



Eder de Moraes Correa

Geometria Diferencial em Grupos de Lie

**CAMPINAS
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Eder de Moraes Correa

Geometria Diferencial em Grupos de Lie

Orientador(a): Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Coorientador: Prof. Dr. Lino Anderson da Silva Grama

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO EDER DE MORAES CORREA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN.

Assinatura do Orientador

Handwritten signature of Luiz Antonio Barrera San Martin, written in black ink and underlined.

Assinatura do Coorientador

Handwritten signature of Lino Anderson da Silva Grama, written in black ink and underlined.

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C817g Correa, Eder de Moraes, 1986-
Geometria diferencial em grupos de Lie / Eder de Moraes Correa. – Campinas,
SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.
Coorientador: Lino Anderson da Silva Grama.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Lie, Grupos de. 3. Geometria riemaniana. 4.
Curvatura. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera, 1955-. II. Grama, Lino Anderson da
Silva, 1981-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Differential geometry on Lie groups

Palavras-chave em inglês:

Differential geometry

Groups, Lie

Riemannian geometry

Curvature

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]

Ivan Struchiner

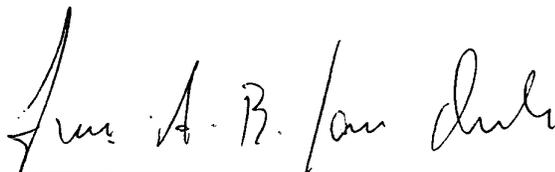
Diego Sebastian Ledesma

Data de defesa: 02-05-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 02 de maio de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof.(a). Dr(a). IVAN STRUCHINER



Prof.(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais - Antonio Paulo Nunes Correa e Ana Aparecida de Moraes Correa, pelo apoio nos momentos mais difíceis, e a todas as pessoas que fizeram com que fosse possível a conclusão deste trabalho, em especial aos professores Luiz Antonio Barrera San Martin e Lino Anderson da Silva Grama. Agradeço também ao CNPq, pelo apoio financeiro durante a duração do mestrado. Dedico este trabalhos a todas as pessoas que fazem parte da minha vida.

RESUMO

Neste trabalho estudamos os aspectos geométricos dos grupos de Lie do ponto de vista da geometria Riemanniana, geometria Hermitiana e geometria Kähler, através das estruturas geométricas invariantes associadas. Exploramos resultados relacionados as curvaturas da variedade Riemanniana subjacente a um grupo de Lie através do estudo de sua álgebra de Lie correspondente. No contexto da geometria Hermitiana e geometria Kähler, para um caso concreto de grupo de Lie complexo, investigamos suas curvaturas seccionais holomorfas e verificamos a existência de uma estrutura pseudo-Kähler invariante por sua forma real compacta.

ABSTRACT

In this dissertation, we study the geometric aspects of Lie groups from the viewpoint of Riemannian geometry, Hermitian geometry, and Kähler geometry through its associated invariant geometric structures. We explore results related to curvatures of Riemannian manifold underlying a Lie group by studying its corresponding Lie algebra. In the context of Hermitian geometry and Kähler geometry, for a complex Lie group case, we investigate its holomorphic sectional curvatures and verify the existence of pseudo-Kähler structure invariant for its compact real form.

SUMÁRIO

Agradecimentos	vii
Resumo	viii
Abstract	x
1 Introdução	1
2 Grupos de Lie e álgebras de Lie	7
2.1 Definições e exemplos	7
2.2 Homomorfismos	10
2.3 Subgrupos e subálgebras de Lie	10
2.4 Grupos de Lie simplesmente conexos	12
2.5 Aplicação exponencial	13
2.6 Representações	15
2.7 Subgrupos fechados	16
2.8 Homomorfismos contínuos	18
2.9 Variedades homogêneas e Ações de Grupos	19
3 Grupos de Lie semi-simples	23
3.1 Álgebras de Lie semi-simples	23
3.2 Formas reais e decomposição de Cartan	26
4 Fibrados e Conexões	31
4.1 Fibrados	31
4.2 Conexões em fibrados vetoriais e curvatura	34
5 Variedades Riemannianas	39
5.1 Métrica Riemanniana	39

5.2	Conexão Riemanniana e Curvatura	40
5.3	Métricas Invariantes e curvaturas em Grupos de Lie	44
6	Geometria quase Hermitiana e geometria Kähler	61
6.1	Preliminares algébricas	61
6.2	Variedades quase complexas	68
6.3	Conexões em variedades quase complexas	74
6.4	Métrica Hermitiana e métrica Kähler	76
7	O recobrimento duplo de $SO^+(1, 3)$ por $SL(2, \mathbb{C})$	83
7.1	O grupo de Lorentz $SO^+(1, n)$	83
7.2	O homomorfismo entre $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO^+(1, 3)$	86
8	Curvaturas em $SL(2, \mathbb{C})$	91
8.1	Preliminares algébricas em $\mathfrak{so}(1, 3)$	91
8.2	Métricas invariantes e estrutura complexa em $SO^+(1, 3)$	93
8.3	Conexões e curvaturas em $SO^+(1, 3)$ e $SL(2, \mathbb{C})$	94
9	Estrutura Kähler em $SL(2, \mathbb{C})$	101
9.1	2-forma Kähler em $SL(2, \mathbb{C})$	101
9.2	Ações de $SO(3)$ no fibrado $T^*(SO(3))$	103
9.3	Forma pseudo-Kähler $SU(2)$ -invariante em $SL(2, \mathbb{C})$	104
	Bibliografia	113

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os grupos de Lie representam o maior avanço no estudo da teoria de simetrias contínuas de objetos e estruturas matemáticas, o que faz dos mesmos uma ferramenta indispensável no estudos de diversas áreas da matemática e física teórica. De acordo com Felix Klein [3], os objetos de estudos em geometria são as propriedades invariantes de figuras geométricas sob a ação de grupos específicos de transformações. Por isso quando consideramos diferentes grupos de transformações lidamos com diferentes tipos de geometria, tais como geometria Euclidiana, geometria afim, ou geometria projetiva. Por exemplo, geometria Euclidiana é o estudo das propriedades que permanecem invariantes sob a ação dos movimentos rígidos do plano (grupo Euclidiano).

Os grupos que Felix Klein utilizou para determinar esses diferentes tipos de geometria foram desenvolvidos pelo matemático norueguês Sophus Lie. A teoria de Lie em seus primórdios se preocupava com o estudo de simetrias de equações diferenciais, e técnicas de integração para esses sistemas. Sophus Lie chamava essas simetrias de "grupo contínuo". De fato, seu principal objetivo era desenvolver um análogo a teoria de Galois para o estudo das equações diferenciais. Em termos da teoria de Galois, para uma solução de uma equação polinomial por radicais existe um grupo finito associado. Correspondentemente, para uma solução por quadratura de equação diferencial, estudado por Sophus Lie, existe um grupo contínuo associado, um grupo de Lie (ver [3]).

O termo "Grupo de Lie" é geralmente atribuído a Élie Cartan. Um grupo de Lie é definido como sendo uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo compatível com a estrutura de variedade diferenciável, no sentido de que o produto e a aplicação que leva um elemento no seu inverso são diferenciáveis. Exemplos simples de

grupos de Lie são os grupos de isometrias de \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n ou \mathbb{H}^n . Esses grupos de isometrias são, respectivamente, o grupo ortonormal $O(n)$, o grupo unitário $U(n)$ e o grupo simplético $Sp(n)$.

Uma álgebra \mathfrak{g} pode ser associada a cada grupo de Lie, esta álgebra é chamada álgebra de Lie. No início do desenvolvimento da teoria \mathfrak{g} era chamada "grupo infinitesimal". Um teorema fundamental de Lie afirma que todo grupo de Lie (a menos de recobrimento universal) é completamente determinado por sua álgebra de Lie. Por isso, muitos dos cálculos relacionados aos grupos de Lie são reduzidos a problemas (frequentemente não triviais) estudados em \mathfrak{g} .

O estudo da geometria da variedade diferenciável subjacente a um grupo de Lie é feito através da geometria homogênea, onde objetos geométricos invariantes são estudados aproveitando-se as características de simetria e homogeneidade encontradas nos grupos de Lie.

O estudo dos aspectos geométricos de um grupo de Lie é marcado pelas características algébricas de sua álgebra de Lie, já que a mesma se caracteriza como sendo o espaço vetorial dos campos de vetores invariantes, à esquerda ou à direita, munido do produto dado pelo colchete de campos de vetores, podendo ser identificada com o espaço tangente no elemento neutro do grupo. Desta forma a invariância característica dos grupos de Lie nos permite explorar objetos não lineares, relativos ao grupo de Lie, através do estudo de objetos lineares relacionados com sua álgebra de Lie.

Para ilustrar o que foi dito no parágrafo acima citaremos dois exemplos que são fontes de pesquisa atualmente, a saber: Métricas de Einstein e fluxo de Ricci. Primeiramente, lembrando que uma variedade Riemanniana (M, g) é do tipo Einstein se o seu tensor de Ricci $r(g)$ é proporcional a métrica g , isto é, se $r(g) = \lambda g$, para alguma constante λ . No caso de uma variedade Riemanniana em geral, encontrar uma métrica de Einstein é equivalente a solucionar uma equação diferencial parcial não linear. Já no contexto invariante dos grupos de Lie, o mesmo problema se reduz a um sistema algébrico não linear (não trivial).

Em [4] é provada a existência de métricas de Einstein não naturalmente redutíveis nos grupos de Lie simples compactos $SO(n)$ ($n \geq 11$), $Sp(n)$ ($n \geq 3$), E_6 , E_7 , e E_8 , em [24] são estudadas questões de existência e não-existência de métricas de Einstein em *solvmanifolds* (variedades diferenciáveis definida por um espaço homogêneo de um grupo de Lie solúvel por um subgrupo fechado).

Um outro campo de pesquisa bastante ativo atualmente em geometria diferencial é o estudo das equações do fluxo de Ricci, motivada principalmente pela solução da conjectura de Poincaré apresentada por Grigori Perelman. Novamente, no contexto geral as equações do fluxo de Ricci formam um sistema de equações diferenciais parciais. Já no contexto da geometria invariante as equações do fluxo de Ricci formam um sistema de equações diferenciais ordinárias, o que permite uma análise qualitativa através da teoria de sistemas dinâmicos, ver por exemplo [11] para o caso da variedade de dimensão três $SL(2, \mathbb{C})$. Em [42] encontramos um estudo dos Ricci solitons, que são generalizações das métricas Einstein, em duas classes de grupos de Lie nilpotentes, grupo de Heisenberg e grupo das matrizes unitriangulares.

Além de serem utilizados como modelos construtivos para o desenvolvimento da geometria, os grupos de Lie fornecem uma grande quantidade de exemplos e contra-exemplos importantes para a teoria. Como exemplo podemos citar as Esferas de Berger, que são caracterizadas (identificando $SU(2)$ naturalmente com S^3) pela família a 1-parâmetro de variedades Riemannianas (S^3, g_t) , onde cada g_t define uma métrica $SU(2)$ -invariante em S^3 . Esta família de variedades forneceu contra-exemplo para diversas conjecturas em geometria Riemanniana, ver [15], [36] e [41]. Outro exemplo interessante, no contexto da geometria simplética e geometria Kähler é a variedade Kodaira-Thurston (ver [35]), que foi o primeiro exemplo de variedade simplética não Kähler a ser descoberta.

Neste trabalho faremos um estudo das estruturas geométricas invariantes associadas aos grupos de Lie reais, e exploraremos o caso concreto do grupo de Lie complexo $SL(2, \mathbb{C})$ seguindo os resultados da teoria da geometria Hermitiana e geometria Kähler. Procuramos fazer um estudo do grupo $SL(2, \mathbb{C})$, do ponto de vista da geometria Hermitiana e da geometria Kähler, de maneira análoga ao trabalho feito em [38], no contexto da geometria Riemanniana, para o grupo $SL(2, \mathbb{R})$. O estudo da geometria Hermitiana em grupos de Lie é uma área bastante ativa de pesquisas atuais, existem diversos trabalhos recentes relativos a esta área de pesquisa, ver por exemplo [1], [33], [10] e [27].

Nosso estudo geométrico dos grupos de Lie se inicia do ponto de vista da geometria Riemanniana. Em [38] são exploradas as relações entre curvatura e outras propriedades topológicas e geométricas através do estudo de um grupo de Lie arbitrário munido de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda, neste mesmo trabalho são tratados os problemas de se classificar todos os grupos de Lie que admitem métricas invariantes à esquerda com curvatura Seccional ou de Ricci com sinal constante.

Em [38] também encontramos uma conjectura sobre a existência de métricas invariantes à esquerda com curvatura de Ricci < 0 em $SL(n, \mathbb{R})$ para $n \geq 3$, o que posteriormente

foi comprovado com a construção feita em [25] de métricas invariantes à esquerda em $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$, com curvatura de Ricci estritamente negativa .

No capítulo 5 deste trabalho exploraremos os resultados encontrados em [38] estudando a variedade Riemanniana subjacente a um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda. Exploraremos muitos resultados relacionados ao tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita associada a métrica invariante à esquerda, e as relações entre curvatura e outras propriedades topológicas e geométricas através do estudo das curvaturas seccionais, curvatura de Ricci, curvatura escalar e propriedades algébricas da álgebra de Lie associada.

Nos capítulos 8 e 9 estudaremos as estruturas geométricas invariantes no grupo de Lie complexo $SL(2, \mathbb{C})$ utilizando a identificação $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(1, 3)$, onde $\mathfrak{so}(1, 3)$ é a álgebra de Lie do grupo de Lorentz $O(1, 3)$, conhecido na física teórica por representar as simetrias do espaço de Minkowski. De fato, mostraremos que a componente conexa da identidade do grupo de Lorentz $O(1, 3)$, denotada por $SO^+(1, 3)$, tem com recobrimento duplo o grupo $SL(2, \mathbb{C})$, isto é, existe um homomorfismo $\varphi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(1, 3)$ tal que $\ker(\varphi) = \{\pm I\}$.

No capítulo 8 investigaremos as curvaturas holomorfas e J_0 -curvaturas de Ricci de $SL(2, \mathbb{C})$, onde $J_0X = iX$, para todo $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Através da decomposição de Cartan de $\mathfrak{so}(1, 3)$ e de características algébricas da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$, fixada uma métrica Hermitiana invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $SO^+(1, 3)$, obtivemos o seguinte resultado acerca das curvaturas holomorfas de $SL(2, \mathbb{C})$.

Proposição I. *Considerando a métrica Hermitiana invariante a esquerda $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{s}$, temos*

$$H(X) = K(X, J_0X) \geq 0, \text{ para todo } X \in \mathfrak{su}(2) \text{ e } X \in \mathfrak{s},$$

No capítulo 9 estudaremos estruturas Kähler no grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$, comprovando o seguinte resultado

Proposição II. *A variedade complexa $SL(2, \mathbb{C}) = (M^6, J_0)$ não admite um métrica Kähler invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Posteriormente, utilizando a estrutura natural de variedade simplética do fibrado cotangente $T^*(SO(3))$ verificaremos a existência de uma estrutura pseudo-Kähler em $SL(2, \mathbb{C})$ invariante por sua forma real compacta $SU(2)$, isto é,

Teorema I. *Existe uma 2-forma fechada ω , compatível com a estrutura complexa J , $\text{SO}(3)$ -invariante, não-degenerada que define uma estrutura pseudo-Kähler em $\text{SO}^+(1, 3)$, isto é, para campos Z, W*

$$h(Z, W) = \omega(JZ, W) + i\omega(Z, W),$$

é uma estrutura pseudo-Kähler, $\text{SO}(3)$ -invariante em $\text{SO}^+(1, 3)$.

Corolário I. *Existe uma 2-forma fechada η não-degenerada, compatível com J_0 , $\text{SU}(2)$ -invariante que define uma estrutura pseudo-Kähler em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, isto é, para campos V, U*

$$B(V, U) = \eta(J_0V, U) + i\eta(V, U),$$

é uma estrutura pseudo-Kähler, $\text{SU}(2)$ -invariante em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Os demais capítulos são devotados ao estudo da teoria de grupos e álgebras de Lie, geometria Riemanniana, geometria (quase) Hermitiana e geometria Kähler.

CAPÍTULO 2

GRUPOS DE LIE E ÁLGEBRAS DE LIE

Neste primeiro capítulo vamos explorar os resultados da teoria básica de grupos de Lie e álgebras de Lie. Nosso principal objetivo é estudar as relações entre grupos e álgebras de Lie, para posteriormente fazer uso desses resultados no estudo concreto da geometria dos grupos de Lie. Começamos com as definições básicas e exemplos. As principais referências para os resultados deste capítulo são [7] e [39].

2.1 Definições e exemplos

Definição 2.1 *Um grupo de Lie G é definido como sendo uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo, de modo que a aplicação $G \times G \rightarrow G$, definida por $(g, h) \rightarrow gh^{-1}$, é diferenciável (C^∞).*

Denotando por e o elemento neutro de G , observamos que a aplicação $g \rightarrow g^{-1}$ é diferenciável, visto que a aplicação $g \rightarrow (e, g) \rightarrow g^{-1}$ é diferenciável (C^∞). Além disso, a aplicação $(g, h) \rightarrow gh$ de $G \times G \rightarrow G$ é diferenciável já que a composição $(g, h) \rightarrow (g, h^{-1}) \rightarrow gh$ é diferenciável (C^∞).

Para $g \in G$, as translações à esquerda $L_g: G \rightarrow G$ e à direita $R_g: G \rightarrow G$, são definidas respectivamente por $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$. Como as composições $g \rightarrow (h, g) \rightarrow hg$ e $g \rightarrow (g, h) \rightarrow gh$ são diferenciáveis, segue que as translações são aplicações diferenciáveis. Como $L_g \circ L_{g^{-1}} = id$ e $D_g \circ D_{g^{-1}} = id$, em ambos os casos as translações são difeomorfismos, além disso a aplicação $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ (conjugação) também é um difeomorfismo.

Exemplo 2.2 O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é um grupo de Lie com a soma de vetores.

Exemplo 2.3 Os conjunto dos números complexos diferentes de zero \mathbb{C}^* formam um grupo de Lie com a multiplicação de números complexos.

Exemplo 2.4 O círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ é um grupo de Lie com a multiplicação induzida de \mathbb{C}^*

Exemplo 2.5 O produto cartesiano de grupos de Lie $G_1 \times G_2$ com a multiplicação

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2),$$

e estrutura de variedade diferenciável natural do produto cartesiano é um grupo de Lie.

Exemplo 2.6 O n -toro $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$) é grupo de Lie, pois é o produto n vezes do grupo de Lie S^1 .

Exemplo 2.7 A variedade $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes não-singulares reais $n \times n$ é um grupo de Lie com a multiplicação de matrizes.

Um elemento importante para o estudo dos grupos de Lie são as álgebras de Lie

Definição 2.8 Uma álgebra de Lie sobre \mathbb{R} é um espaço vetorial com um operador bilinear $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, tal que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

1. $[X, Y] = -[Y, X]$. (anti-comutatividade)

2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$. (identidade de Jacobi)

Um operador bilinear satisfazendo as duas condições da **definição 2.8** é chamado colchete de Lie. Como dito anteriormente, todo grupo de Lie está intimamente ligado a uma álgebra de Lie, propriedades de um grupo de Lie podem ser examinadas através de um estudo da sua álgebra de Lie.

Exemplo 2.9 Um espaço vetorial é uma álgebra de Lie com todos os colchetes de Lie iguais a zero.

Exemplo 2.10 O espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ de todas as matrizes reais $n \times n$ é uma álgebra de Lie com o colchete de Lie dado pelo comutador

$$[A, B] = AB - BA.$$

Exemplo 2.11 Um espaço vetorial de dimensão 2 com base X, Y é uma álgebra de Lie se definirmos o colchete de Lie por

$$[X, X] = [Y, Y] = 0 \quad e \quad [X, Y] = Y,$$

estendendo por linearidade.

Exemplo 2.12 O espaço vetorial \mathbb{R}^3 é uma álgebra de Lie com o colchete dado pelo produto vetorial $[X, Y] = X \times Y$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^3$

Vamos a partir de agora estabelecer como à um grupo de Lie se associa uma álgebra de Lie. Um campo vetorial X em um grupo de Lie G é invariante à esquerda (resp. à direita) se para todo $g \in G$ tivermos

$$(L_g)_*X = X \circ L_g \quad (\text{resp.} \quad (R_g)_*X = X \circ R_g),$$

denotaremos por \mathfrak{g} o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda.

Exemplo 2.13 Seja $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, os campos invariantes à esquerda são da forma $X_g = gX_e$, associados ao sistema $\frac{dg}{dt} = gX_e$.

Temos o seguinte resultado (ver [39], página 85 para mais detalhes).

Proposição 2.14 Seja G um grupo de Lie e \mathfrak{g} o conjunto dos seus campos invariantes à esquerda.

1. \mathfrak{g} é um espaço vetorial real, e a aplicação $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$, definida por $\phi(X) = X_e$ é um isomorfismo de \mathfrak{g} com o espaço tangente $T_e(G)$ na identidade. Consequentemente, $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(T_e(G)) = \dim(G)$.
2. Campos invariantes à esquerda são suaves.
3. O colchete de campos invariantes à esquerda é um campo invariante à esquerda.
4. \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie com o colchete de campos de vetores.

A **proposição 2.14** garante que para cada grupo de Lie G existe uma álgebra de Lie \mathfrak{g} associada e que a mesma se identifica com o espaço tangente $T_e(G)$. Assim, definiremos a álgebra de Lie de um grupo de Lie como sendo o conjunto dos campos invariantes à esquerda, e alternativamente podemos ver a álgebra de Lie de um grupo de Lie como o espaço tangente à identidade. Observamos que as construções para os campos invariantes à direita são feitas de modo análogo.

Exemplo 2.15 A reta real \mathbb{R} é um grupo de Lie com a operação adição. Os campos invariantes são os campos constantes da forma $\lambda(\frac{d}{dt})$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. O colchete de dois campos é sempre zero neste caso.

Exemplo 2.16 O conjunto das matrizes reais $M_n(\mathbb{R})$ com o colchete $[A, B] = AB - BA$ é a álgebra de Lie do grupo de Lie $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, denotamos $M_n(\mathbb{R})$ por $T_e(\text{GL}(n, \mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

2.2 Homomorfismos

Consideremos G e H dois grupos de Lie, um homomorfismo $\varphi: G \rightarrow H$ de grupos de Lie é um homomorfismo de grupos abstratos que é diferenciável. De modo análogo definimos automorfismo e isomorfismo de grupos de Lie.

Observamos que para $g \in G$ temos

$$\varphi \circ R_g = R_{\varphi(g)} \circ \varphi \quad \text{e} \quad \varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi.$$

Assim, $L_{\varphi(g)} \circ \varphi \circ L_{g^{-1}} = \varphi$. Pela regra da cadeia, se φ é diferenciável no elemento neutro $e \in G$ então φ é diferenciável em $g \in G$.

Considerando o fato de que os grupos de Lie são estudados através de suas álgebras de Lie, o mesmo ocorre com os homomorfismos entre grupos de Lie, que são estudados através dos homomorfismos de álgebras de Lie.

Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie, uma aplicação $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie se preserva os colchetes de Lie, isto é, $\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dado um homomorfismo de grupos de Lie $\varphi: G \rightarrow H$, temos que $\varphi_*: T_e(G) \rightarrow T_e(H)$ define uma transformação linear entre as álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} através da identificação da álgebra de Lie com o espaço tangente à identidade.

Teorema 2.17 *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} respectivamente, e seja $\varphi: G \rightarrow H$ um homomorfismo de Grupos de Lie. Então*

1. X e $\varphi_* X$ são φ -relacionados, isto é, $X_{\varphi(g)} = \varphi_* X_g$, para $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$.
2. $\varphi_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração. Segue em [39], página 90.

2.3 Subgrupos e subálgebras de Lie

Definição 2.18 *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo. Então, H é um subgrupo de Lie de G se H é uma subvariedade imersa de G tal que o produto $H \times H \rightarrow H$ é diferenciável em relação a estrutura intrínseca de H .*

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é chamado de subálgebra se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, sempre que $X, Y \in \mathfrak{h}$. Observamos que o colchete de Lie de \mathfrak{g} induz uma estrutura de

álgebra de Lie nas subálgebras fazendo das mesmas álgebras de Lie.

Se H é um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G , sua álgebra de Lie \mathfrak{h} é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , a verificação disso segue do fato de que a imersão de H em G é um homomorfismo de grupos de Lie e que a imagem de \mathfrak{h} pela diferencial da imersão é uma subálgebra.

Exemplo 2.19 *O grupo especial linear formado pelas matrizes de determinante 1*

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\},$$

é subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ com álgebra de Lie denotado por

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

Exemplo 2.20 *O grupo ortogonal formado pelas matrizes ortogonais*

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\},$$

é subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ com álgebra de Lie denotado por

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$$

Exemplo 2.21 *O grupo especial ortogonal formado pelas matrizes ortogonais*

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = I, \det(A) = 1\},$$

é subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ com álgebra de Lie denotado por

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0, \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

Existe uma correspondência biunívoca entre as subálgebras \mathfrak{h} da álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie G e os subgrupos de Lie conexos H de G . Consideremos a seguinte teorema

Teorema 2.22 *Se G é um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra. Então, existe um único subgrupo de Lie conexo H de G com álgebra de Lie \mathfrak{h}*

Demonstração. Segue em [39], página 94.

Corolário 2.23 *Existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos conexos de um grupo de Lie e as subálgebras da sua álgebra de Lie.*

2.4 Grupos de Lie simplesmente conexos

Nesta seção vamos estabelecer alguns resultados sobre grupos de Lie simplesmente conexos. Antes disso vamos relembrar alguns conceitos importantes sobre recobrimento

- Seja X um espaço topológico conexo e localmente conexo por caminhos. Então, existe um recobrimento $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, que é simplesmente conexo. Esse recobrimento é único a menos de homeomorfismo.
- No caso particular em que $X = M$ é uma variedade diferenciável conexa, seu recobrimento universal $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$, nesse caso \tilde{M} , é uma variedade diferenciável e π é um difeomorfismo local.

Consideremos agora G um grupo de Lie conexo. O grupo de Lie G tem um recobrimento universal $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$, o próximo teorema garante que \tilde{G} tem uma única estrutura diferenciável e que π é uma aplicação C^∞ não-singular, além disso, uma estrutura de grupo de Lie pode ser induzida em \tilde{G} fazendo do mesmo um grupo de Lie e π um homomorfismo de grupos de Lie.

Teorema 2.24 *Todo grupo de Lie conexo G admite um recobrimento universal simplesmente conexo \tilde{G} que é um grupo de Lie de modo que a aplicação de recobrimento $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.*

Demonstração. Segue em [39], página 100.

A proposição seguinte é importante para os nossos propósitos no **capítulo 7**

Proposição 2.25 *Sejam G e H grupos de Lie conexos, e seja $\varphi: G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então, φ é uma aplicação de recobrimento se, e somente se, $\varphi_*: T_e(G) \rightarrow T_e(H)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Segue em [39], página 100.

O próximo resultado estabelece uma ligação entre os homomorfismos de álgebras de Lie de um grupos de Lie simplesmente em um grupo de Lie qualquer e homomorfismo dos grupos de Lie subjacentes.

Teorema 2.26 *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} respectivamente e com G simplesmente conexo. Seja $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo. Então, existe um único homomorfismo $\varphi: G \rightarrow H$ tal que $\varphi_* = \psi$.*

Demonstração. Segue em [39], página 101.

Corolário 2.27 *Se G e H são grupos de Lie simplesmente conexos com álgebras de Lie isomorfas, então G e H são isomorfos.*

2.5 Aplicação exponencial

Definição 2.28 Um homomorfismo $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ é um subgrupo a 1-parâmetro de G .

Definição 2.29 Seja G um grupo de Lie, e seja \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Consideremos $X \in \mathfrak{g}$. Então

$$\lambda \frac{d}{dr} \rightarrow \lambda X$$

é um homomorfismo da álgebra de Lie \mathbb{R} em \mathfrak{g} . Como $(\mathbb{R}, +)$ é grupo de Lie simplesmente conexo, pelo **teorema 2.26**, existe um único homomorfismo

$$\exp_X: \mathbb{R} \rightarrow G, \text{ tal que } (\exp_X)_*(\lambda \frac{d}{dr}) = \lambda X.$$

Em outras palavras, $t \rightarrow \exp_X(t) = \exp(tX)$ é o único subgrupo a 1-parâmetro de G cujo vetor tangente em 0 é X_e . Definimos a aplicação exponencial por

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, \text{ de modo que } \exp(X) = \exp_X(1).$$

A seguinte proposição nos fornece alguns resultados acerca da aplicação exponencial e dos fluxos associados aos campos invariantes.

Proposição 2.30 Para a exponencial definida anteriormente valem os seguintes resultados

1. O grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos X_t associado a um campo invariante à esquerda X é dado por

$$X_t = R_{\exp(tX)}, \text{ isto é, } X_t(g) = g \exp(tX), \text{ para todo } g \in G.$$

2. $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ é de classe C^∞ e $(\exp)_*: T_0(\mathfrak{g}) \rightarrow T_e(G)$ é a aplicação identidade (com a identificação $\mathfrak{g} = T_e(G)$), assim \exp é um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ em uma vizinhança de $e \in G$.
3. Para todo $X \in \mathfrak{g}$, e $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t+s)X = \exp(tX) \exp(sX) = \exp(sX) \exp(tX),$$

isto é, os elementos do subgrupo $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ comutam entre si.

4. Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então, $[X, Y] = 0$ se, e somente se, $\exp(tX) \exp(sY) = \exp(sY) \exp(tX)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Segue em [39], página 103.

Exemplo 2.31 Como visto no exemplo 2.13 os campos invariantes à esquerda em $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ são da forma $X_g = gX_e$, associados ao sistema linear

$$\frac{dg}{dt} = gX_e$$

no espaço de matrizes. A solução fundamental desse sistema é dada pela exponencial de matrizes $\exp(X_e) = \sum_{n \geq 0} \frac{X_e^n}{n!}$, que é exatamente a aplicação exponencial de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Teorema 2.32 Seja $\varphi: H \rightarrow G$ um homomorfismo, então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{g} \end{array}$$

ou seja $\varphi(\exp X) = \exp(\varphi_* X)$.

Demonstração. Segue em [39], página 104.

Consideremos a seguinte proposição

Proposição 2.33 Seja G um grupo de Lie conexo e $U \subset G$ uma vizinhança de $e \in G$. Então

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

onde $U^n = \{g_1 \dots g_n \mid g_\alpha \in U, \alpha = 1, \dots, n\}$.

Demonstração. Segue em [7], página 31.

A proposição 2.33 nos permite estabelecer o seguinte resultado para grupos de Lie conexos

Proposição 2.34 Seja G um grupo de Lie conexo e tome $g \in G$. Então, existem $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{g}$ tal que

$$g = \exp(X_1) \dots \exp(X_s)$$

Demonstração. A partir do item 2 da proposição 2.30, podemos tomar $U \subset G$ vizinhança de $e \in G$ para qual $\exp: W \rightarrow U$ é difeomorfismo, onde $W \subset \mathfrak{g}$ é vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$, e da proposição 2.33 temos o resultado. ■

2.6 Representações

Exploraremos agora um caso particular de homomorfismo de grupos de Lie. As representações são homomorfismos em que o contradomínio é o grupo linear $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, de maneira mais geral podemos considerar uma representação como sendo um homomorfismo em que o contradomínio é o grupo $\text{GL}(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\text{GL}(V)$ é o grupo dos automorfismos lineares de V . Denotemos por $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ o homomorfismo que define a representação de G em V . Para cada elemento $g \in G$ temos $\rho(g): V \rightarrow V$ um isomorfismo linear.

Para uma representação diferenciável $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ de G em V denotaremos por $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie do grupo de Lie $\text{GL}(V)$, que consiste em ser o espaço das transformações lineares $V \rightarrow V$ com o colchete de Lie dado pelo comutador. Denotemos por $\rho_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ a diferencial na identidade da representação de G em V . Pelo **teorema 2.32** temos a seguinte fórmula que relaciona a representação com sua diferencial na identidade

$$\rho(\exp(X)) = \exp(\rho_*X).$$

A exponencial do segundo membro da equação é a do grupo linear, portanto, pode ser expressa como série de potências **exemplo 2.31**.

Existe uma representação natural de um grupo de Lie G em sua própria álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para cada elemento $g \in G$ existe um automorfismo associado $C_g: G \rightarrow G$, definido por $C_g(x) = gxg^{-1}$, $x \in G$. Como $C_g(e) = e$ temos $(C_g)_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Obtemos assim uma representação $g \rightarrow (C_g)_*$ de G em \mathfrak{g} , observando que $(C_g)_* \circ (C_h)_* = (C_{gh})_*$ e que $(C_g)_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é isomorfismo linear.

Definição 2.35 Definimos a representação adjunta $Ad: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ de G em \mathfrak{g} por

$$Ad(g) = (C_g)_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Do **teorema 2.32** temos a seguinte fórmula relacionando a representação adjunta com a conjugação

$$g \exp(X) g^{-1} = C_g(\exp(X)) = \exp(Ad(g)X)$$

Exemplo 2.36 Observamos que no caso de $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, para $B \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ temos $Ad(B)X = BXB^{-1}$.

Denotando por $ad: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ a diferencial da aplicação $Ad: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ no elemento neutro, temos a seguinte proposição

Proposição 2.37 *Seja G é um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} , e seja $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então*

$$ad(X)Y = [X, Y].$$

Demonstração. Segue em [39], página 115.

De acordo com o diagrama do **teorema 2.32**, para todo grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g} , temos

$$Ad(\exp(X)) = \exp(ad(X)Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2.7 Subgrupos fechados

Nesta seção vamos estudar os subgrupos fechados de um grupo de Lie. Nosso principal objetivo é explorar o teorema do subgrupo fechado de Cartan, que garante que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é de fato um subgrupo de Lie. Primeiramente, como visto na **proposição 2.34** todo elemento de um grupo de Lie conexo pode ser escrito como o produto de exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie. Em outras palavras, se G é conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} , então $G = \langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle$, isto é, G é gerado por exponenciais de elementos de sua álgebra de Lie. Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [39] e [7].

Para um subgrupo de Lie G denotemos por G_0 a componente conexa que contém o elemento neutro $e \in G$. Lembrando que um subgrupo H de um grupo G é normal se, e somente se, $H = gHg^{-1}$, para todo $g \in G$, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.38 *Denotando G_0 a componente conexa do elemento neutro de G . Então, G_0 é subgrupo fechado e normal de G . Qualquer outra componente conexa é uma classe lateral $gG_0 = G_0g$. Reciprocamente, toda classe lateral $gG_0 = G_0g$ é uma componente conexa.*

Consideremos o seguintes resultados acerca do produto de exponenciais e colchetes. Estes resultados são fundamentais para o teorema do subgrupo fechado de Cartan.

Proposição 2.39 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para $X, Y \in \mathfrak{g}$ vale*

$$\exp(X + Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(\frac{X}{n}) \exp(\frac{Y}{n}))^n$$

Proposição 2.40 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para $X, Y \in \mathfrak{g}$ vale*

$$\exp(-[X, Y]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{X}{n}} e^{\frac{Y}{n}} e^{-\frac{X}{n}} e^{-\frac{Y}{n}})^{n^2}$$

As **proposições 2.39** e **2.40** nos garantem o seguinte resultado

Proposição 2.41 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se $H \subset G$ é um subgrupo fechado de G , então temos que*

$$\mathfrak{h}_H = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in H, \forall t \in \mathbb{R}\},$$

é subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

O próximo resultado é muito importante para o estudo dos subgrupos de Lie, esse resultado nos permitira reconhecer um subgrupo de Lie a partir de características topológicas.

