DISTRIBUIÇÕES EXATAS DE TESTES DE HIPÓTESES MULTIVARIADOS

JOSÉ ANTÔNIO CORDEIRO

Orientador: Pushpa Narayan Rathie

Tese apresentada do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial - para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

CAMPINAS
Estdo de São Paulo - Brasil
1980

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Dr. Pushpa N. Rathie, pela segura orientação que proporcionou durante a realização deste trabalho.

Agradeço aos colegas do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, pela amizade que permitiram se desenvolvesse entre nós

e agradeço aos meus filhos Gustavo e Enéas, que me permitem reviver em si a minha infância e que me ensinam, nas lides do dia a dia, a ser tolerante porém crítico.

TÍTULO: *DISTRIBUIÇÕES EXATAS DE TESTES DE HIPÓTESES MULTIVARIADOS*

ÍNDICE

RESUMO

Neste trabalho são dadas soluções a três problemas relacionados com distribuições de critérios de testes de hipóteses.

Cada problema se constitui em um capítulo.

No capítulo I são apresentados os momentos do critério da razão da verossimilhança para o teste de igualdade, em grupos, de matrizes de covariâncias de populações multivariadas Gaussianas complexas. A função densidade de probabilidade do critério é calculada e apresentada na forma da função G-de Meijer e, para o caso em que os tamanhos dos agrupamentos de populações são iguais, em forma computável de séries de funções simples.

O capítulo II trata do problema de teste de igualdade de médias, em grupos, de coordenadas de um vetor multivariado normal com matriz de covariâncias com estrutura de simetria composta do tipo I. Os momentos do critério da razão da verossimilhança para o teste são apresentados, sua função densidade de probabilidade é dada em termos da função G-de Meijer e é calculada e apresentada em forma computável para o caso em que os grupos têm o mesmo tamanho.

No capítulo III apresentamos os momentos do critério da razão da verossimilhança para o teste de estrutura de simetria composta do tipo II na matriz de covariâncias de uma população normal multivariada. A função densidade de probabilidade do critério é dada em forma da função G-de Meijer e é calculada e apresentada em forma computável para o caso em que o número de características ou atributos é igual a três.

São apresentados três apêndices, um sobre a função H, outro sobre a função G e outro sobre a transformada de Mellin, onde é provada a relação um-a-um entre ela e a distribuição de probabilidade que a define.

CAPÍTULO 0

Neste capítulo relacionamos a transformada de Mellin - com outras técnicas concorrentes no estudo das distribuições de variáveis aleatórias e suas transformações, bem como discutimos algumas vantagens e desvantagens que elas apresentam em aplicações.

No estudo das distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias e suas transformações, várias técnicas têm uso - corrente e são bem difundidas entre aqueles que se ocupam dessa área. Elas se complementam, sendo cada uma delas melhor ou pior ferramenta para cada tipo específico de problema.

Na determinação de distribuições de transformações injetivas (e mesmo não injetivas) de variáveis aleatórias contínuas, como, por exemplo, somas, produtos, transformações diferenciáveis etc, podemos usar, sempre, o método direto pela determinação da - transformação inversa e de seu jacobiano (vide p.e. Hogg e Craig (1970), pg.139). O problema que aparece quando aplicamos esse método, é o de nos depararmos com integrais de difícil resolução. Não obstante pudermos, sempre, utilizar métodos numéricos para resolvê-las.

A função geradora de momentos, que é transformada de - Laplace bilateral e com argumento negativo, é uma excelente ferramenta para trabalhos na área, mas com um incoveniente: ela nem - sempre existe. Para a classe de distribuições que a possuem, ela é suficiente para o estudo de somas de variáveis aleatórias, por exemplo, bem como para o estudo de suas distribuições assintóticas.

O incoveniente da não existência põe a transformada de Laplace em desvantagem com relação à de Fourier da função densidade de probabilidade, denominada função característica. Esta sempre existe, pois seu núcleo é limitado e a integral da densidade sempre converge absolutamente.

A função característica é utilizada em estudos de distribuições limites e exatas de somas de variáveis aleatórias independentes, pois a função característica de uma soma dessas é o produto das respectivas funções características, propriedade esta da convolução (vide p.e. Lukacs (1970), pg.37).

Probabilistas e estatísticos têm dado ênfase ao estudo de somas de variáveis aleatórias, mas não têm se ocupado de problemas de produtos com a mesma intensidade. E esses problemas ocorrem com muita frequência nas aplicações, como, por exemplo, nas estimações de medidas bi- ou tri-dimensionadas, quando se têm as medidas marginais; ou problemas da teoria da codificação e decodificação quando se usam grupos multiplicativos em vez dos aditivos; ou ainda, na determinação de distribuições de determinantes de matrizes aleatórias com entradas independentes.

No apêndice A listamos alguns trabalhos nessas direções.

Quando as variáveis-fatores são todas positivas, as técnicas da função característica ainda são aplicáveis, pois o logarítmo transforma o problema do produto no da soma. Mas quando as variáveis aleatórias assumem valores negativos, isso não é possível e aí se mostra útil a transformada de Mellin (vide apêndice A segundo parágrafo).

Esta, como a transformada de Laplace, também é uma função complexa a argumento complexo e tem, com a transformada de Fourier (função característica), a vantagem de haver uma relação biunívoca entre ela e as distribuições que a definem, conforme corolário 1 do apêndice A.

É fato conhecido que os momentos não definem a distribuição (exemplo, vide Lukacs (1970), pg. 12), mas a existência da transformada de Mellin da densidade de uma variável aleatória X

$$M\{f(x)\}(s) = E(X^{s-1})$$

é presuposta em uma faixa do plano complexo $\sigma_1 < \text{Re } s < \sigma_2$, paralela ao eixo imaginário, e, pelo corolátio 1, apêndice A, esta transformada define a distribuição de probabilidade.

Esta propriedade mais a transformada inversa (vide teorema 4.3.3, Zemanian (1968)) são suficientes para a importância do uso da transformada de Mellin na Estatística em uma gama imensa de problemas.

Neste trabalho contribuimos para a resolução de tres - problemas estatísticos, pela técnica da transformada de Mellin. Na introdução de cada capítulo, comentamos a utilização desta e de outras técnicas, por vários pesquisadores, na resolução de - problemas semelhantes aos que nos propusemos a resolver.

No capítulo I, utilizamos a transformada de Mellin e sua fórmula de inversão para, a partir de momentos calculados por Krishnaiah, Lee e Chang (1975), calcularmos a função densidade de probabilidade do critério da razão da verossimilhança para testar a hipótese de igualdade, em grupos, de matrizes de covariâncias de populações gaussianas multivariadas complexas. Esse capítulo é composto de nove secções, das quais a primeira lista alguns trabalhos de estudo e aplicações das distribuições gaussianas multivariadas complexas, a segunda dá a definição dessas distribuições. Na secção 3 apresentamos o problema de que nos ocupamos e os momentos calculados pelos autores acima e nas secções seguintes damos a função densidade de probabilidade do critério em termos da função H, para o caso geral, e da função G-de Meijer, para o caso em que todos os agrupamentos têm o mesmo tamanho e, pela aplicação do teorema dos resíduos, calculamos essa densidade e a apresentamos em séries computáveis de funções logarítmicas, com coeficientes dados como séries de funções ψ e ζ-de Riemann.

No capítulo II, pela mesma técnica apresentada no anterior, a partir dos momentos calculados por Votaw (1948) para o - critério da razão da verossimilhança do teste de igualdade de médias, em grupos, de coordenadas de vetor com distribuição normal multivariada com matriz de covariâncias com estrutura de simetria composta do tipo I, determinamos sua função densidade de probabilidade. O capítulo é dividido em quatro secções onde, na primeira, introduzimos o conceito de simetria completa e simetria composta do tipo I e listamos alguns trabalhos na área, na segunda secção apresentamos o problema de que nos ocupamos, a hipótese e os momentos calculados por Votaw. Nas secções seguintes calculamos a função densidade de probabilidade do critério e a apresentamos em forma da função G-de Meijer, no caso geral, e na forma computável de série de funções logarítmicas, cujos coeficientes são dados em termos da função ψ e ζ-de Riemann, para o caso em que os grupos são todos do mesmo tamanho.

No capítulo III, como no anterior, a partir dos momentos calculados por Votaw (1948) para o critério da razão da verossimilhança do teste para a estrutura de simetria composta do tipo II da matriz de covariâncias de uma população normal multivariada, determinamos, com o uso da transformada de Mellin e sua fórmula de inversão, a função densidade de probabilidade do critério. O capítulo é dividido em sete secções, das quais a primeira se refere à introdução ao conceito de simetria composta do tipo II e à listagem de alguns trabalhos na área e na segunda, definimos a estrutura de simetria composta do tipo dois para uma população normal multivariada. Nas outras secções calculamos, pela aplicação do teorema dos resíduos, a função densidade de probabilidade do critério e a apresentamos na forma da função G-de Meijer, para o caso geral, e na forma de série computável de funções logarítmicas com coeficientes em termos das funções ψ e ζ-de Riemann, para o caso em que o número de características ou atributos é igual a tres.

Em cada capítulo, os resultados principais são apresentados em forma de teoremas. Esses resultados dão as funções densidades para os diversos casos e não apresentamos as respectivas funções de distribuição porque todas são de integração imediata, como comprova o resultado abaixo, demonstrado em Mathai e Saxena (1973), pg. 191:

teorema 1: para $\alpha > o$, k um inteiro positivo e $o < u < 1$,

$$\int_0^x u^{\alpha}(-\log u)^{k-1}du = x^{\alpha+1}\sum_{r=1}^{k}\{k(k-1)\ldots(k-r+1)/(k(\alpha+1)^r)\cdot$$

$$\cdot(-\log x)^{k-r}\}.$$

No final do trabalho apresentamos tres apêndices, um sobre a transformada de Mellin, outro sobre a função G-de Meijer e outro sobre a função H. Nos apêndices sobre as funções damos, simplesmente, suas definições e condições de convergência. No apêndice da transformada de Mellin apresentamos sua definição, sua fórmula de inversão e demonstramos um resultado que é afirmado ser verdade no trabalho de Epstein (1948), mas não demonstrado, que é a relação um-a-um entre a transformada e a distribuição de probabilidade que a define.

Acreditamos, embora não tenhamos podido, ainda, provar, que toda distribuição de probabilidade com suporte R^{++} possua sua transformada de Mellin.

Em trabalhos posteriores a este devemos calcular pontos percentuais das funções de distribuição dos critérios que ora trabalhamos, para diversos valores de seus parâmetros de controle.

Algumas das notações utilizadas neste trabalho são dadas a seguir.

$R^{++} = \{x \mid x$ é número real, $0 < x < \infty\}$

R:= conjunto dos números reais

Z:= conjunto dos números inteiros

$\Gamma(z)$: função gama, definida na forma integral como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx \qquad \text{Re } z > 0$$

e como produto infinito como

$$\Gamma(z) = \left[z e^{\gamma z} \{ \prod_{n=1}^{\infty} (1+z/n) e^{-z/n} \} \right]^{-1} \qquad z \neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$, função indicadora do conjunto A.

CAPÍTULO 1

CASO GAUSSIANO COMPLEXO DE UM TESTE DA RAZÃO DA VEROSSIMILHANÇA

Os momentos do critério da razão da verossimilhança para o teste de igualdade, em grupos, de matrizes de covariâncias de populações gaussianas complexas multivariadas, são apresentados e com a utilização da transformada de Mellin e sua fórmula de inversão é calculada sua função densidade de probabilidade e apresentada em forma da Função H, da função G-de Meijer e como série computável de funções simples.

1.1 - INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem aumentado consideravelmente o interesse de pesquisas na área das distribuições multivariadas complexas. Na Física, essas distribuições são úteis (Porter (1965), Carmeli (1974)) no estudo de distribuições de espaçamentos entre níveis de energia de núcleos em alta excitação. Em séries temporais múltiplas, elas são úteis no estudo de estruturas da matriz densidade espectral, pois certos estimadores de tal matriz de uma série temporal múltipla estacionária Gaussiana têm distribuições aproximadamente de uma matriz complexa de Wishart e estudos em - que aparecem tais matrizes espectrais estão, entre outros, os de análise de dados de vibrações de estruturas aéreas, previsões metereológicas e detecções de sinais em telecomunicações (vide p.e. Hannan (1970), Liggett (1972/3) Priestley, Subba Rao e Tong (1973) e Brillinger (1974)).

Wooding (1956) e Goodmann (1963) estudaram a distribuição multivariada gaussiana complexa. Distribuições conjuntas de raízes características de certas matrizes aleatórias complexas foram obtidas por James (1964), Wigner (1965) e Khatri (1965) em linhas de trabalho similares às aplicadas em casos similares reais.

Outros têm trabalhado na determinação de distribuições de testes sobre matrizes de covariâncias de populações multivariadas gaussianas complexas. Khatri (1965) obteve o h-ésimo momento (h=1,2,...) do critério da razão da verossimilhança para o teste da realidade da matriz de covariâncias. Gupta(1973) e Carter, Katri e Srivastava (1976) determinaram a distribuição exata desse teste para dimensões até 6 e Rathie (1979) generalizou-a a qualquer dimensão, com o uso da transformada inversa de Mellin.

Wahba (1971) e Pillai e Nagarsenker (1971) consideraram a distribuição do critério da razão da verossimilhança para o teste de esfericidade da população gaussiana multivariada complexa. Krishnaiah, Lee e Chang (1975) determinaram o momento de ordem h (h=0,1,2,...) do critério da razão da verossimilhança para o teste de independência entre duas quaisquer coordenadas do vetor multivariado gaussiano complexo, bem como para o teste de igualdade entre a matriz de covariâncias e um múltiplo de uma matriz dada e para o teste simultâneo de igualdade entre a matriz de covariâncias e uma matriz dada e entre o vetor de médias e um vetor de médias dado.

Nesse mesmo trabalho, Krishnaiah, Lee e Chang obtiveram o h-ésimo momento do critério da razão da verossimilhança para o teste de igualdade entre populações multivariadas gaussianas complexas, bem como do critério para o teste de igualdade de matrizes de covariâncias, em grupos, de populações desse tipo.

Neste trabalho, nós determinamos a distribuição exata deste último critério para o caso particular em que as amostras para cada uma das populações são iguais, bem como os tamanhos dos grupos de populações e damos a função densidade de probabilidade em forma computável e, para o caso geral, a apresentamos como função H (vide apêndice C). Para a determinação da função densidade, utilizamos a transformada de Mellin e sua fórmula de inversão (vide apêndice A).

1.2 - DISTRIBUIÇÕES NORMAIS (GAUSSIANAS) p-VARIADAS COMPLEXAS

Uma variável aleatória p-variada Gaussiana complexa $\zeta'=(Z_1,Z_2,\ldots,Z_p)$ (vide Goodman e Dubman (1969)) é uma p-upla de variáveis aleatórias complexas $Z_j=X_j+iY_j$, onde $i^2=-1$ e o vetor - das partes reais e imaginárias $\eta'=(X_1,Y_1,X_2,Y_2,\ldots,X_p,Y_p)$ possui uma distribuição normal 2p-variada com matriz de covariâncias

1.2.1 $$\Sigma_\eta=E(\eta-E_\eta)(\eta-E_\eta)' = \left(\begin{pmatrix} E(X_j-\mu_{xj})(X_k-\mu_{xk}) & E(X_j-\mu_{xj})(Y_k-\mu_{yk}) \\ E(Y_j-\mu_{yj})(X_k-\mu_{xk}) & E(Y_j-\mu_{yj})(Y_k-\mu_{yk}) \end{pmatrix}\right)$$

onde as submatrizes 2 x 2 têm a forma especial

1.2.2 $$\begin{pmatrix} E(X_j-\mu_{xj})(X_k-\mu_{xk}) & E(X_j-\mu_{xj})(Y_k-\mu_{yk}) \\ E(Y_j-\mu_{yj})(X_k-\mu_{xk}) & E(Y_j-\mu_{yj})(Y_k-\mu_{yk}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} (1/2)\sigma_k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } j=k \\ \sigma_j\sigma_k/2 \begin{pmatrix} \alpha_{jk} & -\beta_{jk} \\ \beta_{jk} & \alpha_{jk} \end{pmatrix} & \text{se } j\neq k, \end{cases}$$

$$EX_j = \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\{-1/2\ ((x-\mu_{xj})/\sigma_j)^2\}\, dx = \mu_{xj}$$

$$EY_j = \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\{-1/2\ ((x-\mu_{yj})/\sigma_j)^2\}\, dx = \mu_{yj}$$

Seja $\mu'_\zeta=E\zeta'=(\mu_{x1}+i\mu_{y1},\mu_{x2}+i\mu_{y2},\ldots,\mu_{xp}+i\mu_{yp})$ e

1.2.3 $$\Sigma_\zeta = E(\zeta-\mu_\zeta)\overline{(\zeta-\mu_\zeta)}' = (E(Z_j-EZ_j)\overline{(Z_k-EZ_k)}) = (\sigma_{jk})$$

onde

1.2.4 $$\sigma_{jk}=\begin{cases}\sigma_k^2 & \text{se } j=k\\ (\alpha_{jk}+i\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k & \text{se } j\neq k.\end{cases}$$

Uma condição para que $\eta'=(X_1,Y_1,\ldots,X_p,Y_p)$ seja uma variável aleatória multidimensional com distribuição 2p-normal é - que Σ_η seja positiva definida.

Então, se Σ_η é não singular, também o é Σ_ζ .

Suponhamos que Σ_ζ seja singular e sejam $\Sigma_\zeta^1,\Sigma_\zeta^2,\ldots,\Sigma_\zeta^p$ suas colunas. Então a singularidade de Σ_ζ implica que para algum i, $1\leq i\leq p$,

1.2.5 $$\Sigma_\zeta^i=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\Sigma_\zeta^j ,$$

onde α_j é número complexo para $j=1,2,\ldots,p$ e $\alpha_j\neq 0$, para um j, - pelo menos.

Mas $\Sigma_\zeta^{i'}=(\sigma_{ji}):1\times p$, onde σ_{ji} é definido como em 1.2.4. A igualdade 1.2.5 significa que, se $\alpha_k=\gamma_k+i\delta_k$ $(k=1,..,p;1\leq j\leq p)$

1.2.6 $$\sigma_{ji}=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\sigma_{jk}=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\alpha_{jk}\sigma_j\sigma_k+i\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\beta_{jk}\sigma_j\sigma_k$$

$$=\sum_{k=1}^{p}(\gamma_k\alpha_{jk}-\delta_k\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k+i\sum_{k=1}^{p}(\delta_k\alpha_{jk}+\gamma_k\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k ,$$

onde $\alpha_{kk}=1$ e $\beta_{kk}=0$.

