong (HA)/A = G/A = Q \to 1. \tag{2}$$

Portanto $G = H$ se, e somente se, $A \cap H = A$. Por (2), $A \cap H$ é um módulo pro-p sobre $H/(A \cap H) \cong Q$ via conjugação e essa ação de Q sobre $A \cap H$ é a restrição da ação original de Q sobre A via conjugação. Por definição, os geradores $a_1, \ldots, a_d$ de A como Q-módulo pro-p são elementos de $A \cap H$. Então, $A \cap H = A$ e G é topologicamente finitamente gerado.

A recíproca pode ser provada de duas maneiras, usando homologia ou de forma direta. Vamos apresentar aqui as duas. Suponha que G é finitamente gerado como grupo pro-p por um subconjunto finito X e considere uma resolução livre de $\mathbb{Z}_p$ sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$

$$\mathcal{F}: \quad \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 = F(X) \longrightarrow F_0 = [[\mathbb{Z}_pG]] \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

onde $F(X) = \bigoplus_{x\in X} x[[\mathbb{Z}_pG]]$ é livre com base X e a aplicação $F_1 \longrightarrow F_0$ leva $x \in X$ em $x - 1_G$. Pela Proposição 1.10, cada F_i é também um $[[\mathbb{Z}_pA]]$-módulo projetivo, então podemos calcular os grupos de homologia de A a partir do complexo $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathbb{Z}_p$. Assim, $H_1(A,\mathbb{Z}_p) = H_1(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathbb{Z}_p) \simeq A/[A,A] = A$, pelo Lema 1.23.

Por outro lado, $\mathcal{F}$ é um complexo de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos. Como Q é um quociente abeliano de G, temos que Q é um grupo pro-p abeliano finitamente gerado e, portanto, tem posto finito. Então, pelo Teorema 1.20, $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ é Noetheriano. Como F_1 é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$, segue que $F_1\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}\mathbb{Z}_p$ é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ e, portanto, sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]$. Assim, $F_1\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}\mathbb{Z}_p$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p Noetheriano. Então o núcleo de $F_1 \longrightarrow F_0$ é finitamente gerado como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo, de onde segue que $A \cong H_1(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}\mathbb{Z}_p)$ é finitamente gerado como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo. Além disso, a ação de Q sobre A via o isomorfismo acima é via conjugação (para o caso discreto veja [3]; o mesmo pode ser repetido no caso pro-p).

Vamos agora fazer a prova direta. Seja $\{t_1,\ldots,t_d\}$ um conjunto finito que gera G como grupo pro-p e $\{g_1,\ldots,g_n\}$ um subconjunto de G tal que as imagens de $g_1,\ldots,g_n$ formam uma base de $Q = G/A$ (aplicando o mesmo argumento usado anteriormente podemos supor que G/A é um grupo pro-p abeliano livre de posto finito). Seja $\pi : G \longrightarrow G/A$ a projeção canônica. Então $\pi(t_i) = \pi(g_1)^{z_{1,i}}\ldots\pi(g_n)^{z_{n,i}}$, para certos $z_{j,i} \in \mathbb{Z}_p$, e portanto $a_i := t_i(g_1^{z_{1,i}}\cdots g_n^{z_{n,i}})^{-1} \in A = \mathrm{Ker}\pi$. Assim, $\{a_1,\ldots,a_d,g_1,\ldots,g_n\}$ é um conjunto finito de geradores topológicos de G tal que a imagem de $g_1,\ldots,g_n$ é uma base de G/A. Afirmamos que A é gerado por $a_1,\ldots,a_d,\{[g_i,g_j]\}_{1\le i<j\le n}$ como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p. De fato, é suficiente que isso seja verdade para qualquer $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-quociente finito de A, ou seja, que cada tal quociente $\bar{A}$ de A seja gerado por $a_1,\ldots,a_d,\{[g_i,g_j]\}_{1\le i<j\le n}$ como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo. Observe que, para cada quociente finito $\bar{A}$, existe um subgrupo normal aberto U de G tal que $\bar{A}$ é um quociente de $A/(A\cap U)$ e AU age trivialmente sobre $\bar{A}$. Além disso, U pode ser escolhido como o menor subgrupo normal fechado de G que contém $a_i^{p^s}, g_j^{p^s}$, para todo $1 \le i \le d, 1 \le j \le n$, onde s é um número natural suficientemente grande. Então podemos considerar somente o caso

$\bar{A} = A/(A \cap U)$. Neste caso, existe uma seqüência exata curta de grupos discretos

$$1 \to A/(A \cap U) = (AU)/U \to G/U \to G/(AU) \to 1.$$

Temos que G/U é um p-grupo finito metabeliano com geradores

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n \tag{3}$$

e o p-grupo abeliano G/AU tem apresentação

$$\langle g_1, \ldots, g_n \mid g_1^{p^s}, \ldots, g_n^{p^s}, [g_i, g_j], \text{ para } 1 \leq i < j \leq n \rangle. \tag{4}$$

Vamos mostrar, então, que (3), (4) e o fato que $\bar{g}_i^{p^s} = 1$ em G/U implicam que o núcleo da projeção canônica $G/U \to \overline{Q} = G/AU$ é um $\overline{Q}$-módulo discreto com geradores

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d, [\bar{g}_i, \bar{g}_j], \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq n.$$

Para isso, seja F o grupo discreto livre com base $x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_n$ e $\varphi : F \to G/U$ o homomorfismo dado por $\varphi(x_i) = a_i U$ e $\varphi(y_j) = g_j U$. Seja $\beta : G/U \to G/AU$ a projeção canônica. Então $\beta\varphi : F \to G/AU$ tem núcleo gerado como subgrupo normal por

$$\{x_1, \ldots, x_d, y_1^{p^s}, \ldots, y_n^{p^s}, [y_i, y_j], \ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Então, $\mathrm{Ker}\beta = AU/U$ é gerado, como subgrupo normal de G/U, por

$$\varphi(\{x_1, \ldots, x_d, y_1^{p^s}, \ldots, y_n^{p^s}, [y_i, y_j] \mid 1 \leq i < j \leq n\}) = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d, [\bar{g}_i, \bar{g}_j] \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

■

Observe que, como Q é um grupo pro-p abeliano finitamente gerado, Q é um grupo pro-p de posto finito. Então, pelo Teorema 1.20, a álgebra de grupo completa $[[\mathbb{Z}_p Q]]$ é um anel pro-p comutativo (topologicamente e abstratamente) Noetheriano. O Teorema 1.30 é portanto um critério para estabelecer quando G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ em termos dos grupos de homologia $H_i(A, k)$.

No Capítulo 3, vamos utilizar alguns resultados provados por Kochloukova e King sobre a estrutura dos grupos de homologia $H_i(A, k)$, onde $k = \mathbb{Z}_p$ ou $k = \mathbb{F}_p$ são considerados como $[[\mathbb{Z}_p A]]$-módulos pro-p triviais. O primeiro resultado foi provado por King e é a versão pro-p de [3, Proposição 5.1] provada por Bieri e Groves. Algumas observações sobre a naturalidade dos morfismos são encontradas em [18, Lema 3].

Teorema 1.33 ([14], Teorema 3.5). *Seja A um grupo pro-p abeliano e considere $k = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$ como um $[[\mathbb{Z}_pA]]$-módulo pro-p trivial. Então, para cada i, existe um monomorfismo natural*

$$\beta : \widehat{\bigwedge}_k^i(A\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}k) \to H_i(A,k)$$

da i-ésima potência exterior completa no i-ésimo grupo de homologia. Se A é sem torsão então β é um isomorfismo. Além disso, se um grupo pro-p Q age em A, então β é um monomorfismo de Q-módulos, onde Q age diagonalmente em $\widehat{\bigwedge}_k^i(A\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}k)$.

Para enunciarmos os próximos resultados, precisamos antes de algumas definições. Seja M um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p, onde G é um grupo pro-p. Uma *filtração* de M é uma família $\{F_j\}$ de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-submódulos pro-p de M tais que

$$\cdots \leq F_{j-1} \leq F_j \leq F_{j+1} \leq \cdots .$$

Uma filtração de M é *limitada* se existem inteiros s e t tais que $F_s = 0$ e $F_t = M$. Os quocientes de um filtração de M são os $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p F_j/F_{j-1}. Um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-*subquociente pro-p* de M é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p M'/M'' onde $M'' \subseteq M'$ são $[[\mathbb{Z}_pG]]$-submódulos pro-p de M. Os seguintes resultados foram provados por Kochloukova. O Teorema 1.34 é um corolário de um resultado de H. Cartan [9, p.1363, p.1370] sobre homologia de grupos abstratos.

Teorema 1.34 ([18, Teorema B]). *Se A é um grupo pro-p abeliano de expoente p, então $H_n(A,\mathbb{F}_p)$ tem uma filtração de $\mathbb{Z}_p$-submódulos com fatores que podem ser mergulhados em um dos módulos*

$$\begin{array}{c} (\widehat{\bigwedge}_{\mathbb{Z}_p}^{n-2r}A)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{S}^r_{\mathbb{Z}_p}(A) \quad \text{para } 0 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right] \text{ e } p \neq 2, \\ \widehat{S}^n_{\mathbb{Z}_2}(A) \quad \text{para } p = 2, \end{array}$$

onde $\widehat{S}^k_{\mathbb{Z}_p}(A)$ denota o k-ésimo produto tensorial simétrico completo de A sobre $\mathbb{Z}_p$. Além disso, se A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p, para algum grupo pro-p Q, então a filtração acima é de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulos pro-p e a ação de Q nos quocientes é a induzida pela ação diagonal de Q em $\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{Z}_p}^{n-r}A$ para $0 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Corolário 1.35 ([18, Corolário C]). *Seja A um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado, onde Q é um grupo pro-p de posto finito. Então $H_n(A,\mathbb{F}_p)$ tem uma filtração de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulos com quocientes que são $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-subquocientes pro-p de*

$$H_{\alpha_1}(A_1,\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{\alpha_2}(A_2,\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\cdots\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{\alpha_s}(A_s,\mathbb{F}_p)$$

onde $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n$, A *tem um filtração*

$$B_1 = A \supseteq B_2 = \mathrm{tor}A \supseteq B_3 \supseteq \cdots \supseteq B_s \supseteq B_{s+1} = 0,$$

$A_j = B_j/B_{j+1}$, A_j *tem expoente* p, *para* $j \geq 2$, *e a ação de* Q *no produto tensorial completo acima é a diagonal.*

Observamos que as filtrações dadas pelos resultados acima são limitadas. Além disso, note que se M é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p de expoente p (possivelmente com $G = 1$), podemos vê-lo como um módulo sobre $[[\mathbb{F}_pG]] = [[\mathbb{Z}_pG]]/p[[\mathbb{Z}_pG]]$ e para tais módulos o funtor $-\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}-$ coincide com $-\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{F}_pG]]}-$.

1.6 O invariante para grupos pro-p

Em [15], King definiu um invariante para grupos pro-p metabelianos finitamente gerados que tornou-se importante na classificação dos grupos pro-p metabelianos de tipo FP_m. Para apresentar este invariante, precisamos introduzir a seguinte notação. Seja $\mathbb{F}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}_p$ e $\mathbb{F}[[T]]$ a álgebra das séries de potências formais com grupo de unidades $\mathbb{F}[[T]]^\times$. Note que $\mathbb{F}[[T]]$ não é um anel pro-p, já que a topologia de $\mathbb{F}$ é a topologia discreta e $\mathbb{F}$ é infinito, logo não compacto. Entretanto, $\mathbb{F}[[T]]$ tem muito em comum com anéis pro-p [15, Lema 2.1]: $\mathbb{F}[[T]]$ é um anel local comutativo abstratamente Noetheriano; uma base de vizinhanças de 0 é dada por $\{T^i\mathbb{F}[[T]] \mid i \geq 1\}$; o grupo de unidades $\mathbb{F}[[T]]^\times$ é isomorfo a $\mathbb{F}^\times \times (1 + T\mathbb{F}[[T]])$. Além disso, todo subgrupo fechado finitamente gerado de $1 + T\mathbb{F}[[T]]$ é um grupo pro-p abeliano livre.

Seja Q um grupo pro-p abeliano topologicamente finitamente gerado e $T(Q)$ o conjunto $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{F}[[T]]^\times)$ de homomorfismos contínuos de Q em $\mathbb{F}[[T]]^\times$. A imagem de cada homomorfismo em $T(Q)$ deve ser um subgrupo finitamente gerado de $1 + T\mathbb{F}[[T]]$. Escrevemos 1 para o homomorfismo trivial. Pela propriedade universal da álgebra de grupo completa $[[\mathbb{Z}_pQ]]$, cada $v \in T(Q)$ estende-se a um único homomorfismo (automaticamente contínuo) de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ em $\mathbb{F}[[T]]$ que denotamos por $\overline{v}$.

Definição 1.36. *Seja* A *um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado. O invariante de J.King é definido por*

$$\Delta_A(Q) = \{v \in T(Q) \mid A^\circ \leq \mathrm{Ker}\overline{v}\} \cup \{1\},$$

onde $A^\circ = Ann_{[[\mathbb{Z}_pQ]]}(A)$ *é o ideal anulador de* A *em* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$, *ou seja, o conjunto dos elementos* $\lambda \in [[\mathbb{Z}_pQ]]$ *tais que* $A\lambda = 0$.

Esse invariante foi recentemente generalizado para o caso de grupos pro-p de tipo FP_m em [22]. Destacamos abaixo algumas propriedades sobre $\Delta_A(Q)$.

Lema 1.37 ([15], Lemas 2.3 e 2.4). *Seja* A *um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado.*

(i) $\Delta_A(Q) = \Delta_{\frac{A}{pA}}(Q)$;

(ii) $\Delta_A(Q) = \Delta_{\frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{A^\circ}}(Q) = \Delta_{\frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{\sqrt{A^\circ}}}(Q)$;

(iii) *Se* C *é um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-submódulo pro-p of* A *(como* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ *é Noetheriano,* C *é finitamente gerado sobre* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*), então* $\Delta_A(Q) = \Delta_C(Q) \cup \Delta_{A/C}(Q)$.