Teorema 2.42 *Todo subgrupo fechado H de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{h}_H .*

Seguem alguns exemplos gerais de subgrupos fechados de grupos de Lie.

Exemplo 2.43 *Seja G um grupo de Lie, definimos o centralizador de $g \in G$ por*

$$Z(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}.$$

Então, $Z(g)$ é fechado em G . De fato, como $x \in Z(g)$ se, e somente se, $C_g(x) = gxg^{-1} = x$, isto é, $Z(g)$ é o conjunto onde C_g coincide com a aplicação identidade. Como G é espaço topológico de Hausdorff $Z(g)$ é conjunto fechado.

Exemplo 2.44 *Seja G um grupo de Lie, consideremos o centro de G definido por*

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}.$$

Então $Z(G)$ é subgrupo fechado de G . De fato, temos $Z(G) = \bigcap_{g \in G} Z(g)$, como visto anteriormente cada $Z(g)$ é fechado.

Exemplo 2.45 *Os exemplos 2.19, 2.20 e 2.21 são exemplos de subgrupos fechados de $GL(n, \mathbb{R})$.*

O teorema do subgrupo fechado nos permite estabelecer o seguinte resultado no contexto de homomorfismos

Teorema 2.46 *Seja $\varphi: G \rightarrow K$ um homomorfismo de grupos de Lie. Se denotarmos $H = \ker(\varphi)$ e $\mathfrak{h} = \ker(\varphi_*)$, então H é um subgrupo de Lie fechado de G com álgebra de Lie \mathfrak{h} .*

Demonstração. Pela definição de $\ker(\varphi)$ e como φ é uma aplicação contínua, segue que H é subgrupo fechado, e portanto subgrupo de Lie. Agora, $X \in \mathfrak{g}$ é elemento da álgebra de H se, e somente se, $\exp(tX) \in H$, para todo $t \in \mathbb{R}$, que ocorre se, e somente se, $\varphi(\exp(tX)) = e$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta última afirmação é equivalente a $\exp(t\varphi_*X) = e$, para todo $t \in \mathbb{R}$, isso acontece se, e somente se $\varphi_*X = 0$. Logo $\mathfrak{h} = \ker(\varphi_*)$ é a álgebra de Lie de $H = \ker(\varphi)$. ■

2.8 Homomorfismos contínuos

Nesta seção trataremos de alguns resultados relacionados à homomorfismos contínuos. Nosso principal objetivo é mostrar que homomorfismos contínuos entre grupos de Lie são de fato diferenciáveis.

Um problema interessante na teoria de grupos de Lie é decidir quando um grupo topológico conexo localmente Euclidiano admite uma estrutura diferenciável que faz do mesmo um grupo de Lie. Esse problema foi proposto por Hilbert e submetido ao Congresso internacional de Matemática em 1900, e foi resolvido com uma resposta afirmativa por Gleason junto com Montgomery e Zippen em 1952; detalhes em [28].

Esse primeiro resultado será fundamental na demonstração do resultado principal desta seção.

Teorema 2.47 *Seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ um homomorfismo contínuo da reta real \mathbb{R} em um grupo de Lie G . Então, φ é diferenciável (C^∞).*

Demonstração. Segue em [39], página 109.

Agora vamos estabelecer um resultado muito importante no contexto de homomorfismo de grupos de Lie.

Teorema 2.48 *Seja $\varphi: H \rightarrow G$ um homomorfismo contínuo de grupos de Lie. Então φ é diferenciável (C^∞).*

Demonstração. Seja H grupo de Lie de dimensão n , fixemos X_1, \dots, X_n base de \mathfrak{h} , álgebra de Lie de H . Consideremos a aplicação $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow H$, definido por

$$\psi(t_1, \dots, t_n) = (\exp(t_1 X_1)) \dots (\exp(t_n X_n))$$

é uma aplicação C^∞ , e não-singular em $0 \in \mathbb{R}^n$, logo, existe uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{R}^n$ difeomorfa por ψ com uma vizinhança U de $e \in H$. Como $t_\alpha \rightarrow \varphi(\exp(t_\alpha X_\alpha))$ é um homomorfismo contínuo de \mathbb{R} com G , portanto é C^∞ (**teorema 2.47**). Assim $\varphi \circ \psi$ é C^∞ , e portanto $\varphi|_U$, que pode ser expressa por $(\varphi \circ \psi) \circ \psi^{-1}|_U$, é C^∞ . Como $\varphi|_{gU} = L_{\varphi(g)} \circ \varphi \circ L_{g^{-1}}|_{gU}$, φ é C^∞ em todo H . ■

Corolário 2.49 *Um grupo topológico localmente Euclidiano que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade admite apenas uma estrutura diferenciável que faz do mesmo um grupo de Lie.*

Demonstração. A aplicação identidade fornece um difeomorfismo entre duas quaisquer estruturas diferenciáveis. ■

Neste trabalho nosso interesse está apenas nas estruturas C^∞ . De acordo com [32], podemos mostrar que o conjunto de estruturas C^∞ contém uma estrutura analítica (as funções de transição $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$, relacionadas aos mapas coordenados ψ_α e ψ_β , são analíticas). Dentro deste contexto é possível mostrar que todo homomorfismo contínuo entre grupos de Lie é analítico.

2.9 Variedades homogêneas e Ações de Grupos

Vamos explorar agora os conceitos elementares das variedades homogêneas, ou espaços homogêneos, que tem um papel importante no estudo das variedades diferenciáveis. Começamos com o seguinte teorema.

Teorema 2.50 *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G , e seja G/H o conjunto das classes laterais $\{gH \mid g \in G\}$ módulo H . Denotemos por $\pi: G \rightarrow G/H$ a projeção natural $\pi(g) = gH$. Então G/H tem uma estrutura única natural de variedade diferenciável tal que*

1. π é submersão de classe C^∞ .
2. *Existem seções locais suaves de G/H em G ; isto é, se $gH \in G/H$ existe um vizinhança W de gH e uma aplicação diferenciável $\tau: W \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \tau = id$.*

Demonstração. Segue em [39], página 120.

Assim, definimos as variedades homogêneas da seguinte forma.

Definição 2.51 *Variedades da forma G/H , onde G é um grupo de Lie e H é um subgrupo fechado de G , e variedades com uma única estrutura diferenciável satisfazendo 1) e 2) do teorema 2.50 são chamadas variedades homogêneas.*

Como no caso de aplicações contínuas em relação à topologia quociente, temos o seguinte resultado para variedades homogêneas.

Proposição 2.52 *Uma função $f: G/H \rightarrow M$, entre uma variedade homogênea G/H e uma variedade diferenciável M , é diferenciável se, e somente se, $f \circ \pi$ é diferenciável.*

Demonstração. Se f é diferenciável, pelo **teorema 2.50**, certamente $f \circ \pi$ é diferenciável. Agora, suponha que $f \circ \pi$ é diferenciável. Para cada $gH \in G/H$ existe uma vizinhança W em G/H e uma seção $\tau: W \rightarrow G$ diferenciável (C^∞), tal que $\pi \circ \tau = id$

em W . Assim temos $f|_W = (f \circ \pi) \circ \tau$ diferenciável, como W é uma vizinhança de um elemento arbitrário em G/H , temos f diferenciável. ■

Definiremos agora o conceito de ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis.

Definição 2.53 *Seja M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Uma ação diferenciável à direita de G em M é uma aplicação diferenciável $*$: $G \times M \rightarrow M$, tal que $(g, x) \rightarrow g * x$, onde cada $g \in G$ define um difeomorfismo $g*: M \rightarrow M$, de modo que*

1. $e * x = x$, para todo $x \in M$;
2. $(gh) * x = g * (h * x)$, para todo $x \in M$ e $g, h \in G$.

Para facilitar a notação denotamos a ação de um elemento $g \in G$ em $x \in M$ apenas por gx em vez de $g * x$, sem que haja confusão com o produto definido no grupo. De modo análogo podemos definir ação à direita $M \times G \rightarrow M$, com $(x, g) \rightarrow x * g = xg$.

Dadas as condições da **definição 2.53** a variedade M é chamada de G -espaço. Dizemos que G age transitivamente em M se existe $x_0 \in M$ tal que $g \rightarrow gx_0$ é uma aplicação sobrejetora de G em M . Definimos a órbita de um elemento $x \in M$ como sendo o conjunto $O(x) = \{gx \in M \mid g \in G\}$, assim uma ação é transitiva se existe $x_0 \in M$ tal que $O(x_0) = M$.

Se M é um G -espaço e $x_0 \in M$,

$$H_{x_0} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$$

é subgrupo fechado de G , chamado subgrupo de isotropia de x_0 . Temos o seguinte resultado relacionando ações e variedades homogêneas.

Proposição 2.54 *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável, de modo que G age transitivamente em M . Dado $x_0 \in M$, seja H_{x_0} o subgrupo de isotropia de x_0 . O mapa*

$$\phi: G/H_{x_0} \rightarrow M, \text{ definido por } \phi(gH_0) = gx_0,$$

é difeomorfismo.

Demonstração. Segue em [39], página 123.

Seguem alguns exemplos de ações e variedades homogêneas.

Exemplo 2.55 *Consideremos e_1, \dots, e_n a base canônica do espaço \mathbb{R}^n . Definimos a ação de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n , de modo que*

$$ge_\beta = \sum_\alpha g_{\alpha\beta}e_\alpha, \text{ para todo } g = (g_{\alpha\beta}) \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ e } e_\beta, \beta = 1, \dots, n.$$

Temos assim uma ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.56 Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico de \mathbb{R}^n . Se $g \in O(n, \mathbb{R})$, então $gg^T = I$. Assim, se $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle gv, gv \rangle = \langle v, gg^T v \rangle = \langle v, v \rangle;$$

isto é, os elementos de $O(n, \mathbb{R})$ preservam o comprimento dos vetores de \mathbb{R}^n . Podemos então considerar a ação $O(n, \mathbb{R}) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, esta ação é transitiva. Além disso, tomando $e_1 \in S^{n-1}$ temos

$$H_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in O(n-1, \mathbb{R}) \right\},$$

subgrupo de isotropia de $e_1 \in \mathbb{R}^n$. Temos a identificação natural de H_{e_1} com $O(n-1, \mathbb{R})$. Assim, pela **proposição 2.54**, $O(n, \mathbb{R})/O(n-1, \mathbb{R}) \cong S^{n-1}$.

Exemplo 2.57 Por argumentos similares aos do exemplo anterior é possível mostrar que $SO(n, \mathbb{R})/SO(n-1, \mathbb{R}) \cong S^{n-1}$.

Exemplo 2.58 A variedade Grassmaniana real $G_{p,q}(\mathbb{R})$ dos p -planos em \mathbb{R}^{p+q} é o conjunto de todos os subespaços p -dimensionais de \mathbb{R}^{p+q} com estrutura de variedade construída da seguinte forma. Seja x^1, \dots, x^{p+q} o sistema de coordenadas natural em \mathbb{R}^{p+q} , onde cada $x^k: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}$ é um mapa linear. Para cada conjunto de inteiros $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ tal que $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq p+q$, seja U_α o subconjunto de $G_{p,q}(\mathbb{R})$ formado por todos os subespaços p -dimensionais S tal que $x^{\alpha_1}|_S, \dots, x^{\alpha_p}|_S$ são linearmente independentes. Vamos definir um mapa $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{pq}$. Seja $\{\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}\}$ o complemento de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ em $\{1, \dots, p+q\}$ ordenado de maneira crescente. Como para cada $S \in U_\alpha$, o conjunto $x^{\alpha_1}|_S, \dots, x^{\alpha_p}|_S$ forma uma base para o espaço dual S^* , podemos escrever

$$x^{p+k}|_S = \sum_{l=1}^p s_l^k(x^{\alpha_l}|_S), \quad k = 1, \dots, q.$$

Definimos então $\varphi_\alpha(S) = (s_l^k) \in M_{p \times q}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{pq}$, para cada $S \in U_\alpha$. É fácil ver que $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{pq}$ é um sistema de coordenadas locais em $G_{p,q}(\mathbb{R})$ e que a família de $\binom{p+q}{p}$ cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ formam um atlas, fazendo de $G_{p,q}(\mathbb{R})$ uma variedade diferenciável de dimensão pq .

O grupo $GL(p+q, \mathbb{R})$ age em \mathbb{R}^{p+q} levando subespaços p -dimensionais em subespaços p -dimensionais por isso pode ser considerado como um grupo de transformações agindo em $G_{p,q}(\mathbb{R})$. Essa ação é diferenciável e transitiva. Se S_0 denota o subespaço p -dimensional gerado pelos primeiros p vetores da base canônica de \mathbb{R}^{p+q} , o subgrupo de isotropia H_{S_0} de S_0 é dado por

$$H_{S_0} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}) \right\},$$

onde 0 denota a matriz nula de ordem $q \times p$. Por isso $G_{p,q}(\mathbb{R})$ pode ser visto como o espaço quociente $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})/H_{S_0}$ do grupo de Lie $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})$ pelo subgrupo de Lie fechado H_{S_0} .

Exemplo 2.59 Por argumentos similares ao que foi feito no exemplo anterior, podemos mostrar que o grupo ortogonal $O(p+q)$ age diferencialmente e transitivamente em $G_{p,q}(\mathbb{R})$, assim podemos escrever $G_{p,q}(\mathbb{R})$ como o espaço quociente $O(p+q)/O(p) \times O(q)$, onde

$$O(p) \times O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in O(p), B \in O(q) \right\}.$$

Como $O(p+q)/O(p) \times O(q)$ é compacta, segue que $G_{p,q}(\mathbb{R})$ também é variedade compacta.

Exemplo 2.60 A variedade Grassmaniana real $G_{1,n}(\mathbb{R})$ é conhecida como espaço projetivo, e denotada por $\mathbb{R}P^n$. Como visto anteriormente $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade homogênea.

CAPÍTULO 3

GRUPOS DE LIE SEMI-SIMPLES

Neste capítulo estudaremos os grupos de Lie semi-simples. Na primeira seção vamos explorar os conceitos e resultados elementares da teoria de álgebras de Lie semi-simples. Posteriormente estudaremos as formas reais de uma álgebra de Lie semi-simples e a decomposição de Cartan, tanto no nível da álgebra quanto no nível do grupo de Lie associado. As principais referências para os resultados desse capítulo são [20] e [29].

3.1 Álgebras de Lie semi-simples

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita. Definimos recursivamente

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}],$$

observando que para $A, B \subseteq \mathfrak{g}$, temos $[A, B] = \text{span}_{\mathbb{R}}\{[X, Y] \mid X \in A, Y \in B\}$. Obtemos uma série decrescente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(2)} \supseteq \dots$$

conhecida como **série derivada** de \mathfrak{g} . Cada elemento da série derivada é de fato uma subálgebra de \mathfrak{g} , como podemos observar pela definição dos elementos da série.

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é chamada **solúvel** se $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Seguem alguns exemplos de álgebras solúveis.

Exemplo 3.1 A álgebra de Lie de matrizes $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \right\}$, com o colchete dado pelo comutador de matrizes.

Exemplo 3.2 A álgebra de Lie de matrizes $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$, com o colchete dado pelo comutador de matrizes.

Se $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ é um subespaço que satisfaz $[X, Y] \in \mathfrak{i}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{i}$, dizemos que \mathfrak{i} é um ideal de \mathfrak{g} . Pela definição do quociente de espaços vetoriais, e considerando $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ ideal, temos que o espaço $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é uma álgebra de Lie com estrutura induzida de \mathfrak{g} pela projeção canônica $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$.

Como todo ideal é uma subálgebra, podemos nos perguntar sobre a solubilidade dos ideais de uma álgebra, temos a seguinte proposição acerca de ideais solúveis de uma álgebra.

Proposição 3.3 Se \mathfrak{i} é um ideal solúvel de \mathfrak{g} e se $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é solúvel, então \mathfrak{g} é solúvel.

Demonstração. Com a estrutura de álgebra de Lie induzida de \mathfrak{g} em $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ a projeção canônica $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, suponha que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^{(k)} = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Temos que $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \Rightarrow \pi(\mathfrak{g}^{(n)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim temos $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = 0 \Rightarrow \mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{i}$, como $\mathfrak{i}^{(l)} = 0$, para algum $l \in \mathbb{N}$, temos $\mathfrak{g}^{(k+l)} = (\mathfrak{g}^{(k)})^l \subseteq \mathfrak{i}^{(l)} = 0$, e \mathfrak{g} solúvel. ■

Esta proposição nos permite estabelecer o seguinte resultado

Proposição 3.4 Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie de dimensão finita, então existe um único ideal \mathfrak{r} de \mathfrak{g} que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} .

Demonstração. Primeiramente observamos que se \mathfrak{i}_1 e \mathfrak{i}_2 são dois ideais solúveis de \mathfrak{g} , então $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2$ é ideal solúvel. De fato, pelo teorema de isomorfismos temos

$$\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2/\mathfrak{i}_2 \cong \mathfrak{i}_1/\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2,$$

como \mathfrak{i}_1 é solúvel, $\mathfrak{i}_1/\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2$ é solúvel e daí que $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2/\mathfrak{i}_2$ é solúvel. Como \mathfrak{i}_2 é solúvel, pela **proposição 3.3** segue que $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2$ é solúvel.

Agora, denote por n a dimensão máxima dos ideais solúveis de \mathfrak{g} e \mathfrak{r} um ideal solúvel com $\dim(\mathfrak{r}) = n$. Seja \mathfrak{i} um ideal solúvel de \mathfrak{g} , pelo que foi visto acima, $\mathfrak{r} + \mathfrak{i}$ é solúvel. Pela maximalidade da dimensão dos ideais solúveis, temos $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{i}) = \dim(\mathfrak{r})$, assim $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{r} + \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{r}$. Assim temos \mathfrak{r} ideal solúvel que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} . ■

O ideal solúvel \mathfrak{r} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} que contém todos os outros ideais solúveis de \mathfrak{g} é chamado de **radical solúvel**, e muitas vezes é denotado por $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

A partir da construção anterior do conceito de radical solúvel podemos definir as álgebras de Lie semi-simples da seguinte forma.

Definição 3.5 *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é chamada semi-simples se não possui nenhum ideal solúvel, isto é, de $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$.*

Um conceito importante para o estudo das álgebras de Lie é o conceito de **álgebra de Lie simples**. Definimos o centro de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} como sendo o ideal

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é abeliana se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, isto é, se $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Definição 3.6 *Uma álgebra de Lie é dita **simples** se não é abeliana e não possui ideal próprio não-nulo.*

Temos o seguinte resultado relacionado à álgebras simples e álgebras semi-simples

Proposição 3.7 *Em uma álgebra de Lie simples $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Toda álgebra de Lie simples é semi-simples.*

Demonstração: Segue em [19], página 33.

Exemplo 3.8 *Consideremos a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ do grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$. Fixamos a seguinte base $\{X, H, Y\}$, tal que*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

temos a seguinte relação de colchete dado pelo comutador

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Tome $Z = aX + bH + cY \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, então

$$ad(X)Z = -2bX + cH, \quad ad(X)^2Z = -2cX.$$

Assim, se $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é um ideal não-nulo, tomando $Z \in \mathfrak{i}$, pelo que foi visto acima $X \in \mathfrak{i}$, assim $H = [X, Y] \in \mathfrak{i}$, $Y = -\frac{1}{2}[H, Y] \in \mathfrak{i}$. Temos então $\mathfrak{i} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, concluindo que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é simples, e portanto semi-simples.

Uma ferramenta importante para o estudo das álgebras de Lie semi-simples é a forma de *Cartan-Killing*, que é definida da seguinte forma.

Definição 3.9 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita. A forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é a forma bilinear simétrica definida por*

$$\kappa(X, Y) = \text{tr}(ad(X)ad(Y)), \text{ para } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

A forma de Cartan-Killing nos permite estabelecer a seguinte caracterização das álgebras de Lie semi-simples.

Teorema 3.10 *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é semi-simples se, e somente se, a sua forma de Cartan-Killing κ é não-degenerada.*

Demonstração: Segue em [19], página 50.

3.2 Formas reais e decomposição de Cartan

Nesta seção vamos estabelecer alguns resultados acerca das álgebras de Lie semi-simples que utilizaremos posteriormente no **capítulo 9**, onde estudaremos a existência de estrutura pseudo-Kähler no grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$.

Até o momento estudamos resultados associados às álgebras de Lie sobre o corpo dos números reais. Para os capítulos posteriores será importante o estudo das álgebras de Lie sobre o corpo dos números complexos, tendo em vista que nosso estudo concreto será sobre um grupo de Lie com álgebra de Lie complexa.

Consideremos \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real, e denotemos por $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sua complexificação, isto é, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Uma álgebra de Lie complexa nada mais é que um espaço vetorial sobre \mathbb{C} cujo colchete de Lie é bilinear sobre \mathbb{C} . Nesta seção vamos estudar as formas reais de uma álgebra de Lie complexa.

Exemplo 3.11 *O espaço vetorial complexo $M_n(\mathbb{C})$ de todas as matrizes com o colchete de Lie dado pelo comutador de matrizes é uma álgebra de Lie complexa denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.*

Exemplo 3.12 *O subespaço de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ com o colchete de Lie dado pelo comutador de matrizes*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$$

Exemplo 3.13 *O subespaço de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ com o colchete de Lie dado pelo comutador de matrizes*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$

Exemplo 3.14 *O subespaço de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ com o colchete de Lie dado pelo comutador de matrizes*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0, \text{tr}(X) = 0\}$$

Definição 3.15 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa, uma álgebra de Lie real \mathfrak{g}_0 é chamada forma real de \mathfrak{g} se $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g}$.*

Seja \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie sobre \mathbb{R} e $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sua complexificação. Como o traço de uma transformação permanece o mesmo ao se fazer uma extensão no corpo de escalares, temos que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ coincide com a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} quando restrita a \mathfrak{g} . Uma forma bilinear é ou não degenerada se, e somente se, o determinante de sua matriz é ou não nulo em alguma base. Como uma base de \mathfrak{g} é uma base de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sobre \mathbb{C} , temos o seguinte resultado.

Proposição 3.16 *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} real é semi-simples se, e somente se, sua complexificação $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é semi-simples.*

Demonstração. Segue em [6], página 87.

O estudo das álgebras de Lie semi-simples segue com sua classificação que pode ser encontrada em [6] e [17] entre outras referências. Para nossos objetivos seguimos nos estudos de formas reais de álgebras complexas.

Como corolário da **proposição 3.16** temos.

Corolário 3.17 *Se \mathfrak{g}_0 é a forma real de uma álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} , então \mathfrak{g}_0 é semi-simples se, e somente se, \mathfrak{g} é semi-simples.*

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g}_0 é chamada compacta se sua forma de Cartan-Killing é negativa definida. Consideremos \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de matrizes sobre \mathbb{R} fechada pela operação $X \rightarrow X^T$. Então \mathfrak{g}_0 é soma direta do conjunto das matrizes anti-simétricas \mathfrak{t}_0 com o conjunto das matrizes simétricas \mathfrak{p}_0 . A complexificação \mathfrak{g} de $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ é dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$.

O espaço vetorial real $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$ é fechado pelo colchete dado pelo comutador de matrizes e consiste da álgebra das matrizes anti-Hermitianas ($X^* = -\overline{X}^T$). A forma de

Cartan-Killing é negativa definida em \mathfrak{u}_0 , isto é, \mathfrak{u}_0 é uma álgebra de Lie compacta (ver em [19], página 348). Denotando $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0^{\mathbb{C}}$, podemos escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$. Temos que complexificação $\mathfrak{u}_0^{\mathbb{C}}$ é a álgebra \mathfrak{g} , isto é, $\mathfrak{u}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$. A álgebra \mathfrak{u}_0 é uma forma real compacta de \mathfrak{g} .

De modo geral dada uma álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} uma forma real compacta é uma álgebra de Lie real compacta \mathfrak{g}_0 tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Uma pergunta natural que aparece é sobre a existência de formas reais compactas para álgebras complexas, tendo em vista que neste caso a forma de Cartan-Killing é não-degenerada quando restrita a forma real compacta. O próximo teorema nos fornece informações sobre a existência de formas reais compactas para o caso semi-simples.

Teorema 3.18 *Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie complexa semi-simples, então \mathfrak{g} admite uma forma real compacta \mathfrak{u}_0*

Demonstração. Segue em [19], página 353.

Uma ferramenta importante no estudo das formas reais são as involuções. Consideremos V um espaço vetorial real e denotemos por $V^{\mathbb{C}}$ sua complexificação, os elementos de $V^{\mathbb{C}}$ se escrevem da forma $X + iY$, com $X, Y \in V$. Podemos definir a conjugação $\theta: V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$

$$\theta(X + iY) = X - iY.$$

A aplicação θ satisfaz $\theta^2 = 1$ (involução) e $\theta(zX) = \bar{z}X$, sendo linear apenas sobre os reais (antilinear). Temos $V = \{X \in V^{\mathbb{C}} \mid \theta(X) = X\}$.

Definição 3.19 *Seja W um espaço vetorial complexo. Uma conjugação em W é uma transformação antilinear $\theta: W \rightarrow W$, que é uma involução $\theta^2 = 1$*

Denotando por $W_{\mathbb{R}}$ a realificação de W . Uma conjugação em W nos fornece uma decomposição em autoespaços $W_{\mathbb{R}} = W_1 \oplus W_{-1}$, de modo que $W_{\mathbb{R}} = W_1 \oplus iW_1$, portanto W pode ser visto como o complexificado de $W_1 = \{X \in W \mid \theta(X) = X\}$. Assim, diferentes conjugações de W nos fornecem diferentes maneiras de ver W como complexificação de um espaço real, em outras palavras, existe uma correspondência biunívoca entre as conjugações de um espaço vetorial complexo W e seus subespaços reais que se complexificam em W .

Exploraremos os resultados associados as formas reais, e suas relativas conjugações, no contexto das álgebras de Lie semi-simples complexas. O próximo resultado nos fornece as relações entre duas diferentes formas reais de uma álgebra de Lie semi-simples complexas.

Teorema 3.20 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples complexa, \mathfrak{u} uma forma real compacta de \mathfrak{g} e \mathfrak{g}_0 uma forma real qualquer de \mathfrak{g} relacionada à uma conjugação σ . Então, existe um automorfismo ϕ de \mathfrak{g} tal que σ comuta com a conjugação relacionada a forma compacta $\phi(\mathfrak{u})$.*

Demonstração. Segue em [6], página 335.

Dentro das hipóteses do **teorema 3.20**, consideremos τ a conjugação associada à forma real compacta \mathfrak{u} de \mathfrak{g} . O **teorema 3.20** diz que, sem perda de generalidade, podemos supor que $\sigma\tau = \tau\sigma$, o que significa que \mathfrak{g}_0 é invariante por τ e \mathfrak{u} é invariante por σ . Consideremos o seguinte resultado.

Proposição 3.21 *Sejam \mathfrak{g}_0 e \mathfrak{g}_1 duas formas reais de uma álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} e σ, σ_1 suas respectivas conjugações tais que $\sigma\sigma_1 = \sigma_1\sigma$. Então,*

$$\mathfrak{g}_1 = (\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_0) \oplus (\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{g}_0).$$

Demonstração. Segue em [6], página 334.

Sendo \mathfrak{g} uma álgebra semi-simples complexa com forma real não compacta \mathfrak{g}_0 e forma real compacta \mathfrak{u} , denotando por τ a conjugação associada a \mathfrak{u} . Como \mathfrak{g}_0 é invariante por τ , sua restrição $\tau|_{\mathfrak{g}_0} = \theta$ é uma involução de \mathfrak{g}_0 que nos fornece uma decomposição

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$$

conhecida como **decomposição de Cartan**, onde $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$, e além disso

$$[\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_0] \subset \mathfrak{t}_0, [\mathfrak{t}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0, [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{t}_0. \quad (3.1)$$

Uma **involução de Cartan** θ em uma álgebra de Lie real semi-simples \mathfrak{g}_0 é uma involução, $\theta^2 = 1$, de modo que \mathfrak{g} se decompõe em soma de autoespaços \mathfrak{t}_0 e \mathfrak{p}_0 associados a 1 e -1 , respectivamente, tal que as relações de colchete (3.1) são satisfeitas por \mathfrak{t}_0 e \mathfrak{p}_0 .

O **teorema 3.18** combinado com o **teorema 3.20** nos fornecem o seguinte corolário

Corolário 3.22 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa semi-simples. Então, as únicas involuções de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ são as conjugações com respeito a formas reais compactas de \mathfrak{g} .*

Nosso interesse no estudo da decomposição de Cartan está voltado para o estudo dos grupos de Lie com álgebra de Lie semi-simples.

Definição 3.23 *Um grupo de Lie G é chamado semi-simples se sua álgebra de Lie é semi-simples.*

Dado um grupo de Lie semi-simples G com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Pelos resultados anteriores sabemos que existe uma involução de Cartan associada a \mathfrak{g} , e que quaisquer duas involuções estão relacionadas por um automorfismo de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Estabeleceremos um resultado importante para os nosso propósitos relacionados as decomposições de Cartan no nível dos grupos de Lie que integram as álgebras de Lie semi-simples.

Teorema 3.24 *Seja G um grupo de Lie semi-simples com álgebra de Lie \mathfrak{g}_0 e seja θ uma involução de Cartan da álgebra \mathfrak{g}_0 , seja $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ decomposição de Cartan correspondente. Denotemos por K o subgrupo de G com álgebra de Lie \mathfrak{t}_0 . Então*

1. *existe um automorfismo Θ de G com diferencial $\Theta_* = \theta$, e Θ é tal que $\Theta^2 = 1$,*
2. *o subgrupo de G fixado por Θ é K ,*
3. *a aplicação $K \times \mathfrak{p}_0 \rightarrow G$ tal que $(k, X) \rightarrow k \exp(X)$ é difeomorfismo,*
4. *K é fechado,*
5. *K contém o centro $Z(G)$ de G ,*
6. *K é compacto se, e somente se, $Z(G)$ é finito,*
7. *quando $Z(G)$ é finito, K é subgrupo compacto maximal de G .*

Demonstração. Segue em [19], página 362.

CAPÍTULO 4

FIBRADOS E CONEXÕES

Neste capítulo estabeleceremos a linguagem básica da teoria de fibrados. Nosso principal objetivo é estudar resultados básicos da teoria de fibardos vetoriais associados e conexões. As principais referências para os resultados desse capítulo são [20] e [29].

4.1 Fibrados

Iniciamos o estudo dos fibrados vetoriais definindo o conceito de **fibrado principal**, que será o elemento básico para introduzir os **fibrados associados**.

Definição 4.1 *Seja M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Uma variedade diferenciável P é chamada de fibrado principal se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. G age livremente em P pela direita sem fixar pontos: $(x, g) \in P \times G \rightarrow xg \in P$, e se $xg = x$ para algum $x \in P$, então $g = e$.
2. M é o espaço quociente de P pela relação de equivalência: $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$, tal que $y = xg$. A projeção canônica $\pi: P \rightarrow M$ é diferenciável.
3. P é **localmente trivial**, isto é, para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U)$ é isomorfo a $U \times G$ no sentido de que $u \in \pi^{-1}(U) \rightarrow (\pi(u), \phi(u)) \in U \times G$ é um isomorfismo diferenciável, tal que $\phi(ug) = \phi(u)g$ para todo $g \in G$.

Neste caso M é chamado de base de P , G é chamado de grupo estrutural, e denotaremos por $P(M, G)$ o fibrado principal sobre M . Dado um grupo de Lie G e uma variedade diferenciável M , podemos considerar o produto cartesiano $M \times G$ como um fibrado principal sobre M definindo a ação de G em $M \times G$ por $(x, h)g = (x, hg)$. Este fibrado é chamado de **fibrado trivial**.

Exemplo 4.2 (Fibrado das bases) *Seja M uma variedade diferenciável. Um referencial linear u em $x \in M$ é um conjunto de vetores tangentes linearmente independentes $u = (X_1, \dots, X_n)$ que formam uma base para o espaço tangente $T_x M$. Seja P o conjunto dos referenciais lineares em todos os pontos de M . Podemos determinar uma ação de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ em P da seguinte forma: se $g = (g_{\alpha\beta}) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $u = (X_1, \dots, X_n)$ é um referencial em $x \in M$, então $ug = (\sum_{\alpha} g_{\alpha 1} X_{\alpha}, \dots, \sum_{\alpha} g_{\alpha n} X_{\alpha})$, que é um outro referencial no ponto $x \in M$. Se u é um referencial linear em x , $\pi(u) = x$ determina uma projeção de P em M . Tomando coordenadas locais (x^1, \dots, x^n) em um aberto U de M , todo referencial $u \in \pi^{-1}(U)$ pode ser expresso da forma $u = (X_1, \dots, X_n)$, onde $X_{\beta} = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} \partial_{x^{\alpha}}$, onde $(a_{\alpha\beta})$ é uma matriz não-singular. Reciprocamente, toda matriz não-singular $(a_{\alpha\beta})$ define um referencial u como visto anteriormente. Tomando x^1, \dots, x^n e $(a_{\alpha\beta})$ como coordenadas locais em $\pi^{-1}(U)$, podemos assim fazer de P uma variedade diferenciável. Podemos verificar que P é um fibrado principal sobre M com grupo estrutural $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Esse fibrado é chamado fibrado das bases, e denotado por $P = L(M)$.*

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre M . Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade fechada de P que é difeomorfa a G chamada **fibra sobre x** . Para um elemento arbitrário $u \in P$, a **fibra através de u** é a fibra sobre $x = \pi(u)$.

Fibrado associado: Seja $P(M, G)$ um fibrado principal. Consideremos F uma variedade diferenciável na qual G age diferencialmente à esquerda: $(g, \xi) \rightarrow g\xi \in F$. Construiremos o fibrado $E(M, F, G, P)$ associado a P com fibra padrão F . Consideremos a ação de G em $P \times F$ dada pela regra: $(u, \xi) \in P \times F \rightarrow (u, \xi)g = (ug, g^{-1}\xi)$, para $g \in G$. O grupo G age diferencialmente pela direita em $P \times F$. Denotando por E o espaço quociente da relação de equivalência induzida pela ação de G , onde as classes de equivalência são as órbitas. A aplicação que faz a correspondência de um elemento de E representado por (u, ξ) com $\pi_P(u)$ (π_P : a projeção canônica de P em M) define uma projeção π_E de E em M . A fibra $\pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$, de E é o conjunto dos pontos representados pela classe (u, ξ) , onde u é um ponto arbitrário de P com $\pi_P(u) = x$ e ξ percorre todo F .

Todo ponto $x \in M$ tem uma vizinhança U tal que $\pi_P^{-1}(U)$ em P é isomorfo ao produto direto $U \times G$ (fibrado principal trivial). Segue que $\pi_E^{-1}(U)$ em E é o produto $U \times F$. Podemos então introduzir uma estrutura de variedade diferenciável em E , impondo a condição de que $\pi_E^{-1}(U)$ seja uma subvariedade aberta de E que é isomorfa a variedade produto $U \times F$. A projeção π_E de E em M é diferenciável. O espaço E é chamado de fibrado sobre a base M , com fibra típica F e grupo estrutural G , que é associado a P .

Cada elemento $u \in P$ pode ser considerado uma aplicação biunívoca de F sobre a fibra $E_x = \pi_E^{-1}(x)$ de E , onde $x = \pi_P(u) \in M$. Isto é, o elemento u associa a $\xi \in F$ a um

elemento de E representado pela classe de (u, ξ) , que denotamos por $u\xi \in E$. A aplicação $u: F \rightarrow E_{\pi_P(u)} \subset E$ é diferenciável e satisfaz $(ug)\xi = u(g\xi)$.

