

Simetrias de Lie e Soluções Exatas de Equações Diferenciais Quaselineares

Antonio Carlos Gilli Martins

12 de dezembro de 2002

Conteúdo

1	Introdução	5
2	O Problema de Liouville-Gelfand	9
2.1	Introdução	9
2.2	As Simetrias de Lie: caso quasilinear	11
2.3	As Simetrias de Lie: caso semilinear	17
2.4	As Simetrias de Nöther	20
2.5	O Caso $N = 2$	26
3	Sobre o Problema Quasilinear Geral	29
3.1	Introdução	29
3.2	Simetrias de Lie: caso quasilinear com $f(y)$ geral	32
3.3	Simetrias de Lie para $f(y) = \lambda y^p$	36
3.4	As Simetrias de Nöther	40
3.5	As Simetrias de Lie no caso semilinear	44
3.6	Aplicações	46
3.6.1	O Problema de Liouville-Gelfand	46
3.6.2	Sobre a Equação de Boltzmann	47
3.6.3	Sobre a Equação de Lane-Emden generalizada	50
3.7	Comentários e observações finais	52
4	O Sistema de Lane-Emden	55
4.1	Introdução	55
4.2	Cálculo das Simetrias	58
4.3	As Simetrias de Nöther do Sistema	65
4.4	Uma primeira integral	69

A	Observações sobre o procedimento geral	71
A.1	Introdução	71
A.2	Grupo de Transformações	71
A.3	Transformações Infinitesimais	72
A.4	Símbolo da Transformação Infinitesimal.	73
A.5	Grupo Gerado por uma Transformação Infinitesimal	74
A.6	Invariantes	77
A.7	Família de Curvas Invariantes	80
A.8	Mudança de Variáveis e Variáveis Canônicas	81
A.9	Segunda Extensão de um Grupo	84
A.10	Simetrias de Lie de uma equação diferencial	87
A.10.1	Simetrias de um sistema de equações diferenciais	89
A.11	Equação diferencial de segunda ordem.	92
A.12	Aplicação do procedimento	93
B	O Lema de Lagrange	101

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese aplicaremos a chamada Grupo-Análise ao estudo de equações diferenciais e à obtenção das suas soluções exatas. A Grupo-Análise (*Group Analysis*) constitui-se na utilização da teoria dos Grupos Contínuos de Transformações na resolução de problemas de Análise ou Equações Diferenciais e é um método geralmente conhecido de descrição das simetrias dos modelos matemáticos contínuos. Essa abordagem é baseada na Teoria dos Grupos Contínuos de Transformações desenvolvido por Sophus Lie no fim do século XIX e é, grosso modo, uma reunião de idéias algébricas e geométricas com idéias de análise. O desenvolvimento intensivo da teoria dos grupos contínuos levou à criação de uma nova vertente em Matemática: a Teoria dos Grupos e das Álgebras de Lie. Desde o início, os propósitos de Lie eram os da criação de uma teoria completa sobre a integração de equações diferenciais, mas todo o seu trabalho, nos problemas de integração, acabou sendo basicamente esquecido. Supõe-se que isso tenha sido causado pelo fato que seus métodos de integração desenvolvidos não consistiam numa ferramenta matemática universal, no sentido que nem todos os sistemas de equações diferenciais possuíam grupos não triviais de transformações. Uma discussão sobre essa questão pode ser encontrada em [25].

Posteriormente, o enfoque dado por Lie às equações diferenciais foi utilizado por pesquisadores mais voltados às aplicações, uma vez que os modelos usados em Física e Mecânica possuem, via de regra, simetrias básicas descritas por grupos de transformações. O conhecimento de tais grupos revela consideráveis informações para o estudo do modelo matemático. Em particular, uma propriedade do grupo de transformações de um sistema de equações diferenciais torna possível distinguir classes de soluções invariantes pela ação

do grupo. A descoberta desses invariantes, além de ser um problema mais simples de se resolver do que o de achar uma solução geral, permite obter novas soluções a partir das já conhecidas. Essa circunstância adquire uma importância especial no estudo dos modelos não lineares onde cada solução exata desempenha um papel relevante e onde os métodos da Grupo-Análise atuam tão bem como efetivamente para os problemas lineares. Observa-se ainda que, em contraste com os métodos tradicionais, estes não usam a linearização do modelo original. Acredita-se que a ampla pesquisa das propriedades de grupos no conjunto dos modelos da Física-Matemática desenvolvidos na década de 1960 está relacionada com essas circunstâncias.

Contrariamente ao que se poderia pensar, a Grupo-Análise não se esgota pelos seus métodos de construção de soluções especiais de um sistema de equações diferenciais. Já desde o início do século passado a conexão das simetrias de um modelo matemático com leis de conservação achou uma formulação construtiva na forma dos Teoremas de Nöther. Como leis de conservação, na maioria das vezes, são bases para a construção de modelos matemáticos, os teoremas de Nöther apontam para o papel fundamental que as simetrias têm aí. Destaca-se, a bem da verdade, que a consideração das simetrias foi fundamental e decisiva na criação da Mecânica Quântica, na teoria das partículas elementares e em outras áreas.

O problema que será o principal objeto de estudo nesta tese se resume da seguinte maneira:

Ph. Clement, D. de Figueiredo e E. Mitidieri introduziram, no fundamental artigo *Quasilinear Elliptic Equations with Critical Exponents*, [7], a seguinte classe de equações diferenciais ordinárias quasilineares:

$$-(x^\alpha |y'|^\beta y')' = x^\gamma f(y) ,$$

onde α, β e γ são números reais, $x > 0$, $y = y(x)$ e f é uma função não negativa. Nele os autores abordam tais equações usando técnicas variacionais, e, entre outros resultados, obtiveram, em alguns casos, fórmulas explícitas para suas soluções exatas. Fazem suposições básicas de relações entre os parâmetros α, β e γ para decidirem sobre a existência ou a não existência de soluções quando essas relações são, ou não são, verificadas.

Nesta tese abordamos a mesma classe de equações diferenciais acima citada e, sob a ótica das *Simetrias de Lie*, e em particular das que são *Simetrias de Nöther* dessas equações, justificamos a validade das relações entre os parâmetros, por eles utilizadas, na obtenção das soluções exatas das referidas

equações. Nesse sentido estabelecemos uma relação entre as equações diferenciais não-lineares envolvendo expoentes críticos e suas simetrias de Nöther. Este é o principal resultado da tese. A concretização dessa relação está apresentada nos capítulos a seguir. Acreditamos que tal relação vale em contexto mais geral do que o aqui considerado.

No capítulo 2 abordaremos o Problema de Liouville-Gelfand, caso particular do supra mencionado, que consiste em achar as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda e^u & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

considerando Ω a bola aberta no $\mathbb{R}^N$ com centro na origem, raio R e onde λ é um parâmetro real. Nele responderemos às indagações que surgem, naturalmente, da relação existente entre os parâmetros e a natureza do problema.

No capítulo 3, a generalização proposta será analisada pela mesma metodologia do capítulo 2 para quando as equações forem quasilineares, $\beta \neq 0$, com $f(x)$ geral e para o caso específico $f(x) = \lambda y^p$, sendo p um número positivo. Após os cálculos das simetrias e da análise das que são de Nöther obtemos os teoremas que fornecem um caminho para a obtenção das soluções exatas, inclusive para o caso semilinear, $\beta = 0$, e $f(x)$ geral.

No capítulo 4 iremos provar um teorema, conjectura proposta por E. Mitidieri, sobre a forma que as simetrias de um sistema de equações diferenciais de Lane-Emden assumem. Como metodologia usaremos uma generalização, para sistemas, do processo de obtenção das simetrias, quando elas existem.

No apêndice A são apresentados alguns elementos básicos da Teoria de Lie, relações que permitem o cálculo das simetrias, tanto para as equações como para o sistema, além de um exemplo da aplicação do método com todos os detalhes: desde a obtenção das simetrias, das mudanças de variáveis até a solução exata da equação.

No apêndice B apresentamos o Lema de Lagrange, usado para o cálculo das simetrias de Nöther.

Mais detalhes introdutórios sobre os assuntos a serem abordados serão dados nos inícios de cada capítulo.

Devemos ressaltar que estaremos chamando as Simetrias de pontos de Lie, ou ainda Simetrias pontuais de Lie, (*Lie point Symmetries*), de, simplesmente, Simetrias de Lie durante todo o desenvolvimento desse trabalho.

Em conclusão gostaríamos de destacar que, apesar de a Grupo-Análise ter

sido muito útil na resolução de uma grande variedade de problemas, inclusive os acima propostos, outros problemas mais recentes da Física-Matemática apresentaram, por essa metodologia, uma série de questões que não encontravam solução dentro da Teoria de Lie. Outras transformações, mais gerais que aquelas de caráter pontual, e que preservavam equações diferenciais, foram encontradas. Para uma melhor iteração com essas outras simetrias vide [30].

Capítulo 2

O Problema de Liouville-Gelfand

2.1 Introdução

Considere Ω a bola aberta no $\mathbb{R}^N$ com centro na origem e raio R . O problema de achar as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda e^u & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u &> 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde λ é um parâmetro real, é chamado de *O Problema de Liouville-Gelfand*. Ele foi estudado por Liouville [17] que achou soluções explícitas em dimensão $N = 1$, e também, no caso $N = 2$, a solução geral de (2.1) em termos de uma função harmônica arbitrária. Posteriormente Bratu [5] achou duas soluções explícitas de (2.1) quando $0 < \lambda < 2/R^2$ e $N = 2$. O resultado significativo seguinte foi obtido por Gelfand em [10] que considerou, entre outras coisas, o problema de auto ignição térmica de uma mistura ativa de gases no plano e em vasos cilíndricos e esféricos. Em particular, quando $N = 3$, ele pesquisou os valores de λ para os quais o problema tinha uma solução e estudou a multiplicidade de tais soluções.

Pode-se notar que se $\lambda \leq 0$ ou se $\lambda > \lambda^*$, para uma certa constante positiva λ^* , não há solução para o problema (2.1). Ainda mais, pelo conhecido resultado devido a Gidas, Ni e Nirenberg, se uma solução existe, então ela deve ter simetria radial. Desse modo o problema em questão pode ser re-

duzido ao caso da solução da equação diferencial ordinária abaixo

$$\begin{cases} y'' - \frac{N-1}{x}y' = \lambda e^y & \text{em } (0, R), \\ y'(0) = y(R) = 0, \\ y > 0 & \text{em } [0, R), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $x \geq 0$ é norma Euclidiana de um vetor no $\mathbb{R}^N$ e $y = y(x)$ é uma função radial em Ω . Posto dessa forma, o problema se torna mais abordável e sugere uma das possíveis generalizações do Problema de Liouville-Gelfand, a saber: existe uma classe de operadores radiais quase lineares dados por

$$Ly = - \left(x^\alpha |y'|^\beta y' \right)' x^{-\gamma} \quad (2.3)$$

considerados em [7] e, em cuja definição, os parâmetros α , β e γ são números reais que satisfazem algumas relações que serão especificadas brevemente. Observa-se ainda que esta classe contém os seguintes operadores que agem sobre funções radiais definidas em Ω :

- 1) Operador de Laplace se $\alpha = \gamma = N - 1$, $\beta = 0$;
- 2) Operador p -Laplace se $\alpha = \gamma = N - 1$, $\beta = p - 2$;
- 3) Operador k -Hessiano se $\alpha = N - k$, $\gamma = N - 1$, $\beta = k - 1$.

Clement, de Figueiredo e Mitidieri propuseram, em [7], a seguinte generalização de (2.2) em termos de L :

$$\begin{cases} - \left(x^\alpha |y'|^\beta y' \right)' = \lambda x^\gamma e^y & \text{em } (0, R), \\ y'(0) = y(R) = 0, \\ y > 0 & \text{em } [0, R), \end{cases} \quad (2.4)$$

onde

$$\alpha - \beta - 1 = 0, \quad \beta > -1, \quad \gamma > -1. \quad (2.5)$$

Eles acharam a constante λ^* acima mencionada, provaram que existe uma única solução de (2.4) quando $\lambda = \lambda^*$ e que existem exatamente duas soluções

se $0 < \lambda < \lambda^*$. Mais ainda, usando o método das primeiras integrais, determinaram as formas explícitas dessas soluções.

A relação $\alpha = \beta + 1$ foi essencialmente usada em [7]. Ela corresponde ao caso chamado Caso de Pohozaev-Trudinger e está relacionada com a perda da compacidade do tipo exponencial de certos mergulhos. Neste capítulo pretende-se responder às indagações que naturalmente podem aparecer quanto à relação entre a condição $\alpha = \beta + 1$ e a natureza do problema (2.4), clarificar o contexto em que ela aparece e responder porquê foi possível achar as soluções explicitamente. Para esse propósito o problema será abordado sob o ponto de vista da *Teoria das Simetrias de pontos de Lie para equações diferenciais*.

A estratégia a ser adotada será a seguinte: calcular o Grupo de Simetrias ou, simplesmente, as Simetrias de Lie de (2.4), Teoremas 2.1 e 2.2. Depois disso buscar, entre elas, aquelas que são Simetrias de Nöther. Com isso provamos o principal resultado desse capítulo, o Teorema 2.6, que afirma que uma Simetria de Lie do problema (2.4) é uma Simetria de Nöther se, e somente se, $\alpha = \beta + 1$. De posse da Simetria de Nöther determina-se uma das primeiras integrais usadas em [7] e da qual imediatamente se obtêm as soluções da equação diferencial desejada sem o uso de outras primeiras integrais. Nesse sentido mostramos que as soluções explícitas podem ser obtidas por técnicas envolvendo simetrias e que os vários teoremas estão relacionados nos casos dos expoentes críticos.

Nos parágrafos 2.2 e 2.3 serão calculadas as simetrias de (2.4) nos casos $\beta \neq 0$ e $\beta = 0$, *quasilinear e semilinear* respectivamente. No parágrafo 2.4, de acordo com as Simetrias de Nöther, serão encontradas uma primeira integral e depois a solução exata. Finalmente, em 2.5, é feita uma breve discussão sobre o caso particular $N = 2$.

Os resultados deste capítulo foram publicados em [2].

2.2 As Simetrias de Lie: caso quasilinear

Vamos calcular as Simetrias de Lie de (2.4) com as condições

$$\beta > -1, \beta \neq 0 \text{ e } \gamma > -1. \quad (2.6)$$

Recordando que as Simetrias de Lie são determinadas pelos seus geradores infinitesimais

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.7)$$

precisamos calcular as funções $\xi := \xi(x, y)$ e $\eta := \eta(x, y)$ que as definem. Para tanto reescrevemos a equação (2.4) na forma

$$y'' = -\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{y'}{x} - \frac{\lambda}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} |y'|^{-\beta} e^y := \omega(x, y, y'). \quad (2.8)$$

Observe-se que a solução de (2.4), se existir, deve satisfazer $y' < 0$ em $(0, R)$, conforme [7]. Substituindo

$$\omega_x = \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{y'}{x^2} - \frac{\lambda(\gamma-\alpha)}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha-1} |y'|^{-\beta} e^y,$$

$$\omega_y = -\frac{\lambda}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} |y'|^{-\beta} e^y \quad \text{e}$$

$$\omega_{y'} = -\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{1}{x} - \frac{\lambda\beta}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} |y'|^{-\beta-1} e^y$$

na identidade (4.11), [30], página 28, ou (A.47), que determina as Simetrias de Lie de uma equação diferencial de segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{\eta_x}{x} + \eta_{xx} + y' \left[\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{\xi_x}{x} - \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{\xi}{x^2} + 2\eta_{xy} - \xi_{xx} \right] + \\ & + y'^2 \left[\frac{2\alpha}{\beta+1} \frac{\xi_y}{x} + \eta_{yy} - 2\xi_{xy} \right] - y'^3 \xi_{yy} + |y'|^{-\beta-1} \frac{\lambda\beta}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} e^y \eta_x + \\ & + |y'|^{-\beta} \left[-\lambda x^{\gamma-\alpha} e^y \eta_y + \frac{\lambda(\beta+2)}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} e^y \xi_x + \frac{\lambda(\gamma-\alpha)}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha-1} e^y \xi + \frac{\lambda x^{\gamma-\alpha}}{\beta+1} e^y \eta \right] + \\ & - |y'|^{-\beta+1} \frac{\lambda(\beta+3)}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} e^y \xi_y = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como as funções ξ e η não dependem de y' , todos os coeficientes das potências de y' devem ser identicamente nulos. Uma vez que $\beta > -1$, $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$, igualando a zero o coeficiente de $|y'|^{-\beta-1}$ implica que

$$\eta_x = 0$$

e assim η é função apenas da variável y , que será denotada por

$$\eta := b(y). \quad (2.10)$$

Para obter as informações relevantes sobre ξ devemos ser um pouco mais cautelosos. Como $\beta > -1$ e $\beta \neq 0$ segue que $-\beta + 1 \neq 3$, $-\beta + 1 \neq 2$ e $-\beta + 1 \neq 1$. Entretanto é possível o caso $-\beta + 1 = 0$. Com isso temos então dois casos : $\beta \neq 1$ e $\beta = 1$.

(i) Se $\beta \neq 1$, $-\beta + 1 \neq 0$ e, uma vez que $\lambda \neq 0$ e $\beta + 3 \neq 0$, igualando o coeficiente de $|y'|^{-\beta+1}$ a zero obtemos que

$$\xi_y = 0$$

e, portanto, ξ é uma função só de x , denotada por

$$\xi = a(x). \quad (2.11)$$

(ii) Seja agora $\beta = 1$. O termo livre da identidade (2.9) se transforma em

$$\frac{\alpha}{2} \frac{\eta_x}{x} + \eta_{xx} - 2\lambda x^{\gamma-\alpha} e^y \xi_y = -2\lambda x^{\gamma-\alpha} e^y \xi_y$$

uma vez que η é função apenas da variável y . O lado direito da igualdade acima deve ser nulo e isso ocorre quando, e apenas quando,

$$\xi_y = 0,$$

pois $\lambda \neq 0$. Mais uma vez conclui-se que ξ é uma função só de x . Dessas duas possibilidades temos sempre que

$$\xi = a(x).$$

Usando agora que $\xi = a(x)$ e $\eta = b(y)$, o coeficiente de y'^2 se transforma em η_{yy} e seu anulamento impõe que η seja linear em y . Assim, para constantes reais A e B ,

$$\eta := b(y) = Ay + B. \quad (2.12)$$

Agora, explorando mais uma vez as formas de ξ e de η , calculando suas derivadas e as substituindo no coeficiente de $|y'|^{-\beta}$, o qual também deve se anular, resulta que

$$A = 0, \eta = B = \text{const.} \quad (2.13)$$

e que

$$(\beta + 2) a' + (\gamma - \alpha) \frac{a}{x} + B = 0. \quad (2.14)$$

Para finalizar, o anulamento do coeficiente de y' nos fornece a equação de Euler seguinte

$$x^2 a'' - \frac{\alpha}{\beta + 1} x a' + \frac{\alpha}{\beta + 1} a = 0 \quad (2.15)$$

cujas equação indicial é

$$m(m - 1) - \frac{\alpha}{\beta + 1} m + \frac{\alpha}{\beta + 1} = 0 \quad (2.16)$$

que tem duas raízes:

$$m_1 = 1$$

e

$$m_2 = \frac{\alpha}{\beta + 1}.$$

Assim temos vários casos a serem considerados :

I.) $m_1 = m_2 = 1$. Essa condição diz que a equação indicial tem raiz dupla se, e somente se, $\alpha = \beta + 1$. Note que esta é a primeira vez que a relação $\alpha - \beta - 1 = 0$ aparece. Neste caso a equação de Euler(2.15) acima tem por solução

$$a(x) = c_1 x + c_2 x \ln x \quad (2.17)$$

cujas constantes c_1 e c_2 devem ainda ser determinadas. Para tanto, substituindo $a(x)$ acima na equação (2.14) vamos obter

$$(\beta + 2)(c_1 + c_2) + (\gamma - \alpha)c_1 + B + c_2(\beta + 2 + \gamma - \alpha) \ln x = 0.$$

Mas $\beta + 2 + \gamma - \alpha = \alpha + 1 + \gamma - \alpha = 1 + \gamma > 0$. Portanto $c_2 = 0$ e, portanto,

$$c_1 = -\frac{B}{\beta + 2 + \gamma - \alpha} = -\frac{B}{\gamma + 1}.$$

Com isso concluímos, neste caso, que

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{B}{\gamma + 1} x, \\ \eta &= B. \end{cases} \quad (2.18)$$

II.) $m_1 \neq m_2$, ou seja, $\alpha \neq \beta + 1$. Como agora as raízes indiciais são distintas, a equação de Euler correspondente (2.15) tem por solução

$$a(x) = c_1 x + c_2 x^{\frac{\alpha}{\beta+1}}. \quad (2.19)$$

II.1.) Suponha, primeiramente que $\beta + 2 + \gamma - \alpha = 0$. Então a solução geral de (2.14) será dada por

$$a(x) = cx - \frac{B}{\beta+2} x \ln x \quad (2.20)$$

que, sendo comparada com a outra forma possível para $a(x)$, determina

$$\begin{cases} \xi = cx, \\ \eta = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

visto que, por hipótese, $m_2 = \frac{\alpha}{\beta+1} \neq 1$.