Como $\sigma_{ji}=(\alpha_{ji}+i\beta_{ji})\sigma_j\sigma_i$, 1.2.6 implica as igualdades

1.2.7 $$\alpha_{ji}\sigma_j\sigma_i=\sum_{k=1}^{p}(\gamma_k\alpha_{jk}-\delta_k\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k$$

e

1.2.8 $$\beta_{ji}\sigma_j\sigma_i = \sum_{k=1}^{p} (\delta_k\alpha_{jk}+\gamma_k\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k$$

Se Σ_η^m é a m-ésima coluna de Σ_η, então

1.2.9 $$\Sigma_\eta^{m'} = (1/2)(\alpha_{1m}\sigma_1\sigma_m, \beta_{1m}\sigma_1\sigma_m, \alpha_{2m}\sigma_2\sigma_m, \beta_{2m}\sigma_2\sigma_m, \ldots, \alpha_{pm}\sigma_p\sigma_m, \beta_{pm}\sigma_p\sigma_m) \quad \text{para m ímpar}$$

1.2.10 $$\Sigma_\eta^{m'} = (1/2)(-\beta_{1m}\sigma_1\sigma_m, \alpha_{1m}\sigma_1\sigma_m, -\beta_{2m}\sigma_2\sigma_m, \alpha_{2m}\sigma_2\sigma_m, \ldots, -\beta_{pm}\sigma_p\sigma_m, \alpha_{pm}\sigma_p\sigma_m) \quad \text{para m par.}$$

Então, para o índice i das igualdades 1.2.7 e 1.2.8

$$(\Sigma_\eta^{2i}+\Sigma_\eta^{2i-1})_j = \begin{cases} (\alpha_{ji}-\beta_{ji})\sigma_j\sigma_i & \text{para j ímpar} \\ (\alpha_{ji}+\beta_{ji})\sigma_j\sigma_i & \text{para j par} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} \{(\gamma_k-\delta_k)\alpha_{jk}-(\delta_k+\gamma_k)\beta_{jk}\}\ \sigma_j\sigma_k & \text{p/ j ímpar} \\ \sum_{k=1}^{p} \{(\gamma_k-\delta_k)\beta_{jk}+(\delta_k+\gamma_k)\alpha_{jk}\}\ \sigma_j\sigma_k & \text{p/ j par} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \{\ \lambda_k(\Sigma_\eta^{2k-1})_j + \xi_k(\Sigma_\eta^{2k})_j$$

onde $(\Sigma_\eta^i)_j$ é a j-ésima coordenada da coluna i de Σ_η.

Portanto, Σ_ζ singular implica Σ_η singular e a afirmação anteriormente feita está provada.

Como Σ_η é positiva definida, Σ_ζ é não singular e a função densidade de probabilidade de ζ é dada por

1.2.11 $$p(\xi) = (\pi^p|\Sigma_\zeta|)^{-1} \exp\{-\overline{(\xi-\mu_\zeta)}'\Sigma_\zeta^{-1}(\xi-\mu_\zeta)\}$$

1.3 - O PROBLEMA E OS MOMENTOS

Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ q populações complexas normais e independentes duas a duas, onde Z_i é de ordem $p_i \times 1$, para $i=1,2,\ldots,q$.

Seja, também,

1.3.1 $$E(Z_i - EZ_i)\overline{(Z_j - EZ_j)}' = \Sigma_{ij} : p_i \times p_j$$

a matriz de covariâncias entre Z_i e Z_j, para $i,j=1,2,\ldots,q$.

Como as Z_i são Populações complexas normais e independentes duas a duas,

1.3.2 $$\Sigma_{ij} = 0 \qquad \text{se } i \neq j,\ i,j=1,2,\ldots,q \text{ e}$$

1.3.3 $$\Sigma_{ii} \text{ não singular para } i=1,2,\ldots,q.$$

Sejam $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots, Z_{iNi}$ uma amostra aleatória de tamanho N_i da i-ésima população, para $i=1,2,\ldots,q$, e

1.3.4 $$A_{ii} = \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - Z_{i.})\overline{(Z_{ij} - Z_{i.})}'$$

1.3.5 $$Z_i = 1/N_i \sum_{j=1}^{N_i} Z_{ij}$$

Assumindo que todas as populações têm a mesma dimensão, isto é, $p_1=p_2=\ldots=p_q=p$, para testar a hipótese

1.3.6 $$H_o = \begin{cases} \Sigma_{11}=\Sigma_{22}= \ldots\ldots=\Sigma_{q_1 q_1} \\ \Sigma_{q_1+1\ q_1+1}=\ldots\ldots=\Sigma_{q_2^* q_2^*} \\ \vdots \\ \Sigma_{q_{k-1}^* q_{k-1}^*}=\ldots\ldots=\Sigma_{q_k^* q_k^*} \end{cases}$$

onde

1.3.7 $$q_o^*=0,\ q_1^*=q_1,\ q_i^*=\sum_{j=1}^{i} q_j \text{ e } q_k^*=q$$

contra a sua negação, Krishnaiah, Lee e Chang (1975) determinaram o seguinte critério da razão da verossimilhança

1.3.8 $$\lambda = \left(\prod_{i=1}^{q} |\Lambda_{ii}/n_i|^{n_i}\right) / \left(\prod_{j=1}^{k} \left|\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} A_{ii}/n^*_i\right|^{n_j^*}\right)$$

bem como seu s-ésimo momento

1.3.9 $$E(\lambda^s)=\left(\prod_{i=1}^{k} n_i^{*\,psn_i^*}\right)/\left(\prod_{i=1}^{q} n_i^{\,psn_i}\right) \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{k}\left[\{\Gamma(n_j^*+1-i)/\Gamma(n_j^*+sn_j^*+1-i)\}\ \{\prod_{g=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} \Gamma(n_g+sn_g+1-i)/\Gamma(n_g+1-i)\}\right]$$

onde

1.3.10 $$n_i = N_i - 1$$

1.3.11 $$n_j^* = \sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i$$

H_o é hipótese de homogeneidade de dispersão entre as q_i populações que compõem o grupo i, para i 1,2,...,k.

1.4 - RESULTADO GERAL COMO FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA GENERALIZADA

Aplicando a transformada inversa de Mellin (vide apêndice A) ao (s-1)-ésimo momento de λ e fazendo a mudança de variável s=-s', obtemos a função densidade de probabilidade f(x) de λ,

1.4.1 $$f(x) = C\ 1/(2\pi i) \int \left(\frac{x}{c(s)}\right)^{-s} \left\{ \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{k} \prod_{g=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} \Gamma(1-i-n_g s) \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{k} \Gamma(1-i-n_j^*) \right\}^{-1} ds$$

onde

1.4.2 $$C = \frac{\left\{ \prod_{i=1}^{q} n_i^{pn_i} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{p} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \Gamma(n_j^*+1-i) \div \left\{ \prod_{g=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} \Gamma(n_g+1-i) \right\} \right\} \right\}}{\left\{ \prod_{i=1}^{k} n_i^{*\,pn_i^*} \right\}}$$

1.4.2' $$c(s)=\{\prod_{i=1}^{k} n_i^{*\,pn_i^* s}\}\div\{\prod_{i=1}^{q} n_i^{pn_i s}\},$$

L é um contorno envolvendo os polos do numerador do integrando e n_j^* é definido em 1.3.11

Esta integral converge, pois as condições de convergência dadas no apêndice C são satisfeitas, conforme 1.4.3 e 1.4.4 a seguir.

De fato, por 1.3.11 temos:

1.4.3 $$\mu= p\sum_{j=1}^{k} n_j^* - p\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i = p\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i - p\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i = 0$$

e

1.4.4 $$\beta=\prod_{j=1}^{q} n_j^{pn_j} \Big/ \prod_{j=1}^{k} n_j^{*\,pn_j^*} \leq 1,$$

pois, fazendo $\bar{n}_j = \max\{n_{q_{j-1}^*+1},\dots,n_{q_j^*}\}$

$$\prod_{j=1}^{k} n_j^{*\,pn_j^*} = \prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i\Big)^{p\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i} \geq$$

$$\geq \prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i\Big)^{p\bar{n}_j} \geq \prod_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i^{p\bar{n}_j}\Big) \geq$$

$$\geq \prod_{j=1}^{q} n_j^{pn_j},$$

pois todos os n_j são números inteiros positivos não nulos, e, portanto

1.4.5 $$0 < x/c(s) < 1 \leq \beta^{-1}$$

A integral 1.4.1 é uma função H de Pincherle (vide Mathai e Saxena (1978)), isto é

1.4.6 $$f(x) = C\, H^{0,pq}_{pq,pk}\left(\frac{x}{c(s)}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_{pq},\alpha_{pq})\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_{pk},\beta_{pk})\end{matrix}\right)$$

onde os parâmetros (a_i,α_i) são

1.4.7 $$\begin{matrix}(1,n_1),(1,n_2),\ldots,(1,n_q)\\(2,n_1),(2,n_2),\ldots,(2,n_q)\\\ldots\\\ldots\\(p,n_1),(p,n_2),\ldots,(p,n_q)\end{matrix}$$

e os parâmetros (b_j,β_j) são

1.4.8 $$\begin{matrix}(1,n_1^*),(1,n_2^*),\ldots,(1,n_k^*)\\(2,n_1^*),(2,n_2^*),\ldots,(2,n_k^*)\\\ldots\\\ldots\\(p,n_1^*),(p,n_2^*),\ldots,(p,n_k^*)\end{matrix}$$

e C é dada em 1.4.2.

Podemos, portanto, resumir o resultado geral no seguinte

teorema 1.1: Sejam $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots, Z_{iN_i}$, para $i=1,2,\ldots,q$, amostras aleatórias de q populações complexas gaussianas multivariadas de dimensão $p \geq 1$, com matrizes de covariâncias populacionais $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \ldots, \Sigma_{qq}$. Então para testar a hipótese H_0, dada em 1.3.6, contra a sua negação, o critério da razão da verossimilhança tem como densidade a função $f(x)$ dada em 1.4.6, para $0 < x < \infty$ e $f(x)=0$ noutra parte.

Este resultado geral é de difícil aplicação prática - por questões computacionais, portanto, no item seguinte nos restringiremos ao caso particular em que todas as N_i amostras ($i=1,2,\ldots,q$) são do mesmo tamanho e os k agrupamentos de populações sejam, também, do mesmo tamanho.

1.5 - DISTRIBUIÇÃO EXATA DE λ EM UM CASO PARTICULAR

Se

1.5.1 $$n_1 = n_2 = \ldots = n_q = n$$

isto é, para cada uma das q populações Z_i, a amostra retirada tem tamanho n e

1.5.2 $$q_1 = q_2 = \ldots = q_k = Q$$

isto é, todos os k agrupamentos são compostos do mesmo número Q - de populações, então

1.5.3 $$n_j^* = \sum_{i=q_{j-1}^*+1}^{q_j^*} n_i = nq_j = nQ \quad \text{para } j=1,2,\ldots,k \text{ e}$$

1.5.4 $kQ = q.$

Então, de 1.3.9, o (s-1)-ésimo momento de λ , com as substituições efetuadas, é

1.5.5 $$M\{f(\lambda)\}(s) = E(\lambda^{s-1})$$

$$=Q^{pqn(s-1)}\{\prod_{i=1}^{p}\Gamma^{k}(nQ+1-i)/\Gamma^{q}(n+1-i)\}\{\prod_{i=1}^{p}\Gamma^{q}(ns+1-i)/$$

$$/\ \Gamma^{k}(nQs+1-i)\}$$

Como na composição de $M\{f(\lambda)\}(s)$ aparecem os fatores $\Gamma(n+1-i)$ e $\Gamma(nQ+1-i$ com $1\leq i\leq p$, para que todos os momentos de λ - não sejam nulos é necessário que

1.5.6 $n\geq p.$

Esta restrição, impõe, de uma maneira natural,um limite para o tamanho das amostras de cada população que é bem intuitivo, pois se queremos tirar informações variáveis com vários atributos ou características, não é concebível que o número de indivíduos examinados seja menor que o número destas.

Temos que, para $s=\sigma+i\tau$, variando numa faixa do plano complexo paralela ao eixo imaginário $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$

1.5.7 $$E(\lambda^{s-1})=M\{f(\lambda)\}(s)$$

é a transformada de Mellin da densidade $f(\lambda)$ de λ . No apêndice A denominamos 1.5.7 de (s-1)-ésimo momento de λ , o que, segundo - professor E. Lukacs é abuso de linguagem, uma vez que os momentos devem ser inteiros. E aplicando a transformação inversa, se f(x) é a função densidade de λ , temos que

$$f(x)=Q^{-pqn}\{\prod_{i=1}^{p}\Gamma^{k}(nQ+1-i)/\Gamma^{q}(n+1-i)\}1/(2\pi i)\cdot \tag{1.5.8}$$

$$\cdot\int_{L}(x/Q^{pqn})^{-s}\{\prod_{i=1}^{q}\Gamma^{q}(ns+1-i)/\Gamma^{k}(nQs+1-i)\}\,ds$$

onde L é um contorno contendo os polos do integrando.

Seja I a integral em 1.5.8. Fazendo a mudança de variável ns=t, a integral I fica

$$I=n^{-1}\int_{L'}(x/Q^{pqn})^{-s/n}\{\prod_{i=1}^{p}\Gamma^{q}(t+1-i)/\Gamma^{k}(Qt+1-i)\}\,ds \tag{1.5.9}$$

onde L' é um contorno contendo os polos do integrando.

A fórmula da multiplicação de Gauss (Luke (1969),pg.11) nos fornece a relação

$$\Gamma(Q(t+(1-i)/Q))=(2\pi)^{(1-Q)/2}\,Q^{Qt+1-i-1/2}\prod_{r=1}^{Q}\Gamma(t+(r-1)/Q), \tag{1.5.10}$$

portanto, temos

$$\prod_{i=1}^{p}\Gamma^{k}(Qt+1-i)=(2\pi)^{pk(1-Q)/2}\,Q^{pqt-kp^{2}/2}\prod_{i=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}\Gamma^{k}(t+(r-1)/Q)\,. \tag{1.5.11}$$

Substituindo 1.5.11 na integral 1.5.9 passamos a ter

1.5.12 $$I=n^{-1}\int_{L'} x^{-s/n}\{\prod_{j=1}^{p}\Gamma^{q}(s+1-j)/\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}\}ds$$

e fazendo a substituição de I em sua forma 1.5.12 na expressão em 1.5.8, ficamos com a função densidade de λ na forma

1.5.13 $$f(x)=n^{-1}\{\prod_{i=1}^{p}\{\prod_{r=1}^{Q}\Gamma^{k}(n+(r-i)/Q)\}/\Gamma^{q}(n+1-i)\}$$

$$\int_{L'} x^{-s/n}\{\prod_{j=1}^{p}\Gamma^{q}(s+1-j)\}/\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}\}ds$$

No numerador e no denominador do integrando, excluindo $x^{-s/n}$, há fatores comuns que devem ser eliminados. A forma do resultado após essa eliminação depende da relação entre a dimensão p das populações e do tamanho Q dos agrupamentos.

Chamemos de Ω esse quociente, isto é,

1.5.14 $$\Omega=\{\prod_{j=1}^{p}\Gamma^{q}(s+1-j)\}/\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}\}.$$

Haverá cancelamentos sempre que tivermos

1.5.15 $$r-j=-mQ \qquad \text{para} \quad \begin{cases} m=0,1,\dots,p-1 \\ j=1,2,\dots,p \\ r=1,2,\dots,Q \end{cases}$$

O menor valor que $r-j$ assume é $1-p$ ($r=1$ e $j=p$) e o maior valor que $-mQ$ assume é zero e como $p\geq 1$, cancelamentos sempre haverão.

Para $m=0$, teremos cancelamentos sempre que $r=j$ e estes não dependem das relações entre os valores de p e Q.

Para $m\geq 1$, como $\min\{r; 1\leq r\leq Q\}=1$ e $\max\{j-Q; 1\leq j\leq p\}=p-Q$, os cancelamentos ocorrerão somente quando $p > Q$.

1.6 - A DENSIDADE DE λ NO CASO EM QUE $p \leqq Q$

Neste caso o quociente Ω fica

1.6.1 $$\Omega = \Gamma^{k(Q-p)}(s)\{\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma^{q}(s-j)\} / \{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}{}^{*}\ \Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}$$

onde

$$\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}{}^{*} = \prod_{j=1}^{p}\prod_{\substack{r=1\\ j\neq r}}^{Q} \qquad \left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{Q}{}_{*} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{r=1\\ j\neq r}}^{Q}\right.\text{, respectivamente)}$$

e a nossa função densidade de λ, para $0 < x < 1$

1.6.2 $$f(x) = C(p,q,n,k)\ 1/(2\pi i)\int_L x^{-s/n}\ \Gamma^{k(Q-p)}(s)\{\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma^{q}(s-j)\}/$$

$$/\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}{}_{*}\ \Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}\ ds$$

onde

1.6.3 $$C(p,q,n,k) = n^{-1}\{\prod_{i=1}^{p}\{\prod_{r=1}^{Q}\Gamma^{k}(n+(r-i)/Q)\}/\Gamma^{q}(n+1-i)\}$$

e L é um ciclo começando e terminando em $-\infty$, no sentido positivo (anti-horário) contendo os polos do integrando.

Esta integral converge, conforme discussão sobre o contorno da função G-de Meijer (apêndice B), pois $x^{-1/n} > 1$.

E pode, portanto ser escrita em termos dessa função especial, isto é

1.6.4 $$f(x)=C(p,q,n,k)\ G^{p(q-k),0}_{p(q-k),p(q-k)}\left(x^{1/n}\middle|\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_{p(q-k)}\\ b_1,b_2,\dots,b_{p(q-k)}\end{matrix}\right)$$

onde os parâmetros b_j são da forma

$b_{mq+j}=(p-m-1)$ para $m=0,1,\dots,p-2$ e $j=1,2,\dots,q$ e

$b_{mq+j}=0$ para $m=p-1$ e $j=1,2,\dots,k(Q-p)$

e os parâmetros a_j são da forma

$a_j=(p-j)/Q$ para $j=1,2,\dots,p-1$ repetidos (jk) vezes,

$a_r=-r/Q$ para $r=1,2,\dots,m$ repetidos (pk) vezes,

$a_r=-r/Q$ para $r=m+1,\dots,m+p-1$ repetidos $(Q-j)$ vezes.

e a constantes $C(p,q,n,k)$ é dada por 1.6.3 e temos, portanto, o

teorema 1.2: Sejam $Z_{i1},Z_{i2},\dots,Z_{iN}$, para $i=1,2,\dots,q$, amostras aleatórias de q populações complexas gaussianas de dimensão $p \geq 1$, com matrizes de covariâncias populacionais $\Sigma_{11},\Sigma_{22},\dots,\Sigma_{qq}$. Então, para testar

$$\Sigma_{11} = \dots = \Sigma_{QQ}$$

$$\Sigma_{Q+1\,Q+1} = \dots = \Sigma_{2Q2Q}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\Sigma_{k'Qk'Q} = \dots = \Sigma_{qq} \qquad (q=kQ\ ,k'=k-1)$$

contra a sua negação, a função densidade de probabilidade do - critério da razão da verossimilhança λ dado em 1.3.8 é f(x) dada em 1.6.4, para $0 < x \leq 1$, e f(x)=0 noutra parte, onde n=N-1.