Proposição 1.38 ([15], Corolário 2.6). *Seja* A *um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado,* P *um subgrupo fechado de* Q *e* $T(Q,P) = \{v \in T(Q) \mid v(P) = 1\}$. *Então* A *é finitamente gerado como* $[[\mathbb{Z}_pP]]$*-módulo pro-p se, e somente se,* $T(Q,P) \cap \Delta_A(Q) = \{1\}$.

Para a próxima propriedade, vamos fixar a seguinte notação. Sejam Q_1 e Q_2 grupos pro-p abelianos finitamente gerados e $Q = Q_1 \oplus Q_2$. Temos que as projeções $\pi_1 : Q \to Q_1$ e $\pi_2 : Q \to Q_2$ induzem monomorfismos $\pi_1^* : T(Q_1) \to T(Q)$ e $\pi_2^* : T(Q_2) \to T(Q)$. Se S_1 e S_2 são subconjuntos de $T(Q)$, escrevemos S_1S_2 para o conjunto dos produtos dado pela multiplicação em $T(Q)$.

Proposição 1.39 ([15, Proposição 2.7]). *Seja* A_1 *um* $[[\mathbb{Z}_pQ_1]]$*-módulo pro-p finitamente gerado e* A_2 *um* $[[\mathbb{Z}_pQ_2]]$*-módulo pro-p finitamente gerado. Então o produto tensorial completo* $A_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} A_2$ *é um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado e*

$$\Delta_{A_1\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}A_2}(Q) = (\pi_1^*\Delta_{A_1}(Q_1))(\pi_2^*\Delta_{A_2}(Q_2)).$$

1.7 Teoremas de classificação dos grupos pro-p metabelianos de tipo FP_m

Nesta seção apresentamos os resultados conhecidos que classificam os grupo pro-p metabelia-nos de tipo FP_m. O primeiro, devido a King, diz que se G é um grupo pro-p metabeliano

de posto finito, então G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$, para todo $m \geq 0$, e que a recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.40 ([14], Teorema 6.2). *Seja G um grupo pro-p e A um subgrupo normal abeliano fechado de G tal que G/A tem posto finito. Então são equivalentes:*

(i) *A é finitamente gerado como grupo pro-p abeliano;*

(ii) *G tem posto finito;*

(iii) *G é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$.*

O próximo resultado, também devido a King, é um teorema de imersão.

Teorema 1.41 ([13], Teorema C). *Todo grupo pro-p metabeliano finitamente gerado mergulha como subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano finitamente apresentável.*

Pelo Corolário 1.27(ii), o Teorema 1.41 diz que todo grupo pro-p metabeliano finitamente gerado G mergulha como subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano de tipo FP_2 sobre $\mathbb{Z}_p$. Em sua tese de doutorado [12], King conjecturou que, para cada m, G mergulha como subgrupo fechado num grupo pro-p metabeliano de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$. O Capítulo 2 do nosso trabalho é dedicado à prova dessa conjectura.

O seguinte teorema classifica, para m arbitrário, os grupos pro-p metabelianos de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$. A classificação é em termos do invariante $\Delta_A(Q)$ definido na Seção 1.6.

Teorema 1.42 ([18, Teorema D]). *Suponha que $1 \to A \to G \to Q \to 1$ é uma seqüência exata de grupos pro-p, onde G é topologicamente finitamente gerado, A e Q são abelianos. Considere A como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p via conjugação em G. Então são equivalentes:*

(i) *G é de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$;*

(ii) *o m-ésimo produto tensorial completo $\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p} A$ de A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q;*

(iii) *a m-ésima potência exterior completa $\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}(A)$ de A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q;*

(iv) *o m-ésimo produto tensorial simétrico completo $\widehat{S}^m_{\mathbb{Z}_p}(A)$ de A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q;*

(v) *A é "m-tame" sobre* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$, *isto é, se* $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \Delta_A(Q)$ *satisfazem* $v_1v_2\cdots v_m = 1$ *então* $v_1 = v_2 = \cdots = v_m = 1$.

No caso $m = 2$, as equivalências de (i), (ii), (iii) e (v) foram provadas por King em [15]. Para m arbitrário, King provou, em [14, Corolário B], que (i) implica em (iii) e, em [15, Teorema E], que (ii) e (v) são equivalentes. King conjecturou que as implicações restantes seriam verdadeiras, dando origem à versão pro-p da Conjectura FP_m [15, Conjectura 3.3]. Em [18], Kochloukova provou o Teorema 1.42 respondendo assim positivamente à conjectura. No caso de grupos abstratos, a Conjectura FP_m [3] está ainda em aberto sendo provada em alguns casos particulares [6, 5, 1, 16]. Em [17, Conjectura 7], Kochloukova enuncia, no caso de grupos abstratos, uma conjectura que pode ser vista como uma generalização da Conjectura FP_m. O Capítulo 3 é dedicado à prova da versão pro-p da Conjectura FP_m generalizada, que caracteriza certos $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p B de tipo homológico FP_m sobre um grupo pro-p metabeliano finitamente gerado G. Quando $B = \mathbb{Z}_p$, considerado como G-módulo trivial, o resultado reduz-se ao Teorema 1.42.

CAPÍTULO 2

Propriedades de imersão de grupos pro-p metabelianos

Em sua tese de doutorado, Jeremy King estudou propriedades gerais de grupos pro-p de tipo homológico FP_m e classificou os grupos pro-p metabelianos finitamente apresentáveis. King provou que todo grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado G mergulha como subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano finitamente apresentável e conjecturou que, para um inteiro positivo m fixado, o grupo G mergulha como subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano de tipo FP_m. O resultado principal deste capítulo é a prova dessa conjectura.

Teorema A. *Seja G um grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado. Então, para cada número natural m, G mergulha como subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Observe que o Teorema A vale para $m = \infty$ se, e somente se, G tem posto finito, já que um grupo pro-p metabeliano é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, ele tem posto finito (Teorema 1.40) e a classe de grupos pro-p de posto finito é fechada para subgrupos (fechados).

É interessante notar que nossa prova não está contida na categoria de grupos pro-p. Apesar de o invariante $\Delta_A(Q)$ definido na Seção 1.6 capturar todas as informações necessárias para estabelecer o tipo homológico de um grupo pro-p metabeliano finitamente gerado, fazer

cálculos diretos com o invariante é bastante difícil. Nossa prova evita tais cálculos utilizando alguns resultados conhecidos que relaciona valorizações com produtos tensoriais abstratos finitamente gerados [4]. Tais resultados são apresentados na Seção 2.1, bem como nosso primeiro resultado auxiliar para a prova do Teorema A (veja Teorema 2.5). Voltamos para os grupos pro-p através de alguns específicos sistemas e limites inversos que apresentamos na Seção 2.2 (Lema 2.8) a qual é dedicada a prova do Teorema A.

2.1 Produtos tensoriais abstratos e valorizações

Nesta seção descrevemos o invariante de Bieri-Groves para grupos abstratos finitamente gerados definido em [4]. Sua definição envolve o conceito de valorizações no sentido de Bourbaki [7, VI.3.1] o qual faremos um breve resumo na Subseção 2.1.1. Na Subseção 2.1.2 definimos o invariante e apresentamos o resultado principal de [4] que estabelece, em termos do invariante, quando o produto tensorial abstrato de um módulo sobre um grupo abstrato abeliano finitamente gerado é finitamente gerado via a ação diagonal. Por fim aplicamos tais resultados no nosso primeiro resultado auxiliar para a prova do Teorema A.

2.1.1 Valorizações

Considere $\mathbb{R}$ como um grupo abeliano via adição e denote por $\mathbb{R}_\infty$ o conjunto obtido adicionando-se a $\mathbb{R}$ um elemento denotado por $+\infty$ sujeito às seguintes regras: $\alpha < +\infty$ e $\alpha + (+\infty) = +\infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Definição 2.1. *Seja R um anel comutativo com unidade. Uma* valorização real *de R é uma aplicação $v : R \to \mathbb{R}_\infty$ que satisfaz, para todos $x, y \in R$,*

(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(ii) $v(x + y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$,

(iii) $v(1) = 0$ *e* $v(0) = +\infty$.

Se $R \setminus \{0\}$ não tem divisores de zero, a única aplicação v de R em $\mathbb{R}_\infty$ tal que $v(x) = 0$, se $x \neq 0$, e $v(0) = +\infty$ é uma valorização chamada *valorização trivial* de R. Uma valorização real de R é dita *discreta* se o grupo de valores $v(R) \setminus \{+\infty\}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Se $z \in R$ é tal que $z^n = 1$ para algum inteiro $n \geq 1$, então $nv(z) = v(z^n) = 0$ e portanto $v(z) = 0$ para toda valorização real de R. Em particular, toda valorização real do corpo $\mathbb{F}_p$ é trivial.

Note que $v^{-1}(+\infty)$ é um ideal de R distinto de R já que $v(1) = 0$. Além disso, se $v(xy) = +\infty$ então necessariamente $v(x) = +\infty$ ou $v(y) = +\infty$, i.e., $v^{-1}(+\infty)$ é um ideal primo de R. Assim, se $R = K$ é um corpo, então para $x \in K \setminus \{0\}$ temos $v(x) \neq +\infty$, para toda valorização real de K. Se R é um domínio de integridade e K é o corpo de frações de R, toda valorização real v de R tal que $v^{-1}(+\infty) = 0$ pode ser estendida de forma única a uma valorização $\widetilde{v}$ de K.

Se v é uma valorização real de um corpo K, o conjunto A dos elementos $x \in K$ tais que $v(x) \geq 0$ é um subanel de K chamado o anel da valorização v. De fato, A é um *anel de valorização* de K no sentido de [7, VI.1.2]. Duas valorizações reais de um corpo K são ditas equivalentes se elas têm o mesmo anel. Por [7, VI.3.2 prop.3], duas valorizações reais v e v' de K são equivalentes se, e somente se, existe um isomorfismo λ (que preserva ordem) de $v(K \setminus \{0\})$ em $v'(K \setminus \{0\})$ tal que $v' = \lambda v$, ou seja, v' é um múltiplo real positivo de v.

2.1.2 Invariante de Bieri-Groves

Seja R um anel comutativo com unidade, G um grupo abstrato abeliano finitamente gerado e M um RG-módulo abstrato (à direita) finitamente gerado. Denote por $Ann_{RG}(M)$ o ideal anulador de M em RG, isto é, o ideal de RG formado pelos elementos $\lambda \in RG$ tais que $M\lambda = 0$. Seja $A = RG/Ann_{RG}(M)$ a álgebra de endomorfismos de M induzidos por RG e $\kappa : RG \to A$ a projeção natural.

Definição 2.2 (Bieri-Groves). *Se $v : R \to \mathbb{R}_\infty$ é uma valorização real de R, então definimos $\Delta^v_M(Q)$ como o subconjunto de* $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ *formado por todos os homomorfismos χ tais que existe uma valorização $w : A \to \mathbb{R}_\infty$ satisfazendo*

$$(w \circ \kappa)|_R = v, \quad (w \circ \kappa)|_G = \chi.$$

Suponha agora que $G = \prod_{i=1}^k G_i$ é um produto direto de grupos abelianos finitamente gerados G_i e que $M = \bigotimes_{i=1}^k M_i$ é um produto tensorial sobre R de RG_i-módulos finitamente gerados M_i. Então M tem uma estrutura natural de $\bigotimes_{i=1}^k RG_i (\cong RG)$-módulo. Sejam $\pi_i : G \to G_i$ as projeções naturais e $\pi_i^* : \mathrm{Hom}(G_i, \mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ os monomorfismos

induzidos. Como podemos ver na seguinte proposição, é possível descrever $\Delta^v_M(G)$ em termos de $\Delta^v_{M_i}(G_i)$ para certas valorizações de R.

Proposição 2.3 ([4, 4.2]). *Se v é uma valorização discreta de R que é não negativa em R, então*

$$\Delta^v_M(G) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i^* \left(\Delta^v_{M_i}(G_i)\right).$$

Dizemos que um subconjunto Δ de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ é *"m-tame"* se quando $\chi_1, \ldots, \chi_m \in \Delta$ satisfazem $\chi_1 + \cdots + \chi_m = 0$ então $\chi_1 = \cdots = \chi_m = 0$.

Teorema 2.4 ([4, 5.2]). *Sejam R, G e M como na Definição 2.2 e suponha que R é Noetheriano. Então o RG-módulo $\bigotimes_R^m M$ é finitamente gerado via a ação diagonal de G se, e somente se, $\Delta^v_M(G)$ é "m-tame" para cada valorização real discreta v de R que é não negativa em R.*

Lembre que a ação diagonal de G em $\bigotimes_R^m M$ é a ação induzida pela imersão diagonal $g \mapsto (g, g, \ldots, g)$ de G em $G^m \cong G \times \cdots \times G$, já que $\bigotimes_R^m M$ tem uma estrutura natural de $\bigotimes_R^m RG (\cong RG^m)$-módulo. A ação diagonal pode também ser definida simplesmente em cada tensor puro por $(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m)g := x_1 g \otimes x_2 g \otimes \cdots \otimes x_m g$, se $x_i \in M$ e $g \in G$, e estendida linearmente.

2.1.3 Alguns produtos tensoriais finitamente gerados

Vamos agora aplicar os resultados da Subseção 2.1.2 para provar nosso primeiro resultado auxiliar. Para isso, considere a seguinte notação. Para cada $i = 1, 2, \ldots, d$, sejam $f_{i,1} = X_i$, $f_{i,2}$, $\ldots$, $f_{i,m}$ polinômios irredutíveis distintos dois a dois no anel de polinômios $\mathbb{F}_p[X_i]$ e defina

$$A_i = \mathbb{F}_p\left[X_i, \frac{1}{X_i}, \frac{1}{f_{i,2}}, \frac{1}{f_{i,3}}, \ldots, \frac{1}{f_{i,m}}\right].$$

Note que existem polinômios irredutíveis em $\mathbb{F}_p[X_i]$ de qualquer grau [25, Corolário 2.11].