II.2.) Seja agora $\beta + 2 + \gamma - \alpha \neq 0$. Neste caso a solução geral de (2.14) é

$$a(x) = cx^{-\frac{\gamma-\alpha}{\beta+2}} - \frac{B}{\beta+2+\gamma-\alpha} x$$

e que, confrontada com (2.14), fornece:

$$-\frac{B}{\beta+2+\gamma-\alpha} x + cx^{-\frac{\gamma-\alpha}{\beta+2}} = a(x) = c_1 x + c_2 x^{\frac{\alpha}{\beta+1}}. \quad (2.22)$$

II.2.1.) Se também tivermos $\alpha + \gamma + \beta\gamma = 0$, em adição a II.2), da igualdade (2.22) acima, decorrerá

$$\begin{cases} \xi = -\frac{B}{\beta+2+\gamma-\alpha} x + c_2 x^{\frac{\alpha}{\beta+1}}, \\ \eta = B. \end{cases}$$

II.2.2.) Se, por outro lado, $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$ e $\beta + 2 + \gamma - \alpha \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi = -\frac{B}{\beta+2+\gamma-\alpha} x, \\ \eta = B. \end{cases}$$

Em resumo, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Seja $\beta \neq 0$. Então o Grupo de Simetrias de Lie de (2.4) é gerado por*

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

onde

I) *se $\alpha = \beta + 1$ então*

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c}{\gamma+1} x, \\ \eta &= c; \end{cases} \quad (2.23)$$

II.1) *se $\alpha \neq \beta + 1$ e $\beta + 2 + \gamma - \alpha = 0$ então*

$$\begin{cases} \xi &= c x, \\ \eta &= 0; \end{cases} \quad (2.24)$$

II.2.1) *se $\alpha \neq \beta + 1$, $\beta + 2 + \gamma - \alpha \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma = 0$ então*

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c}{\beta+2+\gamma-\alpha} x + C x^{\frac{\alpha}{\beta+1}}, \\ \eta &= c; \end{cases} \quad (2.25)$$

II.2.2) *se $\alpha \neq \beta + 1$, $\beta + 2 + \gamma - \alpha \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$ então*

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c}{\beta+2+\gamma-\alpha} x, \\ \eta &= c; \end{cases} \quad (2.26)$$

onde c e C são constantes arbitrárias.

2.3 As Simetrias de Lie: caso semilinear

No parágrafo anterior foram calculadas as Simetrias de Lie de (2.4) supondo que $\beta \neq 0$. Essa condição foi essencialmente usada para concluir que $\eta_x = 0$. Agora iremos calcular as simetrias supondo que

$$\beta = 0 \text{ e que } \gamma > -1. \quad (2.27)$$

Para tanto procederemos como antes, iniciando por escrever a equação diferencial correspondente na forma

$$y'' = -\frac{\alpha}{x}y' - \lambda x^{\gamma-\alpha}e^y := \omega(x, y, y') \quad (2.28)$$

depois substituir ω e suas derivadas na identidade (4.11) [30], página 28, ou (A.47), para obter a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} 0 = & \left(-\frac{\alpha}{x}y' - \lambda x^{\gamma-\alpha}e^y\right)(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') - \left[\frac{\alpha}{x^2}y' - (\gamma - \alpha)\lambda x^{\gamma-\alpha-1}e^y\right]\xi + \\ & - (-\lambda x^{\gamma-\alpha}e^y)\eta - \left(-\frac{\alpha}{x}\right)[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2] + \eta_{xx} + \\ & + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3, \end{aligned}$$

ou ainda, organizando os coeficientes das várias derivadas de y ,

$$\begin{aligned} 0 = & \left[(-\lambda x^{\gamma-\alpha}e^y)(\eta_y - 2\xi_x - \frac{(\gamma - \alpha)}{x}\xi + \eta) + \frac{\alpha}{x}\eta_x + \eta_{xx}\right] + \\ & + \left[\frac{\alpha}{x}\xi_x + 3\lambda x^{\gamma-\alpha}e^y\xi_y - \frac{\alpha}{x^2}\xi + 2\eta_{xy} - \xi_{xx}\right]y' + \\ & + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy} + \frac{2\alpha}{x}\xi_y)y'^2 - \xi_{yy}y'^3. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Igualando ξ_{yy} a zero, pois é o coeficiente de y'^3 , concluimos que

$$\xi = a(x) + h(x)y. \quad (2.30)$$

Calculando $\xi_y = h(x) = h$ e $\xi_{xy} = h'$, onde $h' = \frac{dh}{dx}$, e substituindo em

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} + \frac{2\alpha}{x}\xi_y = 0, \quad (2.31)$$

concluimos que

$$\eta = \left(h' - \frac{h\alpha}{x} \right) y^2 + b(x) y + c(x) \quad (2.32)$$

e, portanto, as equações que determinarão ξ e η sugerem, para eles, polinômios em y cujos coeficientes, que são também funções da variável x , devem ainda ser determinados. Desse modo substituindo no coeficiente de y' os ξ e η propostos pelas respectivas equações, bem como suas correspondentes derivadas, e igualando-o a zero obtemos:

$$\left[3h'' - 4 \left(\frac{h\alpha}{x} \right)' - \frac{\alpha}{x^2} h + \frac{\alpha}{x} h' \right] y + 2b' - a'' - \frac{\alpha}{x^2} a + \frac{\alpha}{x} a' + 3h\lambda x^{\gamma-\alpha} e^y = 0$$

o que implica que $h = 0$ e, conseqüentemente, esta equação acima se reduz à

$$2b' - a'' - \frac{\alpha}{x^2} a + \frac{\alpha}{x} a' = 0 .$$

Analogamente, o anulamento do termo livre implica que $b = 0$. Logo

$$\xi = a(x) \text{ e } \eta = c(x) .$$

Derivando essas funções e as substituindo nos coeficientes, agora reduzidos, obtemos as novas equações diferenciais abaixo, mais simples, que determinarão completamente as funções ξ e η em termos das suas soluções:

$$\eta_y - 2\xi_x - \frac{(\gamma - \alpha)}{x} \xi + \eta = 0 \Leftrightarrow a' + \frac{(\gamma - \alpha)}{2} \frac{1}{x} a = -\frac{c}{2} \quad (2.33)$$

$$\frac{\alpha}{x} \xi_x + 3\lambda x^{\gamma-\alpha} e^y \xi_y - \frac{\alpha}{x^2} \xi + 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0 \Leftrightarrow -a'' + \frac{\alpha}{x} a' - \frac{\alpha}{x^2} a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 a'' - \alpha x a' + \alpha a = 0 \quad (2.34)$$

$$c'' + \frac{\alpha}{x} c' = 0 \quad (2.35)$$

Esta última equação linear homogênea admite dois tipos de soluções que dependem de α :

A1) para $\alpha = 1$, $c(x) = c_1 \ln x + c_2$;

A2) para $\alpha \neq 1$, $c(x) = c_1 x^{1-\alpha} + c_2$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Olhando agora para a Equação de Euler, sua equação indicial

$$m(m-1) - \alpha m + \alpha = 0$$

tem por raízes

$$m_1 = 1$$

e

$$m_2 = \alpha$$

e, com isso, mais uma vez, temos dois casos a considerar:

a.i) $\alpha = 1$, ou seja, $m = 1$ é raiz dupla, $a(x) = k_1 x + k_2 x \ln x$ e

a.ii) $\alpha \neq 1$, então $a(x) = k_1 x + k_2 x^\alpha$, onde k_1 e k_2 são também constantes arbitrárias.

Fazendo as combinações correspondentes A.1) $\longleftrightarrow$ a.i.) e A.2) $\longleftrightarrow$ a.ii.) e levando em consideração que as funções têm ainda que satisfazer a equação

$$a' + \frac{(\gamma - \alpha)}{2} \frac{1}{x} a = -\frac{c}{2}$$

concluimos o seguinte teorema :

Teorema 2.2 *Seja $\beta = 0$. Então o Grupo de Simetrias de Lie de (2.4) é gerado por*

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

onde

I.1) se $\alpha = 1$ então

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c_1}{\gamma+1}x + \frac{c_2}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma+1}x - x \ln x \right), \\ \eta &= c_1 + c_2 \ln x; \end{cases} \quad (2.36)$$

II.1) se $\alpha \neq 1$ e $\gamma \neq -\alpha$ então

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c}{\gamma - \alpha + 2}x, \\ \eta &= c; \end{cases}$$

II.2) se $\alpha \neq 1$, $\gamma = -\alpha$ então

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c_1}{2(\alpha - 1)}x + c_2x^\alpha, \\ \eta &= c_1. \end{cases} \quad (2.37)$$

Aquí c , c_1 e c_2 são constantes arbitrarias.

Para o operador de Laplace temos os seguintes corolários:

Corolário 2.3 *Seja $\alpha = \gamma = N - 1$ e $N \geq 3$. Então*

$$\begin{cases} \xi &= \frac{c}{2}x, \\ \eta &= c. \end{cases} \quad (2.38)$$

Corolário 2.4 *Seja $N = 2$ e $\alpha = \gamma = 1$. Então*

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c_1}{2}x + \frac{c_2}{2}(x - x \ln x), \\ \eta &= c_1 + c_2 \ln x. \end{cases} \quad (2.39)$$

2.4 As Simetrias de Nöther

Nesta secção vamos estudar as simetrias de Nöther de problema (2.4) primeiramente mostrando que ele tem uma estrutura variacional. De fato vale o seguinte lema:

Lema 2.5 *A equação em (2.4) é uma equação de Euler-Lagrange do funcional*

$$J[y] = \int_0^R L(x, y, y') dx,$$

onde a função de Lagrange $L = L(x, y, y')$ é dada por

$$L(x, y, y') = \frac{1}{\beta + 2} x^\alpha |y'|^{\beta+2} - \lambda x^\gamma e^y.$$

Demonstração: Seja $\eta \in C^1[0, R]$ uma função contínua tal que $\eta(0) = 0$ e $\eta(R) = 0$. Para fazermos a variação do funcional

$$J[y] = \int_0^R \left(\frac{1}{\beta + 2} x^\alpha |y'|^{\beta+2} - \lambda x^\gamma e^y \right) dx,$$

consideramos a função

$$g(\varepsilon) := J[y + \varepsilon\eta] = \int_0^R \left(\frac{1}{\beta + 2} x^\alpha |y' + \varepsilon\eta'|^{\beta+2} - \lambda x^\gamma e^{y+\varepsilon\eta} \right) dx,$$

e calculamos sua derivada

$$\begin{aligned} g'(\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon\eta] = \frac{-1}{\beta + 2} \int_0^R (\beta + 2) x^\alpha |y' + \varepsilon\eta'|^{\beta+1} \eta' dx - \lambda \int_0^R x^\gamma e^{y+\varepsilon\eta} \eta dx \\ &= - \int_0^R x^\alpha |y' + \varepsilon\eta'|^{\beta+1} \eta' dx - \lambda \int_0^R x^\gamma e^{y+\varepsilon\eta} \eta dx. \end{aligned}$$

Agora com $\varepsilon = 0$,

$$g'(0) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0} = - \int_0^R x^\alpha |y'|^{\beta+1} \eta' dx - \lambda \int_0^R x^\gamma e^y \eta dx$$

e integrando por partes a primeira das integrais do lado direito, temos

$$\begin{aligned} g'(0) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0} = - \left\{ x^\alpha |y'|^{\beta+1} \eta \right|_0^R - \int_0^R \left(-x^\alpha |y'|^\beta y' \right)' \eta dx \} + \\ &\quad - \lambda \int_0^R x^\gamma e^y \eta dx. \end{aligned}$$

Dadas as condições $y'(0) = 0$, $\eta(0) = 0$ e $\eta(R) = 0$ e como tal derivada deve ser nula, condição necessária para a existência de extremo, resulta que

$$\int_0^R \left[\left(x^\alpha |y'|^{\beta+1} \right)' - \lambda x^\gamma e^y \right] \eta dx = 0,$$

para toda função η com as características descritas. Então o Lema de Lagrange (vide Apêndice B) implica que

$$\left(x^\alpha |y'|^{\beta+1}\right)' - \lambda x^\gamma e^y \equiv 0$$

e

$$\left(x^\alpha |y'|^{\beta+1}\right)' \equiv \lambda x^\gamma e^y,$$

o que, levando em consideração que $|y'| = -y'$, demonstra o desejado. $\square$

Vamos agora considerar os casos I) e II.2.2) do Teorema 2.1. As correspondentes fórmulas para seus geradores infinitesimais podem ser escritas de modo único por

$$\begin{cases} \xi &= -\frac{c}{k}x, \\ \eta &= c, \end{cases} \quad (2.40)$$

onde $k = \beta + 2 + \gamma - \alpha$ em ambos os casos, visto que , para I) temos $\alpha = \beta + 1$ e, portanto, $k = \gamma + 1$, como aparece na sua definição. Então o gerador de tal simetria

$$X = -\frac{x}{k} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

tem sua primeira extensão

$$\hat{X} = -\frac{x}{k} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y'}{k} \frac{\partial}{\partial y'}.$$

De acordo com [30], página 98, $\hat{X}$ será uma simetria de Nöther se a seguinte relação

$$\hat{X}L + (A\xi)L = A(V(x, y))$$

for verificada, onde

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Calculando

$$\hat{X}L = -\frac{1}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta + 2}\right) x^\alpha |y'|^{\beta+2} - \lambda \left(1 - \frac{\gamma}{k}\right) x^\gamma e^y$$

e

$$(A\xi)L = -\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\beta + 2}\right) x^\alpha |y'|^{\beta+2} + \frac{1}{k} \lambda x^\gamma e^y,$$

temos

$$\hat{X}L + (A\xi)L = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta+2} - \frac{1}{\beta+2} \right) x^\alpha |y'|^{\beta+2} - \lambda \left(1 - \frac{\gamma}{k} - \frac{1}{k} \right) x^\gamma e.$$

Portanto $\hat{X}L + (A\xi)L$ será a derivada total de uma função só das variáveis x e y se, e somente se,

$$1 - \frac{\alpha}{\beta+2} - \frac{1}{\beta+2} = \frac{\beta+1-\alpha}{\beta+2} = 0.$$

Assim concluímos que $\hat{X}$ é uma simetria de Nöther se, e somente se, $\alpha = \beta+1$. Os outros casos no Teorema 2.1 podem ser tratados de modo análogo. Esse argumento também é aplicado aos casos do Teorema 2.4, que trata de quando $\beta = 0$. Assim, se $\beta = 0$ a simetria de Lie é uma simetria de Nöther se, e somente se, $\alpha = 1$ e $c_2 = 0$. Note que mais uma vez a relação $\alpha = \beta+1$ vale. Desse modo, o seguinte teorema resume as considerações acima:

Teorema 2.6 *Uma simetria de Lie do problema (2.4) é uma simetria de Nöther se, e somente se, $\alpha = \beta+1$.*

Realmente a simetria de Nöther é variacional uma vez que se $\alpha = \beta+1$ então $k = \gamma+1$ e

$$1 - \frac{\gamma}{k} - \frac{1}{k} = 0$$

o que acarreta em

$$\hat{X}L + (A\xi)L = 0.$$

De agora em diante iremos supor que $\alpha = \beta+1$.

Assim podemos aplicar o Teorema de Nöther (vide [30], página 98), que garante, neste caso, uma primeira integral da forma

$$\phi(x, y, y') = \xi \left(y' \frac{\partial}{\partial y'} - L \right) - \eta \frac{\partial L}{\partial y'}$$

tal que

$$\hat{X}\phi = 0.$$

Usando $\alpha = \beta+1$, $|y'| = -y'$ (veja [7]), obtemos a forma explícita dessa primeira integral

$$\phi(x, y, y') = -\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\gamma+1)} x^{\alpha+1} |y'|^{\alpha+1} - \frac{\lambda}{\gamma+1} x^{\gamma+1} e^y + x^\alpha |y'|^\alpha = \text{const}, \quad (2.41)$$

onde y é uma solução da (2.4). Como $\alpha = \beta + 1 > 0$, $\alpha + 1 > 0$ e $\gamma + 1 > 0$, por continuidade segue que $\phi = 0$. Portanto

$$\psi(x, y, y') := \alpha x^{\alpha+1} |y'|^{\alpha+1} - (\alpha + 1)(\gamma + 1) x^\alpha |y'|^\alpha + \lambda(\alpha + 1) x^{\gamma+1} e^y = 0. \quad (2.42)$$

Note que esta primeira integral é exatamente igual àquela que aparece em [7]. Explicitando y em (2.42) como função de x e de y' e substituindo na equação (2.8)

$$y'' = -\frac{\alpha}{\beta + 1} \frac{y'}{x} - \frac{\lambda}{\beta + 1} x^{\gamma-\alpha} |y'|^{-\beta} e^y := \omega(x, y, y') ,$$

obtemos a equação de Bernoulli em y'

$$(y')' = \frac{\gamma - \alpha + 1}{\alpha} \frac{1}{x} y' + y'^2$$

que pode ser facilmente resolvida e que tem por solução

$$y = -(\alpha + 1) \ln \left| c_1 - \frac{\alpha}{(\alpha + 1)(\gamma + 1)} x^{\gamma+1/\alpha} \right| + c_2 .$$

Da condição de fronteira $y(R) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{(\gamma + 1)^\alpha}{\mu_i (\lambda \mu_i)^{1/\alpha}}, \\ c_2 &= (\alpha + 1) \ln \frac{(\gamma + 1)^\alpha}{(\lambda \mu_i)^{1/\alpha}}, \end{aligned}$$

onde $\mu_{1,2}$ são as raízes de

$$H(\mu) := m\mu^{(\alpha+1)/\alpha} - \mu + 1 = 0 \text{ e } m = \frac{\alpha\lambda^{1/\alpha}R^{(\gamma+1)/\alpha}}{(\alpha+1)(\gamma+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}.$$

As soluções de (2.8) podem ser representadas da seguinte forma:

1.) se $0 < \lambda < \lambda^* := \frac{(\gamma + 1)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)R^{\gamma+1}}$ então existem duas soluções

$$y_{1,2}(x) = -(\alpha + 1) \ln \left(\frac{1}{\mu_{1,2}} + \frac{\alpha (\mu_{1,2})^{1/\alpha}}{(\alpha + 1)(\gamma + 1)^{(\alpha+1)/\alpha}} x^{(\gamma+1)/\alpha} \right) ;$$

2.) se $\lambda = \lambda^*$ então existe apenas uma solução dada por

$$y_0(x) = -(\alpha + 1) \ln \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{\alpha (\mu_0)^{1/\alpha}}{(\alpha + 1)(\gamma + 1)^{(\alpha+1)/\alpha}} x^{(\gamma+1)/\alpha} \right) ,$$

onde μ_0 é a única solução de $H(\mu) = 0$;

3.) se $\lambda \leq 0$ ou se $\lambda > \lambda^*$ não existem soluções.

Concluimos essa secção com as seguintes observações:

i.) Obtivemos as soluções encontradas em [7] apenas aplicando os métodos variacionais e simetrias. Não precisamos usar outra primeira integral

$$\varphi := x^{(\sigma-\gamma-1)/\alpha} \frac{d}{dx} \left(e^{-y(x)/(\alpha+1)} \right)$$

que, de fato, corresponde à uma *simetria dinâmica* .

ii.) Uma vez que nosso problema possui um Lagrangiano, como se nota através do Lema 2.5, usando o método sugerido em [30], página 118, podemos tentar achar uma primeira integral do tipo

$$\frac{1}{\beta + 2} A(x, y) |y'|^{\beta+2} + B(x, y) |y'|^{\beta+1} + C(x, y) y' + D(x, y) .$$

Após os cálculos necessários obtemos que $C(x, y) = 0$ e que

(a) se $\alpha = \beta + 1$, então a primeira integral obtida é a ψ dada acima, é claro!,

(b) se $\alpha \neq \beta + 1$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma = 0$, então

$$\frac{1}{\beta + 2} x^{\alpha-\gamma} |y'|^{\beta+2} + \lambda e^y = c_3 = \text{const}$$

é uma primeira integral para o caso II.2.1), do Teorema 2.1, que pode ser integrado diretamente. Este e outros casos para os quais $\alpha \neq \beta + 1$ serão tratados mais adiante com mais detalhes.

iii.) Se $\alpha = \beta + 1$ a simetria assume a forma (2.40). Por procedimentos usuais, (veja [24, 30]), encontramos a seguinte mudança de variáveis :

$$\begin{cases} y &= v + cs , \\ x &= e^{-cs/(\gamma+1)} \end{cases} \quad (2.43)$$

Como $\hat{X}\psi = 0$, a equação (2.42) admite (2.40) como simetria como determina [30], página 100. Portanto usando a mudança (2.43) em (2.42), esta se tranforma em

$$\alpha |v' + c|^{\alpha+1} - (\alpha + 1) |v' + c|^\alpha + \lambda \frac{(\alpha + 1)c^{\alpha+1}}{(\gamma + 1)^{\alpha+1}} e^v = 0, \quad (2.44)$$

onde $v = v(s)$ e $v' = \frac{dv}{ds}$.

Se $N = 2$, $\beta = 0$ e $\alpha = \gamma = 1$, a equação (2.44) pode ser facilmente resolvida, como será visto na secção a seguir.

2.5 O Caso $N = 2$

Sophus Lie agrupou completamente as equações diferenciais lineares de segunda ordem no caso $N = 2$ em [19] e, em [20], ele classificou as equações diferenciais parciais da forma $u_{x_1 x_2} = f(u)$.

$$u_{x_1 x_2} = f(u).$$

Para completar plenamente a presente secção, daremos a seguir os detalhes para a solução do Problema de Liouville-Gelfand bidimensional. Em particular nós englobamos as soluções encontradas em [5]. Veja também [7]. Na realidade esta é uma *terceira* forma de obter as soluções de Bratu - *por um procedimento baseado na Teoria de Lie*.

Substituindo $\alpha = \gamma = 1$ na equação (2.44) obtemos

$$(v' + c)^2 - 2c(v' + c) + \lambda \frac{c^2}{2} e^v = 0 \quad (2.45)$$

e assim

$$\frac{dv}{ds} = \sqrt{c^2 - \lambda \frac{c^2}{2} e^v}. \quad (2.46)$$

Esta última equação também pode ser obtida fazendo a mudança de variáveis sugerida (2.43) na equação de Liouville resultante quando $\alpha = \gamma = 1$

$$y'' + \frac{1}{x} y' = -\lambda e^y$$

que se tranforma em

$$v'' = -\frac{\lambda c^2}{4} e^v \quad (2.47)$$

e da qual também dá origem à (2.42). Maiores detalhes estão no apêndice.

Através dos métodos usuais de integração do Cálculo, a equação (2.46) resulta em

$$\ln \frac{c - \sqrt{c^2 - \frac{\lambda c^2}{2} e^v}}{c + \sqrt{c^2 - \frac{\lambda c^2}{2} e^v}} = cs + C, \quad (2.48)$$

onde C é uma constante arbitrária e, é óbvio, supomos $c > 0$. Fazendo a volta às variáveis originais x e y , finalmente obtemos

$$\lambda e^y = \frac{8\mu}{(\mu + x^2)^2} \quad (2.49)$$

onde μ é uma constante positiva arbitrária.