Exemplo 4.3 (Fibrado tangente) *Seja $L(M, \text{GL}(n, \mathbb{R}))$ o fibrado de bases sobre M . Considerando a ação natural $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que para $g = (g_{\alpha\beta}) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e e_1, \dots, e_n base canônica do espaço \mathbb{R}^n , temos $ge_\beta = \sum_\alpha g_{\alpha\beta}e_\alpha$. Obtemos assim o fibrado associado $E(M, \mathbb{R}^n, \text{GL}(n, \mathbb{R}), L(M))$, onde cada elemento $u \in L(M)$ determina um isomorfismo $u: \mathbb{R}^n \rightarrow E_{\pi_{L(M)}(u)} = T_{\pi_{L(M)}(u)}M$. O fibrado E é conhecido como fibrado tangente, e denotado por $E = TM$.*

Exemplo 4.4 (Fibrado tensorial) *Denotemos por $\mathbf{T}_s^r(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos tensores do tipo (r, s) sobre o espaço vetorial \mathbb{R}^n . Sendo $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ um grupo de transformações de \mathbb{R}^n , podemos construir uma ação à esquerda de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbf{T}_s^r(\mathbb{R}^n)$, o que nos possibilita construir um fibrado E com base M , fibra típica $\mathbf{T}_s^r(\mathbb{R}^n)$, grupo estrutural $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ associado a $L(M)$. Desta maneira temos para cada $u \in L(M)$ um isomorfismo $u: \mathbf{T}_s^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow E_{\pi_{L(M)}(u)} = \mathbf{T}_s^r(TM)_{\pi_{L(M)}(u)}$, onde $\mathbf{T}_s^r(TM)_{\pi_{L(M)}(u)}$ é o espaço dos tensores do tipo (r, s) sobre o espaço vetorial $T_{\pi_{L(M)}(u)}M$. Este fibrado é chamado fibrado tensorial do tipo (r, s) , e denotado por $E = \mathbf{T}_s^r(TM)$.*

Exemplo 4.5 *Seja $E(M, F, G, P)$ um fibrado associado a P , suponhamos que F seja um espaço vetorial de dimensão n . Neste caso o fibrado $E(M, F, G, P)$ é chamado **fibrado vetorial**, e seu posto é a dimensão de F . Se $\rho: G \rightarrow \text{GL}(F)$ é uma representação de G , de modo que ρ é homomorfismo de grupos de Lie, podemos definir uma ação $G \times F \rightarrow F$, tal que $(g, \xi) \rightarrow \rho(g)\xi$. Assim, obtemos o fibrado vetorial E , que é o espaço das órbitas da ação de G em $P \times F: (g, (u, \xi)) \rightarrow (ug, \rho(g)\xi)$. Denotamos $E = P \times_\rho F$.*

Definição 4.6 *Seja $E(M, F, G, P)$ um fibrado vetorial de posto k e U um aberto de M . Uma aplicação diferenciável $\sigma: U \rightarrow E$ é chamada seção de E se $\pi_E \circ \sigma$ é a aplicação identidade de U . Se σ é uma aplicação diferenciável definida em toda variedade M e satisfaz $\pi_E \circ \sigma = id_M$, onde id_M é a aplicação identidade de M , dizemos que σ é uma seção global.*

Denotemos o espaço das seções locais em U por $\Gamma_U(E)$. Uma coleção de seções $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ é chamado **referencial** em U se para todo $p \in U$ o conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ é uma base para E_p . Um fibrado vetorial de posto k , $E(M, F, G, P)$, é chamado **trivial** se existe um referencial definido globalmente, $\sigma_1, \dots, \sigma_k: M \rightarrow E$. Neste caso temos $E = M \times F$. Denotaremos por $\Gamma(E)$ o espaço das seções de E que são definidas globalmente em M .

Exemplo 4.7 *Um campo vetorial diferenciável X definido em um aberto U de uma variedade M é uma seção local do fibrado tangente TM , temos $X \in \Gamma_U(TM)$. Para o caso de X ser definido globalmente temos $X \in \Gamma(TM)$.*

4.2 Conexões em fibrados vetoriais e curvatura

Começamos com as noções de **conexão** e **paralelismo** no contexto de fibrados principais.

Definição 4.8 *Definimos uma conexão Γ em um fibrado principal $P(M, G)$ como uma escolha de subespaços tangentes Q_u em cada elemento $u \in P$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. T_uP é a soma direta dos subespaços $T_uO(u)$ e Q_u , isto é, $T_uP = T_uO(u) \oplus Q_u$;
2. Denotando por $R_g: P \rightarrow P$ a aplicação $u \rightarrow ug$. Para todo $g \in G$ e $u \in P$, temos $Q_{ug} = (R_g)_*Q_u$;
3. Q_u depende diferencialmente de u .

Dada uma conexão Γ em P , chamamos Q_u de espaço **horizontal** em $u \in P$ e $T_uO(u)$ de espaço **vertical** em $u \in P$. Assim, se $X_u \in T_uP$ temos as componentes vertical $X_u^v \in T_uO(u)$ e horizontal $X_u^h \in Q_u$, de forma que $X_u = X_u^v + X_u^h$.

Definição 4.9 *Um levantamento de um campo $X \in \Gamma(TM)$ (ou $\Gamma_U(TM)$, onde $U \subset M$ é aberto) é um único campo $X^* \in \Gamma(TP)$ (ou $\Gamma_{\pi^{-1}(U)}(TP)$) que é horizontal e que cobre X , no sentido que $\pi_{P*}X^* = X$.*

Paralelismo. Dada uma conexão Γ em P , seja $\tau = \{x_t, 0 \leq t \leq 1\}$ uma curva (diferenciável por partes) em M . Um **levantamento horizontal** de τ é uma curva $\tau^* = \{u_t\}$ em P , tal que $\pi_P(u_t) = x_t$ e $\dot{u}_t \in Q_{u_t}$, $0 \leq t \leq 1$. A curva $\tau^* = \{u_t\}$ é chamada curva horizontal.

O próximo resultado é relativo a existência de levantamentos horizontais de curvas em uma variedade base M .

Proposição 4.10 *Seja $\tau = \{x_t, 0 \leq t \leq 1\}$ uma curva em M e seja u_0 algum ponto de P tal que $\pi(u_0) = x_0$. Então, existe um único levantamento horizontal $\tau^* = \{u_t, 0 \leq t \leq 1\}$ que começa em u_0 .*

Demonstração: Segue em [20], página 69.

Seja $\tau = \{x_t, 0 \leq t \leq 1\}$ uma curva diferenciável em M e $u_0 \in P$ tal que $\pi_P(u_0) = x_0$. Considerando $\tau^*(u_0)$ o único levantamento horizontal de τ iniciado em u_0 , a aplicação $\tau_t^{t+h}: \pi_P^{-1}(x_{t+h}) \rightarrow \pi_P^{-1}(x_t)$, tal que $u_{t+h} \rightarrow u_t$ é chamada **transporte paralelo** ao longo de $\tau|_{(t, t+h)}$. Como $R_g\tau^*(u_0)$ é levantamento de τ que começa em u_0g , temos que

$\tau_t^{t+h}(ug) = \tau_t^{t+h}(u)g$, para todo $g \in G$ e $u \in P$ com $\pi_P(u) = x_{t+h}$. Segue que τ_t^{t+h} é um isomorfismo diferenciável da fibra de x_{t+h} na fibra de x_t .

A partir da idéia de conexão em fibrados principais definimos conexões em fibrados associados. Consideremos $P(M, G)$ fibrado principal e $E(M, F, G, P)$ um fibrado associado.

Definição 4.11 *Uma conexão em E é uma escolha de subespaços tangentes $Q: e \rightarrow Q_e$ de dimensão n ($= \dim(M)$) em E que satisfaz as seguintes condições:*

1. $T_e E = T_e F_{\pi_E(e)} \oplus Q_e$, em cada ponto $e \in E$;
2. Para uma curva diferenciável por partes $x_t \in M$ ligando x_0 a x_1 , existe uma curva e_t em E , com todos os vetores tangentes em Q_{e_t} , que começa em um ponto da fibra E_{x_0} , com $\pi_E(e_t) = x_t$. Além disso, e_t define um isomorfismo entre as fibras E_{x_0} e E_{x_1} , que depende diferencialmente por partes de t .
3. $e \rightarrow Q_e$ é diferenciável.

Existe uma ligação entre as conexões dos fibrados principais e as conexões de seus fibrados associados.

Proposição 4.12 *Existe uma correspondência biunívoca entre conexões em P e conexões em E .*

Demonstração: Segue em [29], página 43.

Seja $\tau = \{x_t, 0 \leq t \leq 1\}$ uma curva em M e u_t seu levantamento horizontal em P , tomando ξ_0 em F tal que $\pi_E(u_0\xi_0) = x_0$, definimos $e_t = u_t\xi_0 \in E$. A curva horizontal $e_t \in E$ define um isomorfismo entre fibras $\tau_t^{t+h}: E_{x_{t+h}} \rightarrow E_{x_t}$, $u_{t+h}\xi \rightarrow u_t\xi$, que também é chamado **transporte paralelo** (denotado da mesma forma por τ_t^{t+h}) ao longo de $\tau|_{(t,t+h)}$.

Consideremos agora $P(M, G)$ um fibrado principal e $\rho: G \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{K})$ uma representação, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Como visto no **exemplo 4.5**, temos que $E(M, \mathbb{K}^m, G, P)$ é um fibrado vetorial associado a P , tendo em vista que existe uma ação à esquerda natural de $\text{GL}(m, \mathbb{K})$ em \mathbb{K}^m . Onde cada fibra $\pi_E^{-1}(x)$, com $x \in M$, tem estrutura de espaço vetorial.

Seja Γ uma conexão em P . Como visto acima Γ define uma noção de transporte paralelo no fibrado $E(M, \mathbb{K}^m, G, P)$. Seja $\tau = \{x_t, 0 \leq t \leq 1\}$ uma curva diferenciável por partes em M e $\tau^* = \{u_t\}$ seu levantamento horizontal em P . Tomando uma seção σ

em E definida ao longo de τ e \dot{x}_t um vetor tangente a τ em x_t . A **derivada covariante** da seção σ na direção \dot{x}_t é definida por

$$\nabla_{\dot{x}_t}(\sigma) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_t^{t+h}(\sigma(x_{t+h})) - \sigma(x_t)], \quad (4.1)$$

onde $\tau_t^{t+h}: E_{x_{t+h}} \rightarrow E_{x_t}$ é o transporte paralelo da fibra $E_{x_{t+h}}$ ao longo de τ de x_{t+h} para x_t . Temos $\nabla_{\dot{x}_t}(\sigma) \in E_{x_t}$ para todo t e define uma seção de E ao longo de τ . A curva $\sigma(x_t)$ é horizontal (ou paralela) se, e somente se, $\nabla_{\dot{x}_t}(\sigma) = 0$. Vemos que a derivada covariante define uma noção de espaço horizontal e paralelismo, isto é, pela **proposição 4.12** temos que ∇ determina completamente a conexão.

Seja $X \in T_x M$ e σ uma seção de E definida em uma vizinhança de $x \in M$. A derivada covariante de σ na direção X pode ser definida da seguinte forma: consideremos $\tau = \{x_t, -\varepsilon < t < \varepsilon\}$ uma curva em M tal que $X = \dot{x}_0$. Temos então

$$\nabla_X(\sigma) = \nabla_{\dot{x}_0}(\sigma),$$

observamos que $\nabla_X(\sigma)$ é independente da escolha de τ . Se $\sigma \in \Gamma(E)$ e $X \in \Gamma(TM)$, a derivada covariante $\nabla_X(\sigma)$ de σ na direção X é definida por

$$(\nabla_X(\sigma))(p) = \nabla_{X_p}(\sigma). \quad (4.2)$$

Temos a seguinte proposição que nos fornece propriedades da derivada covariante.

Proposição 4.13 *Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\sigma, \mu \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M)$ uma função diferenciável de M com valores em \mathbb{R} . Então*

1. $\nabla_{X+Y}(\sigma) = \nabla_X(\sigma) + \nabla_Y(\sigma)$;
2. $\nabla_X(\sigma + \mu) = \nabla_X(\sigma) + \nabla_X(\mu)$;
3. $\nabla_{fX}(\sigma) = f\nabla_X(\sigma)$;
4. $\nabla_X(f\sigma) = X(f)\sigma + f\nabla_X(\sigma)$.

Demonstração: Segue em [20], página 114.

Agora estamos em condições de definir o conceito de **curvatura** de uma conexão.

Definição 4.14 *Dada uma conexão ∇ em um fibrado vetorial $E(M, \mathbb{K}^n, G, P)$, definimos a curvatura de ∇ como sendo o tensor $R^\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, tal que*

$$R^\nabla(X, Y)\sigma = \nabla_{[X, Y]}(\sigma) - \nabla_X(\nabla_Y(\sigma)) + \nabla_Y(\nabla_X(\sigma)), \quad (4.3)$$

com $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$.

Estabelecemos nesta seção a linguagem básica associada a teoria de fibrados vetoriais. Para os nossos propósitos estaremos interessado em conexões em fibrados associados ao fibrado de bases $L(M)(M, GL(n, \mathbb{R}))$, e sempre que falarmos em conexões no fibrado tangente TM trabalharemos com a noção de derivada covariante e seu tensor de curvatura

$$\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM), \quad R^\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM).$$

CAPÍTULO 5

VARIEDADES RIEMANNIANAS

Neste capítulo vamos estudar as variedades Riemannianas e métricas invariantes em grupos de Lie. Nosso objetivo é explorar alguns resultados relacionados as curvaturas em grupos de Lie. Começamos com um estudo sobre variedades Riemannianas e posteriormente aplicaremos muitos desses resultados no contexto dos grupos de Lie.

5.1 Métrica Riemanniana

Iniciamos introduzindo a noção de produto interno e produto Hermitiano nas fibras de um fibrado vetorial associado a um fibrado principal.

Definição 5.1 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e $E = P \times_p \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) um fibrado vetorial associado a P (ver **exemplo 4.4**). Uma **métrica** nas fibras de E é uma correspondência $g: p \rightarrow g_p$, que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno (no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) na fibra E_p , de maneira que para $\sigma, \mu \in \Gamma(E)$ temos $g_p(\sigma(p), \mu(p))$ que depende diferencialmente de $p \in M$. Quando as fibras de E são espaços vetoriais complexos ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) para cada $p \in M$ temos g_p produto Hermitiano em E_p , de maneira que para $\sigma, \mu \in \Gamma(E)$ temos $g_p(\sigma(p), \mu(p)) = \overline{g_p(\mu(p), \sigma(p))}$.*

O seguinte resultado garante a existência de métricas em uma certa classe de variedades.

Proposição 5.2 *Se M é uma variedade diferenciável paracompacta, então todo fibrado vetorial E sobre M admite uma métrica nas fibras.*

Demonstração: Segue em [20], página 116.

Trabalharemos sempre com variedades que são paracompactas.

Definição 5.3 *Seja M uma variedade de dimensão n e consideremos o fibrado $E = TM$ sobre M . Pela **proposição 5.2**, M admite uma métrica nas fibras de TM que chamamos de **métrica Riemanniana**. Toda métrica Riemanniana g define um produto interno em cada estação tangente T_pM , denotemos $g(X, Y)$ para $X, Y \in T_pM$. O par (M, g) é chamado de **variedade Riemanniana**.*

Denotando por $TM^* \otimes TM^*$ o fibrado associado $\mathbf{T}_2^0(TM)$, temos $g \in \Gamma(TM^* \otimes TM^*)$.

Observação: De maneira mais geral do que definimos uma métrica nas fibras de um fibrado vetorial E sobre uma variedade M , podemos pensar na correspondência $g: p \rightarrow g_p$ de modo que g_p seja apenas uma forma bilinear não-degenerada de assinatura (p, q) , $p+q = \dim(E_p)$, na fibra E_p . Neste caso g é chamada pseudo-métrica, e no caso $E = TM$ o par (M, g) é chamado de **variedade pseudo-Riemanniana**. No **capítulo 9** vamos construir uma estrutura relacionada a uma variedade (M, g) com g sendo uma pseudo-métrica.

Exemplo 5.4 *Consideremos o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n com a métrica Euclidiana g , de maneira que para coordenadas locais x^1, \dots, x^n temos*

$$g(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \text{ (Delta de Kronecker)}$$

Exemplo 5.5 *Seja $f: M \rightarrow N$ uma imersão de variedades diferenciáveis. E consideremos h uma métrica em N , definimos uma métrica g induzida em M por f de modo que $g(X, Y) = h(f_*X, f_*Y)$, para todo $X, Y \in T_pM$. Temos $g = f^*h$*

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, consideremos x^1, \dots, x^n coordenadas locais em $U \subset M$. Temos que $\{\partial_{x^\alpha}\}$ base de T_pM para todo $p \in U$ e $\{dx^\alpha\}$ base de T_pM^* . Assim para todo $p \in U$ temos

$$g = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta, \tag{5.1}$$

onde $g_{\alpha\beta} = g(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})$, com $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$.

5.2 Conexão Riemanniana e Curvatura

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Se Γ é uma conexão em $L(M)$, temos uma noção de paralelismo através da derivada covariante ∇ em $E = TM$ e em $E = \mathbf{T}_s^r(TM)$. Consideremos os seguintes fatos:

- Uma conexão ∇ em $E = TM$ induz uma conexão ∇^* em E^* tal que

$$(\nabla_X^* \omega)(Y) = \omega(\nabla_X(Y)) + X(\omega(Y))$$

- Uma conexão ∇^E em $E = TM$ e uma conexão ∇^F em F , onde $F = TM$ ou TM^* , induz uma conexão $\nabla^{E \otimes F}$ em $E \otimes F$ tal que

$$\nabla_X^{E \otimes F}(e \otimes f) = (\nabla_X^E e) \otimes f + e \otimes (\nabla_X^F f)$$

Temos o seguinte resultado para a derivação covariante de tensores.

Proposição 5.6 *Seja $K \in \Gamma(\mathbf{T}_s^r(TM))$ e ∇ uma conexão em TM , então*

$$(\nabla_X(K))(X_1, \dots, X_s) = \nabla_X(K(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{\alpha=1}^s K(X_1, \dots, \nabla_X(X_\alpha), \dots, X_s), \quad (5.2)$$

com $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$.

Demonstração: Segue em [20], página 124.

Como $g \in \Gamma(TM^* \otimes TM^*) = \Gamma(\mathbf{T}_2^0(TM))$ podemos nos perguntar sobre $\nabla(g)$. O seguinte resultado estabelece o conceito de **conexão métrica**.

Definição 5.7 *Seja Γ uma conexão em $L(M)$ e g uma métrica em M . A conexão Γ é chamada conexão métrica se $\nabla(g) = 0$.*

Dada uma conexão ∇ no fibrado vetorial $E = TM$, sua torsão é definida por

$$T_\nabla(X, Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y], \quad (5.3)$$

onde $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Dentre todas as conexões métricas estamos interessados nas conexões que tenham torsão nula. O próximo teorema é conhecido como teorema fundamental da geometria Riemanniana.

Teorema 5.8 *Toda variedade Riemanniana (M, g) admite uma única conexão ∇ , tal que:*

1. ∇ é métrica ($\nabla(g) = 0$),
2. ∇ tem torsão nula ($T_\nabla = 0$).

Demonstração: Segue em [20], página 158.

Esta conexão é chamada de **conexão de Levi-Civita**. Trabalharemos com variedades Riemannianas e com a conexão de Levi-Civita associada a uma métrica fixada. Se ∇ é uma conexão métrica em (M, g) temos

$$X(g(Y, Z)) = \nabla_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X(Y), Z) + g(Y, \nabla_X(Z)),$$

de onde obtemos a **identidade de Koszul**

$$2g(\nabla_X(Y), Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X) \quad (5.4)$$

O tensor de Riemann \mathcal{R} de uma variedade Riemanniana (M, g) é definido através do tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita ∇ da seguinte forma

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \quad (5.5)$$

onde R denota a curvatura da conexão de Levi-Civita ∇ e $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

O seguinte resultado nos fornece informações e propriedades do tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita de uma variedade (M, g) .

Proposição 5.9 *O tensor de curvatura de Riemann R da conexão de Levi-Civita de uma variedade Riemanniana (M, g) satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *O tensor R é anti-simétrico nos dois primeiros argumentos, isto é,*

$$R(X, Y) = -R(Y, X), \text{ para todo } X, Y \in T_pM, \text{ onde } p \in M;$$

2. *$R(X, Y)$ é anti-simétrico com respeito a g , isto é,*

$$g(R(X, Y)Z, U) = -g(R(X, Y)U, Z), \text{ para } X, Y, Z, U \in T_pM, \text{ onde } p \in M;$$

3. *$g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y)$, onde $X, Y, Z, U \in T_pM$, onde $p \in M$;*

4. **(Identidade algébrica de Bianchi)**

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0;$$

5. **(Identidade diferencial de Bianchi)**

$$\nabla_Z(R)(X, Y) + \nabla_X(R)(Y, Z) + \nabla_Y(R)(Z, X) = 0.$$

Demonstração: Segue em [26], página 121.

Posteriormente vamos fazer os cálculos das **curvaturas seccionais** de grupos de Lie. A curvatura seccional de uma variedade Riemanniana é definida da seguinte forma.

Definição 5.10 ($\dim(M) \geq 2$). *Dado um 2-plano σ em T_pM , e seja $\{X, Y\}$ uma base de σ . A curvatura seccional de σ é definida por*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = g(R(X, Y)X, Y) / (g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2), \quad (5.6)$$

O seguinte resultado nos fornece uma caracterização para curvatura constante.

Proposição 5.11 *A curvatura seccional de uma variedade Riemanniana (M, g) é constante k para qualquer 2-plano tangente em $p \in M$ se, e somente se, o tensor de curvatura satisfaz*

$$R(X, Y)Z = k(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X),$$

onde $X, Y \in T_pM$.

Demonstração: Segue em [20], página 202.

Um outro conceito de curvatura é importante para o estudo da geometria das variedades Riemannianas. O **tensor de curvatura de Ricci** é definido da seguinte forma.

Definição 5.12 *O tensor de curvatura de Ricci r de uma variedade Riemanniana (M, g) é definido como*

$$r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y), \quad (5.7)$$

onde tr denota o traço da aplicação linear $Z \rightarrow R(X, Z)Y$.

Note que o tensor de Ricci é simétrico (segue do fato da conexão de Levi-Civita ser livre de torsão). Podemos ver r como um tensor $\hat{r}: TM \rightarrow TM$, de modo que

$$r(X, Y) = g(\hat{r}(X), Y),$$

é uma aplicação g -simétrica com autovalores puramente reais. A curvatura de Ricci na direção X é dada por $r(X)$.

A partir do tensor de curvatura de Ricci obtemos a **curvatura escalar**, que é definida da seguinte maneira.

Definição 5.13 *A curvatura escalar de uma variedade Riemanniana (M, g) é definida pela função $s = \text{tr}_g(r)$ em M .*

5.3 Métricas Invariantes e curvaturas em Grupos de Lie

Agora vamos explorar alguns resultados acerca das curvaturas dos grupos de Lie com métricas invariantes. Nossa principal referência para os resultados desta seção é [38].

Uma métrica g em um grupo de Lie G é invariante à esquerda se para toda translação à esquerda $L_p: G \rightarrow G$

$$g((L_p)_*X, (L_p)_*Y) = g(X, Y),$$

para $X, Y \in \Gamma(TG)$ e $p \in G$.

Proposição 5.14 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então, existe uma correspondência biunívoca entre os produtos internos em \mathfrak{g} e as métricas invariantes à esquerda em G .*

Demonstração. Se g é uma métrica em G , temos que g_e é um produto interno em $\mathfrak{g} = T_eG$. Agora, consideremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em \mathfrak{g} e $L_g: G \rightarrow G$ a translação à esquerda em G . Definimos a métrica invariante à esquerda da seguinte forma

$$g_p(X, Y) = \langle (L_{p^{-1}})_*X, (L_{p^{-1}})_*Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in T_pG$. Assim, temos que g define uma métrica que é invariante por translações à esquerda em G . Sendo assim podemos denotar uma métrica em G por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, fazendo referência aos produtos internos de \mathfrak{g} ■

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Consideremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica invariante à esquerda e ∇ a conexão de Levi-Civita associada. Como a álgebra de Lie \mathfrak{g} pode ser vista como o espaço dos campos invariantes à esquerda, temos que

$$g_p(X_p, Y_p) = \langle (L_p)_*X_e, (L_p)_*Y_e \rangle = \langle X_e, Y_e \rangle,$$

com X, Y campos invariantes à esquerda. Assim temos que a função $f(p) = g_p(X_p, Y_p) = g_e(X_e, Y_e) = \langle X_e, Y_e \rangle$, segue que f é constante, portanto, $\nabla_Z(\langle X, Y \rangle) = 0$. Neste contexto a fórmula de Koszul (5.4) fica da forma

$$2\langle \nabla_X(Y), Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle, \quad (5.8)$$

assim vemos que a conexão de Levi-Civita associada a uma métrica invariante á esquerda fica completamente determinada pelo colchete de elementos da álgebra de Lie. Fixando uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ para \mathfrak{g} , temos então

$$[e_\alpha, e_\beta] = \sum_k C_{\alpha\beta}^k e_k, \text{ onde } C_{\alpha\beta}^k = \langle [e_\alpha, e_\beta], e_k \rangle.$$

Pela fórmula de Koszul, no contexto invariante dos grupos de Lie obtemos

$$\langle \nabla_{e_\alpha} e_\beta, e_k \rangle = \frac{1}{2}(C_{\alpha,\beta}^k - C_{\beta,k}^\alpha + C_{k,\alpha}^\beta),$$

assim temos

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \sum_k \frac{1}{2}(C_{\alpha,\beta}^k - C_{\beta,k}^\alpha + C_{k,\alpha}^\beta) e_k.$$

como exemplo, calculando a curvatura seccional do 2-plano σ gerado por $\{e_1, e_2\}$, obtemos

$$K(\sigma) = \sum_k \left(\frac{1}{2} C_{12}^k (-C_{12}^k + C_{2k}^1 + C_{k1}^2) - \frac{1}{4} (C_{12}^k - C_{2k}^1 + C_{k1}^2) (C_{12}^k + C_{2k}^1 - C_{k1}^2) - C_{k1}^1 C_{k2}^2 \right). \quad (5.9)$$

Exemplo 5.15 *Um importante exemplo (não trivial) de grupo de Lie neste contexto da geometria invariante é o grupo $SU(2)$ que se identifica de maneira natural com a esfera S^3 , isto é,*

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |z| + |w| = 1 \right\} = S^3.$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$ é caracterizada por

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

de modo que $\mathfrak{su}(2)$ é gerada pelos vetores

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A translação à esquerda desses vetores nos fornecem, respectivamente, os seguintes campos invariantes à esquerda X_1, X_2 e X_3 que geram a álgebra $\mathfrak{su}(2)$, vista como o espaço dos campos invariantes à esquerda, de maneira que

$$[X_1, X_2] = 2X_3, [X_2, X_3] = 2X_1, [X_3, X_1] = 2X_2. \quad (5.10)$$

Consideremos um parâmetro $t > 0$ e o referencial X_1, X_2, X_3 em $SU(2)$. Definamos então a métrica invariante à esquerda g_t em $SU(2)$, de modo que os campos

$$E_1 = \frac{1}{t} X_1, E_2 = X_2, E_3 = X_3,$$

sejam ortonormais. A partir das relações de colchetes (5.10), temos

$$[E_1, E_2] = \frac{2}{t} E_3, [E_2, E_3] = 2t E_1, [E_3, E_1] = \frac{2}{t} E_2. \quad (5.11)$$

Assim, pela fórmula 5.8, temos as seguintes expressões para conexão de Levi-Civita da métrica invariante g_t

$$\nabla_{E_1}(E_1) = \nabla_{E_2}(E_2) = \nabla_{E_3}(E_3) = 0$$

$$\nabla_{E_1}(E_2) = \frac{1}{t}(2 - t^2)E_3, \nabla_{E_1}(E_3) = \frac{1}{t}(t^2 - 2)E_2, \nabla_{E_2}(E_3) = tE_1$$

$$\nabla_{E_2}(E_1) = -tE_3, \nabla_{E_3}(E_1) = tE_2, \nabla_{E_3}(E_2) = -tE_1.$$

Calculando as curvaturas seccionais nos elementos da base, obtemos

$$K(E_1, E_2) = t^2, K(E_1, E_3) = t^2 \text{ e } K(E_2, E_3) = 4 - 3t^2.$$

Com a identificação $S^3 = \text{SU}(2)$, as variedades Riemannianas (S^3, g_t) são conhecidas como esferas de Berger.

Proposição 5.16 *Seja G um grupo de Lie, com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se $u \in \mathfrak{g}$ é tal que $ad(u)^* = -ad(u)$, então*

$$K(u, v) \geq 0,$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, u é ortogonal a $[v, \mathfrak{g}]$.

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$, uma base ortonormal para \mathfrak{g} . Temos

$$C_{\alpha\beta}^k = \langle [e_\alpha, e_\beta], e_k \rangle, \text{ onde } \alpha, \beta, k = 1, 2, \dots, n.$$

Utilizando a fórmula de Koszul (5.8), obtemos

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \sum_k \frac{1}{2} (C_{\alpha,\beta}^k - C_{\beta,k}^\alpha + C_{k,\alpha}^\beta) e_k.$$

Como em (5.9), calculando a curvatura seccional do plano σ gerado por $\{e_1, e_2\}$, obtemos

$$K(\sigma) = \sum_k (\frac{1}{2} C_{12}^k (-C_{12}^k + C_{2k}^1 + C_{k1}^2) - \frac{1}{4} (C_{12}^k - C_{2k}^1 + C_{k1}^2) (C_{12}^k + C_{2k}^1 - C_{k1}^2) - C_{k1}^1 C_{k2}^2)$$

Agora, se $u \in \mathfrak{g}$ é tal que $ad(u)^* = -ad(u)$, e $v \in \mathfrak{g}$ é tal que $\{u, v\}$ gera um 2-plano. Podemos supor sem perda de generalidade que u e v são ortonormais, tomando uma base ortonormal $\{e_1 = u, e_2 = v, \dots, e_n\}$, temos que a matriz $(C_{1\alpha}^\beta)$, satisfaz $C_{1\alpha}^\beta = -C_{1\beta}^\alpha$, para $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$. Assim, da expressão anterior, obtemos

$$K(u, v) = K(e_1, e_2) = \sum_k \frac{1}{4} (C_{2k}^1)^2 \geq 0,$$

a igualdade ocorre quando $\langle [e_2, e_k], e_1 \rangle = 0$, para todo $k = 1, \dots, n$. ■

Observamos que como tratamos da adjunta de um elemento de \mathfrak{g} o resultado anterior depende da escolha da métrica invariante. Observando que se $ad(u) = 0$, então $ad(u)^* = -ad(u)$, com $u \in \mathfrak{g}$. Temos o seguinte corolário.

Corolário 5.17 *Se $u \in \mathfrak{g}$ é um elemento central ($u \in Z(\mathfrak{g})$), então a desigualdade $K(u, v) \geq 0$ é satisfeita para todo $v \in \mathfrak{g}$.*

Um grupo de Lie pode admitir uma métrica que é invariante por translações à esquerda e translações à direita, neste caso dizemos que a métrica é bi-invariante. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica bi-invariante em um grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g} , temos que

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad (5.12)$$

para todo $g \in G$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Assim temos que a curva $\langle Ad(\exp(tZ))X, Ad(\exp(tZ))Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, é constante. Calculando a derivada em $t = 0$ obtemos

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\langle Ad(\exp(tZ))X, Ad(\exp(tZ))Y \rangle) = \langle [Z, X], Y \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle \quad (5.13)$$

Considerando a conexão de Levi-Civita ∇ associada a uma métrica bi-invariante, pela identidade de Koszul (5.8) junto com (5.13), segue que

$$\langle \nabla_X(Y), Z \rangle = \frac{1}{2}\langle [X, Y], Z \rangle \Rightarrow \nabla_X(Y) = \frac{1}{2}[X, Y]. \quad (5.14)$$

Temos a seguinte proposição.

Proposição 5.18 *Seja G é um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se G admite uma métrica bi-invariante, então para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ temos:*

1. *O tensor de curvatura é dado por*

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z];$$

2. *a curvatura seccional é dada por*

$$K(X, Y) = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle / \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2;$$

3. *o tensor de curvatura de Ricci é dada por*

$$r(X, Y) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \langle [X, e_{\alpha}], [Y, e_{\alpha}] \rangle,$$

onde $\{e_{\alpha}\}$ é uma base ortonormal de \mathfrak{g} , além disso

$$\hat{r}(X) = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} [[X, e_{\alpha}], e_{\alpha}].$$

Demonstração. Segue diretamente da substituição da fórmula da conexão (5.14) nas fórmulas de curvatura. ■

Como corolário imediato (item 2, proposição 5.18) temos o seguinte resultado.

Corolário 5.19 *Se G é um grupo de Lie com métrica bi-invariante, então $K(u, v) \geq 0$, para todo $u, v \in \mathfrak{g}$.*

Todo grupo de Lie compacto G admite um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na sua álgebra de Lie \mathfrak{g} tal que

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$ (ver em [7], página 226). Assim, pelo corolário 5.19, vemos que todo grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante com $K \geq 0$. Consideremos o seguinte resultado.

Proposição 5.20 *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então, a forma de Cartan-Killing κ de \mathfrak{g} é negativa semi-definida. Além disso, se $X \in \mathfrak{g}$, $\kappa(X, X) = 0$ se, e somente se, $X \in Z(\mathfrak{g})$.*

Demonstração: Segue em [7], página 227.

Assim, se G é um grupo compacto semi-simples, pelo teorema 3.10, temos que κ é não-degenerada negativa-definida. Podemos definir um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathfrak{g} por

$$\langle X, Y \rangle = -\kappa(X, Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definição 5.21 *Uma variedade Riemanniana (M, g) é chamada variedade Einstein se o tensor de Ricci satisfaz a equação $r(X, Y) = cg(X, Y)$ para alguma constante c .*

Temos o seguinte resultado para grupos de Lie semi-simples compactos.

Proposição 5.22 *Seja G um grupo de Lie semi-simples compacto com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para uma métrica bi-invariante em G temos*

$$r(X, Y) = -\frac{1}{4}\kappa(X, Y), \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Assim, G é uma variedade Einstein com respeito a métrica determinada pela forma de Cartan-Killing.

Demonstração. Fixando uma base ortonormal $\{e_\alpha\}$ para \mathfrak{g} . Da expressão da forma de Cartan-Killing e do item 3 da proposição 5.18 obtemos

$$\kappa(X, Y) = \sum_{\alpha} \langle [X, [Y, e_{\alpha}]], e_{\alpha} \rangle = - \sum_{\alpha} \langle [Y, e_{\alpha}], [X, e_{\alpha}] \rangle = -4r(X, Y),$$

logo $r(X, Y) = -\frac{1}{4}\kappa(X, Y)$. ■

O resultado anterior nos mostra que a forma bilinear r independe da escolha da métrica bi-invariante quando G é semi-simples e compacto.

Os grupos de Lie compactos são exemplos de grupos que admitem métricas bi-invariantes com curvatura $K \geq 0$, se pedirmos que $K > 0$ os exemplos de grupos que admitem métricas inavriantes à esquerda com tal curvatura são escassos. O próximo resultado relata este fato.