Seja Q_i o grupo abstrato abeliano livre em $\{q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,m}\}$ e suponha que Q_i age em A_i por $a \cdot q_{i,j} = a \cdot f_{i,j}$. Defina $A^* = A_1 \otimes_{\mathbb{F}_p} A_2 \otimes_{\mathbb{F}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_p} A_d$ e $Q^* = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_d$. Então A^* pode ser visto como um $\mathbb{F}_p Q^*$-módulo à direita, onde Q^* age em A^* componente a componente.

Teorema 2.5. *O m-ésimo produto tensorial $\bigotimes_{\mathbb{F}_p}^m A^*$ é finitamente gerado como um $\mathbb{F}_pQ^*$-módulo via a ação diagonal de Q^*.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.4, temos que mostrar que $\Delta_{A^*}^{v=0}(Q^*)$ é "m-tame", já que toda valorização de $\mathbb{F}_p$ é trivial. Em vista do Teorema 2.3 vamos, primeiramente, estudar $\Delta_{A_i}^{v=0}(Q_i)$ com $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ fixado. Para simplificar a notação, vamos escrever somente A, Q, X, $f_j(X)$ e q_j para representar A_i, Q_i, X_i, $f_{i,j}(X_i)$ e $q_{i,j}$, onde $j = 1, 2, \ldots, m$ e i está fixado.

O corpo de frações de A é o corpo de funções racionais $\mathbb{F}_p(X)$. Note que, em geral, não é sempre possível estender as valorizações $w : A \to \mathbb{R}_\infty$ da Definição 2.2 para o corpo de frações de A, pois nada garante que $w^{-1}(+\infty) = 0$. Vamos mostrar que, no nosso caso específico, isso é possível porque A tem dimensão de Krull igual a 1. Primeiramente observe que o ideal I de A gerado pela variável X tem índice finito em A. De fato, temos que $1/X = X/X^2 \in I$ e, para cada $j \geq 2$, $f_j(X) = a_{0,j} + a_{1,j}X + \cdots + a_{n_j,j}X^{n_j} \equiv a_{0,j}$ módulo I, para certos $a_{k,j} \in \mathbb{F}_p$ com $a_{0,j} \neq 0$ já que $f_j(X)$ é irredutível. Então $1/f_j(X) \equiv a_{0,j}^{-1}$ módulo I e, portanto, I tem índice finito (igual a p) em A. Agora, pelo teorema de Krull para ideais principais [23, Cap.5, Teo.3.1], cada ideal primo minimal J que contém I tem altura no máximo 1. Como A é um domínio, J tem altura exatamente igual a 1, portanto a dimensão de Krull de A é igual a 1. Então, se $P = w^{-1}(\infty) \neq 0$, P é um ideal primo não trivial de A e portanto um ideal maximal em A. Então A/P é um anel Noetheriano de dimensão de Krull igual a zero, o que implica que A/P é Artiniano e tem dimensão finita sobre o subcorpo base $\mathbb{F}_p$. Mas isto é impossível desde que a imagem de w é infinita. Então $w^{-1}(\infty) = 0$ e w pode ser estendida para o corpo de frações $\mathbb{F}_p(X)$ de A.

Por [7, VI.3.4] as valorizações não triviais (a menos de equivalência) de $\mathbb{F}_p(X)$ que são triviais em $\mathbb{F}_p$ são a valorização v_∞ definida por

$$v_\infty(\frac{f(X)}{g(X)}) = -\deg(f) + \deg(g)$$

e as valorizações $v_{p(X)}$, onde $p(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ é um polinômio irredutível, definidas da seguinte maneira: cada $\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathbb{F}_p(X)$ pode ser escrito como $\frac{f(X)}{g(X)} = p(X)^k \frac{\tilde{f}(X)}{\tilde{g}(X)}$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f}(X)$, $\tilde{g}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ e $p(X)$ não divide $\tilde{f}(X)$ nem $\tilde{g}(X)$, então

$$v_{p(X)}(\frac{f(X)}{g(X)}) := k.$$

Temos $Q \hookrightarrow A$ por $q_j \mapsto f_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Seja $p(X)$ um polinômio irredutível em $\mathbb{F}_p[X]$. Se $p(X) \neq f_j(X)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, então $v_{p(X)}(f_j(X)) = 0$ para todo j, e portanto

$v_{p(X)}|_Q \equiv 0$. Se $p(X) = f_j(X)$, para algum $j = 1, 2, \ldots, m$, então $v_{f_j}(f_k(X)) = \delta_{k,j}$, onde $\delta_{k,j}$ é a função de Kronecker. Assim

$$\chi_j := v_{f_j}|_Q \in \Delta_A^{v=0}(Q).$$

Além disso, como $v_\infty(f_j(X)) = -\text{grau}(f_j)$, temos que

$$\chi_\infty := v_\infty|_Q \in \Delta_A^{v=0}(Q).$$

Então, se $\chi \in \Delta_A^{v=0}(Q)\backslash\{0\}$, existe uma valorização $\omega : A \to \mathbb{R}_\infty$ tal que $\omega|_{\mathbb{F}_p} = 0$ e $\omega|_Q = \chi$. Então temos $\chi \in \mathbb{R}_{>0}\chi_j$ (i.e., χ é um múltiplo real positivo de χ_j), para algum $j = 1, 2, \ldots, m$, ou $\chi \in \mathbb{R}_{>0}\chi_\infty$.

Vamos agora provar que $\Delta_A^{v=0}(Q)$ é "m-tame". Observe que existe um isomorfismo de grupos abelianos aditivos $\theta : \mathbb{R}^m \to \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ dado por $\theta(v)(q) = (v, q)$, onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^m$ e Q está identificado com o subconjunto $\mathbb{Z}^m$ de $\mathbb{R}^m$. Então

$$\theta^{-1}(\Delta_A^{v=0}(Q) \setminus \{0\}) = \theta^{-1}((\cup_{i=1}^m \mathbb{R}_{>0}\chi_i) \cup \mathbb{R}_{>0}\chi_\infty)$$

$$= \mathbb{R}_{>0}e_1 \cup \ldots \cup \mathbb{R}_{>0}e_m \cup \mathbb{R}_{>0}(-\text{grau}(f_1), -\text{grau}(f_2), \ldots, -\text{grau}(f_m)),$$

onde $\{e_i\}_{1 \le i \le m}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Portanto $\theta^{-1}(\Delta_A^{v=0}(Q)\setminus\{0\})$ é uma união de $m+1$ raios abertos tais que cada subconjunto contendo m raios abertos está contido em um semi-espaço aberto. Isso implica que $\Delta_A^{v=0}(Q)$ é "m-tame", i.e., $\Delta_{A_i}^{v=0}(Q_i)$ é "m-tame" para cada $i = 1, 2, \ldots, d$. [É fácil ver que $\Delta_A^{v=0}(Q)$ não é "$(m+1)$-tame", mas nós não precisaremos deste fato.]

Pela Proposição 2.3, temos $\Delta_{A^*}^{v=0}(Q^*) = \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\Delta_{A_i}^{v=0}(Q_i))$. Então todo $\chi \in \Delta_{A^*}^{v=0}(Q^*)$ pode ser escrito como

$$\chi = \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\chi_i), \quad \text{para certos } \chi_i \in \Delta_{A_i}^{v=0}(Q_i),\ i = 1, 2, \ldots, d.$$

Assim, se $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(m)} \in \Delta_{A^*}^{v=0}(Q^*)$, temos

$$\chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \cdots + \chi^{(m)} = \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\chi_i^{(1)}) + \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\chi_i^{(2)}) + \cdots + \sum_{i=1}^d \pi_i^*(\chi_i^{(m)})$$

$$= \sum_{i=1}^d \chi_i^{(1)} \circ \pi_i + \sum_{i=1}^d \chi_i^{(2)} \circ \pi_i + \cdots + \sum_{i=1}^d \chi_i^{(m)} \circ \pi_i$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \chi_1^{(j)} \circ \pi_1 + \sum_{j=1}^{m} \chi_2^{(j)} \circ \pi_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \chi_d^{(j)} \circ \pi_d = \sum_{i=1}^{d} ((\sum_{j=1}^{m} \chi_i^{(j)}) \circ \pi_i),$$

para certos $\chi_i^{(j)} \in \Delta_{A_i}^{v=0}(Q_i)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Isto implica que, se $\chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \cdots + \chi^{(m)} = 0$, então $\sum_{j=1}^{m} \chi_i^{(j)} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, d$. Lembrando que cada $\Delta_{A_i}^{v=0}(Q_i)$ é "m-tame", segue que $\chi_i^{(j)} = 0$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$. Portanto $\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \cdots = \chi^{(m)} = 0$ e $\Delta_{A^*}^{v=0}(Q^*)$ é "m-tame", como queríamos. ∎

2.2 Prova do Teorema A

Nossa prova para o Teorema A é feita por construção, ou seja, vamos construir, a partir do grupo pro-p metabeliano finitamente gerado dado, um grupo pro-p metabeliano que é de tipo FP_m. O seguinte resultado que diz que o problema pode ser reduzido para grupos pro-p metabelianos que são extensões cindidas de grupos abelianos.

Lema 2.6 ([13, Corolário 3.2]). *Seja G um grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado. Então G mergulha em $Q \ltimes (A/B)$, onde $Q = G/[G, G]$, A é um $[[\mathbb{Z}_p Q]]$-módulo pro-p livre de posto finito e B é um $[[\mathbb{Z}_p Q]]$-submódulo pro-p de A.*

O problema está então reduzido a encontrar um grupo pro-p metabeliano de tipo FP_m tal que o grupo pro-p $Q \ltimes (A/B)$ dado pelo lema acima pode ser mergulhado. Seria também interessante podermos trabalhar apenas com $Q \ltimes A$, para simplificar ainda mais o problema. O próximo resultado diz que os quocientes de um grupo pro-p metabeliano G têm o mesmo tipo homológico de G.

Proposição 2.7. *Seja m um número natural e G um grupo pro-p metabeliano do tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$. Então toda imagem de G é também de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que para cada subgrupo normal fechado N de G, G/N é de tipo FP_m. Como G é metabeliano, existe um subgrupo normal fechado abeliano A de G tal que $Q = G/A$ é abeliano. Para cada subgrupo normal fechado N de G, temos que $N \cap A$ é um subgrupo normal fechado de G contido em A. Pelo Teorema 1.42, A é "m-tame" como Q-módulo pro-p, logo segue do Lema 1.37(iii) que $A/(N \cap A)$ também é "m-tame" como Q-módulo pro-p. Aplicando o Teorema 1.42 novamente, concluímos que $G/(N \cap A)$ é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ e portanto podemos assumir que $N \cap A$ é trivial. Com isso, a imagem de N pela projeção canônica em Q é isomorfa a N. Como Q é um grupo pro-p

abeliano topologicamente finitamente gerado, N é um grupo pro-p de posto finito. Então, pelo Teorema 1.40, N é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ o que junto com a Proposição 1.28 implica que G/N tem o mesmo tipo homológico de G, i.e., G/N é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$. ∎

A versão abstrata da Proposição 2.7, ou seja, que os quocientes de grupos metabelianos abstratos têm o mesmo tipo homológico do grupo, ainda não está provada para m geral. Isto porque a versão abstrata do Teorema 1.42, a Conjectura FP_m, também está em aberto para m geral. Entretanto, Kochloukova e Groves apresentaram em [11, Proposição 1] uma prova direta de que, para $m \leq 4$, quocientes de um grupo abstrato metabeliano de tipo FP_m que é uma extensão cindida de grupos abelianos também têm tipo homológico FP_m. Com isso, os autores também provaram para $m = 4$ a versão abstrata do Teorema A [11, Corolário 1].

Considere agora A^* e Q^* como no Teorema 2.5 e suponha que $f_{i,j}(1) = 1$ para $i = 1, \ldots, d$ e $j = 1, \ldots, m$. Note que não estamos exigindo que $f_{i,j}$ seja mônico, então se $f_{i,j}(1) \notin \{0, 1\}$ podemos substituir $f_{i,j}$ por $f_{i,j}/f_{i,j}(1)$. Além disso, $f_{i,j}(1) = 0$ implica que $f_{i,j} = c(x_i - 1)$ para alguma constante $c \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$, um caso que pode ser evitado. Isso mostra que existem infinitos polinômios irredutíveis distintos em $\mathbb{F}_p[X_i]$ com valor 1 em 1.

Lema 2.8. *Sejam A^* e Q^* como no Teorema 2.5 e suponha que $f_{i,j}(1) = 1$ para $i = 1, \ldots, d$ e $j = 1, \ldots, m$. Para $k > 0$, seja $I_{i,k}$ o ideal de A_i gerado por t_i^k, onde $t_i = X_i - 1$. Então*

(a) *cada $I_{i,k}$ tem índice finito em A_i igual a uma potência de p e $\bigcap_{k\geq 0} I_{i,k} = 0$.*

(b) $C := \varprojlim_k \left(\frac{A_1}{I_{1,k}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \frac{A_2}{I_{2,k}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_p} \frac{A_d}{I_{d,k}} \right) \cong \mathbb{F}_p[[t_1, t_2, \ldots, t_d]]$.