Essa equação e a condição de fronteira $y(R) = 0$ impõe, necessariamente, que

$$\lambda\mu^2 + 2(\lambda R^2 - 4)\mu + \lambda R^4 = 0. \quad (2.50)$$

A solução dessa equação quadrática é dada por

$$\mu_{1,2} = \frac{4 - \lambda R^2 \pm \sqrt{(\lambda R^2 - 4)^2 + \lambda R^2}}{\lambda}. \quad (2.51)$$

O discriminante em (2.47) é $16 - 8\lambda R^2$. Assim:

- (i) se $0 < \lambda < \lambda^* = \frac{2}{R^2}$, existem duas soluções;
- (ii) se $\lambda = \lambda^*$, existe apenas uma solução;
- (iii) se $\lambda > \lambda^*$, não existe solução.

No primeiro caso as soluções do Problema de Liouville-Gelfand bidimensional são:

$$y_{1,2}(x) = \ln \left(\frac{8\mu_{1,2}}{\lambda} \right) - 2 \ln (\mu_{1,2} + x^2) .$$

Quando $\lambda = \lambda^* = \frac{2}{R^2}$ então

$$y_0(x) = -2 \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2R^2} \right)$$

é a única solução.

Para finalizar, gostaríamos de observar que poderia ser interessante comparar estas soluções com algumas das soluções numéricas, já conhecidas, do Problema de Liouville-Gelfand.

Capítulo 3

Sobre o Problema Quasilinear Geral

3.1 Introdução

Ph. Clement, D. de Figueiredo and E.Mitidieri introduziram, no fundamental artigo [7], a seguinte classe de equações diferenciais ordinárias quase-lineares:

$$-(x^\alpha |y'|^\beta y')' = x^\gamma f(y), \quad (3.1)$$

onde α, β e γ são números reais, $x > 0$, $y = y(x)$ e f é uma função não negativa. As relações entre esses parâmetros serão especificadas abaixo.

É imprescindível destacar os casos particulares a seguir:

1.) A equação (3.1) é a forma radial das equações diferenciais parciais contendo:

- o operador de Laplace no $\mathbb{R}^N$ se $\alpha = \gamma = N - 1, \beta = 0$;
- o operador p -Laplace $\mathbb{R}^N$ se $\alpha = \gamma = N - 1, \beta = p - 2$;
- o operador k -Hessian $\mathbb{R}^N$ if $\alpha = N - k, \gamma = N - 1, \beta = k - 1$.

2.) A equação (3.1) com $\alpha = \gamma = N - 1, \beta = 0$ e $f(y) = \lambda e^y$ constitui o Problema Liouville-Gelfand.

3.) A Equação de Lane-Emden generalizada do primeiro tipo (ou de

primeira espécie):

$$y'' + \frac{\tilde{\alpha}}{x}y' + \tilde{\beta}x^{\nu-1}y^n = 0, \quad (3.2)$$

pode ser obtida de (3.1) tomando $\beta = 0$, $\alpha = \tilde{\alpha}$, $f(y) = \tilde{\beta}y^n$, e $\gamma = \alpha + \nu - 1$. A equação (3.2) com $\tilde{\alpha} = 2$ é a Equação de Emden-Fowler, e se, além disso, $\nu = 1$, (3.2) é a equação proposta por Lane e estudada detalhadamente por Emden.

Essa equação e seus casos particulares aparecem em astrofísica, mecânica, relatividade geral, várias teorias de gravitação, física atômica e mecânica quântica.

4.) A Equação de Lane-Emden generalizada do segundo tipo (ou de segunda espécie):

$$y'' + \frac{\tilde{\alpha}}{x}y' + \tilde{\beta}x^{\nu-1}e^{ny} = 0. \quad (3.3)$$

5.) A Equação de Boltzmann

$$-(xy')' = x \sum_{i=1}^m \lambda_i k_i e^{-k_i y} \quad (3.4)$$

que é utilizada em um grande número de aplicações, em particular, no estudo biofísico do DNA modelado como uma espiral sobre um cilindro.

A equação (3.1) é considerada para $x \in (0, R)$, $0 < R \leq \infty$, com as condições

$$y'(0) = 0, \quad y(R) = 0, \quad (3.5)$$

e onde são buscadas soluções positivas.

Em [7] vários resultados de existência e de não existência são provados usando técnicas variacionais, a Identidade de Pohozaev, o método de primeiras integrais, etc. Sob esse aspecto, existem dois casos a serem considerados: o caso de Sobolev e o caso de Pohozaev-Trudinger a respeito da perda de compacidade de certos mergulhos entre os espaços de funções aos quais as possíveis soluções pertencem e dependendo do comportamento da não linearidade de $f(y)$. Para a equação (3.1) o caso de Sobolev corresponde à hipótese

$$\alpha - \beta - 1 > 0 \quad \text{e} \quad f(y) = \lambda y^p, \quad (3.6)$$

enquanto que $f(y) = \lambda e^y$ no caso Pohozaev-Trudinger

$$\alpha = \beta + 1. \quad (3.7)$$

Se as equações estivessem expressas em termos de operadores de Laplace, ambos os casos estariam relacionados com os casos excepcionais do Teorema de Sobolev. Observamos que para o caso de Sobolev, os expoentes críticos associados a (3.1) foram determinados em [7]. Seus valores são dados por

$$q^* = \frac{(\gamma + 1)(\beta + 2)}{\alpha - \beta - 1}. \quad (3.8)$$

Entre outros resultados em [7], foram obtidas algumas fórmulas explícitas para as soluções do problema (3.1), com as condições (3.5). É natural surgirem as seguintes perguntas: Qual é a relação entre as condições (3.6) (3.7) e a natureza da equação (3.1)? Em que contexto elas aparecem? Qual é o papel do expoente crítico? Além disso, por que foi possível achar as soluções exatas?

No capítulo 2 essas perguntas foram respondidas para o caso particular que tratava do problema Liouville-Gelfand, ou equivalentemente, o caso Pohozaev-Trudinger (3.7). A abordagem de tal questão foi feita através das Simetrias de Lie das equações diferenciais, metodologia encontrada em [24, 30]. No presente capítulo serão usados os mesmos procedimentos de antes: primeiramente serão obtidas as simetrias de pontos de Lie de (3.1) - Teoremas 3.1, 3.2 e 3.6. Posteriormente serão analisadas as que são simetrias de Nöther. Para o caso de Sobolev (3.6) provamos o principal resultado, Teorema 3.4, que se resume em: Uma simetria de pontos de Lie do problema (3.1) com condições (3.5) em $(0, \infty)$ e (3.6) é uma simetria de Nöther se, e somente se, $p + 1$ é igual ao expoente crítico(?). Então, com a ajuda da simetria de Nöther, achamos uma das integrais primeiras usada em [7], de onde imediatamente se obtém a solução -Teorema 3.5- a função de Bliss, sem o uso de, mais uma vez, nenhuma outra primeira integral. Esse tipo de abordagem do problema permite obter, como casos particulares, os resultados do capítulo anterior. Desse modo mostramos que as soluções exatas podem ser obtidas por técnicas de simetrias.

Em resumo, podemos dizer que o principal objetivo deste capítulo é inter-relacionar uma grande classe de equações diferenciais quasilineares de segunda ordem envolvendo expoentes críticos e as simetrias de Nöther: de fato, as simetrias de tais equações são variacionais e podem ser usadas para

obter as suas soluções exatas. Conjecturamos que essa propriedade deve ser válida em contextos mais gerais.

O capítulo está organizado da seguinte forma: no segundo parágrafo serão obtidas as simetrias de Lie da equação (3.1) no caso quasilinear para uma função $f(y)$ geral. No seguinte será calculado o grupo das simetrias de Lie de (3.1) com a função particular $f(y) = \lambda y^p$ e $\beta \neq 0$. No parágrafo 4 estudaremos as respectivas simetrias de Nöther, achamos uma primeira integral e, a seguir, a solução exata. Posteriormente, parágrafo 5, são obtidas as simetrias do problema para o caso semilinear. No parágrafo 6 alguns casos particulares e aplicações são considerados e, finalmente, o parágrafo 7 contém observações finais e comentários.

Os resultados deste capítulo se encontram em [3].

3.2 Simetrias de Lie: caso quasilinear com $f(y)$ geral

Neste parágrafo vamos calcular as simetrias de Lie para o caso quasilinear $\beta \neq 0$ com função geral $f(y)$. Para os nossos propósitos f será sempre uma função diferenciável e

$$\beta > -1, \quad \beta \neq 0, \quad f(y) > 0. \quad (3.9)$$

Não custa relembrar que uma transformação de pontos é uma simetria de uma equação diferencial se ela leva soluções dessa equação em outras soluções da mesma equação diferencial. Também é determinada pelo seu gerador infinitesimal

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

cuja extensão ou prolongamento de primeira ordem é dado por

$$\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'},$$

onde

$$\eta' = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2;$$

3.2. SIMETRIAS DE LIE: CASO QUASELINEAR COM $F(Y)$ GERAL33

e os subscritos correspondem às derivadas parciais. Lembramos ainda que muitas vezes, por abuso de linguagem, nos referiremos à uma ‘simetria’ querendo dizer seu gerador infinitesimal X .

Para facilitar a compreensão, iremos repetir as fórmulas usadas no capítulo 2 e lembrar que a equação diferencial ordinária de segunda ordem da forma

$$y'' = \omega(x, y, y') \quad (3.10)$$

admite um grupo de simetrias de Lie, ou simplesmente simetrias de Lie, com gerador X se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \omega(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y) - \omega_x\xi - \omega_y\eta - \omega_{y'}[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2] \\ & \eta_{xx} + y'(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y'^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y'^3\xi_{yy} = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

([30], página 28, ou(A.47)).

Escrevendo a equação (3.1) na forma

$$y'' = -\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{y'}{x} - \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\beta+1} |y'|^{-\beta} f(y) =: \omega, \quad (3.12)$$

observamos, mais uma vez, que a solução de (3.1), (3.5), se existir, deve satisfazer $y' < 0$, conforme ([7]).

Usando ω definida em (3.12), calculando suas derivadas

$$\omega_x = \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{y'}{x^2} + \frac{(\alpha-\gamma)}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha-1} |y'|^{-\beta} f(y),$$

$$\omega_y = -\frac{x^{\gamma-\alpha}}{\beta+1} |y'|^{-\beta} f'(y),$$

$$\omega_{y'} = -\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{1}{x} - \frac{\lambda\beta}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} |y'|^{-\beta-1} f(y)$$

e as substituindo em (3.11), obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & \eta_{xx} + \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{1}{x} \eta_x + \left[\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{1}{x} \xi_x - \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{1}{x^2} \xi + 2\eta_{xy} - \xi_{xx} \right] \cdot y' + \\ & + \left[\frac{2\alpha}{\beta+1} \frac{\xi_y}{x} + \eta_{yy} - 2\xi_{xy} \right] \cdot y'^2 - \xi_{yy} \cdot y'^3 + \frac{\beta}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} f(y) \eta_x |y'|^{-\beta-1} + \end{aligned}$$

$$+[-\frac{1}{\beta+1}x^{\gamma-\alpha}f(y)(\eta_y-2\xi_x)+\frac{\gamma-\alpha}{\beta+1}x^{\gamma-\alpha-1}f(y)\xi+\frac{1}{\beta+1}x^{\gamma-\alpha}f'(y)\eta+ \\ -\frac{\beta}{\beta+1}x^{\gamma-\alpha}f(y)(\eta_y-\xi_x)]\cdot|y'|^{-\beta}-\frac{\beta+3}{\beta+1}x^{\gamma-\alpha}f(y)\xi_y\cdot|y'|^{-\beta+1}. \quad (3.13)$$

Como ξ e η não dependem de y' , igualando a zero os coeficientes das potências de y' na equação (3.13) acima, obtemos um conjunto de equações diferenciais parciais lineares mais simples e que determinarão, completamente, as simetrias.

Sendo $\beta > -1$, $\beta \neq 0$ e $f > 0$, igualando a zero o coeficiente de $|y'|^{-\beta-1}$ resulta que

$$\eta_x = 0. \quad (3.14)$$

Portanto η é uma função somente da variável y e que será denotada por :

$$\eta = b(y). \quad (3.15)$$

Como $\beta > -1$ e $\beta \neq 0$, segue que $-\beta+1 \neq 3$, $-\beta+1 \neq 2$ e $-\beta+1 \neq 1$. Se $\beta \neq 1$, então igualando a zero o coeficiente de $|y'|^{-\beta+1}$ temos que

$$\xi_y = 0, \quad (3.16)$$

ξ é uma função apenas de x e que será denotada por:

$$\xi = a(x). \quad (3.17)$$

Vê-se facilmente que se, $\beta = 1$, também se chega à mesma conclusão. Daí que por (3.15), (3.17) e pelo anulamento do coeficiente de y'^2 , concluímos que

$$\eta = b(y) = Ay + B, \quad (3.18)$$

onde A e B são constantes.

Além disso, pelo anulamento do coeficiente de y' , obtemos a seguinte equação de Euler:

$$a'' - \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{1}{x} a' + \frac{\alpha}{\beta+1} \frac{1}{x^2} a = 0. \quad (3.19)$$

Finalmente a substituição de (3.17) e de (3.18) no coeficiente $|y'|^{-\beta}$, o qual também deve se anular, implica que

$$(\beta+2)a'(x) + \frac{\gamma-\alpha}{x}a(x) = \frac{(\beta+1)f(y)A - f'(y)(Ay+B)}{f(y)}. \quad (3.20)$$

3.2. SIMETRIAS DE LIE: CASO QUASELINEAR COM $F(Y)$ GERAL35

Convém observar que estamos usando ' para denotar a derivada ordinária das funções com relação às suas respectivas variáveis, para não carregar demais a notação. Também deve-se notar que o lado esquerdo de (3.20) é uma função apenas de x , enquanto que o lado direito é uma função de y somente. Dessa forma, ambos os lados devem ser iguais à uma constante k . Consequentemente teremos as seguintes duas relações importantes envolvendo os coeficientes das simetrias desejadas:

$$a' + \frac{\gamma - \alpha}{(\beta + 2)} \frac{1}{x} a = \frac{k}{\beta + 2} \quad (3.21)$$

e

$$(\beta + 1)f(y)A - f'(y)(Ay + B) = kf(y). \quad (3.22)$$

Dessa forma provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Sejam $\beta \neq 0$, $\beta > -1$ e $f > 0$. Então o grupo de simetrias de Lie de (3.1) é gerado por*

$$X = a(x) \frac{\partial}{\partial x} + (Ay + B) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde a função $a(x)$ e as constantes A e B satisfazem

$$a'' - \frac{\alpha}{\beta + 1} \frac{1}{x} a' + \frac{\alpha}{\beta + 1} \frac{1}{x^2} a = 0,$$

$$a' + \frac{\gamma - \alpha}{(\beta + 2)} \frac{1}{x} a = \frac{k}{\beta + 2},$$

$$(\beta + 1)f(y)A - f'(y)(Ay + B) = kf(y)$$

para alguma constante k .

A equação (3.22) é uma equação diferencial de primeira ordem com respeito à f . Ela será usada para verificar ou determinar todas as funções f para as quais existem simetrias de Lie não triviais. Entretanto não iremos resolvê-la. Ao invés disso, no próximo parágrafo iremos propor funções específicas e então calcular suas simetrias explicitamente.

3.3 Simetrias de Lie para $f(y) = \lambda y^p$

Neste parágrafo será considerada a equação (3.1) com o seguinte lado direito

$$f(y) = \lambda y^p,$$

para $y > 0$. Aquí $\lambda > 0$ é uma constante, p é um número positivo e $\beta \neq 0$, $\beta > -1$.

Continuando os cálculos iniciados na secção anterior, substituímos $f(y) = \lambda y^p$ em (3.22) e obtemos:

$$[(\beta + 1 - p)A - k] y^p - pB y^{p-1} = 0. \quad (3.23)$$

Assim $B = 0$. Então devemos considerar dois casos: $p \neq \beta + 1$ e $p = \beta + 1$.

(i) Se $p \neq \beta + 1$, como $B = 0$, temos $k = (\beta + 1 - p)A$. Portanto, pelo Teorema 3.1, as simetrias de Lie são determinadas por:

$$X = a(x) \frac{\partial}{\partial x} + Ay \frac{\partial}{\partial y},$$

onde a função $a(x)$ deve satisfazer

$$a'' - \frac{\alpha}{\beta + 1} \frac{1}{x} a' + \frac{\alpha}{\beta + 1} \frac{1}{x^2} a = 0$$

e

$$a' + \frac{\gamma - \alpha}{(\beta + 2)} \frac{1}{x} a = \frac{(\beta + 1 - p)A}{\beta + 2}.$$

A análise direta da solução geral das duas equações acima, cujos detalhes omitimos para não tornar a leitura cansativa, nos levam a vários casos que estão resumidos no seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Seja $\beta \neq 0$, $\beta > -1$ e $p \neq \beta + 1$. então o grupo de simetrias de Lie de (3.1) com $f(y) = \lambda y^p$ é gerado por*

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

onde

I.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma - \alpha + \beta + 2 = 0$, isto é, $\gamma = -1$, então

$$\begin{cases} \xi &= c_1 x + c_2 \ln x, \\ \eta &= Ay; \end{cases} \quad (3.24)$$

II.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= \frac{\alpha - p}{\gamma + 1} Ax, \\ \eta &= Ay; \end{cases} \quad (3.25)$$

III.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 = 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= cx, \\ \eta &= 0; \end{cases} \quad (3.26)$$

IV.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma = 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= \frac{(\beta + 1 - p)(\beta + 1)}{(\beta + 2)(1 - \alpha)} Ax + Cx^{\frac{\alpha}{\beta + 1}}, \\ \eta &= Ay; \end{cases} \quad (3.27)$$

V.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= \frac{\beta + 1 - p}{\gamma - \alpha + \beta + 2} Ax, \\ \eta &= Ay. \end{cases} \quad (3.28)$$

Aqui c, c_1, c_2, A e C são constantes arbitrárias.

(ii) se $p = \beta + 1$, então $B = k = 0$ é o que resulta de(3.23). Neste caso temos a equação de autovalor

$$-(x^\alpha |y'|^\beta y')' = \lambda x^\gamma y^{\beta+1}, \quad (3.29)$$

ou equivalentemente

$$y'' = -\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{y'}{x} - \frac{\lambda}{\beta+1} x^{\gamma-\alpha} |y'|^{-\beta} y^{\beta+1}, \quad (3.30)$$

que foi considerada em [7].

O teorema abaixo é obtido da análise das soluções gerais das equações (3.19) e (3.21) com $B = k = 0$.

Teorema 3.3 *Seja $\beta \neq 0$, $\beta > -1$ e $p = \beta + 1$. então o grupo de simetrias de Lie de (3.1), onde $f(y) = \lambda y^{\beta+1}$ é gerado por*

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

onde

I.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma - \alpha + \beta + 2 = 0$, ou seja, $\gamma = -1$, então

$$\begin{cases} \xi &= cx, \\ \eta &= Ay; \end{cases} \quad (3.31)$$

II.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= 0, \\ \eta &= Ay; \end{cases} \quad (3.32)$$

III.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 = 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= cx, \\ \eta &= Ay; \end{cases} \quad (3.33)$$

IV.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma = 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= Cx^{\frac{\alpha}{\beta+1}} = Cx^{-\gamma}, \\ \eta &= Ay; \end{cases} \quad (3.34)$$

V.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi &= 0, \\ \eta &= Ay. \end{cases} \quad (3.35)$$

Aquí c , A e C são constantes arbitrárias.

Uma vez que o objetivo desse trabalho é esclarecer os resultados de [7] do ponto de vista da Teoria das Simetrias de Lie, vamos impor agora, aos parâmetros, as mesmas condições usadas naquele artigo. A saber: nesta e na próxima secção iremos supor que

$$\beta \neq 0, \quad \beta > -1, \quad \alpha - \beta - 1 > 0, \quad (3.36)$$

e

$$\beta + 1 < p \leq q^* - 1, \quad (3.37)$$

onde o expoente crítico

$$q^* = \frac{(\gamma + 1)(\beta + 2)}{\alpha - \beta - 1}. \quad (3.38)$$

Veja [7].

Corolário 3.4 *Se (3.36) e (3.37) valem, então as simetrias de (3.1) com $f(y) = \lambda y^p$ são determinadas por (3.28)*

Demonstração: É fácil ver que (3.36), (3.37) e (3.38) implicam $\gamma - \alpha + \beta + 2 > 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$. Assim estamos no quinto caso do Teorema 3.2. $\square$

Observação: A condição $\gamma - \alpha + \beta + 2 > 0$ é necessária para a existência de uma solução positiva do nosso problema (veja [7] e as referências lá citadas).

Olhando para o caso $p = \beta + 1$, as hipóteses básicas são

$$\beta > -1, \quad \alpha - \beta - 1 > 0, \quad \gamma > -1, \quad \gamma - \alpha + 1 > 0 \quad (3.39)$$

e a condição $\gamma - \alpha + \beta + 2 \geq 0$ é necessária para a existência de soluções positivas da equação de autovalor (3.29). Vide [7]. As desigualdades $\gamma - \alpha + 1 > 0$ e $\beta > -1$ (veja(3.39)) implicam que temos a desigualdade estrita $\gamma - \alpha + \beta + 2 > 0$. O caso eliminado $\gamma - \alpha + \beta + 2 = 0$ aparenta ser bem

interessante uma vez que permite reduzir (3.29) a uma equação diferencial de primeira ordem que não contém a variável independente. Isso pode ser obtido por mudanças de variáveis sugeridas pela simetria [30]. Nossa hipótese é que a equação resultante, que é do tipo de Equação de Abel, pode ser resolvida explicitamente.

Concluimos este parágrafo observando que as condições (3.39) implicam que as simetrias de Lie de (3.29) são como em (3.35).