1.7 - DESENVOLVIMENTO DE f(x) EM SÉRIES, PARA $p \leq Q$

A forma 1.6.4 de f(x) não é boa para cálculos de pontos percentuais de sua função de distribuição, sendo, portanto, - um desenvolvimento seu, numa forma mais adequada, necessário para fins computacionais.

O problema se resume na aplicação do teorema dos resíduos para a resolução da integral

1.7.1 $$I=1/(2\pi i)\int_L x^{-s/n}\,\Gamma^{k(Q-p)}(s)\{\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma^{q}(s-j)\}\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q_*}\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}^{-1}\,ds$$

onde L é um contorno contendo os polos do integrando começando e terminando em $-\infty$, no sentido positivo.

Como a função gama não possui zeros, devemos, somente, determinar os polos de

1.7.2 $$\Gamma^{k(Q-p)}(s)\{\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma^{q}(s-j)$$

e aplicar o teorema dos resíduos. Os polos da função gama $\Gamma(s)$ são os pontos

1.7.3 $$s=0,-1,-2,\ldots$$

conforme Wittaker e Watson (1969), pg. 236, e são todos simples.

Os polos do produto 1.7.2 são os anulantes do produto

1.7.4 $$\prod_{i=1}^{\infty} (t+i-p)^{\alpha_i}$$

onde

1.7.5 $$\alpha_i = \begin{cases} iq & \text{para } i=1,2,\ldots,p-1 \\ p(q-k) & \text{para } i=p,p+1,\ldots \end{cases}$$

é a ordem do i-ésimo polo.

O teorema dos resíduos (Alfors (1966),pg.149) nos dá

1.7.6 $$f(x)=C(p,q,n,k) \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=a_i} (h(s)x^{-s/n})$$

onde $a_1,a_2,\ldots$ são os anulantes do produto em 1.7.4 e

1.7.7 $$h(s)= \Gamma^{k(Q-p)}\{\prod_{j=1}^{p-1} \Gamma^{q}(s-j)\}\{\prod_{j=1}^{p} \prod_{r=1}^{Q_*} \Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}^{-1}$$

Se α_i é a ordem do polo a_i de h(s), então, para i=1,2,.. se denotarmos

1.7.8 $$B_i= (s-a_i)^{\alpha_i} h(s) \qquad \text{e} \qquad A_i=d/ds \ln B$$

temos a identidade

1.7.9 $$d/ds\, B_i= B_i\, d/ds \ln B_i = A_iB_i$$

e, de uma maneira geral temos

$$1.7.10 \qquad d^{\eta}/ds^{\eta}\, B_i = \sum_{\lambda=0}^{\eta-1} \binom{\eta-1}{\lambda} B^{(\eta-1-\eta)} A^{(\lambda)}.$$

Temos, também, que

$$1.7.11 \qquad d^{r}/ds^{r}\, (x^{-s}B_i) = x^{-s} \sum_{\eta=0}^{r} \binom{r}{\eta} (-\ln x)^{r-\eta} B_i^{(\eta)}$$

e, portanto, a expressão do resíduo do integrando em 1.7.1 fica

$$1.7.12 \qquad \operatorname{Res}_{s=p-i} (x^{-s}h(s)) = 1/(\alpha_i-1)!\; x^{-(p-i)/n} \sum_{\eta=0}^{\alpha_i-1} \binom{\alpha_i-1}{\eta}.$$

$$\cdot (-\ln x^{1/n})^{\alpha_i-1-\eta} \quad B_{oi}^{(\eta)}$$

onde

$$B_{oi}^{(\eta)} = \lim_{s\ p-i} B_i^{(\eta)} \qquad e \qquad B_i^{(\eta)} = d^{\eta}/ds^{\eta} \quad B_i \qquad .$$

A fórmula 1.7.10 nos dá uma relação de recorrência para o cálculo das derivadas de ordem η de B, a partir das anteriores e das derivadas de A.

Para determinarmos os valores B_{oi}, A_{oi} e $A_{oi}^{(\lambda)}$ devemos melhorar a forma de B_i como segue:

para $i=1,2,\ldots,p-1$, a forma original de B_i é

$$1.7.13 \qquad B_i = (s+i-p)^{i\alpha} \{ \prod_{j=1}^{p-1} \Gamma^{q}(s-j) \} \Gamma^{k(Q-p)}(s) / \{ \prod_{j=1}^{p} \prod_{r=1}^{Q_*} \Gamma^{k}(s+(r-j)/Q) \}$$

que, com a propriedade da função gama

1.7.14 $\quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\ \Gamma(\alpha) \qquad$ para $\alpha \neq 0,-1,-2,\ldots$,

pode ser representado na forma

1.7.15
$$B_i = \Gamma^{p(q-k)}(s+i-p+1)\{\prod_{j=i+1}^{p-1}(s-p+j)^{p(q-k)}\} \div \left[\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p-1}(s-p+j)^{jq}\}\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}{}^{*}\,\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}\right]$$

e para $i = p, p+1, \ldots$, a expressão de B_i é

1.7.16
$$B_i = (s+i-p)^{p(q-k)}\,\Gamma^{k(Q-p)}(s)\{\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma^{q}(s-j)\} \div$$
$$\div\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}{}^{*}\,\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}$$

que, com o uso da propriedade 1.7.14 fica

1.7.17
$$B_i = \Gamma^{p(q-k)}(s+i-p+1) \div \left[\{\prod_{j=1}^{p-1}(s-p+j)^{jq}\}\{\prod_{j=p}^{i-1}(s+j-p)^{p(q-k)}\}\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q}{}^{*}\,\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}\right].$$

Antes de expressarmos os limites de $B_i^{(\eta)}$ e $A_i^{(\lambda)}$ é necessário darmos duas definições e um resultado envolvendo-as.

A primeida delas é a função

1.7.18
$$\psi(s) = -\gamma + (s-1)\cdot\sum_{j=0}^{\infty} 1/\{(s+j)(j+1)\} ,$$

onde

$\gamma = 0{,}57721566\ldots$ é a constante de Euler.

A outra é a função zeta de Riemann generalizada

1.7.19 $$\zeta(\lambda,s) = \sum_{j=0}^{\infty} 1/(s+j) \qquad \lambda \neq 0,-1,-2,\ldots\,, \ \mathrm{Re}\ s > 0.$$

A função psi é a derivada do logarîtmo natural da função gama. O resultado a que nos referimos é o lema abaixo que enunciamos sem provar, pois sua demonstração é trivial:

Lema 1.1: Para $\lambda \geq 1$, vale a relação

1.7.20 $$\begin{aligned} d^{\lambda}/ds^{\lambda}\ \ln\{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+s)\} &= \sum_{j=1}^{m}\psi(a_j+s) && \text{se } \lambda=1, \\ &= (-)^{\lambda}(\lambda-1)!\sum_{j=1}^{m}\zeta(\lambda,a_j+s) && \text{se } \lambda \geq 2. \end{aligned}$$

Com isso podemos escrever os limites $B_{oi}^{(\eta)}$ e $A_{oi}^{(\lambda)}$ das expressões 1.7.15 e 1.7.17 em termos das funções psi e zeta como segue:

para $i=1,2,\ldots,p-1 \qquad \lambda=1,2,\ldots,iq-1$

1.7.21 $$B_{oi} = \{\prod_{j=i+1}^{p-1}(j-i)^{p(q-k)}\} \div \left[\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p-1}(j-i)^{jq}\}\{\prod_{j=1}^{p}\prod_{r=1}^{Q_*}\Gamma^{k}(p-i+(r-j)/Q)\}\right]$$

1.7.22 $$A_{oi} = -\gamma p(q-k)+(q-k)p\sum_{j=i+1}^{p-1}1/(j-i) - q\sum_{j=1}^{p-1}j/(j-i) - k\sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{Q_*}\psi(p-i+(r-j)/Q)$$

1.7.23 $$A_{oi}^{(\lambda)} = (-)^{\lambda+1}\lambda!\left\{p(q-k)\zeta(\lambda+1,1) - k\sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{Q_*}\zeta(\lambda+1,p-i+(r-j)/Q) + \sum_{j=1\,(\neq i)}^{p-1}j/(j-i)^{\lambda+1} - p(q-k)\sum_{j=i+1}^{p-1}1/(j-i)^{\lambda+1}\right\}$$

e para $i = p, p+1, \ldots$ e $= 1,2,\ldots,p(q-k)-1$

1.7.24 $$B_{oi} = \left[\{ \prod_{j=1}^{p-1} (j-i)^{jq} \} \{ \prod_{j=p}^{i-1} (j-i)^{p(q-k)} \} \{ \prod_{j=1}^{p} \prod_{r=1}^{Q_*} \Gamma^k (p-i+ + (r-j)/Q) \} \right]^{-1},$$

1.7.25 $$A_{oi} = -\gamma p(q-k) - k \sum_{j=1}^{p} \sum_{r=1}^{Q_*} \psi(p-i+(r-j)/Q) + q \sum_{j=1}^{p-1} j/(i-j) + +p(q-k) \sum_{j=p}^{i-1} 1/(i-j)$$

1.7.26 $$A_{oi}^{(\lambda)} = (-)^{\lambda+1} \lambda! \{ p(q-k)\zeta(\lambda+1,1) - k \sum_{j=1}^{p} \sum_{r=1}^{Q_*} \zeta(\lambda+1, p-i+(r-j)/Q) +q \sum_{j=1}^{p-1} j/(j-i)^{\lambda+1} + p(q-k) \sum_{j=p}^{i-1} 1/(j-i)^{\lambda+1} \}$$

Agora estamos em condições de apresentar a função densidade de probabilidade do teste de homogeneidade de dispersão, em grupos de mesmo tamanho, de populações normais complexas p-variadas, para o caso em que o tamanho Q dos grupos é maior que a dimensão das populações e em forma computável, para $0 < x < 1$:

1.7.27 $$f(x) = n^{-1} \{ \prod_{j=1}^{p} \{ \prod_{r=1}^{Q} \Gamma^k (n+(r-j)/Q) \} \div \Gamma^q (n+1-j) \} \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} x^{(i-p)/n} \cdot \{(iq-1)!\}^{-1} \sum_{\eta=0}^{iq-1} \binom{iq-1}{\eta} (-(1/n) \ln x)^{iq-1-\eta} B_{oi}^{(\eta)} + + \sum_{i=p}^{\infty} \frac{x^{(i-p)/n}}{(p(q-k)-1)!} \sum_{\eta=0}^{p(q-k)-1} \binom{p(q-k)-1}{\eta} \right.$$

$$\cdot(-(1/n)\ln x)^{p(q-k)-1-\eta}\, B_{oi}^{(\eta)} \, ,$$

onde $B_{oi}^{(\eta)}$ é calculado por 1.7.10 com as expressões de 1.7.21 a 1.7.26. Resumimos este resultado no

teorema 1.3: Com o enunciado do teorema 1.2, se a dimensão p das populações for menor ou igual ao número Q delas em cada agrupamento, a função densidade de probabilidade de λ é dada por 1.7.27 se $0 < x < 1$ e $f(x)=0$ noutra parte.

1.8 - A DENSIDADE DE λ NO CASO $p > Q$

Como no caso anterior, devemos, desta feita, analizar o quociente Ω definido em 1.5.14 e verificar quais os cancelamentos de funções gama que deverão ser efetuados.

Em 1.5.15 temos a relação entre os índices r, m e j para a qual os cancelamentos existirão. Os valores de m para os quais há cancelamentos dependem da relação entre os valores de p e Q.

Suponhamos que

1.8.1 $$(K+1)Q+1 \leq p \leq (K+2)Q \, ,$$

ou

1.8.2 $$KQ+1 \leq d \leq (K+1)Q \qquad (d=p-Q),$$

para algum K inteiro não negativo.

Analisemos alguns casos particulares antes de darmos a lei de cancelamento geral.

Seja Ω_D o denominador de Ω , isto é

1.8.3 $$\Omega_D = \prod_{j=1}^{p} \prod_{r=1}^{Q} \Gamma^k(s+(r-j)/Q).$$

Se $p=Q+1$, então $-Q = 1-p$ e quando $r=1$ e $j=p$ teremos - $r-j=-Q$. Portanto em Ω_D o fator $\Gamma(s-1)$ aparece k vezes. O fator - $\Gamma(s)$, que corresponde ao caso $r-j=0$, aparece $Qk=q$ vezes, isto é, em Ω_D repetem-se

1.8.4
$$\begin{array}{ll} \Gamma(s) & q \text{ vezes e} \\ \Gamma(s-1 & k \text{ vezes.} \end{array}$$

Se $p=Q+2$, então $-Q = 2-p$ e $r-j=2-p$ quando $r=2$ e $j=p$, e $r=1$ e $j=p-1$. Portanto,o fator $\Gamma(s-1)$ aparece $(2k)$ vezes em Ω_D e o fator $\Gamma(s)$ q vezes.

Suponhamos, agora, que $p=2Q$. Então $-Q = Q-p$, que corresponde a $r=Q$ e $j=p$, $r=Q-1$ e $j=p-1$, $r=Q-2$ e $j=p-2,\ldots,r=1$ e $j=p-Q+1$ isto é, o fator $\Gamma(s-1)$ aparece $kQ=q$ vezes em Ω_D . O fator $\Gamma(s)$, como nos casos anteriores, aparece q vezes. Os fatores $\Gamma(s-2)$, - $\Gamma(s-3),\ldots,\Gamma(s-p+1)$ não aparecem nenhuma vez em Ω_D se $Q+1\leq p\leq 2Q$, - pois neste caso

$$\min_{\substack{1\leq r\leq Q\\ 1\leq j\leq p}} (r-j)=1-p\geq 1-2Q>-2Q>-3Q>\ldots>-(p-1)Q.$$

Mais geralmente, não aparece nenhum fator da forma $\Gamma(s-h)$, $h\in \mathbb{Z}-\{0,1\}$.

Raciocinando da mesma forma chegamos à conclusão de - que se $2Q+1 \leq p \leq 3Q$, então teremos as repetições em Ω_D:

1.8.5
$$\begin{array}{ll} \Gamma(s) \text{ e } \Gamma(s-1) & q \text{ vezes e} \\ \Gamma(s-2) & (p-2Q)k \text{ vezes} \end{array}$$

e $\Gamma(s-3)$, $\Gamma(s-4),\ldots,\Gamma(s-p+1)$, bem como $\Gamma(s-h)$, $h \in Z-\{0,1,2\}$, não aparece nenhuma vez.

De uma maneira geral, podemos afirmar que se $(K+1)Q+1 \leq p \leq (K+2)Q$, em Ω_D teremos as repetições dos fatores

1.8.6
$$\Gamma(s),\ \Gamma(s-1),\ \ldots\ ,\ \Gamma(s-K) \quad q \text{ vezes e}$$
$$\Gamma(s-K-1) \quad (p-(K+1)Q)k=(d-KQ)k \text{ vezes}, \qquad (d=p-Q)$$

mas como $(K+1) \leq (p-1)/Q$, temos que para $K=0,1,\ldots,PI((p-1)/Q)-1$, onde $PI(a)$ é o maior inteiro menor ou igual à a, nenhum outro fator aparece e

1.8.7
$$\Omega = \Gamma^{q(K+1)-dk}(s-K-1)\{\prod_{j=K+2}^{p-1} \Gamma^q(s-j)\}\{\prod_{j=1}^{P_*}\prod_{r=1}^{Q_*}\Gamma^k(s+(r-j)/Q)\}$$

onde

1.8.7'
$$\prod_{j=1}^{P_*}\prod_{r=1}^{Q_*} = \prod_{\substack{j=1\\ r-j\neq -hQ;\, h=0,1,\ldots,K+1}}^{p}\ \prod_{r=1}^{Q}$$

Então, para $p = (K+1)Q+1$, a função densidade de λ pode ser representada em termos da função G-de Meijer, a saber:

1.8.8
$$f(x)=C(p,q,n,k)\ G^{q,0}_{g,g}\left(x^{1/n}\ \middle|\ \begin{matrix} a_1,\ldots,a_g \\ b_1,\ldots,b_g \end{matrix}\right)$$

onde $C(p,q,n,k)$ é dado por 1.6.3, $g=q(p-K-1)-k$, os parâmetros b_j são da forma

1.8.9
$$b_{hq+j}=(p-h-1) \quad \text{para } h=0,1,\ldots,p-K-3, j=1,2,\ldots,q \text{ e}$$
$$b_{hq+j}= K+1 \quad \text{para } h=p-K-2 \text{ e } j=1,2,\ldots,q-k$$

e os parâmetros a_i $(i=1,2,\ldots,q(p-K-1)-k)$ são da forma $((K+1)Q-j)/Q$, $j=1,2,\ldots,(K+2)Q-1$, j não divisível por Q e se repetem $(j+1)k$

vezes para $j=1,2,\ldots,Q-2$; q vezes para $j=Q-1,Q+1,\ldots,(K+1)-1$, j não divisível por Q, e para $j=(K+1)Q+1,(K+1)Q+2,\ldots,(K+2)Q-1$ as repetições são, respectivamente, $(Q-1)k,(Q-2)k,\ldots,k$ vezes.

No caso em que $(K+1)Q+1 < p < (K+2)Q$, a densidade de λ é

$$1.8.10 \qquad f(x)=C(p,q,n,k)\; G^{g,0}_{g,g}\left(x^{1/n} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_g \\ b_1,\ldots,b_g \end{matrix}\right) ,\quad 0 < x < 1$$

onde $C(p,q,n,k)$ é dado por 1.6.3, $g=p(q-k)$, os parâmetros b_j são da forma

$$1.8.11 \qquad \begin{aligned} &b_{hq+j}=(p-h-1) \quad \text{para } h=0,1,\ldots,p-K-3,\; j=1,2,\ldots,q \text{ e} \\ &b_{hq+j}= K+1 \qquad \text{para } h=p-K-2,\; j=1,2,\ldots,(K+2)Q-pk \end{aligned}$$

e os parâmetros a_j são da forma $(p-j)/Q$, repetidos (jk) vezes, para $j=1,2,\ldots,Q-1, j\neq p-(K+1)Q$; $(p-j)/Q$, repetidos q vezes cada, para $j=Q,Q+1,\ldots,p-1$, $(p-j)$ não divisível por Q e, finalmente, da forma $-j/Q$, repetidos $(Q-j)k$ vezes, para $j=1,2,\ldots,Q-1$.