(c) $\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p} C$ *é um $[[\mathbb{F}_p Q^*_{\widehat{p}}]]$-módulo pro-$p$ finitamente gerado via a ação diagonal de $Q^*_{\widehat{p}}$, onde $Q^*_{\widehat{p}}$ é o completamento pro-p de Q^*.*

Demonstração. (a) Fixemos, por exemplo, $i = 1$. Temos

$$A_1 = \mathbb{F}_p \left[t_1, \frac{1}{1+t_1}, \frac{1}{g_{1,2}}, \cdots, \frac{1}{g_{1,m}} \right],$$

onde $g_{1,j} = f_{1,j}(1 + t_1)$. Como $f_{1,j}(1) = 1$, cada $g_{1,j}$ tem termo constante com respeito à variável t_1 igual a 1, digamos

$$g_{1,j} = 1 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \cdots + a_r t_1^r \qquad (a_i \in \mathbb{F}_p).$$

Como A_1 tem característica p, temos que

$$g_{1,j}^{p^k} = 1 + a_1 t_1^{p^k} + a_2 t_1^{2p^k} + \cdots + a_r t_1^{rp^k},$$

ou seja, $-1+g_{1,j}^{p^k} \in I_{1,k}$ e $(\frac{1}{g_{1,j}})^{p^k} \equiv 1$ em $A_1/I_{1,k}$. Então $I_{1,k}$ tem índice finito em A_1. Como A_1 tem característica p esse índice é uma potência de p.

Seja v_{t_1} a valorização (t_1)-ádica de $\mathbb{F}_p(t_1)$. Para cada $a \in I_{1,k}$, temos $v_{t_1}(a) \geq k$, já que t_1 não divide o polinômio irredutível $g_{1,j}$ em $\mathbb{F}_p[t_1]$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Então, se $a \in \bigcap_{k\geq 0} I_{1,k}$ temos $v_{t_1}(a) \geq k$ para todo k e portanto $a = 0$. Isto completa a prova do item (a).

(b) Seja $\mathcal{N} = \{I_{1,k}\}_{k\geq 0}$. Note que $\mathcal{N}$ determina uma topologia em A_1 e considere

$$A_1^* = \varprojlim_k A_1/I_{1,k}$$

o completamento de A_1 com respeito a essa topologia. Como $\bigcap_{k\geq 0} I_{1,k} = 0$, temos que o homomorfismo contínuo $A_1 \to A_1^*$ é injetivo. Note agora que $B = \mathbb{F}_p[t_1] \hookrightarrow A_1$ e portanto $\mathcal{N}$ induz em B a topologia determinada por $\mathcal{M} = \{I_{1,k} \cap B\}_{k\geq 0} = \{b \in B \mid v_{t_1}(b) \geq k\}_{k\geq 0}$. Completando B com respeito à topologia determinada por $\mathcal{M}$, obtemos o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{J\in\mathcal{M}} \mathbb{F}_p[t_1]/J & \xrightarrow{\varphi} & A_1^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ B = \mathbb{F}_p[t_1] & \hookrightarrow & A_1 \end{array}$$

Pelas definições de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$, vemos que a topologia pro-p de B, que é a topologia determinada pelos ideais (t_1^k) de B gerados por t_1^k, coincide com a topologia de B induzida por $\mathcal{N}$. Então, pelo Lema 1.3, φ é injetivo e

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{M}} \frac{\mathbb{F}_p[t_1]}{J} \cong \varprojlim_k \frac{\mathbb{F}_p[t_1]}{(t_1^k)} \cong \mathbb{F}_p[[t_1]].$$

Como já observado anteriormente cada $g_{1,j}$ tem termo constante igual a 1, então $1/g_{1,j} \in \mathbb{F}_p[[t_1]]$. Assim, $A_1 \subseteq \mathbb{F}_p[[t_1]]$ de onde concluímos que $A_1^* \cong \mathbb{F}_p[[t_1]]$, i.e., $A_i^* \cong \mathbb{F}_p[[t_i]]$, para $i = 1, \ldots, d$.

Agora, pelo Corolário 1.19, temos que

$$\begin{aligned} C &= A_1^* \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} A_2^* \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} \cdots \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} A_d^* \\ &\cong \mathbb{F}_p[[t_1]] \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[[t_2]] \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} \cdots \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[[t_d]] \\ &\cong \mathbb{F}_p[[t_1, t_2, \ldots, t_d]] \end{aligned}$$

e o item (b) está provado.

(c) O completamento pro-p $(Q_i)_{\widehat{p}}$ de Q_i é o grupo pro-p abeliano livre no conjunto $Y_i = \{q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,m}\}$. Para todo $k \geq 0$, $I_{i,k}$ é um ideal de A_i e portanto é invariante sob a ação de Y_i. Além disso, cada $q_{i,j}$ age em A_i via multiplicação por $g_{i,j}$ que tem termo constante igual a 1.

Afirmação 1: A ação de $(Q_i)_{\widehat{p}}$ em A_i^* é contínua e, portanto, A_i^* é um $[[\mathbb{F}_p(Q_i)_{\widehat{p}}]]$-módulo pro-$p$, para cada $i = 1, \ldots, d$.

De fato, fixemos $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Primeiro observe que basta mostrar que a ação de cada gerador $q_{i,j}$ de $(Q_i)_{\widehat{p}}$ é contínua, pois assim se $q = q_{i,1}^{\alpha_1} q_{i,2}^{\alpha_2} \ldots q_{i,m}^{\alpha_m} \in (Q_i)_{\widehat{p}}$ e $a \in A_i$, então $a(q_{i,1}^{\alpha_1} q_{i,2}^{\alpha_2} \ldots q_{i,m}^{\alpha_m}) = (aq_{i,1}^{\varepsilon})(q_{i,1}^{\alpha_1 - \varepsilon} q_{i,2}^{\alpha_2} \ldots q_{i,m}^{\alpha_m})$, onde ε é o sinal de α_1, ou seja, a ação de q em $a \in A_i$ é a composta de ações contínuas. Agora, para cada j, escreva $g_{i,j} = 1 + t_i h_j$, onde $h_j \in A_i$. Então $g_{i,j}^{p^s} - 1 \in I_{i,p^s}$ e, como $\bigcap_{k \geq 0} I_{i,k} = 0$, segue que $g_{i,j}^{p^s} \to 1$, quando $s \to \infty$. Portanto o subgrupo fechado de A_i^* gerado por $g_{i,j}$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_p$ e portanto age continuamente em A_i^*, o que prova a afirmação.

Como já observamos anteriormente, para cada i, $A_i^* \cong \mathbb{F}_p[[t_i]]$ é a álgebra de grupo completa do subgrupo pro-p cíclico de $(Q_i)_{\widehat{p}}$ (topologicamente) gerado por $q_{i,1}$. Portanto A_i^* é cíclico como $[[\mathbb{F}_p(Q_i)_{\widehat{p}}]]$-módulo. Como $Q_{\widehat{p}}^* = (Q_1)_{\widehat{p}} \oplus \cdots \oplus (Q_d)_{\widehat{p}}$, temos que

$$[[\mathbb{F}_p(Q_1)_{\widehat{p}}]] \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} \cdots \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} [[\mathbb{F}_p(Q_d)_{\widehat{p}}]] \cong [[\mathbb{F}_p Q_{\widehat{p}}^*]].$$

Segue então que C é um $[[\mathbb{F}_p Q_{\widehat{p}}^*]]$-módulo pro-$p$ cíclico.

Pela Proposição 1.22, $\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{F}_p}^m C$ é finitamente gerado como um $Q_{\widehat{p}}^*$-módulo pro-p se, e somente se, $\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{F}_p}^m C / [I(\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{F}_p}^m C)]$ tem dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$, onde I é o único ideal aberto maximal de $[[\mathbb{F}_p Q_{\widehat{p}}^*]]$, ou seja, I é o ideal de $[[\mathbb{F}_p Q_{\widehat{p}}^*]]$ topologicamente gerado por $Q_{\widehat{p}}^* - 1 = \{q - 1 \mid q \in Q_{\widehat{p}}^*\}$.

Pelo Teorema 2.5, $\bigotimes_{\mathbb{F}_p}^m A^*$ é gerado por um subconjunto finito Y como um Q^*-módulo abstrato via a ação diagonal. Então

$$\begin{aligned}
\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{F}_p}^m C / [I(\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{F}_p}^m C)] &= \left(\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{F}_p}^m C\right) \widehat{\otimes}_{[[\mathbb{F}_p Q_{\widehat{p}}^*]]} \mathbb{F}_p \\
&= \left[\widehat{\bigotimes}_{\mathbb{F}_p}^m \left(\varprojlim_k \frac{A_1}{I_{1,k}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_p} \frac{A_d}{I_{d,k}}\right)\right] \widehat{\otimes}_{[[\mathbb{F}_p Q_{\widehat{p}}^*]]} \mathbb{F}_p \\
&= \left[\varprojlim_k \bigotimes_{\mathbb{F}_p}^m \left(\frac{A_1}{I_{1,k}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_p} \frac{A_d}{I_{d,k}}\right)\right] \widehat{\otimes}_{[[\mathbb{F}_p Q_{\widehat{p}}^*]]} \mathbb{F}_p \\
&= \varprojlim_k \left[\bigotimes_{\mathbb{F}_p}^m \left(\frac{A_1}{I_{1,k}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_p} \frac{A_d}{I_{d,k}}\right) \otimes_{\mathbb{F}_p Q^*} \mathbb{F}_p\right]
\end{aligned}$$

Para cada k, o elemento dentro do colchete no último termo acima tem dimensão no máximo $|Y|$ sobre $\mathbb{F}_p$, já que a imagem de Y pela projeção $\otimes_{\mathbb{F}_p}^m A^* \to \otimes_{\mathbb{F}_p}^m (\frac{A_1}{I_{1,k}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_p} \frac{A_d}{I_{d,k}})$ gera

$\otimes_{\mathbb{F}_p}^m(\frac{A_1}{I_{1,k}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_p} \frac{A_d}{I_{d,k}})$ como $\mathbb{F}_pQ^*$-módulo. Finalmente, como o sistema inverso acima é sobrejetivo, segue que $\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}^m C/[I(\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}^m C)]$ tem dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$, o que completa a prova do lema. ∎

A partir do Lema 2.8 podemos provar o Teorema A para o grupo $Q \ltimes A$, onde A e Q são os grupos dados pelo Lema 2.6.

Teorema 2.9. *Seja Q um grupo pro-p abeliano topologicamente finitamente gerado e A um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p livre de posto finito. Então $Q \ltimes A$ mergulha como um subgrupo fechado em um grupo pro-p metabeliano $H_m \ltimes A$ de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ de forma que Q mergulha em H_m e a restrição desse mergulho a A é a identidade. Além disso, cada Q-submódulo pro-p de A (via conjugação) é invariante sob a ação de H_m (via conjugação).*

Demonstração. Como Q é um grupo pro-p abeliano topologicamente finitamente gerado, pelo Teorema 1.16, Q tem um subgrupo pro-p abeliano livre Q_0 de posto finito tal que $Q \cong Q_0 \oplus Q_{tor}$, onde Q_{tor} é um p-grupo abeliano finito. Além disso, a Proposição 1.10(i) nos diz que $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ_0]]$-módulo pro-p livre finitamente gerado. Assim, A é um $[[\mathbb{Z}_pQ_0]]$-módulo pro-p livre de posto finito. Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ uma base do grupo pro-p abeliano livre Q_0. Pelo Teorema 1.18, a álgebra de grupo completa $[[\mathbb{Z}_pQ_0]]$ é a álgebra das séries de potências formais $\mathbb{Z}_p[[t_1, t_2, \ldots, t_d]]$, onde $t_i = 1 - x_i$.

Sejam A^* e Q^* como no Teorema 2.5 com a hipótese adicional $f_{i,j}(1) = 1$, para $i = 1, \ldots, d$ e $j = 1, \ldots, m$. Então Q_0 mergulha em $Q_{\hat{p}}^*$ via a identificação $x_i = q_{i,1}$. Defina $H_m = Q_{\hat{p}}^* \oplus Q_{tor}$. Para $2 \leq j \leq m$, seja $\widetilde{f}_{i,j}$ um polinômio em $\mathbb{Z}_p[x_i]$ tal que $\widetilde{f}_{i,j}(1) = 1$ e a imagem de $\widetilde{f}_{i,j}$ em $\mathbb{F}_p[x_i]$ é $f_{i,j}$ e seja $\widetilde{f}_{i,1} = x_i$. Note que o grupo pro-$p$ abeliano livre $Q_{\hat{p}}^*$ tem $\{q_{i,j}\}_{1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq d}$ como uma base. Então A pode ser visto como um H_m-módulo pro-p à direita onde $q_{i,j}$ age em A via multiplicação por $\widetilde{f}_{i,j}$ e a ação de Q_{tor} é dada pela a ação "antiga" de Q_{tor} em A. Logo a ação de H_m estende a ação de Q em A. A continuidade da ação de $Q_{\hat{p}}^*$ em A segue do fato que $\widetilde{f}_{i,j}(1) = 1$, para todo i e j (veja a prova da Afirmação 1 na demonstração do Lema 2.8 (c)).

Vamos agora mostrar que $\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}^m A$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_pH_m]]$-módulo pro-p via a ação diagonal de H_m. É suficiente mostrar que $\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}^m A$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_pQ_{\hat{p}}^*]]$-módulo via a ação diagonal de $Q_{\hat{p}}^*$. Temos que A é um $[[\mathbb{Z}_pQ_0]]$-módulo pro-p livre de posto finito e $[[\mathbb{F}_pQ_0]]$ é isomorfo ao módulo C do Lema 2.8, portanto C é um $Q_{\hat{p}}^*$-módulo pro-p com $q_{i,j}$ agindo via multiplicação por $f_{i,j}$. Então A/pA é isomorfo como $Q_{\hat{p}}^*$-módulo pro-p a uma soma direta finita de cópias de C. Temos que $\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}^m A$ é finitamente gerado como

um $[[\mathbb{Z}_pQ_{\hat{p}}^*]]$-módulo pro-$p$ via a ação diagonal se, e somente se, $(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p \simeq \widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}(A/pA)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{F}_pQ_{\hat{p}}^*]]$-módulo pro-$p$ via a ação diagonal. Pelos argumentos acima, $\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}(A/pA)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{F}_pQ_{\hat{p}}^*]]$-módulo pro-$p$ via a ação diagonal se, e somente se, $\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}C$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{F}_pQ_{\hat{p}}^*]]$-módulo pro-$p$ via a ação diagonal. Pelo Lema 2.8(c) esta última condição é válida. Finalmente, pelo Teorema 1.42, $H_m \ltimes A$ é de tipo FP_m.