3.4 As Simetrias de Nöther

Na secção anterior determinamos as simetrias de Lie da equação quase-linear

$$y'' = -\frac{\alpha}{\beta+1} \frac{y'}{x} - \frac{\lambda x^{\gamma-\alpha}}{\beta+1} |y'|^{-\beta} y^p, \quad (3.40)$$

onde $\beta \neq 0$, $\beta > -1$ e $p \neq \beta+1$, Corolário 3.4. Agora vamos determinar quais delas são simetrias de Nöther. A existência de tais simetrias irá nos permitir resolver completamente a equação diferencial. Antes de tudo observamos que ela tem uma estrutura variacional:

A equação (3.40) é a equação de Euler-Lagrange do funcional

$$J[y] = \int_0^R L(x, y, y') dx,$$

onde a função de Lagrange $L = L(x, y, y')$ correspondente é dada por

$$L(x, y, y') = \frac{1}{\beta+2} x^\alpha |y'|^{\beta+2} - \frac{\lambda}{p+1} x^\gamma y^{p+1}.$$

A demonstração deste Lema é análoga à demonstração do Lema 2.5, no Capítulo 2.

O gerador X da simetria (3.28) tem seu prolongamento, ou extensão, dado por

$$\hat{X} = \frac{\beta+1-p}{\gamma-\alpha+\beta+2} x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \left(1 - \frac{\beta+1-p}{\gamma-\alpha+\beta+2}\right) y' \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Para verificar se $\hat{X}$ determina ou não uma simetria de Nöther precisamos checar a relação seguinte, conforme comentado anteriormente no capítulo 2, ou (veja [30], p. 98, (10.27)):

$$\hat{X}L + (A\xi)L = A(V(x, y)),$$

onde, agora

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y'}$$

g denota o lado direito (3.40). Efetuando os devidos cálculos obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{X}L + (A\xi)L &= \left(1 - \frac{(\beta + 1 - p)(\beta + 1 - \alpha)}{(\gamma - \alpha + \beta + 2)(\beta + 2)}\right) x^\alpha |y'|^{\beta+2} + \\ &\quad - \lambda \left(1 + \frac{(\beta + 1 - p)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha + \beta + 2)(p + 1)}\right) x^\gamma y^{p+1}. \end{aligned}$$

Portanto $\hat{X}L + (A\xi)L$ é uma derivada total de uma função dependendo apenas de x e de y se, e somente se,

$$1 - \frac{(\beta + 1 - p)(\beta + 1 - \alpha)}{(\gamma - \alpha + \beta + 2)(\beta + 2)} = 0$$

o que é equivalente a

$$p = \frac{(\gamma + 1)(\beta + 2)}{\alpha - \beta - 1} - 1 = q^* - 1.$$

Concluimos então que $\hat{X}$ é uma simetria de Nöther se, e somente se,

$$p = q^* - 1.$$

Teorema 3.5 *Uma simetria de Lie da equação (3.40) é uma simetria de Nöther se, e somente se, $p + 1$ é igual ao expoente crítico.*

Neste caso

$$1 + \frac{(\beta + 1 - p)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha + \beta + 2)(p + 1)} = 0,$$

o que implica que $\hat{X}L + (A\xi)L = 0$ e, portanto, que a simetria de Nöther é variacional.

Vamos supor então que $p = q^* - 1$. Assim, pelo Teorema de Nöther ([30], página 99), existe uma primeira integral da forma

$$\phi = \xi(y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L) - \eta \frac{\partial L}{\partial y'}$$

tal que $\hat{X}\phi = 0$. Com isso obtemos a seguinte primeira integral:

$$\frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} x^{\alpha+1} |y'|^{\beta+2} - x^\alpha y |y'|^{\beta+1} + \frac{\lambda}{\gamma + 1} x^{\gamma+1} y^{q^*} = 0 \quad (3.41)$$

sempre que y for uma solução da equação (3.40). Observamos que esta primeira integral é, a menos de uma constante, aquela obtida em [7], página 154, e que lá foi denotada por ψ . Com isso, explicitando $\lambda x^{\gamma-\alpha} y^{q^*-1}$ em (3.41) como função de x e de y' e depois substituindo na equação (3.40) vemos que y' deve satisfazer a seguinte equação diferencial

$$y'' = \frac{(\gamma - \alpha + 1)}{\beta + 1} \frac{1}{x} y' + \frac{\gamma + 1}{\alpha - \beta - 1} \frac{1}{y} y'^2$$

cujas solução, representada abaixo, pode ser obtida facilmente por meio da substituição $y' = vy$ como os livros-texto sugerem e que é devido a Lie [8], usando métodos de simetrias. Nesse sentido, este resultado reafirma o seguinte teorema [7]:

Teorema 3.6 *O problema*

$$\begin{cases} -(x^\alpha |y'|^\beta y')' = \lambda x^\gamma y^{q^*-1} & (0, \infty), \\ y(0) = y_0 > 0, \quad y'(0) = 0, \\ y > 0 & [0, \infty), \end{cases} \quad (3.42)$$

tem uma única solução

$$y_*(x) = (y_0^{-\sigma} + k_0 x^s)^{-1/\sigma}, \quad (3.43)$$

onde

$$\sigma = \frac{\gamma - \alpha + \beta + 2}{\alpha - \beta - 1},$$

$$s = \frac{\gamma - \alpha + \beta + 2}{\beta + 1}$$

e

$$k_0 = \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} \left(\frac{\lambda y_0^\sigma}{\gamma + 1} \right)^{1/(\beta+1)},$$

Note-se que, para domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e para a equação

$$-\Delta u = \lambda u \frac{N+2}{N-2}$$

em Ω , a Identidade de Pohozaev implica a não existência de soluções positivas do problema de Dirichlet. Porém, para soluções radiais positivas num intervalo finito $(0, R)$, vê-se imediatamente que a solução geral $y(x)$ da equação deve ter forma semelhante à equação (3.43) e, daí, é claro que $y(R) = 0$ é impossível. Para evitar esse problema, a seguinte equação é considerada num domínio finito Ω :

$$-\Delta u = \lambda (1 + ku)^p$$

com condições de fronteira de Dirichlet. Esse problema com $k = 1$ foi tratado em [9] com λ , p e Ω variados, onde mais resultados e referências podem ser encontrados. Sua variante radial

$$\begin{cases} (x^{N-1}y')' + \lambda x^{N-1}f(y) = 0 & \text{em } (0, 1) \\ y(1) = y(0) = 0 \end{cases}$$

foi completamente estudada em [21]. Em particular para

$$f(y) = (1 + ky)^p \text{ e } f(y) = \lambda e^y$$

foram obtidas fórmulas explícitas para as soluções exatas.

Observamos ainda que a função y_* é a função de Bliss, vide [7]. Ela aparece em vários contextos e sua importância é devido ao fato de que a igualdade na Inequação de Sobolev é verificada pela função de Bliss (com $\alpha = \gamma = N - 1$, $\beta = 0$), e, de fato, ela produz a melhor constante de Sobolev. O princípio básico de tais considerações é que a prova do Teorema de Sobolev pode ser reduzida à funções radiais e para essas funções se tem a disposição a Inequação de Bliss, que, por sua vez, tem natureza variacional. Uma generalização da Inequação de Bliss foi feita em [7], onde podem ser encontrados maiores detalhes sobre o assunto.

3.5 As Simetrias de Lie no caso semilinear

Se $\beta = 0$ a condição (3.1) se torna semilinear:

$$y'' = -\frac{\alpha}{x} y' - x^{\gamma-\alpha} f(y). \quad (3.44)$$

Podemos supor, sem perda de generalidade que a função f não seja linear. De fato: se $f(y) = \lambda y$ então (3.44) se torna uma equação linear do tipo de Bessel. Se $\gamma - \alpha + 2 > 0$ sua solução geral é dada por

$$y(x) = x^{(1-\alpha)/2} \left[c_1 J_{\frac{\alpha-1}{\gamma-\alpha+2}}(\tilde{x}) + c_2 Y_{\frac{\alpha-1}{\gamma-\alpha+2}}(\tilde{x}) \right],$$

onde

$$\tilde{x} = \frac{2\lambda x^{(\gamma-\alpha+2)/2}}{\gamma - \alpha + 2},$$

$J(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, veja [29]. Se $\gamma - \alpha + 2 = 0$ então (3.44) é uma Equação de Euler cuja solução pode ser facilmente achada.

Por isso estamos supondo que

$$\alpha > 1, \quad \gamma - \alpha + 2 > 0, \quad f > 0. \quad (3.45)$$

No cálculo das simetrias de Lie para o caso quasilinear, no parágrafo 3.2, usamos essencialmente a condição $\beta \neq 0$ para concluir que ξ é uma função só de x e η é uma função de y somente. A situação a seguir, ou seja, o caso em que $\beta = 0$, é ligeiramente diferente. Apesar disso obtemos ainda que

$$\xi = a(x)$$

e

$$\eta = b(x)y + h(x)$$

pelo anulamento dos coeficientes de y'^3, y'^2, y' na identidade que determina as simetrias e pelo fato de estarmos supondo que, agora, f não é uma função linear. Então vamos nos restringir ao caso $f(y) = \lambda y^p$. Para não tornar mais cansativa a leitura desse trabalho serão omitidos os detalhes, por sinal análogos aos demais casos, e será apresentado o resultado obtido:

Teorema 3.7 *Seja $p > 1$ e $p \neq 2$. Então o grupo de simetrias de Lie da equação*

$$y'' = -\frac{\alpha}{x} y' - \lambda x^{\gamma-\alpha} y^p \quad (3.46)$$

é gerado por

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

onde

I.) se $p \neq \frac{\gamma - 2\alpha + 3}{\alpha - 1}$, então

$$\begin{cases} \xi = \frac{1-p}{\gamma-\alpha+2} Ax, \\ \eta = Ay; \end{cases} \quad (3.47)$$

II.) se $p = \frac{\gamma - 2\alpha + 3}{\alpha - 1}$, então

$$\begin{cases} \xi = \frac{1-p}{\gamma-\alpha+2} Ax + \frac{D}{(1-\alpha)^2} x^{2-\alpha}, \\ \eta = \left(A + \frac{D}{1-\alpha}\right) y, \end{cases} \quad (3.48)$$

onde A e D são constantes arbitrárias.

Observação: O caso $p = 2$ deve ser considerado em separado. Ele requer o uso de certas técnicas que não contribuem substancialmente para clarificar a situação. por essa razão não será discutido aqui. Porém ele foi completamente estudado (vide [12, 17]).

Corolário 3.8 *Uma simetria de Lie da equação (3.46) é uma simetria de Nöther se, e somente se,*

$$p = \frac{2\gamma - \alpha + 3}{\alpha - 1}.$$

Neste caso

$$\begin{cases} \xi = -\frac{2}{\alpha-1} Ax, \\ \eta = Ay. \end{cases} \quad (3.49)$$

Demonstração: Em analogia com a prova do Teorema 3.6, é claro que a simetria de Nöther corresponde a $D = 0$ no Teorema 3.8, e

$$p = \frac{2(\gamma + 1)}{\alpha - 1} - 1 = \frac{2\gamma - \alpha + 3}{\alpha - 1}. \quad (3.50)$$

De fato, esse valor obtido para p é tal que

$$p \neq \frac{\gamma - 2\alpha + 3}{\alpha - 1},$$

pois, caso contrário, se tem uma contradição nas constantes usadas em (3.45). Assim, substituindo (3.50) em (3.47) resulta (3.49). $\square$

Esse resultado será usado na próxima secção.

3.6 Aplicações

Nesta secção obtemos como casos particulares de nossa abordagem da equação(3.1) alguns resultados correspondendo às várias aplicações. Para maiores detalhes vide [1, 6, 12, 13, 16, 17, 18, 28, 7, 2].

3.6.1 O Problema de Liouville-Gelfand

No Capítulo 2 mostramos que as soluções exatas podem ser determinadas por técnicas de simetrias. Apesar de parecer óbvio, agora podemos facilmente reforçar esse resultado de um ponto de vista geral.

Para início tomemos $\beta \neq 0$. Substituindo $f(y) = \lambda e^y$ na equação (3.22) obtemos que $A = 0$ e $k = -B$. assim a função ξ que aparece no gerador da simetria é determinado pela equação (3.19) e pela equação(3.21) com $k = -B$, enquanto $\eta = -B$. Numa rápida olhada no capítulo 2 podemos ver que as simetrias de pontos de Lie lá encontradas são determinadas pelo mesmo conjunto de condições e assim proceder exatamente como lá para obter as simetrias de Nöther e portanto as soluções. Se $\beta = 0$ a conclusão é a mesma.

Para outros resultados recentes relativos ao Problemas Liouville-Gelfand vide[28], e outras referências em [7].

Para concluir essa subsecção mencionamos que a Equação de Lane-Emden generalizada de segundo tipo (3.3):

$$y'' + \frac{\tilde{\alpha}}{x}y' + \tilde{\beta}x^{\nu-1}e^{ny} = 0 ,$$

que descreve uma isoterma de esferas gasosas, consideradas em modelagem estelar, pode ser reduzida à equação de Liouville

$$v'' + \frac{\alpha}{x}v' + \lambda e^v = 0$$

através da mudança $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\lambda = \beta n$, $\nu = \gamma - \alpha + 1$ e $z = ny$.

3.6.2 Sobre a Equação de Boltzmann

Podemos também generalizar a Equação de Boltzmann (3.4) em termos do operador quasilinear que aparece em (3.1), a saber

$$-(x^\alpha |y'|^\beta y')' = x^\gamma (\lambda k e^{-ky} + \mu p e^{-py}), \quad (3.51)$$

onde λ e μ são números positivos e, por simplicidade, usaremos $m = 2$ no lado direito de (3.4). Pelo mesmo procedimento da secção anterior, usando $f(y) = \lambda k e^{-ky} + \mu p e^{-py}$, obtemos, após muitos cálculos, os seguintes resultados:

Proposição 3.9 *Seja $\beta \neq 0$. Então o grupo de simetrias de Lie é gerado por*

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

onde:

I.) se $k \neq p$ e

1.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma = -1$, então

$$\begin{cases} \xi = cx, \\ \eta = 0; \end{cases} \quad (3.52)$$

2.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma \neq -1$, então temos a simetria trivial

$$\begin{cases} \xi = 0, \\ \eta = 0; \end{cases} \quad (3.53)$$

3.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 = 0$, e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi = cx, \\ \eta = 0; \end{cases} \quad (3.54)$$

4.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma = 0$, então

$$\begin{cases} \xi = cx^{\frac{\alpha}{\beta+1}} = cx^{-\gamma}, \\ \eta = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

5.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$, então a simetria é trivial:

$$\begin{cases} \xi = 0, \\ \eta = 0; \end{cases}$$

II.) se $k = p$, então

1.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma = -1$, então

$$\begin{cases} \xi = Ax + \frac{k}{\beta+2}Bx \ln x, \\ \eta = B; \end{cases} \quad (3.56)$$

2.) se $\alpha = \beta + 1$ e $\gamma \neq -1$, então

$$\begin{cases} \xi = \frac{k}{\gamma+1}cx, \\ \eta = c; \end{cases} \quad (3.57)$$

3.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 = 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi = cx, \\ \eta = 0; \end{cases} \quad (3.58)$$

4.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma = 0$, então

$$\begin{cases} \xi = cx^{\frac{\alpha}{\beta+1}} + \frac{k}{\gamma - \alpha + \beta + 2} Bx, \\ \eta = B. \end{cases} \quad (3.59)$$

5.) se $\alpha \neq \beta + 1$, $\gamma - \alpha + \beta + 2 \neq 0$ e $\alpha + \gamma + \beta\gamma \neq 0$, então

$$\begin{cases} \xi = \frac{k}{\gamma - \alpha + \beta + 2} Ax, \\ \eta = A. \end{cases} \quad (3.60)$$

Aquí c , A e B são constantes arbitrárias.

Proposição 3.10 *Seja $\beta = 0$, $\gamma - \alpha + 2 > 0$ e $\alpha \geq 1$. Então o grupo de simetria de Lie de*

$$-(x^\alpha y')' = x^\gamma (\lambda k e^{-ky} + \mu p e^{-py})$$

é gerado por

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

onde

I.) se $k \neq p$, então não existem simetrias não triviais.

II.) se $k = p$ e

1.) $\alpha = 1$, as simetrias são determinadas por

$$\begin{cases} \xi = \frac{k}{\gamma + 1} (c_1 - \frac{2}{\gamma+1} c_2) x + \frac{k}{\gamma + 1} c_2 x \ln x, \\ \eta = c_1 + c_2 \ln x; \end{cases} \quad (3.61)$$

2.) se $\alpha \neq 1$, então

$$\begin{cases} \xi = \frac{k}{\gamma - \alpha + 2} cx, \\ \eta = c. \end{cases} \quad (3.62)$$

Aquí c , c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Concluindo: se $k \neq p$ então não existem simetrias de lie não triviais nos casos que interessam; se $k = p$ então a equação se torna

$$-(x^\alpha |y'|^\beta y')' = k(\lambda + \mu)x^\gamma e^{-ky}$$

e pela mudança de variáveis

$$v = -ky, \quad \tilde{\lambda} = -k^{\beta+2}(\lambda + \mu),$$

ela se transforma em uma equação de Liouville

$$-(x^\alpha |v'|^\beta v')' = \tilde{\lambda} x^\gamma e^v,$$

para a qual as simetrias podem ser calculadas conforme já visto anteriormente.

3.6.3 Sobre a Equação de Lane-Emden generalizada

A Equação de Lane-Emden generalizada de primeiro tipo (3.2):

$$y'' + \frac{\tilde{\alpha}}{x} y' + \tilde{\beta} x^{\nu-1} y^n = 0,$$

seus casos particulares e várias generalizações têm sido exaustivamente estudadas. Por exemplo, existem centenas de artigos científicos contendo o nome de Emden, conforme se pode constatar numa rápida busca na Internet [23].

Vamos comentar apenas dois artigos, que do nosso ponto de vista, contêm resultados substanciais e importantes. Em [12], Goenner e Havas discutem as propriedades da Equação de Lane-Emden generalizada de primeiro tipo e descrevem de modo sistemático suas soluções exatas. Em outro artigo

mais recente, [13], Goenner pesquisa as simetrias dessa equação e explica porque foi possível obter as soluções exatas apenas para valores particulares dos parâmetros. Neste trabalho temos notado que as simetrias de Nöther desempenham um papel fundamental na obtenção das soluções exatas da equação diferencial considerada envolvendo expoentes críticos. A condição

$$p = \frac{(\gamma + 1)(\beta + 2)}{\alpha - \beta - 1} - 1 = q^* - 1,$$

obtida no parágrafo 3.4, mas que também vale para o caso semilinear (i.e. $\beta = 0$) equação (3.2), é lida

$$2\nu = n(\tilde{\alpha} - 1) - \tilde{\alpha} - 1,$$

que é a mesma que aparece em [12]. Então o resultado a seguir é uma consequência imediata do corolário 3.9.

Proposição 3.11 *A Equação de Lane-Emden*

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y^5 = 0 \tag{3.63}$$

com

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

tem uma única solução positiva dada por

$$y_* = (1 + x^2/3)^{-1/2}.$$

Demonstração: Apenas tome $y_0 = 1$, $\alpha = \gamma = 2$, $\beta = 0$ e $\lambda = 1$ no Teorema 3.7, então $\sigma = 2$ e $q^* - 1 = 5$. $\square$

Para o operador de Laplace em $\mathbb{R}^N$, o expoente crítico vale

$$q^* - 1 = \frac{N + 2}{N - 2}$$

se $N \geq 3$. Em dimensão 3 ele é igual a 5. Portanto temos uma simetria de Nöther e, por essa razão, foi possível chegar até à sua solução. O uso do Teorema de Nöther tem uma vantagem: não é preciso usar a transformação

$$\begin{cases} x &= e^{\rho t}, \\ y &= x^{\frac{\gamma - \alpha + 2}{1 - p}} z(t) \end{cases} \quad (3.64)$$

a fim de resolver a equação diferencial. Essa mudança de variáveis sugerida por (3.64), onde ρ é uma constante arbitrária, pode ser facilmente obtida na abordagem via simetrias de pontos de Lie por procedimentos padrão solucionando a equação da órbita

$$\xi dy - \eta dx = 0$$

(veja [30, 8]). Essa é uma Transformação de Emden e temos observado que ela é proveniente, de modo natural, de considerações sobre as simetrias dentro da Teoria de Lie de Grupos de Transformações.

O Teorema de Nöther foi aplicado à Equação de Lane-Emden (3.63) em [22], páginas 52 - 54, onde apenas uma primeira integral foi obtida, mas não a sua solução. Entretanto esperamos que a abordagem dada no presente trabalho venha trazer boas idéias para o estudo de situações mais gerais. Em particular, os fundamentos das simetrias de pontos de Lie explicam os conhecidos Teoremas de Homologia [6] e propriedades relacionadas.

3.7 Comentários e observações finais

1.) Nestes dois Capítulos usamos as condições $y'(0) = 0$ e $y'(x) < 0$ para $x > 0$ ([7]). As condições iniciais $y(0) = y_0 > 0$ e $y'(0) = 0$ são naturais e fisicamente interessantes. Além disso: a condição $y' \leq 0$ é de interesse em Astrofísica [6].

2.) No parágrafo 4 e também no capítulo 2 expressamos y , na primeira integral obtida, como uma função de x e y' , e, então, o substituímos na correspondente equação. Desse modo uma nova equação para y' foi obtida. Neste capítulo, a correspondente equação diferencial se tornou homogênea

com respeito à (y, y') , enquanto a do capítulo 2 era de Bernoulli. Em ambos os casos a solução foi obtida facilmente. Esse método lembra o tratamento clássico dado às equações de Lagrange e de Clairaut. Entretanto, até onde vai nosso conhecimento, sua aplicação concreta e sua utilidade não foram, e nem têm sido, previamente enfatizadas.

3.) Poderiam ter sido consideradas equações diferenciais ordinárias semi-lineares de segunda ordem mais gerais, como, por exemplo,

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)f(y) = 0,$$

e calculados os seus grupos de simetria. O resultados indicam que somente para escolhas especiais de f , a saber, se f é uma constante, uma função linear de y , potências de y e exponenciais de y , existem simetrias de pontos de Lie não triviais. O procedimento é o mesmo que o utilizado neste trabalho onde lidamos com os casos $\alpha(x) = \alpha/x$ e $\beta(x) = x^{\gamma-\alpha}$. Para $f(y) = y^n$, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gerais isso foi feito em [1].

4.) Não foram tratados alguns casos interessantes que surgiram durante os cálculos das simetrias de pontos de Lie. A razão é que o principal escopo deste trabalho era a análise e as condições impostas aos parâmetros que os operadores básicos como Laplaciano, p -Laplaciano e k -Hessiano, satisfaziam ([7]).