Finalmente, para $p=(K+2)Q$, a função densidade de λ fica

$$1.8.12 \qquad f(x)=C(p,q,n,k)\; G^{g,0}_{g,g}\left(x^{1/n} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_g \\ b_1,\ldots,b_g \end{matrix}\right) ,\quad 0 < x < 1$$

onde $C(p,q,n,k)$ é dado por 1.6.3, $g=q(p-k-2)$, os parâmetros b_j são da forma

$$1.8.13 \qquad b_{hq+j}=(p-h-1) \quad \text{para } h=0,1,\ldots,p-K-3,\; j=1,2,\ldots,q,$$

e os parâmetros a_j são da forma $(p-j)/Q$, repetidos (jk) vezes, para $j=1,2,\ldots,p-(K+1)-1$, da forma $((K+1)Q-j)/Q$, repetidos q vezes, com $j=1,2,\ldots,(K+1)Q-1$, j não divisível por Q e, finalmente, da -

forma $-j/Q$, repetidos $(Q-j)k$ vezes respectivamente, para $j=1,2,\ldots,Q-1$;

E, com isso, concluimos a demonstração do seguinte

teorema 1.4: Com o enunciado do teorema 1.2, se a dimensão p das populações for maior do que o número Q delas em cada agrupamento, a função densidade de λ, $f(x)$ é nula se $x \notin (0,1)$ e para $0< x <1$, se

a) $p=(K+1)Q+1$, então $f(x)$ é dada por 1.8.8

b) $(K+1)Q+1$ p $(K+2)Q$, então $f(x)$ é dada por 1.8.10

c) $p=(K+2)Q$, então $f(x)$ é dada por 1.8.12.

1.9 - DENSIDADE DE λ EM FORMA COMPUTÁVEL, PARA O CASO $p > Q$

Efetuados os cancelamentos de todos os fatores do numerador e do denominador de Ω, 1.8.7, ficamos com a densidade de λ da forma

1.9.1 $$f(x)=C(p,q,n,k)\ 1/(2\pi i) \int_L x^{-s/n} \Gamma^{q(K+2)-pk}(s-K-1) \left\{ \prod_{j=K+2}^{p-1} \Gamma^q(s-j) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{p_*} \prod_{r=1}^{Q_*} \Gamma^k(s+(r-j)/Q) \right\}^{-1} ds$$

onde $C(p,q,n,k)$ é dado por 1.6.3 e o produtório com asterisco em 1.8.7'.

Seja

1.9.2 $$h(s)=\Gamma^{(K+2)q-pk}(s-K-1) \left\{ \prod_{j=K+2}^{p-1} \Gamma^q(s-j) \right\} \div \left\{ \prod_{j=1}^{p_*} \prod_{r=1}^{Q_*} \Gamma^k(s+r-j)/Q) \right\}.$$

Os polos do integrando são os anulantes do produto

$$1.9.3 \qquad \prod_{i=1}^{\infty} (t+i-p)^{\alpha_i}$$

onde

$$1.9.4 \qquad \alpha_i = \begin{cases} iq \text{ para } i=1,2,\ldots,p-K-2 \\ p(q-k) \text{ para } i=p-K-1,p-K,\ldots \end{cases}$$

é a ordem do i-ésimo polo do produto em 1.9.2.

Com a mesma notação de 1.7.8 e utilizando a mesma técnica de que fizemos uso no item 1.7, temos para $i=1,2,\ldots,p-K-2$

$$1.9.5 \qquad B_i=(s-p+i)^{iq}\, \Gamma^{(K+2)q-pk}(s-K-1)\{\prod_{j=K+2}^{p-1} \Gamma^{q}(s-j)\} \div$$

$$\div\{\prod_{j=1}^{P_*}\prod_{r=1}^{Q_*} \Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}$$

que, pela propriedade da função gama dada em 1.7.14, fica

$$1.9.6 \qquad B_i=\Gamma^{p(q-k)}(s-p+i+1)\{\prod_{j=i+1}^{p-K-3}(s-p+j)^{(p-K-2-j)q}\}$$

$$\{\prod_{j=i+1}^{p-K-2}(s-p+j)^{(K+2)q-pk}\}\div\left\{\{\prod_{j=1}^{i-1}(s-p+j)^{jq}\}\right.$$

$$\left.\{\prod_{j=1}^{P_*}\prod_{r=1}^{Q_*}\Gamma^{k}(s+(r-j)/Q)\}\right\}$$

e para $i=p-K-1,p-K,p-K+1,\ldots$ temos

1.9.7 $$B_i=(s-p+i)^{p(q-k)}\;\Gamma^{(K+2)q-pk}(s-K-1)\{\prod_{j=K+2}^{p-1}\Gamma^{q}(s-j)\}\div$$

$$\div\{\prod_{j=1}^{p_\star}\prod_{r=1}^{\Omega_\star}\Gamma^{k}(s+(r-j)/\Omega)\}$$

que, simplificado pela propriedade 1.7.14, fica

1.9.8 $$B_i=\Gamma^{p(q-k)}(s-p+i+1)\left\{\{\prod_{j=1}^{p-K-2}(s-p+j)^{jq}\}\{\prod_{j=p-K-1}^{i-1}(s-p+j)^{p(q-k)}\}\right.$$

$$\left.\{\prod_{j=1}^{p_\star}\prod_{r=1}^{\Omega_\star}\Gamma^{k}(s+(r-j)/\Omega)\}\right\}.$$

Calculando A_i, suas derivadas e passando ao limite ficamos, para $i=1,2,\ldots,p-K-2$ e $\lambda=1,2,\ldots,iq-2$

1.9.9 $$B_{oi}=\{\prod_{j=i+1}^{p-K-2}(j-i)^{(K+2)q-pk}\}\{\prod_{j=i+1}^{p-K-3}(j-i)^{(p-K-2-j)q}\}\div$$

$$\div\left\{\{\prod_{j=1}^{i-1}(j-i)^{jq}\}\{\prod_{j=1}^{p_\star}\prod_{r=1}^{\Omega_\star}\Gamma^{k}(p-i+(r-j)/\Omega)\}\right\}$$

1.9.10 $$A_{oi}=-\gamma p(q-k)+q\sum_{j=i+1}^{p-K-3}(p-K-2-j)\div(j-i)+\{(K+2)q-pk\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=i+1}^{p-K-2}1/(j-i)+q\sum_{j=1}^{i-1}j/(i-j)-k\sum_{j=1}^{p_\star}\sum_{r=1}^{\Omega_\star}\psi(p-i+(r-j)/\Omega)$$

onde

1.9.10' $$\sum_{j=1}^{p_\star}\sum_{r=1}^{\Omega_\star}=\sum_{\substack{j=1\\ r-j\neq-h\Omega,h=0,1,\ldots,K+1}}^{p}\sum_{r=1}^{\Omega}$$

e, ainda

1.9.11 $$A_{oi}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\Big\{ p(q-k)\zeta(\lambda+1,1)-q\sum_{j=i+1}^{p-K-3}((p-K-2-j)\div(j-i)^{\lambda+1})-$$

$$-\{(K+2)q-pk\}\sum_{j=i+1}^{p-K-2}1/(j-i)^{\lambda+1}+q\sum_{j=1}^{i-1}(j\div(j-i)^{\lambda+1})-$$

$$-\sum_{j=1}^{p_*}\sum_{r=1}^{Q_*}\zeta(\lambda+1,p-i+(r-j)/Q)$$

e para $i=p-K-1,p-K,p-K+1,\ldots$ e $\lambda=1,2,\ldots,p(q-k)-2$

1.9.12 $$B_{oi}=\Big[\{\prod_{j=1}^{p-K-2}(j-i)^{jq}\}\{\prod_{j=p-K-1}^{i-1}(j-i)^{p(q-k)}\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{p_*}\prod_{r=1}^{Q_*}\Gamma^{k}(p-i+(r-j)/Q)\}\Big]^{-1}$$

1.9.13 $$A_{oi}=-\gamma p(q-k)+q\sum_{j=1}^{p-K-2}j/(i-j)+p(q-k)\sum_{j=p-K-1}^{i-1}1/(i-j)-$$

$$-k\sum_{j=1}^{p_*}\sum_{r=1}^{Q_*}\psi(p-i+(r-j)/Q)$$

1.9.14 $$A_{oi}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\Big\{ p(q-k)\zeta(\lambda+1,1)+q\sum_{j=1}^{p-K-2}j/(j-i)^{\lambda+1}+$$

$$+p(q-k)\sum_{j=p-K-1}^{i-1}1/(j-i)^{\lambda+1}-k\sum_{j=1}^{p_*}\sum_{r=1}^{Q_*}\zeta(\lambda+1,p-i+\frac{r-j}{Q})\Big\}$$

Finalmente, podemos concluir esta parte do trabalho dando o resultado procurado

1.9.15 $$f(x)=n^{-1}\Big\{\prod_{j=1}^{p}\Big\{\prod_{r=1}^{Q}\Gamma^{k}(n+(r-j)/Q)\Big\}\Gamma^{q}(n+1-j)\Big\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{i=1}^{p-K-2}x^{(i-p)/n}\{(iq-1)!\}^{-1}\sum_{\eta=0}^{iq-1}\binom{iq-1}{\eta}\cdot\right.$$

$$\cdot(-(1/n)\ln x)^{iq-1-\eta}B_{oi}^{(\eta)}+\sum_{i=p-K-1}^{\infty}x^{(i-p)/n}\cdot$$

$$\cdot\{(p(q-k)-1)!\}^{-1}\sum_{\eta=0}^{p(q-k)-1}\binom{p(q-k)-1}{\eta}\cdot$$

$$\left.\cdot(-(1/n)\ln x)^{p(q-k)-1-\eta}B_{oi}^{(\eta)}\right\}$$

para $0 < x < 1$ e $f(x)=0$ noutra parte, onde $B_{oi}^{(\eta)}$ é dado pela relação de recorrência 1.7.10 e as expressões de 1.9.9 a 1.9.14.

E o presente resultado constitui o

teorema 1.5: Com o mesmo enunciado do teorema 1.2, se a dimensão p das populações for maior que o número Q delas em cada um dos agrupamentos e $(K+1)Q+1 \leq p \leq (K+2)Q$, K inteiro não negativo, então a representação de $f(x)$ em série computável é dada por 1.9.15.

CAPÍTULO II

DISTRIBUIÇÃO EXATA DE TESTE DE SIMETRIA COMPOSTA DO TIPO I

A partir dos momentos do critério da razão da verossimilhança para o teste de igualdade das médias, em grupos, das coordenadas de uma variável aleatória multivariada com distribuição normal e matriz de covariâncias com estrutura de simetria composta do tipo I, é calculada, pelo método da transformada de Mellin sua função densidade de probabilidade e apresentada em forma da função G-de Meijer e em forma de série computável.

2.1 - INTRODUÇÃO

No estudo de testes psicométricos, outras formas de medida, podemos nos perguntar se diversas formas de exame são intercambiáveis entre si na ordem de aplicação. Se considerarmos, por exemplo, tres formas de testes e assumirmos que os pontos dos indivíduos nas três formas têm uma distribuição normal tri-variada, a hipótese de permutação é equivalente à de que, na distribuição normal, as médias sejam iguais e as variâncias bem como as covariâncias também são iguais. Se a hipótese for verdadeira, então a distribuição é invariante a todas as permutações e se diz que ela possui *simetria completa*.

É frequentemente mais importante, na prática, não somente testar-se se formas de medida possuem simetria completa entre si, mas, também, se são permutáveis em relação a algum critério de medida exterior (por exemplo, o critério poderia ser habilidade no cumprimento de certa tarefa). Se assumirmos que os pontos nas três formas de testes e o critério têm uma distribuição normal quadri-variada, então a hipótese de permutabilidade é equivalente à de igualdade entre as médias dos pontos dos três testes, de suas variâncias e covariâncias, bem como de igualdade das cova riâncias entre as formas e o critério. Quando a hipótese é verdadeira, os três testes e o critério têm uma distribuição normal - quadri-variada com matriz de covariâncias da forma

$$\begin{bmatrix} A & C & C & C \\ C & B & D & D \\ C & D & B & D \\ C & D & D & B \end{bmatrix},$$

onde a quantidade A representa o critério de medida.

Uma distribuição normal à qual esta hipótese é verdadeira é dita possuir *simetria composta do tipo I*.

Um caso mais geral de simetria composta do tipo I é quando há vários exames (onde dois dos quais não necessitam ter a mesma quantidade de formas) e diversos critérios exteriores.

Wilks (1946) determinou critérios amostrais para testar várias hipóteses de simetria completa em uma distribuição normal multivariada.

Votaw (1948) produziu critérios amostrais para testar doze hipóteses de simetria composta, bem como seus respectivos momentos, e determinou a distribuição exata do critério para o teste simultâneo de igualdade de médias, variâncias e covariâncias de uma distribuição normal com simetria composta do tipo I, como sendo a mesma distribuição de um produto de variáveis aleatórias independentes com distribuição beta. Tukey e Wilks (1946) haviam aproximado a distribuição desse produto por uma distribuição beta simples. Votaw (1948) utilizou essas aproximações para fins de aplicações.

A partir dos momentos calculados por Votaw (1948) para o teste de igualdade, em grupos, das médias das coordenadas de uma variável com distribuição normal multivariada com matriz de covariâncias com estrutura de simetria composta do tipo I, calculamos, neste capítulo, com a utilização da transformada de Mellin, a função densidade de probabilidade do critério.

2.2 - O PROBLEMA, A HIPÓTESE E OS MOMENTOS

Seja $X'=(X_1,X_2,\ldots,X_t)$, $t \geq 3$, um vetor aleatório com distribuição normal t-variada. Particionemos o conjunto $\{X_1,X_2,\ldots,X_t\}$ em q grupos mutuamente exclusivos, onde b deles contêm somente uma variável e os restantes $h=q-b$ contêm $n_1,n_2,\ldots,n_h$ variáveis, respectivamente, com $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_h$ e $n_a \geq 2$, para $a=1, 2,\ldots,h$; $b+n_1+n_2+\ldots+n_h=t$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que as t variáveis estão ordenadas de forma que os b grupos contendo somente uma delas vêm primeiro.

Então $X'=(X_1,X_2,\ldots,X_t)$ tem como função densidade de probabilidade

2.2.1 $$f(x)=\pi^{-t/2}\ |G|^{1/2}\ \exp\{-(X-\mu)'G(X-\mu)\}$$

onde

2.2.2 $$G = (1/2)\Sigma^{-1} ,$$

Σ := matriz de covariâncias de X, positiva definida, e

2.2.3 $$\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_t)'$$

com $\mu_i = E\ X_i$, para $i=1,2,\ldots,t$.

Se Σ possui estrutura de simetria composta (tipo I), então ela é da forma

$$\text{2.2.4} \qquad \begin{bmatrix} A & C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1h} \\ C_{11} & B_1 & D_{12} & \cdots & D_{1h} \\ C_{21} & D_{21} & B_2 & \cdots & D_{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{h1} & D_{h1} & D_{h2} & & B_h \end{bmatrix}$$

onde

2.2.5 $\quad A=(cov(X_i,X_j)):b \times b \; ; \quad i,j=1,2,\ldots b$,

2.2.6 $\quad C_{1a}=(C_1' \; C_2' \; \ldots \; C_b')': b \times n_a$

com

2.2.7 $\quad C_i=c_i(1 \; 1 \; \ldots \; 1):1 \times n_a \; ; \; a=1,2,\ldots,h$,

2.2.8 $\quad B_a=(cov(X_{i_a},X_{j_a})):n_a \times n_a \; ; \; i_a,j_a=b+\bar{n}_a+1,\ldots,b+\bar{n}_{a+1}$,

com

2.2.9 $\quad \bar{n}_a= n_1 + n_2 + \ldots + n_{a-1} \; , \; \bar{n}_1 = 0$

2.2.10 $\quad cov(X_{i_a},X_{i_a})=cov(X_{j_a},X_{j_a}) \quad i_a \neq j_a$

e

2.2.11 $\quad cov(X_{i_a},X_{j_a})=cov(X_{i_a'},X_{j_a'}) \quad i_a \neq j_a \; , \; i_a' \neq j_a'$

para a=1,2,...,h

2.2.12 $\qquad D_{aa'} = d_{aa'}(I', I', \ldots, I')' : n_a \times n_{a'}$

com

2.2.13 $\qquad I = (1\ 1\ \ldots\ 1) : a \times n_{a'}$

para $a \neq a'$, $a, a' = 1, 2, \ldots, h$.

E ainda temos que

2.2.14 $\qquad C_{j1} = C'_{1j} \qquad j = 1, 2, \ldots, h$

2.2.15 $\qquad D_{aa'} = D'_{a'a} \qquad a, a' = 1, 2, \ldots, h$.

O problema de que vamos nos ocupar é o de testar a igualdade das médias das variáveis dentro de cada um dos grupos, sob a condição de que Σ é de simetria composta do tipo dado em 2.2.4 (tipo I).

Formalmente, essa hipótese é

2.2.16 $\qquad H(m): \mu_{i_a} = \mu_{j_a}$, $i_a \neq j_a$; $i_a, j_a = \bar{n}_a + b + 1, \ldots, \bar{n}_{a+1} + b$,

$a = 1, 2, \ldots, h$

dado que Σ possui a estrutura em 2.2.4.

Sejam $(X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \ldots, X_{t\alpha})'$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, uma amostra aleatória de $X = (X_1, X_2, \ldots, X_t)'$.

Então se $\lambda(m)$ é o critério da razão da verossimilhança para testar $H(m)$ contra sua negação, o $(s-1)$-ésimo momento de $L(m) = \lambda(m)^{2/N}$ (vide Votaw (1948)) é dado por

2.2.17 $$E(L(m)^{s-1}) = \{\prod_{a=1}^{h} \prod_{s_a=1}^{n_a-1} \{\Gamma(N/2+(s_a-1)/(n_a-1))\cdot$$

$$\cdot\Gamma((N-3)/2+(s_a-)/(n_a-1)+s)\}\div$$

$$\div\{\Gamma((N-1)/2+(s_a-1)/(n_a-1))\cdot$$

$$\cdot\Gamma((N-2)/2+(s_a-1)/(n_a-1)+s)\}\},\quad \mathrm{Re}\ s > 1.$$

A densidade de L(m) e o seu desenvolvimento em séries computáveis serão dados nas secções seguintes.