Teorema 5.23 (Wallach [40]) *O grupo $SU(2)$, que consiste em ser o grupo das matrizes unitárias com determinante 1, é o único grupo de Lie simplesmente conexo que admite uma métrica invariante à esquerda com curvaturas seccionais estritamente positivas.*

Definição 5.24 *Uma variedade Riemanniana (M, g) é chamada variedade **flat**, ou a métrica g é chamada **flat**, se o tensor de curvatura Riemanniana é identicamente nulo ($R \equiv 0$).*

Um dos teoremas clássicos de geometria Riemanniana garante que uma variedade Riemanniana é flat se, e somente se, seu recobrimento universal é isométrico ao espaço Euclidiano (ver [26], página 206). Nosso próximo passo é estabelecer o critério para grupos de Lie flat no contexto de métricas inavriantes à esquerda. Primeiramente estudaremos alguns resultados relacionados a métricas bi-invariantes que utilizaremos posteriormente na demonstração de resultados sobre grupos de Lie flat.

Uma propriedade importante das métricas bi-invariantes é o nosso próximo resultado, lembrando que uma álgebra de Lie é simples se não contém ideais próprios diferentes do trivial 0.

Lema 5.25 *Se \mathfrak{g} admite uma métrica bi-invariante, então o complemento ortogonal com relação a métrica bi-invariante de ideais são ideais. Por isso \mathfrak{g} pode ser expressa como uma soma direta ortogonal de ideais simples.*

Demonstração. Seja \mathfrak{i} um ideal de \mathfrak{g} . Dado $Y \in \mathfrak{g}$ ortogonal a \mathfrak{i} , pela identidade (5.13) segue que para todo $Z \in \mathfrak{i}$ temos

$$\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle = 0.$$

Por isso temos \mathfrak{g} se decompõe na soma direta de ideais $\mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}^\perp$. Assim, por indução sobre a dimensão finita de \mathfrak{g} temos o resultado. ■

Se uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie G se decompõe como soma direta de ideais simples $\mathfrak{i}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{i}_s$, pela **proposição 2.25** podemos supor que o grupo de Lie G é simplesmente conexo. O grupo de Lie simplesmente conexo que integra \mathfrak{g} pode ser expresso pelo produto cartesiano de subgrupos normais $N_1 \times \dots \times N_s$, visto que para $k = 1, \dots, s$

$$X \in \mathfrak{i}_k \text{ e } g \in G \Rightarrow g \exp(X)g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)X),$$

e que além disso $\text{Ad}(g): \mathfrak{i}_k \rightarrow \mathfrak{i}_k$, pois

$$\text{Ad}(\exp(Z)) = \exp(\text{ad}(Z)), \text{ para todo } Z \in \mathfrak{g}.$$

Para cada fator simplesmente conexo N_i temos as seguintes possibilidades:

1. \mathfrak{i}_k é ideal abeliano, por isso de dimensão 1, então $N_k \cong \mathbb{R}$.
2. Se \mathfrak{i} é não-comutativo temos que $Z(\mathfrak{i}_k) = 0$, por isso N_k tem curvatura de Ricci estritamente positiva. Pelo teorema de Myers (ver [26], página 201) segue que N_k é compacto.

Lema 5.26 *Um grupo de Lie G admite uma métrica bi-invariante se, e somente se, é isomorfo ao produto cartesiano de um grupo compacto por um grupo aditivo dado por um espaço vetorial.*

Demonstração. Se G admite uma métrica bi-invariante, pelo que foi visto acima temos que o recobrimento universal de \tilde{G} de G se decompõe como o produto cartesiano de um subgrupo compacto H por um espaço vetorial \mathbb{R}^n como grupo aditivo. O grupo G pode ser visto como \tilde{G}/Π (ver [7], página 154), onde Π é um subgrupo discreto normal contido no centro de G . Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ o subespaço gerado pela imagem da projeção de Π em \mathbb{R}^n . Então, o grupo G pode ser escrito como o produto cartesiano do grupo compacto $(H \times V)/\Pi$ e o grupo aditivo V^\perp .

Agora suponha que G seja escrito como o produto cartesiano entre um grupo compacto e um grupo aditivo comutativo. Um grupo comutativo certamente admite uma métrica, visto que a representação adjunta de seus elementos é trivial, e um grupo compacto admite uma métrica bi-invariante (ver [7], página 226). Assim obtemos uma métrica bi-invariante em G . ■

Quando consideramos métricas bi-invariantes em um grupo de Lie simples G , onde a álgebra de Lie \mathfrak{g} de G é simples, temos unicidade da métrica bi-invariante.

Lema 5.27 *Se \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto simples G , então G admite uma única métrica bi-invariante, a menos de multiplicação por uma constante positiva. Essa tal métrica tem necessariamente curvatura de Ricci constante.*

Demonstração. Seja $\langle X, Y \rangle$ uma métrica bi-invariante em \mathfrak{g} . Qualquer outra métrica pode ser escrita como $\langle A(X), Y \rangle$, onde $A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é um operador auto-adjunto. Se supormos que esta nova métrica é bi-invariante, então como $ad(X)^* = -ad(X)$ em ambas as métricas, temos que $ad(X)$ comuta com A , assim os subespaços invariantes de A são invariantes por $ad(X)$, o que faz dos mesmos ideais de \mathfrak{g} . Como A é diagonalizável e \mathfrak{g} é simples, temos que $A(X) = \lambda X$. Por isso a métrica bi-inavriante é única a menos de uma multiplicação por uma constante positiva.

Como o tensor de Ricci r é uma forma bilinear não degenerada e positiva-definida, da relação $r(X) = \langle \hat{r}(X), X \rangle$ e do fato que \hat{r} é auto-adjunta, por argumantes similares aos que foram feitos anteriormente, temos

$$r(X) = \langle \hat{r}(X), X \rangle = \lambda,$$

para todo elemento $X \in \mathfrak{g}$, onde $\lambda > 0$ é uma constante. ■

Se fizermos um reescalamento de uma métrica $\langle X, Y \rangle$ por uma constante positiva a conexão de Levi-Civita, o tensor de curvatura de Riemann e a curvatura de Ricci permanecem inalterados. Assim, dentro do contexto do lema anterior, podemos escolher uma métrica de modo que $\langle X, X \rangle = r(X)$, isto é, com curvatura de Ricci igual a 1. Temos então o seguinte corolário.

Corolário 5.28 *Um grupo de Lie cujo o recobrimento universal é compacto admite uma métrica bi-invariante com curvatura de Ricci constante igual a 1.*

Demonstração. Notemos que se \tilde{G} é o recobrimento universal compacto, então \tilde{G} se decompõe no produto cartesiano $N_1 \times \dots \times N_s$ de grupos simples. Cada fator simples da decomposição admite uma única métrica bi-invariante com curvatura de Ricci igual a 1, portanto a métrica produto induzida tem curvatura de Ricci igual a 1. ■

Nosso próximo resultado mostra as condições para que um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda seja variedade flat.

Teorema 5.29 *Um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda é flat se, e somente se, sua álgebra de Lie se decompõe em uma soma direta ortogonal $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$, onde \mathfrak{b} é uma subálgebra comutativa, \mathfrak{u} é um ideal comutativo, e além disso $ad(X)^* = -ad(X)$ para todo $X \in \mathfrak{b}$.*

Demonstração. Seja G um grupo de Lie simplesmente conexo que admite uma métrica invariante à esquerda que é flat. Olhando para a variedade subjacente a G , segue que G é uma variedade Riemanniana isométrica ao espaço Euclidiano. Se um subgrupo de G age por translações à esquerda em G , obtemos então uma ação associada de um grupo compacto de isometrias no espaço Euclidiano. Uma ação por isometrias no espaço Euclidiano tem pontos fixos (ver [21], página 111), mas translações à esquerda não-triviais em G não possuem pontos fixos. Logo, todo subgrupo compacto de G é trivial.

Considerando \mathfrak{g} com alguma métrica, a correspondência $\Sigma: X \rightarrow \nabla_X$ determina uma aplicação linear de \mathfrak{g} em $\mathfrak{o}(n)$, visto que

$$\langle \nabla_X(Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X(Z) \rangle = 0, \text{ assim } (\nabla_X)^T = -\nabla_X.$$

Se o tensor de curvatura é identicamente nulo, temos

$$\nabla_{[X,Y]} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X,$$

assim a correspondência Σ é um homomorfismo de álgebras de Lie. O núcleo $\ker(\Sigma) = \mathfrak{u}$ é um ideal, utilizando a identidade

$$[X, Y] = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X),$$

segue que \mathfrak{u} é comutativo.

Seja $\mathfrak{b} = \mathfrak{u}^\perp$. Para $X \in \mathfrak{b}$ e $Y \in \mathfrak{u}$ a relação

$$[X, Y] = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = \nabla_X(Y)$$

mostra que a aplicação linear ∇_X leva o ideal \mathfrak{u} nele mesmo. Como $(\nabla_X)^T = -\nabla_X$, segue que ∇_X leva $\mathfrak{b} = \mathfrak{u}^\perp$ nele mesmo. Assim temos que \mathfrak{b} é uma subálgebra de Lie. Como $\mathfrak{u} = \ker(\Sigma)$, temos que \mathfrak{b} é levada em uma subálgebra de $\mathfrak{o}(n)$. Como $\mathfrak{o}(n)$ é a álgebra de Lie do grupo de Lie compacto $O(n)$, que possui uma métrica bi-invariante, temos que \mathfrak{b} possui uma métrica bi-invariante. Assim, pelo **lema 5.25**, \mathfrak{b} se decompõe na soma direta de ideais simples $\mathfrak{b}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{b}_s$. Se nesta soma direta de ideais existir algum ideal \mathfrak{b}_k que é não-comutativo, o subgrupo correspondente N_k é compacto. A inclusão $\mathfrak{b}_k \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ induz um homomorfismo não-trivial $N_k \rightarrow G$. Como G não admite subgrupo compacto diferente do trivial, segue que \mathfrak{b}_k é o ideal nulo. Assim temos que \mathfrak{b} é subálgebra comutativa.

Agora observamos que para cada $X \in \mathfrak{b}$ temos que $ad(X)$ é trivial em \mathfrak{b} , e quando restrita a \mathfrak{u} temos que $ad(X) = \nabla_X$, que satisfaz $(\nabla_X)^T = -\nabla_X$. Assim temos que $ad(X)^* = -ad(X)$ em \mathfrak{g} . Observamos que todos nossos resultados estão no nível da álgebra de Lie, assim podemos supor G simplesmente conexo já que a álgebra de Lie de

um grupo de Lie conexo é isomorfo a álgebra do seu recobrimento universal. Assim temos $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$, onde \mathfrak{b} é uma subálgebra comutativa, \mathfrak{u} é um ideal comutativo, e além disso $ad(X)^* = -ad(X)$ para todo $X \in \mathfrak{b}$.

Agora, suponha que \mathfrak{g} se decompõe em soma direta ortogonal $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$, onde \mathfrak{u} é um ideal comutativo, \mathfrak{b} é uma subálgebra comutativa, e que $ad(X)^* = -ad(X)$ para todo $X \in \mathfrak{b}$. Considerando as hipóteses e a identidade 5.8, para $X \in \mathfrak{u}$ e $Y = Y^u + Y^b, Z = Z^u + Z^b \in \mathfrak{g}$ temos

$$2\langle \nabla_X(Y), Z \rangle = \langle [X, Y^b], Z^u \rangle + \langle [Z^b, X], Y^u \rangle - (\langle [Y^u, Z^b], X \rangle + \langle [Y^b, Z^u], X \rangle) = 0,$$

pois $ad(W)^* = -ad(W)$, para todo $W \in \mathfrak{b}$. Assim $\nabla_X = 0$, para todo $X \in \mathfrak{u}$. Da identidade $[X, Y] = \nabla_X(Y) + \nabla_Y(X)$, segue que $\nabla_X = ad(X)$, para todo $X \in \mathfrak{b}$. Assim, para $X = X^u + X^b, Z = Z^u + Z^b, Y, W \in \mathfrak{g}$

$$R(X^u, Y)Z = 0 \text{ e } R(X, Y)Z = R(X^b, Y)Z^u,$$

como $\langle R(X^b, Y)Z^u, W \rangle = \langle R(Z^u, W)X^b, Y \rangle = 0$, segue da trilinearidade que o tensor de curvatura R é nulo, logo G é variedade flat. ■

Nosso último resultado mostra que existem grupos de Lie com métricas invariantes à esquerda que são flat e não-comutativos, embora todos tenham álgebra de Lie solúvel.

Exemplo 5.30 *Um exemplo simples de grupo de Lie não-comutativo flat é o grupo dos movimentos rígidos do espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 , denotado por $\mathbf{E}(2)$. Sua álgebra de Lie é definida pelas seguintes equações estruturais*

$$[E_1, E_3] = -E_2, [E_2, E_3] = E_1, [E_1, E_2] = 0,$$

onde $\{E_1, E_2, E_3\}$ é uma base não-abeliana. Equipando $\mathbf{E}(2)$ com a métrica determinada pela matriz da forma

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

temos $\mathbf{E}(2)$ grupo de Lie flat não-comutativo.

Vamos agora explorar alguns resultados relacionados a grupos de Lie com curvatura seccional não-positiva ($K \leq 0$). Grupos de Lie que admitem uma métrica invariante à esquerda com curvatura estritamente negativa são estudados por Heintze em [16], de onde podemos ver que a condição necessária e suficiente de existência de uma tal métrica é que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathbb{R}X$, para algum $X \in \mathfrak{g}$ tal que os autovalores de $ad(X)|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ tenham parte real positiva. Segue por exemplo que nenhum produto cartesiano de grupos de Lie admite

curvatura estritamente negativa.

Para o caso $K \leq 0$ temos a classificação feita por Azecontt e Wilson em [5]. Um grupo de Lie G é chamado **unimodular** se $|\det(\text{Ad}(g))| = 1$, para todo $g \in G$. Consideremos o seguinte resultado qualitativo que pode ser encontrado em [38], página 298.

Teorema 5.31 *Se um grupo de Lie conexo G admite uma métrica invariante à esquerda com curvaturas seccionais $K \leq 0$, então G é solúvel ($\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ é solúvel). Se G é unimodular uma tal métrica com $K \leq 0$ é de fato flat ($K \equiv 0$).*

Vamos agora explorar um exemplo especial de grupo de Lie com curvatura seccional estritamente negativa

Exemplo 5.32 *Suponhamos que \mathfrak{g} seja uma álgebra de Lie com a propriedade de que o colchete de Lie $[X, Y]$ de dois elementos seja igual a uma combinação linear de X e Y . Assumindo que $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$, temos então*

$$[X, Y] = l(X)Y - l(Y)X$$

onde $l: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, isto é, $l \in \mathfrak{g}^*$. De fato, fixando $X \in \mathfrak{g}$, temos que $\text{ad}(X)$ induz uma aplicação linear do espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathbb{R}X$ nele mesmo, com a propriedade de que cada elemento de $\mathfrak{g}/\mathbb{R}X$ é levado em um múltiplo dele mesmo. Da identidade anterior segue

$$[X, Y] \equiv l(X)Y \text{ mod } (\mathbb{R}X).$$

A função $l(X)$ pode ser obtida considerando o seguinte fato

$$\text{tr}(\text{ad}(X)) = (n - 1)l(X),$$

o que mostra que de fato $l(X)$ depende linearmente de $X \in \mathfrak{g}$. De modo análogo podemos fazer o mesmo para $Y \in \mathfrak{g}$ fixado, de onde obtemos uma relação entre X e Y que nos fornece precisamente a fórmula $[X, Y] = l(X)Y - l(Y)X$. Das relações de colchete segue que o $\mathfrak{u} = \ker(l)$ é um ideal de \mathfrak{g} .

Escolhemos um elemento unitario ortogonal $X \in \mathfrak{u}^\perp$ com relação a um métrica invariante à esquerda em \mathfrak{g} , denotando $\lambda = l(X)$ (podemos identificar λ com a norma $\|l\|$). Da identidade de Koszul 5.8, para $X \in \mathfrak{u}^\perp$, $Y = Y^u + Y^{u^\perp}$, $Z = Z^u + Z^{u^\perp} \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X(Y), Z \rangle &= \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle, \\ &= \langle [Y^u, Z^{u^\perp}], X \rangle + \langle [Y^{u^\perp}, Z^u], X \rangle = 0, \end{aligned}$$

assim temos $\nabla_X = 0$ para $X \in \mathfrak{u}^\perp$. Da mesma identidade de Koszul **5.8** segue para $W \in \mathfrak{u}$, $Y, Z \in \mathfrak{g}$ que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_W(Y), Z \rangle &= l(Z)\langle W, Y \rangle - l(Y)\langle W, Z \rangle = l(X)\langle Z, X \rangle\langle W, Y \rangle - l(X)\langle Y, X \rangle\langle W, Z \rangle \\ &= \lambda(\langle Z, X \rangle\langle W, Y \rangle - \langle Y, X \rangle\langle W, Z \rangle), \end{aligned}$$

assim obtemos a seguinte expressão para $W \in \mathfrak{u}$ e $Y \in \mathfrak{g}$

$$\nabla_W(Y) = \lambda(\langle W, Y \rangle X - \langle Y, X \rangle W).$$

Utilizando as expressões para a conexão obtidas acima e a trilinearidade de R podemos calcular $R(U, V)Z$ para $U, V, Z \in \mathfrak{g}$, de onde obtemos

$$R(U, V)Z = \lambda^2(\langle V, Z \rangle U - \langle U, Z \rangle V) = -\lambda^2(\langle U, Z \rangle V - \langle V, Z \rangle U),$$

pela **proposição 5.11** segue que $K(U, V) = -\lambda^2$, onde $U, V \in \mathfrak{g}$ são ortonormais, em outras palavras $K \equiv -\lambda^2$.

Até o momento estudamos com mais atenção a curvatura seccional de grupos de Lie com métricas invariantes à esquerda. Agora faremos um estudo das curvaturas de Ricci para métricas invariantes à esquerda observando os resultados contrastantes entre curvatura seccional e curvatura de Ricci.

Começamos por um critério para se obter direções com curvatura de Ricci positiva.

Proposição 5.33 *Se a transformação linear $ad(X)$ satisfaz $ad(X)^* = -ad(X)$, então $r(X) \geq 0$, onde a igualdade acontece se, e somente se, $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$.*

Demonstração. Fixando uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ para \mathfrak{g} , supondo que $ad(X)^* = -ad(X)$, da **proposição 5.16** segue que

$$r(X) = \sum_\alpha \langle R(X, e_\alpha)X, e_\alpha \rangle = \sum_\alpha K(X, e_\alpha) \geq 0.$$

Se $r(X) = 0 \Rightarrow K(X, e_\alpha) = 0$, para $\alpha = 1, \dots, n$ (segue da **proposição 5.16**), logo $X \in [e_\alpha, \mathfrak{g}]^\perp$, para todo $\alpha = 1, \dots, n$. Assim temos $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$.

Se $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp \Rightarrow X \in [e_\alpha, \mathfrak{g}]^\perp$, para todo $\alpha = 1, \dots, n$, assim $K(X, e_\alpha) = 0$, para todo $\alpha = 1, \dots, n$ (**proposição 5.16**). Temos então $r(X) = 0$. ■

Para o caso de métrica invariante à esquerda com curvatura de Ricci estritamente positiva temos o seguinte teorema.

Teorema 5.34 *Um grupo de Lie conexo admite uma métrica invariante à esquerda com curvatura de Ricci estritamente positiva se, e somente se, é compacto com grupo fundamental finito.*

Demonstração. Se G admite uma métrica invariante à esquerda com curvatura de Ricci estritamente positiva, pelo teorema de Myers (ver em [26], página 201) segue que G é compacto com grupo fundamental finito. Agora, se G é compacto com grupo fundamental finito, podemos escolher uma métrica em G que é bi-invariante tal que $ad(X)^* = -ad(X)$. Como G tem grupo fundamental finito seu recobrimento universal \tilde{G} é compacto, visto que $\tilde{G}/\Pi = G$, onde Π é subgrupo discreto isomorfo ao grupo fundamental de G . Observamos que como \mathfrak{g} se decompõe em soma direta de ideais simples temos $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pois se $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$, então $r(X) = 0$, logo $X \in Z(\mathfrak{g})$ (ver **item 3 da proposição 5.18**). Assim X gera um ideal de dimensão 1 que dá origem a um fator não-compacto na decomposição de \tilde{G} (ver **lema 5.25**), o que contraria o fato de \tilde{G} ser compacto. Assim, pela **proposição 5.33** segue que G tem curvatura de Ricci estritamente positiva. ■

Observamos que, de acordo com o **corolário 5.28**, o resultado anterior nos garante que se G é um grupo de Lie compacto com grupo fundamental finito, então G admite uma métrica bi-invariante com curvatura de Ricci constante igual a 1, em outras palavras, G é variedade Einstein (**definição 5.21**).

Estamos interessados em caracterizar os grupos de Lie com curvatura de Ricci ≥ 0 . O próximo lema nos permitirá mostrar que um grupo de Lie conexo G com métrica invariante à esquerda com curvatura de Ricci ≥ 0 tem que ser necessariamente unimodular. Consideremos então o seguinte lema.

Lema 5.35 *Se $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$, então $r(X) \leq 0$, onde a igualdade ocorre quando $ad(X)^* = -ad(X)$.*

Demonstração. Seja $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$, denotando por \mathfrak{u} o complemento ortogonal do espaço gerado por X , temos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$, logo \mathfrak{u} é um ideal. Definimos $L: \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}$, tal que $L(Z) = [X, Z]$, para todo $Z \in \mathfrak{u}$. Denotando por L^* o adjunto de L , definamos $S = \frac{1}{2}(L + L^*)$. Denotando por ∇ a conexão de Levi-Civita em \mathfrak{g} e $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita da métrica induzida de \mathfrak{g} em \mathfrak{u} . Da fórmula de Koszul (**5.8**) obtemos as seguintes relações para ∇

$$\nabla_X(X) = 0, \quad \nabla_X(Z) = \frac{1}{2}(L - L^*)Z \quad (Z \in \mathfrak{u}). \quad (5.15)$$

Similarmente para $Z \in \mathfrak{u}$, temos

$$\nabla_Z(X) = -S(Z), \quad \nabla_Z(Y) = \bar{\nabla}_Z(Y) + \langle S(Z), Y \rangle X \quad (Y \in \mathfrak{u}). \quad (5.16)$$

Consideremos Z_1, \dots, Z_{n-1} base ortonormal que diagonaliza o operador $S = S^*$, isto é, $S(Z_\alpha) = \lambda_\alpha Z_\alpha$. A curvatura de Ricci na direção X é definida por

$$r(X) = \sum_\alpha \langle R(X, Z_\alpha)X, Z_\alpha \rangle = \sum_\alpha K(X, Z_\alpha),$$

para cada $\alpha = 1, \dots, n-1$, das expressões para a conexão obtidas anteriormente, temos

$$K(X, Z_\alpha) = \langle R(X, Z_\alpha)X, Z_\alpha \rangle = -\langle S(L(Z_\alpha)), Z_\alpha \rangle + \langle \frac{1}{2}(L - L^*)S(Z_\alpha), Z_\alpha \rangle = -\lambda_\alpha^2,$$

assim obtemos

$$r(X) = -\sum_\alpha \lambda_\alpha^2 = -\text{tr}(S^2),$$

logo $r(Z) \leq 0$, com igualdade se, e somente se, $S = 0$ ($L^* = -L$). ■

Podemos caracterizar um grupo de Lie unimodular da seguinte maneira.

Lema 5.36 *Um grupo de Lie conexo é unimodular se, e somente se, a transformação linear $ad(X)$ tem traço zero para todo elemento X na álgebra de Lie associada.*

Demonstração. Se G é unimodular temos $|\det(Ad(g))| = 1$, para todo $g \in G$. Como para todo $X \in \mathfrak{g}$

$$\det(Ad(\exp(X))) = \det(\exp(ad(X))) = \exp(\text{tr}(ad(X))),$$

segue que $\text{tr}(ad(X)) = 0$. Reciprocamente, se $\text{tr}(ad(X)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, da expressão anterior temos $\det(Ad(\exp(X))) = 1$. Como G é conexo, da **proposição 2.33** segue o resultado. ■

Uma álgebra de Lie que satisfaz $\text{tr}(ad(X)) = 0$ para todo elemento X é chamada álgebra de Lie unimodular. Agora, para uma álgebra de Lie arbitrária \mathfrak{g} . Através da identidade de Jacobi

$$ad[X, Y] = ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X),$$

de onde vemos que $ad[X, Y]$ tem traço zero. Assim, temos que $X \rightarrow \text{tr}(ad(X))$ é um homomorfismo de \mathfrak{g} para a álgebra de Lie abeliana \mathbb{R} . Em particular o núcleo deste homomorfismo contém $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, o que faz do mesmo um ideal, denotemos

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{tr}(ad(X)) = 0\},$$

chamado **núcleo unimodular**. Temos então o seguinte resultado relacionado aos grupos de Lie com métrica invariante à esquerda com curvatura de Ricci ≥ 0 .

Proposição 5.37 *Se um grupo de Lie G admite uma métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci ≥ 0 , então G é unimodular.*

Demonstração. Suponha que G não é unimodular. Então podemos escolher um elemento ortonormal $X \in \mathfrak{u}^\perp = \{Z \in \mathfrak{g} \mid \text{tr}(ad(Z)) = 0\}^\perp$, assim temos $\text{tr}(ad(X)) \neq 0$. Assim, temos que $ad(X)^* \neq -ad(X)$, pelo **lema 5.35** segue que $r(X) < 0$, o que contradiz a hipótese de que $\text{Ricci} \geq 0$. ■

A **proposição 5.37** nos fornece uma condição sobre os grupos de Lie com métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci ≥ 0 . Em [38] encontramos a classificação dos grupos de Lie de dimensão 3 contemplando todas as possibilidades de sinais para curvatura de Ricci.

Os grupos $SL(2, \mathbb{R})$ (grupo das matrizes 2×2 reais com determinante igual a 1) e $E(1, 1)$ (grupo dos movimentos rígidos do espaço de Minkowski de dimensão 2) são exemplos de grupos de Lie que admitem métrica invariante à esquerda não-flat com curvatura de Ricci ≤ 0 (ver [38], páginas 307-308), onde $SL(2, \mathbb{R})$ é grupo de Lie simples não-compacto e $E(1, 1)$ é solúvel unimodular. Esses dois exemplos estão em contraste com as informações do **teorema 5.31** acerca de curvaturas seccionais, além disso o grupo $E(1, 1)$ é um exemplo de que a recíproca da **proposição 5.37** não é verdadeira.

Em [38] é colocado em questão a existência de métricas inavriantes à esquerda em grupos de Lie simples de dimensões mais altas com curvatura de Ricci ≤ 0 . Em [25] encontramos a construção de uma métrica em $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$, com curvatura de Ricci estritamente negativa.

Vamos agora estabelecer um resultado relacionado aos grupos de Lie com álgebra de Lie **nilpotente**, mais especificamente vamos obter uma versão para o teorema de Wolf (ver [43]) sobre métricas com direções positivas e negativas de curvaturas de Ricci. Definimos a sequência de ideais (**série central descendente**) por $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \dots$, $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é chamada nilpotente se $\mathfrak{g}^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Combinando a **proposição 5.33** com o **lema 5.35** obtemos a seguinte resultado.

Teorema 5.38 *Suponha que G seja um grupo de Lie com álgebra de Lie nilpotente. Então, para alguma métrica invariante à esquerda em G existem direções em que a curvatura de Ricci é estritamente positiva e direções que a curvatura de Ricci é estritamente negativa.*

Demonstração. Sendo \mathfrak{g} nilpotente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$. Tomando $X \in \mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$, temos $X \in Z(\mathfrak{g})$ e $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pela **proposição 5.33** segue que $r(X) > 0$. Observamos agora que \mathfrak{g} não pode se decompor da forma $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$, visto que isto implica que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$, o que estabilizaria a série central descendente. Assim, podemos tomar $Y \in \mathfrak{g}$ que é ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e não pertence a $Z(\mathfrak{g})$. Como $ad(Y)$ é operador linear

nilpotente $ad(Y)^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e existe $Z \in \mathfrak{g}$ tal que $ad(Y)^{n-1}Z \neq 0$, em particular temos $ad(Y)Z \neq 0$. Se $ad(Y)^* = -ad(Y)$, temos que

$$0 = \langle ad(Y)^{2n-2}Z, Z \rangle = \pm \langle ad(Y)^{n-1}Z, ad(Y)^{n-1}Z \rangle \neq 0,$$

assim segue que $ad(Y)^* \neq -ad(Y)$. Temos $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ e $ad(Y)^* \neq -ad(Y)$, pelo **lema 5.35** segue que $r(Y) < 0$. ■

Vamos agora explorar alguns resultados relacionados a curvatura escalar de um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda. Fixando uma base ortonormal $\{e_\alpha\}$ para \mathfrak{g} , a curvatura escalar pode ser escrita como

$$s = \sum_\alpha r(e_\alpha) = 2 \sum_{\alpha < \beta} K(e_\alpha, e_\beta).$$

De acordo com *Eliasson* (ver [13]) toda variedade diferenciável de dimensão ≥ 3 admite uma métrica com curvatura escalar estritamente negativa. Contudo, métricas com curvatura escalar positiva não existem sempre. Lembrando que um grupo de Lie solúvel é um grupo de Lie com álgebra de Lie solúvel, para métricas invariantes à esquerda temos o seguinte resultado.

Teorema 5.39 *Se G é um grupo de Lie solúvel, então toda métrica invariante à esquerda em G é flat (teorema 5.29), ou tem curvatura escalar estritamente negativa.*

Demonstração. Seja G grupo de Lie solúvel com métrica invariante à esquerda. Como \mathfrak{g} é solúvel temos que \mathfrak{g} não pode se decompor na da forma $Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, pois neste caso teríamos $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^{(2)}$ o que estabilizaria a série derivada. Assim, podemos tomar $X \in \mathfrak{g}$ unitário tal que $X \notin Z(\mathfrak{g})$ e $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$. Denotemos por \mathfrak{u} o complemento ortogonal do espaço gerado por X , temos \mathfrak{u} ideal de codimensão 1. Considerando a aplicação linear $L: \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}$, tal que $L: Z \rightarrow [X, Z]$, e definamos $S = \frac{1}{2}(L + L^*)$. De acordo com a demonstração do **lema 5.35**, da fórmula de Koszul (5.8) obtemos relações (5.15) e (5.16) para ∇ . Denotando por \bar{K} a curvatura seccional da conexão induzida em \mathfrak{u} , para $Z, W \in \mathfrak{u}$ temos

$$K(Z, W) = \bar{K}(Z, W) + \langle S(Z), W \rangle^2 - \langle S(Z), Z \rangle \langle S(W), W \rangle.$$

Como $S^* = S$, podemos escolher uma base ortonormal $\{Z_\alpha\}$, tal que $S(Z_\alpha) = \lambda_\alpha Z_\alpha$. Assim, para $\alpha \neq \beta$ temos

$$K(Z_\alpha, Z_\beta) = \bar{K}(Z_\alpha, Z_\beta) - \lambda_\alpha \lambda_\beta.$$

Como $r(Z_\alpha) = \text{tr}(Z \rightarrow R(Z_\alpha, Z)Z_\alpha)$, segue que

$$r(Z_\alpha) = K(Z_\alpha, X) + \sum_{\beta \neq \alpha} \bar{K}(Z_\alpha, Z_\beta) - \lambda_\alpha \text{tr}(S) = -\lambda_\alpha^2 + \bar{r}(Z_\alpha) - \lambda_\alpha \text{tr}(S),$$

onde \bar{r} denota o tensor de Ricci da conexão induzida em \mathfrak{u} . Segue que

$$s = r(X) + \sum_{\alpha} r(Z_{\alpha}) = -2\text{tr}(S^2) + \sum_{\alpha} \bar{r}(Z_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \text{tr}(S),$$

visto que $r(X) = -\text{tr}(S^2)$. Assim, denotando por \bar{s} a curvatura escalar em \mathfrak{u} , obtemos

$$s = -2\text{tr}(S^2) + \sum_{\alpha} \bar{r}(Z_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \text{tr}(S) = -2\text{tr}(S^2) + \bar{s} - \text{tr}(S)^2.$$

Agora, por indução sobre a dimensão de \mathfrak{g} , que é solúvel temos $\bar{s} \leq 0$, segue que

$$s \leq -2\text{tr}(S^2) - \text{tr}(S)^2 \leq 0,$$

onde a igualdade ocorre se $\bar{s} = 0$ e $S = 0$. Vamos mostrar que se ambas as condições são satisfeitas ($s = 0$), então G é flat. Se $S = 0$ segue das fórmulas (5.16) para ∇ que

$$\nabla_Z(Y) = \bar{\nabla}_Z(Y),$$

para $Z, Y \in \mathfrak{u}$. Segue que para $Z, Y, W \in \mathfrak{u}$

$$R(Z, Y)W = \bar{R}(Z, Y)W,$$

com $\bar{s} = 0$, por hipótese de indução segue que $R(Z, Y)W = \bar{R}(Z, Y)W = 0$, para todo $Z, Y, W \in \mathfrak{u}$. Utilizando novamente as identidades (5.16) obtidas para ∇ , supondo $S = 0$ segue que $\nabla_Z(X) = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Assim, temos que $R(Z, Y)X = 0$ para todo $Z, Y \in \mathfrak{g}$. Pela propriedade de simetria

$$\langle R(Z, Y)X, W \rangle = \langle R(X, W)Z, Y \rangle,$$

segue que $R(X, W) = 0$ para todo $W \in \mathfrak{g}$. Combinando estes fatos com a trilinearidade de $R(Z, Y)W$, segue que $R \equiv 0$. ■

No caso em que a álgebra de Lie de um grupo de Lie G com métrica invariante à esquerda é nilpotente vimos que existem direções de curvatura de Ricci estritamente positiva e estritamente negativa (**teorema 5.38**). No entanto, no caso de grupos de Lie solúveis unimodulares não necessariamente temos direções de curvatura de Ricci estritamente positiva, um exemplo disso é o grupo $E(1, 1)$ (mais detalhes em [38]). Neste contexto temos o seguinte corolário para o **teorema 5.39**.

Corolário 5.40 *Se G é um grupo de Lie solúvel unimodular, então toda métrica invariante à esquerda é flat, ou tem curvatura seccional positiva e negativa.*

Demonstração. Se G é solúvel, unimodular e não é flat, segue do **teorema 5.31** que existe curvatura seccional positiva em G . Sendo G solúvel e não-flat, pelo **teorema 5.39** existe curvatura seccional negativa. ■

CAPÍTULO 6

GEOMETRIA QUASE HERMITIANA E GEOMETRIA KÄHLER

Em geometria complexa o conceito de estrutura diferenciável é na maioria das vezes substituído pelo conceito de estrutura holomorfa. Dentro deste contexto, uma função holomorfa é certamente diferenciável vista como função real, mas a o conceito de função holomorfa exige um pouco mais de estrutura. Para se entender melhor a geometria complexa estudaremos os conceitos da geometria quase complexa, isto é, estudaremos objetos com hipóteses mais fracas do que no caso complexo.

No que segue, faremos um estudo da teoria básica de variedades quase complexas e complexas explorando posteriormente os resultados no contexto de grupos de Lie complexos. A principal referência para os resultados deste capítulo é [21].

6.1 Preliminares algébricas

Nesta seção estudaremos alguns resultados algébricos necessários, no nível de espaços vetoriais, que posteriormente utilizaremos para o estudo dos espaços tangentes em variedades.

Seja V um espaço vetorial real de dimensão m , uma estrutura complexa em V é um endomorfismo J de V tal que $J^2 = -I$, onde I é o endomorfismo identidade de V . Em um espaço vetorial real V com uma estrutura complexa J podemos introduzir uma

multiplicação por escalar complexo da seguinte maneira

$$(a + ib)X = aX + bJX \quad \text{para todo } X \in V \text{ e } a, b \in \mathbb{R}.$$

Essa estrutura de espaço vetorial complexo induzida por J transforma V em um espaço vetorial complexo de dimensão $\frac{m}{2}$. Não é difícil ver que m tem que ser par pois $J^2 = -I$ e $\deg(\det(J - \lambda I)) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$.