5.) Também foram usadas estritamente as simetrias de pontos de Lie da equação (3.1) e seus casos particulares. Pode ser muito produtivo buscar simetrias mais gerais, como as simetrias dinâmicas, por exemplo, e as primeiras integrais correspondentes a elas.

6.) Os resultados obtidos aqui poderiam ser considerados como um teste para os programas computacionais que calculam simetrias de equações diferenciais e suas soluções exatas.

Capítulo 4

O Sistema de Lane-Emden

4.1 Introdução

O Sistema de Lane-Emden é constituído pelas duas equações semilineares abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u = v^q, \\ -\Delta v = u^p, \end{cases} \quad (4.1)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ inteiro e p e q números positivos.

Este sistema pode ser considerado como uma extensão natural da equação de Lane-Emden

$$\Delta \theta + \theta^p = 0$$

em $\mathbb{R}^n$ e a qual, se sabe, tem soluções positivas se, e somente se, p for maior do que ou igual ao expoente de Sóbolev $(n+2)/(n-2)$.

Em[27] J. Serrin e H. Zou apresentaram um resultado análogo para o sistema (4.1). A saber: se (p, q) estiver sobre ou acima do ramo, no primeiro quadrante, da hipérbole crítica

$$\frac{n}{p+1} + \frac{n}{q+1} = n-2, \quad (4.2)$$

o sistema de Lane-Emden tem uma infinidade de soluções radiais positivas que tendem a zero quando $|x|$ tende ao infinito. Num trabalho precedente [26], esses autores estabeleceram as seguintes condições suficientes para a não-existência de soluções: o sistema (4.1) não admite solução não trivial com as componentes sendo funções não negativas, (vide [26]), quando

$$0 < pq \leq 1$$

ou

$$pq > 1$$

e

$$n - 2 \leq \max\left\{\frac{2(p+1)}{1-pq}, \frac{2(q+1)}{1-pq}\right\}.$$

Vale a pena mencionar dois casos particulares. No primeiro caso consideramos o sistema (4.1) com $p = q$. Temos então a seguinte proposição:

Proposição 4.1 *Se $(u, v) \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \times C_0^2(\mathbb{R}^n)$ for solução positiva de (4.1) isto é: $u > 0$ e $v > 0$, com $p = q$ então $u = v$.*

Demonstração: Multiplicando as equações do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v^p, \\ -\Delta v = u^p, \end{cases}$$

por $u - v$ e integrando por partes em todo o $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{cases} \int \nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v) = \int v^p (u - v), \\ \int \nabla v \cdot (\nabla u - \nabla v) = \int u^p (u - v). \end{cases}$$

Subtraindo agora uma equação da outra temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int |\nabla u - \nabla v|^2 = \int (v^p - u^p) (u - v) = \\ &= - \int (u - v)^2 (v^{p-1} + v^{p-2}u + \dots + vu^{p-2} + u^{p-1}). \end{aligned}$$

Notando que $(u - v)^2 \geq 0$ e que $(v^{p-1} + v^{p-2}u + \dots + vu^{p-2} + u^{p-1}) \geq 0$ pois tanto u como v são positivas, pelo confronto $|\nabla u - \nabla v|^2 = 0$, o que dá $\nabla u = \nabla v$ em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, dadas as condições $(u, v) \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \times C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $u = v$. $\square$

Concluimos então que, neste caso, o sistema se reduz à uma equação de Lane-Emden da forma

$$-\Delta u = u^p,$$

que é bem estudada na literatura. A equação radial correspondente foi também analisada no capítulo 3 deste trabalho. A hipótese de que (p, p) esteja na hipérbole crítica nos leva a concluir que $p = \frac{n+2}{n-2} = q^* - 1$ é o expoente crítico para o operador de Laplace em $\mathbb{R}^n$ e que também foi tratado no capítulo 3.

O segundo caso se refere a $q = 1$. É fácil ver que $(p, 1)$ pertence à hipérbole crítica se, e somente se, $p = \frac{n+4}{n-4}$ - o expoente crítico da Equação Bi-harmônica

$$\Delta^2 u = u^p$$

ao qual o sistema se reduz. Porisso doravante vamos considerar as condições

$$n \geq 3, p \neq q, pq > 1 \quad (4.3)$$

Resultados de existência e unicidade de soluções do sistema (4.1), chamadas de estados básicos (*ground states*), foram obtidos em [14] e [31]. Foi mostrado que estas são funções radiais, isto é, funções de $t = |x|$, e então o estudo dos estados básicos se reduz ao seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} + \frac{n-1}{t}\dot{u} + v^q = 0, \\ \ddot{v} + \frac{n-1}{t}\dot{v} + u^p = 0, \\ \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} v(t) = 0, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

onde $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, etc.

No próximo parágrafo calculamos as simetrias de Lie do sistema (4.4) e, em seguida, no parágrafo 4.2 mostraremos que as simetrias de Nöther correspondem ao caso em que (p, q) pertence à hipérbole crítica (4.2).

Os resultados obtidos neste capítulo se encontram em [4].

4.2 Cálculo das Simetrias

Escrevemos o Sistema de Lane-Emden na seguinte forma

$$\begin{cases} \ddot{u} &= -\frac{n-1}{t}\dot{u} - v^q &:= \omega^1(v, \dot{u}, t) \\ \ddot{v} &= -\frac{n-1}{t}\dot{v} - u^p &:= \omega^2(u, \dot{v}, t). \end{cases}$$

Para achar suas simetrias

$$\mathbf{X} = \xi(t, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1(t, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2(t, u, v) \frac{\partial}{\partial v},$$

vamos iniciar calculando as derivadas parciais de ω^a , $a = 1, 2$:

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \frac{n-1}{t^2}\dot{u} ; \omega_u^1 = 0 ; \omega_v^1 = -qv^{q-1} ; \omega_{\dot{u}}^1 = -\frac{n-1}{t} ; \omega_{\dot{v}}^1 = 0 \\ \omega_t^2 = \frac{n-1}{t^2}\dot{v} ; \omega_u^2 = -pu^{p-1} ; \omega_v^2 = 0 ; \omega_{\dot{u}}^2 = 0 ; \omega_{\dot{v}}^2 = -\frac{n-1}{t} . \end{cases}$$

Substituindo-as na primeira das duas equações de (A.45), para $a = 1$, temos:

$$\begin{aligned} & \xi \left(\frac{n-1}{t^2} \dot{u} \right) + \eta^2 (-qv^{q-1}) + \\ & + [\eta_t^1 + (\eta_u^1 \dot{u} + \eta_v^1 \dot{v}) - \xi_t \dot{u} - \xi_u \dot{u}^2 - \xi_v \dot{u} \dot{v}] \left(-\frac{n-1}{t} \right) + \\ & + 2 \left(-\frac{n-1}{t} \dot{u} - v^q \right) (\xi_t + \xi_u \dot{u} + \xi_v \dot{v}) + \\ & + \left(-\frac{n-1}{t} \dot{u} - v^q \right) (\xi_u \dot{u} - \eta_u^1) + \left(-\frac{n-1}{t} \dot{v} - u^p \right) (\xi_v \dot{u} - \eta_v^1) \\ & + \xi_{uu} \dot{u}^3 + 2\xi_{uv} \dot{u}^2 \dot{v} + \xi_{vv} \dot{u} \dot{v}^2 + 2\xi_{tu} \dot{u}^2 + 2\xi_{tv} \dot{u} \dot{v} + \\ & - (\eta_{uu}^1 \dot{u}^2 + 2\eta_{uv}^1 \dot{u} \dot{v} + \eta_{vv}^1 \dot{v}^2) + \xi_{tt} \dot{u} - 2\eta_{tu}^1 \dot{u} - 2\eta_{tv}^1 \dot{v} - \eta_{tt}^1 = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Juntando os termos comuns, esta identidade é reescrita por

$$\begin{aligned}
& \frac{n-1}{t^2} \xi \dot{u} - q \eta^2 v^{q-1} + \\
& - \frac{n-1}{t} (\eta_t^1 + \eta_u^1 \dot{u} + \eta_v^1 \dot{v} - \xi_t \dot{u} - \xi_u \dot{u}^2 - \xi_v \dot{u} \dot{v}) + \\
& - \left(\frac{n-1}{t} \dot{u} + v^q \right) (2\xi_t + 3\xi_u \dot{u} + 2\xi_v \dot{v} - \eta_u^1) + \\
& - \left(\frac{n-1}{t} \dot{v} + u^p \right) (\xi_v \dot{u} - \eta_v^1) + \xi_{uu} \dot{u}^3 + 2\xi_{uv} \dot{u}^2 \dot{v} + \xi_{vv} \dot{u} \dot{v}^2 + 2\xi_{tu} \dot{u}^2 + \\
& + 2\xi_{tv} \dot{u} \dot{v} - \eta_{uu}^1 \dot{u}^2 - 2\eta_{uv}^1 \dot{u} \dot{v} - \eta_{vv}^1 \dot{v}^2 + \xi_{tt} \dot{u} - 2\eta_{tu}^1 \dot{u} - 2\eta_{tv}^1 \dot{v} - \eta_{tt}^1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Os coeficientes das potências de ordem 3 da expressão acima devem ser identicamente nulos. Assim

$$\xi_{uu} = 0 \Rightarrow \xi(t, u, v) = \tilde{a}(t, v) u + \tilde{b}(t, v).$$

Tomando as derivadas parciais de ξ com relação a v

$$\xi_v = \tilde{a}_v u + \tilde{b}_v \quad ; \quad \xi_{vv} = \tilde{a}_{vv} u + \tilde{b}_{vv}$$

e do fato que $\xi_{vv} = 0$ temos que, necessariamente, $\tilde{a}_{vv} = 0$ e $\tilde{b}_{vv} = 0$. Ou seja: as funções $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ são lineares em v , e serão assumidas da forma

$$\tilde{a} = \alpha_1(t) v + \beta_1(t)$$

e

$$\tilde{b} = \alpha_2(t) v + \beta_2(t)$$

e o candidato à $\xi(t, u, v)$, agora, se reescreve como sendo

$$\xi(t, u, v) = [\alpha_1(t) v + \beta_1(t)] u + \alpha_2(t) v + \beta_2(t).$$

Mas ainda temos que $\xi_{uv} = 0$. Dos cálculos das novas derivadas parciais e do anulamento de ξ_{uv} temos que $\alpha_1(t) = 0$ e a expressão de ξ assume a forma, ainda não definitiva, porém mais simples

$$\xi(t, u, v) = \beta_1(t) u + \alpha_2(t) v + \beta_2(t).$$

Para não sobrecarregar demais a notação, as funções coeficientes de ξ serão renomeadas por

$$\begin{aligned}\xi(t, u, v) &= a(t)u + b(t)v + c(t) \\ &= au + bv + c\end{aligned}$$

sempre lembrando que, ainda, $a = a(t)$, $b = b(t)$ e $c = c(t)$. Substituindo em (4.6) as correspondentes derivadas parciais deste “novo” ξ , obtemos um polinômio em $\dot{u}$ e $\dot{v}$. Os respectivos coeficientes das potências $\dot{u}^2$, $\dot{u}\dot{v}$ e $\dot{v}^2$ devem se anular e fornecem as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned}-2\frac{n-1}{t}a + 2\dot{a} - \eta_{uu}^1 &= 0, \\ -2\frac{n-1}{t}b + 2\dot{b} - 2\eta_{uv}^1 &= 0, \\ \eta_{vv}^1 &= 0,\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\eta_{uu}^1 &= -2\frac{n-1}{t}a + 2\dot{a} := f(t), \\ \eta_{uv}^1 &= -\frac{n-1}{t}b + 2\dot{b} := g(t), \\ \eta_{vv}^1 &= 0.\end{aligned}$$

Desta última relação temos $\eta^1 = A(t, u)v + B(t, u)$. Como $\eta_v^1 = A$ e $\eta_{uv}^1 = A_u = g(t)$, a expressão para A é $A(t, u) = g(t)u + \tilde{g}(t)$. Desse modo

$$\eta^1 = (g(t)u + d(t))v + B(t, u).$$

Tomando mais uma vez as suas derivadas, e as substituindo na relação anterior temos

$$B(t, u) = f(t)\frac{u^2}{2} + h(t)u + k(t)$$

e uma expressão mais refinada para o coeficiente η da simetria que estamos buscando:

$$\eta^1 = g(t)uv + d(t)v + f(t)\frac{u^2}{2} + h(t)u + k(t).$$

Com o anulamento de tais coeficientes a equação (4.6) fica mais reduzida ainda: é um polinômio cujo coeficiente de $\dot{u}$, ao ser igualado a zero, nos dá:

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{t^2}(au + bv + c) - \frac{n-1}{t}(\dot{a}u + \dot{b}v + \dot{c}) + \\ & -3av^q - bu^p + \ddot{a}u + \ddot{b}v + \ddot{c} - 2\eta_{tu}^1 = 0 \end{aligned}$$

e que se reescreve

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n-1}{t^2}a - \frac{n-1}{t}\dot{a} + \ddot{a} - 2\dot{f} \right) u + \left(\frac{n-1}{t^2}b - \frac{n-1}{t}\dot{b} + \ddot{b} - 2\dot{g} \right) v + \\ & + \left(\frac{n-1}{t^2}c - \frac{n-1}{t}\dot{c} + \ddot{c} - 2\dot{h} \right) - 3av^q - bu^p = 0. \end{aligned}$$

Como $p \neq 1$ e $q \neq 1$, da identidade acima temos que $a = b = 0$. Note que dessa forma, pela definição de f e g , $f = g = 0$ e sobra apenas a equação diferencial a ser resolvida:

$$\frac{n-1}{t^2}c - \frac{n-1}{t}\dot{c} + \ddot{c} - 2\dot{h} = 0. \quad (4.7)$$

Com isso

$$\xi(t, u, v) = a(t)u + b(t)v + c(t) = c(t)$$

$$\eta^1(t, u, v) = d(t)v + h(t)u + k(t)$$

h sendo dada pela equação (4.7).

Olhando agora para o coeficiente de $\dot{v}$,

$$-2bv^q - 2\eta_{tv}^1 = 0 \Rightarrow \eta_{tv}^1 = 0 \Rightarrow 2\eta_{tv}^1 = \dot{d} = 0 \Rightarrow d = \text{const.}$$

Já o termo livre é

$$-q\eta^2v^{q-1} - \frac{n-1}{t}\eta_t^1 + \eta_u^1v^q + \eta_v^1u^p - \eta_{tt}^1 - 2v^q\dot{c} = 0$$

ou ainda

$$\begin{aligned} q\eta^2v^{q-1} &= -\frac{n-1}{t}(\dot{h}u + \dot{k}) + hv^q + du^p - \ddot{h}u - \ddot{k} - 2\dot{c}v^q \\ &= -\left(\frac{n-1}{t}\dot{h} + \ddot{h}\right)u + (h - 2\dot{c})v^q - \left(\frac{n-1}{t}\dot{k} + \ddot{k}\right) + du^p. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Olhando agora para a segunda equação do sistema (A.45) com $a = 2$, lembrando que $\xi = c(t)$, ela fica reduzida à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & c \frac{n-1}{t^2} \dot{v} + \eta^1 (-pu^{p-1}) - \frac{n-1}{t} (\eta_t^2 + \eta_u^2 \dot{u} + \eta_v^2 \dot{v} - \dot{c}v) + \\ & -2 \left(-\frac{n-1}{t} \dot{v} - u^p \right) \dot{c} + \left(\frac{n-1}{t} \dot{u} + v^q \right) \eta_u^2 + \left(\frac{n-1}{t} \dot{v} + u^p \right) \eta_v^1 + \\ & - (\eta_{uu}^2 \dot{u}^2 + 2\eta_{uv}^2 \dot{u}\dot{v} + \eta_{vv}^2 \dot{v}^2) + \ddot{c}u - 2\eta_{tu}^2 \dot{u} - 2\eta_{tv}^2 \dot{v} - \eta_{tt}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como os coeficientes de $\dot{u}^2$, $\dot{u}\dot{v}$ e $\dot{v}^2$ devem se anular, temos

$$\eta_{uu}^2 = 0 \Rightarrow \eta_u^2 = M(t, v) \Rightarrow \eta^2 = M(t, v)u + N(t, v).$$

Como $\eta_{uv}^2 = 0$, temos que $M(t, v) = M(t)$ e, pelo fato de também $\eta_{vv}^2 = 0$, $N_v = K(t)$ e, portanto, $N(t) = K(t)v + L(t)$. Assim

$$\eta^2 = M(t)u + K(t)v + L(t) \quad (4.10)$$

como poderia se ter notado devido à semelhança entre as duas equações do sistema. Substituindo η^2 na equação(4.8) chegamos na seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{n-1}{t} \dot{h} + \ddot{h} \right) u + (h - 2\dot{c})v^q - \left(\frac{n-1}{t} \dot{k} + \ddot{k} \right) + du^p = \\ & = qv^{q-1}(Mu + Kv + L) \end{aligned}$$

de onde tiramos o conjunto de equações:

$$\begin{cases} \frac{n-1}{t} \dot{h} + \ddot{h} = 0, \\ h - 2\dot{c} = qK, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{t} \dot{k} + \ddot{k} = 0, \\ d = 0 \text{ e } M = 0 \text{ e } L = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Tudo isso nos define uma melhor forma para os coeficientes da simetria

$$\begin{cases} \xi = c(t), \\ \eta^1 = h(t)u + k(t), \\ \eta^2 = K(t)v, \end{cases}$$

A esta altura, a referida segunda equação do sistema está reduzida à

$$c \frac{n-1}{t^2} \dot{v} - p \eta^1 u^{p-1} - \frac{n-1}{t} \eta_t^2 - 2\dot{c} u^p - \frac{n-1}{t} \dot{c} \dot{v} + \\ + \eta_v^2 u^p + \ddot{c} \dot{v} - 2\eta_{tv}^2 \dot{v} - \eta_{tt}^2 = 0$$

e que, após a substituição de η^1 , se conclui que $k = 0$, resultando, dessa forma, $\eta^1 = h(t) u$. Igualando os coeficientes de $\dot{v}$ e de u^p a zero temos ainda as relações

$$\frac{n-1}{t^2} c - \frac{n-1}{t} \dot{c} + \ddot{c} - 2\eta_{tv}^2 = 0 \quad (4.13)$$

ou

$$\frac{n-1}{t^2} c - \frac{n-1}{t} \dot{c} + \ddot{c} - 2\dot{K} = 0, \quad (4.14)$$

$$-ph - 2\dot{c} + K = 0; \quad (4.15)$$

então

$$\begin{cases} \xi = c(t), \\ \eta^1 = h(t) u, \\ \eta^2 = K(t) v. \end{cases}$$

Para ver a relação entre essas funções coeficientes começamos primeiramente notando que as equações (4.7, 4.11, 4.12) juntamente com (4.13, 4.14, 4.15) formam um conjunto que deve ser resolvido aos pares nas equações semelhantes:

$$\begin{cases} \frac{n-1}{t^2} c - \frac{n-1}{t} \dot{c} + \ddot{c} - 2\dot{h} = 0, \\ h - 2\dot{c} - qK = 0, \\ \frac{n-1}{t} \dot{h} + \ddot{h} = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{n-1}{t^2} c - \frac{n-1}{t} \dot{c} + \ddot{c} - 2\dot{K} = 0, \\ -ph - 2\dot{c} + K = 0, \\ \frac{n-1}{t} \dot{K} + \ddot{K} = 0. \end{cases}$$

Assim de

$$\begin{cases} \frac{n-1}{t^2} c - \frac{n-1}{t} \dot{c} + \ddot{c} - 2\dot{h} = 0, \\ \frac{n-1}{t^2} c - \frac{n-1}{t} \dot{c} + \ddot{c} - 2\dot{K} = 0 \end{cases}$$

se tem que $\dot{h} - \dot{K} = 0$. Logo

$$h(t) = K(t) + K_0,$$

onde K_0 é uma constante qualquer.

De

$$\begin{cases} h - 2\dot{c} - qK = 0, \\ -ph - 2\dot{c} + K = 0 \end{cases}$$

resulta que

$$K - ph = h - qK \Rightarrow$$

$$K - p(K + K_0) = (K + K_0) - qK \Rightarrow$$

$$K(q - p) = (1 + p)K_0$$

e como $q \neq p$ temos que

$$K = \frac{1 + p}{q - p} K_0 = \text{const.}$$

e assim

$$h = \frac{1 + p}{q - p} K_0 + K_0 = \frac{1 + q}{q - p} K_0 = \text{const.}$$

Como ainda restam

$$\begin{cases} h - 2\dot{c} - qK = 0, \\ -ph - 2\dot{c} + K = 0, \end{cases}$$

da resolução desse sistema resulta

$$h = \frac{2(1 + q)}{1 - pq} \dot{c}$$

e

$$K = \frac{2(1 + p)}{1 - pq} \dot{c}.$$

Note-se ainda que

$$h - K = \frac{2(q - p)}{1 - pq} \dot{c} = K_0.$$

Seja agora

$$A := \frac{K_0 (1 - pq)}{2 (q - p)}.$$

Então

$$\dot{c} = A \Rightarrow c(t) = At + K_1$$

substituindo $\dot{c}$ e $\ddot{c}$ em, por exemplo, (4.14) chegamos a conclusão de que $K_1 = 0$ e, finalmente

$$\begin{cases} c(t) = At, \\ h(t) = \frac{2(1+q)}{1-pq}A, \\ K(t) = \frac{2(1+p)}{1-pq}A. \end{cases}$$

Logo, a simetria do sistema é dada por

$$\xi(t, u, v) = At,$$

$$\eta^1(t, u, v) = \frac{2(1+q)}{1-qp}Au,$$

$$\eta^2(t, u, v) = \frac{2(1+p)}{1-qp}Av.$$

Com isso, provamos o seguinte

Teorema 4.2 *Se $n \geq 3$ e $pq > 1$, $p \neq q$, as simetrias do Sistema de Lane-Emdem são geradas por*

$$\mathbf{X} = At \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2(1+q)}{1-qp}Au \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2(1+p)}{1-qp}Av \frac{\partial}{\partial v}$$

onde A é uma constante qualquer.