2.3 - DISTRIBUIÇÃO DE L(m) COMO FUNÇÃO G-de MEIJER

Se f(x) é a função densidade de probabilidade de L(m), então 2.2.17 é a transformada de Mellin de f(x) (vide apêndice A) e aplicando a transformação inversa temos

2.3.1 $$f(x)=Q(h,N,n_1,\ldots,n_h)/(2\pi i)\int_L x^s\{\prod_{a=1}^{h}\prod_{s_a=1}^{n_a-1}\Gamma((N-3)/2+$$

$$(s_a-1)/(n_a-1)-s)\div\Gamma((N-2)/2+(s_a-1)/(n_a-1)-s)\}\ ds$$

onde

2.3.2 $$Q(h,N,n_1,\ldots,n_h)=\{\prod_{a=1}^{h}\prod_{s_a-1}^{n_a-1}\Gamma(N/2+(s_a-1)/(n_a-1)\div$$

$$\div\Gamma((N-1)/2+(s_a-1)/(n_a-1)\}$$

e L é um ciclo começando e terminando em $+\infty$, no sentido negativo (horário), englobando todos os polos do integrando.

A forma 2.3.1 de $f(x)$ é proporcional a uma função G-de Meijer (vide apêndice B), a saber, para $0 < x < 1$:

2.3.3 $$f(x)=Q(h,N,n_1,\ldots,n_h)\; G^{t-q,0}_{t-q,t-q}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_{t-q} \\ b_1,\ldots,b_{t-q} \end{matrix}\right)$$

e $f(x)=0$ noutra parte, onde os parâmetros a_j têm a forma

2.3.4 $$a_{\bar{n}_j-(j-k)} = (N-2)/2+(k-2)/(n_j-1) \quad 2\leq k\leq n_j,\; j=1,2,\ldots,h$$

com

2.3.5 $$\bar{n}_j = \sum_{i=1}^{j-1} n_i \;,\; \bar{n}_1=0,$$

e os parâmetros b_j são da forma

2.3.6 $$b_j = a_j - 1/2 \;,\; j=1,2,\ldots,t-q$$

e $Q(h,N,n_1,\ldots,n_h)$ é dado por 2.3.2.

E temos, portanto o primeiro resultado do capítulo:

teorema 2.1: Seja $(X_{1\alpha},X_{2\alpha},\ldots,X_{t\alpha})$ $\alpha=1,2,\ldots,N$ uma amostra aleatória de tamanho N de uma população normal t-variada. Seja uma partição do conjunto $\{X_1,X_2,\ldots,X_t\}$ em q subconjuntos, de modo que os primeiros b deles são unitários e os restantes $h=q-b$ contêm $n_1\leq n_2\leq\ldots\leq n_h$ elementos, respectivamente.

Se a matriz de covariâncias dessa população tiver estrutura de simetria composta do tipo I, então, para testar

H: todas as variáveis que estão em cada um dos subconjuntos têm médias iguais, para todos eles,

contra a sua negação, a função densidade de probabilidade do critério da razão da verossimilhança é dada por 2.3.3.

Como em sua forma geral dada em 2.3.3 os valores de $f(x)$ são de difícil computação, determinamos sua espansão em séries computáveis para o caso em que todos os subconjuntos com mais de uma variável tenham o mesmo tamanho, isto é, todos os n_a são iguais.

2.4 - DENSIDADE DE L(m) EM SÉRIES COMPUTÁVEIS PARA $n_1=n_2=..=n_h=n$

Para o caso presente, a densidade de L(m) é dada pelo seguinte corolário do teorema 2.1

corolário 2.1

Com o enunciado do teorema 2.1, se $n_1=n_2=...=n_h=n$, então a função $f(x)$ é nula fora do intervalo $(0,1)$ e nele é

2.4.1 $$f(x)=Q(h,N,n)\ G^{g,0}_{g,g}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\dots,a_g \\ b_1,\dots,b_b \end{matrix}\right)$$

onde $g=(n-1)h$, $b_j=a_j-1/2$,

2.4.2 $$a_{rh+j}=(N-2)/2+r/(n-1)\ ,\ j=1,2,\dots,h\ ,\ r=0,1,\dots,n-2$$

2.4.3 $$Q(h,N,n)=(n-1)^{-h(n-1)/2}\ \Gamma^{h}(N(n-1)/2)\div\Gamma^{h}((N-1)(n-1)/2).$$

De fato, pois

$$t-q=nh+b-h-b=(n-1)h$$

e a relação entre os índices de a_j dada por

$$(j-1)n-(j-r-2)\leftrightarrow(rh-j)\quad ,\ j=1,2,\ldots,h\ \text{e}\ r=0,1,\ldots,n-2$$

faz com que

$$a_{(j-1)n-(j-r-2)}=(N-2)/2+r/(n-1)\ ,\ \text{por } 2.3.4$$

$$=a_{rh+j}\qquad ,\ \text{por } 2.4.3$$

pois $\bar{n}_j=(j-1)n$, conforme 2.3.5.

A constante em 2.4.3 decorre da aplicação da fórmula de multiplicação de Gauss (vide 1.5.11) no numerador e no denominador de 2.3.2.

Para representarmos f(x) em séries computáveis de funções simples e catalogadas, devemos resolver a integral

2.4.4 $$I=1/(2\pi i)\int_L x^{-s}\{\prod_{r=1}^{n-1}\Gamma^{h}((N-3)/2+(r-1)/(n-1)+s)\div$$

$$\div\Gamma^{h}((N-2)/2+(r-1)/(n-1)+s)\}\ ds$$

onde L é um ciclo começando e terminando em $-\infty$, no sentido anti-horário, englobando todos os polos do integrando (vide 2.3.1).

Para a aplicação do teorema dos resíduos, devemos verificar se há cancelamentos entre as funções gama que aparecem no denominador e no numerador do integrando.

Como os parâmetros das funções gama que aparecem no numerador são os do denominador subtraídos de 1/2, haverá cancelamentos de fatores comuns somente quando n for ímpar e $r=(n-1)/2$.

Temos, portanto, que o problema se constitui em dois casos:

caso I - n par

caso II - n ímpar.

CASO I

Como a função gama possui polos nos pontos $0,-1,-2,\ldots$ e todos são simples, os polos do produto

2.4.5 $$\Pi = \{ \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma^h((N-3)/2+(r-1)/(n-1)+s) \}$$

são da forma

2.4.6 $$s=-\{(N-3)/2+(r-1)/(n-1)+t)\}, \quad r=1,2,\ldots,n-1 \quad t=0,1,2,\ldots$$

e todos de ordem h.

Como fizemos no capítulo I, para aplicarmos o teorema dos resíduos, devemos escrever os polos de uma maneira compacta como raízes de um produto infinito.

Temos, portanto, que os polos dados em 2.4.6 são os anulantes do produto

2.4.7 $$\{ \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{\infty} (t+(N-5+2i)/2+(r-1)/(n-1))^h \}$$

onde h é a ordem de cada um deles.

Para a determinação dos resíduos (vide secção 1.7, itens 1.7.8 a 1.7.20 e comentários), necessitamos melhorar a forma de

2.4.8 $$B_{ir}=(s+(N-5+2i)/2+(r-1)/(n-1))^{h}\{\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma^{h}((N-3)/2+(j-1)\div$$

$$\div(n-1)+s)\div\Gamma^{h}((N-2)/2+(j-1)/(n-1)+S)\}$$

$$i=1,2,\ldots \qquad e\ r=1,2,\ldots,n-1$$

bem como **calcular** suas derivadas até a ordem h-1, para após, calcularmos os limites correspondentes.

A relação de recorrência 1.7.10 nos fornece as derivadas de B_{ir} a partir de $d/ds \ln B_{ir}=A_{ir}$ e $A_{ir}^{(\lambda)}$, $\lambda=1,2,\ldots,h-2$ e os resíduos serão calculados como em 1.7.12.

Temos, portanto, para $i=1,2,\ldots$ e $r=1,2,\ldots,n-1$, com a aplicação iterada da propriedade 1.7.14, 2.4.8 acima fica

2.4.9 $$B_{ir}=\Gamma^{h}(s+(N-3)/2+(r-1)/(n-1)+i)\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n-1}\Gamma^{h}(s+(N-3)/2+(j-1)\div$$

$$\div(n-1))\}\div\left(\{\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma^{h}(s+(N-2)/2+(j-1)/(n-1))\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{i-1}(s+(N-3)/2+(r-1)/(n-1)+j-1)^{h}\}\right).$$

Calculando A_{ir}, suas derivadas $A_{ir}^{(\lambda)}$, para $\lambda=1,2,\ldots,h-2$ e passando ao limite quando $s \to -((N-3)/2+(r-1)/(n-1)+i-1)$, temos

2.4.10 $$B_{iro}=(-)^{ih(i-1)/2}\ \{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n-1}\Gamma^{h}(1+(j-r)/(n-1)-i)\}\div$$

$$\div\left(\{(i-1)!\}^{h}\{\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma^{h}(3/2+(j-r)/(n-1)-i)\}\right)$$

2.4.11 $$A_{iro} = -\gamma h + h \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n-1} \psi(1+(j-r)/(n-1)-i) - h \sum_{j=1}^{n-1} \psi(3/2+(j-r)\div$$

$$\div(n-1)-i) + h \sum_{j=1}^{i-1} 1/(i-j)$$

e

2.4.12 $$A_{iro}^{(\lambda)} = (-)^{\lambda+1}\lambda! \left\{ h\,\zeta(\lambda+1,1) + h \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n-1} \zeta(\lambda+1, 1+(j-r)/(n-1)-i) - \right.$$

$$\left. -h \sum_{j=1}^{n-1} \zeta(\lambda+1, 3/2+(j-r)/(n-1)-i) + h \sum_{j=1}^{i-1} 1/(j-i)^{\lambda+1} \right\}.$$

Portanto, aplicando o teorema dos resíduos e utilizando as expressões de 2.4.10 a 2.4.12, temos

2.4.13 $$f(x) = (n-1)^{-h(n-1)/2} \{\Gamma^h(N(n-1)/2) \div \Gamma^h((N-1)(n-1)/2)\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} x^{((N-5+2i)/2+(r-1)/(n-1))} \{(h-1)!\}^{-1} \right.$$

$$\sum_{\eta=0}^{h-1} \binom{h-1}{\eta} (-\ln x)^{h-1-\eta} B_{iro}^{(\eta)} \qquad 0 < x < 1$$

$$=0 \qquad\qquad \text{noutra parte,}$$

onde $B^{(\eta)}$ é dado por 1.7.10.

E provamos o teorema

teorema 2.2: Com a enunciado do teorema 2.1, para o caso em que - $n_1=n_2=\ldots=n_h=n$, n par, a função densidade de probabilidade do critério $L(m)$ tem sua expansão em séries computáveis dada por 2.4.13.

CASO II

Quando n é ímpar, o numerador e o denominador do integrando em 2.4.4 (excluído x^{-s}) ficam:

2.4.15 $$NU=\Gamma^h((N-3)/2+s)\Gamma^h((N-3)/2+13(n-1)+s)\ldots\Gamma^h((N-3)/2+$$
$$+(n-2)/(n-1)+s)$$

e

2.4.16 $$DN=\Gamma^h((N-2)/2+s)\Gamma^h((N-2)/2+1/(n-1)+s)\ldots\Gamma^h((N-2)/2+$$
$$+(n-2)/(n-1)+s).$$

Como em DN há um fator da forma

2.4.17 $$\Gamma^h((N-2)/2+1/2+s)=\Gamma^h((N-3)/2+s)\cdot(s+(N-3)/2)^h$$

a integral em 2.4.4 fica

2.4.18 $$I=1/(2\pi i)\int_L x^{-s}\{\prod_{r=1}^{n-2}\Gamma^h((N-3)/2+r/(n-1)+s)\}\div$$
$$\div\left(\{\prod_{\substack{r=1\\2r\neq n+1}}^{n-1}\Gamma^h((N-2)/2+(r-1)/(n-1)+s)\}(s+(N-3)/2)^h\right)\ ds$$

Os polos do integrando são os anulantes do produto

2.4.19 $$(t+(N-3)/2)^h\ \{\prod_{r=1}^{n-2}\prod_{i=1}^{\infty}(t+(N-3)/2+r/(n-1)+i-1)^h\}$$

onde h é a ordem deles.

De maneira análoga ao caso anterior, temos aqui, para $s_o = -(N-3)/2$, $\lambda=1,2,\ldots,h-2$

2.4.20 $$B' = \{\prod_{j=1}^{n-2} \Gamma^h((N-3)/2+j/(n-1)+s)\} \div \{\prod_{\substack{j=1\\2j\neq n+1}}^{n-1} \Gamma^h((N-2)/2+\frac{j-1}{n-1}+s)\}$$

2.4.21 $$B'_o = \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma^h(j/(n-1))\} \div \{\prod_{\substack{j=1\\2j\neq n+1}}^{n-1} \Gamma^h((j-1)/(n-1)-1/2)\}$$

2.4.22 $$A'_o = h\sum_{j=1}^{n-2} \psi(j/(n-1)) - h\sum_{\substack{j=1\\2j\neq n+1}}^{n-1} \psi((n-1)/(n-1)-1/2)$$

2.4.23 $$A'^{(\lambda)}_o = (-)^{\lambda+1}\lambda!\left[h\sum_{j=1}^{n-2} \zeta(\lambda+1,j/(n-1)) - h\sum_{\substack{j=1\\2j\neq n+1}}^{n-1} \zeta(\lambda+1,\right.$$
$$\left.,(j-1)/(n-1)-1/2)\right]$$

e para $r=1,2,\ldots,n-2$, $i=1,2,\ldots$, $\lambda=1,2,\ldots,h-2$ e
$s_o = -\frac{N-3}{2} - \frac{r}{n-1} - i + 1$

2.4.24 $$B_{ir} = \Gamma^h(s+(N-3)/2+r/(n-1)+i)\{\prod_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{n-2} \Gamma^h(s+(N-3)/2+j/(n-1))\} \div$$
$$\div\left[\{\prod_{\substack{j=1\\2j\neq n+1}}^{n-1} \Gamma^h(s+(N-2)/2+(j-1)/(n-1))\}\ (s+(N-3)/2)^h\ \cdot\right.$$
$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{i-1} (s+(N-3)/2+r/(n-1)+j-1)^h\}\right]$$

2.4.25 $$B_{iro}=(-)^{hi(i-1)/2}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n-2}\Gamma^h(1-i+(j-r)/(n-1))\}\div$$

$$\div\left[\{\prod_{\substack{j=1\\ 2j\neq n+1}}^{n-1}\Gamma^h(1/2-i+(j-1-r)/(n-1))\}(1-i-r/(n-1))^h\ .\right.$$

$$\left.\cdot\ \{(i-1)!\}^h\right]$$

2.4.26 $$A_{iro}=-\gamma h+h\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n-2}\psi(1-i+(j-r)/(n-1))-h\sum_{\substack{j=1\\ 2j\neq n+1}}^{n-1}\psi(1/2-$$

$$-(j-1-r)/(n-1))-h/(1-i-r/(n-1))-h\sum_{j=1}^{i-1}(j-i)^{-h}$$

2.4.27 $$A_{iro}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left[h\zeta(\lambda+1,1)+h\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n-2}\zeta(\lambda+1,1-i+\frac{j-r}{n-1})-\right.$$

$$-h\sum_{\substack{j=1\\ 2j\neq n+1}}^{n-1}\zeta(\lambda+1,1/2-i+(j-1-r)/(n-1))+h/(1-i-$$

$$-r/(n-1))^{\lambda+1}+h\sum_{j=1}^{i-1}1/(j-i)^{\lambda+1}$$

E obtemos, como no caso anterior, com as fórmulas de 2.4.21 a 2.4.37, a função densidade de L(m)

2.4.28 $$f(x)=(n-1)^{-h(n-1)/2}\ \Gamma^h(N(n-1)/2)\{\ \Gamma^h((N-1)(n-1)/2)\cdot$$

$$\cdot(h-1)!\}\ \sum_{\eta=1}^{h-1}\binom{h-1}{\eta}x^{(N-3)/2}\ (-\ln\ x)^{h-1-\eta}\ .$$

$$\cdot\left[B_o^{\prime(\eta)}+\sum_{r=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{\infty}x^{i-1+r/(n-1)}\ B_{iro}^{(\eta)}\right]$$

e temos

teorema 2.3: Com o enunciado do teorema 2.1 , para o caso em que $n_1=n_2=,\ldots,n_h=n$, n ímpar, a função densidade de probabilidade do critério L(m) tem sua expansão em séries computáveis dada por 2.4.28 se $0 <x< 1$ e $f(x)=0$ caso contrário.

CAPÍTULO III

DISTRIBUIÇÃO EXATA DE TESTE DE SIMETRIA COMPOSTA DO TIPO II

Serão apresentados os momentos do critério da razão da verossimilhança para o teste de estrutura de simetria composta do tipo II na matriz de covariâncias de uma população com distribuição normal multivariada, e, a partir deles, será calculada, com a utilização da transformada de Mellin e de sua fórmula de inversão a função densidade de probabilidade do critério. Ela será apresentada em termos da função G-de Meijer e em séries computáveis de funções tabeladas.

3.1 - INTRODUÇÃO

A hipótese de simetria completa pode, também, aparecer em certos problemas, por exemplo, de pesquisa médica.

Suponhamos, por exemplo, que uma certa medição (p.e. porcentagem de CO_2 no sangue) é feita em cada um de três instantes de tempo (digamos T_1,T_2 e T_3) em certo animal experimental e suponhamos que essas três medições possuem uma distribuição normal tri-variada. Pode-se estar interessado em testar a simetria completa,com base em medidas em vários animais, dessas três medições, isto é, se todas elas têm a mesma média, mesma variância e todas as covariâncias são iguais.

Mais geralmente, podemos ter duas características U e W (p.e. %CO_2 e %O_2 no sangue) que são, ambas, medidas em dois instantes de tempo T_1 e T_2. Se considerarmos as quatro variáveis UT_1 UT_2, WT_1 e WT_2 como tendo uma distribuição normal quadri-variada, poderíamos estar interessados em testar se as médias e as variâncias das duas primeiras são iguais, as médias e as variâncias das duas últimas são iguais e se a matriz de covariâncias tem a forma

$$\begin{pmatrix} E & F & K & L \\ F & E & L & K \\ K & L & G & J \\ L & K & J & G \end{pmatrix} .$$

Quando essa hipótese é verdadeira a distribuição quadri-variada é dita possuir *simetria composta do tipo II*.