De maneira recíproca, se V é um espaço vetorial complexo de dimensão n podemos definir um endomorfismo J em V tal que $J: X \rightarrow iX$, para todo $X \in V$. Se considerarmos V como espaço vetorial real de dimensão $2n$, então J é estrutura complexa em V .

Proposição 6.1 *Seja J uma estrutura complexa em um espaço vetorial real V de dimensão $2n$. Então, existem elementos X_1, X_2, \dots, X_n de V tal que $\{X_1, X_2, \dots, X_n, JX_1, JX_2, \dots, JX_n\}$ é uma base de V .*

Consideremos agora o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^n , onde $Z \in \mathbb{C}^n$ é tal que $Z = (z_1, \dots, z_n)$. Podemos identificar \mathbb{C}^n com o espaço vetorial real \mathbb{R}^{2n} , onde $z^k = x^k + iy^k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, assim temos que (z_1, \dots, z_n) se identifica com o elemento $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ de \mathbb{R}^{2n} . A estrutura complexa J_0 induzida por \mathbb{C}^n em \mathbb{R}^{2n} é tal que

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \rightarrow (-y^1, \dots, -y^n, x^1, \dots, x^n)$$

para todo $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Em termos da base canônica de \mathbb{R}^{2n} temos que

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n .

Proposição 6.2 *Sejam J e J' estruturas complexas nos espaços vetoriais reais V e V' , respectivamente. Considerando V e V' espaços vetoriais complexos com multiplicação por escalar complexo induzida por J e J' , respectivamente, se $T: V \rightarrow V'$ é um mapa \mathbb{R} -linear, então T é \mathbb{C} -linear se, e somente se, $J' \circ T = T \circ J$.*

A demonstração desse fato segue da definição da multiplicação por escalar complexo induzida pelas estruturas complexas. A partir da proposição anterior podemos identificar o grupo $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ com o subgrupo do grupo $\text{GL}(2n, \mathbb{R})$ dos elementos que comutam com

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

A representação de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ em $\text{GL}(2n, \mathbb{R})$, chamada de representação real de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, é dada por

$$A + iB \rightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \text{ com } A, B \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Através desta representação podemos estabelecer o seguinte resultado sobre estruturas complexas de \mathbb{R}^{2n}

Proposição 6.3 *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das estruturas complexas de \mathbb{R}^{2n} e o espaço homogêneo $GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$; onde a classe representada por um elemento $S \in GL(2n, \mathbb{R})$ é levada na estrutura complexa SJ_0S^{-1} , onde J_0 é a estrutura canônica de \mathbb{R}^{2n} induzida por \mathbb{C}^n .*

Agora, seja V um espaço vetorial real e V^* o seu espaço dual. Uma estrutura complexa J em V induz uma estrutura complexa em V^* , denotada também por J , de modo que:

$$\langle JX, X^* \rangle = \langle X, JX^* \rangle \quad \text{para todo } X \in V \text{ e } X^* \in V^*$$

lembrando que $\langle X, X^* \rangle = X^*(X)$, para $X \in V$ e $X^* \in V^*$.

Consideremos V um espaço vetorial real m -dimensional e $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sua complexificação. Então, o espaço V pode ser visto como subespaço real de $V^{\mathbb{C}}$. De maneira geral, podemos ver o espaço dos tensores $\mathbf{T}_s^r(V)$, do tipo r -contravariante e s -covariante, como um subespaço real do espaço $\mathbf{T}_s^r(V^{\mathbb{C}})$. A conjugação complexa em $V^{\mathbb{C}}$ é definida pelo endomorfismo real

$$Z = X + iY \rightarrow \bar{Z} = X - iY \quad \text{para } X, Y \in V.$$

A conjugação complexa de $V^{\mathbb{C}}$ pode ser estendida para $\mathbf{T}_s^r(V^{\mathbb{C}})$ de maneira natural.

Se V é um espaço vetorial real $2n$ -dimensional com uma estrutura complexa J . Então, podemos estender a estrutura complexa a um endomorfismo de $V^{\mathbb{C}}$, ainda denotado por J , satisfazendo a equação $J^2 = -I$. Assim, temos a decomposição de $V^{\mathbb{C}}$ na soma dos autoespaços associados aos autovalores i e $-i$ de J . Denotamos por

$$V^{1,0} = \{Z \in V^{\mathbb{C}} \mid JZ = iZ\}, \quad V^{0,1} = \{Z \in V^{\mathbb{C}} \mid JZ = -iZ\}$$

os autoespaços associados a i e $-i$, respectivamente.

Proposição 6.4 *Temos os seguintes resultados:*

1. $V^{1,0} = \{X - iJX \mid X \in V\}$, $V^{0,1} = \{X + iJX \mid X \in V\}$.
2. $V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ (soma direta como espaço vetorial complexo).
3. A conjugação complexa de $V^{\mathbb{C}}$ define um isomorfismo linear real entre $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$.

Demonstração. O item (3) segue da definição da conjugação complexa em $V^{\mathbb{C}}$, e do fato de que $\dim_{\mathbb{R}} V^{1,0} = \dim_{\mathbb{R}} V^{0,1} = 2n$. O item (2) é consequência da decomposição de $V^{\mathbb{C}}$ como soma dos autoespaços associados aos autovalores i e $-i$ do endomorfismo complexo J , correspondentes aos autoespaços $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$, respectivamente.

Vamos mostrar o caso $V^{1,0}$ do item (1), já que as contas para o caso $V^{0,1}$ seguem de modo análogo. Consideremos $W = \{X - iJX \mid X \in V\}$, pela definição dos elementos de W temos que W é um subespaço complexo de $V^{\mathbb{C}}$. Agora, temos que

$$Z \in V^{1,0} \Leftrightarrow JZ = iZ \Leftrightarrow -iJZ = Z \Rightarrow Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ)$$

Se denotarmos $Z = X + iY$, com $X, Y \in V$, segue que

$$\frac{1}{2}(Z - iJZ) = \frac{1}{2}(X - iJX) + \frac{i}{2}(Y - iJY) \in W \Rightarrow V^{1,0} \subseteq W$$

Agora, para $X \in V$, temos $J(X - iJX) = JX - iJ^2X = JX + iX = i(X - iJX) \Rightarrow W \subseteq V^{1,0}$. Temos então $V^{1,0} = W = \{X - iJX \mid X \in V\}$. ■

Observamos novamente que se considerarmos V^* o espaço dual de V , uma estrutura complexa J em V induz uma estrutura complexa em V^* , que também denotamos por J . Sendo $V^{*\mathbb{C}}$ a complexificação de V^* , com respeito aos autovalores i e $-i$ de J , temos uma decomposição de $V^{*\mathbb{C}}$ em soma direta de autoespaços de J associados aos autovalores i e $-i$

$$V^{*\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1} \quad (\text{soma direta como espaço vetorial complexo}).$$

Proposição 6.5 *Da decomposição $V^{*\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$, segue que*

- $V_{1,0} = \{X^* \in V^{*\mathbb{C}} \mid \langle X, X^* \rangle = 0, \forall X \in V^{0,1}\}$
- $V_{0,1} = \{X^* \in V^{*\mathbb{C}} \mid \langle X, X^* \rangle = 0, \forall X \in V^{1,0}\}$

Demonstração. Mostraremos o caso $V_{1,0}$, o caso $V_{0,1}$ segue de modo análogo. Consideremos $W = \{X^* \in V^{*\mathbb{C}} \mid \langle X, X^* \rangle = 0, \forall X \in V^{0,1}\}$, pela definição dos elementos de W , segue que W um subespaço de $V^{*\mathbb{C}}$. Como $\langle X, X^* \rangle = X^*(X)$, para $X \in V$ e $X^* \in V^*$ $\Rightarrow W$ é o anulador de $V^{0,1}$ em $V^{*\mathbb{C}}$. Temos então

$$\dim_{\mathbb{C}} W = \dim_{\mathbb{C}} V^{*\mathbb{C}} - \dim_{\mathbb{C}} V^{0,1} = 2n - n = n.$$

Se $0 \neq Z^* \in V_{1,0} = \{Z^* \in V^{*\mathbb{C}} \mid JZ^* = iZ^*\} \Rightarrow \langle Z, JZ^* \rangle = (JZ^*)(Z) = iZ^*(Z), \forall Z \in V^{0,1}$.

Mas $\langle Z, JZ^* \rangle = Z^*(JZ) = -iZ, \forall Z \in V^{0,1} \Rightarrow 2Z^*(Z) = 0, \forall Z \in V^{0,1} \Rightarrow Z^* \in W$.

Assim temos que $V_{1,0} \subseteq W$, como $\dim_{\mathbb{C}} W = n = \dim_{\mathbb{C}} V_{1,0}$

$$\Rightarrow V_{1,0} = W = \{X^* \in V^{*\mathbb{C}} \mid \langle X, X^* \rangle = 0, \forall X \in V^{0,1}\},$$

o caso $V_{0,1}$ segue de modo análogo. ■

Considerando as decomposições de $V^{\mathbb{C}}$ e $V^{*\mathbb{C}}$ associadas a uma estrutura complexa J em V , temos que $\mathbf{T}_s^r(V^{\mathbb{C}})$ se decompõe em soma direta de produtos de subespaços idênticos a $V^{1,0}$, $V^{0,1}$, $V_{1,0}$ e $V_{0,1}$. Estamos interessados em estudar a decomposição da álgebra exterior $\bigwedge V^{*\mathbb{C}}$. As álgebras $\bigwedge V_{1,0}$ e $\bigwedge V_{0,1}$ podem ser consideradas subálgebras de $\bigwedge V^{*\mathbb{C}}$. Denotemos por $\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}$ o subespaço de $\bigwedge V^{*\mathbb{C}}$ gerado por elementos da forma $\alpha \wedge \beta$, onde $\alpha \in \bigwedge^p V_{1,0}$ e $\beta \in \bigwedge^q V_{0,1}$, isto é,

$$\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\alpha \wedge \beta \in \bigwedge V^{*\mathbb{C}} \mid \alpha \in \bigwedge^p V_{1,0}, \beta \in \bigwedge^q V_{0,1}\}.$$

Temos a seguinte proposição.

Proposição 6.6 *A álgebra exterior $\bigwedge V^{*\mathbb{C}}$ se decompõe da forma*

$$\bigwedge V^{*\mathbb{C}} = \sum_{r=0}^n (\bigwedge^r V^{*\mathbb{C}}) \quad \text{com} \quad \bigwedge^r V^{*\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} (\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}),$$

e a conjugação complexa de $V^{*\mathbb{C}}$, se estende a $\bigwedge V^{*\mathbb{C}}$ de maneira natural, fornecendo um isomorfismo linear real entre $\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}$ e $\bigwedge^{q,p} V^{*\mathbb{C}}$.

Demonstração. A demonstração da primeira parte da proposição segue das seguintes observações

- $\sum_{p+q=r} (\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}) \subseteq \bigwedge^r V^{*\mathbb{C}}$.
- Se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}\}$ é base de $V^{*\mathbb{C}}$, $\{\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq 2n\}$ é base de $\bigwedge^r V^{*\mathbb{C}}$.
- Se $\alpha \in \bigwedge^r V^{*\mathbb{C}}$, com $\alpha = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_r$, onde $\beta_k \in V^{*\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$, $\forall k \in \{1, \dots, r\}$
 $\Rightarrow \beta_k = \beta_k^{1,0} + \beta_k^{0,1}$, $\beta_k^{1,0} \in V_{1,0}$ e $\beta_k^{0,1} \in V_{0,1}$, $\forall k \in \{1, \dots, r\}$. Assim, temos que

$$\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_r = (\beta_1^{1,0} + \beta_1^{0,1}) \wedge \dots \wedge (\beta_r^{1,0} + \beta_r^{0,1}).$$
- Se $\eta, \gamma, \theta \in V^{*\mathbb{C}}$, temos $(\eta + \gamma) \wedge \theta = \eta \wedge \theta + \gamma \wedge \theta$.

Das observações e da bilinearidade do produto exterior vemos que é suficiente considerar $\alpha \in \bigwedge^r V^{*\mathbb{C}}$, tal que

$$\alpha = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_r = (\beta_1^{1,0} + \beta_1^{0,1}) \wedge \dots \wedge (\beta_r^{1,0} + \beta_r^{0,1}),$$

da distributividade e bilinearidade do produto exterior, se $\alpha \in \sum_{p+q=r} (\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}})$

$$\Rightarrow \bigwedge^r V^{*\mathbb{C}} \subseteq \sum_{p+q=r} (\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}), \text{ segue que } \bigwedge^r V^{*\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} (\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}).$$

O isomorfismo entre $\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}$ e $\bigwedge^{q,p} V^{*\mathbb{C}}$, via conjugação complexa de $V^{*\mathbb{C}}$, é uma consequência do isomorfismo linear entre $V_{1,0}$ e $V_{0,1}$ através da conjugação de $V^{*\mathbb{C}}$. ■

Considerando $\{\alpha_i\}$ base do espaço vetorial complexo $V_{1,0}$, temos que $\{\bar{\alpha}_i\}$ é base do espaço $V_{0,1}$ (via **proposição 6.4**), assim temos que o conjunto dos elementos da forma $\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_p} \wedge \bar{\alpha}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{\alpha}_{j_q}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ e $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$, formam uma base para $\bigwedge^{p,q} V^{*\mathbb{C}}$ sobre o corpo dos números complexos.

Definição 6.7 *Um produto interno Hermitiano em um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J é um produto interno h tal que*

$$h(JX, JY) = h(X, Y), \quad \forall X, Y \in V. \quad (6.1)$$

Segue que $h(JX, X) = 0, \forall X \in V$.

Proposição 6.8 *Seja h um produto interno Hermitiano em um espaço vetorial real V com uma estrutura complexa J . Então, existem elementos X_1, \dots, X_n em V , tal que o conjunto $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$ forma uma base ortonormal como respeito ao produto interno h .*

Se h_0 é o produto interno canônico do espaço \mathbb{R}^{2n} , isto é, o produto interno para o qual a base canônica do \mathbb{R}^{2n} é ortonormal, então h_0 é um produto interno Hermitiano com relação a estrutura complexa canônica J_0 . Assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 6.9 *Existe uma correspondência biunívoca natural entre os produtos internos Hermitianos do espaço \mathbb{R}^{2n} , com respeito a estrutura canônica J_0 , e o espaço homogêneo $\text{GL}(n, \mathbb{C})/\text{U}(n)$; a classe representada por um elemento $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ corresponde ao produto interno h definido por*

$$h(X, Y) = h_0(SX, SY), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (6.2)$$

onde h_0 é o produto interno canônico de \mathbb{R}^{2n} .

Proposição 6.10 *Seja h um produto interno Hermitiano em um espaço vetorial real V com uma estrutura complexa J . Então, h pode ser estendido unicamente a uma forma bilinear simétrica, denotada também por h , de $V^{\mathbb{C}}$, que satisfaz as seguintes condições*

1. $h(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{h(Z, W)}, \forall Z, W \in V^{\mathbb{C}};$

2. $h(Z, \bar{Z}) > 0, \forall Z \in V^{\mathbb{C}}$;
3. $h(Z, \bar{W}) = 0, \forall Z \in V^{1,0}$ e $W \in V^{0,1}$.

Reciprocamente, toda forma bilinear simétrica h satisfazendo as condições 1, 2 e 3 é naturalmente a extensão de um produto interno Hermitiano de V .

Demonstração. O item (1) segue da bilinearidade sobre \mathbb{C} da extensão. O item (2) segue do seguinte fato:

Denotando $Z = X + iY \in V^{\mathbb{C}}$, temos que $\bar{Z} = X - iY$, assim

$$h(Z, \bar{Z}) = h(X + iY, X - iY) = h(X, X) + h(Y, Y) > 0 \text{ se } Z \neq 0.$$

O item (3) é consequência de que se $Z \in V^{1,0}$ e $W \in V^{0,1}$, então podemos escrever $Z = X - iJX$, para algum $X \in V$, $W = Y + iJY$, para algum $Y \in V$. Assim, temos $\bar{W} = Y - iJY \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(X - iJX, Y - iJY) = h(X, Y) - ih(X, JY) - ih(JX, Y) - h(JX, JY) = 0,$$

pois $h(X, JY) = -h(JX, Y)$ e $h(JX, JY) = h(X, Y)$. ■

Para cada produto Hermitiano h de V , com respeito a uma estrutura complexa J , associamos uma forma bilinear $\omega \in \wedge^2 V^*$, definida da seguinte forma:

$$\omega(X, Y) = h(X, JY), \forall X, Y \in V.$$

Da maneira que ω foi definida, temos $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$, isto é, ω é anti-simétrica. É fácil ver que ω é invariante por J .

Como $\wedge^2 V^*$ pode ser considerado como um subespaço de $\wedge^2 V^{*\mathbb{C}}$, ω pode ser vista como um elemento de $\wedge^2 V^{*\mathbb{C}}$, isto é, ω pode ser estendida unicamente a uma forma bilinear anti-simétrica de $V^{\mathbb{C}}$, que também denotamos por ω . Das **proposições 6.4, 6.5, 6.1**, segue que

Proposição 6.11 *Seja ω a forma bilinear anti-simétrica associada a um produto interno Hermitiano h de V . Então, $\omega \in \wedge^{1,1} V^{*\mathbb{C}}$.*

Proposição 6.12 *Sejam h e ω como na proposição (2.11), consideremos $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ base de $V^{1,0}$ sobre \mathbb{C} e $\{\xi^1, \dots, \xi^n\}$ sua base dual para $V_{1,0}$. Denotando por*

$$h_{\alpha, \bar{\beta}} = h(Z_\alpha, \bar{Z}_\beta), \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

Então

1. $h_{\alpha, \bar{\beta}} = \overline{h_{\beta, \alpha}}, \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n;$
2. $\omega = -2i \sum_{\alpha, \beta=1}^n h_{\alpha, \bar{\beta}} \xi^\alpha \wedge \bar{\xi}^\beta.$

6.2 Variedades quase complexas

Nesta seção estudaremos o conceito de variedade quase complexa (quase Hermitiana). O principal objetivo é analisar as condições para que uma variedade quase complexa seja de fato uma variedade complexa.

Definição 6.13 *Uma variedade complexa de dimensão n é uma variedade diferenciável real $2n$ -dimensional M , com atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ que tem funções de transição holomorfas. O atlas de uma variedade complexa é chamado estrutura holomorfa em M .*

Para compreender melhor as variedades complexas definiremos a noção de variedade quase complexa, e aplicaremos muitos dos conceitos vistos na seção anterior no espaço tangente de uma variedade quase complexa.

Definição 6.14 *Uma estrutura quase complexa em uma variedade diferenciável real M é um tensor $J \in \Gamma(TM \otimes TM^*)$, tal que $J^2 = -I$, onde I denota o endomorfismo identidade de TM . Uma variedade diferenciável real com uma estrutura quase complexa fixada é chamada variedade quase complexa.*

Proposição 6.15 *Toda variedade quase complexa tem dimensão par e é orientável.*

Observamos que se M é uma variedade complexa de dimensão n , então podemos definir uma estrutura quase complexa na variedade real subjacente de dimensão $2n$, utilizando a estrutura holomorfa, da seguinte forma:

Seja (φ, U) uma carta em $p \in M$, temos $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Como visto na seção anterior \mathbb{C} induz uma estrutura complexa J_0 em \mathbb{R}^{2n} , definimos $J = \varphi_*^{-1} \circ J_0 \circ \varphi_*$ em $U \subset M$. Para ver que J esta bem definida em toda variedade M precisamos verificar o que acontece na intersecção de duas cartas. Seja (ψ, V) um outro sistema de coordenadas, tal que $U \cap V \neq \emptyset$, consideremos a seguinte caracterização de função holomorfa.

Proposição 6.16 *Uma função $f: U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, preserva as estruturas quase complexas de \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m , isto é, $f_* \circ J = J \circ f_*$ se, e somente se, f é holomorfa.*

A partir desta proposição, segue que $(\psi \circ \varphi^{-1})_* \circ J_0 = J_0 \circ (\psi \circ \varphi^{-1})_*$ em $\varphi(U \cap V) \Rightarrow J = \varphi_*^{-1} \circ J_0 \circ \varphi_* = \psi_*^{-1} \circ J_0 \circ \psi_*$ em $U \cap V$, assim temos que J associa a cada ponto de M um automorfismo de seu espaço tangente, que satisfaz $J^2 = -I \Rightarrow$ toda variedade complexa é quase complexa.

Uma estrutura quase complexa J em uma variedade M é chamada estrutura complexa se M é a variedade real subjacente a uma variedade complexa que induz J através de sua

estrutura holomorfa.

Sejam (M, J) e (M', J') variedades quase complexas. Uma função $f: M \rightarrow M'$ é chamada quase complexa se $J' \circ f_* = f_* \circ J$. Temos a seguinte proposição.

Proposição 6.17 *Sejam (M, J) e (M', J') variedades complexas. Uma função $f: M \rightarrow M'$ é holomorfa se, e somente se, f é quase complexa com relação as estruturas quase complexas de M e M' .*

Demonstração. Podemos tomar sistemas de coordenadas (U, φ) em M e (V, ψ) em M' , tal que $f = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{C}^m$ localmente. Assim, f é holomorfa $\Leftrightarrow f$ localmente satisfaz $f_* \circ J_0 = J'_0 \circ f_*$, onde J_0 e J'_0 são as estruturas complexas canônicas de \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m , respectivamente. Como podemos escrever as estruturas as estruturas quase complexas de M e M' , respectivamente, localmente da forma $J = \varphi_*^{-1} \circ J_0 \circ \varphi_*$ e $J' = \psi_*^{-1} \circ J'_0 \circ \psi_*$, da expressão local de f segue o resultado. ■

Exemplo 6.18 *Em análise complexa de funções de uma variável, uma função complexa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Isto é, escrevendo $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é holomorfa se*

$$\partial_x u = \partial_y v \quad e \quad \partial_x v = -\partial_y u.$$

Denotando por $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, a matriz que representa a multiplicação por i em $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, e a diferencial de f por $df = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}$, obtemos uma condição equivalente as equações de Cauchy-Riemann

$$J_2 \circ df = df \circ J_2$$

se, e somente se, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. De maneira mais geral, podemos estender este conceito para funções $f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, definindo para k inteiro

$$J_{2k} = \begin{bmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix},$$

com respeito a identificação natural $\mathbb{R}^{2k} = \mathbb{C}^k$, onde I_k denota a matriz identidade de ordem k . Dizemos que f é holomorfa se $J_{2n} \circ df = df \circ J_{2m}$.

Em particular, duas variedades complexas associadas a mesma variedade real são idênticas se as correspondentes estruturas quase complexas coincidem.

Proposição 6.19 *Seja M uma variedade orientável de dimensão $2n$ e $L(M)$ o fibrado de bases sobre M . Então, o conjunto das estruturas quase complexas de M está em correspondência biunívoca com o conjunto das seções do fibrado $B = L(M)/\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sobre M , com fibra $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, onde $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é visto como subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ via representação real.*

Estamos interessados em estudar quando uma variedade M com uma estrutura quase complexa J é uma variedade real associada a uma variedade complexa, com J induzida pela estrutura holomorfa, isto é, com J complexa. Para isso definimos a torsão de uma estrutura quase complexa.

Definição 6.20 *Seja M uma variedade real de dimensão $2n$ e J uma estrutura quase complexa definida em M . A torsão de J é o tensor do tipo $(1, 2)$ N_J , tal que*

$$N_J(X, Y) = 2\{[JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\} \quad (6.1)$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Tomando coordenadas locais x^1, \dots, x^{2n} em M , denotando $X = \partial_{x^\alpha}$ e $Y = \partial_{x^\beta}$, temos as componentes $N_{\alpha, \beta}^k$ de N_J , onde

$$N_{\alpha, \beta}^k = 2 \sum_{l=1}^{2n} (J_\alpha^l \partial_l J_\beta^k - J_\beta^l \partial_l J_\alpha^k - J_l^k \partial_\alpha J_l^\beta + J_l^k \partial_\beta J_l^\alpha), \quad (6.2)$$

sendo J_j^i são as componentes de J e $\partial_l = \partial_{x^l}$, $\forall l = 1, 2, \dots, 2n$.

Teorema 6.21 (Newlander-Nirenberg) *Uma estrutura quase complexa J em uma variedade M é uma estrutura complexa se, e somente se, J não possui torsão ($N_J \equiv 0$).*

Vamos estudar agora resultados associados a álgebra exterior associada as formas diferenciáveis de uma variedade quase complexa. De fato, veremos que uma estrutura quase complexa induz uma decomposição na álgebra exterior associada ao espaço das formas diferenciáveis. Denotemos por $T_p^{\mathbb{C}}M$ o espaço tangente complexo em $p \in M$, isto é, a complexificação do espaço tangente T_pM . Seja $\bigwedge^r(M)$ o espaço das r -formas em M , denotemos por $\bigwedge_{\mathbb{C}}^r(M)$ a complexificação de $\bigwedge^r(M)$. Toda r -forma complexa $\omega \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^r(M)$ pode ser escrita de maneira única como $\omega' + i\omega''$, onde ω' e ω'' são r -formas (reais). Se denotarmos por $T_p^{\mathbb{C}}M^*$ a complexificação do espaço dual de T_pM , uma r -forma complexa pode ser vista como uma seção do fibrado $\bigwedge^r(T_p^{\mathbb{C}}M^*)$, isto é, $\omega: p \in M \rightarrow \omega_p \in \bigwedge^r(T_p^{\mathbb{C}}M^*)$.

De modo mais geral, podemos definir o espaço dos campos tensoriais complexos sobre M como a complexificação do espaço dos campos tensoriais reais. Operações como

contrações, conchetes, derivação exterior, derivada de Lie, produtos internos, etc, podem ser estendidas por linearidade para campos tensoriais complexos ou formas diferenciáveis complexas.

Seja M uma variedade com uma estrutura quase complexa J , pela **proposição 6.4**, dado $p \in M$

$$T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M, \quad (6.3)$$

um vetor tangente complexo em $p \in M$ é do tipo $(1, 0)$ se pertence a $T_p^{1,0}M$, e do tipo $(0, 1)$ se pertence a $T_p^{0,1}M$.

Proposição 6.22 *Um campo vetorial complexo Z em uma variedade quase complexa M é do tipo $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) $\Leftrightarrow Z = X - iJX$ (resp. $Z = X + iJX$), para algum $X \in \Gamma(TM)$*

Pela **proposição 6.6** o espaço $\Lambda(M)_{\mathbb{C}}$ das formas diferenciais complexas de uma variedade quase complexa M de dimensão $2n$ pode ser decomposto da forma:

$$\Lambda(M)_{\mathbb{C}} = \sum_{r=0}^n \Lambda^r(M)_{\mathbb{C}} = \sum_{r=0}^n (\sum_{p+q=r} \Lambda^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}).$$

Um elemento de $\Lambda^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}$ é chamado forma complexa de grau (p, q) . Pela proposição (2.5), uma 1-forma complexa ω é de grau $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) se, e somente se, $\omega(Z) = 0$ para todos os campos complexos Z do tipo $(0, 1)$ (resp. $(1, 0)$). Se $\omega^1, \dots, \omega^n$ é uma base local para $\Lambda^{1,0}(M)_{\mathbb{C}}$, então sua conjugação complexa $\bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^n$ é uma base local para $\Lambda^{0,1}(M)_{\mathbb{C}}$ (via proposição (2.4)). Os elementos da forma $\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} \wedge \bar{\omega}^{k_1} \wedge \dots \wedge \bar{\omega}^{k_q}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$ e $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n$, formam uma base local para $\Lambda^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}$. Consequentemente, se $\omega \in \Lambda^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}$, então $\omega(Z_1, \dots, Z_{p+q}) = 0$ para campos vetoriais complexos Z_1, \dots, Z_{p+q} tais que o número de campos do tipo $(1, 0)$ é maior do que p ou o número de vetores do tipo $(0, 1)$ é maior do que q . Temos a seguinte proposição

Proposição 6.23 *Se $\Lambda^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}$ é o espaço das formas complexas de grau (p, q) sobre uma variedade quase complexa M , então*

$$d(\Lambda^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}) \subset \Lambda^{p+2,q-1}(M)_{\mathbb{C}} \oplus \Lambda^{p+1,q}(M)_{\mathbb{C}} \oplus \Lambda^{p,q+1}(M)_{\mathbb{C}} \oplus \Lambda^{p-1,q+2}(M)_{\mathbb{C}}.$$

Segue agora um teorema que relaciona o estudo das formas complexas com o a integrabilidade de estruturas quase complexas.

Teorema 6.24 *Para uma variedade quase complexa M as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Se Z e W são campos complexos do tipo $(1, 0)$, $[Z, W]$ também é do tipo $(1, 0)$;*

2. Se Z e W são campos complexos do tipo $(0, 1)$, $[Z, W]$ também é do tipo $(0, 1)$;
3. Se $\omega \in \bigwedge^{1,0}(M)_{\mathbb{C}} \Rightarrow d\omega \in \bigwedge^{2,0}(M)_{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^{1,1}(M)_{\mathbb{C}}$.
Se $\omega \in \bigwedge^{0,1}(M)_{\mathbb{C}} \Rightarrow d\omega \in \bigwedge^{1,1}(M)_{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^{0,2}(M)_{\mathbb{C}}$;
4. $d(\bigwedge^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}) \subset \bigwedge^{p+1,q}(M)_{\mathbb{C}} \oplus \bigwedge^{p,q+1}(M)_{\mathbb{C}}$, para $p, q = 0, 1, \dots, n$;
5. A estrutura quase complexa J não tem torsão ($N_J \equiv 0$).

Consideremos uma estrutura quase complexa J em uma variedade diferenciável M , supondo que $N_J \equiv 0$, pela equivalência de (4) e (5) do **teorema 6.24** podemos decompor o operador diferencial exterior, isto é, podemos definir $\partial: \bigwedge^{p,q}(M)_{\mathbb{C}} \rightarrow \bigwedge^{p+1,q}(M)_{\mathbb{C}}$ e $\bar{\partial}: \bigwedge^{p,q}(M)_{\mathbb{C}} \rightarrow \bigwedge^{p,q+1}(M)_{\mathbb{C}}$, de modo que

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega, \quad \forall \omega \in \bigwedge^{p,q}(M)_{\mathbb{C}}.$$

Como $d^2 = 0$, obtemos as seguintes relações

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0$$

Como aplicação da teoria estudada até o momento exploraremos os conceitos básicos de **grupos de Lie complexos** e de variedades **Grassmanianas complexas**.

Exemplo 6.25 Um grupo de Lie complexo é uma variedade complexa de maneira que a aplicação $(a, b) \in G \times G \rightarrow ab^{-1} \in G$ é uma aplicação holomorfa de $G \times G$ em G , onde $G \times G$ é variedade complexa com a estrutura de variedade produto. Se G é um grupo de Lie complexo sua estrutura complexa J é invariante por $L_g, R_g, Ad(g)$. Assim, se X é um campo invariante à esquerda JX também é.

Vemos que se J é uma estrutura complexa em G , então J_e é uma estrutura complexa na álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Como J é invariante por $Ad(g)$ segue que $J \circ ad(X) = ad(X) \circ J$, assim temos \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa, que podemos denotar por \mathfrak{g}^J ou simplesmente por \mathfrak{g} . Reciprocamente, se G é um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} , podemos construir uma estrutura complexa invariante à esquerda J em G a partir da estrutura complexa canônica J_0 de \mathfrak{g} ($J_0 X = iX$, para todo $X \in \mathfrak{g}$). Definamos para $g \in G$

$$J_g = (L_g)_{*e} \circ J_0 \circ (L_{g^{-1}})_{*g},$$

temos $J \in \Gamma(TG \otimes TG^*)$ uma estrutura complexa invariante à esquerda em G . Como $[JX, Y] = J[X, Y]$ para campos invariantes à esquerda, segue que $N_J(X, Y) = 0$ para campos invariantes à esquerda. Assim temos $N_J = 0$, logo G é variedade complexa. Como R_g, L_g preservam J (**proposição 6.16**) segue que $(a, b) \in G \times G \rightarrow ab \in G$ é aplicação

holomorfa. Como a diferencial de $\iota: g \rightarrow g^{-1}$ comuta com J no elemento neutro $e \in G$ segue que ι preserva J , visto que $(\iota_*)_g = (R_{g^{-1}})_{*e} \circ (\iota_*)_e \circ (L_{g^{-1}})_{*g}$. Assim temos que G é grupo de Lie complexo.

Exemplo 6.26 Uma variedade Grassmaniana complexa $G_{p,q}(\mathbb{C})$ dos p -planos em \mathbb{C}^{p+q} é o conjunto de todos os subespaços p -dimensionais de \mathbb{C}^{p+q} com estrutura de variedade complexa construída da seguinte forma. Seja z^1, \dots, z^{p+q} o sistema de coordenadas natural em \mathbb{C}^{p+q} , onde cada $z^k: \mathbb{C}^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}$ é um mapa linear. Para cada conjunto de inteiros $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ tal que $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq p+q$, seja U_α o subconjunto de $G_{p,q}(\mathbb{C})$ formado por todos os subespaços p -dimensionais S tal que $z^{\alpha_1}|_S, \dots, z^{\alpha_p}|_S$ são linearmente independentes. Vamos definir um mapa $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{pq}$. Seja $\{\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}\}$ o complemento de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ em $\{1, \dots, p+q\}$ ordenado de maneira crescente. Como para cada $S \in U_\alpha$, o conjunto $z^{\alpha_1}|_S, \dots, z^{\alpha_p}|_S$ forma uma base para o espaço dual S^* , podemos escrever

$$z^{p+k}|_S = \sum_{l=1}^p s_l^k(z^{\alpha_l}|_S), \quad k = 1, \dots, q.$$

Definimos então $\varphi_\alpha(S) = (s_l^k) \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{pq}$, para cada $S \in U_\alpha$. É fácil ver que $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{pq}$ é um sistema de coordenadas locais em $G_{p,q}(\mathbb{C})$ e que a família de $\binom{p+q}{p}$ cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ formam um atlas, fazendo de $G_{p,q}(\mathbb{C})$ uma variedade complexa de dimensão pq .

Podemos utilizar um pouco da teoria de grupos de Lie para a seguinte construção. O grupo $GL(p+q, \mathbb{C})$ age em \mathbb{C}^{p+q} levando subespaços p -dimensionais em subespaços p -dimensionais por isso pode ser considerado como um grupo de transformações agindo em $G_{p,q}(\mathbb{C})$. Essa ação é holomorfa e transitiva. Se S_0 denota o subespaço p -dimensional gerado pelos primeiros p vetores da base canônica de \mathbb{C}^{p+q} , o subgrupo de isotropia H_{S_0} de S_0 é dado por

$$H_{S_0} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL(p+q, \mathbb{C}) \right\},$$

onde 0 denota a matriz nula de ordem $q \times p$. Por isso $G_{p,q}(\mathbb{C})$ pode ser visto como o espaço quociente $GL(p+q, \mathbb{C})/H_{S_0}$ do grupo de Lie complexo $GL(p+q, \mathbb{C})$ pelo subgrupo de Lie fechado H_{S_0} , além disso, a projeção natural $GL(p+q, \mathbb{C}) \rightarrow G_{p,q}(\mathbb{C})$ é holomorfa. Por argumentos similares podemos mostrar que o grupo unitário $U(p+q)$ age holomorficamente e transitivamente em $G_{p,q}(\mathbb{C})$, assim podemos escrever $G_{p,q}(\mathbb{C})$ como o espaço quociente $U(p+q)/U(p) \times U(q)$, onde

$$U(p) \times U(q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in U(p), B \in U(q) \right\}.$$

Como $U(p+q)$ é compacto, segue que $G_{p,q}(\mathbb{C})$ também é compacto.