4.3 As Simetrias de Nöther do Sistema

Vamos agora determinar quais as relações entre os parâmetros que definem as simetrias de Lie que também são simetrias de Nöther do sistema. Como anteriormente, essas equações têm estrutura variacional:

Lema 4.3 *O sistema de Lane-Emden é constituído de equações de Euler-Lagrange do funcional*

$$J(u, v) = \int_{x_0}^{x_1} L(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) dt$$

onde a função de Lagrange correspondente é

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) = t^{n-1} \dot{u} \dot{v} - \frac{t^{n-1}}{p+1} u^{p+1} - \frac{t^{n-1}}{q+1} v^{q+1}.$$

Demonstração: A primeira equação de Euler do sistema é escrita como sendo

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{u}} - L_u = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0.$$

Calculando as derivadas:

$$\frac{d}{dt} (t^{n-1} \dot{v}) - (-t^{n-1} u^p) = 0 \Leftrightarrow t^{n-1} \ddot{v} - (n-1) t^n \dot{v} + t^{n-1} u^p = 0,$$

ou seja

$$-\ddot{v} - \frac{n-1}{t} \dot{v} = u^p.$$

Analogamente, para a segunda equação

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{v}} - L_v = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0,$$

se tem

$$-\ddot{u} - \frac{n-1}{t} \dot{u} = v^q,$$

o que conclui a demonstração do Lema. □

Teorema 4.4 *Considere o sistema de Lane-Emden dado pelas duas equações semilineares*

$$\begin{cases} \ddot{u} &= -\frac{n-1}{t} \dot{u} - v^q \\ \ddot{v} &= -\frac{n-1}{t} \dot{v} - u^p, \end{cases}$$

onde u e v são funções diferenciáveis de t . Se $n \geq 3$ e $pq > 1$, $p \neq q$, uma simetria

$$\mathbf{X} = At \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2(1+q)}{1-qp} Au \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2(1+p)}{1-qp} Av \frac{\partial}{\partial v}$$

é simetria de Nöther se, e somente se,

$$\frac{n}{2} = \frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}, \quad (4.16)$$

isto é, se o ponto (p, q) estiver sobre a hipérbole crítica

$$\frac{n}{p+1} + \frac{n}{q+1} = n - 2.$$

Demonstração: Conforme procedimento adotado nos capítulos precedentes, vamos determinar as relações entre os parâmetros para que a simetria seja de Nöther. Para isso começamos calculando o prolongamento do gerador infinitesimal

$$\mathbf{X} = At \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2(1+q)}{1-qp} Au \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2(1+p)}{1-qp} Av \frac{\partial}{\partial v}.$$

Notamos ainda que os coeficientes do primeiro prolongamento, ou extensão, são dados de forma análoga aos anteriores por

$$\dot{\eta}^a = \frac{d\eta}{dt} - \dot{q}^a \frac{d\xi}{dt}.$$

Assim, para simplificar a notação e os cálculos, denotando por $B = \frac{2(1+q)}{1-qp} A$ e por $C = \frac{2(1+p)}{1-qp} A$, obtemos que $\dot{\eta}^1 = (B - A) \dot{u}$ e que $\dot{\eta}^2 = (C - A) \dot{v}$, de modo que o campo prolongado é escrito da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{X}} = At \frac{\partial}{\partial t} + Bu \frac{\partial}{\partial u} + Cv \frac{\partial}{\partial v} + (B - A) \dot{u} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} + (C - A) \dot{v} \frac{\partial}{\partial \dot{v}}.$$

Lembrando ainda que o operador

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \omega^a(q^i, \dot{q}^i, t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a},$$

neste caso, se reduz à

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial}{\partial u} + \dot{v} \frac{\partial}{\partial v} + \omega^1 \frac{\partial}{\partial \dot{u}} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial \dot{v}}$$

e com

$$\begin{cases} \omega^1 = -\frac{n-1}{t} \dot{u} - v^q, \\ \omega^2 = -\frac{n-1}{t} \dot{v} - u^p, \\ \mathbf{A}\xi = A, \end{cases}$$

vamos verificar a condição

$$\dot{\mathbf{X}}L + (\mathbf{A}\xi)L = \mathbf{A}V,$$

vide[30], página 98, (10.27), para se ter simetrias de Nöther. (Acima $V = V(u, v, t)$). Cálculos simples mostram que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}L + (\mathbf{A}\xi)L &= [(n-1)A + B + C - A]t^{n-1}\dot{u}\dot{v} + \\ &\quad - \left(B + \frac{n}{p+1}\right)u^{p+1} - \left(C + \frac{n}{q+1}\right)v^{q+1}. \end{aligned}$$

O lado direito dessa igualdade é a derivada total de uma função só de u, v e t se, e somente se,

$$(n-1)A + B + C - A = 0,$$

o que é equivalente à

$$nA + \frac{pq + 2q + 1}{1 - pq}A + \frac{pq + 2p + 1}{1 - pq}A = 0,$$

isto é

$$n = \frac{2(p+1)(q+1)}{pq-1},$$

visto que, como estamos considerando simetrias não triviais, $A \neq 0$. Agora é fácil ver que essa relação obtida é equivalente à

$$\frac{n}{p+1} + \frac{n}{q+1} = n - 2.$$

Isso conclui a demonstração. □

Observação. Se

$$n = \frac{2(p+1)(q+1)}{pq-1}$$

então

$$B + \frac{n}{p+1}A = \frac{2(q+1)}{1-pq}A + \frac{2(q+1)}{pq-1}A = 0$$

e

$$C + \frac{n}{q+1}A = \frac{2(p+1)}{1-pq}A + \frac{2(p+1)}{pq-1}A = 0.$$

Isso demonstra o seguinte:

Corolário 4.5 *A simetria de Nöther do sistema de Lane Emden é simetria variacional.*

Esse resultado será utilizado no próximo parágrafo.

4.4 Uma primeira integral

Neste parágrafo vamos supor, então, que o par de parâmetros (p, q) está sobre a hipérbole crítica (4.2).

O Teorema de Nöther, [30], página 99, implica que se $\xi\partial/\partial t + \eta^a\partial/\partial q^a + \dot{\eta}^a\partial/\partial \dot{q}^a$ é o gerador de uma simetria de Nöther, então

$$\varphi = \xi [\dot{q}^k L_{\dot{q}^k} - L] - \eta^k L_{\dot{q}^k} + V(q^i, t)$$

é uma primeira integral que satisfaz $\mathbf{X}\varphi = 0$.

Isso se traduz, neste caso, por

$$\varphi = \xi [\dot{u}L_{\dot{u}} + \dot{v}L_{\dot{v}} - L] - \eta^1 L_{\dot{u}} - \eta^2 L_{\dot{v}} \quad (4.17)$$

uma vez que nossa simetria é variacional e, portanto, $V = 0$.

Considerando a função de Lagrange correspondente

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) = t^{n-1}\dot{u}\dot{v} - \frac{t^{n-1}}{p+1}u^{p+1} - \frac{t^{n-1}}{q+1}v^{q+1},$$

tomando os coeficientes da simetria de Nöther obtida:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(t, u, v) = At, \\ \eta^1(t, u, v) = \frac{2(1+q)}{1-qp}Au = -\frac{n}{p+1}Au, \text{ (por (4.16))}, \\ \eta^2(t, u, v) = \frac{2(1+p)}{1-qp}Av = -\frac{n}{q+1}Av, \text{ (por (4.16))}, \end{array} \right.$$

calculando as correspondentes derivadas parciais de L , as respectivas substituições em (4.17) e uma simples computação nos determina a primeira integral

$$\dot{u}\dot{v} + \frac{n}{p+1}\frac{1}{t}u\dot{v} + \frac{n}{q+1}\frac{1}{t}\dot{u}v + \frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{q+1}}{q+1} = 0.$$

Esta equação acima determina o *parabolóide invariante* usado por J. Hulshof e R. van der Vorst em [14], página 2427.

É nossa intenção é continuar trabalhando com o objetivo de ter a resolução exata do sistema. Para esse fim, a primeira integral obtida acima será usada.

Apêndice A

Observações sobre o procedimento geral

A.1 Introdução

O objetivo deste apêndice é apresentar, de maneira elementar, uma breve introdução à Teoria de Lie dos grupos a um parâmetro e sua aplicação às soluções de equações diferenciais invariantes pela ação de tais grupos. Esta exposição segue muito próxima às que podem ser encontradas em [8], numa versão mais clássica e em [30], num tratamento mais prático e moderno.

A.2 Grupo de Transformações

Considere o conjunto de transformações a um parâmetro

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x, y, a), \\ y_1 = \psi(x, y, a), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

cada uma sendo determinada por algum valor do parâmetro a , e onde ϕ e ψ são funções contínuas das variáveis. Porisso, começando com um valor a_0 e variando continuamente o parâmetro a , o efeito das correspondentes transformações em x e y será o de transformá-los também de forma contínua, gerando o que é conhecido como trajetória, ou órbita, do ponto (x, y) pela ação do grupo e, como se sabe, todos os pontos desse caminho possuem a

mesma trajetória e que o parâmetro pode aparecer de muitas formas diferentes na definição das equações que definem um tal grupo. Aquí usaremos o parâmetro de modo que, inicialmente, a_0 e, posteriormente $t = 0$, denote a transformação do grupo que corresponde a da identidade.

A.3 Transformações Infinitesimais

Da continuidade das funções que definem (A.1), uma variação infinitesimal δa no parâmetro acarreta em variações também infinitesimais nas variáveis x e y que estão representadas pelo Teorema de Taylor

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x, y, a_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0} \delta a + \dots, \\ y_1 = \psi(x, y, a_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0} \delta a + \dots \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Observando que $\phi(x, y, a_0) = x$ e que $\psi(x, y, a_0) = y$, as mudanças em x e y são estimadas em

$$\begin{cases} x_1 - x := \delta x = \left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0} \delta a + \dots, \\ y_1 - y := \delta y = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0} \delta a + \dots \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde os termos de ordem superior são denotados pelas reticências. Uma vez que a_0 está fixado, as únicas variáveis que permanecem em $\left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0}$ e $\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0}$ são x e y . Logo podemos escrevê-las na forma

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0} = \xi(x, y), \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0} = \eta(x, y). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

e a transformação (A.3) sendo reescrita por

$$\begin{cases} \delta x = \xi(x, y) \delta a + \dots, \\ \delta y = \eta(x, y) \delta a + \dots \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

As potências de ordem mais altas podem ser desprezadas desde que ξ ou η não sejam identicamente nulas (i.é: para todos os valores de x e y) ou infinitas. Neste caso as transformações (A.1) produzindo uma variação infinitesimal nas variáveis são dadas por

$$\begin{cases} \delta x = \xi(x, y) \delta a, \\ \delta y = \eta(x, y) \delta a. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

e que serão chamadas de *transformações infinitesimais* (associadas ao grupo definido por (A.1). Para casos patológicos envolvendo ξ e/ou η vide [8].

A.4 Símbolo da Transformação Infinitesimal.

Na transformação dada em (A.6) usamos a letra grega δ para expressar a derivada parcial com relação ao parâmetro a . Também será utilizada para denotar o valor que as diferenciais das novas variáveis assumem quando $a = a_0$. Assim

$$\begin{cases} \delta x = \xi(x, y) \delta a = \left(\frac{\partial \phi}{\partial a} \right)_{a_0} \delta a = \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \right)_{a_0} \delta a, \\ \delta y = \eta(x, y) \delta a = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)_{a_0} \delta a = \left(\frac{\partial y_1}{\partial a} \right)_{a_0} \delta a. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Se $f(x, y)$ é uma função analítica qualquer das variáveis x e y , o efeito de uma transformação infinitesimal sobre ela é modificá-la para $f(x + \xi \delta a, y + \eta \delta a)$, cuja expansão em série de Taylor é a seguinte:

$$f(x + \xi \delta a, y + \eta \delta a) = f(x, y) + \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta a + \dots \quad (\text{A.8})$$

ou

$$\delta f = \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta a + \dots \quad (\text{A.9})$$

Lie introduziu o símbolo Uf , conveniente e prático, para o coeficiente de δa na equação acima, definindo assim o operador:

$$U := \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}. \quad (\text{A.10})$$

Note-se ainda que

$$\begin{aligned} \delta f &= (Uf) \delta a + \dots, \\ Uf &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial a} \right)_{a_0}, \text{ onde } f_1 := f(x_1, y_1), \\ Ux &= \xi \text{ e } Uy = \eta. \end{aligned}$$

Uma vez que sempre se pode escrever Uf quando se conhece a transformação infinitesimal (A.2), e, reciprocamente, (A.2) é conhecido quando Uf é dada, Uf é usada para representar (A.2) e, assim, abusando da linguagem, se dizer *a transformação infinitesimal Uf* no lugar de *a transformação representada por Uf* .

A.5 Grupo Gerado por uma Transformação Infinitesimal

Na subsecção 2 foi dada uma forma de se obter a transformação infinitesimal de um dado grupo de transformações. Nesta iremos ver como a recíproca se processa: dada uma transformação infinitesimal como determinar as transformações finitas que determinam o grupo correspondente.

A transformação infinitesimal

$$Uf := \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{A.11})$$

leva o ponto (x, y) num ponto vizinho $(x + \xi(x, y) \delta t, y + \eta(x, y) \delta t)$, onde agora t está sendo usado como parâmetro e $t = 0$ é o valor do parâmetro que define a transformação identidade. Essa ação transforma o ponto inicial (x, y) no ponto (x_1, y_1) e assim sucessivamente constituindo um caminho de pontos que é exatamente a curva integral do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \xi(x_1, y_1), \\ \frac{dy_1}{dt} = \eta(x_1, y_1), \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

A.5. GRUPO GERADO POR UMA TRANSFORMAÇÃO INFINITESIMAL 75

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1)} = \frac{dt}{1} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

e que passa pelo ponto (x, y) , onde x_1 se reduz a x e y_1 a y quando $t = 0$. Os dois primeiros termos de (A.13) são independentes de t e formam uma equação diferencial cuja solução pode ser escrita na forma

$$u(x_1, y_1) = \text{const.} = u(x, y) \quad (\text{A.14})$$

com a condição inicial $x_1 = x$ e $y_1 = y$ quando $t = 0$. Essa é a equação da trajetória correspondente ao ponto (x, y) . Explicitando em $u(x_1, y_1) = c$ uma das variáveis em função da outra, por exemplo $x_1 = \omega(y_1, c)$, e substituindo em η o x_1 por ω , a equação diferencial resultante

$$\frac{dy_1}{\eta(\omega(y_1, c), y_1)} = \frac{dt}{1} \quad (\text{A.15})$$

pode ser resolvida por uma quadratura e, finalmente, substituindo c por seus valores em termos de x_1 e y_1 , essa solução toma a forma

$$v(x_1, y_1) - t = \text{const.} = v(x, y). \quad (\text{A.16})$$

Segue, então, que as equações

$$\begin{cases} u(x_1, y_1) = u(x, y), \\ v(x_1, y_1) = v(x, y) + t, \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

determinam x_1 e y_1 como aquelas soluções de (A.12) ou de (A.13) com as condições iniciais $x_1 = x$ e $y_1 = y$ quando $t = 0$. Facilmente se pode mostrar que elas determinam um grupo local a um parâmetro de transformações como o desejado no início.

Uma outra maneira de se obter o grupo gerado por uma transformação infinitesimal será apresentada agora e que depende das considerações a seguir:

Seja $Uf := \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$ uma transformação infinitesimal dada. Sabemos que as transformações finitas do grupo gerado por ela tem a forma

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x, y, t), \\ y_1 = \psi(x, y, t), \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

onde

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t=0}, \\ \eta(x, y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t=0} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

e que podem ser obtidas através da expansão em Fórmula de Taylor em t , sem a necessidade de integração.

Como a ação de qualquer transformação de (A.18) sobre um ponto (x, y) o leva ao ponto (x_1, y_1) , ela também transformará $f(x, y)$ em $f(x_1, y_1)$ onde f é uma função analítica qualquer, e sendo $f(x_1, y_1)$ dependente de t , podemos calcular sua expansão pelo Teorema de Maclaurin:

$$f_1 = f + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{t=0} t + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \right)_{t=0} t^2 + \dots \quad (\text{A.20})$$

onde

$$f_1 := f_1(x_1, y_1) \text{ e } f := f(x, y).$$

Denotando também

$$\xi_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right), \quad \eta_1 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} \right)$$

e

$$U_1 f_1 = \xi \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial f_1}{\partial y_1},$$

de modo que

$$\begin{aligned} (\xi_1)_{t=0} &= \xi, \quad (\eta_1)_{t=0} = \eta, \\ (U_1 f_1)_{t=0} &= Uf, \end{aligned}$$

segue se, pela Regra da Cadeia, que

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = U_1 f_1 \quad \text{e, portanto,} \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{t=0} = Uf$$

e

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (U_1 f_1) = U_1 (U_1 f) := U^2 f_1.$$

Ainda mais

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \right)_{t=0} = U(Uf) := U^2 f.$$

Analogamente

$$\left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial t^3} \right)_{t=0} = U(U(Uf)) := U^3 f$$

e assim sucessivamente. Portanto a ação de qualquer transformação finita do grupo de transformações sobre uma função analítica f é dada pela expansão

$$f_1 = f + (Uf)t + (U^2 f) \frac{t^2}{2!} + (U^3 f) \frac{t^3}{3!} + \dots := e^{tU} f. \quad (\text{A.21})$$

Em particular

$$\begin{cases} x_1 = e^{tU} x_1 = x + (Ux)t + (U^2 x) \frac{t^2}{2!} + \dots, \\ y_1 = e^{tU} y_1 = y + (Uy)t + (U^2 y) \frac{t^2}{2!} + \dots. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Nota se também que as equações dadas em (A.22) definem claramente um grupo de transformações no parâmetro t .

A.6 Invariantes

Uma função $f(x, y)$ é invariante pela ação de um grupo se ela é deixada inalterada por todas as transformações do grupo, isto é :

$$f(x_1, y_1) = f(x, y) .$$

Escrevendo a equação (A.21) na forma

$$f_1 - f = (Uf)t + (U^2 f) \frac{t^2}{2!} + (U^3 f) \frac{t^3}{3!} + \dots, \quad (\text{A.23})$$

para que $f(x_1, y_1) = f(x, y)$ para todos os valores de x e y e seus correspondentes x_1 e y_1 nos quais eles são transformados por todas as transformações

do grupo, ou seja, para todos os valores de t , é condição necessária e suficiente que o lado direito da equação (A.23) seja identicamente nulo para todos os valores de x e y . Em particular deve-se ter, necessariamente,

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0. \quad (\text{A.24})$$

Como $U^2 f = (U(Uf))$ e $U^{(n)} f = (U(U^{(n-1)} f))$, a condição (A.24) também será suficiente. Isso nos leva ao seguinte teorema:

Teorema A.1 *A condição necessária e suficiente para que uma função $f(x, y)$ seja invariante pela ação do grupo Uf é que $Uf = 0$.*

Assim para se determinar se uma determinada função $f(x, y)$ é invariante por Uf devemos verificar se (A.24) é satisfeita ou, de modo equivalente, verificar se f é solução do correspondente sistema de equações diferenciais abaixo

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{df}{0}. \quad (\text{A.25})$$

É sabido que, se $u(x, y) = \text{const}$ é a solução da equação

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}, \quad (\text{A.26})$$

então a solução geral de (A.24) é

$$f = F(u)$$

onde F é uma função analítica qualquer de u .

Conforme visto na secção 4, a equação diferencial que dá as trajetórias de um grupo é obtida da transformação infinitesimal do mesmo. Desse modo, com as notações acima,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} = \frac{\eta}{\xi}. \quad (\text{A.27})$$

A solução geral de (A.27) $u(x, y) = \text{const}$ é a equação da família de trajetórias. Como u é uma função invariante pelo grupo Uf , segue que a equação de uma trajetória é obtida igualando-se um invariante à uma constante. Essa propriedade é uma característica de um invariante. Portanto

se igualando uma função à uma constante isso resultar numa equação de uma trajetória, então essa função, de fato, é um invariante.

Há outras formas em que a equação de uma trajetória pode aparecer. Vide[8].

Se $f(x, y) = 0$ for uma equação invariante então $f_1(x_1, y_1)$ deve se anular para todos os valores de x_1 e y_1 nos quais os valores de x e y , que satisfazem a equação $f(x, y) = 0$, são transformados pela ação do grupo. Como podemos reescrever (A.23) na forma

$$f_1(x_1, y_1) = f(x, y) + (Uf)t + (U^2f)\frac{t^2}{2!} + (U^3f)\frac{t^3}{3!} + \dots, \quad (\text{A.28})$$

se o lado direito dessa igualdade tiver de ser nulo sempre que $f(x, y)$ se anular, para todos os valores de t , é necessário e suficiente que cada um dos demais coeficientes também seja nulo. Em particular, é necessário que

$$Uf = 0 \text{ sempre que } f(x, y) = 0$$

ou seja, sempre que $f(x, y)$ for um fator de Uf . Aqui estamos supondo que f não possua fatores repetidos.(Vide[24]). Assim se $f(x, y)$ for um fator de Uf podemos decompor Uf em

$$Uf = \omega(x, y) f(x, y)$$

calcular

$$U^2f = U(Uf) = U\omega f + \omega Uf = (U\omega + \omega^2) f$$

que também contem f como um fator. Analogamente se mostra que todo coeficiente em (A.28) também tem f como fator sempre que Uf tiver e que, se

$$U^n f = \sigma(x, y) f(x, y), \text{ então } U^{n+1} f = (U\sigma + \sigma^2) f.$$

Desse modo podemos concluir que o anulamento de Uf sempre que $f(x, y)$ se anula é uma condição necessária e suficiente para que $f(x, y) = 0$ seja uma equação invariante. No caso de $Uf = 0$ para todos os valores de x e y a condição acima é plenamente verificada, como já se sabia pela condição(A.24). Assim, não só $f(x, y) = 0$ é uma trajetória como também $f(x, y) = \text{qualquerconst}$, neste caso, o será.