Uma forma mais geral de simetria composta do tipo II é quando se têm h características ou atributos (p.e. medições) e n posições no tempo ($n \geq 2$)

Votaw (1948) determinou os momentos do teste de simetria composta do tipo II para a matriz de covariâncias de uma população com distribuição normal multivariada, do teste simultâneo para a igualdade das médias de cada característica nas várias medições e para a estrutura de simetria composta do tipo II da matriz de covariâncias , bem como do teste de igualdade das médias dado que a matriz de covariâncias possui simetria composta do tipo II de populações normais multivariadas.

Nesse mesmo artigo, Votaw determinou os momentos do critério da razão da verossimilhança para testes equivalentes aos acima, quando da comparação de k populações com estruturas de simetria composta do tipo II.

Mathai e Rathie (1970) determinaram a distribuição exata do critério de Votaw para o teste de simetria composta do tipo II da matriz de covariâncias de uma população normal multivariada (médias quaisquer), para o número h de características igual a dois. Em 1971, ambos produziram a distribuição exata, não nula, para o mesmo teste, com h=1.

Rathie e Srivastava (1979) produziram a distribuição exata do critério de Votaw para o teste de igualdade de médias de cada característica, em todas as medições, dado que a matriz de covariâncias é de simetria composta do tipo II, para uma população normal multivariada.

Neste trabalho, determinamos a distribuição exata do critério de Votaw para o teste de estrutura de simetria composta do tipo II (médias quaisquer) da matriz de covariâncias de uma população normal multivariada, para o caso em que o número h de características é tres.

3.2 - O PROBLEMA, A HIPÓTESE E OS MOMENTOS

Apresentamos, nesta secção, o problema que nos ocuparemos no decorrer do capítulo, bem como a hipótese a ele concernente e os momentos calculados por Votaw (1948).

Seja $X=(X_1,X_2,\ldots,X_t)'$ um vetor aleatório com distribuição normal t-variada ($t=nh, n \geq 2$) e suponhamos que as variáveis (ou características) $X_1,X_2,\ldots,X_t$ sejam agrupadas em h grupos de n variáveis.

Seja Σ a matriz de covariâncias dessa distribuição, positiva definida.

Então, dizemos que X tem matriz de covariâncias com estrutura de simetria composta do tipo II se Σ for da forma:

3.2.1 $$\begin{pmatrix} B_1 & D_{12} & D_{13} & \cdots & D_{1h} \\ D_{21} & B_2 & D_{23} & \cdots & D_{2h} \\ D_{31} & D_{32} & B_3 & \cdots & D_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{h1} & D_{h2} & D_{h3} & \cdots & B_h \end{pmatrix} \quad : t \times t$$

onde as submatrizes têm as formas

3.2.2 $$B_a=(\mathrm{cov}(X_{i_a},X_{j_a})) \quad : n \times n \ , \quad i_a,j_a=\bar{n}_a+1,\ldots,\bar{n}_{a+1}$$

com

3.2.3 $$\mathrm{cov}(X_{i_a},X_{i_a})=\mathrm{cov}(X_{j_a},X_{j_a}) \qquad i_a\neq j_a$$

e

3.2.4 $$\mathrm{cov}(X_{i_a},X_{j_a})=\mathrm{cov}(X_{i'_a},X_{j'_a}) \qquad i_a\neq j_a \;,\; i'_a\neq j'_a$$

para $a=1,2,\ldots,h$, $\bar{n}_a$ como em 2.2.9,

3.2.5 $$D_{aa'}=(\mathrm{cov}(X_{i_a},X_{i_{a'}})): n \times n$$

com

3.2.6 $$\mathrm{cov}(X_{i_a},X_{k_{a'}})=\mathrm{cov}(X_{i'_a},X_{k'_{a'}}) \qquad k_{a'}=i_a+n(a'-a)$$

3.2.7 $$\mathrm{cov}(X_{i_a},X_{h_{a'}})=\mathrm{cov}(X_{i'_a},X_{h'_{a'}}) \qquad h_{a'}\neq k_{a'}$$

para $a\neq a'$, $a,a'=1,2,\ldots,h$.

Denominemos a hipótese de que Σ tem estrutura de simetria composta (do tipo II) de $H(vc)$ e $\lambda(vc)$ o critério da razão da verossimilhança para testar $H(vc)$ contra a sua negação. Então o $(s-1)$-ésimo momento de $L(vc)=\{\lambda(vc)\}^{2/N}$, determinado por Votaw é dado por

3.2.8 $$E(L(vc)^{s-1})=Q(n,h,N)\ \{\prod_{i=h+1}^{nh}\Gamma((N-2-i)/2+s)\}\div$$

$$\div\ \{\prod_{a=1}^{h}\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma((N-3)/2+(2j-a-1)/(2(n-1))+s)\}$$

onde

3.2.9
$$Q(n,h,N)=\left\{\prod_{a=1}^{h}\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/(2(n-1))\right\}\div$$
$$\div\left\{\prod_{j=h+1}^{nh}\Gamma((n-j)/2)\right\} \qquad \text{Re } s>1.$$

3.3 - DISTRIBUIÇÃO DE L(vc) EM TERMOS DA FUNÇÃO G-de MEIJER

Nesta parte deste capítulo nos ateremos à resolução do problema para h=3, pois para qualquer h a resolução é muito difícil. Em trabalho futuro apresentaremos a solução neste caso geral.

Para h=3, o (s-1)-ésimo momento de L(vc) é

3.3.1
$$E(L(vc)^{s-1})=Q)n,3,N)\ \left\{\prod_{j=1}^{3(n-1)}\Gamma((N-5-j)/2+s)\right\}\div$$
$$\div\left\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma((N-3)/2+(2j-a-1)/(2(n-1))+s)\right\}$$

onde

3.3.2
$$Q(n,3,N)=\left\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/(2(n-1))\right\}\div$$
$$\div\left\{\prod_{j=1}^{3(n-1)}\Gamma((N-3-j)/2)\right\}$$

Aplicando a transformada inversa de Mellin (vide apêndice A), obtemos a função densidade de probabilidade de L(vc):

$$3.3.3 \qquad f(x)=Q(n,3,N)/(2\pi i)\int_L x^s\ \{\prod_{j=1}^{3(n-1)} \Gamma((N-5-j)/2-s)\}\div$$

$$\div\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{n-1} \Gamma((N-3)/2+(2j-a-1)/(2(n-1))-s)\}\ ds$$

onde L é um ciclo começando e terminando em $+\infty$, no sentido horário, englobando todos os polos do integrando e $0 < x < 1$ e $f(x)=0$ em caso contrário.

Na forma acima a função $f(x)$ é uma função G-de Meijer (vide apêndice B), isto é, com $g=3(n-1)$,

$$3.3.4 \qquad f(x)=Q(n,3,N)\ G^{g,0}_{g,g}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_g \\ b_1,\ldots,b_g \end{matrix}\right) \qquad 0 < x < 1,$$

onde $Q(n,3,N)$ é dado por 3.3.2, os parâmetros a_j são da forma

$$3.3.5 \qquad a_j=(N-5-j)/2 \qquad j=1,2,\ldots,3(n-1)$$

e os parâmetros b_j são da forma

$$b_j=(N-3)/2+(j-1)/(n-1) \qquad j=1,2,\ldots,n-1$$

$$3.3.6 \qquad =(N-3)/2+(2j-3)/(2(n-1)) \qquad j=n,n+1,\ldots,2(n-1)$$

$$=(N-3)/2+(j-2)/(n-1) \qquad j=2n-1,2n,\ldots,3(n-1).$$

Como nos casos anteriores, é necessário escrevermo-la como séries computáveis de funções simples.

Para o desenvolvimento dessas séries, necessitamos cancelar no numerador e no denominador do integrando em 3.3.3 os fatores comuns, a fim de determinarmos os polos para a aplicação do teorema dos resíduos.

Mas esses cancelamentos dependem dos valores de n, como veremos adiante, que determinam a produção de densidades para quatro casos: n=2, n=3, n=2k e n=2k+1, para k=2,3,... .

Chamemos

3.3.7 $$NU=\{\prod_{j=1}^{3(n-1)} \Gamma(s+(n-5-j)/2)\}$$

o numerador do integrando, excluído x^{-s} e

3.3.8 $$DN=\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(s+(N-3)/2+(2j-a-1)/(2(n-1))\}$$

o seu denominador.

Cancelamentos ocorrerão somente quando

3.3.9 $$(2j-a-1)/(2(n-1) = k/2, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j=1,2,...,n-1$$

pois

3.3.10 $$(N-5-j)/2 = (N-3)/2-(2-j)/2 \ , \ j=1,2,...,3(n-1)$$

Analizemos o problema para k inteiro ímpar e k par.

i) caso em que k é par:

se a=1, então $0 \leq (j-1)/(n-1) < 1$, pois $j=1,2,\ldots,n-1$ e, portanto, somente ocorre

$$(j-1)/(n-1)=0,$$

quando $j=1$, para qualquer $n \geq 2$;

se a = 2, então $(2j-3)/(2(n-1)) = r$ $(r=k/2)$ implica

$$j=(2r(n-1)+3)/2,$$

que nunca é inteiro positivo, logo, neste caso não há k par que satisfaça a igualdade 3.3.9;

se a = 3, então

$$(j-2)/(n-1)=r \leftrightarrow j=r(n-1)+2,$$

mas

3.3.11 $\qquad j=1,2,\ldots,n-1$

logo

$$-1 \leq -1/(n-1) < k \leq 1-2/(n-1),$$

isto é, $k = -1,0$ e $k=0$ ocorre quando $j=2$, para $n \geq 3$, e $k=-1$ ocorre quando $j=1$ e $n=2$ e somente neste caso;

ii) caso em que k é ímpar:

se a = 1, então

$$(j-1)/(n-1)=k/2 \leftrightarrow j=(k(n-1)+2)/2$$

que implica k(n-1) par, o que é equivalente a n ímpar, pois j é inteiro não nulo; de 3.3.11 decorre

$$0 \leq k \leq 2-2/(n-1) < 2,$$

logo k=1 e, portanto, $j=1+(n-1)/2$, para $n \geq 3$, ímpar;

se a = 2, então

3.3.12 $$(2j-3)/(2(n-1)=k/2 \leftrightarrow j=(k(n-1)+3)/2,$$

o que exige que n seja par; a relação 3.5.11 implica

$$-1 \leq -1/(n-1) \leq k \leq 2-3/(n-1) < 2,$$

isto é, k=-1, quando e só quando j=1 e n=2, pois

$$1-n+3 > 0 \qquad n < 4 \quad \text{(vide 3.5.12)},$$

e k=1, quando $j=n/2+1$, para $n \geq 4$;

se a = 3, então

3.3.13 $$(j-2)/(n-1)=k/2 \leftrightarrow j=k(n-1)/2+2,$$

o que implica que n seja ímpar, pois j é inteiro positivo; a relação 3.5.11 implica

$$-1 \leq -2/(n-1) \leq k \leq 2-4/(n-1) < 2,$$

logo k=-1 quando, e só quando j=1 e n=3, pois $1-n+4 > 0$ implica $n < 5$ (vide 3.5.13) e k=1, quando $j=(n-1)/2+2$, para $n \geq 5$, ímpar.

Em virtude deste arrazoado, dividiremos o restante - deste capítulo em, ainda, quatro secções, uma para cada caso.

3.4 - DISTRIBUIÇÃO EXATA DE L(vc) PARA h = 3, n = 2

Neste caso NU e DN definidos em 3.3.7 e 3.3.8 podem - ser escritos como

3.4.1 $$NU=\Gamma(s+(N-3)/2-3/2)\ \Gamma(s+(N-3)/2-2)\ \Gamma(s+(N-3)/2-5/2)$$

e

3.4.2 $$DN=\Gamma(s+(N-3)/2)\ \Gamma(s+(N-3)/2-1/2)\ \Gamma(s+(N-3)/2-1)\ .$$

Aplicando a pripriedade 1.7.14 a alguns fatores de 3.4. 2, ficamos com o quociente

3.4.3 $$NU/DN=\Gamma(s+(N-8)/2)\div\{\Gamma(s+(N-3)/2)\cdot(s+(N-7)/2)(s+(N-6)/2)\}$$

e a nossa f(x) fica

3.4.4 $$f(x)=Q(2,3,N)/(2\pi i)\int_L x^{-s}\ NU/DN\ ds \qquad 0<x<1$$

onde L é como em 3.3.3 e f(x)=0 noutra parte.

Os polos do integrando em 3.4.4 são

$$s=-(N-7)/2,\ -(N-6)/2\ \text{e}\ s=-((N-8)/2+t)\quad t=0,1,2,\ldots\ .$$

Como a função gama possui somente polos simples, os do integrando em 3.4.4 são anulantes do produto

3.4.5 $$\{\prod_{i=6}^{8} (t+(N-i)/2)^{\alpha_i'}\} \{ \prod_{i=1}^{\infty} (t+(N-8)/2+i+1) \}$$

onde $\alpha_6'=2$ e $\alpha_7' = \alpha_8' = 1$ são as ordens dos repectivos polos; todos os outros são simples.

Como nos casos anteriores, aplicamos a propriedade 1.7.14 para calcularmos os B's (vide secção 1.7, itens 1.7.8 a 1.7.20 e comentários) e obtemos:

3.4.6 $$B_6'=\Gamma(s+(N-6)/2+1)\div\{\Gamma(s+(N-3)/2) \{\prod_{j=7}^{8} (s+(N-j)/2)\}\}$$

3.4.7 $$B_7'=\Gamma(s+(N-8)/2)\div\{ \Gamma(s+(N-3)/2) \ (s+(N-6)/2)\}$$

3.4.8 $$B_8'=\Gamma(s+(N-8)/2+1)\div\{\Gamma(s+(N-3)/2)\{ \prod_{j=6}^{7} (s+(N-j)/2)\}\}.$$

Calculando os limites para $s \to (N-i)/2$, $i=6,7,8$, temos:

3.4.9 $$B_{06}'= 4/\sqrt{\pi}$$

pois $\Gamma(3/2) = (1/2)\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$,

3.4.10 $$B_{07}'=-4\sqrt{\pi}$$

pois $\Gamma(-1/2) = -2\ \Gamma(1/2)$ e $\Gamma(2) = 1$, por 1.7.14, 3.4.11 $\quad B'_{o8}=8/(3\sqrt{\pi})$

3.4.12 $\quad A'_{o6}= - \gamma - \psi(3/2) + 3.$

Para calcularmos os resíduos correspondentes aos polos do segundo produto em 3.4.5, temos

3.4.13 $$B_i= \Gamma(s+(N-8)/2+i+2)\left\{ \Gamma(s+(N-3)/2)\{ \prod_{j=6}^{7} (s+(N-j)/2)\}\cdot \right.$$
$$\left. \cdot\{ \prod_{j=1}^{i+1} (s+(N-8)/2+j-1)\} \right\}$$

que passando ao limite quando $s \to -(N-8)/2-i-1$, para $i=1,2,\ldots$, fica

3.4.14 $$B_{io}=(-)^{(i+2)(i+1)/2}\ 8\div\{3\sqrt{\pi}(i+1)!\}$$

e, portanto, pela aplicação do teorema dos resíduos e 1.7.12

3.4.15 $$f(x)=\{ \prod_{j=1}^{3} \Gamma((N-j)/2)\div \Gamma((N-3-j)/2)\}(3\sqrt{\pi})^{-1}\cdot$$
$$\cdot x^{N/2}\left\{\{8x^{-4}-12\ x^{-7/2}+12(3-\ln x- - (3/2)x^{-3}\}+\right.$$
$$\left.+ 8 \sum_{i=1}^{\infty} (-)^{(i+2)(i+1)/2}\ x^{i-3}\div (i+1)!\right\} \quad 0<x<1$$

$$=0 \qquad \text{noutra parte}$$

e temos o resultado como o

teorema 3.3: Para testar se a matriz de covariâncias de uma população normal 6-variada é da forma dada em 3.2.1, contra a sua negação, a função densidade do critério da razão da verossimilhança L(vc) de Votaw, para o caso em que o número de atributos é h=3, - tem a forma dada em 3.4.15.

3.5 - DISTRIBUIÇÃO EXATA DE L(vc) PARA h = 3, n = 3

De 3.3.3 decorre que para este caso

3.5.1
$$f(x)=Q(3,3,N)\div(2\pi i)\int_L x^{-s}\{\prod_{j=1}^{6}\Gamma((N-5-j)/2+s)\}\div$$
$$\div\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{2}\Gamma((N-3)/2+(2j-a-1)/4+s)\}\quad ds$$

onde

$$Q(3,3,N)=\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{2}\Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/4)\}\div$$
$$\div\{\prod_{j=1}^{6}\Gamma((N-3-j)/2)\}$$

Expandindo o numerador e o denominador de 3.5.1 e cancelando as funções gama cujos argumentos diferem entre si por um número inteiro, a integral acima fica

3.5.2 $$I=1/(2\pi i)\int_L x^{-s}\,\Gamma(s+(N-10)/2)\,\Gamma(s+(N-11)/2)\div$$

$$\div\{\Gamma(s+(N-3)/2-1/4)\,\Gamma(s+(N-3)/2+1/4)\{\prod_{j=5}^{7}(s+(N-j)/2)^2\}\cdot$$

$$\cdot\ (s+(N-4)/2)(s+(N-8)/2)\}\quad ds$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na secção anterior, determinamos os polos do integrando, que são anuladores do produto

3.5.3 $$\{\prod_{i=4}^{8}(s+(N-i)/2)^{\alpha_i''}\}\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2,3,4}}^{\infty}(s+(N-10)/2+i-1)\}$$

$$\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3,4}}^{\infty}(s+(N-11)/2+i-1)\}$$

onde

3.5.4 $$\alpha_i''=\begin{cases}3 & \text{se } i=5,6,7\\ 2 & \text{se } i=4,8\end{cases}$$

são as ordens dos respectivos polos; todos os outros são simples.