A variedade Grassmanniana $G_{1,n}(\mathbb{C})$ é conhecida como espaço projetivo complexo, e denotada por $\mathbb{C}P^n$.

6.3 Conexões em variedades quase complexas

Nesta seção estudaremos as relações entre uma estrutura quase complexa e uma conexão no fibrado dos referenciais lineares, o principal objetivo é relacionar a torsão da estrutura quase complexa com a torsão de uma conexão.

Consideremos M uma variedade real de dimensão $2n$ com uma estrutura quase complexa J e J_0 a estrutura complexa canônica do espaço vetorial \mathbb{R}^{2n} , vamos construir o fibrado de bases complexas $C(M)$ e estudar conexões em $C(M)$.

Um referencial complexo em $p \in M$ é um mapa linear não singular $u: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_p M$ tal que $u \circ J_0 = J \circ u$. Dado $p \in M$ denotemos $T_p M^J$ o espaço tangente em p visto como espaço vetorial complexo com a multiplicação por escalar complexo induzida por J . Pela **proposição 6.1** podemos ver um referencial complexo em p como uma aplicação linear não singular $u: \mathbb{C}^n \rightarrow T_p M^J$. Denotamos por $C(M) \subset L(M)$ o conjunto dos referenciais complexos sobre M . O conjunto $C(M)$ é um subfibrado do fibrado principal $L(M)$ com grupo estrutural $GL(n, \mathbb{C})$, o fibrado $C(M)$ é chamado de fibrado dos referenciais complexos.

A prova de que $C(M)$ é um fibrado principal é muito parecida com a prova de que $L(M)$ é um fibrado principal sobre M (exemplo (5.2) em [20], página 55), exceto a construção das trivializações locais de $C(M)$. Para construir as trivializações locais para $C(M)$, consideremos x^1, \dots, x^{2n} coordenadas locais em $U \subset M$, vizinhança de $p_0 \in U \subset M$. Temos $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^{2n}}$ base de $T_{p_0} M$. Pela **proposição 6.1**, existem X^1, \dots, X^n elementos de $T_{p_0} M$, tal que $X^1, \dots, X^n, JX^1, \dots, JX^n$ é base de $T_{p_0} M$, com $X^\beta = \sum_\alpha a_{\alpha\beta} \partial_{x^\alpha}$, com $\beta = 1, 2, \dots, n$. Mudando a ordem se necessário, podemos supor $X^\beta = \partial_{x^\beta}$, $\beta = 1, 2, \dots, n$, pois $(a_{\alpha\beta}) \in M_{2n \times n}(\mathbb{R})$ tem posto n . Assim temos $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ base de $T_p M^J$ sobre \mathbb{C} , para todo $p \in U$.

Consideremos a base e_1, \dots, e_n de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ como espaço vetorial complexo, dado um referencial complexo $u \in C(M)$ em $p \in U$, temos que

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n c_{ij} \partial_{x^i}, \text{ com } j = 1, 2, \dots, n, c = (c_{ij}) \in GL(n, \mathbb{C}),$$

temos a correspondência $u \rightarrow (p, c)$ que fornece uma trivialização local para $C(M)$. Observamos que embora obtenhamos uma coberturas trivializante $\{U_\alpha\}$ de M e funções de transição $\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, essas funções em geral não são quase complexas.

Como $C(M)$ é um subfibrado do fibrado principal dos referenciais lineares $L(M)$ de M , segue que cada estrutura quase complexa em M dá origem a uma redução do grupo de estrutura $\text{GL}(2n, \mathbb{R})$ de $L(M)$ para $\text{GL}(n, \mathbb{C})$.

Proposição 6.27 *Dada uma variedade real M de dimensão $2n$, existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas quase complexas de M e as reduções do grupo de estrutura de $L(M)$ para $\text{GL}(n, \mathbb{C})$.*

Sabemos que em uma variedade Riemanniana M com métrica g , uma conexão linear Γ é uma conexão métrica, isto é, Γ é obtida de uma conexão no fibrado dos referenciais ortonormais $O(M)$ se, e somente se, g é paralela com respeito a Γ . Temos uma construção análoga no caso de estruturas quase complexas.

Proposição 6.28 *Para uma conexão linear Γ em uma variedade quase complexa M , as seguintes condições são equivalentes*

1. Γ é uma conexão no fibrado dos referenciais complexos $C(M)$;
2. A estrutura quase complexa J é paralela com respeito a Γ .

Demonstração. (1) \Rightarrow (2): Considerando o fibrado associado $TM^J = E = C(M) \times_\rho \mathbb{C}^n$, onde (ρ, \mathbb{C}^n) é a representação natural de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Seja $\tau = \{x_t ; -\varepsilon < t < \varepsilon\}$ uma curva diferenciável em M , e Y_t um campo vetorial em M definido ao longo de τ . Temos $Y_t = u_t \xi_t \in E_t$, onde $u_t \in C(M)$ é o levantamento horizontal de x_t , $\{\xi_t\}$ é curva diferenciável em $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ e $E_t = T_{x_t} M^J$ é a fibra em x_t . Considerando o transporte paralelo $\tau_t^{t+h}: E_{t+h} \rightarrow E_t$, como $u_t \circ J_0 = J_{x_t} \circ u_t$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, temos que

$$\tau_t^{t+h} \circ J_{x_{t+h}}(Y_{t+h}) = J_{x_t} \circ \tau_t^{t+h}(Y_{t+h}) \Rightarrow \nabla_{\dot{x}_t}(J_{x_t} Y_t) = J_{x_t}(\nabla_{\dot{x}_t}(Y_t)),$$

onde ∇ é a derivada covariante associada a conexão Γ . Assim $\nabla J = 0$

(2) \Rightarrow (1): Supondo J paralela com relação a Γ , seja ∇ a derivada covariante associada a Γ em TM , isto é, $\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$. Como J é paralela, $\nabla J = 0$, podemos definir uma distribuição horizontal em $TM^J = E = C(M) \times_\rho \mathbb{C}^n$, via derivada covariante. Existe uma correspondência biunívoca entre conexões em E e conexões em $C(M)$ (ver em [29], Capítulo 2, Seção 10), assim temos uma conexão em $C(M)$ que coincide com Γ , pois toda curva horizontal em $E = TM^J$ é horizontal em TM . ■

Uma conexão linear (ou afim) é chamada quase complexa se satisfaz uma (ou ambas) das condições da **proposição 6.28**. Da teoria geral de conexões, toda variedade (paracompacta) quase complexa admite uma conexão afim quase complexa (ver [20], página 67). O teorema seguinte garante a existência de um tipo especial de conexão.

Teorema 6.29 *Toda variedade quase complexa M admite uma conexão afim quase complexa, tal que sua torsão $T_{\bar{\nabla}}$ é dada por*

$$N_J = 8T_{\bar{\nabla}}, \quad (6.1)$$

onde N_J é a torsão da estrutura quase complexa J de M , e $\bar{\nabla}$ é a derivada covariante da conexão.

Demonstração: Segue em [21], página 143.

Temos o seguinte corolário

Corolário 6.30 *Uma variedade quase complexa M admite uma conexão afim quase complexa livre de torsão se, e somente se, sua estrutura quase complexa tem torsão nula.*

6.4 Métrica Hermitiana e métrica Kähler

Nesta seção vamos estudar o conceito de métrica Hermitiana e a 2-forma Kähler associada a tal métrica, trataremos de suas relações com a integrabilidade e paralelismo da estrutura quase complexa.

Definição 6.31 *Uma métrica Hermitiana em uma variedade quase complexa M é uma métrica Riemanniana g que é invariante pela estrutura quase complexa, no sentido de que*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \text{onde } X, Y \in \Gamma(TM).$$

Assim, uma métrica Hermitiana define um produto interno Hermitiano em cada espaço tangente $T_p M$ com respeito a estrutura complexa definida por J_p . Uma variedade quase complexa M (resp. complexa) com uma métrica Hermitiana é chamada quase Hermitiana (resp. Hermitiana)

Proposição 6.32 *Toda variedade quase complexa (paracompacta) admite uma métrica Hermitiana.*

A princípio uma métrica Riemanniana está definida apenas no fibrado tangente real podendo ser estendida unicamente sobre \mathbb{C} em todo TM . Denotando também por g esta extensão e por $T^{\mathbb{C}}M$ a complexificação fibra a fibra, pela **proposição 6.10**, temos

- $g(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{g(Z, W)}$, $\forall Z, W \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}M)$;
- $g(Z, \overline{Z}) > 0$, para todo vetor complexo $Z \neq 0$;
- $g(Z, \overline{W}) = 0$, para todo campo vetorial Z do tipo $(1, 0)$ e todo campo vetorial W do tipo $(0, 1)$.

Reciprocamente, todo tensor simétrico g satisfazendo as três condições acima é naturalmente a extensão de uma métrica Hermitiana de M .

Como foi visto na **seção 6.1**, associado a um produto interno Hermitiano em um espaço vetorial V , temos uma forma bilinear anti-simétrica definida em V . De modo análogo, podemos construir uma 2-forma em M , chamada 2-forma fundamental ou 2-forma Kähler.

Definição 6.33 *Seja M uma variedade quase Hermitiana com métrica g e estrutura quase complexa J , definimos a 2-forma fundamental ω em M por*

$$\omega(X, Y) = g(X, JY), \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

da invariância de g , segue que $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Em geral uma estrutura quase complexa J associada a uma variedade quase Hermitiana não é paralela com relação a conexão de Levi-Civita definida pela métrica Hermitiana. A seguinte proposição estabelece uma relação entre as diferentes estruturas que definem uma variedade quase Hermitiana.

Proposição 6.34 *Seja M uma variedade quase Hermitiana com estrutura quase complexa J e métrica Hermitiana g . Seja ω a 2-forma fundamental associada a g , N_J a torsão de J e ∇ a derivada covariante associada a conexão de Levi-Civita definida por g . Então, dados campos vetoriais X, Y , e Z em M , temos*

$$4g((\nabla_X J)Y, Z) = 6d\omega(X, JY, JZ) - 6d\omega(X, Y, Z) + g(N_J(Y, Z), JX). \quad (6.1)$$

Como aplicação, temos o seguinte teorema

Teorema 6.35 *Para uma variedade quase Hermitiana M com estrutura quase complexa J e métrica Hermitiana g , as seguintes condições são equivalentes*

1. *A conexão de Levi-Civita definida por g é quase complexa ($\nabla J \equiv 0$);*
2. *A estrutura quase complexa não tem torsão ($N_J \equiv 0$) e a 2-forma fundamental ω é fechada ($d\omega \equiv 0$).*

Como corolário imediato segue que

Corolário 6.36 *Para uma variedade Hermitiana M , as seguintes condições são equivalentes*

1. *A conexão de Levi-Civita é quase complexa ($\nabla J \equiv 0$);*
2. *A 2-forma fundamental ω é fechada ($d\omega \equiv 0$).*

Uma métrica Hermitiana em uma variedade (quase) complexa é chamada métrica (quase) Kähler se a 2-forma fundamental é fechada. Uma variedade (quase) complexa com uma métrica (quase) Kähler é chamada variedade (quase) Kähler.

Introduziremos agora o conceito de estrutura Hermitiana e estrutura Kähler. Primeiro consideremos a seguinte definição.

Definição 6.37 *Uma estrutura Hermitiana em uma variedade quase complexa (M, J) é um produto Hermitiano H nas fibras de $T^{(1,0)}M = TM$ que varia suavemente, associando a cada $p \in M$ um produto Hermitiano $H_p: TM \times TM \rightarrow C^\infty(M)$, satisfazendo*

- H_p é \mathbb{C} -linear na primeira variável;
- $H_p(X, Y) = \overline{H_p(Y, X)}$;
- $H_p(X, X) > 0$, para todo $X \neq 0$ (não-degenerado).

Dada uma estrutura Hermitiana H em (M, J) podemos fazer sua decomposição em parte real e imaginária obtendo para $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$H(X, Y) = \frac{(H(X, Y) + H(Y, X))}{2} + i \frac{(H(X, Y) - H(Y, X))}{2i} = h(X, Y) + i\omega(X, Y),$$

onde h é uma forma bilinear simétrica positiva definida e ω é uma forma bilinear anti-simétrica. Temos o seguinte resultado.

Proposição 6.38 *Seja H uma estrutura Hermitiana em (M, J) , denotando por $\text{Re}(H) = h$ e $\omega = \text{Im}(H)$ a parte real e imaginária de H , respectivamente, segue que*

1. $h(JX, JY) = h(X, Y)$,
2. $h(X, JY) = \omega(X, Y)$

Demonstração: Segue em [34], página 6.

Assim vemos que a partir de uma estrutura Hermitiana H obtemos uma métrica hermitiana h tomando sua parte real $\text{Re}(H)$ com 2-forma Kähler ω dada pela parte imaginária $\text{Im}(H)$. De fato o conceito de métrica Hermitiana e estrutura Hermitiana são equivalentes, visto que se g é uma métrica Riemanniana qualquer em (M, J) podemos definir a métrica Hermitiana

$$h(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY),$$

obtendo assim a estrutura Hermitiana $H(X, Y) = h(X, Y) + ih(X, JY)$.

Uma estrutura Hermitiana H em uma variedade quase complexa (complexa) (M, J) é chamada estrutura quase Kähler (Kähler) se $d\omega = 0$. Na **seção 9.3** vamos construir uma estrutura **pseudo-Kähler** em uma variedade complexa. O nome pseudo-Kähler está relacionado com o fato de que a métrica Hermitiana associada é uma pseudo-métrica, neste caso chamamos a 2-forma Kähler associada de forma pseudo-Kähler.

Seja (M, J) uma variedade cocomplexa de dimensão n , $(N_J \equiv 0)$, e z^1, \dots, z^n coordenadas locais, onde $z^k = x^k + iy^k$, $k = 1, \dots, n$. Então, para $dz^k = dx^k + idy^k$ e $d\bar{z}^k = dx^k - idy^k$, tomamos

$$\partial_{z^k} = \frac{1}{2}(\partial_{x^k} - i\partial_{y^k}), \quad \partial_{\bar{z}^k} = \frac{1}{2}(\partial_{x^k} + i\partial_{y^k}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Segue que $\partial_{z^1}, \dots, \partial_{z^n}$ (resp. $\partial_{\bar{z}^1}, \dots, \partial_{\bar{z}^n}$) formam uma base para $T_p^{1,0}M$ (resp. $T_p^{0,1}M$) para todo p na vizinhança coordenada, e dz^1, \dots, dz^n (resp. $d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n$) formam uma base local para $\bigwedge^{1,0}(M)_{\mathbb{C}}$ (resp. $\bigwedge^{0,1}(M)_{\mathbb{C}}$).

Fixemos a seguinte notação para variedade complexa (M, J) com z^1, \dots, z^n coordenadas locais:

- $Z_\alpha = \partial_{z^\alpha}$, $Z_{\bar{\alpha}} = \partial_{\bar{z}^\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$.

Dada uma métrica Hermitiana g em M , podemos estender o produto interno Hermitiano em cada espaço tangente $T_p M$ a uma forma bilinear simétrica em $T_p^{\mathbb{C}} M$, ainda denotada por g , temos

- $g_{AB} = g(Z_A, Z_B)$, $A, B = 1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{n}$.

- $g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$, $\alpha = 1, \dots, n$,

e a matriz $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ é uma matriz $n \times n$ é uma matriz Hermitiana. Denotamos a métrica g da seguinte forma

- $ds^2 = 2 \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$.

Pela proposição (2.12), a 2-forma fundamental é denotada da seguinte forma

- $\omega = -2i \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$.

Vamos agora explorar o exemplo de variedade Kähler definido por $\mathbb{C}P^n$

Exemplo 6.39 Consideremos agora a Grassmaniana complexa $G_{1,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^n$, de acordo com as construção do **exemplo 6.26**, para todo $\alpha = 1, \dots, n+1$ temos $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ carta local, $\varphi_\alpha: U_\alpha \subset \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}$. Dado $S \in U_\alpha$, $S = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v\}$, onde $v \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, como $z^\alpha | S \neq 0 \Rightarrow z^\alpha(v) \neq 0$. Assim, denotando $v = \sum_{k=1}^{n+1} t^k e_k$, temos que

$$\varphi_\alpha(S) = \left(\frac{t^1}{t^\alpha}, \dots, \frac{t^{\alpha-1}}{t^\alpha}, \frac{t^{\alpha+1}}{t^\alpha}, \dots, \frac{t^{n+1}}{t^\alpha} \right) \in \mathbb{C}^{n+1}, S \in U_\alpha.$$

Denotemos por $w_\alpha^1, \dots, \widehat{w_\alpha^\alpha}, \dots, w_\alpha^{n+1}$ as coordenadas locais em U_α , onde $w_\alpha^k = \frac{t^k}{t^\alpha}$, $k = 1, \dots, n+1$ e $\alpha = 1, \dots, n+1$. Agora, para um aberto coordenado U_α , consideremos a função $f_\alpha: U \subset \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f_\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} w_\alpha^k \bar{w}_\alpha^k$. Então

$$f_\alpha = f_\beta w_\alpha^\beta \bar{w}_\alpha^\beta, \text{ em } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Agora, pelas seguintes observações:

- As funções w_α^β são holomorfas em U_α em particular são holomorfas em $U_\alpha \cap U_\beta$;
- $\log f_\alpha = \log f_\beta + \log w_\alpha^\beta \bar{w}_\alpha^\beta \Rightarrow \partial \bar{\partial} \log f_\alpha = \partial \bar{\partial} \log f_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$, pois $\partial_{w_\alpha^l} \partial_{\bar{w}_\alpha^l} (\log w_\alpha^\beta \bar{w}_\alpha^\beta) = 0$, $l = 1, \dots, n+1$, em $U_\alpha \cap U_\beta$

podemos definir

$$\omega = -4i \partial \bar{\partial} \log f_\alpha \text{ em } U_\alpha.$$

Segue das observações que ω é uma 2-forma globalmente definida. Temos ainda $\omega \in \bigwedge^{1,1}(\mathbb{C}P^n)_{\mathbb{C}}$ e $d\omega = 0$, pois $d = \partial + \bar{\partial}$. Apartir de ω , obtemos uma métrica

$$g(X, Y) = \omega(JX, Y)$$

Consideremos as coordenadas locais $w_\alpha^1, \dots, \widehat{w_\alpha^\alpha}, \dots, w_\alpha^{n+1}$ em U_α . Denotemos por $h_\alpha = \log f_\alpha = \log(\sum_k w_\alpha^k \bar{w}_\alpha^k)$, temos

$$\partial_{w_\alpha^s} \partial_{\bar{w}_\alpha^l} (h_\alpha) = \frac{\delta_{sl} - w_\alpha^l \bar{w}_\alpha^s}{(1 + \sum_{k \neq \alpha} w_\alpha^k \bar{w}_\alpha^k)^2}, \text{ onde } s, l = 1, \dots, n,$$

omitindo o somatório para não carregar a notação, segue que

$$\omega = -4i \partial_{w_\alpha^s} \partial_{\bar{w}_\alpha^l} (h_\alpha) dw_\alpha^s \wedge d\bar{w}_\alpha^l = -2i (2 \partial_{w_\alpha^s} \partial_{\bar{w}_\alpha^l} (h_\alpha)) dw_\alpha^s \wedge d\bar{w}_\alpha^l,$$

logo $g_{s\bar{l}} = 2 \partial_{w_\alpha^s} \partial_{\bar{w}_\alpha^l} (h_\alpha)$, onde $s, l = 1, \dots, n$.

Assim, temos a expressão local

$$ds^2 = 4 \frac{\delta_{sl} - w_\alpha^l \bar{w}_\alpha^s}{(1 + \sum_{k \neq \alpha} w_\alpha^k \bar{w}_\alpha^k)^2} dw_\alpha^s \otimes d\bar{w}_\alpha^l,$$

esta métrica é chamada métrica de Fubini-Study. Por construção obtemos uma métrica Kähler em $\mathbb{C}P^n$.

Seja (M, g, J) uma variedade quase Hermitiana. A partir do conceito de conexão métrica associado a métrica Hermitiana g , que é uma métrica Riemanniana, e das curvaturas associadas a tal conexão, podemos definir tensores em M que estão relacionados com o tensor J .

Definição 6.40 *Seja (M, g, J) uma variedade quase Hermitiana. Dado $X \in T_pM$ unitário, definimos a **curvatura seccional holomorfa** na direção X por*

$$H(X) = K(X, JX),$$

onde $K(X, JX)$ é a curvatura seccional do plano gerado por $\{X, JX\}$.

Podemos definir um novo tensor semelhante ao tensor de Ricci para uma variedade quase complexa, que nos fornecerá o conceito de **J -curvatura de Ricci**.

Definição 6.41 *Seja (M, J) uma variedade quase complexa. Definimos o tensor **J -Ricci** r^J por*

$$r^J(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow -J(R(Z, X)JY)),$$

onde $X, Y, Z \in T_pM$. Assim, a J -curvatura de Ricci na direção $X \in T_pM$ é dada por $r^J(X) = r^J(X, X)$.

Observamos que no caso Kähler o tensor r^J coincide com o tensor de Ricci, visto que $\nabla J \equiv 0$. De maneira análoga ao caso Riemanniano temos a seguinte definição.

Definição 6.42 *Seja (M, J, g) uma variedade quase Hermitiana. Definimos a **J -curvatura escalar** $s^J = \text{tr}_g(r^J)$.*

Neste trabalho faremos um estudo da curvatura holomorfa e J -curvatura de Ricci do grupo de Lie complexo $SL(2, \mathbb{C})$.

CAPÍTULO 7

O RECOBRIMENTO DUPLO DE $SO^+(1, 3)$ POR $SL(2, \mathbb{C})$

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar o homomorfismo entre $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO(1, 3)$, a partir disso utilizaremos a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$ e suas propriedades algébricas para obter informações sobre as curvaturas. De fato, verificaremos que o grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$ é recobrimento duplo da componente conexa $SO^+(1, 3)$ do grupo de Lorentz $O(1, 3)$.

7.1 O grupo de Lorentz $SO^+(1, n)$

Nesta seção vamos estudar a estrutura do grupo de Lie $SO^+(1, n)$, conhecido como **grupo de Lorentz restrito**, e suas relações com a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, n)$.

Consideremos a matriz $I_{p,q}$ de ordem $p \times q$ definida por

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

onde I_p e I_q são matrizes identidade de ordem p e q respectivamente. Sendo $n = p + q$, a matriz $I_{p,q}$ pode ser vista como matriz da forma bilinear simétrica em \mathbb{R}^n

$$B_{p,q}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{\alpha=1}^p x_\alpha y_\alpha - \sum_{\beta=p+1}^n x_\beta y_\beta \quad (7.1)$$

com a forma quadrática associada

$$Q_{p,q}((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{\alpha=1}^p x_\alpha^2 - \sum_{\beta=p+1}^n x_\beta^2. \quad (7.2)$$

Quando temos $p = 1$ e $q = 3$ a forma quadrática $Q_{1,3}$ é conhecida como métrica de Lorentz. Denotando $X = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, temos

$$Q_{1,3}(X) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

O espaço \mathbb{R}^4 com a métrica de Lorentz é conhecido em Física como **espaço de Minkowski**, e muitas vezes denotado por $\mathbb{R}^{1,3}$.

Consideremos $O(p, q) \subset GL(n, \mathbb{R})$ o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p,q}$ com relação a $Q_{p,q}$, isto é

$$O(p, q) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T I_{p,q} A = I_{p,q}\},$$

temos o subgrupo de $O(p, q)$ das isometrias de determinante 1, denotemos

$$SO(p, q) = \{A \in O(p, q) \mid \det(A) = 1\}.$$

Como $I_{p,q}^T = I_{p,q}$, segue que $A \in O(p, q) \Rightarrow I_{p,q} = (A^T I_{p,q} A)^T = A^T I_{p,q} A = A^T I_{p,q} (A^T)^T \Rightarrow A^T \in O(p, q)$, assim vemos que $O(p, q)$ é fechado para a transposição.

Denotando por A_α o vetor coluna correspondente a α -ésima coluna da matriz $A \in O(p, q)$, o que basicamente diferencia $SO(p, q)$ do conjunto das matrizes ortonormais usual é que podemos ter matrizes ortonormais com relação a $Q_{p,q}$ tal que $Q_{p,q}(A_\alpha) = -1$. O subgrupo $SO(p, q)$ tem duas componentes conexas, denotemos por $SO^+(p, q) = SO_o(p, q)$ a componente conexa do elemento neutro (identidade), considerando o caso $p = 1$ e $q = n$ e denotando

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_{1,n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_T = -I_{1,n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

temos $O(1, n)$ escrito como união disjunta de suas componentes conexas

$$O(1, n) = SO^+(1, n) \cup \Lambda_P SO^+(1, n) \cup \Lambda_T SO^+(1, n) \cup \Lambda_P \Lambda_T SO^+(1, n),$$

e temos a decomposição de $SO(1, n)$

$$SO(1, n) = SO^+(1, n) \cup \Lambda_P \Lambda_T SO^+(1, n),$$

vamos mostrar que de fato se $A = (a_{ij}) \in SO^+(1, n)$, então temos $a_{11} \geq 1$.

A partir de agora trabalharemos apenas com o caso $p = 1$ e $q = n$, e mais especificamente com o grupo de Lie $SO^+(1, n)$ com álgebra de Lie denotada por $\mathfrak{so}(1, n)$, que é a álgebra de Lie de $O(1, n)$. Tomando uma curva diferenciável $A: \mathbb{R} \rightarrow O(1, n)$ satisfazendo $A(0) = I$. Pela defíno de $O(1, n)$, temos

$$A(t)^T I_{1,n} A(t) = I_{1,n} \Rightarrow A(t)^T I_{1,n} = I_{1,n} A(t)^{-1}, \forall t \in \mathbb{R},$$

assim podemos obter o vetor tangente no elemento neutro calculando $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t)$, segue que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t) = -I_{1,n} \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t) \right)^T I_{1,n},$$

resolvendo esta equação obtemos $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t) \in T_e(O(1, n)) = \mathfrak{so}(1, n)$, e a seguinte caracterização

$$\mathfrak{so}(1, n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & D \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^n = M_{n \times 1}(\mathbb{R}), D = -D^T \right\}. \quad (7.3)$$

Denotando

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = -D^T \right\}, \text{ e } \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & 0 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^n = M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \right\},$$

obtemos a decomposição de Cartan $\mathfrak{so}(1, n) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$, onde \mathfrak{t} é uma subálgebra e \mathfrak{p} é um subespaço vetorial. Em termos do automorfismo involutivo $\theta: \mathfrak{so}(1, n) \rightarrow \mathfrak{so}(1, n)$, $\theta: A \rightarrow -A^T$, podemos escrever $\mathfrak{so}(1, n)$ como soma de autoespaços de θ

$$\mathfrak{t} = \{A \in \mathfrak{so}(1, n) \mid \theta(A) = A\} \text{ e } \mathfrak{p} = \{A \in \mathfrak{so}(1, n) \mid \theta(A) = -A\},$$

temos as seguintes relações para o colchete

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subseteq \mathfrak{t}, \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{t}, \quad (7.4)$$

a subálgebra \mathfrak{t} é isomorfa a álgebra $\mathfrak{so}(n)$, e o subespaço \mathfrak{p} se identifica de maneira natural com o \mathbb{R}^n . Pelo **teorema 3.24**, existe um difeomorfismo $K \times \mathfrak{p} \rightarrow \text{SO}^+(1, n)$ dado por $(k, X) \rightarrow k \exp(X)$, onde $K = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle = \text{SO}(n)$, o que nos fornece a decomposição $\text{SO}^+(1, n) = K \exp(\mathfrak{p})$.

Consideremos os seguintes fatos:

- Existem isomorfismos $\Phi: \text{SO}(n) \rightarrow K = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$ e $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{p}$, tal que

$$\Phi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \forall B \in \text{SO}(n), \text{ e } \sigma(v) = \begin{pmatrix} 0 & v^T \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n;$$

- Como $K = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$ e $[\mathfrak{t}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, temos que $Ad(k)\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}, \forall k \in K$.

Assim, podemos definir a ação de K em \mathfrak{p} por $(\Phi(B), \sigma(v)) \rightarrow Ad(\Phi(B))\sigma(v) = \Phi(B)\sigma(v)\Phi(B)^{-1} = \Phi(B)\sigma(v)\Phi(B^T)$, pois $B^{-1} = B^T$. Temos

$$(\Phi(B), \sigma(v)) \rightarrow \Phi(B)\sigma(v)\Phi(B^T) = \begin{pmatrix} 0 & (Bv)^T \\ Bv & 0 \end{pmatrix} = \sigma(Bv), \quad (7.5)$$

Agora, dado $A \in \text{SO}^+(1, n) = K \exp(\mathfrak{p})$, temos $A = \Phi(B) \exp(\sigma(v))$, com $B \in \text{SO}(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Observe que $\exp: \mathfrak{so}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ é sobrejetora (ver [14], página 24), assim temos

$$\Phi(B) = \Phi(\exp(Z)) = \exp(d\Phi_e Z), \text{ para algum } Z \in \mathfrak{so}(n).$$

Pela transitividade da ação de $\text{SO}(n)$ em S^{n-1} , existe $g = \Phi(Q) \in K$, tal que

$$\text{Ad}(g)\sigma(e_1) = \sigma(Qe_1) = \sigma\left(\frac{v}{\|v\|}\right).$$

Denotando $\alpha = \|v\|$, temos $A = \Phi(B) \exp(\text{Ad}(g)\sigma(\alpha e_1))$. Observamos agora que

$$\exp(\sigma(\alpha e_1)) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$A = (a_{ij}) = \Phi(B) \exp(\text{Ad}(\Phi(Q))\sigma(\alpha e_1)) = \Phi(B)\Phi(Q) \exp(\sigma(\alpha e_1))\Phi(Q^T),$$

como

$$\Phi(B)\Phi(Q) = \Phi(BQ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & BQ \end{pmatrix}, \text{ e } \Phi(Q^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix},$$

segue da expressão de $\exp(\sigma(\alpha e_1))$ que $a_{11} = \cosh(\alpha) \geq 1$, temos a seguinte proposição

Proposição 7.1 *Todo elemento $A = (a_{ij}) \in \text{SO}^+(1, n)$ pode ser escrito da forma*

$$A = (a_{ij}) = \Phi(BQ) \exp(\sigma(\alpha e_1))\Phi(Q^T), \text{ com } a_{11} \geq 1, \quad (7.6)$$

onde $\Phi: \text{SO}(n) \rightarrow K = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$ e $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{p}$, são isomorfismos tais que

$$\Phi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \forall B \in \text{SO}(n), \text{ e } \sigma(v) = \begin{pmatrix} 0 & v^T \\ v & 0 \end{pmatrix}, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Segue diretamente dos comentários anteriores. ■

7.2 O homomorfismo entre $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ e $\text{SO}^+(1, 3)$

Nesta seção vamos construir um homomorfismo entre os grupos de Lie $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ e $\text{SO}^+(1, 3)$, o que nos fornecerá um isomorfismo sobre \mathbb{R} entre as álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{so}(1, 3)$. Posteriormente vamos estudar a geometria da variedade complexa subjacente ao grupo de Lie $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ utilizando esse isomorfismo entre álgebras de Lie reais.

O grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$ é recobrimento duplo de $SO^+(1, 3)$ quando visto como grupo de Lie real, isto é, existe um homomorfismo de grupos de Lie $\varphi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(1, 3)$ sobrejetor, tal que $SL(2, \mathbb{C})/Ker(\varphi) \simeq SO^+(1, 3)$, onde $Ker(\varphi) = \{\pm I\}$. Vamos exibir explicitamente este homomorfismo.

Consideremos o isomorfismo linear h entre o espaço $\mathbb{R}^{1,3}$ e $\mathbf{H}(2)$, espaço das matrizes Hermitianas de ordem 2×2 , definido por

$$h: (t, x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} t+x & y-iz \\ y+iz & t-x \end{pmatrix},$$

cuja a inversa é

$$h^{-1}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}(a+d, c+\bar{c}, i(\bar{c}-c), a-d)$$

Pela definição de h , $\forall v \in \mathbb{R}^{1,3}$, $h(v)^* = \overline{h(v)}^T = h(v)$ (auto-adjunta). Agora, para toda matriz $A \in SL(2, \mathbb{C})$, definamos $l_A: \mathbf{H}(2) \rightarrow \mathbf{H}(2)$ por $l_A: S \rightarrow ASA^*$, obtemos assim uma ação de $SL(2, \mathbb{C})$ em $\mathbf{H}(2)$, tal que $(A, S) \rightarrow l_A(S)$. Utilizando a bijeção linear h , podemos definir o mapa $\varphi_A = h \circ l_A \circ h^{-1}: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$. De fato, temos uma ação de $SL(2, \mathbb{C})$ em $\mathbb{R}^{1,3}$, definida por $(A, v) \rightarrow \varphi_A(v)$.

Proposição 7.2 *Para todo $A \in SL(2, \mathbb{C})$, temos que $\varphi_A: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ é isometria de $Q_{1,3}$.*

Demonstração. Dado $v \in \mathbb{R}^{1,3}$, temos $Q_{1,3}(v, v) = \det(h(v))$. Assim, dado $A \in SL(2, \mathbb{C})$ segue que $Q_{1,3}(\varphi_A(v), \varphi_A(v)) = \det((h \circ \varphi_A)(v))$, pela definição de φ_A e considerando que $\det(A) = 1$, temos

$$Q_{1,3}(\varphi_A(v), \varphi_A(v)) = \det(Ah(v)A^*) = \det(h(v)) = Q_{1,3}(v, v).$$

Assim, φ_A é isometria de $Q_{1,3}$. ■

Agora, dados $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ e $S \in \mathbf{H}(2)$, temos

$$l_{AB}(S) = (AB)S(AB)^* = A(BSB^*)A^* = l_A(BSB^*) = (l_A \circ l_B)(S),$$

segue que

$$\varphi_{AB} = h^{-1} \circ l_{AB} \circ h = h^{-1} \circ l_A \circ l_B \circ h \Rightarrow \varphi_{AB} = (h^{-1} \circ l_A \circ h)(h^{-1} \circ l_B \circ h) = \varphi_A \circ \varphi_B,$$

segue que $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B \Rightarrow \varphi$ é um homomorfismo. Além disso, φ é contínuo por construção.

Seja $A \in SL(2, \mathbb{C})$, pela *decomposição de Schur* existe uma matriz B ($BB^* = I$), tal que

$$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B^*,$$

tomando uma curva $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$, satisfazendo $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(1) = a$, e uma curva $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo $\beta(0) = 0$ e $\beta(1) = b$, obtemos uma curva em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ definida por

$$\Lambda(t) = B \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ 0 & \alpha(t)^{-1} \end{pmatrix} B^*,$$

de modo que $\Lambda(0) = I$ e $\Lambda(1) = A \Rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ é conexo por caminhos, e portanto conexo. Assim, o homomorfismo φ leva $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ em um subgrupo conexo de $\text{SO}^+(1, 3)$.

Nosso objetivo agora é mostrar que o homomorfismo φ é de fato sobrejetor e $\text{Ker}(\varphi) = \{\pm I\}$.