A discussão acima pode ser resumida no seguinte:

Teorema A.2 *A condição necessária e suficiente para que $f(x, y) = 0$ seja invariante pelo grupo Uf é que $Uf = 0$ para todos os valores de x e de y para os quais $f(x, y) = 0$, supondo-se que $f(x, y)$ não tenha fatores repetidos. Pontos que satisfazem as duas equações $\xi(x, y) = 0$ e $\eta(x, y) = 0$ são invariantes pela ação do grupo. Se $\xi(x, y) = 0$ e $\eta(x, y) = 0$ sempre que $f(x, y) = 0$, essa curva é composta de pontos invariantes e não será considerada incluída nas órbitas do grupo. Nos outros casos, $f(x, y) = 0$ é uma trajetória. Se $Uf = 0$ para todos os valores de x e de y , $f(x, y)$ é um invariante e $f(x, y) = k$, onde k é uma constante qualquer (inclusive zero), é uma trajetória.*

A.7 Família de Curvas Invariantes

Uma família de curvas é dita invariante por um grupo se toda transformação finita do grupo leva uma curva dessa família em outra da mesma família.

Restringindo apenas às famílias de curvas a um parâmetro definidas por

$$f(x, y) = c,$$

ela será invariante se

$$f(x_1, y_1) = f[\phi(x, y, t), \psi(x, y, t)] := \omega(x, y, t) = c'$$

é a equação da mesma família de curvas, quaisquer que sejam t , c e c' constantes arbitrárias.

É sabido que uma equação envolvendo uma constante arbitrária e que define uma família a um parâmetro é igualmente determinada por uma única equação diferencial de primeira ordem para a qual a equação envolvendo a constante arbitrária é a solução geral. Porisso para que $f(x, y) = c$ e $\omega(x, y, t) = c'$ definam a mesma família elas devem ser soluções da mesma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \text{ e } \frac{\partial \omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}dy = 0.$$

Para isso é necessário e suficiente que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Mas essa é uma condição necessária e suficiente para que ω seja uma função de f . Logo

$$\omega = F(f)$$

e usando a expansão (A.28)

$$f(x_1, y_1) = f(x, y) + (Uf)t + (U^2f) \frac{t^2}{2!} + (U^3f) \frac{t^3}{3!} + \dots$$

vemos que $f(x_1, y_1)$ será uma função de $f(x, y)$, para todos os valores de t , se, e somente se, cada coeficiente do lado direito da expansão também for. Em particular $Uf = \mu(f)$. Daí

$$U^2f := U(Uf) = U(\mu(f)) = \frac{d\mu(f)}{df} Uf = \frac{d\mu(f)}{df} \mu(f)$$

que também é função de f . Analogamente ao que se fez acima, as potências $U^n f$ também serão funções de f . Desse modo $Uf = \mu(f)$ é condição necessária e suficiente para que a família de curvas $f(x, y) = c$ seja invariante pela ação do grupo U .

Um caso especial deve ser ressaltado: se $Uf = 0$ para todos os valores de x e y , $f(x, y) = c$ é uma família de trajetórias, cada uma invariante e portanto a família é. Essa particular família é caracterizada pelo fato que sua equação diferencial é

$$\eta dx - \xi dy = 0.$$

Para se determinar todas as famílias de curvas invariantes pela ação de um dado grupo Uf , vide [8].

A.8 Mudança de Variáveis e Variáveis Canônicas

A forma das transformações de um grupo depende da escolha das variáveis sobre as quais ele atua.

A introdução de novas variáveis em uma transformação envolve o seguinte processo:

Para achar o efeito da mudança de variáveis

$$\mathbf{x} = F(x, y) \text{ e } \mathbf{y} = G(x, y) \tag{A.29}$$

nas transformações finitas do grupo

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x, y, a), \\ y_1 = \psi(x, y, a), \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

notando que (A.29) tem associada

$$\mathbf{x}_1 = F(x_1, y_1) \text{ e } \mathbf{y}_1 = G(x_1, y_1), \quad (\text{A.31})$$

x, y, x_1 e y_1 devem ser eliminadas nas equações (A.29), (A.30) e (A.31) e as duas relações, que daí resultam, serem resolvidas em $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{y}_1$. Na prática o que se faz é resolver (A.29) e (A.31) em x, y, x_1 e y_1 e substituir o resultado em (A.30). Em geral esse processo é longo e tedioso. Por outro lado o processo de se determinar a nova forma das transformações infinitesimais é muito mais simples.

Lembrando que o primeiro coeficiente de uma transformação infinitesimal é definido por $\xi(x, y) = \frac{\delta x}{\delta a} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \right)_{a_0}$ e considerando a notação acima para a mudança de coordenadas

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial a} \right)_{a_0} = \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial x} \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \right)_{a_0} + \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \right)_{a_0} = \xi \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y}$$

e, portanto,

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U\mathbf{x},$$

temos, analogamente,

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U\mathbf{y}.$$

Assim a nova transformação infinitesimal tem a seguinte forma:

$$Uf(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U\mathbf{x} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + U\mathbf{y} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \quad (\text{A.32})$$

onde $U\mathbf{x}$ e $U\mathbf{y}$ são expressos em termos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por meio de (A.29).

É sempre possível, teoricamente, e muitas vezes, na prática, achar as mudanças de variáveis que reduzem um dado grupo de transformações à uma forma desejada e conveniente. Assim, para se ter o grupo na forma

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \eta \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}},$$

qualquer par de soluções linearmente independentes de

$$\begin{cases} U\mathbf{x} := \xi(x, y) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ U\mathbf{y} := \xi(x, y) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

deve ser tomada como as novas variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Em particular, para reduzir o grupo a um grupo de translações na direção do eixo dos $\mathbf{y}$, em cujas novas coordenadas o grupo teria a forma $Uf := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$ e as equações a serem integradas são

$$\begin{cases} \xi(x, y) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = 0 \\ \xi(x, y) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = 1. \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

A primeira dessas equações é a mesma que (A.24), de modo que $\mathbf{x}$ pode ser escolhida como qualquer invariante do grupo, digamos $u(x, y)$. Um tal invariante também é conhecido por *primeira integral*. A segunda equação é, pelo Método de Lagrange, equivalente ao sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{d\mathbf{y}}{1}$$

conforme também achado anteriormente. Usando o fato que $u(x, y) = c$ é solução de $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$, $\mathbf{y}$ pode ser obtido por quadraturas. De acordo com Lie,

um grupo é dito estar *na forma canônica* quando ele tem gerador $Uf = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$.

As variáveis que o reduzem a essa forma são chamadas *coordenadas canônicas*.

Todo grupo pode ser reduzido à forma canônica $Uf = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$. Para isso é preciso apenas resolver a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

e seguir como especificado acima.

Convém notar que demos acima um tratamento clássico à introdução à Teoria de Lie, aos moldes do tratamento dado à ela no início do século XX

e para duas variáveis apenas. Pode-se, de modo natural, estender todas as considerações feitas acima aos grupos uniparamétricos de várias variáveis, inclusive usando abordagens mais modernas: a linguagem e notações de Variedades Diferenciáveis. Vide [S], [O]. No próximo parágrafo iremos explicitar a forma que as condições de invariância assumem quando se tem quatro variáveis, particularmente as que estão no contexto desejado x , y , y' e y'' .

A.9 Segunda Extensão de um Grupo

As transformações das variáveis x e y levam consigo uma transformação nas várias derivadas de y com relação à x . Desse modo a transformação de pontos

$$\begin{cases} x_1 &= \phi(x, y), \\ y_1 &= \psi(x, y), \end{cases}$$

assim chamada pois transforma o ponto (x, y) no ponto (x_1, y_1) e bem como os vários pontos da curva $F(x, y) = 0$ em pontos correspondentes de outra curva $F_1(x_1, y_1) = 0$, carrega consigo a variação

$$\frac{dy_1}{dx_1} := y'_1 = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y'}{\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'} := \chi(x, y, y')$$

e esta, por sua vez,

$$\frac{dy'_1}{dx_1} := y''_1 = \frac{\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} y' + \frac{\partial \chi}{\partial y'} y''}{\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'} := \omega(x, y, y', y'') .$$

Desse modo a transformação

$$\begin{cases} x_1 &= \phi(x, y), \\ y_1 &= \psi(x, y), \\ y'_1 &= \chi(x, y, y'), \\ y''_1 &= \omega(x, y, y', y'') , \end{cases}$$

nas variáveis x, y, y' e y'' , proveniente da transformação de pontos é chamada *Segunda Extensão, ou Segundo Prolongamento, da Transformação de Pontos*.

Começando com um grupo a um parâmetro de transformações do plano (A.1), vê-se claramente que as correspondentes transformações estendidas

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \phi(x, y, a), \\ y_1 & = & \psi(x, y, a), \\ y'_1 & = & \chi(x, y, y', a), \\ y''_1 & = & \omega(x, y, y', y'', a), \end{array} \right. \quad (\text{A.35})$$

constituem também um grupo local a um parâmetro nas variáveis x, y, y' e y'' e que é chamado Segunda Extensão do Grupo (A.1). Escrevendo-o como o símbolo da transformação infinitesimal da segunda extensão do grupo

$$U''f := \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''}, \quad (\text{A.36})$$

onde como já explorado anteriormente

$$\xi := \frac{\delta x}{\delta a}; \quad \eta := \frac{\delta y}{\delta a}$$

e agora

$$\begin{aligned} \eta' & : = \frac{\delta y'}{\delta a} = \frac{\delta}{\delta a} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \\ & = \frac{\frac{\delta}{\delta a}(dy)}{dx} - \frac{dy \frac{\delta}{\delta a}(dx)}{(dx)^2} \\ & = \frac{d(\frac{\delta y}{\delta a})}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{d(\frac{\delta x}{\delta a})}{dx} \end{aligned}$$

considerando que os operadores δ e d comutam e que

$$\frac{\delta}{\delta a}(dx) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx_1 \right)_{a_0} = \left(d \frac{\partial x_1}{\partial a} \right)_{a_0} = d\xi = d \left(\frac{\delta x}{\delta a} \right)$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta a}(dy) &= d\eta, \\ \eta' &= \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

De maneira semelhante obtemos

$$\begin{aligned} \eta'' &: = \frac{\delta y''}{\delta a} = \frac{\delta}{\delta a} \left(\frac{dy'}{dx} \right) = \dots = \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx} = \\ &= \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} y' + \left(\frac{\partial \eta'}{\partial y'} - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} y' \right) y''. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

A ação das transformações ((A.1) nas variáveis x e y impõe uma ação das transformações estendidas correspondentes (A.35) sobre a equação diferencial

$$f(x, y, y', y'') = 0.$$

Ela será invariante pela ação do grupo estendido se somente se $U''f = 0$ sempre que $f(x, y, y', y'') = 0$. Assim, como antes,

$$U''f := \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} = 0$$

é equivalente ao sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{dy'}{\eta'(x, y, y')} = \frac{dy''}{\eta''(x, y, y', y'')}. \quad (\text{A.39})$$

Duas das soluções $u(x, y) = \text{const}$, que também é chamada de *invariante*, e $u'(x, y, y') = \text{const}$, denominada de *primeiro invariante*, podem ser obtidas pela forma descrita acima. Para se ter a terceira solução $u''(x, y, y', y'') = \text{const}$, ou um *segundo invariante*, o processo é mais trabalhoso. Porém Lie, vide[8], página 88, deu um método muito engenhoso para se obter uma forma para $u''(x, y, y', y'')$, sem ser necessária qualquer integração adicional, desde que as $u(x, y) = \text{const}$ e $u'(x, y, y') = \text{const}$ sejam conhecidas. O método está resumido no teorema a seguir:

Teorema A.3 *Se $f(x, y, y', y'') = 0$ é uma equação diferencial de segunda ordem invariante pela ação do grupo Uf e se $u(x, y) = \text{const}$ é um invariante*

e $u'(x, y, y') = \text{const}$ é um primeiro invariante de Uf , a introdução das novas variáveis

$$\mathbf{x} = u(x, y) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = u'(x, y, y')$$

reduz a equação diferencial à forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

que é de primeira ordem.

Como consequência desse teorema temos as mudanças de coordenadas, aquelas clássicas, sugeridas para as equações diferenciais de segunda ordem $f(x, y, y', y'') = 0$:

Tomando, por exemplo, o caso $Uf = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\xi = 0$, $\eta = 1$, temos $\eta = \eta' = 0$, e as equações (A.39) correspondentes tomam a forma (classicamente usada em [8]),

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dy'}{0} = \frac{dy''}{0}$$

e, portanto, $u := x$, $u' := y'$ e $u'' := y''$. Desse modo a equação mais geral que fica invariante pela ação de $Uf = \frac{\partial f}{\partial y}$ é $f(x, y', y'') = 0$ ou $y'' = F(x, y')$. Ela é caracterizada pela ausência de y . Note que a mudança de variáveis sugerida pelo teorema $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{y} = y'$ reduz a equação original à

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Este é exatamente o método ensinado nos cursos de Cálculo. Outros casos, também devido a esse teorema de Lie, podem ser encontrados em ([8]).

Esperamos que esse conteúdo apresentado sobre a Teoria de Lie tenha sido suficiente para uma compreensão da metodologia adotada para achar as mudanças de coordenadas nos resultados acima.

A.10 Simetrias de Lie de uma equação diferencial

Achar (as) simetrias de pontos de Lie de uma equação diferencial

$$H(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{A.40})$$

significa achar a solução geral $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ da condição de simetria (3.44) [30]. Será suposta a condição de regularidade para (A.40) a fim de que o método seja aplicado e, como muitas equações diferenciais aparecem naturalmente como equações lineares na mais alta derivada, as hipóteses para ela é que ela seja explicitada por

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Isso é equivalente à hipótese usada anteriormente : ‘ não possui fatores repetidos ’.

Devido a (3.39), vide [30], a condição de simetria se reduz a

$$\mathbf{X}\omega = \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \right) \omega = \eta^{(n)}, \quad (\text{A.41})$$

onde

$$\eta^{(i)} = \frac{d\eta^{(i-1)}}{dx} - y^{(i)} \frac{d\xi}{dx}. \quad (\text{A.42})$$

Neste caso o $y^{(n)}$ aparecendo somente em $\eta^{(n)}$ deve ser substituído por ω .

Observação: a expressão geral de $\eta^{(i)}$ acima pode ser obtida generalizando (A.38) acima ou da seguinte maneira: considerando as expansões em Série de Taylor abaixo

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \xi(x, y) + \dots = x + \varepsilon(Xx) + \dots,$$

$$\tilde{y} = y + \varepsilon \eta(x, y) + \dots = y + \varepsilon(Xy) + \dots,$$

$$\tilde{y}' = y' + \varepsilon \eta'(x, y, y') + \dots = y' + \varepsilon(Xy') + \dots,$$

$$\vdots$$

$$\tilde{y}^{(n)} = y^{(n)} + \varepsilon \eta^{(n)}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) + \dots = y^{(n)} + \varepsilon(Xy^{(n)}) + \dots,$$

onde $\eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$ são definidas por

$$\eta' = \left. \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \dots, \eta^{(n)} = \left. \frac{\partial \tilde{y}^{(n)}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Tomando as respectivas diferenciais $d\tilde{x}$, $d\tilde{y}$, $d\tilde{y}', \dots$ e $d\tilde{y}^{(n)}$ e usando as

definições correspondentes temos

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}' &= y' + \varepsilon \eta' + \dots = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{dy + \varepsilon d\eta + \dots}{dx + \varepsilon d\xi + \dots} = \frac{y' + \varepsilon(d\eta/dx) + \dots}{1 + \varepsilon(d\xi/dx) + \dots} = \\
 &= y' + \varepsilon \left(\frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx} \right) + \dots, \\
 &\vdots \\
 \tilde{y}^{(n)} &= y^{(n)} + \varepsilon \eta^{(n)} + \dots = \frac{d\tilde{y}^{(n-1)}}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{y}^{(n-1)} + \varepsilon d\eta^{(n-1)} + \dots}{dx + \varepsilon d\xi + \dots} = \\
 &= \frac{y^{(n)} + \varepsilon(d\eta^{(n-1)}/dx) + \dots}{1 + \varepsilon(d\xi/dx) + \dots} = y^{(n)} + \varepsilon \left(\frac{d\eta^{(n-1)}}{dx} - y^{(n)} \frac{d\xi}{dx} \right).
 \end{aligned}$$

A condição (A.41) é, de fato, uma equação diferencial para as funções ξ e η e que é linear em ambas as funções. Ainda mais, como essa condição deve ser satisfeita *identicamente* em todas as suas variáveis $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, e lembrando que as funções ξ e η dependem apenas de x e y , ela será desdobrada em muitas outras equações diferenciais parciais cujas soluções (possivelmente triviais) podem ser facilmente achadas. Porisso o início se faz escrevendo (A.41) em detalhes. Então evidenciando-se, por exemplo, todos os termos da mais alta derivada $y^{(n-1)}$, estes formarão seu coeficiente que deverá ser tomado identicamente igual a zero; isso usualmente fornece várias equações diferenciais parciais simples. Essas, uma vez resolvidas por simples quadraturas, devem se jogadas nos termos coeficientes da derivada $y^{(n-2)}$, procedendo como no passo anterior e assim por diante. Mesmo que a primeira vista o procedimento pareça complicado, simplesmente, siga em frente. Quando as simetrias existem, elas podem ser facilmente determinadas. Deve se observar que, em muitos casos, poderá acontecer de não haver simetria alguma.

Há duas importantes excessões para essa otimista visão do problema. São elas: as equações diferenciais de primeira ordem e a equação diferencial linear geral.

A.10.1 Simetrias de um sistema de equações diferenciais

Sistemas de equações diferenciais de segunda ordem ocorrem com muita frequência em mecânica clássica. Porisso vamos mudar a notação, passando a

usar aquela adotada naquele contexto, de modo que t será agora uma variável independente, e as coordenadas generalizadas q^a como variáveis dependentes e ainda usaremos $\dot{q}^a$ para denotar dq^a/dt . O sistema de equações diferenciais de segunda ordem (equações de movimento) que vamos considerar será descrito por

$$\ddot{q} = \omega^a (q^i, \dot{q}^i, t) \quad , \quad a, i = 1, \dots, N \quad . \quad (\text{A.43})$$

No caso de uma equação diferencial de ordem n , que pode ser denotada por [30]

$$H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$y^{(n)} = \omega (x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

e que tem associada a ela o operador diferencial parcial

$$\mathbf{A}f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \dots \omega \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \right) f = 0,$$

sabemos que a equação diferencial admite uma simetria de Lie com gerador

$$\mathbf{X} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}},$$

onde $\eta^{(n)}$ é dada por (A.42), se $\mathbf{X}H = 0 \pmod{H = 0}$, ou equivalentemente,

$$[\mathbf{X}, \mathbf{A}] = \lambda \mathbf{A}$$

vale, vide [30], parágrafo 3.3. Por analogia ao tratamento dado à essa equação diferencial, podemos associar ao sistema de equações diferenciais (A.43) uma equação diferencial parcial linear que é completamente equivalente a ele. Essa equação é

$$\mathbf{A}f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \omega^a (q^i, \dot{q}^i, t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \right) f = 0,$$

e onde a somatória está correspondendo à repetição do índice a . Ela admite $2N$ soluções funcionalmente independentes

$$\varphi^\alpha = \varphi^\alpha (q^a, \dot{q}^a, t)$$

que são as primeiras integrais do sistema (A.43). Uma prova dessa equivalência pode ser encontrada em [30], páginas 93-95.

Com relação ao operador $\mathbf{A}$, a maioria dos resultados válidos para uma equação diferencial de segunda ordem pode ser generalizada para sistemas de equações diferenciais de segunda ordem, levando em consideração que, neste caso uma transformação de pontos é uma transformação injetora das variáveis q^a, t e o gerador infinitesimal de um grupo de transformações é dado por

$$\mathbf{X} = \xi(q^i, t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^a(q^i, t) \frac{\partial}{\partial q^a}.$$

As equações diferenciais que definem o sistema (A.43) admitem simetrias geradas por $\mathbf{X}$ e por sua extensão, ou prolongamento,

$$\dot{\mathbf{X}} = \xi(q^i, t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^a(q^i, t) \frac{\partial}{\partial q^a} + \eta^a(q^i, \dot{q}^i, t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}$$

se, analogamente ao caso de uma equação,

$$[\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{A}] = \lambda \mathbf{A} \quad (\text{A.44})$$

vale. [30] sugere uma simplificação dos cálculos para a obtenção na determinação dos coeficientes do prolongamento de $\mathbf{X}$: a componente $\partial/\partial t$ de (A.44) é

$$-\mathbf{A}\xi = -\frac{d\xi}{dt} = \lambda$$

e as demais componentes são

$$\dot{\eta}^a = \frac{d\eta^a}{dt} - \dot{q}^a \frac{d\xi}{dt}.$$

A parte essencial da condição de simetria está na $\partial/\partial \dot{q}^a$ -componente de (A.44), a saber

$$\mathbf{X}\omega^a = \mathbf{A}\dot{\eta}^a - \omega^a \frac{d\xi}{dt}$$

que, por extenso, usando $\square_t = \partial\square/\partial t$, $\square_c = \partial\square/\partial q^c$, é:

$$\begin{aligned} 0 = & \xi\omega_t^a + \eta^b\omega_b^a + (\eta_t^b + \dot{q}^c\eta_c^b - \dot{q}^b\xi_t - \dot{q}^b\dot{q}^c\xi_c) \frac{\partial\omega^a}{\partial\dot{q}^b} + \\ & + 2\omega^a(\xi_t + \dot{q}^b\xi_b) + \omega^b(\dot{q}^a\xi_b - \eta_b^a) + \dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c\xi_{bc} + \\ & + 2\dot{q}^a\dot{q}^c\xi_{tc} - \dot{q}^c\dot{q}^b\eta_{bc}^a + \dot{q}^a\xi_{tt} - 2\dot{q}^b\eta_{tb}^a - \eta_{tt}^a \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Esta equação (A.45) generaliza (A.47), que está contida como um caso especial e que foi demais utilizada, como condição e referência, neste trabalho. Ela serve para determinar as funções componentes $\xi(q^i, t)$ e $\eta^a(q^i, t)$ do gerador infinitesimal $\mathbf{X}$ quando as ω^a , equações que definem o sistema, são dadas. As N equações obtidas são identidades em t , q^i e $\dot{q}^i$ e, como $\xi(q^i, t)$ e $\eta^a(q^i, t)$ não dependem de $\dot{q}^i$, irão se decompor em muitas mais equações, mais simples, e, eventualmente, tornar a integração possível.