Se denominarmos B_i'', B_i' e B_i os Bs a que nos referimos em 1.7.8 a 1.7.11, para o primeiro, segundo e terceiro produtos em 3.5.3, respectivamente, e aplicarmos a propriedade 1.7.14 teremos

3.5.5 $$B_5'' = \Gamma(s+(N-5)/2+1)\,\Gamma(s+(N-10)/2) \div \Big\{ \Omega^*(s) \cdot$$

$$\cdot \{\prod_{j=6}^{7} (s+(N-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{3} (s+(N-5)/2-j)\}\Big\}$$

3.5.6 $$B_6'' = \Gamma(s+N-6)/2+1)\,\Gamma(s+(N-11)/2) \div \Big\{ \Omega^*(s) \cdot$$

$$\cdot \{\prod_{\substack{j=5\\ j\neq 6}}^{7} (s+(N-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{2} (s+(N-6)/2-j)\}\Big\}$$

3.5.7 $$B_7'' = \Gamma(s+(N-7)/2+1)\,\Gamma(s+(N-10)/2) \div \Big\{ \Omega^*(s) \cdot$$

$$\cdot \{\prod_{j=5}^{6} (s+(N-j)/2)^2\}\ \{\prod_{j=1}^{2} (s+(N-7)/2-j)\}\Big\}$$

3.5.8 $$B_4'' = \Gamma(s+(N-4)/2+1)\,\Gamma(s+(N-11)/2) \div \Big\{ \Omega^{**}(s) \cdot (s+(N-8)/2) \cdot$$

$$\cdot \{\prod_{j=1}^{3} (s+(N-4)/2-j)\}\Big\}$$

3.5.9 $$B_8'' = \Gamma(s+(N-8)/2+1)\,\Gamma(s+(N-11)/2) \div \Big\{ \Omega^{**}(s) \cdot$$

$$\cdot\ (s+(N-8)/2-1)\,(s+(N-4)/2)\Big\}$$

onde

$$\Omega^*(s) = \{\prod_{j=0}^{1} \Gamma(s+(N-3)/2-1/4+j/2)\}\{\prod_{j=0}^{1} (s+(N-8)/2+2j)\}$$

e

$$Q^{**}(s) = \{\prod_{j=0}^{1} \Gamma(s+(N-3)/2-1/4+j/2)\}\{\prod_{j=5}^{7} (s+(N-j)/2)^2\}$$

para i= 1,5,6,7,...

3.5.10 $$B_i' = \Gamma(s+(N-10)/2+i)\,\Gamma(s+(N-11)/2) \div \Big(Q^{***}(s) \cdot \cdot \{\prod_{j=1}^{i-1} (s+(N-10)/2+j-1)\}\Big)$$

e para i=1,2,5,6,7,...

3.5.11 $$B_i = \Gamma(s+(N-11)/2+1)\,\Gamma(s+(N-10)/2) \div \Big(Q^{***}(s) \cdot \cdot \{\prod_{j=1}^{i-1} (s+(N-11)/2+j-1)\}\Big)$$

onde

$$Q^{***}(s) = \{\prod_{j=0}^{1} \Gamma(s+(N-3)/2-1/4+j/2)\}\{\prod_{j=5}^{7} (s+(N-j)/2)^2\} \cdot \cdot \{\prod_{j=0}^{1} (s+(N-8)/2+2j)\} .$$

Passando aos limites, como o fizemos nas secções anteriores, dos B'',B',B e respectivas devidadas dos logarítmos, ficamos com:

3.5.12 $$B''_{o5}=\Gamma(-5/2)\div\left[\Gamma(3/4)\Gamma(5/4)\{\prod_{j=6}^{7}((5-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{3}(-j)\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(-3/2)/2\right] = -(256/135)\div\{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)\}$$

3.5.13 $$B''_{o6}=\Gamma(-5/2)\div\left[\Gamma(5/4)\Gamma(7/4)\{\prod_{\substack{j=5\\j\neq 6}}^{7}((6-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{2}(-j)\}(-1)\right]$$

$$=(1024/45)\div\{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)\}$$

3.5.14 $$B''_{o7}=\Gamma(-3/2)\div\left[\Gamma(7/4)\Gamma(9/4)\{\prod_{j=5}^{6}((7-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{2}(-j)\}(-3/4)\right]$$

$$= -(2048/135)\div\{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)\}$$

3.5.15 $$B''_{o4}=\Gamma(-7/2)\div\left[\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)\{\prod_{j=5}^{7}((4-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{3}(-j)\}(-2)\right]$$

$$=(64/2835)\div\{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)\}$$

3.5.16 $$B''_{o8}=\Gamma(-3/2)\div\left[\Gamma(9/4)\Gamma(11/4)\{\prod_{j=5}^{7}((8-j)/2)^2\}(-2)\right]$$

$$= -(8192/2835)\div\{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)\}$$

para $i=1,5,6,7,\ldots$, $s_o=-(N-10)/2-i+1$

3.5.17 $$B'_{oi}=\Gamma(1/2-i)\div\left[Q^{***}(1-i+(N-10)/2)\{\prod_{j=1}^{i-1}(j-i)\}\right]$$

e para $i=1,2,5,6,7,...$, $s_o=1-i-(N-11)/2$

3.5.18 $$B_{oi}=\Gamma(3/2-i)\div\left[\, Q^{**}(1-i-(N-11)/2)\ \{\prod_{j=1}^{i-1}(j-i)\}\,\right]$$

e ainda, para $\lambda=1$,

3.5.19 $$A''_{o5}= -\gamma + \psi(-5/3) - \psi(3/4) - \psi(5/4) + 39/6$$

3.5.20 $$A''^{(1)}_{o5}= \zeta(2,1)+\zeta(2,-5/2)-\zeta(2,3/4)-\zeta(2,5/4)-(223/26)$$

3.5.21 $$A''_{o6}= -\gamma+\psi(-5/2)-\psi(5/4)-\psi(7/4)+3/2$$

3.5.22 $$A''^{(1)}_{o6}=\zeta(2,1)+\zeta(2,-5/2)-\zeta(2,5/4)-\zeta(2,7/4)+18$$

3.5.23 $$A''_{o7}=-\gamma+\psi(-3/2)-\psi(7/4)-\psi(9/4)- 19/6$$

3.5.24 $$A''^{(1)}_{o7}=\zeta(2,1)+\zeta(2,-3/2)-\zeta(2,7/4)-\zeta(2,9/4)+(565/36)$$

3.5.25 $$A''_{o4}=-\gamma+\psi(-7/2)-\psi(1/4)-\psi(3/4)+67/6$$

3.5.26 $$A''_{o8}=-\gamma+\psi(-3/2)-\psi(9/4)-\psi(11/4)+45/6$$

Com os valores dados nos itens 3.5.12 a 3.5.26, podemos expressar a função densidade de L(vc) na forma do *teorema 3.4*: Para testar se a matriz de covariâncias de uma população normal 9-variada é da forma dada em 3.2.1, contra a sua negação, a função densidade do critério da razão da verossimilhança L(vc) de Votaw, para o caso em que o número de atributos é h=3, tem a forma

3.5.27
$$f(x)=\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{2}\Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/4)\}\div\{\prod_{j=1}^{6}\Gamma((N-3-j)/2)\}\cdot$$
$$\cdot\, x^{N/2}\Big[(1/2)\sum_{\eta=0}^{2}\binom{2}{\eta}(-\ln x)^{2-\eta}\{x^{-5/2}B''^{(\eta)}_{o5}+$$
$$+x^{-7/2}B''^{(\eta)}_{o7}+x^{-3}B''^{(\eta)}_{o6}\}+\sum_{\eta=0}^{1}\binom{1}{\eta}(-\ln x)^{1-\eta}\cdot$$
$$\cdot\Big[\{x^{-2}B''^{(\eta)}_{o4}+x^{-4}B''^{(\eta)}_{o8}\}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2,3,4}}^{\infty}x^{i-6}B'_{oi}+$$
$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 3,4}}^{\infty}x^{i-13/2}B_{oi}\Big]\Big]$$

onde $B_{oi}^{(\eta)}$ é como em 1.7.10 e os coeficientes dos polinômios acima são dados em 3.5.12 a 3.5.26.

3.6 - DISTRIBUIÇÃO EXATA DE L(vc) PARA h = 3, n $\geq$ 5, ÍMPAR

Apresentaremos, nesta secção, a solução do problema do critério de Votaw para n=2k+1, k=2,3,... .

Neste caso temos que

3.6.1 $$f(x)=Q(2k+1,3,N)\div(2\pi i)\int_L x^{-s}\ NU/DN\ ds$$

onde L é um ciclo contendo todos os polos do integrando,

3.6.2 $$Q(2k+1,3,N)=\{\prod_{a=1}^{3}\ \prod_{j=1}^{2k}\ \Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/(4k))\}\div$$

$$\div\{\prod_{j=1}^{6k}\ \Gamma((N-3-j)/2)\}\quad,$$

3.6.3 $$NU=\{\prod_{j=1}^{6k}\Gamma(s+(N-3)/2-(2+i)/2)\}=\{\prod_{j=1}^{3k}\Gamma(s+(N-3)/2-(2j+1)\cdot$$

$$\cdot 2)\}\{\prod_{j=1}^{3k}\ \Gamma(s+(N-3)/2-j-1)\}$$

e

3.6.4 $$DN=\{\prod_{a=1}^{3}\ \prod_{j=1}^{2k}\Gamma(s+(N-3)/2+(2j-a-1)/(4k))\}\ .$$

Após os cancelamentos dos fatores comuns em NU e DN, o integrando em 3.6.1, excluído x^{-s}, fica

3.6.5 $$NU/DN=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\ \Gamma(s+(N-8)/2-j)\}\{\prod_{j=1}^{3k-2}\ \Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div$$

$$\div\left\{Q^*(s)\{\prod_{j=4}^{7}\ (s+(N-j)/2)^2\}\{\prod_{j=8}^{9}\ (s+(N-j)/2)\}\right\}$$

onde

3.6.6 $$Q^*(s)=\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2k-1}\Gamma(s+(N-3)/2+j/(2k))\}\{\prod_{j=1}^{2k}\Gamma(s+(N-3)/2+(2j-3)/(4k))\}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,k+2}}^{2k}\Gamma(s+(N-3)/2+(j-2)/(2k))\}.$$

Os polos do integrando em 3.6.1 são os anulantes do produto abaixo, onde os expoentes são as suas respectivas ordens:

3.6.7 $$\{\prod_{i=1}^{6}(t+(N-10+i)/2)^{\alpha_i''}\}\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3k-1,3k,3k+1}}^{\infty}(t+(N-6)/2-3k+i)^{\alpha_i'}\}\cdot$$
$$\cdot\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3k-1,3k-3k+1}}^{\infty}(t+(N-7)/2-3k+i)^{\alpha_i'}\}$$

onde

3.6.8 $$\alpha_i=\alpha_i'=\begin{cases} i & i=1,2,\ldots,3k-3\\ 3k-2 & i=3k-2,3k+2,3k+3,\ldots\end{cases}$$

3.6.9 $$\alpha_i''=\begin{cases} 3k-1 & i=1,2\\ 3k & i=3,4,5,6\end{cases}$$

Notaremos com B'',B' e B os Bs correspondentes ao primeiro, segundo e terceiro produtos em 3.6.7, respectivamente, bem como as respectivas derivadas.

Com a mesma técnica com que determinamos os Bs e $A^{(\lambda)}$s nas secções anteriores, os resolvemos para este caso e os apresentamos abaixo:

3.6.10 $$B_1'' = \Gamma^{3k-2}(s+(N-9)/2+1)\left\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-8)/2-j)\right\} \div \left\{Q^{**}(s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(s+(N-8)/2)\left\{\prod_{j=1}^{3k-2}(s+(N-9)/2-j)^{3k-1-j}\right\}\right\}$$

3.6.11 $$B_2'' = \Gamma^{3k-2}(s+(N-8)/2+1)\left\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\right\} \div \left\{Q^{**}(s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(s+(N-9)/2)\left\{\prod_{j=1}^{3k-2}(s+(N-8)/2-j)^{3k-1-j}\right\}\right\}$$

onde

3.6.12 $$Q^{**}(s) = Q^{*}(s)\left\{\prod_{j=4}^{7}(s+(N-j)/2)^{2}\right\} \qquad \text{(vide 3.6.6)}$$

para $i=3,5$

3.6.13 $$B_i'' = \Gamma^{3k-2}(s+(N-10-i)/2+1)\left\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-8)/2-j)\right\} \div$$

$$\div\left\{Q^{**}(s)\left\{\prod_{\substack{j=4\\ j\neq 10-i}}^{7}(s+(N-j)/2)^{2}\right.\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\prod_{j=1}^{3k-3}(s+(N-7)/2-3k+j)^{j}\right\}\left\{\prod_{j=1}^{(i+1)/2}(s+(N-10+i)/2-j)^{3k-2}\right\}\right\}$$

para $i=4,6$

3.6.14 $$B_i'' = \Gamma^{3k-2}(s+(N-10+i)/2+1)\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div$$

$$\div\left[\Omega^{**}(s)\ \{\prod_{\substack{j=4\\ j\neq 10-i}}^{7}(s+(N-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{3k-2}(s+(N-6)/2-3k+j)^j\}\right.$$

$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{i/2}(s+(N-10+i)/2-j)^{3k-2}\}\right]$$

onde

3.6.15 $$\Omega^{**}(s) = \Omega^{*}(s)\ \{\prod_{j=8}^{9}(s+(N-j)/2)\}$$ (vide 3.6.6)

para $i=1,2,\ldots,3k-3$

3.6.16 $$B_i' = \Gamma^{i+1}(s+(N-6)/2-3k+i+1)\ \{\prod_{j=1}^{3k-3-i}\Gamma(s+(N-6)/2-j-1)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div\left[\Omega^{\overset{*}{**}}(s)\ \{\prod_{j=1}^{i-1}(s+(N-6)/2-3k+j)^j\}\right]$$

3.6.17 $$B_{3k-2}' = \Gamma^{3k-2}(s+(N-6)/2-1)\ \{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div$$

$$\div\left[\Omega^{\overset{*}{**}}(s)\ \{\prod_{j=1}^{3k-3}(s+(N-6)/2-3k+j)^j\}\right]$$

para $i=3k+2,3k+3,\ldots$

3.6.18 $$B_i' = \Gamma^{3k-2}(s+(N-6)/2-3k+i+1)\ \{\prod_{j=1}^{3k-2} \Gamma(s+(N-()/2-j)\} \div$$

$$\div\left[\Omega^{\overset{*}{**}}(s)\{\prod_{j=1}^{3k-2}(s+(N-6)/2-3k+j)^{j}\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{i-3k+1}(s+(N-6)/2+j-2)^{3k-2}\}\right]$$

para $i=1,2,\ldots,3k-3$

3.6.19 $$B_i = \Gamma^{i+1}(s+(N-7)/2-3k+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-3-i}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-8)/2-j)\}\div\left[\Omega^{\overset{*}{**}}(s)\{\prod_{j=1}^{i-1}(s+(N-7)/2-3k+j)^{j}\}\right]$$

3.6.20 $$B_{3k-2} = \Gamma^{3k-2}(s+(N-7)/2-1)\ \{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-8)/2-j)\}\div$$

$$\div\left[\Omega^{\overset{*}{**}}(s)\ \ \{\prod_{j=1}^{3k-3}(s+(N-7)/2-3k+j)^{j}\}\right]$$

para $i=3k+2,3k+3,\ldots$

3.6.21 $$B_i = \Gamma^{3k-2}(s+(N-7)/2-3k+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-8)/2-j)\}\div\left[\Omega^{\overset{*}{**}}(s)\right.$$

$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-2}(s+(N-7)/2-3k+j)^{j}\}\ \{\prod_{j=1}^{i-3k+1}(s+(N-7)/2+j-2)^{3k-2}\}\right]$$

onde

3.6.22 $$\Omega^{***}(s) = \Omega^{*}(s)\{\prod_{j=4}^{7}(s+(N-j)/2)^2\}\{\prod_{j=8}^{9}(s+(N-j)/2)\}$$ (vide 3.6.6)

Passando aos limites, como já procedemos nas secções anteriores, calculados os valores B''_{oi}, B'_{oi}, B_{oi} e respectivas derivadas de ordem η e derivadas dos logarítimos, ficamos com:

3.6.23 $$B''_{o1}=(8/225)\ \{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(1/2-j)\}\div\left\{\Omega^{**}((9-N)/2)\{\prod_{j=1}^{3k-2}(-)^{3k-1-j}\}\right\}$$

3.6.24 $$A''_{o1}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(1/2-j)-D''_{o1}-107/15-\sum_{j=1}^{3k-2}(3k-1-j)/(-j)$$

3.6.25 $$A''^{(\lambda)}_{o1}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left\{(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,1/2-j)-C''_{o1\lambda}+\right.$$

$$\left.+2^{\lambda+1}+\sum_{j=1}^{3k-2}(3k-1-j)/(-j)^{\lambda+1}\right\}$$

3.6.26 $$B''_{o2}=-8/9\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(-1/2-j)\}\div\left\{\Omega^{**}((8-N)/2)\{\prod_{j=1}^{3k-2}(-)^{3k-1-j}\}\right\}$$

3.6.27 $$A''_{o2}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-2}\Gamma(-1/2-j)-D''_{o2}-19/3-\sum_{j=1}^{3k-2}(3k-1-j)/(-j)$$

3.6.28 $$A''^{(\lambda)}_{o2}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left\{(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,-1/2-j)-C''_{o2}+\right.$$

$$\left.+(-2)^{\lambda+1}+\sum_{j=1}^{3k-2}(3k-1-j)/(-j)^{\lambda+1}\right\}$$

para $\lambda=1,2,\ldots,3k-3$, onde para $i=1,2$

3.6.29 $$Q^{**}((10-i-N)/2)=\{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\Gamma((7-i)/2+j/(2k))\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{2k}\Gamma((7-i)/2+(2j-3)/(4k))\}\{\prod_{j=4}^{7}((10-i-j)/2)^{2}\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\Gamma((7-i)/2+(j-2)/(2k))\}$$

3.6.30 $$D''_{oi}=4\sum_{j=4}^{7}1/(10-i-N)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\psi((7-i)/2+j/(2k))+$$

$$+\sum_{j=1}^{2k}\psi((7-i)/2+(2j-3)/(4k))+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\psi((7-i)/2+(j-2)/(2k))$$

3.6.31 $$C''_{oi\lambda}=-2^{\lambda+2}\sum_{j=4}^{7}1/(10-i-j)^{\lambda+1}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,(7-i)/2+j/(2k))+$$

$$+\sum_{j=1}^{2k}\zeta(\lambda+1,(7-i)/2+(2j-3)/(4k))+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\zeta(\lambda+1,(7-i)/2+(j-2)/(2k))$$

para $i=3,5$, $\lambda=1,2,\ldots,3k-2$ e $s_o=(10-i-N)/2$

3.6.32 $$B''_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(2-i)/2-j)\}\div\Big(Q^{**}((10-i-N)/2)\cdot\{\prod_{j=1}^{(i+1)/2}(-j)^{3k-2}\}$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=4\\j\neq 10-i}}^{7}((10-i-j)/2)^{2}\}\{\prod_{j=1}^{3k-3}((3-i)/2-3k+j)^{j}\}\Big)$$