O fato que todo Q-submódulo pro-p de A é invariante sob a ação de H_m segue imediatamente da definição da ação de H_m. ∎

Agora estamos prontos para provar nosso resultado principal.

Teorema A. *Seja G um grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado. Então, para cada número natural m, G mergulha em um grupo pro-p metabeliano de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Seja G um grupo pro-p metabeliano topologicamente finitamente gerado. Então G mergulha no grupo $Q \ltimes (A/B)$ dado pelo Lema 2.6. Pelo Teorema 2.9, $Q \ltimes A$ mergulha como subgrupo fechado no grupo pro-p metabeliano $H_m \ltimes A$ que é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$. Como B é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulo pro-p de A, pelo Teorema 2.9, B é um $[[\mathbb{Z}_pH_m]]$-submódulo pro-p de A e podemos definir $H_m \ltimes (A/B)$. Então $Q \ltimes (A/B)$ mergulha como subgrupo fechado em $H_m \ltimes (A/B)$ e, pela Proposição 2.7, temos que $H_m \ltimes (A/B)$ é de tipo FP_m. ∎

CAPÍTULO 3

Conjectura FP_m generalizada

Seja G um grupo pro-p e B um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p. Por definição, B é de tipo homológico FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se B tem uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva onde todos os módulos em dimensão menor ou igual a m são finitamente gerados.

Neste capítulo, damos uma resposta positiva para a versão pro-p da Conjectura FP_m generalizada que classifica o tipo homológico de certos módulos pro-p sobre grupos metabelianos finitamente gerados que anunciamos a seguir. A classificação é dada em termos do invariante $\Delta_*(Q)$ definido na Seção 1.6 associado a um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado. O caso onde B é zero é degenerado e vamos excluí-lo. No decorrer de todo este capítulo, quando dizemos que um grupo pro-p G é finitamente gerado estamos dizendo que G é *topologicamente* finitamente gerado.

Teorema B: *Seja* $1 \to A \to G \to Q \to 1$ *uma seqüência exata de grupos pro-p tais que* A *e* Q *são abelianos e* G *é finitamente gerado. Seja* B *um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado visto como um* $[[\mathbb{Z}_pG]]$*-módulo pro-p via o epimorfismo* $G \to Q$*. Então são equivalentes:*

(i) B *é de tipo homológico* FP_m *sobre* $[[\mathbb{Z}_pG]]$*;*

(ii) $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ *é um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de* Q*;*

(iii) $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ *é um* $[[\mathbb{Z}_pQ]]$*-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de* Q*;*

(iv) *se* $v_1 \in \Delta_B(Q)$ *e* $v_2, \ldots, v_{m+1} \in \Delta_A(Q)$ *são tais que* $v_1 v_2 \cdots v_{m+1} = 1$, *então* $v_1 = v_2 = \cdots = v_{m+1} = 1$.

Note que, no Teorema B, o caso $B = \mathbb{Z}_p$ é exatamente a classificação dos grupos pro-p metabelianos finitamente gerados de tipo FP_m sugerida por King em [15] e provada por Kochloukova em [18, Theorem D] que enunciamos no Teorema 1.42. Esse caso particular é a versão pro-p da Conjectura FP_m. É importante mencionar que, a pesar de nosso teorema ser mais geral que o Teorema 1.42, usamos na nossa prova o fato que o resultado vale para $B = \mathbb{Z}_p$.

Destacamos também que a equivalência de (i) e (iv) no Teorema B implica que, quando m elementos de $\Delta_A(Q)$ têm produto trivial, cada um é trivial (i.e., A é "m-tame"). Então, em vista do Teorema 1.42, podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário C: Seja $1 \to A \to G \to Q \to 1$ uma seqüência exata de grupos pro-p tais que A e Q são abelianos e G é finitamente gerado. Seja B um $[[\mathbb{Z}_p Q]]$-módulo pro-p finitamente gerado visto como um $[[\mathbb{Z}_p G]]$-módulo pro-p via a projeção natural $G \to Q$. Se B é do tipo homológico FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_p G]]$, então G é de tipo homológico FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$.

A prova do Teorema B é feita em vários passos. Em um dos passos (veja Teorema 3.4), obtemos a seguinte equivalência auxiliar: B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_p G]]$ se, e somente se, $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_p A]]}(B, \mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{F}_p Q]]$-módulo pro-p, para todo $i \leq m$. Este resultado é uma importante ferramenta para a prova do Teorema B e é uma generalização do caso $B = \mathbb{Z}_p$, onde $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_p A]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p) = H_i(A, \mathbb{F}_p)$ é o i-ésimo grupo de homologia de A com coeficientes em $\mathbb{F}_p$, que enunciamos no Teorema 1.30. Em outro passo, aplicamos o Teorema dos coeficientes universais para obter uma relação entre $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_p A]]}(B, \mathbb{F}_p)$ e $H_i(A, \mathbb{Z}_p)$. Essa relação e alguns resultados sobre a estrutura do módulo $H_i(A, \mathbb{Z}_p)$ enunciados na Seção 1.5, nos permitirá de verificar que (i) implica em (iii) e que (ii) implica em (i) (veja Teoremas 3.5 e 3.9).

O Capítulo 3 é organizado em duas seções. Na Seção 3.1 apresentamos algumas definições básicas e provamos alguns resultados sobre homologia de módulos pro-p, inclusive a equivalência auxiliar acima mencionada. A Seção 3.2 é dedicada à prova do Teorema B.

3.1 Módulos pro-p de tipo FP_m

Seja G um grupo pro-p e B um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p (à direita). Uma *resolução* $[[\mathbb{Z}_pG]]$-*projetiva (à direita) de* B é uma seqüência exata na categoria de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p

$$\mathcal{P}: \quad \cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

onde cada P_i é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p (à direta) projetivo. Dado $0 \leq m \leq \infty$, dizemos que B *é de tipo* FP_m *sobre* $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se B possui uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva tal que cada P_i é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo para $0 \leq i \leq m$ (para todo i se $m = \infty$).

Observe que B é de tipo FP_0 sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se, e somente se, existe um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p livre finitamente gerado que é levado sobrejetivamente em B, ou seja, B é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p finitamente gerado. Além disso, B é finitamente apresentável se, e somente se, existe uma sequência exata

$$R \longrightarrow F_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p tal que F_0 é livre (e portanto projetivo) e F_0 e R são finitamente gerados. Então, se B é de tipo FP_1 sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ temos que B é finitamente apresentável. Reciprocamente, se B é finitamente apresentável, seja F_1 um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p livre que é levado sobrejetivamente em R. Então

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

é uma resolução parcial $[[\mathbb{Z}_pG]]$-livre de B com F_0 e F_1 finitamente gerados. Logo B é de tipo FP_1 sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$.

Seja agora L um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p (à esquerda) arbitrário e considere uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva $\mathcal{P}$ de B. Aplicando o funtor $-\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L$ no complexo apagado

$$\mathcal{P}_B = \quad \cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0,$$

obtemos o complexo

$$\mathcal{P}_B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L = \quad \cdots \longrightarrow P_i\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \longrightarrow P_{i-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L \longrightarrow 0.$$

Então $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B, L)$ é o i-ésimo grupo de homologia $H_i(\mathcal{P}_B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}L)$ desse complexo. Mais detalhes sobre propriedades homológicas de módulos profinitos podem ser encontradas em [28] e [31].

Observe que a partir da definição de módulos pro-p de tipo FP_m podemos reescrever a definição de grupos pro-p de tipo FP_m: um grupo pro-p G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se $\mathbb{Z}_p$ considerado como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo trivial é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$. Pelo Teorema 1.26, temos que G é de tipo FP_m se, e somente se, cada grupo de homologia $H_i(G,\mathbb{F}_p) = Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{F}_p)$ é finito para $i \leq m$. Além disso, vimos que se N é um subgrupo normal (fechado) de G, então G/N age continuamente em N via conjugação à direita, e se G/N tem posto finito, então $[[\mathbb{Z}_p(G/N)]]$ é topologicamente (e abstratamente) Noetheriano. Neste caso, G é de tipo FP_m se, e somente se, $H_i(N,\mathbb{F}_p)$ é um $[[\mathbb{Z}_p(G/N)]]$-módulo pro-p finitamente gerado para $i \leq m$ (Teorema 1.30).

Vamos agora provar tais resultados para o caso de módulos não triviais. No que se segue, k denota $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$. A prova do Teorema 3.1 é uma adaptação direta do caso $B = \mathbb{Z}_p$ com ação trivial de G [13, Teorema A].

Teorema 3.1. *Seja G um grupo pro-p, N um subgrupo normal fechado de G tal que G/N tem posto finito e B um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p. Então B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se, e somente se, $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]])$ é $[[k(G/N)]]$-módulo pro-p (à direita) finitamente gerado para $0 \leq i \leq m$, onde $k = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$.*

Demonstração. Suponha que B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$. Então existe uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva $\mathcal{P}$ de B tal que P_i é $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo finitamente gerado, para $0 \leq i \leq m$. Como $[[\mathbb{Z}_pG]]\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]] \cong [[k(G/N)]]$, temos que $P_i\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]]$ é um $[[k(G/N)]]$-módulo pro-p finitamente gerado para $0 \leq i \leq m$. Portanto, o subqüociente $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]])$ é um $[[k(G/N)]]$-módulo finitamente gerado, para $0 \leq i \leq m$, já que $[[\mathbb{Z}_p(G/N)]]$ é Noetheriano.

Reciprocamente, suponha que $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]])$ é um $[[k(G/N)]]$-módulo pro-p finitamente gerado para $0 \leq i \leq m$. Vamos aplicar indução sobre m. Para $m = 0$, temos que $Tor_0^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]]) \cong B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]]$ é $[[k(G/N)]]$-módulo finitamente gerado. Então, pela Proposição 1.22, $B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}\mathbb{F}_p \cong (B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]])\widehat{\otimes}_{[[k(G/N)]]}\mathbb{F}_p$ tem dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$. Aplicando novamente a Proposição 1.22, temos que B é $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p finitamente gerado. Mas isto é equivalente a B ser de tipo FP_0 sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$.

Suponha que $m > 0$. Por hipótese de indução, existe uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva

$$\cdots \to P_i \xrightarrow{\partial_i} P_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \to B \to 0$$

de B, onde cada P_i é $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p projetivo finitamente gerado para $i \leq m-1$.

Para cada i, seja K_i o núcleo da aplicação ∂_i (então $K_i = \mathrm{Im}\partial_{i+1}$). Denote $[[k(G/N)]]$ por S e considere seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P_{m+1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}S & \xrightarrow{\partial_{m+1}\widehat{\otimes}1} & P_m\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}S & \xrightarrow{\partial_m\widehat{\otimes}1} & P_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}S \\ \downarrow{\scriptstyle (\partial_{m+1}\widehat{\otimes}1)'} & \overset{\mu}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle (\partial_m\widehat{\otimes}1)'} & \overset{\gamma}{\nearrow} & \\ K_m\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}S & & K_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}S & & \end{array}$$

onde $\mu = (1|_{K_m})\widehat{\otimes}1$ e $\gamma = (1|_{K_{m-1}})\widehat{\otimes}1$. Note que os triângulos comutam e as aplicações verticais são sobrejetivas, já que $K_i = \mathrm{Im}\partial_{i+1}$ e $-\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}S$ é um funtor exato à direita. Logo

$$Tor_m^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,S) = \frac{\mathrm{Ker}\ \partial_m\widehat{\otimes}1}{\mathrm{Im}\ \partial_{m+1}\widehat{\otimes}1} = \frac{\mathrm{Ker}\ \gamma(\partial_m\widehat{\otimes}1)'}{\mathrm{Im}\ \mu} = \frac{\mathrm{Ker}\ \gamma(\partial_m\widehat{\otimes}1)'}{\mathrm{Ker}\ (\partial_m\widehat{\otimes}1)'} = \mathrm{Ker}\ \gamma.$$

Obtemos então a seguinte seqüência exata com aplicações contínuas.

$$0 \to Tor_m^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]]) \to K_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]] \to P_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]].$$

Por hipótese, $Tor_m^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]])$ é $[[k(G/N)]]$-módulo finitamente gerado e, por hipótese de indução, $P_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]]$ é $[[k(G/N)]]$-módulo finitamente gerado. Então, como $[[k(G/N)]]$ é Noetheriano, $K_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]]$ é $[[k(G/N)]]$-módulo finitamente gerado. Da Proposição 1.22, segue que $K_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}\mathbb{F}_p \cong (K_{m-1}\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]])\widehat{\otimes}_{[[k(G/N)]]}\mathbb{F}_p$ tem dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$ e portanto, aplicando novamente a Proposição 1.22, segue que K_{m-1} é $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo finitamente gerado. Seja F_m o $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo livre finitamente gerado que é levado sobrejetivamente em K_{m-1}. Então

$$F_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_0 \to B \to 0$$

é uma resolução parcial livre de B tal que F_m e P_i, $i < m$, são finitamente gerados como $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p. Completando essa resolução, concluímos que B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$. ∎

O seguinte resultado nos diz como que a propriedade FP_m se comporta em extensões.

Corolário 3.2. *Seja $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ uma seqüência exata de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulos pro-p e homomorfismos contínuos.*

(a) *Se A' é de tipo FP_{m-1} e A é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$, então A'' é de tipo FP_m.*

(b) *Se A é de tipo FP_{m-1} e A'' é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$, então A' é de tipo FP_{m-1}.*

(c) *Se A' e A'' são de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$, então A é de tipo FP_{m-1}.*

Demonstração. Basta aplicar a seqüência exata longa para o funtor $-\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}\mathbb{F}_p$ e usar a equivalência do Teorema 3.1. Vamos mostrar apenas o item (a), pois os outros ítens são mostrados de forma inteiramente análoga.