Proposição 7.3 *O homomorfismo, $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}^+(1, 3)$, é sobrejetor e seu núcleo é $\{I, -I\}$.*

Demonstração. Pela **proposição 7.1** da seção anterior, o grupo $\text{SO}^+(1, 3)$ é gerado por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \text{ onde } P \in \text{SO}(3),$$

e matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) & 0 & 0 \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, nosso trabalho é mostrar que os geradores possuem pré-imagem em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Para matrizes geradoras do segundo tipo, os elementos da forma

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\alpha} \end{pmatrix},$$

são pré-imagem. Para matrizes do primeiro tipo, recordemos que o grupo dos quaternions unitários $S_{\mathbb{H}}^3$, pode ser identificado com o grupo $\text{SU}(2)$ das matrizes unitárias especiais através do mapa

$$a1 + bi + cj + dk \rightarrow \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. A álgebra dos quatérnions \mathbb{H} , é a algebra real das matrizes acima, sem a restrição $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ e \mathbb{R}^3 pode ser mergulhado em \mathbb{H} identificando seus elementos com os quatérnions puros, isto é, quando $a = 0$. Podemos escrever

$$\begin{pmatrix} ib & c + id \\ -c + id & -ib \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} b & d - ic \\ d + ic & -b \end{pmatrix} = ih(0, b, d, c),$$

onde $h: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbf{H}(2)$ é o isomorfismo linear definido anteriormente.

Assim, temos uma ação por isometrias de $SU(2) = S_{\mathbb{H}}^3$ em $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{H}$, $(g, X) \rightarrow gX\bar{g}$, observando que se $q \in SU(2) = S_{\mathbb{H}}^3 \Rightarrow \bar{q} = q^{-1}$, onde $\bar{q} = a1 - bi - cj - dk$ para $q = a1 + bi + cj + dk$. Obtemos assim um homomorfismo sobrejetor $\rho: SU(2) \rightarrow SO(3)$ com $\ker(\rho) = \{I, -I\}$.

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & P \end{pmatrix}$ uma isometria de $\mathbb{R}^{1,3}$ que fixa a primeira coordenada, como $\mathbb{R}^{1,3} = \mathbf{H}(2)$, existe $g \in SU(2) = S_{\mathbb{H}}^3$, $g^* = \bar{g}$, tal que $h^{-1}(gh(X)\bar{g}) = AX$, $\forall X \in \mathbb{R}^{1,3} \Rightarrow \varphi_g = h^{-1} \circ l_g \circ h = A \Rightarrow \varphi$ é sobrejetora.

Suponha agora que $\varphi_g = I \Rightarrow gSg^* = S$, $\forall S \in \mathbb{R}^{1,3} = \mathbf{H}(2)$, em partidular para $S = I \Rightarrow gg^* = I \Rightarrow g \in SU(2)$. Assim, $gS = Sg$ para todo $S \in \mathbb{R}^{1,3}$, tomando

$$S = \begin{pmatrix} t + x & 0 \\ 0 & t - x \end{pmatrix},$$

com $t + x \neq t - x \Rightarrow g$ é diagonal e unitária $\Rightarrow g = \pm I$. ■

Obtemos assim um homomorfismo contínuo, e portanto diferenciável, $\varphi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(1, 3)$. Como $\ker(\varphi) = \{\pm I\}$, temos um isomorfismo $\varphi_*: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)$. Em termos dos geradores dos grupos $SO(1, 3)$ e $SL(2, \mathbb{C})$, temos a seguinte correspondência definida por φ

$$\varphi: \begin{pmatrix} \cosh(\frac{\theta}{2}) & \sinh(\frac{\theta}{2}) \\ \sinh(\frac{\theta}{2}) & \cosh(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) & 0 & 0 \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} \cosh(\frac{\theta}{2}) & i\sinh(\frac{\theta}{2}) \\ -i\sinh(\frac{\theta}{2}) & \cosh(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & 0 & \sinh(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\theta) & 0 & \cosh(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} e^{\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & 0 & 0 & \sinh(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta) & 0 & 0 & \cosh(\theta) \end{pmatrix},$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & i\sin(\frac{\theta}{2}) \\ i\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Este homorfismo nos permitirá estudar propriedades geométricas da variedade complexa subjacente ao grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$, munida da estrutura complexa invariante canônica da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

CAPÍTULO 8

CURVATURAS EM $SL(2, \mathbb{C})$

Nosso objetivo nesse capítulo é explorar os conceitos de curvatura holomorfa e J_0 -curvatura de Ricci no grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$, utilizando a identificação de sua álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ com a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$ do grupo $SO^+(1, 3)$. Começamos estudando as características algébricas da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$ e em seguida estudando a conexão de Levi-Civita de uma métrica invariante à esquerda fixada.

8.1 Preliminares algébricas em $\mathfrak{so}(1, 3)$

Como visto na seção anterior, o grupo $O(1, 3)$ tem quatro componentes conexas, a componente conexa da identidade do grupo de Lorentz $O(1, 3)_o$ é denotado por $SO^+(1, 3)$, assim temos que $Lie(O(1, 3)) = \mathfrak{so}(1, 3)$, observando que

$$SO(1, 3) = \{A \in O(1, 3) \mid \det(A) = 1\},$$

e que o grupo $SO^+(1, 3)$ pode ser visto como

$$SO^+(1, 3) = \{A = (a_{ij}) \in SO(1, 3) \mid a_{11} \geq 1\}.$$

De acordo com (7.3), a álgebra de Lie de $SO^+(1, 3)$ é caracterizada da seguinte forma

$$\mathfrak{so}(1, 3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & D \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^3, D = -D^T \right\},$$

assim, se $A \in \mathfrak{so}(1, 3)$, então

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Temos que $\text{SO}^+(1, 3) = \langle \exp(\mathfrak{so}(1, 3)) \rangle$.

Como visto, $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ é recobrimento duplo de $\text{SO}^+(1, 3)$, isto é, existe um homomorfismo de grupos de Lie $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}^+(1, 3)$ sobrejetor, tal que $\text{SL}(2, \mathbb{C})/\text{Ker}(\varphi) \simeq \text{SO}^+(1, 3)$, onde $\text{Ker}(\varphi) = \{\pm I\}$. Assim, $\varphi_*: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)$ é isomorfismo de álgebras de Lie, onde $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ é vista como álgebra de Lie sobre \mathbb{R} .

Tomando como base, sobre \mathbb{C} , para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

temos as seguintes relações

$$[Z_1, Z_2] = Z_3, [Z_1, Z_3] = Z_2, [Z_2, Z_3] = Z_1. \quad (8.1)$$

Considerando o automorfismo $J_0: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $J_0X = iX$, $\forall X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, segue que $\{Z_1, Z_2, Z_3, J_0Z_1, J_0Z_2, J_0Z_3, \}$ forma uma base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ como álgebra de Lie sobre \mathbb{R} . Para obter as relações de colchetes para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ como álgebra de Lie sobre \mathbb{R} , basta observar que

$$J_0[Z_\alpha, Z_\beta] = [J_0Z_\alpha, Z_\beta] = [Z_\alpha, J_0Z_\beta], \forall \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}. \quad (8.2)$$

Os grupos $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ e $\text{SO}^+(1, 3)$ são conexos, cada gerador de $\text{SO}^+(1, 3)$ se corresponde através de φ com um gerador de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Do homomorfismo $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}^+(1, 3)$ segue que

$$\varphi_*: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \in \mathfrak{so}(1, 3),$$

$$\varphi_*: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2 \in \mathfrak{so}(1, 3),$$

$$\varphi_*: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_3 \in \mathfrak{so}(1, 3),$$

$$\varphi_*: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = F_4 \in \mathfrak{so}(1, 3),$$

$$\varphi_*: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_5 \in \mathfrak{so}(1, 3),$$

$$\varphi_*: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_6 \in \mathfrak{so}(1, 3).$$

O conjunto $\{E_1, E_2, E_3, F_4, F_5, F_6\}$ é uma base de $\mathfrak{so}(1, 3)$, sobre \mathbb{R} . Para encontrar as relações de colchetes de $\mathfrak{so}(1, 3)$, observamos que

$$[V, W] = [\varphi_*X, \varphi_*Y] = \varphi_*[X, Y], \forall V, W \in \mathfrak{so}(1, 3), \quad (8.3)$$

onde $X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Calcularemos todas as constantes de estrutura de $\mathfrak{so}(1, 3)$ posteriormente.

8.2 Métricas invariantes e estrutura complexa em $\mathrm{SO}^+(1, 3)$

Primeiramente observamos que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ é uma variedade complexa e que J_0 definido anteriormente esta relacionado com uma estrutura quase complexa invariante a esquerda na variedade real subjacente a $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ que denotamos por M^6 , isto é, uma estrutura complexa na álgebra de Lie determina uma estrutura quase complexa no grupo de Lie associado, e uma estrutura quase complexa em um grupo de Lie determina uma estrutura complexa na álgebra de Lie. No caso $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ temos J_0 integrável.

Como vamos trabalhar com tensores invariantes a esquerda, os estudos se seguem no nível da álgebra de Lie. Apartir do que foi estabelecido anteriormente, temos os seguintes fatos:

- O automorfismo $J_0: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $J_0X = iX$ com $J_0^2 = -I$, define uma estrutura complexa integrável em $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, visto como variedade real de dimensão 6, que denotaremos muitas vezes por M^6 .

• Do isomorfismo $\varphi_*: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)$ segue que

1. $\varphi_*: Z_1 \rightarrow E_1, \varphi_*: Z_2 \rightarrow E_2, \varphi_*: Z_3 \rightarrow E_3.$
2. $\varphi_*: J_0 Z_1 \rightarrow F_4, \varphi_*: J_0 Z_2 \rightarrow F_5, \varphi_*: J_0 Z_3 \rightarrow F_6.$

Podemos definir $J = \varphi_* \circ J_0 \circ \varphi_*^{-1}: \mathfrak{so}(1, 3) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3), J^2 = -I.$ Temos então que J como uma estrutura complexa em $\mathfrak{so}(1, 3),$ conseqüentemente temos uma estrutura quase complexa invariante em $SO^+(1, 3).$ A estrutura complexa J induzida por J_0 é integrável porque J_0 é integrável e $J \circ \varphi_* = \varphi_* \circ J_0.$ Além disso, temos que

$$F_4 = JE_1, F_5 = JE_2, F_6 = JE_3. \quad (8.1)$$

Podemos então determinar as relações de colchetes de $\mathfrak{so}(1, 3)$ via

$$J \circ \varphi_* = \varphi_* \circ J_0 \text{ e } [E_1, E_2] = E_3, [E_1, E_3] = E_2, [E_2, E_3] = E_1 \quad (8.2)$$

Apartir da base $\{E_1, E_2, E_3, JE_1, JE_2, JE_3\}$ definimos um produto interno em $\mathfrak{so}(1, 3)$ que faz essa base ortonormal, isto é

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{so}(1, 3) \times \mathfrak{so}(1, 3) \rightarrow \mathbb{R}, \langle E_\alpha, E_\beta \rangle = \langle JE_\alpha, JE_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (8.3)$$

O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{so}(1, 3)$ define uma métrica Hermitiana invariante a esquerda em $SO^+(1, 3),$ conseqüentemente uma métrica invariante a esquerda em $SL(2, \mathbb{C})$ via *pullback* $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle.$ Neste capítulo vamos estudar as curvaturas da métrica invariante $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle.$ Denotaremos sempre por $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ para enfatizar que este produto interno faz da base dada pelos vetores $e_\alpha = E_\alpha, e_{\alpha+3} = JE_\alpha, \alpha = 1, 2, 3,$ uma base ortonormal.

Através da identificação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ com $\mathfrak{so}(1, 3),$ podemos explorar as curvaturas holomorfas e J_0 -curvaturas de Ricci de $SL(2, \mathbb{C})$ da conexão de Levi-Civita associada a métrica invariante a esquerda $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ver **(8.3)**), visto que essas entidades geométricas dependem da estrutura da álgebra de Lie.

8.3 Conexões e curvaturas em $SO^+(1, 3)$ e $SL(2, \mathbb{C})$

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita da métrica invariante associada ao produto interno definido anteriormente em **(8.3)**. Utilizando a fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle,$$

podemos então determinar ∇ através das constantes de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$

Para $e_\alpha = E_\alpha$ e $e_{\alpha+3} = JE_\alpha$, $\alpha \in 1, 2, 3$, obtemos

$$\langle \nabla_{e_\alpha} e_\beta, e_k \rangle = \frac{1}{2}(C_{\alpha,\beta}^k - C_{\beta,k}^\alpha + C_{k,\alpha}^\beta), \quad C_{\alpha,\beta}^k = \langle [e_\alpha, e_\beta], e_k \rangle. \quad (8.1)$$

Assim temos

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \sum_k \frac{1}{2}(C_{\alpha,\beta}^k - C_{\beta,k}^\alpha + C_{k,\alpha}^\beta) e_k. \quad (8.2)$$

Apartir das relações de colchete

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_1, E_3] = E_2, \quad [E_2, E_3] = E_1,$$

e utilizando o fato de que $J[X, Y] = [JX, Y] = [X, JY]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{so}(1, 3)$, temos a seguintes relações entre as constantes de estrutura,

$$\pm 1 = C_{\alpha,\beta}^k = C_{\alpha,\beta+3}^{k+3} = C_{\alpha+3,\beta}^{k+3} = -C_{\alpha+3,\beta+3}^k, \quad (8.3)$$

onde $k, \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, com $k \neq \alpha$, $k \neq \beta$, $\alpha \neq \beta$,

$$0 = C_{\alpha+3,\beta+3}^{k+3} = C_{\alpha,\beta}^{k+3} = C_{\alpha+3,\beta}^k = C_{\alpha,\beta+3}^k, \quad (8.4)$$

$$0 = C_{\alpha+3,\alpha}^{k+3} = C_{\alpha+3,k+3}^\alpha = C_{\alpha,k+3}^{\alpha+3} = C_{\alpha,\alpha}^\alpha, \quad (8.5)$$

com $k, \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$. Lembrando que $e_\alpha = E_\alpha$ e $e_{\alpha+3} = JE_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, e $C_{i,j}^l = \langle [e_i, e_j], e_l \rangle$, $i, j, l \in \{1, \dots, 6\}$.

Utilizando (8.3), (8.4), (8.5) e (8.2), obtemos as seguintes fórmulas para a conexão

Proposição 8.1 *A conexão de Levi-Civita ∇ da métrica que faz da base $\{e_\alpha\}$ ($e_\alpha = E_\alpha$ e $e_{\alpha+3} = JE_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$) uma base ortonormal satisfaz as seguintes equações*

$$\nabla_{e_{\alpha+3}} e_\alpha = -\nabla_{e_\alpha} e_{\alpha+3} = 0. \quad (8.6)$$

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \frac{1}{2}(C_{\alpha,\beta}^k - C_{\beta,k}^\alpha + C_{k,\alpha}^\beta) e_k = \nu_{\alpha,\beta}^k e_k. \quad (8.7)$$

$$\nabla_{e_\alpha} e_{\beta+3} = \frac{1}{2}(C_{\alpha,\beta+3}^{k+3} - C_{\beta+3,k+3}^\alpha + C_{k+3,\alpha}^{\beta+3}) e_{k+3} = \nu_{\alpha,\beta+3}^{k+3} e_{k+3}. \quad (8.8)$$

$$\nabla_{e_{\alpha+3}} e_\beta = \frac{1}{2}(C_{\alpha+3,\beta}^{k+3} - C_{\beta,k+3}^{\alpha+3} + C_{k+3,\alpha+3}^\beta) e_{k+3} = \nu_{\alpha+3,\beta}^{k+3} e_{k+3}. \quad (8.9)$$

$$\nabla_{e_{\alpha+3}} e_{\beta+3} = \frac{1}{2}(C_{\alpha+3,\beta+3}^k - C_{\beta+3,k}^{\alpha+3} + C_{k,\alpha+3}^{\beta+3}) e_k = \nu_{\alpha+3,\beta+3}^k e_k, \quad (8.10)$$

onde $k, \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, com $k \neq \alpha$, $k \neq \beta$, $\alpha \neq \beta$. Observando que

$$\nu_{i,j}^l = \frac{1}{2}(C_{i,j}^l - C_{j,l}^i + C_{l,i}^j) \quad (8.11)$$

para $i, j, l = 1, 2, \dots, 6$.

Vamos agora estudar as curvaturas seccionais de $SO^+(1, 3)$, posteriormente analisaremos as curvaturas holomorfas de $SL(2, \mathbb{C})$. Lembrando que para dois vetores ortonormais X, Y a curvatura seccional do plano gerado por $\{X, Y\}$ é dada por

$$K(X, Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle, \text{ onde } R(X, Y) = \nabla_{[X, Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y],$$

A partir da decomposição de Cartan de $\mathfrak{so}(1, 3) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$, como

$$\mathfrak{p} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_3, e_5\}, \quad \mathfrak{t} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_2, e_4, e_6\}, \quad (8.12)$$

lembrando que $e_\alpha = E_\alpha$ e $e_{\alpha+3} = JE_\alpha$, $\alpha \in 1, 2, 3$, obtemos que $J\mathfrak{t} = \mathfrak{p}$. Como o produto interno foi fixado de modo que a base escolhida para $\mathfrak{so}(1, 3)$ seja ortonormal, temos que $ad(X)^* = ad(X)^T$, para todo $X \in \mathfrak{so}(1, 3)$. Das relações de colchetes entre os elementos da base, segue que

$$ad(u)^* = ad(u)^T = -ad(u), \text{ para todo } u \in \mathfrak{t},$$

da **Proposição 5.16**, temos que $K(u, v) \geq 0$, para todo $u \in \mathfrak{t}$ e $v \in \mathfrak{so}(1, 3)$.

Utilizando as fórmulas para conexão **(8.7)**, **(8.8)**, **(8.9)** temos os seguintes resultados para o tensor de curvatura

$$R(e_\alpha, e_\beta)e_\gamma = 0, \text{ se } \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 3, 5\}, \text{ com } \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma, \quad (8.13)$$

e além disso

$$R(e_\alpha, e_\beta)e_\alpha = -\frac{7}{4}e_\beta, \text{ se } \alpha, \beta \in \{1, 3, 5\}, \text{ com } \alpha \neq \beta. \quad (8.14)$$

Tomando $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$. Denotando $X = X^\alpha e_\alpha$, $Y = Y^\beta e_\beta$ e $Z = Z^\gamma e_\gamma$, para facilitar a notação, de **(8.13)**, **(8.14)**, segue que

$$\begin{aligned} R(X^\alpha e_\alpha, Y^\beta e_\beta)Z^\gamma e_\gamma &= Y^\beta X^\alpha Z^\alpha R(e_\alpha, e_\beta)e_\alpha + X^\alpha Y^\beta Z^\beta R(e_\alpha, e_\beta)e_\beta \\ &= Y^\beta X^\alpha Z^\alpha R(e_\alpha, e_\beta)e_\alpha - X^\alpha Y^\beta Z^\beta R(e_\beta, e_\alpha)e_\beta = -\frac{13}{8}(\langle X, Z \rangle Y^\beta e_\beta - \langle Y, Z \rangle X^\alpha e_\alpha) \\ &\Rightarrow R(X, Y)Z = -\frac{7}{4}(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X), \text{ para } X, Y, Z \in \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Logo,

$$K(X, Y) = -\frac{7}{4}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{p},$$

lembrando que $\mathfrak{p} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_3, e_5\}$. Temos a seguinte proposição

Proposição 8.2 *Considerando a decomposição $\mathfrak{so}(1, 3) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$, obtemos*

$$K(u, v) \geq 0, \text{ se } u \in \mathfrak{t} \text{ e } v \in \mathfrak{so}(1, 3), \quad (8.15)$$

$$K(u, v) < 0, \text{ se } u, v \in \mathfrak{p}. \quad (8.16)$$

Demonstração. Segue diretamente dos comentários anteriores. ■

Lembrando que a curvatura holomorfa em um campo $X \in \Gamma(M)$, com (M, J) variedade quase-complexa, é definida por $H(X) = K(X, JX)$. Utilizando a indentificação $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(1, 3)^J$, onde $(a + ib)X = aX + bJX$, $\forall X \in \mathfrak{so}(1, 3)$, do isomorfismo entre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{so}(1, 3)$, temos que $\mathfrak{t} = \varphi_*(\mathfrak{su}(2))$ e $\mathfrak{p} = \varphi_*(\mathfrak{s})$, onde $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{s}$.

Fazendo o *pullback* da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ver **(8.3)**) de $SO^+(1, 3)$, a **proposição 8.2** nos dá informações da curvatura holomorfa para elementos em $\mathfrak{su}(2)$ e elementos de \mathfrak{s} da variedade complexa $SL(2, \mathbb{C}) = (M^6, J_0)$.

Proposição 8.3 *Considerando a métrica Hermitiana invariante a esquerda $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{s}$, temos*

$$H(X) = K(X, J_0X) \geq 0, \text{ para todo } X \in \mathfrak{su}(2) \text{ e } X \in \mathfrak{s},$$

Demonstração. Observando que $J\mathfrak{t} = \mathfrak{p}$ e $J\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$, da **proposição 8.2**, e das identificações $\mathfrak{t} = \varphi_*(\mathfrak{su}(2))$ e $\mathfrak{p} = \varphi_*(\mathfrak{s})$, segue o resultado. ■

Vamos agora estudar as J_0 -curvaturas de Ricci de $SL(2, \mathbb{C})$ através da identificação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ com $\mathfrak{so}(1, 3)$, visto que as expressões da conexão de Levi-Civita da métrica $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ dependem apenas das constantes de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ que se correspondem com as constantes de estrutura de $\mathfrak{so}(1, 3)^J$ através do isomorfismo φ . Sendo assim, nossos estudos se seguem na álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$ com a estruturas complexa $J = \varphi_* \circ J_0 \circ \varphi_*^{-1}$.

Considerando a base ortonormal $\{e_\alpha\}$, onde $e_\alpha = E_\alpha$ e $e_{\alpha+3} = E_{\alpha+3}$ (ver **(8.2)**), obtemos

$$r^J(X, X) = - \sum_{\alpha} \langle JR(e_\alpha, X)JX, e_\alpha \rangle = \sum_{\alpha} \langle R(e_\alpha, X)JX, Je_\alpha \rangle, \quad (8.17)$$

para todo $X \in \mathfrak{so}(1, 3)$. Denotando $X = \sum_{\alpha} X_{\alpha}e_{\alpha}$, temos

$$r^J \left(\sum_{\beta} X_{\beta}, \sum_{\gamma} X_{\gamma}e_{\gamma} \right) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} X_{\beta}X_{\gamma} \langle R(e_{\alpha}, e_{\beta})Je_{\gamma}, Je_{\alpha} \rangle. \quad (8.18)$$

Considerando $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, com $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$, utilizando as expressões da **proposição 8.1**, temos

$$R(e_i, e_j)e_k = R(e_{i+3}, e_j)e_k = R(e_i, e_{j+3})e_k = R(e_i, e_j)e_{k+3} = 0$$

$$R(e_{i+3}, e_{j+3})e_k = R(e_i, e_{j+3})e_{k+3} = R(e_{i+3}, e_{j+3})e_{k+3} = 0.$$

Assim a equação 8.18 fica da forma

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} X_\beta X_\gamma \langle R(e_\alpha, e_\beta) J e_\gamma, J e_\alpha \rangle = \sum_{\alpha,\beta} X_\beta X_\alpha \langle R(e_\alpha, e_\beta) J e_\alpha, J e_\alpha \rangle + \sum_{\alpha,\beta} X_\beta^2 \langle R(e_\alpha, e_\beta) J e_\beta, J e_\alpha \rangle. \quad (8.19)$$

Agora, se $i, j \in \{1, 2, 3\}$, com $i \neq j$, temos

$$R(e_i, e_j) J e_i = *e_{j+3}, \quad R(e_{i+3}, e_j) J e_{i+3} = *e_{j+3},$$

$$R(e_i, e_{j+3}) J e_i = *e_j, \quad R(e_{i+3}, e_{j+3}) J e_{i+3} = *e_j,$$

onde $*e_l$ denota um múltiplo escalar de e_l , assim obtemos

$$r^J(X, X) = \sum_{\alpha,\beta} X_\beta^2 \langle R(e_\alpha, e_\beta) J e_\beta, J e_\alpha \rangle = \sum_{\beta} X_\beta^2 r^J(e_\beta, e_\beta), \quad (8.20)$$

para todo $X = \sum_{\beta} X_\beta e_\beta$. Considerando a base $\{\varphi_*^{-1} e_i\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, ortonormal com relação a $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos o seguinte resultado

Proposição 8.4 *A J_0 -curvatura de Ricci da métrica invariante à esquerda $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $SL(2, \mathbb{C})$ é dada por*

$$r^{J_0}(X, X) = \sum_{\beta} X_\beta^2 r^{J_0}(\varphi_*^{-1} e_\beta, \varphi_*^{-1} e_\beta),$$

para todo $X = \sum_{\beta} X_\beta \varphi_*^{-1} e_\beta \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Vamos agora determinar as expressões para a J -curvatura de Ricci na direção dos elementos da base de $\mathfrak{so}(1, 3)$. Sejam $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, com $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$, utilizando as expressões para a conexão de Levi-Civita da **proposição 8.1** e a definição do tensor de curvatura obtemos

$$R(e_i, e_j) J e_j = (\pm \nu_{kj+3}^{i+3} + \nu_{ij+3}^{k+3} \nu_{jk+3}^{i+3}) e_{i+3}, \quad (8.21)$$

$$R(e_{i+3}, e_j) J e_j = (\pm \nu_{k+3j+3}^i + \nu_{i+3j+3}^k \nu_{jk}^i) e_i, \quad (8.22)$$

onde temos

$$\pm \nu_{kj+3}^{i+3} = \begin{cases} \nu_{kj+3}^{i+3} & \text{para } i < j \\ -\nu_{kj+3}^{i+3} & \text{para } i > j. \end{cases}$$

$$\pm \nu_{k+3j+3}^i = \begin{cases} \nu_{k+3j+3}^i & \text{para } i < j \\ -\nu_{k+3j+3}^i & \text{para } i > j. \end{cases}$$

De maneira análoga obtemos

$$R(e_i, e_{j+3})Je_{j+3} = (\mp\nu_{k+3j}^{i+3} - \nu_{ij}^k\nu_{j+3k}^{i+3})e_{i+3}, \quad (8.23)$$

$$R(e_{i+3}, e_{j+3})Je_{j+3} = (\pm\nu_{kj}^i - \nu_{i+3j}^k\nu_{j+3k}^i)e_i, \quad (8.24)$$

onde temos

$$\mp\nu_{k+3j}^{i+3} = \begin{cases} \nu_{k+3j}^{i+3} & \text{para } i > j \\ -\nu_{k+3j}^{i+3} & \text{para } i < j. \end{cases}$$

$$\pm\nu_{kj}^i = \begin{cases} \nu_{kj}^i & \text{para } i < j \\ -\nu_{kj}^i & \text{para } i > j. \end{cases}$$

Observamos que os sinais \pm e \mp surgem das relações de colchete de $\mathfrak{so}(1, 3)$, já que para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, com $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$, temos $[e_i, e_j] = \pm e_k$ e $[e_{i+3}, e_{j+3}] = -[e_i, e_j] = \mp e_k$. Agora, considerando a correspondência entre as álgebras $\mathfrak{so}(1, 3)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, e considerando as equações 8.21, 8.22, 8.23 e 8.24, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 8.5 *Considerando a base $\{\varphi_*^{-1}e_i\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, ortonormal com relação a $\varphi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$, para $\alpha, \beta, k \in \{1, 2, 3\}$ temos*

$$r^{J_0}(\varphi_*^{-1}e_\beta, \varphi_*^{-1}e_\beta) = \sum_{\alpha \neq \beta} (\pm\nu_{k\beta+3}^{\alpha+3} + \nu_{\alpha\beta+3}^{k+3}\nu_{\beta k+3}^{\alpha+3}) - \sum_{\alpha \neq \beta} (\pm\nu_{k+3\beta+3}^\alpha + \nu_{\alpha+3\beta+3}^k\nu_{\beta k}^\alpha), \quad (8.25)$$

$$r^{J_0}(\varphi_*^{-1}e_{\beta+3}, \varphi_*^{-1}e_{\beta+3}) = \sum_{\alpha \neq \beta} (\mp\nu_{k+3\beta}^{\alpha+3} - \nu_{\alpha\beta}^k\nu_{\beta+3k}^{\alpha+3}) - \sum_{\alpha \neq \beta} (\pm\nu_{k\beta}^\alpha - \nu_{\alpha+3\beta}^k\nu_{\beta+3k}^\alpha), \quad (8.26)$$

observando que nessas somas em α para cada $\alpha \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\beta\}$ temos $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\alpha, \beta\}$,

CAPÍTULO 9

ESTRUTURA KÄHLER EM $SL(2, \mathbb{C})$

Neste capítulo vamos estudar estruturas Kähler no grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$. Começamos mostrando que o grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$, visto como variedade real M^6 com a estrutura complexa invariante canônica J_0 , não é variedade Kähler para nenhuma métrica Hermitiana invariante à esquerda. Posteriormente provaremos que $SL(2, \mathbb{C})$ admite uma estrutura pseudo-Kähler invariante pelo seu subgrupo compacto $SU(2)$.

9.1 2-forma Kähler em $SL(2, \mathbb{C})$

Primeiramente vamos estudar a 2-forma Kähler associada a estrutura complexa $J = \varphi_* \circ J_0 \circ \varphi_*^{-1}$. Considerando $e_\alpha = E_\alpha$, e $e_{\alpha+3} = JE_\alpha$, com $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, temos $\{e_\alpha^*\}$ base dual de $\{e_\alpha\}$. Pela definição da 2-forma Kähler ω associada a uma métrica Hermitiana invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{so}(1, 3).$$

Em termos da base $\{e_\alpha^*\}$, temos a seguinte expressão para ω

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_{\alpha, \alpha+3} e_\alpha^* \wedge e_{\alpha+3}^*, \quad (9.1)$$

onde $\omega_{\alpha, \alpha+3} = \omega(e_\alpha, e_{\alpha+3}) = -\langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = -1$.

Calculando a diferencial exterior de ω obtemos

$$3d\omega(X, Y, Z) = -(\omega([X, Y], Z) + \omega([Z, X], Y) + \omega([Y, Z], X)), \quad (9.2)$$

pois, $W(\langle V, U \rangle) = 0 \Rightarrow W(\omega(U, V)) = 0, \quad \forall W, V, U \in \mathfrak{so}(1, 3)$. Temos então

$$\begin{aligned}
3d\omega(JX, Y, Z) &= -(\omega([JX, Y], Z) + \omega([Z, JX], Y) + \omega([Y, Z], JX)) \\
&= -(\langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle).
\end{aligned}$$

Assim, pela fórmula de Koszul ((5.8), seção 5.3)

$$d\omega(JX, Y, Z) = -\frac{2}{3}\langle \nabla_X Y, Z \rangle. \quad (9.3)$$

Observamos que a equação (9.3) vale no contexto geral de um grupo de Lie G com uma estrutura complexa invariante à esquerda J e métrica Hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante à esquerda. Podemos então estabelecer os seguintes resultados acerca de grupos de Lie compactos e grupos de Lie semi-simples.

Proposição 9.1 *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie \mathfrak{g} e uma estrutura complexa invariante à esquerda J . Se G admite uma métrica Kähler bi-invariante, então \mathfrak{g} é abeliana.*

Demonstração. Suponhamos que G admita uma métrica Kähler bi-invariante. Consideremos os seguintes fatos:

- Pela fórmula de Koszul segue que

$$\nabla_X = \frac{1}{2}ad(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

- Como $N_J \equiv 0 \Rightarrow ad(X) \circ J = J \circ ad(X), \forall X \in \mathfrak{g}$, pela fórmula (9.3) segue que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$d\omega(JX, Y, Z) = -\frac{2}{3}\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\frac{1}{3}\langle ad(X)Y, Z \rangle = -\frac{1}{3}\langle [X, Y], Z \rangle,$$

mas G é Kähler ($d\omega = 0$) $\Rightarrow \langle [X, Y], Z \rangle = 0$, para todo X, Y e Z em \mathfrak{g} . Tomando uma base ortonormal com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podemos mostrar que \mathfrak{g} é abeliana. ■

Proposição 9.2 *Seja G um grupo de Lie semi-simples com uma estrutura complexa invariante à esquerda J . Então, G não admite uma métrica Kähler invariante à esquerda.*

Demonstração. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Hermitiana invariante à esquerda em G . Consideremos ω a 2-forma Kähler associada. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é métrica Kähler, temos que $d\omega = 0$, o que implica que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é flat. Assim, de pelo **teorema 5.29** segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não pode ser flat, pois G possui álgebra de Lie semi-simples. ■

Como o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie semi-simples temos o seguinte resultado.

Corolário 9.3 *A variedade complexa $SL(2, \mathbb{C}) = (M^6, J_0)$ não admite uma métrica Kähler invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

9.2 Ações de $\mathrm{SO}(3)$ no fibrado $T^*(\mathrm{SO}(3))$

Nesta seção estudaremos alguns resultados preliminares acerca do fibrado cotangente $T^*(\mathrm{SO}(3))$. Nosso objetivo é verificar o fato de que $T^*(\mathrm{SO}(3))$ é de fato uma variedade complexa, através de sua identificação com $\mathfrak{p} \times \mathrm{SO}(3)$ e da correspondência $\mathfrak{p} \times \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathrm{SO}(1,3)$. Utilizaremos a todo tempo a identificação de $\mathfrak{so}(1,3) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$ complexificada por J com $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, e além disso que $\mathfrak{p} = J\mathfrak{t}$ (ver **8.12, seção 8.3**).

Considerando a identificação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ com $\mathfrak{so}(1,3)^J$, complexificada com a estrutura complexa $J = \varphi_* \circ J_0 \circ \varphi_*^{-1}$ induzida da estrutura canônica J_0 de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, podemos tomar a decomposição da álgebra semi-simples real $\mathfrak{so}(1,3)$

$$\mathfrak{so}(1,3) = \mathfrak{u} \oplus J\mathfrak{u},$$

onde $\mathfrak{u} = \mathfrak{t}$ é obtida da decomposição de Cartan de $\mathfrak{so}(1,3)$, observando que podemos ver a involução de Cartan como uma conjugação $\theta: \mathfrak{so}(1,3)^J \rightarrow \mathfrak{so}(1,3)^J$. É claro que \mathfrak{u} é invariante pela involução θ , esse automorfismo é 1 em \mathfrak{t} e -1 em \mathfrak{p} , lembrando que $\theta(X) = -X^T$. Como duas conjugações em $\mathfrak{so}(1,3)^J$ comutam entre si, temos que \mathfrak{u} é invariante pela conjugação natural de $\mathfrak{so}(1,3)^J$, isto é $\overline{X} = X$ para $X \in \mathfrak{u}$

A subálgebra \mathfrak{u} é a forma real compacta de $\mathfrak{so}(1,3)^J = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (ver [6], página 342) como

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = -D^T \right\}, \text{ e } \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & 0 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^3 = M_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \right\},$$

temos $J\mathfrak{p} = \mathfrak{t} = \mathfrak{so}(3)$. Assim temos $\mathfrak{u} = \mathfrak{so}(3)$

Temos uma ação natural de $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)$ em $\mathrm{SO}^+(1,3)$, $(g_1, g_2)x = g_1 x g_2^{-1}$. A álgebra $\mathfrak{so}(1,3)^J$ pode ser vista como a álgebra dos campos invariantes à direita, considerando a forma de Cartan-Killing κ de $\mathfrak{so}(1,3)^J$, podemos identificar $T^*(\mathrm{SO}(3))$ com $J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$, de modo que $(JX, g) \rightarrow \alpha_{(JX, g)}$, onde $\alpha_{(JX, g)}$ é 1-forma em g , tal que $\alpha_{(JX, g)}(R_g)_* Y = \kappa(X, Y)$, $\forall Y \in \mathfrak{so}(3) = \mathfrak{t}$. De maneira análoga, podemos utilizar a métrica bi-invariante existente no grupo de Lie compacto $\mathrm{SO}(3)$ para trivializar o fibrado $T^*(\mathrm{SO}(3))$, de modo que $T^*(\mathrm{SO}(3)) = \mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$, e de maneira alternativa chegar na identificação $T^*(\mathrm{SO}(3)) = J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$.