A.11 Equação diferencial de segunda ordem.

Para uma equação diferencial de segunda ordem $y'' = \omega(x, y, y')$ a condição de simetria (A.41) se reduz a

$$\mathbf{X}\omega = \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} \right) \omega = \eta'' . \quad (\text{A.46})$$

Usando o fato que [30], equações 2.40, 2.41,

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2 \\ \eta'' &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 + \\ &\quad - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y'' \end{aligned}$$

e onde nesta última equação substitui-se y'' por ω , a condição (A.46) se transforma em

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') - \omega_x \xi - \omega_y \eta + \\ &\quad - \omega_{y'} [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2] + \eta_{xx} + \\ &\quad + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Dessa equação diferencial devem-se determinar $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$. Como observado anteriormente, ela é uma identidade em x, y e y' e, lembrando que ξ e η não dependem de y' , será, então, decomposta em várias equações, de acordo com as diferentes dependências de suas partes sobre y' .

A.12 Aplicação do procedimento

Durante o desenvolvimento dos capítulos 2 e 3, muitas passagens na obtenção das simetrias, e até mesmo na resolução das equações diferenciais, foram suprimidas para não cansar a leitura e não desviar a atenção para o essencial com detalhes demasiadamente técnicos de cálculo diferencial e integral. Porém, para efeito de exemplo de completude do procedimento, todas as passagens serão agora registradas para equação de Liouville no caso bidimensional

$$y'' = \omega(x, y, y') = -\frac{1}{x}y' - \lambda e^y. \quad (\text{A.48})$$

Aquí temos

$$\omega_x(x, y, y') = \frac{1}{x^2}y', \omega_y(x, y, y') = -\lambda e^y \text{ e } \omega_{y'}(x, y, y') = -\frac{1}{x}.$$

Substituindo esses valores em (A.47) se tem

$$\begin{aligned} 0 = & \left(-\frac{1}{x}y' - \lambda e^y\right)(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') - \left(\frac{1}{x^2}y'\right)\xi + \\ & - (-\lambda e^y)\eta - \left(-\frac{1}{x}\right)[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2] + \\ & + \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

ou mais simplificadaamente

$$\begin{aligned} 0 = & [-\lambda e^y(\eta_y - 2\xi_x - \eta) + \frac{1}{x}\eta_x + \eta_{xx}] + \\ & + \left(\frac{1}{x}\xi_x - \frac{1}{x^2}\xi + 3\lambda e^y\xi_y + 2\eta_{xy} - \xi_{xx}\right)y' + \\ & + \left(\frac{2}{x}\xi_y + \eta_{yy} - 2\xi_{xy}\right)y'^2 - \xi_{yy}y'^3. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Igualando o coeficiente de y'^3 a zero deve-se ter $\xi_{yy} = 0$, cuja simples integração fornece

$$\xi(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x). \quad (\text{A.51})$$

Tomando agora o coeficiente de y'^2 e o igualando a zero, tem-se

$$0 = \frac{2}{x}\xi_y + \eta_{yy} - 2\xi_{xy} .$$

Porém, como

$$\xi_y = \alpha(x) \text{ e } \xi_{xy} = \xi_{yx} = \alpha'(x) \quad (\text{A.52})$$

a equação(A.52) se torna

$$0 = \frac{2}{x}\alpha + \eta_{yy} - 2\alpha'$$

ou, equivalentemente

$$\eta_{yy} = 2\alpha' - \frac{2}{x}\alpha.$$

Isso implica em

$$\eta_y = (2\alpha' - \frac{2}{x}\alpha)y + \gamma(x)$$

e, finalmente, que

$$\eta(x, y) = (\alpha' - \frac{1}{x}\alpha)y^2 + \gamma(x)y + \delta(x) . \quad (\text{A.53})$$

Note-se que as equações proponentes acima sugerem que $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ sejam polinômios em y , de modo que as partes de(A.50), ainda a serem determinadas, irão se decompor em mais equações correspondentes às diferentes potências de y que aparecerão. Também para a determinação das funções $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ e $\delta(x)$, doravante denotadas apenas por α , β , γ e δ , o procedimento de identificação de seus coeficientes a zero irá continuar sendo aplicado. Então, com essas novas propostas, igualando o coeficiente do y' a zero tem-se

$$\frac{1}{x}\xi_x - \frac{1}{x^2}\xi + 3\lambda e^y \xi_y + 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0 . \quad (\text{A.54})$$

Calculando as correspondentes derivadas parciais e substituindo em (A.54) ela se transforma em

$$\frac{1}{x}(\alpha'y + \beta') - \frac{1}{x^2}(\alpha y + \beta) + 3\lambda e^y(\alpha) + 2(2(\alpha' - \frac{1}{x}\alpha)'y + \gamma') - \alpha''y - \beta'' = 0$$

ou no polinômio em y

$$[(\frac{\beta}{x})' + 3\alpha\lambda e^y + 2\gamma' - \beta''] + [3\alpha'' - 3(\frac{\alpha}{x})']y = 0,$$

que identificado a zero determina o sistema

$$\begin{cases} (\frac{\beta}{x})' + 2\gamma' - \beta'' = -3\alpha\lambda e^y, \\ 3\alpha'' - 3(\frac{\alpha}{x})' = 0, \end{cases}$$

que, para ter solução como funções de x , deverão impor que $\alpha = \alpha(x) \equiv 0$, pois o lado esquerdo da primeira equação é função só de x enquanto o lado direito é de x e de y . Isso faz com que se tenha que redefinir as funções coeficientes por expressões mais simples

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \beta(x) \\ \eta(x, y) = \gamma(x)y + \delta(x) \end{cases}$$

bem como o sistema, que passa agora a ter apenas uma equação

$$(\gamma)x' + 2\gamma' - \beta'' = 0 \Leftrightarrow 2\gamma' = \beta'' - (\frac{\beta}{x})' \Leftrightarrow 2\gamma = \beta' - (\frac{\beta}{x}) + \text{cte} \Rightarrow$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2}(\beta' - (\frac{\beta}{x})) + c.$$

Porém, independentemente da fórmula explícita para γ , olhando para o termo independente de y em (A.50) e tomando-o identicamente nulo, resulta

$$-\lambda e^y (\eta_y - 2\xi_x - \eta) + \frac{1}{x}\eta_x + \eta_{xx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda e^y (\gamma - 2\beta' - (\gamma y + \delta)) + \frac{1}{x}(\gamma' y + \delta') + \gamma'' y + \delta'' = 0 \Leftrightarrow$$

$$[\lambda e^y (-\gamma + 2\beta' + \delta) + (\frac{1}{x}\delta' + \delta'')] + (\lambda e^y \gamma + \frac{1}{x}\gamma' + \gamma'')y = 0$$

e que com cada coeficiente sendo igualado a zero fornece o sistema

$$\begin{cases} \lambda e^y \gamma + \frac{1}{x}\gamma' + \gamma'' = 0, \\ \lambda e^y (-\gamma + 2\beta' + \delta) = 0, \\ \frac{1}{x}\delta' + \delta'' = 0. \end{cases}$$

Pelos argumentos já expostos acima, a primeira equação impõe que $\gamma = \gamma(x) \equiv 0$. Isso o reduz a

$$\begin{cases} 2\beta' + \delta = 0, \\ \frac{1}{x}\delta' + \delta'' = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação se tem $\delta(x) = c_2 + c_1 \ln x$ e, que substituído na primeira, fornece, por simples quadratura

$$\begin{aligned} \beta(x) &= -\frac{1}{2}c_1(x \ln x - x) - \frac{1}{2}c_2x + c_3 = \\ &= -\frac{1}{2}c_1x \ln x + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)x + c_3. \end{aligned}$$

Note que para essa função β ficar compatível com a condição $\gamma(x) = 0$ é necessário que a constante c_3 seja igual a zero e que a constante c na definição de γ seja igual a $-\frac{1}{4}c_1$. Com isso, finalmente, se conclui que os coeficientes procurados são:

Dessa forma a equação diferencial

$$y'' = \omega(x, y, y') = -\frac{1}{x}y' - \lambda e^y$$

fica invariante pela ação dos grupos finitos que têm por geradores infinitesimais o campo

$$\mathbf{X} = \left[-\frac{1}{2}c_1x \ln x + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)x\right] \frac{\partial}{\partial x} + [c_1 \ln x + c_2] \frac{\partial}{\partial y}.$$

Note-se que tais campos podem ser reescritos em termos de uma base $\{\nu_1, \nu_2\}$ onde

$$\begin{cases} \nu_1 = c_1 \left(-\frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \nu_2 = c_2 \left[-\frac{1}{2}(x \ln x - x)\right] \frac{\partial}{\partial x} + \ln x \frac{\partial}{\partial y}. \end{cases}$$

Esses dois campos de vetores formam uma álgebra de Lie de dimensão 2, não abeliana, solúvel, e $[\nu_1, \nu_2] = \frac{-1}{2}\nu_1$.

Para achar as transformações finitas e assim determinar os grupos de Lie que deixam invariantes a equação diferencial, é preciso integrar tais

campos. Por [30] basta conhecer uma simetria. Então tomando o campo $\nu_1 = c(-\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})$, ou fazendo $c_2 = 0$ a simetria geral X fica reduzida a

$$\mathbf{X} = c(-\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{c}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y},$$

cujos novos coeficientes $\tilde{\xi}(x, y) = -\frac{c}{2}x$ e $\tilde{\eta}(x, y) = c$ continuarão a ser denotados pelas mesmas letras ξ e η de antes. Com esse novo par de funções é possível determinar novas coordenadas (s, t) onde $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$ que se ajustem ao grupo de gerador

$$\mathbf{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s}$$

e, para garantir isso, elas devem, obviamente, satisfazer

$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) := Xs = \xi(x, y)\frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial s}{\partial y} = 1, \\ \mathbf{X}(t) := Xt = \xi(x, y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial t}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Geometricamente, achar as soluções $s(x, y)$ e $t(x, y)$ desse sistema significa introduzir coordenadas que têm as órbitas $t = \text{const}$, do grupo, junto com as linhas coordenadas $s = \text{const}$. Claramente $s(x, y)$ não é univocamente determinada ou fixada pela primeira equação: uma transformação do tipo $\tilde{s} = s + s_o(t)$ também é possível, ou seja, a origem de s pode ser escolhida, arbitrariamente, sobre cada órbita. Analogamente, nem t é univocamente determinada pela segunda equação do sistema, uma vez que uma mudança do forma $\tilde{t} = f(t)$ é sempre possível.

Para resolver $\mathbf{X}t = \xi(x, y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial t}{\partial y} = 0$, observa-se que sobre cada órbita $t = \text{const}$, a equação

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy = 0$$

é verificada e que, junto com

$$\mathbf{X}t = \xi\frac{\partial t}{\partial x} + \eta\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$t_x = \frac{\partial t}{\partial x} \text{ e } t_y = \frac{\partial t}{\partial y}$$

podem ser eliminados fornecendo, pelo Método de Lagrange, [8], página 250, a equação diferencial de primeira ordem

$$\xi(x, y) dy - \eta(x, y) dx = 0$$

e onde agora t é a constante de integração que irá aparecer na solução desta. No caso em questão, deve-se resolver a equação

$$-\frac{c}{2}x dy + (-c) dx = 0 ,$$

que por uma integração direta, ou simples quadratura, se obtém $y = -2 \ln x + t$. Note que a solução está na forma $y = y(x, t)$ e que isso dá as órbitas, cada uma identificada pelo seu valor de t e por isso, por inversão, pode-se obter

$$t = t(x, y) = y + 2 \ln x.$$

Por sua vez, a primeira equação do sistema

$$\mathbf{X}s = \xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

é equivalente, ainda pelo Método de Lagrange, a resolver, substituindo y por $y(x, t)$

$$\frac{dx}{\xi(x, y(x, t))} = \frac{ds}{1}$$

o que é o mesmo que, por uma simples integração obter

$$s(x, t) = \int \frac{-2}{cx} dx = -2c \ln x + k.$$

Conforme foi observado acima, s não é univocamente determinado. Sempre se pode adicionar a ela uma função de t . Por isso neste caso considera-se, por simplicidade, a constante $k = 0$ e ela passa a ser expressa por $s(x, t) = -2c \ln x$.

Juntando agora essas duas equações se tem:

$$\begin{cases} t = y + 2 \ln x, \\ s = -\frac{2}{c} \ln x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t + cs, \\ x = e^{-\frac{cs}{2}}. \end{cases}$$

Observe que essa mudança de coordenadas é a mesma sugerida na equação 2.42. Nestas novas coordenadas

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial s} ds}{\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial s} ds} = \frac{1 dt + c ds}{-\frac{c}{2} e^{-\frac{cs}{2}} ds} = -\frac{2}{c} e^{\frac{cs}{2}} \frac{dt}{ds} - 2 e^{\frac{cs}{2}} = -\frac{2}{c} e^{\frac{cs}{2}} (t' + c)$$

onde $t' = \frac{dt}{ds}$. Por outro lado

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{\frac{\partial y'}{\partial t} dt + \frac{\partial y'}{\partial s} ds + \frac{\partial y'}{\partial t'} dt'}{\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial s} ds} = \frac{4}{c^2} e^{cs} t'' + \frac{2}{c} (t' + c)$$

No novo referencial determinado pelas mudanças acima a equação diferencial

$$y'' = -\frac{1}{x} y' - \lambda e^y$$

se transforma em

$$\frac{4}{c^2} e^{cs} t'' + \frac{2}{c} (t' + c) + \frac{1}{e^{-\frac{cs}{2}}} \frac{-2}{c} e^{\frac{cs}{2}} (t' + c) = -\lambda e^{t+cs}$$

onde, após simplificações, se reduz à

$$t'' = \frac{-\lambda c^2}{4} e^t .$$

Para resolver essa equação de 2ª ordem, com a ausência da variável s , considera-se $p = t'$, logo $t'' = \frac{dp}{ds} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{ds} = p \frac{dp}{dt}$. Assim

$$\begin{aligned} t'' &= p \frac{dp}{dt} = \frac{-\lambda c^2}{4} e^t \Rightarrow p dp = \frac{-\lambda c^2}{4} e^t dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p^2}{2} &= \frac{-\lambda c^2}{4} e^t + \frac{k}{2} \Rightarrow p^2 = k - \frac{\lambda c^2}{2} e^t , \end{aligned}$$

e considerando $k \geq \frac{\lambda c^2}{2} e^t$, pode-se explicitar $p = \sqrt{k - \frac{\lambda c^2}{2} e^t}$. Como $p = \frac{dt}{ds} = \sqrt{k - \frac{\lambda c^2}{2} e^t}$, separando-se as variáveis recai-se em

$$\frac{dt}{\sqrt{k - \frac{\lambda c^2}{2} e^t}} = ds \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \left| \frac{\sqrt{k - \frac{\lambda c^2}{2} e^t} - \sqrt{k}}{\sqrt{k - \frac{\lambda c^2}{2} e^t} + \sqrt{k}} \right| = s + \text{const}$$

Voltando às variáveis de origem x e y tem-se a solução na forma implícita

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \ln \left| \frac{\sqrt{k - \frac{\lambda c^2}{2} x e^y} - \sqrt{k}}{\sqrt{k - \frac{\lambda c^2}{2} x e^y} + \sqrt{k}} \right| = \frac{-2}{c} \ln x + \text{const}$$

Observe que fazendo a identificação $\sqrt{k} = c$ obtemos exatamente a equação (2.48).

Finalmente, esperamos que o detalhamento dado acima tenha sido eficiente para a ilustrar como as simetrias de Lie de uma equação diferencial, quando existem, podem ajudar a achar as soluções exatas da mesma. Para aqueles que se interessarem em mais detalhes sobre o método, recomendamos as leituras de [8], para uma visão clássica e rica em exemplos, e de [24, 30], para abordagens mais modernas e com variadas aplicações à muitas outras equações diferenciais.

Apêndice B

O Lema de Lagrange

Neste apêndice iremos explicitar alguns dos resultados que foram utilizados no decorrer desta tese para deixar o leitor informado corretamente quanto ao teor da referência. O Lema de Lagrange que foi usado para ajudar na busca das simetrias de Nöther possui o seguinte enunciado:

Lema B.1 *Considere f uma função contínua no intervalo $[x_0, x_1]$. Seja η uma função continuamente diferenciável em $[x_0, x_1]$ e que se anula nos extremos, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. estas condições, se*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \eta(x) dx = 0$$

para qualquer função η com as características descritas, então $f \equiv 0$.

Demonstração: Suponha o contrário, ou seja que f não seja identicamente nula. Então existe um ponto c no intervalo aberto (x_0, x_1) tal que, sem perda de generalidade, podemos supor $f(c) > 0$. Então, pela continuidade da f existe uma vizinhança de c onde f permanece estritamente positiva. Sejam ξ_1 e ξ_2 dois pontos quaisquer dessa vizinhança com $\xi_1 < \xi_2$.

Consideremos agora a função

$$\eta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin (\xi_1, \xi_2) \\ (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 & \text{se } x \in (\xi_1, \xi_2) \end{cases} .$$

Como $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < x_1$ temos claramente que $\eta_0(x)$ satisfaz as condições do lema, logo

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \eta_0(x) dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x) \eta_0(x) dx$$

pois a função $\eta_0(x) = 0$ para $x \in [x_0, \xi_1] \cup [\xi_2, x_1]$. Mas $f(x) > 0$ e $\eta_0(x) > 0$ em (ξ_1, ξ_2) e as integrais acima nos dão uma contradição. Portanto f não é positiva. de mesma forma mostra-se que f não pode ser negativa. Logo $f \equiv 0$. $\square$

Bibliografia

- [1] O. P. Bhutani e K. Vijayakumar, *On certain new and exact solutions of the Emden-Fowler equation via invariant variational principles and group invariance*, J.Austral. Math. Soc. Ser. B., **32** (1991), pp 457-468.
- [2] Yu. Bozhkov e A. C. Gilli Martins, *On the symmetry group of a differential equation and the Liouville Problem*, Rend. Inst. Math. Univ. Trieste, (2002), no prelo.
- [3] Yu. Bozhkov e A. C. Gilli Martins, *Lie points symmetries and exact solutions of quasilinear differential equations with critical exponents*, 2002, submetido.
- [4] Yu. Bozhkov e A. C. Gilli Martins, *Lie points symmetries of the Lane-Emden systems*, 2002, submetido.
- [5] G. Bratu, *Sur les équations intégrales non linéaires*, Bull. Soc. Math. de France, **42** (1914), páginas 113-142.
- [6] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*, Dover Publ. Inc., New York, 1958.
- [7] Ph. Clément, D. G. de Figueiredo e E. Mitidieri, *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Topol. Methods in Nonlinear Analysis, **7** (1996), páginas 133-164.
- [8] A. Cohen, *An introduction to the Lie Theory of one-parameter groups, with applications to the solution of differential equations*, G. E. Stechert &Co, New York, 1911.
- [9] F. Gazzola e A. Malchiodi, *Some remarks on the equation $-\Delta u = \lambda(1+u)^p$ for varying domains*, Comm. P. D. E., **27** (2002), páginas 809-845.

- [10] I. M. Gelfand, *Some problems in the theory of quasilinear equations*, Amer. Math. Soc. Transl., **29** (1963), páginas 295-381.
- [11] B. Gidas, W. Ni e L. Nirenberg, *Symmetry and related problems via maximum principle*, Comm. Math. Phys., **68** (1979), páginas 209-243.
- [12] H. Goenner e P. Havas, *Exact solutions of the generalized Lane-Emden equations*, J. Math. Phys., **41**, (2000), páginas 7029-7042.
- [13] H. Goenner, *Symmetry transformations for the generalized Lane-Emden equations*, Gen. Rel. Grav., **33**, (2001), páginas 833-841.
- [14] J. Hulshof e R. C. A. M. van der Vorst, *Asymptotic behavior of ground states*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), páginas 2423-2431.
- [15] D. D. Joseph e T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rat. Mech. Anal., **48** (1973), páginas 241-269.
- [16] A. H. Kara e F. M. Mahomed, *A note on the solutions of the Emden-Fowler equations*, Int. J. Non-Linear Mech., **28**, (1993), páginas 379-384.
- [17] P. G. L. Leach, *First integrals for the modified Emden equations*, J. Math. Phys., **26**, páginas 2510-2514.
- [18] P. G. L. Leach e R. Maartens, *Self-similar solutions of the generalized Emden-Fowler equations*, Int. J. Non-Linear Mech., **27**, (1992), páginas 575-582.
- [19] S. Lie, Arch. für Math. Kristiania, Bd **6** (1881), heft 3, páginas 328-368.
- [20] S. Lie, Arch. für Math. Kristiania, Bd **6** (1881), heft 1, páginas 112-124. (Ges Abhandl., Bd **3**, páginas 469-478).
- [21] J. Liouville, *Sur l'équation aux dérivés partielles $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \lambda a^2 = 0$* , J. Math. Pures Appl., **18**(1) (1853), páginas 71-72.
- [22] J. D. Logan, *Invariant variational principals*, Academic Press, New York, 1977.
- [23] American Mathematical Society, MathSciNet Search.
- [24] P. J. Olver, *Application of Lie groups to differential equations*, GMT 107, Springer, New York, 1986.

- [25] L. V. Ovsiyannikov, *Group analysis of differential equations*, [em Russo], Nauka, Moscow, 1978.
- [26] J. Serrin e H. Zou, *Non-existence of positive solutions of the Lane-Emden systems*, Diff. Int. Eqs, **9** (1996), páginas 635-653.
- [27] J. Serrin e H. Zou, *Existence of positive solutions of the Lane-Emden systems*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **46** (1998), suppl., páginas 369-380.
- [28] E. A. B. Silva e S. H. M. Soares, *Liouville-Gelfand type problems for the N -Laplacian on bounded domains of $\mathbb{R}^N$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28**, (1999), pp. 1-30.
- [29] M. R. Spiegel, *Schaum's outline of theory and problems of Fourier Analysis*, McGraw-Hill Inc., New York, 1974.
- [30] H. Stephani, *Differential equations: their solutions using symmetries*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [31] H. Zou, *Symmetry of ground states for a semilinear elliptic system*, Trans. Amer. Math. Soc., **352** (1999), páginas 1217-1245.