Aplicando a seqüência exata longa para homologia, obtemos a seguinte seqüência exata

$$Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A,\mathbb{F}_p) \to Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A'',\mathbb{F}_p) \to Tor_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A',\mathbb{F}_p).$$

Pelo Teorema 3.1, $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A,\mathbb{F}_p)$ é finito para $0 \leq i \leq m$, e $Tor_{i-1}^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A',\mathbb{F}_p)$ é finito para $1 \leq i \leq m$. Então $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A'',\mathbb{F}_p)$ é finito para $1 \leq i \leq m$. Resta analisar o caso $i = 0$. A seqüência

$$Tor_0^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A,\mathbb{F}_p) \to Tor_0^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A'',\mathbb{F}_p) \to 0$$

é exata, então como $Tor_0^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A,\mathbb{F}_p)$ é finito segue que $Tor_0^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(A'',\mathbb{F}_p)$ também é finito. Portanto, pelo Teorema 3.1, A'' é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$. ∎

O seguinte lema é uma versão pro-p do Lema de Shapiro (veja Lema 1.29). Uma versão mais geral pode ser encontrada em [28, 6.10.10].

Lema 3.3. *Seja G um grupo pro-p, N um subgrupo normal (fechado) de G e B um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p. Então $Tor_i^{[\![\mathbb{Z}_pN]\!]}(B,k)$, onde $k = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$, é um $[[k(G/N)]]$-módulo pro-p (à direita) isomorfo a $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]])$, para todo i.*

Demonstração. Seja

$$\mathcal{P} = \quad \cdots \to P_1 \to P_0 \to B \to 0$$

uma resolução $[[\mathbb{Z}_pG]]$-projetiva de B. Temos que B é também um $[\![\mathbb{Z}_pN]\!]$-módulo pro-p e, pela Proposição 1.10, cada P_i é um $[\![\mathbb{Z}_pN]\!]$-módulo pro-p projetivo. Portanto,

$$Tor_i^{[\![\mathbb{Z}_pN]\!]}(B,k) = H_i(\mathcal{P}_B\widehat{\otimes}_{[\![\mathbb{Z}_pN]\!]}k).$$

Por outro lado,

$$P_i\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pN]]}k \cong P_i\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[\mathbb{Z}_pG]]\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pN]]}k \cong P_i\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]]$$

como $[[k(G/N)]]$-módulos. Portanto

$$Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pN]]}(B,k) = H_i(\mathcal{P}_B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pN]]}k) \cong H_i(\mathcal{P}_B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pG]]}[[k(G/N)]]) = Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pG]]}(B,[[k(G/N)]]).$$

∎

A partir do Lema 3.3 e do Teorema 3.1, obtemos diretamente o seguinte resultado que será uma importante ferramenta na prova do Teorema B.

Teorema 3.4. *Sejam G um grupo pro-p, N um subgrupo normal fechado de G tal que G/N tem posto finito e B um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p. Então B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$ se, e somente se, $Tor_i^{[\![\mathbb{Z}_pN]\!]}(B,k)$ é finitamente gerado como $[[k(G/N)]]$-módulo pro-p para todo $0 \leq i \leq m$.*

3.2 Prova do Teorema B

Nesta seção usamos a seguinte notação. Seja $1 \to A \to G \to Q \to 1$ uma seqüência exata de grupos pro-p tal que A e Q são abelianos e G é finitamente gerado e seja B um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado. Então B é um $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo pro-p via o epimorfismo $G \to Q$ e A é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p à direita finitamente gerado onde a ação de Q é a induzida pela conjugação em G.

Teorema 3.5. *O produto tensorial completo $C = B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q se, e somente se, sempre que $v_1 \in \Delta_B(Q)$ e $v_2, \ldots, v_{m+1} \in \Delta_A(Q)$ são tais que $v_1v_2\cdots v_{m+1} = 1$, então $v_1 = v_2 = \cdots = v_{m+1} = 1$.*

Demonstração. Como A e B são $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos pro-p finitamente gerados, temos que C é finitamente gerado como $\widehat{\bigotimes}^{m+1}_{\mathbb{Z}_p}[[\mathbb{Z}_pQ]](\cong [\![\mathbb{Z}_pQ^{m+1}]\!])$-módulo.

Seja $\delta : Q \to Q^{m+1}$, $q \mapsto (q, q, \ldots q)$, a imersão diagonal. Pela Proposição 1.38, C é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_p\delta(Q)]]$-módulo se, e somente se,

$$\Delta_C(Q^{m+1}) \cap T(Q^{m+1}, \delta(Q)) = 1.$$

Seja $\pi_i : Q^{m+1} \to Q$ a i-ésima projeção e $\pi_i^* : T(Q) \to T(Q^{m+1})$ o monomorfismo induzido. Identifiquemos $T(Q)$ com suas imagens $\pi_i^*(T(Q))$. Cada elemento $v \in T(Q^{m+1})$ pode ser escrito unicamente como $v = v_1v_2\cdots v_{m+1}$ com $v_i \in \pi_i^*(T(Q))$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$. Além disso, temos

$$\overline{v}(x_1\widehat{\otimes}x_2\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}x_{m+1}) = \overline{v}_1(x_1)\overline{v}_2(x_2)\cdots\overline{v}_{m+1}(x_{m+1}),$$

onde $\overline{v}$ e $\overline{v_i}$ são as extensões de v e v_i, respectivamente, para a álgebra de grupo completa $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ (veja Seção 1.6).

Pela Proposição 1.39, temos que

$$\Delta_C(Q^{m+1}) = (\pi_1^*\Delta_B(Q))(\pi_2^*\Delta_A(Q))\cdots(\pi_{m+1}^*\Delta_A(Q)).$$

Então $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_p\delta(Q)]]$-módulo pro-$p$ se, e somente se,

$$(\pi_1^*\Delta_B(Q))(\pi_2^*\Delta_A(Q))\cdots(\pi_{m+1}^*\Delta_A(Q)) \cap T(Q^{m+1},\delta(Q)) = 1.$$

Mas $v \in T(Q^{m+1},\delta(Q))$ se, e somente se, $v_1(q)v_2(q)\cdots v_{m+1}(q) = 1$, para todo $q \in Q$. Também $v \in (\pi_1^*\Delta_B(Q))(\pi_2^*\Delta_A(Q))\cdots(\pi_{m+1}^*\Delta_A(Q))$ se, e somente se, $v_1 \in \Delta_B(Q)$ e v_2, ..., $v_{m+1} \in \Delta_A(Q)$. Além disso, $v = 1$ se, e somente se, $v_i = 1$ para todo i. Estas são precisamente as condições que aparecem no enunciado de teorema. ∎

Teorema 3.6. *Se $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q, então $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é finitamente gerado via a ação diagonal de Q se, e somente se, quando $v_1 \in \Delta_B(Q)$ e $v_2,\ldots,v_{m+1} \in \Delta_A(Q)$ são tais que $v_1v_2\cdots v_{m+1} = 1$ então $v_1 = v_2 = \cdots = v_{m+1} = 1$.

Suponha que o teorema é falso. Então existem elementos $v_1 \in \Delta_B(Q)$ e $v_2,\ldots,v_{m+1} \in \Delta_A(Q)$ não todos triviais tais que $v_1v_2\cdots v_{m+1} = 1$. Se $v_1 = 1$, temos m elementos em $\Delta_A(Q)$ não todos triviais com produto igual a 1, ou seja, A não é "m-tame". Então, pelo Teorema 1.42, $\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A$ não é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]$. Por outro lado, seja J o único ideal maximal em $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ e $B_0 = B/BJ$. Pela versão topológica do Lema de Nakayama, B_0 é não nulo e, como B é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]$, pela Proposição 1.22, B_0 tem dimensão finita sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]/J \cong \mathbb{F}_p$. Agora, $B_0\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p quociente de $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ e, portanto, é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]$. Como Q age trivialmente sobre B_0, temos $B_0\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A) \cong \bigoplus_d(\mathbb{F}_p\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A))$ como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos pro-p, onde $d = \dim_{\mathbb{F}_p}B_0$. Segue que $\mathbb{F}_p\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ e portanto o mesmo vale para $\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A$, uma contradição. Então podemos supor que $v_1 \neq 1$.

Vamos agora reduzir o problema para o caso em que A e B são $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos cíclicos de característica p. Pelo Lema 1.37(i), temos

$$\Delta_A(Q) = \Delta_{\frac{A}{pA}}(Q) = \Delta_{\frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{A^\circ}}(Q) = \Delta_{\frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{\sqrt{A^\circ}}}(Q)$$

e

$$\Delta_B(Q) = \Delta_{\frac{B}{pB}}(Q) = \Delta_{\frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{B^\circ}}(Q) = \Delta_{\frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{\sqrt{B^\circ}}}(Q),$$

onde $A^\circ = Ann_{[[\mathbb{Z}_pQ]]}(A)$ e $B^\circ = Ann_{[[\mathbb{Z}_pQ]]}(B)$. Então podemos assumir que A e B têm característica prima p, $A^\circ = \sqrt{A^\circ}$ e $B^\circ = \sqrt{B^\circ}$. Como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ é um anel comutativo abstratamente Noetheriano, $A^\circ = \sqrt{A^\circ} = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ e $B^\circ = \sqrt{B^\circ} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ são interseções finitas de seus ideais primos minimais. Lembre que os ideais primos minimais de A° e B° como ideais de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ coincidem com os ideais primos minimais de A e B como $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos abstratos, respectivamente [7, IV.1.4, Teorema 2]. Para cada i, escolha um elemento $a_i \in A$ tal que $Ann_{[[\mathbb{Z}_pQ]]}a_i = P_i$. Por [1, Prop. II.1.4], a aplicação

$$\phi : \bigoplus_{i=1}^{s} \frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{P_i} \to A$$

que leva $\oplus(\lambda_i + P_i)$ em $\sum \lambda_i a_i$ é injetiva. Como $\widetilde{A} := \frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{A^\circ} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{P_i}$, segue que $\widetilde{A}$ mergulha em A. Agora, pelo Lema 1.7, todo $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulo de A abstratamente finitamente gerado é fechado, então $\widetilde{A}$ mergulha em A como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulo pro-p finitamente gerado. Aplicando o mesmo argumento, temos também que $\widetilde{B} := \frac{[[\mathbb{Z}_pQ]]}{B^\circ}$ mergulha em B como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulo pro-p finitamente gerado. Agora, como estamos supondo que A e B têm característica p, $\widetilde{B}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}\widetilde{A})$ mergulha em $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$, de onde segue que $\widetilde{B}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}\widetilde{A})$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q. Portanto, as hipóteses valem para $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ e, abusando da notação, podemos supor que $\widetilde{A} = A$ e $\widetilde{B} = B$.

Lembre que estamos supondo que existem elementos $v_1 \in \Delta_B(Q)$, com $v_1 \neq 1$, e $v_2, \ldots, v_{m+1} \in \Delta_A(Q)$ não todos triviais tais que $v_1 v_2 \cdots v_{m+1} = 1$. Sem perda de generalidade, suponha que $v_2, \ldots, v_s$ são não triviais e $v_{s+1} = \cdots = v_{m+1} = 1$. Para $i = 1, 2, \ldots, s$, cada v_i estende-se a um único homomorfismo contínuo não trivial de álgebras $\overline{v}_i : [[\mathbb{Z}_pQ]] \to \mathbb{F}[[T]]$ tal que $B^\circ \leq \mathrm{Ker}\overline{v}_1$ e $A^\circ \leq \mathrm{Ker}\overline{v}_i$. Sejam

$$w_1 : B \to \mathbb{F}[[T]], \quad w_i : A \to \mathbb{F}[[T]], \quad i = 2, \ldots, s.$$

os homomorfismos induzidos por v_1, v_2, $\ldots$, v_s, respectivamente, e

$$\mu_i : \mathbb{F}[[T]] \to \mathbb{F}[[T_i]], \quad i = 2, \ldots, m+1$$

os isomorfismos de $\mathbb{F}$-álgebras que, para cada i, leva T em T_i. A partir destas aplicações podemos construir outro homomorfismo de anéis

$$\widetilde{w} = \mu_1 w_1 \overline{\otimes} \mu_2 w_2 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} \mu_s w_s \overline{\otimes} \mu_{s+1} w_s \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} \mu_{m+1} w_s$$

de $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}A)$ em $\mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$ definido por

$$\widetilde{w}|_{B\widehat{\otimes}(\widehat{\otimes}^m 1)} = \mu_1 w_1$$
$$\widetilde{w}|_{(\widehat{\otimes}^i 1)\widehat{\otimes}A\widehat{\otimes}(\widehat{\otimes}^{m-i} 1)} = \mu_i w_i, \quad i = 2, \ldots, s,$$
$$\widetilde{w}|_{(\widehat{\otimes}^i 1)\widehat{\otimes}A\widehat{\otimes}(\widehat{\otimes}^{m-i} 1)} = \mu_i w_s, \quad i = s+1, \ldots, m+1.$$

ou seja, $\widetilde{w}$ restrita à cada coordenada de $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}A)$ é igual à correspondente aplicação $\mu_i w_j$. Aqui usamos o símbolo $\overline{\otimes}$ em analogia ao produto tensorial completo, mas observamos que $\widetilde{w}$ não é o produto tensorial completo das aplicações $\mu_i w_j$, pois $\mathbb{F}[[T_i]]$ não é um anel pro-p a pesar de ter muito em comum com anéis pro-p (veja Seção 1.6).

Seja

$$\alpha : B\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}A) \to B\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}A)$$

a aplicação $\mathbb{F}_p$-linear definida por

$$\alpha(b\widehat{\otimes}a_1\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}a_m) = \sum_{\sigma\in S_m}(-1)^\sigma b\widehat{\otimes}a_{\sigma(1)}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}a_{\sigma(m)},$$

onde $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação $\sigma \in S_m$. Note que a imagem $\mathrm{Im}\alpha$ de α se fatora através de $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{F}_p}A)$. Como $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q, o mesmo acontece com $\mathrm{Im}\alpha$.