Como $J\mathfrak{t} = \mathfrak{p}$, temos a identificação de $\mathfrak{p} \times \mathrm{SO}(3)$ com $T^*(\mathrm{SO}(3))$, a partir disso podemos definir uma ação de $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)$ em $\mathfrak{p} \times \mathrm{SO}(3) = T^*(\mathrm{SO}(3))$, de modo que

$$(g_1, g_2)(JX, x) \rightarrow (Ad(g_1)(JX), g_1 x g_2^{-1}).$$

Pelo item 3 do **teorema 3.24**, existe um difeomorfismo

$$f: \mathfrak{p} \times \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathrm{SO}(1, 3), \text{ tal que } (JX, g) \rightarrow e^{JX}g,$$

a partir deste difeomorfismo, cada elemento $Z \in \mathfrak{so}(1, 3)$ induz um campo em $J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$, denotado por \tilde{Z} , tal que

$$\tilde{Z}_{(JX, g)} = f_*^{-1}(L_{f(JX, g)})_*Z, \quad (9.1)$$

chamados **campos canônicos**. Assim, tomando uma base para $\mathfrak{so}(1, 3)$ obtemos campos globalmente definidos da forma **(9.1)** que não se anulam, segue que o fibrado tangente a variedade $T^*(\mathrm{SO}(3)) = J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$ é trivial.

Proposição 9.4 *O fibrado cotangente $T^*(\mathrm{SO}(3)) = J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$ é uma variedade complexa.*

Demonstração. Considerando a estrutura complexa invariante J induzida por $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ em $\mathrm{SO}(1, 3)$, via isomorfismo de álgebras de Lie. Podemos definir

$$\tilde{J}(\tilde{Z})_{(JX, g)} = f_*^{-1}(L_{f(JX, g)})_*JZ, \quad \forall Z \in \mathfrak{so}(1, 3). \quad (9.2)$$

Assim, temos que $T^*(\mathrm{SO}(3))$ é uma variedade complexa, com estrutura complexa \tilde{J} . ■

Observamos que a definição de \tilde{Z} respeita a complexificação $\mathfrak{so}(1, 3)^J = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, de modo que um elemento de $Z \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$ define um campo complexo \tilde{Z} em $T^*(\mathrm{SO}(3))$.

9.3 Forma pseudo-Kähler $\mathrm{SU}(2)$ -invariante em $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

A partir dos resultados estabelecidos na seção anterior, o diagrama abaixo esquematiza as idéias a serem trabalhadas nessa seção com o objetivo de construir uma estrutura pseudo-Kähler em $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. A principal referência para os resultados dessa seção é [9].

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{1,1}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))_{\mathbb{C}} & \xleftarrow{\varphi^*} & \Lambda^{1,1}(\mathrm{SO}^+(1, 3))_{\mathbb{C}} & \xleftarrow{(f^{-1})^*} & \Lambda^{1,1}(T^*(\mathrm{SO}(3)))_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{SO}^+(1, 3) & \xrightarrow{f^{-1}} & T^*(\mathrm{SO}(3)) \end{array}$$

Onde π_α , $\alpha = 1, 2, 3$, são as projeções canônicas associadas às fibrações.

Primeiramente, Para $(JX, g) \in T^*(\mathrm{SO}(3))$ denotemos $p = e^{JX}$. Definamos o operador $A_p: \mathfrak{so}(1, 3)^J \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)^J$, tal que $A_p = \left(\frac{I + \mathrm{Ad}(p)}{2}\right)^{-1}$, observando que $\mathrm{Ad}(p)$ não possui autovalor -1. De fato, temos a seguinte caracterização para $J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$

$$J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3) = \{(JX, g) \mid n\pi \notin \sigma(\mathrm{ad}(X)), n \in \mathbb{Z}\},$$

onde $\sigma(\mathrm{ad}(X))$ é o conjunto dos autovalores (**Espectro**) de $\mathrm{ad}(X)$. Agora, considerando que $\exp: J\mathfrak{t} \rightarrow G$ é não-singular quando $\mathrm{ad}(JX)$ não possui autovalores do tipo $2n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, e que o produto $(\exp(JX), g) \rightarrow \exp(JX)g$ é isomorfismo quando $\mathrm{Ad}(e^{JX})$ não possui autovalor -1 segue o resultado, mais detalhes em [9], página 599. Para o operador A_p temos o seguinte lema que utilizaremos posteriormente.

Lema 9.5 *O operador A_p , onde $p = e^{JX}$, satisfaz a identidade*

$$\kappa(Z, A_p W) = \kappa(\mathrm{Ad}(p) \circ A_p Z, W)$$

Demonstração. Denotando $Z' = A_p Z$ e $W' = A_p W$ obtemos

$$\begin{aligned} \kappa(Z, A_p W) &= \kappa\left(\left(\frac{I+\mathrm{Ad}(p)}{2}\right)Z', W'\right) = \frac{1}{2}\kappa(Z', W') + \frac{1}{2}\kappa(\mathrm{Ad}(p)Z', W'), \\ \kappa(\mathrm{Ad}(p) \circ A_p Z, W) &= \kappa(\mathrm{Ad}(p)Z', \left(\frac{I+\mathrm{Ad}(p)}{2}\right)W') \\ &= \frac{1}{2}\kappa(\mathrm{Ad}(p)Z', W') + \frac{1}{2}\kappa(\mathrm{Ad}(p)Z', \mathrm{Ad}(p)W'). \end{aligned}$$

Assim, da Ad -invariância da forma de Cartan-Killing segue que o resultado. ■

Consideremos agora a projeção canônica $\pi: T^*(\mathrm{SO}(3)) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$, podemos definir uma 1-forma λ em $T^*(\mathrm{SO}(3))$, tal que para todo $\alpha \in T^*(\mathrm{SO}(3))$ e $v \in T_\alpha(T^*(\mathrm{SO}(3)))$, temos $\lambda_\alpha(v) = \alpha(\pi_* v)$ (ver [2], página 202).

Temos $\mu = d\lambda$ uma 2-forma fechada não-degenerada definida em $T^*(\mathrm{SO}(3)) = J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$, obtemos assim uma estrutura de variedade simplética na variedade $J\mathfrak{t} \times \mathrm{SO}(3)$. Da identificação de $T^*(\mathrm{SO}(3))$ com $J(t) \times \mathrm{SO}(3)$, dada uma curva $(JX(t), g_t)$ em $J(t) \times \mathrm{SO}(3)$ temos $\lambda\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(JX(t), g_t)\right) = \kappa(X(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g_t g_0^{-1})$. Considerando a ação de $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)$ nos campos canônicos definida por $(g_1, g_2)\tilde{Z} = \widetilde{\mathrm{Ad}(g_2)Z}$, pela Ad -invariância de κ segue que λ é invariante. Estamos interessados em calcular $\lambda(\tilde{Z})$, sendo assim consideremos o seguinte teorema que reúne expressões convenientes para curvas associadas ao campo \tilde{Z} .

Teorema 9.6 *Seja $(JX, g) \in T^*(\mathrm{SO}(3))$, com $p = e^{JX}$, e seja $Z \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$. Definimos as seguintes curvas em $T^*(\mathrm{SO}(3))$*

$$\begin{aligned} \gamma_{JX, g, Z}: t &\rightarrow (\log(pe^{tA_p \circ \mathrm{Ad}(g) \mathrm{JIm}(Z)}), e^{t(\mathrm{Ad}(g)Z - A_p \circ \mathrm{Ad}(g) \mathrm{JIm}(Z))}g), \\ \delta_{JX, g, Z}: t &\rightarrow \left(\frac{1}{2}(\log_{2JX}(pge^{tZ}e^{-t\bar{Z}}g^{-1}p), p(t)^{-1}pge^{tZ})\right), \end{aligned}$$

onde $\log_W = \log$ é a inversa local da aplicação exponencial numa vizinhança de e^W em uma vizinhança de W em $\mathfrak{so}(1, 3)^J$, e

$$p(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \log_{2, JX}(pge^{tZ}e^{-t\bar{Z}}g^{-1}p)\right).$$

Então temos $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma = \tilde{Z}_{(JX, g)}$, e δ é a curva integral de \tilde{Z} iniciada em (JX, g) .

Demonstração. Segue em [9], página 600.

De acordo com [9] a curva γ tem \tilde{Z} como vetor tangente em (JX, g) mas o mesmo não acontece em outros pontos da curva. Para $(JX, g) \in T^*(\text{SO}(3))$, com $p = e^{JX}$, e $Z \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$, pelo **teorema 9.6** podemos escrever $\gamma(t) = (JX(t), g_tg)$, onde

$$(JX(t), g_tg) = (\log(pe^{tA_p \circ Ad(g)J\text{Im}(Z)}), e^{t(Ad(g)Z - A_p \circ Ad(g)J\text{Im}(Z))}g).$$

Considerando a identificação de $T^*(\text{SO}(3))$ com $J\mathfrak{t} \times \text{SO}(3)$, temos

$$\lambda_{\gamma(0)}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\gamma(t)\right) = \alpha_{\gamma(0)}\left((R_g)_*\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}g_t\right) = \kappa(X(0), \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}g_t),$$

como $\gamma(0) = (JX, g)$, e além disso

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\gamma(t) = \tilde{Z}_{(JX, g)} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}g_t = Ad(g)Z - A_p \circ Ad(g)J\text{Im}(Z),$$

temos

$$\lambda(\tilde{Z})_{(JX, g)} = \kappa(X, Ad(g)Z - A_p \circ Ad(g)J\text{Im}(Z)).$$

Obtemos o seguinte resultado.

Proposição 9.7 Para todo $(JX, g) \in T^*(\text{SO}(3))$ e $Z \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$,

$$\lambda(\tilde{Z})_{(JX, g)} = \kappa(X, Ad(g)\text{Re}(Z)).$$

Demonstração. Primeiramente observemos que $Ad(p)X = X$, visto que $Ad(e^{JX}) = e^{ad(JX)}$, assim $A_p^{-1}X = \frac{(I+Ad(p))}{2}X = X$. Agora, pelo **lema 9.5** temos

$$\kappa(X, A_p \circ Ad(g)J\text{Im}(Z)) = \kappa(Ad(p) \circ A_p X, Ad(g)J\text{Im}(Z)),$$

como $Ad(p) \circ A_p X = X$, temos

$$\kappa(X, A_p \circ Ad(g)J\text{Im}(Z)) = \kappa(X, Ad(g)J\text{Im}(Z)).$$

Assim, segue que

$$\kappa(X, Ad(g)Z - A_p \circ Ad(g)J\text{Im}(Z)) = \kappa(X, Ad(g)\text{Re}(Z)),$$

como queríamos mostrar ■

Agora, novamente para $(JX, g) \in T^*(\text{SO}(3))$ denotemos $p = e^{JX}$. Definamos o operador

$$F_{JX}: \mathfrak{so}(1, 3)^J \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)^J, \text{ tal que } F_{JX}(Z) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \log(pe^{sZ}).$$

Pela própria definição temos $F_{JX} = (\log_{JX} \circ L_p)_*$, consideremos o seguinte teorema.

Teorema 9.8 (ver [7], página 185) *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para todo $X \in \mathfrak{g}$ seja $(\exp)_{*X}$ a diferencial do mapa exponencial em X . Então*

$$(\exp)_{*X} = (L_{e^X})_* \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} ad(X)^n.$$

*Em particular, o mapa $(\exp)_{*X}$ é bijetor se, e somente se, o endomorfismo $ad(X)$ não possui autovalores da forma $2n\pi i$ para $n \in \mathbb{N}$.*

Em uma vizinhança do elemento neutro, temos

$$I = (L_{p^{-1} \circ L_p})_* = (L_p)_*^{-1} \circ (\exp)_{*JX} \circ (\log_{JX} \circ L_p).$$

Como $(L_p)_*^{-1} \circ (\exp)_{*JX}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (considerando a identificação $T_{JX}\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$), temos

$$I = (L_{p^{-1} \circ L_p})_* = (L_p)_*^{-1} \circ (\exp)_{*JX} \circ (\log_{JX} \circ L_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} ad(JX)^n \circ F_{JX}, \quad (9.1)$$

O operador F_{JX} satisfaz a seguinte propriedade que utilizaremos posteriormente.

Lema 9.9 *Seja $(JX, g) \in T^*(\text{SO}(3))$, denotemos $p = e^{JX}$. O operador F_{JX} satisfaz a seguinte identidade*

$$\kappa(X, F_{JX}W) = \kappa(X, W),$$

para todo $W \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$.

Demonstração. Primeiro observamos que pela definição de F_{JX} temos $F_{JX}(W) = W$ sempre que $[X, W] = 0$. Denotando $T_Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} ad(Z)^n$, para todo $Z \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$, pela associatividade de $ad(JX)$ com relação a forma de Cartan-Killing segue

$$\kappa(T_{-JX}(W), Z) = \kappa(W, T_{JX}(Z)),$$

para todo $W, Z \in \mathfrak{so}(1, 3)$. Assim obtemos a seguinte igualdade

$$\kappa(X, F_{JX}W) = \kappa((T_{-JX} \circ F_{-JX})X, F_{JX}W) = \kappa(X, (T_{JX} \circ F_{JX})W),$$

como (por (9.1)) $(T_{JX} \circ F_{JX})W = W$ segue o resultado. ■

Consideremos agora o mapa $\phi: \mathcal{Jt} \times \text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}$, $(JX, g) \rightarrow \kappa(X, X)$, temos que ϕ é invariante com relação a ação de $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ em $\mathcal{Jt} \times \text{SO}(3)$, ou seja

$$\phi((Ad(g_1)(JX), g_1 x g_2^{-1})) = \kappa(Ad(g_1)(X), Ad(g_1)(X)) = \kappa(X, X),$$

para $(g_1, g_2) \in \text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ e $(JX, x) \in \mathcal{Jt} \times \text{SO}(3)$. Agora observamos que como $\mathcal{Jt} \times \text{SO}(3)$ é uma variedade complexa temos $d = \partial + \bar{\partial}$, onde $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$, pois $d^2 = 0$. Definindo $d^c = i(\partial - \bar{\partial})$, temos $dd^c = 2i\bar{\partial}\partial = -d^cd$. Temos $d^c\phi(\tilde{Z}) = \tilde{J}\tilde{Z}(\phi) = d\phi(\tilde{J}\tilde{Z})$, temos o seguinte resultado.

Teorema 9.10 *Seja $\phi: \mathcal{Jt} \times \text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}$, o mapa $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ -invariante definido por $\phi(JX, g) = \kappa(X, X)$, então $2\lambda = d^c\phi$.*

Demonstração. Calculando $d^c\phi$ obtemos

$$\begin{aligned} d^c\phi(\tilde{Z})_{(JX, g)} &= (\tilde{J}\tilde{Z}(\phi))_{(JX, g)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\gamma_{JX, g, JZ})(t) = \\ &= 2\kappa\left(-J \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \log(pe^{tA_p \circ Ad(g)J\text{Im}(JZ)}), X\right), \end{aligned}$$

onde essa última igualdade segue da definição de ϕ e do **teorema 9.6**. Assim da definição do operador F_{JX} e considerando que $\text{Im}(JZ) = \text{Re}(Z)$, segue que

$$2\kappa\left(-J \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \log(pe^{tA_p \circ Ad(g)J\text{Im}(JZ)}), X\right) = 2\kappa(F_{JX}(A_p \circ Ad(g)\text{Re}(Z)), X),$$

pelos **lemas 9.5** e **9.9**, temos

$$2\kappa(F_{JX}(A_p \circ Ad(g)\text{Re}(Z)), X) = 2\kappa(Ad(g)\text{Re}(Z), X),$$

pela **proposição 9.7** temos $2\kappa(Ad(g)\text{Re}(Z), X) = 2\lambda(\tilde{Z})_{(JX, g)}$. ■

Temos o seguinte corolário.

Corolário 9.11 $\mu = d\lambda = \frac{1}{2}dd^c\phi = -i\partial\bar{\partial}\phi$. A 2-forma $\mu = d\lambda$ é \tilde{J} -invariante, $\mu(\tilde{J}\tilde{Z}, \tilde{J}\tilde{W}) = \mu(\tilde{Z}, \tilde{W})$, para todo $Z, W \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$.

Demonstração. Como $\mathcal{Jt} \times \text{SO}(3)$ é uma variedade complexa temos $d = \partial + \bar{\partial}$, onde $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$, pois $d^2 = 0$. Definindo $d^c = i(\partial - \bar{\partial})$, temos $dd^c = 2i\bar{\partial}\partial = -d^cd$. Assim, do **teorema 9.10** segue que $d\lambda = \frac{1}{2}dd^c\phi = -i\partial\bar{\partial}\phi$.

Vamos mostrar que $dd^c\phi$ é \tilde{J} -invariante. Primeiro observamos que se α é uma 1-forma sobre uma variedade, temos a seguinte fórmula para diferencial exterior

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \quad (9.2)$$

Assim, da formula para diferencial exterior e considerando que $d^c\phi(\tilde{Z}) = \tilde{J}\tilde{Z}(\phi)$, obtemos

$$\begin{aligned} dd^c\phi(X, Y) &= X(d^c\phi(Y)) - Y(d^c\phi(X)) - d^c\phi([X, Y]) \\ &= X(d\phi(\tilde{J}Y)) - Y(d\phi(\tilde{J}X)) - d\phi(\tilde{J}[X, Y]), \end{aligned}$$

e por isso

$$\begin{aligned} dd^c\phi(\tilde{J}X, \tilde{J}Y) &= \tilde{J}X(d\phi(-Y)) - \tilde{J}Y(d\phi(-X)) - d\phi(\tilde{J}[\tilde{J}X, \tilde{J}Y]) \\ &= -\tilde{J}X(d\phi(Y)) + \tilde{J}Y(d\phi(X)) + d\phi(\tilde{J}[X, Y]) = -d^c d\phi(X, Y) = dd^c\phi(X, Y), \end{aligned}$$

assim temos $\mu = \frac{1}{2}dd^c\phi = -i\partial\bar{\partial}\phi$ \tilde{J} -invariante. ■

O seguinte teorema nos fornece uma expressão para a 2-forma μ , que será útil na hora de mostrar a invariância por $SU(2)$ da estrutura obtida em $SL(2, \mathbb{C})$. Segue o resultado.

Teorema 9.12 *Seja $(JX, g) \in T^*(SO(3)) = \mathfrak{Jt} \times SO(3)$, com $p = e^{JX}$, temos*

$$\mu(\tilde{Z}, \tilde{W}) = \text{Im}(\kappa(E_{JX} \circ \text{Ad}(g)Z, \text{Ad}(g)\overline{W})) = \text{Im}(\kappa(E_{J\text{Ad}(g)^{-1}X}Z, \overline{W})),$$

onde $E_{JX} = F_{JX} \circ \text{Ad}(p) \circ A_p$, e \tilde{Z}, \tilde{W} são campos canônicos em $T^*(SO(3))$.

Demonstração. A demonstração deste fato segue de (9.6), (9.7), da fórmula (9.2) para diferencial exterior de 1-formas e de cálculos utilizando as seguintes propriedades adicionais satisfeitas pelos operadores F_{JX}, A_p e E_{JX} :

- $\text{Ad}(p) \circ A_p = 2I - A_p$;
- $\text{ad}(JX) = F_{JX} \circ (I - \text{Ad}(p)^{-1})$;
- $F_{JX} \circ A_p = F_{JX} \circ A_p$, e temos $\kappa((F_{JX} \circ A_p)Z, W) = \kappa(Z, (F_{JX} \circ A_p)W)$, para $Z, W \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$;
- $\text{Ad}(p)^{-1} \circ F_{JX} = F_{-JX}$;
- $\kappa(Z, F_{JX}W) = \kappa(F_{-JX}Z, W)$, para todo $Z, W \in \mathfrak{so}(1, 3)^J$.

A demonstração para estas propriedades podem ser encontradas em [9]. Faremos aqui apenas a seguinte observação: Para campos canônicos \tilde{Z} e \tilde{W} em $T^*(SO(3))$, no ponto $(JX, g) \in T^*(SO(3))$, denotando $p = e^{JX}$, temos

$$\mu(\tilde{Z}, \tilde{W})_{(JX, g)} = d\lambda(\tilde{Z}, \tilde{W})_{(JX, g)} = \tilde{Z}(\lambda(\tilde{W}))_{(JX, g)} - \tilde{W}(\lambda(\tilde{Z}))_{(JX, g)} - \lambda([\tilde{Z}, \tilde{W}])_{(JX, g)}.$$

De acordo com [9], para cada fator do lado direito da última igualdade da equação acima temos

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\lambda(\tilde{W}))_{(JX, g)} &= -\frac{i}{4}\kappa(F_{JX} \circ A_p \circ \text{Ad}(p)^{-1} \circ \text{Ad}(g)(Z - \overline{Z}), \text{Ad}(g)(W + \overline{W})) \\ &\quad -\frac{i}{4}\kappa(F_{JX} \circ (I - \text{Ad}(p)^{-1}) \circ \text{Ad}(g)(2Z), \text{Ad}(g)(W + \overline{W})), \\ -\tilde{W}(\lambda(\tilde{Z})) &= \frac{i}{4}\kappa(F_{JX} \circ A_p \circ \text{Ad}(p) \circ \text{Ad}(g)(Z + \overline{Z}), \text{Ad}(g)(W - \overline{W})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{4} \kappa(F_{JX} \circ Ad(p)^{-1} \circ (I - Ad(p)) \circ Ad(g)(Z + \widetilde{Z}), Ad(g)(2W)), \\
-\lambda([\widetilde{Z}, \widetilde{W}]) &= \frac{i}{4} \kappa(F_{JX} \circ (I - Ad(p)^{-1}) \circ Ad(g)(Z), Ad(g)W) \\
& + \frac{i}{4} \kappa(F_{JX} \circ (I - Ad(p)^{-1}) \circ Ad(g)(\widetilde{Z}), Ad(g)\widetilde{W}),
\end{aligned}$$

somando esses termos e utilizando as propriedades adicionais citadas acima satisfeitas pelos operadores F_{JX} , A_p e E_{JX} chegamos na expressão

$$\mu(\widetilde{Z}, \widetilde{W}) = \text{Im}(\kappa(E_{JX} \circ Ad(g)Z, Ad(g)\overline{W})) = \text{Im}(\kappa(E_{JAd(g)^{-1}X}Z, \overline{W})),$$

os detalhes dos cálculos omitidos aqui podem ser encontrados com detalhes em [9], página 605. ■

Para uma variedade complexa, uma 2-forma fechada não-degenerada, para qual a estrutura complexa é uma isometria, fornece uma forma pseudo-Kähler. Assim, temos o resultado

Teorema 9.13 $\mu = d\lambda = \frac{1}{2}dd^c\phi = -i\partial\bar{\partial}\phi$ é uma 2-forma fechada não-degenerada $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ -invariante, \tilde{J} -invariante em $T^*(\text{SO}(3)) = \mathfrak{J}\mathfrak{t} \times \text{SO}(3)$. Além disso, para $A, B \in T_\alpha(T^*(\text{SO}(3)))$, $\alpha \in T^*(\text{SO}(3))$, temos

$$H(A, B) = \mu(\tilde{J}A, B) + i\mu(A, B),$$

uma estrutura pseudo-Kähler em $T^*(\text{SO}(3))$.

Observamos que a parte real de H , $\tilde{Z}, \widetilde{W} \rightarrow \mu(\tilde{J}\tilde{Z}, \widetilde{W})$, é uma forma bilinear, não-degenerada, \tilde{J} -invariante (não necessariamente positiva definida) que determina uma pseudo-métrica em $T^*(\text{SO}(3))$, e a parte imaginária de H é a própria 2-forma μ .

Para os campos canônicos (9.1), do teorema 9.12 temos a seguinte a seguinte expressão

Teorema 9.14 A estrutura pseudo-Kähler associada a μ se expressa da seguinte forma nos campos canônicos

$$H(\widetilde{Z}, \widetilde{W})_{(JX, g)} = \kappa(E_{JX} \circ Ad(g)Z, Ad(g)\overline{W}) = \kappa(E_{JAd(g)^{-1}X}Z, \overline{W}),$$

onde $(JX, g) \in T^*(\text{SO}(3))$.

Consideremos $\mathfrak{so}(1, 3)$ como álgebra dos campos invariantes a esquerda, isto é, para todo $X \in \mathfrak{so}(1, 3)$ vale

$$X_g = (L_g)_*X, \text{ onde } g \in \text{SO}^+(1, 3) \text{ com } X_e = X.$$

Definição 9.15 Definimos a 2-forma ω em $\text{SO}^+(1, 3)$, tal que

$$\omega(Z_g, W_g) = \mu(f_*^{-1}(L_g)_*Z, f_*^{-1}(L_g)_*W), \quad (9.3)$$

onde $f: \mathcal{Jt} \times \text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}^+(1, 3)$ é o difeomorfismo associado a decomposição de Cartan no nível de grupo citado anteriormente.

Como cada elemento $g \in \text{SO}^+(1, 3)$ é da forma $g = f(JX, k)$, com $(JX, k) \in \mathcal{Jt} \times \text{SO}(3) = T^*(\text{SO}(3))$, segue que

$$\omega(Z_g, W_g) = \mu(\tilde{Z}, \tilde{W})_{(JX, k)}, \quad (9.4)$$

para $g = f(JX, k) \in \text{SO}^+(1, 3)$.

Pela **definição 9.15** e **corolário 9.11**, temos a compatibilidade de ω com a estrutura complexa invariante J , induzida de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, isto é, para $g = f(JX, k) \in \text{SO}^+(1, 3)$

$$\omega(JZ_g, JW_g) = \mu(\tilde{J}\tilde{Z}, \tilde{J}\tilde{W})_{(JX, k)} = \mu(\tilde{Z}, \tilde{W})_{(JX, k)} = \omega(Z_g, W_g).$$

Obtemos assim uma 2-forma fechada em $\text{SO}^+(1, 3)$ que é J -invariante. Agora, dado $k \in \text{SO}^+(1, 3)$, tal que $k = f(0, k)$, assim

$$\omega(Z_k, W_k) = \mu(\tilde{Z}, \tilde{W})_{(0, k)},$$

pelo **teorema 9.12**

$$\omega(Z_k, W_k) = \text{Im}(\kappa(E_0 \circ \text{Ad}(k)Z, \text{Ad}(k)\overline{W})) = \text{Im}(\kappa(\text{Ad}(k)Z, \text{Ad}(k)\overline{W})),$$

pois $JX = 0 \Rightarrow E_{JX} = I$. Como $\kappa(\text{Ad}(k)Z, \text{Ad}(k)\overline{W}) = \kappa(Z, \overline{W})$, temos

$$\omega(Z_k, W_k) = \text{Im}(\kappa(E_0 \circ \text{Ad}(k)Z, \text{Ad}(k)\overline{W})) = \omega(Z_e, W_e)$$

$\Rightarrow \omega(Z_k, W_k) = \omega(Z_e, W_e) = \omega(Z, W)$, com $e = f(0, e) \in \text{SO}^+(1, 3)$.

Temos o seguinte resultado

Teorema 9.16 Existe uma 2-forma fechada ω , compatível com a estrutura complexa J , $\text{SO}(3)$ -invariante, não-degenerada que define uma estrutura pseudo-Kähler em $\text{SO}^+(1, 3)$, isto é, para campos Z, W

$$h(Z, W) = \omega(JZ, W) + i\omega(Z, W),$$

é uma estrutura pseudo-Kähler, $\text{SO}(3)$ -invariante em $\text{SO}^+(1, 3)$.

Através do homomorfismo $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}^+(1, 3)$, construído no **capítulo 7**, podemos transferir a forma pseudo-Kähler de $\text{SO}^+(1, 3)$ para $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ via *pullback*. Definimos a 2-forma fechada η em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, tal que

$$\eta(V_g, U_g) = \omega(\varphi_* V_g, \varphi_* U_g), \text{ para todo } g \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Considerando $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ como a álgebra dos campos invariantes a esquerda, para cada $V \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, temos um campo $\varphi_*(L_g)_*V = \varphi_*V_g$ em $\text{SO}^+(1, 3)$, temos ainda que $\varphi_*(L_g)_*V = (L_{\varphi(g)})_*\varphi_*V$. Como $\varphi_*(\mathfrak{su}(2)) = \mathfrak{t} = \mathfrak{so}(3)$, se $g = e^X$, com $X \in \mathfrak{su}(2)$, segue que

$$\eta(V_g, U_g) = \omega(\varphi_*V_g, \varphi_*U_g) = \omega((L_{\varphi(g)})_*\varphi_*V, (L_{\varphi(g)})_*\varphi_*U),$$

para todo $V, U \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Mas, $\varphi(g) = \varphi(e^X) = e^{\varphi_*X} \in \text{SO}(3) \Rightarrow \eta(V_g, U_g) = \eta(V, U)$, pois ω é $\text{SO}(3)$ -invariante. Como $\text{SU}(2) = \langle \exp(\mathfrak{su}(2)) \rangle$, segue que η é $\text{SU}(2)$ -invariante.

Para ver que η é compatível com a estrutura complexa canônica J_0 , observamos que

$$\eta(J_0V_g, J_0U_g) = \omega((\varphi_*J_0V_g), (\varphi_*J_0U_g)).$$

Como a estrutura induzida em $\text{SO}^+(1, 3)$ é dada por $J = \varphi_* \circ J_0 \circ \varphi_*^{-1}$, segue que $\eta(J_0V_g, J_0U_g) = \eta(V_g, U_g)$.

Dessas observações segue o corolário

Corolário 9.17 *Existe uma 2-forma fechada η não-degenerada, compatível com J_0 , $\text{SU}(2)$ -invariante que define uma estrutura pseudo-Kähler em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, isto é, para campos V, U*

$$B(V, U) = \eta(J_0V, U) + i\eta(V, U),$$

é uma estrutura pseudo-Kähler, $\text{SU}(2)$ -invariante em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

A construção desta estrutura pseudo-Kähler através do pullback de estruturas geométricas de $T^*(\text{SO}(3))$ é semelhante a construção feita em [22], onde se investigam as estruturas hiperkahler no fibrado cotangente de grupos de Lie complexos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Andrada, A.; Barberis, M. L.; Dotti, I. Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras. *J. Lond. Math. Soc. (2)* 83 (2011), no. 1, 232255.
- [2] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd edition, GTM 60, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1989.
- [3] Arvanitoyeorgos, A.; *An introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, Student Mathematical Library Vol. 22, American Mathematical Society 1999.
- [4] Arvanitoyeorgos, A.; Mori, K.; Sakane, Y. Einstein metrics on compact Lie groups which are not naturally reductive, *Geom. Dedicata* (2012) 160:261285, 1 December 2011, Springer Science+Business Media B.V. 2011.
- [5] Azecontt, R.; Wilson, E. Homogeneous manifolds with negative curvature, Part I, *Trans. Amer. Math. Soc.* 215 (1976), 323-362.
- [6] B. San Martin, Luiz *Álgebras de Lie*, 2a edio, Editora da Unicamp, 2010.
- [7] B. San Martin, Luiz *Grupos de lie*. Notas de aula. 2006. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2006/>.
- [8] Bishop, R. L.; Crittenden, R. J. *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.
- [9] Bremigan, Ralph J. Pseudo-Kähler forms on Complex Lie Groups, *Documenta Math*, July 26, 2000.

- [10] Campoamor-Stursberg, Rutwig; Ovando, Gabriela P. Invariant complex structures on tangent and cotangent Lie groups of dimension six. *Osaka J. Math.* 49 (2012), no. 2, 489-513.
- [11] Cao, Xiaodong; Guckenheimer, John; Saloff-Coste, Laurent The backward behavior of the Ricci and cross-curvature flows on $SL(2, \mathbb{R})$. *Comm. Anal. Geom.* 17 (2009), no. 4, 777-796.
- [12] D'Atri, J. E.; Ziller, W. Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* 18 (1979)
- [13] Eliasson, H. On variations of metrics, *Math. Scand.* 29 (1971) 317-327.
- [14] Gallier, Jean: Notes on Differential Geometry and Lie Groups, University of Pennsylvania, december 7, 2012. Disponível em: <http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/manif.html>.
- [15] Gromoll, D.; Klingenberg, W.; Meyer, W. *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes in Mathematics no. 55, Springer, New York, 1968.
- [16] Heintze, E. On homogeneous manifold of negative curvature, *Math. Ann.* 211 (1974), 23-34.
- [17] Humphreys, J.E. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer - GTM 9.
- [18] Iwasawa, K. On some type of topological groups, *Ann. Math.* 50 (1949), 507-558.
- [19] Knapp, A. W. *Lie groups: Beyond an introduction*. Birkhäuser, Boston (1996).
- [20] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*, vol. 1. John Willey & Sons (1963).
- [21] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*, vol. 2. John Willey & Sons (1969).
- [22] Kronheimer, P.B. Hyperkähler structure on cotangent bundle of complex Lie group, june 1988.
- [23] Besse, A. *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1997.
- [24] Lauret, Jorge; Will, Cynthia Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions. *Math. Ann.* 350 (2011), no. 1, 199-225.

- [25] Leite, M. L.; D. Miatello, I. Metrics of negative Ricci curvature on $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$, J. Differential Geometry 17 (1982), 635-641.
- [26] M. Lee, J. Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature, Graduate text in mathematics; 176.
- [27] Magnin, Louis Left invariant complex structures on $U(2)$ and $SU(2) \times SU(2)$. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 56 (2011), no. 1, 8384.
- [28] Montgomery, D.; Zippin, L. Topological Transformation Groups. New York: Interscience, 1955.
- [29] Nomizu, K., Lie groups and Differential Geometry, The Mathematical Society of Japan (1956).
- [30] Ovando, Gabriela Invariant complex structures on solvable real Lie groups. Manuscripta Math. 103 (2000), no. 1, 1930.
- [31] Ovando, Gabriela Complex, symplectic and Kähler structures on four dimensional Lie groups. Rev. Un. Mat. Argentina 45 (2004), no. 2, 5567 (2005).
- [32] Pontrjagin, L. S. Topological Groups. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1939.
- [33] Salamon, S. M. Complex structures on nilpotent Lie algebras. J. Pure Appl. Algebra 157 (2001), no. 2-3, 311333.
- [34] Smith, B. H. An Introduction to complex, Kähler and locally conformal Kähler geometry.
- [35] Thurston, W. P. Some simple examples of Symplectic Manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 467-468.
- [36] Urakawa, H. On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, J. Math. Soc. Japan, Vol 31 1, 1979.
- [37] Varadarajan, V.S. Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations, GTM 102, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.
- [38] W. Milnor, J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, Advances in Math. 21 (1976).
- [39] W. Warner, Frank: Foundation of Differentiable Manifold and Lie Group, University of Pennsylvania, Springer - GTM, 2010.

- [40] Wallach, N. Compact Homogeneous Riemannian manifold with strictly positive curvature, *Ann. Math.* 96(1972), 277-295.
- [41] Weinstein, A. Distance spheres in complex projective spaces, *Proc. Amer. Mat. Soc.* 39 (1973), 649-650.
- [42] Willians, Bradford, M. Explicit Ricci Solitons on Nilpotent Lie Groups, *J. Geom. Anal* (2013) 23:4772, 13 May 2011, Mathematica Josephina, Inc. 2011.
- [43] Wolf, J. Curvature in nilpotent Lie groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 15 (1964).