Seja S o subgrupo aditivo $\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_pQ]] \cong [[\mathbb{F}_pQ^m]]$ gerado por

$$\{\lambda \in [[\mathbb{F}_pQ^m]] \mid \lambda\sigma = \lambda, \text{ para todo } \sigma \in S_m\},$$

onde σ age em $\lambda_1\widehat{\otimes}\ldots\widehat{\otimes}\lambda_m \in [[\mathbb{F}_pQ^m]]$ permutando suas entradas. Note que S é fechado e $\mathbb{F}_p \subset S$.

Afirmação 1: $[[\mathbb{F}_pQ^m]]$ é inteiro sobre S, no sentido que $[[\mathbb{F}_pQ^m]]$ é abstratamente finitamente gerado como um S-módulo abstrato, portanto finitamente gerado como um S-módulo pro-p (Lema 1.7).

De fato, cada elemento $t \in [[\mathbb{F}_pQ^m]]$ é inteiro sobre S, já que é uma raiz do polinômio $\prod_{\sigma\in S_m}(x - t\sigma) \in S[x]$. Então, se X_i é um conjunto finito de geradores topológicos para a i-ésima cópia do grupo pro-p abeliano Q em $Q^m \subset [[\mathbb{F}_pQ^m]]$ e $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$, temos que o anel abstrato $S[X]$ é inteiro sobre S e portanto $S[X]$ é finitamente gerado como um S-módulo abstrato. Além disso, $S \subset S[X] \subseteq [[\mathbb{F}_pQ^m]]$, de onde segue que $S[X]$ é fechado (Lema 1.7). Então $[[\mathbb{F}_pQ^m]] \subseteq \overline{\mathbb{F}_p[X]} \subseteq \overline{S[X]} = S[X]$ e conseqüentemente $[[\mathbb{F}_pQ^m]] = S[X]$ é inteiro sobre S, como afirmamos.

Da Afirmação 1 segue que $\widehat{\bigotimes}^{m+1}_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_pQ]] \cong [[\mathbb{F}_pQ]]\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigotimes}^{m}_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_pQ]])$ é inteiro (no sentido da Afirmação 1) sobre $[[\mathbb{F}_pQ]]\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}S$. Note que $\mathrm{Im}\alpha([[\mathbb{F}_pQ]]\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}S) = \mathrm{Im}\alpha$ e lembre que $\mathrm{Im}\alpha$ é um $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q. Então

$$V = \mathrm{Im}\alpha(\widehat{\bigotimes}^{m+1}_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_pQ]])$$

é um $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q. Assim, $\widetilde{w}(V)$ é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{Z}_pQ]]$, onde a ação de Q em $\mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$ é a induzida por $\widetilde{w}$ via a ação diagonal de Q em $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigotimes}^{m}_{\mathbb{F}_p}A)$, ou seja, a ação de $q \in Q$ é a multiplicação por

$$\delta(q) = (\mu_1 v_1(q))\,(\mu_2 v_2(q)) \cdots (\mu_s v_s(q))\,(\mu_{s+1} v_s(q)) \cdots (\mu_{m+1} v_s(q))\,. \tag{3.1}$$

Afirmação 2: $\widetilde{w}(V) \neq 0$.

Assuma que a Afirmação 2 é verdadeira. Então existe um inteiro $j \geq 1$ tal que $\widetilde{w}(V)$ não está contido no ideal I de $\mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$ gerado por $T^j_{s+1}, \ldots, T^j_{m+1}$. Seja J o ideal de $\mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$ gerado por $T_1 - T_2,\ T_2 - T_3, \ldots,\ T_{s-1} - T_s$. Como $\bigcap_{k\geq 1} J^k = 0$, afirmamos que $\bigcap_{k\geq 1}(J^k + I)/I = 0$. De fato, se $g \in \bigcap_{k\geq 1} J^k + I$, então g pode ser escrito como

$$g = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1}} (T_1 - T_2)^{\alpha_1} \ldots (T_{s-1} - T_s)^{\alpha_{s-1}} \left[\sum_i a_i T_1^{\gamma_{i,1}} T_2^{\gamma_{i,2}} \ldots T_s^{\gamma_{i,s}} T_{s+1}^{\gamma_{i,s+1}} \ldots T_{m+1}^{\gamma_{i,m+1}}\right] +$$
$$+ T^j_{s+1} f_1 + T^j_{s+2} f_2 + \cdots + T^j_{m+1} f_{m+1-s},$$

onde $\sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i = k$, $a_i \in \mathbb{F}$, $\gamma_{i,l} \geq 0$ e $f_1, f_2, \ldots, f_{m+1-s} \in \mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$. Então, reescrevendo a expressão acima, obtemos

$$g = \sum{}' \left\{ (T^{\gamma_{i,s+1}}_{s+1} \ldots T^{\gamma_{i,m+1}}_{m+1}) \left[\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1}} (T_1 - T_2)^{\alpha_1} \ldots (T_{s-1} - T_s)^{\alpha_{s-1}} \widetilde{g}(T_1, T_2, \ldots, T_s)\right]\right\} +$$
$$+ T^j_{s+1}\widetilde{f}_1 + T^j_{s+2}\widetilde{f}_2 + \cdots + T^j_{m+1}\widetilde{f}_{m+1-s},$$

onde $\sum'$ varia sob todas as potências $\gamma_{i,l}$, para $l = s+1, \ldots, m+1$, tais que $0 \leq \gamma_{i,l} < j$, ou seja, sob um número finito de índices que não dependem de k. Note que $\widetilde{g}(T_1, T_2, \ldots, T_s)$ é unicamente definido por g e é o único termo na expressão acima que depende de k. Logo, como $\bigcap_{k\geq 1} J^k = 0$, se $g \in \bigcap_{k\geq 1}(J^k + I)$ então $g \in I$. Portanto $\bigcap_{k\geq 1}(J^k + I)/I = 0$.

Assim, como $\widetilde{w}(V)$ não é um subconjunto de I, existe $k_0 \geq 0$ tal que

$$\widetilde{w}(V) \subseteq J^{k_0} + I \quad \text{and} \quad \widetilde{w}(V) \nsubseteq J^{k_0+1} + I,$$

onde por definição $J^0 = \mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$.

Lembrando que um elemento $q \in Q$ age em $\mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$ como em (3.1), que $v_1 v_2 \cdots v_s = 1$ e que a ação de Q é contínua, temos

$$\begin{aligned} \delta(q) \in & \quad J + \mu_1(w_1(q)\cdots w_s(q))(\mu_{s+1}w_s(q))\cdots(\mu_{m+1}w_s(q)) \\ = & \quad J + (\mu_{s+1}w_s(q))\cdots(\mu_{m+1}w_s(q)) \\ \subseteq & \quad J + 1 + (T_{s+1}, \ldots, T_{m+1})\mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]. \end{aligned}$$

Então para k suficientemente grande, temos

$$\delta(q^{p^k}) = \delta(q)^{p^k} \in J + I + 1.$$

Assim, a imagem canônica $\overline{V}$ de $\widetilde{w}(V)$ em $(J^{k_0} + I)/(J^{k_0+1} + I)$ é não trivial e a ação induzida de Q^{p^k} em $\overline{V}$ é trivial. Como $\widetilde{w}(V)$ é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{F}_p Q]]$, concluímos que $\overline{V}$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{F}_p(Q/Q^{p^k})$ e portanto $\overline{V}$ é finito.

Por outro lado, escolha $q \in Q$ tal que $\mu_1 v_1(q) \neq 1$ e defina $h = q\widehat{\otimes}(\widehat{\otimes}^m 1) \in \widehat{\bigotimes}^{m+1}_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_p Q]]$. A ação de h em $(J^{k_0} + I)/(J^{k_0+1} + I)$ é dada pela multiplicação por $f = \mu_1 v_1(q)$ com $f \neq 1$ em $\mathbb{F}[[T_1]] \subseteq \mathbb{F}[[T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}]]$. Note que J^{k_0}/J^{k_0+1} é um $\mathbb{F}[[T_1]]$-módulo abstrato livre de posto finito, onde $\mathbb{F}$ é um corpo. Segue que as potências não triviais de f não podem agir trivialmente em qualquer elemento não nulo de $(J^{k_0} + I)/(J^{k_0+1} + I)$. Mas, como a imagem $\overline{V}$ de $\widetilde{w}(V)$ em $(J^{k_0} + I)/(J^{k_0+1} + I)$ é finita, alguma potência de f deve agir trivialmente em $\overline{V}$, uma contradição.

Resta mostrarmos a Afirmação 2. Para isto, vamos achar um elemento não nulo em $\widetilde{w}(V)$. Lembre que o problema foi reduzido para o caso em que A e B são anéis de característica p. Seja $q \in Q \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{Ker} v_i$ e defina uma seqüência $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_m$ de potências de p de forma que

(i) $\mu_1 v_1(q) \in 1 + T_1^{\alpha_0}(\mathbb{F}[[T_1]] \setminus \{0\})$;

(ii) $\mu_i v_i(q^{\beta_{i-1}}) \in 1 + T_i^{\alpha_{i-1}}(\mathbb{F}[[T_i]] \setminus \{0\})$, para $i = 2, \ldots, s$;

(iii) $\mu_i v_s(q^{\beta_{i-1}}) \in 1 + T_i^{\alpha_{i-1}}(\mathbb{F}[[T_i]] \setminus \{0\})$, para $i = s+1, \ldots, m+1$;

(iv) $1 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m$.

Sejam b e a as imagens de q em B e A, respectivamente, e considere

$$t = \widetilde{w}\Big(\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma b \widehat{\otimes} a^{\beta_{\sigma(1)}} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} a^{\beta_{\sigma(m)}}\Big).$$

Então t é uma soma infinita de elementos $k_{\underline{\gamma}} T_1^{\gamma_0} T_2^{\gamma_1} \dots T_{m+1}^{\gamma_m}$ com $k_{\underline{\gamma}} \in \mathbb{F}$. Afirmamos que $k_{\underline{\alpha}} \neq 0$, onde $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. De fato, se $k_{\underline{\alpha}} = 0$, então como o monômio $T_1^{\alpha_0} T_2^{\alpha_1} \dots T_{m+1}^{\alpha_m}$ aparece em $\widetilde{w}(b \widehat{\otimes} a^{\beta_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} a^{\beta_m})$, ele também aparece em algum $\widetilde{w}(b \widehat{\otimes} a^{\beta_{\sigma(1)}} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} a^{\beta_{\sigma(m)}})$ com $\sigma \neq 1$. Então $T_2^{\alpha_1}$ aparece em

$$\mu_2 w_2(a)^{\beta_{\sigma(1)}} = \mu_2 v_2(q)^{\beta_{\sigma(1)}} \in (1 + T_2^{\alpha_1} \mathbb{F}[[T_2]])^{\beta_{\sigma(1)}/\beta_1}.$$

Como $\beta_{\sigma(1)}/\beta_1$ é uma potência de p e p é a característica de $\mathbb{F}$, concluímos que $\beta_{\sigma(1)} = \beta_1$. Os mesmos argumentos mostram que $\beta_{\sigma(i)} = \beta_i$, para $i = 1, 2, \dots, m$, e portanto obtemos $\sigma = 1$, uma contradição. Então t é um elemento não nulo em $\widetilde{w}(V)$, o que termina a demonstração.

■

Na demonstração acima seguimos as idéias de [18, Teorema A]. Com os Teoremas 3.5 e 3.6, temos provadas as equivalências dos ítens (ii), (iii) and (iv) do Teorema B, já que (ii) implica em (iii) trivialmente. Além disso, foi provada outra equivalência para o item (i) no Teorema 3.4. No Lema 3.8, estabeleceremos uma importante relação entre $Tor_n^{[[\mathbb{Z}_p A]]}(B, \mathbb{F}_p)$ e o grupo de homologia $H_n(A, \mathbb{F}_p)$. Antes disto, precisamos do seguinte lema auxiliar.

Lema 3.7. *Se M e N são grupos pro-p abelianos, onde N tem expoente p, então existe um isomorfismo natural $Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(M, N) \cong ({}_pM) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} N$, onde $({}_pM) = \{m \in M \mid pm = 0\}$.*

Demonstração. Observe que basta provar o lema para N finito já que, por [28, 6.1.10] e pela Proposição 1.11, os funtores $Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(M, -)$ e $({}_pM) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} -$ comutam com limites inversos.

Como $pN = 0$, temos que N é um $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p (\cong \mathbb{F}_p)$-módulo pro-$p$. Seja X uma base (finita) de N como um $\mathbb{F}_p$-módulo pro-p e F um $\mathbb{Z}_p$-módulo pro-p livre em X. Então $0 \to F \xrightarrow{p} F \to N \to 0$ é uma resolução $\mathbb{Z}_p$-livre de N, onde $F \xrightarrow{p} F$ é a multiplicação por p e $F \to N$ é a identidade em X. Portanto,

$$Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(M, N) = \operatorname{Ker}(M \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} F \xrightarrow{1 \widehat{\otimes} p} M \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} F).$$

Mas $F \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}_p x$ é uma soma direta finita de cópias de $\mathbb{Z}_p$, logo $M \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} F \cong \bigoplus_{x \in X} Mx$, onde $Mx \cong M$ como $\mathbb{Z}_p$-módulos pro-p, e

$$\operatorname{Ker}(\textstyle\bigoplus_{x \in X} Mx \xrightarrow{p} \bigoplus_{x \in X} Mx) \cong \bigoplus_{x \in X} ({}_pM)x \cong \frac{({}_pM) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} F}{({}_pM) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} pF} \cong ({}_pM) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} N.$$

■

Lembrando que A age trivialmente sobre B, podemos provar o seguinte resultado que é uma versão do teorema dos coeficientes universais.

Lema 3.8. *Existe uma seqüência exata curta de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos*

$$0 \to B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(A,\mathbb{F}_p) \to Tor_n^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B,\mathbb{F}_p) \to ({}_pB)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{n-1}(A,\mathbb{F}_p) \to 0$$

com aplicações naturais.

Demonstração. Lembre que $Tor_n^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B,\mathbb{F}_p)$ pode ser calculado a partir de uma resolução $[[\mathbb{Z}_pA]]$-projetiva de B ou a partir de uma resolução $[[\mathbb{Z}_pA]]$-projetiva de $\mathbb{F}_p$. Seja

$$\mathcal{F}: \quad \cdots \to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_0 \to \mathbb{F}_p \to 0$$

uma resolução $[[\mathbb{Z}_pA]]$-livre de $\mathbb{F}_p$. Então temos que $H_n(B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}) = Tor_n^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B,\mathbb{F}_p)$. Note também que por hipótese B é um A-módulo trivial, então $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}-$ e $B\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}-$ são funtores isomorfos.

Pelo Teorema dos coeficientes universais para homologia pro-p (para homologia abstrata veja [29, Teorema 8.22]), temos que

$$0 \to B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(\mathbb{Z}_p\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}) \to H_n(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}) \to$$

$$\to Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(B, H_{n-1}(\mathbb{Z}_p\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p})) \to 0$$

é uma seqüência exata com aplicações naturais. Das observações acima, vemos que o termo do meio da seqüência exata acima é $Tor_n^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B,\mathbb{F}_p)$. Além disso, o termo da esquerda é

$$B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(\mathbb{Z}_p\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}) = B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(A,\mathbb{F}_p)$$

e, pelo Lema 3.7, o termo da direita $Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(B, H_{n-1}(\mathbb{Z}_p\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{Z}_pA]]}\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}))$ é igual a

$$Tor_1^{\mathbb{Z}_p}(B, H_{n-1}(A,\mathbb{F}_p)) \cong ({}_pB)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{n-1}(A,\mathbb{F}_p),$$

já que $H_{n-1}(A,\mathbb{F}_p)$ tem expoente p. ∎

Agora estamos prontos para provar no Teorema B que (i) implica em (iii).

Teorema 3.9. *Se B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$, então $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.4, temos que $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B,\mathbb{F}_p)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado, para $0 \leq i \leq m$. Então, segue do Lema 3.8 que $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_i(A,\mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado via a ação diagonal de Q, para $0 \leq i \leq m$, já que Q tem posto finito e

portanto $[[\mathbb{Z}_pQ]]$ é Noetheriano. Assim, $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}H_m(A,\mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{F}_pQ]]$-module pro-p, onde a ação de Q é a diagonal. Além disso, do Teorema 1.33 e do fato de o bifuntor $-\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}-$ ser exato segue que

$$1\widehat{\otimes}\beta : (B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{F}_p}(A\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)) \to (B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}H_m(A,\mathbb{F}_p)$$

é um monomorfismo natural de $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulos pro-p via a ação diagonal de Q. Então $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{F}_p}A\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado sobre $[[\mathbb{F}_pQ]]$ via a ação diagonal de Q, de onde segue que $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigwedge}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q. ∎

Resta mostrarmos que (ii) implica em (i) no Teorema B. Isto será feito a partir das filtrações do grupo de homologia $H_n(A,\mathbb{F}_p)$ dadas pelo Teorema 1.34 e Corolário 1.35, juntamente com o Lema 3.8. A junção entre estes resultados é dada pelo seguinte lema.

Lema 3.10. *Sejam M e N $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos pro-p e*

$$0 \subsetneq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subsetneq F_s = N$$

uma filtração de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulos de N. Então $M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}N$ tem uma filtração de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulos

$$0 \subsetneq Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \cdots \subsetneq Q_s = M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}N,$$

onde $Q_j = Im(M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_j \to M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}N)$ é a imagem da aplicação induzida pela inclusão $F_j \hookrightarrow N$. Além disso, Q_j/Q_{j-1} é uma imagem sobrejetiva de $M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(F_j/F_{j-1})$, para cada $j = 1,2,\ldots,s$.

Demonstração. A primeira parte do lema segue imediatamente da definição de Q_j. Para provar a segunda parte do lema, vamos aplicar indução no comprimento s da filtração de N. O caso $s = 1$ é trivial. Suponha que $s > 1$. Então, se $Q'_j = \mathrm{Im}(M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_j \to M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_{s-1})$, $j = 1,\ldots,s-1$, por hipótese de indução

$$M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(F_j/F_{j-1}) \twoheadrightarrow Q'_j/Q'_{j-1},$$

onde estamos usando o símbolo "$\twoheadrightarrow$" para denotar um aplicação sobrejetiva. Mas $Q'_j \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_j \to M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_s) = Q_j$, para $j = 1,\ldots,s-1$. Então

$$M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(F_j/F_{j-1}) \twoheadrightarrow Q_j/Q_{j-1} \quad \text{for } j = 1,\ldots,s-1$$

e, como $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}-$ é exato à direita,

$$M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(F_s/F_{s-1}) \cong (M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_s)/\mathrm{Im}(M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_{s-1} \to M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}F_s) = Q_s/Q_{s-1}.$$

■

O último resultado auxiliar é sobre produtos tensoriais completos finitamente gerados de módulos pro-p.

Lema 3.11 ([18, Lemma 2]). *Seja Q um grupo pro-p de posto finito. Suponha que M e N são $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos pro-p finitamente gerados e que $M\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}N$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q. Então para todo $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulo pro-p M_1 de M, o produto tensorial completo $M_1\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}N$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p via a ação diagonal de Q.*

Observe que a equivalência de (ii) e (iv) do Teorema B implica que $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^m_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q se, e somente se, $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^n_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q para todo $n \leq m$. Então o próximo teorema conclui a prova do Teorema B.

Teorema 3.12. *Se $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^n_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q, para todo $n \leq m$, então B é de tipo FP_m sobre $[[\mathbb{Z}_pG]]$.*

Demonstração. Como Q tem posto finito, o Teorema 3.4 diz que devemos mostrar que $Tor_i^{[[\mathbb{Z}_pA]]}(B, \mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulo pro-p, para todo $i \leq m$. Pelo Lema 3.8, é suficiente mostrar que $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_i(A, \mathbb{F}_p)$ e $({}_pB)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{i-1}(A, \mathbb{F}_p)$ são $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulos pro-p finitamente gerados via a ação diagonal de Q, para todo $i \leq m$.

O Corolário 1.35 nos dá uma filtração $\{F_j\}$ de $H_n(A, \mathbb{F}_p)$ tal que F_j/F_{j-1} é em $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-subquociente de

$$M^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} = H_{\alpha_1}(A_1, \mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{\alpha_2}(A_2, \mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\cdots\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{\alpha_s}(A_s, \mathbb{F}_p).$$

onde $\alpha_1+\cdots+\alpha_s = n$. Então, pelo Lema 3.10, obtemos uma filtração $\{Q_j\}$ de $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(A, \mathbb{F}_p)$ tal que

$$B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(F_j/F_{j-1}) \twoheadrightarrow Q_j/Q_{j-1}.$$

Observe que, se Q_j/Q_{j-1} é um $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado para todo j, então $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(A, \mathbb{F}_p)$ é um $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado, já que $Q_0 = 0$ e $Q_t = B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(A, \mathbb{F}_p)$ para algum t. Assim, é suficiente mostrar que $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(F_j/F_{j-1})$ é finitamente

gerado, para cada j. Como cada F_j/F_{j-1} é um subquociente de $M^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$, é suficiente mostrar que $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}M^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ é $[[\mathbb{F}_pQ]]$-módulo finitamente gerado.

Pelo Teorema 1.34, $M^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ tem uma filtração de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-submódulos pro-p com fatores que mergulham em

$$N^n_{(k_1,\ldots,k_s)} = ((\widehat{\bigwedge}^{\alpha_1-2k_1}_{\mathbb{F}_p}A_1)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\widehat{S}^{k_1}_{\mathbb{F}_p}(A_1))\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\cdots\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}((\widehat{\bigwedge}^{\alpha_s-2k_s}_{\mathbb{F}_p}A_s)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\widehat{S}^{k_s}_{\mathbb{F}_p}(A_s)),$$

para certos $k_i \leq [\alpha_i/2]$. Pelo Lema 3.10, a filtração de $M^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ induz uma filtração de $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}M^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ com fatores que são imagens sobrejetivas de $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos que mergulham em $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}N^n_{(k_1,\ldots,k_s)}$. Este último módulo é uma imagem sobrejetiva de $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}V$, onde

$$V = (\widehat{\bigotimes}^{\alpha_1-k_1}_{\mathbb{Z}_p}A_1)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^{\alpha_2-k_2}_{\mathbb{Z}_p}A_2)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\cdots\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^{\alpha_s-k_s}_{\mathbb{Z}_p}A_s).$$

Por hipótese, $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}(\widehat{\bigotimes}^n_{\mathbb{Z}_p}A) \cong B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^n_{\mathbb{Z}_p}A)$ é finitamente gerado via a ação diagonal de Q para $n \leq m$. Pelo Teorema 3.5 juntamente com o fato que o Teorema B vale para $B = \mathbb{Z}_p$, vemos que $\widehat{\bigotimes}^n_{\mathbb{Z}_p}A$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p. Como $\sum_{i=1}^s(\alpha_i - k_i) \leq n$, pelo Lema 3.11, $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}V$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q. Então concluímos que $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}N^n_{(k_1,\ldots,k_s)}$ é finitamente gerado via a ação diagonal de Q para $n \leq m$. Portanto $(B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}M^n_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ e, conseqüentemente, $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_n(A,\mathbb{F}_p)$ são $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulos pro-p finitamente gerados via a ação diagonal de Q para $n \leq m$.

Observe que, pelo Lema 3.11, $({}_pB)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^n_{\mathbb{Z}_p}A)$ é um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p finitamente gerado via a ação diagonal de Q, para todo $n \leq m$. Então argumentos análogos aos utilizados acima valem se considerarmos $({}_pB)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^{n-1}_{\mathbb{Z}_p}A)$ no lugar de $B\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\bigotimes}^n_{\mathbb{Z}_p}A)$. Então $({}_pB)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}H_{n-1}(A,\mathbb{F}_p)$ é finitamente gerado como um $[[\mathbb{Z}_pQ]]$-módulo pro-p via a ação diagonal de Q, para todo $n \leq m$, o que conclui a prova do teorema. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Åberg, *Bieri-Strebel valuations (of finite rank)*, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), 269-304.

[2] M. Bestvina, N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups* , Invent. Math. 129 (1997) 445–470.

[3] R. Bieri, J.R.J. Groves, *Metabelian Groups of type FP_∞ are virtually of type FP* , Proc. London Math. Soc. (3) 45 (1982), 365–384.

[4] R. Bieri, J.R.J. Groves, *Tensor Powers of Modules over Finitely Generated Abelian Groups*, J. Algebra 97 (1985), 68–78.

[5] R. Bieri, J. Harlander, *On the FP_3-Conjecture for metabelian groups*, J. London Math Soc. (2) 64 (2001), 595-610.

[6] R. Bieri, R. Strebel, *Valuations and finite presented metabelian groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 41 (1980), 439–464.

[7] N. Bourbaki, *Commutative algebra*, Hermann, Paris, 1972.

[8] A. Brumer, *Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations*, J. Algebra 4 (1966), 442–470.

[9] H. Cartan, *Algèbres d'Eilenberg-MacLane*, Séminaire H. Cartan, Ecole Normale Supèrieure, included in Collected Works, vol. 3 (Springer-Verlag, 1979).

[10] J.D. Dixon, M.P.F. du Sautoy, A. Mann, D. Segal, *Analytic pro-p groups*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 157 (Cambridge Univ. Press, 1991).

[11] J.R.J. Groves, D.H. Kochloukova, *Embeddings properties of Lie algebras and discrete groups*, submitted.

[12] J.D. King, *Finite Prensentability of Lie Algebras and pro-p Groups*, Ph. D. thesis. University of Cambridge (1995).

[13] J.D. King, *Embedding theorems for pro-p groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 123 (1998), no. 2, 217–226.

[14] J.D. King, *Homological finiteness conditions for pro-p groups*, Comm. Algebra 27 (1999), no. 10, 4969–4991.

[15] J.D. King, *A geometric invariant for metabelian pro-p groups*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), no. 1, 83–94.

[16] D.H. Kochloukova, *The* FP_m*-Conjecture for a class of metabelian groups*, J. Algebra 184 (1996), 1175–1204.

[17] D.H. Kochloukova, *A new characterization of m-tame groups over finitely generated abelian groups*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), 802–816.

[18] D.H. Kochloukova, *Metabelian pro-p groups of type* FP_m, J. Group Theory 3 (2000), no. 4, 419–431.

[19] D.H. Kochloukova, *On the homological finiteness properties of some modules over metabelian Lie algebras*, Israel J. Math. 129 (2002), 221–239.

[20] D. H. Kochloukova, *Modules of type* FP_2 *over the integral group algebra of a metabelian group*, to appear in J. Group Theory.

[21] D.H. Kochloukova, A.G.S. Pinto, *Embedding properties of metabelian pro-p groups*, submitted.

[22] D.H. Kochloukova, P. Zalesskii, *Invariants for pro-p groups and normal subgroups with cyclic quotients in some finitely presented pro-C groups*, Monatshefte für Mathematik 144, 285-296 (2005).

[23] E. Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[24] M. Lazard, *Groups analytiques p-adiques*, Publ. Math. Inst. Haustes Étud. Scient. 26 (1965).

[25] D. Lidl, H. Niederreider, *Finite fields*, Encyclopedia of Math. and its applications, vol. 20, London, 1983.

[26] A.G.S. Pinto, *Homological finiteness properties of pro-p modules over metabelian pro-p groups*, submitted.

[27] A. Pletch, *Profinite duality groups I+II*, J. Pure Appl. Algebra 16 (1980), 55–74, 285–297.

[28] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[29] J.J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York-London, 1979.

[30] R. Strebel, *Finitely presented soluble groups*, in Group theory: Essays for Philip Hall, Academic Press, London, 1984, 257–314.

[31] J.S. Wilson, *Profinite groups*, Clarendon Press, New York, 1998.