3.6.33 $$A''_{oi} = -(3k-2)\gamma + \sum_{j=1}^{3k-2} \psi((2-i)/2-j) - D^{**}_{oi} - \sum_{\substack{j=4\\ j\neq 10-i}}^{7} 2/((10-i-j)/2) - \sum_{j=1}^{3k-3} j/((3-i)/2-3k+j) - (3k-2)\sum_{j=1}^{(i+1)/2} 1/(-j)$$

3.6.34 $$A''^{(\lambda)}_{oi} = (-)^{\lambda+1}\lambda!\Big\{ (3k-2)\zeta(\lambda+1,1) + \sum_{j=1}^{3k-2} \zeta(\lambda+1,(2-i)/2-j) - C^{**}_{oi\lambda} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 10-i}}^{7} 2/((10-i-j)/2)^{\lambda+1} + \sum_{j=1}^{3k-3} j/((3-i)/2-3k+j)^{\lambda+1} + (3k-2)\sum_{j=1}^{(i+1)/2} 1/(-j)^{\lambda+1}\Big\}$$

para i=4,6,

3.6.35 $$B''_{oi} = \{\prod_{j=1}^{3k-2} \Gamma((1-i)/2-j)\} \div \Big\{ Q^{**}((10-i-N)/2) \cdot \{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 10-i}}^{7} ((10-i-j)/2)^2\}\{\prod_{j=1}^{3k-2} ((4-i)/2-3k+j)^j\} \cdot \{\prod_{j=1}^{i/2} (-j)^{3k-2}\}\Big\}$$

3.6.36 $$A''_{oi} = -(3k-2)\gamma + \sum_{j=1}^{3k-2} \psi((1-i)/2-j) - D^{**}_{oi} - 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 10-i}}^{7} 1/((10-i-j)/2) - \sum_{j=1}^{3k-2} j/((4-i)/2-3k+j) - (3k-2)\sum_{j=1}^{i/2} 1/(-j)$$

3.6.37 $$A''^{(\lambda)}_{oi} = (-)^{\lambda+1}\lambda!\Big\{ (3k-2)\zeta(\lambda+1,1) + \sum_{j=1}^{3k-2} \zeta(\lambda+1,(1-i)/2-j) -$$

$$-C^{**}_{oi\lambda+2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 10-i}}^{7} 1/((10-i-j)/2)^{\lambda+1}+\sum_{j=1}^{3k-2} j/((4-i)/2-3k+j)^{\lambda+1}$$

$$+(3k-2)\sum_{j=1}^{i/2} 1/(-j)^{\lambda+1}\Big)$$

onde

3.6.37 $$\Omega^{**}((10-i-N)/2)=\{\prod_{j=8}^{9}((10-i-j)/2)\}\{\prod_{j=1}^{2k}\Gamma((7-i)/2+(2j-3)\div$$

$$\div(4k))\}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2k-1}\Gamma((7-i)/2+j/(2k))\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,k+2}}^{2k}\Gamma((7-i)/2+(j-2)/(2k))\}$$

3.6.38 $$D^{**}_{oi}=\sum_{j=8}^{9} 1/((10-i-j)/2)+\sum_{j=1}^{2k}\psi((7-i)/2+(2j-3)/(4k))+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2k-1}\psi((7-i)/2+j/(2k))+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2,k+2}}^{2k}\psi((7-i)/2+(j-2)/(2k))$$

3.6.39 $$C^{**}_{oi\lambda}=-\sum_{j=8}^{9} 1/((10-i-j)/2)^{\lambda+1}+\sum_{j=1}^{2k}\zeta(\lambda+1,(7-i)/2+(2j-3)/(4k))$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,(7-i)/2+j/(2k))+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2,k+2}}^{2k}\zeta(\lambda+1,(7-i)/2+(j-2)/(2k))$$

e para $i=1,2,\ldots,3k-3,\lambda=1,2,\ldots,i-2$ e $s_o=3k-i-(N-6)/2$

3.6.40 $$B'_{oi} = \left\{ \prod_{j=1}^{3k-3-i} \Gamma(3k-i-j-1) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{3k-2} \Gamma(3k-i-j-3/2) \right\} \div$$

$$\div \left[\Omega^{\overset{*}{**}} (3k-i-(N-6)/2) \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} (j-i)^{j} \right\} \right]$$

3.6.40 $$A'_{oi} = -(i-1)\gamma + \sum_{j=1}^{3k-3-i} \psi(3k-j-i-1) + \sum_{j=1}^{3k-2} \psi(3k-j-i-3/2) - D_{oi}^{\overset{*}{**}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i)$$

3.6.41 $$A'^{(\lambda)}_{oi} = (-)^{\lambda+1} \lambda! \left((i-1)\zeta(\lambda+1,1) + \sum_{j=1}^{3k-2} \zeta(\lambda+1, 3k-j-i-3/2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3k-3-i} \zeta(\lambda+1, 3k-j-i-1) - C_{oi\lambda}^{\overset{*}{**}} + \sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i)^{\lambda+1} \right)$$

para $i=3k-2$,

3.6.42 $$B'_{oi} = \left\{ \prod_{j=1}^{3k-2} \Gamma(1/2-j) \right\} \div \left[\Omega^{\overset{*}{**}} (2-(N-6)/2) \left\{ \prod_{j=1}^{3k-3} (2+j-3k)^{j} \right\} \right]$$

3.6.43 $$A'_{oi} = -(3k-2)\gamma + \sum_{j=1}^{3k-2} \psi(1/2-j) - D_{oi}^{\overset{*}{**}} - \sum_{j=1}^{3k-3} j/(2+j-3k)$$

3.6.44 $$A'^{(\lambda)}_{oi} = (-)^{\lambda+1} \lambda! \left((3k-2)\zeta(\lambda+1,1) + \sum_{j=1}^{3k-2} \zeta(\lambda+1, 1/2-j) - \right.$$

$$\left. - C_{oi\lambda}^{\overset{*}{**}} + \sum_{j=1}^{3k-3} j/(2+j-3k)^{\lambda+1} \right)$$

para $i=3k+2, 3k+3, \ldots$ e $\lambda=1,2,\ldots,3k-4$

3.6.45 $$B'_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3k-3/2-i-j)\}\div\left[O^{\overset{*}{**}}(3k-i-(N-6)/2)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-2}(j-i)^{j}\}\{\prod_{j=1}^{i-3k+1}(j+3k-i-2)^{3k-2}\}\right]$$

3.6.46 $$A'_{oi}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3k-3/2-i-j)-D_{oi}^{\overset{*}{**}}-\sum_{j=1}^{3k-2}j/(j-i)-$$

$$-(3k-2)\sum_{j=1}^{i-3k+1}1/(3k-2-i+j)$$

3.6.47 $$A'^{(\lambda)}_{oi}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left[(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3k-3/2-i-j)-\right.$$

$$\left.-C_{oi\lambda}^{\overset{*}{**}}+\sum_{j=1}^{3k-2}j/(j-i)^{\lambda+1}+(3k-2)\sum_{j=1}^{i-3k+1}1/(3k+j-2-i)^{\lambda+1}\right]$$

e, finalmente, para $i=1,2,\ldots,3k-3$, $\lambda=1,2,\ldots,i-2$ e $s_o=3k-i-(N-7)/2$,

3.6.48 $$B_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-3-i}\Gamma(3k-1-j-i)\}\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3k-1/2-j-i)\}\div$$

$$\div\left[O^{\overset{*}{**}}(3k-i-(N-7)/2)\{\prod_{j=1}^{i-1}(j-i)^{j}\}\right]$$

3.6.49 $$A_{oi}=-(i-1)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-3-i}\psi(3k-1-j-i)+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3k-1/2-i-j)-$$

$$-D_{oi}^{\overset{*}{**}}-\sum_{j=1}^{i-1}j/(j-i)$$

3.6.50 $$A_{oi}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\Big\{(i-1)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-3-i}\zeta(\lambda+1,3k-1-i-j)+$$

$$+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3k-1/2-i-j)-C_{oi\lambda}^{\overset{*}{**}}+\sum_{j=1}^{i-1}j/(j-i)^{\lambda+1}\Big\}$$

para $i=3k-2$

3.6.51 $$B_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3/2-j)\}\div\Big\{Q^{\overset{*}{**}}(2-(N-7)/2)\{\prod_{j=1}^{3k-3}(j-i)^{j}\}\Big\}$$

3.6.51 $$A_{oi}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3/2-j)-D_{oi}^{\overset{*}{**}}-\sum_{j=1}^{3k-3}j/(2+j-3k)$$

3.6.52 $$A_{oi}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\Big\{(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3/2-j)-C_{oi\lambda}^{\overset{*}{**}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{3k-3}j/(j+2-3k)^{\lambda+1}$$

e para $i=3k+2,3k+3,\ldots$, $\lambda=1,2,\ldots,3k-4$

3.6.53 $$B_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3k-1/2-i-j)\}\div\Big\{Q^{\overset{*}{**}}(3k-i-(N-7)/2)\{\prod_{j=1}^{3k-2}(j-i)^{j}\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{i-3k+1}(3k+j-2-i)^{3k-2}\}\Big\}$$

3.6.54 $$A_{oi}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3k-1/2-i-j)-D_{oi}^{\overset{*}{**}}-\sum_{j=1}^{3k-2}j/(j-i)-$$

$$-(3k-2)\sum_{j=1}^{i-3k+1}1/(3k+j-2-i)$$

3.6.55 $$A_{oi}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left\{(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3k-i-j-1/2)-\right.$$

$$\left.-C_{oi}^{***}+\sum_{j=1}^{3k-2}j/(j-i)^{\lambda+1}+\sum_{j=1}^{i-3k+1}1/(3k+j-2-i)^{\lambda+1}\right\}$$

onde, para $s_o=3k-i-(N-6)/2$, temos

3.6.56 $$Q^{***}(3k-i-(N-6)/2)=\{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\Gamma(3k+3/2+j/(2k)-i)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{2k}\Gamma(3k+3/2-i+(2j-3)/(4k))\}\{\prod_{j=8}^{9}(3k-i+(6-j)/2)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\Gamma(3k+3/2+(j-2)/(2k)-i)\}\{\prod_{j=4}^{7}(3k-i+(6-j)/2)^2\}$$

3.6.57 $$D_{oi}^{***}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\psi(3k+3/2+j/(2k)-i)+\sum_{j=1}^{2k}\psi(3k+3/2-i+(2j-3)/(4k))$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\psi(3k+3/2+(j-2)/(2k)-i)+\sum_{j=8}^{9}1/(3k-i+(6-j)/2)+$$

$$+2\sum_{j=4}^{7}1/(3k-i+(6-j)/2)$$

3.6.58 $$C_{oi\lambda}^{***}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3k+3/2+j/(2k)-i)-\sum_{j=8}^{9}1/(3k-i+(6-j)/2)^{\lambda+1}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\zeta(\lambda+1,3k+3/2+(j-2)/(2k)-i)+\sum_{j=1}^{2k}\zeta(\lambda+1,3k+3/2-$$

$$-i+(2j-3)/(4k))-2\sum_{j=4}^{7}1/(3k-i+(6-j)/2)^{\lambda+1}$$

e para $s_o=3k-i-(N-7)/2$,

3.6.59 $$Q_{}^{***}(3k-i-(N-7)/2)=\{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\Gamma(3k+2+j/(2k)-i)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{2k}\Gamma(3k+2+(2j-3)/(4k)-i)\}\{\prod_{j=8}^{9}(3k-i+(7-j)/2)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\Gamma(3k+2+(j-2)/(2k)-i)\}\{\prod_{j=4}^{7}(3k-i+(7-j)/2)^2\}$$

3.6.60 $$D_{oi}^{***}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\psi(3k+2+j/(2k)-i)+\sum_{j=1}^{2k}\psi(3k+2+(2j-3)/(4k)-i)\ +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\psi(3k+2+(j-2)/(2k)-i)+\sum_{j=8}^{9}1/(3k-i+(7-j)/2)\ +$$

$$+\sum_{j=4}^{7}2/(3k-i+(7-j)/2)$$

3.6.61 $$C_{oi\lambda}^{***}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3k+2+j/(2k)-i)\ -\ \sum_{j=8}^{9}1/(3k-i+(7-j)/2)^{\lambda+1}$$

$$+\sum_{j=1}^{2k}\zeta(\lambda+1,3k+2+(2j-3)/(4k)-i)\ +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2,k+2}}^{2k}\zeta(\lambda+1,3k+2+(j-2)/(2k)-i)\ -$$

$$-\ 2\sum_{j=4}^{7}1/(3k-i+(7-j)/2)^{\lambda+1}$$

Com as expressões de 3.6.23 a 3.6.61 montamos a função f(x) e temos o seguinte *teorema 3.5*: Para testar se matriz de covariâncias de uma população normal (nh)-variada é da forma dada em 3.2.1, contra a sua negação, a função densidade do critério da razão da verossimilhança L(vc) de Votaw, para o caso em que o número de atributos é h = 3 e o número de repetições é n=2k+1, k=2,3,... , é

3.6.62
$$f(x)=\{\prod_{j=1}^{3}\prod_{j=1}^{2k}\Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/(4k))\}\div\{\prod_{j=1}^{6k}\Gamma((N-3-j)/2)\}\cdot$$

$$\cdot x^{N/2}\left\{\sum_{i=1}^{6}\frac{x^{(i-10)/2}}{(\alpha_i''-1)!}\sum_{\eta=0}^{\alpha_i''-1}\binom{\alpha_i''-1}{\eta}(-\ln x)^{\alpha_i''-1-\eta}\cdot\right.$$

$$\cdot B_{oi}''^{(\eta)}+\sum_{i=1}^{3k-3}\frac{x^{i-3k}}{(i-1)!}\sum_{\eta=0}^{i-1}\binom{i-1}{\eta}(-\ln x)^{i-1-\eta}\{x^{-3}B_{oi}'^{(\eta)}+$$

$$+x^{-7/2}B_{oi}^{(\eta)}\}+\sum_{i=3k-2}^{\infty}\frac{x^{i-3k}}{(3k-3)!}\sum_{\eta=0}^{3k-3}\binom{3k-3}{\eta}(-\ln x)^{3k-3-\eta}$$

$$\left.\cdot\{x^{-3}B_{oi}'^{(\eta)}+x^{-7/2}B_{oi}^{(\eta)}\}\right\}\qquad \text{se } 0<x<1$$

$$=0 \qquad\qquad \text{caso contrário,}$$

onde os coeficientes $B_{oi}''^{(\eta)}$, $B_{oi}'^{(\eta)}$ e $B_{oi}^{(\eta)}$ é como em 1.7.10 e os seus componentes são dados nas expressões de 3.6.23 a 3.6.61.

3.7 - DISTRIBUIÇÃO EXATA DE L(vc) PARA h = 3, n $\geq$ 4, PAR

Para este último caso, em que o número n de repetições do experimento aleatório, que se presupõe gerar matriz de covariâncias com estrutura de simetria composta (do tipo II), ser par e maior do que dois, a função densidade do critério L(vc) de Votaw é, para $k \geq 2$, $f(x)=0$ para $x \notin (0,1)$ e para $0 < x < 1$

3.7.1 $$f(x)=Q(2k,3,N)/(2\pi i)\int_L x^{-s}\left\{\prod_{j=1}^{6k-3}\Gamma((N-5-j)/2+s)\right\} \div$$

$$\div\left\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{2k-1}\Gamma(s+(n-3)/2+(2j-a-1)/(4k-2))\right\}\ ds$$

onde

3.7.2 $$Q(2k,3,N)=\left\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{2k-1}\Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/(4k-2))\right\}\div$$

$$\div\left\{\prod_{j=1}^{6k-3}\Gamma((N-3-j)/2)\right\}$$

Excluído x^{-s}, o numerador e o denominador do integrando são, respectivamente

3.7.3 $$NU=\Gamma((N-3)/2-3/2+s)\Gamma((N-3)/2-2+s)\Gamma((N-3)/2-3+s)\cdot$$

$$\cdot\left\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma((N-9)/2-j+s)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma((N-6)/2-j+s)\right\}$$

e

3.7.4 $$DN=\Gamma^2((N-3)/2+s)\,\Gamma((N-3)/2+1/2+s)\{\prod_{j=1}^{2k-2}\Gamma(\frac{N-3}{2}+\frac{j}{2k-1})\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\Gamma((N-3)/2+(j-2)/(2k-1))\}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\Gamma(\frac{N-3}{2}+\frac{2j-3}{4k-2})\}.$$

Cancelando os fatores comuns ficamos com

3.7.5 $$NU/DN=\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-6)/2-j)\}\div$$

$$\div\left(Q(s)\{\prod_{j=2}^{3}(s+(N-2k)/2)(s+(N-2k-1)/2)^2\}\right)$$

onde

3.7.6 $$Q(s)=\{\prod_{j=1}^{2k-2}\Gamma((N-3)/2+j/(2k-1))\}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\Gamma((N-3)/2+\frac{j-2}{2k-1})\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\Gamma((N-3)/2+(2j-3)/(4k-2))\}\quad .$$

Os polos do integrando em 3.7.1 são os anulantes do produto

3.7.7 $$\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3k-2,3k-1}}^{\infty}(t+(N-3)/2-3k+i)^{\alpha_i}\}\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3k-1,3k}}^{\infty}(t+(N-4)/2-3k+i)^{\alpha_i'}\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{i=1}^{4}(t+(N-8+i)/2)^{\alpha_i''}\}$$

onde

3.7.8 $$\alpha_i = \begin{cases} i & i=1,2,\ldots,3k-5 \\ 3k-4 & i=3k-4,3k-3,3k,3k+1,\ldots \end{cases}$$

3.7.9 $$\alpha_i' = \begin{cases} i & i=1,2,\ldots,3k-3 \\ 3k-2 & i=3k-2,3k+1,3k+2,\ldots \end{cases}$$

3.7.10 $$\alpha_i'' = \begin{cases} 3k-2 & i=1,3 \\ 3k-1 & i=2,4 \end{cases} .$$

Sejam

3.7.11
$$B_i''' = (s+(N-8)/2+i)^{3k-1} \quad NU/DN, \ i=1,2$$

$$B_i'' = (s+(N-9)/2+i)^{3k-2} \quad NU/DN, \ i=1,2$$

$$B_i' = (s+(N-4)/2-3k+i)^{\alpha_i'} \ NU/DN, \ i=1,2,\ldots \quad i\neq 3k-1,3k$$

$$B_i = (s+(N-3)/2-3k+i)^{\alpha_i} \ NU/DN, \ i=1,2,\ldots \quad i\neq 3k-2,3k-1,$$

as expressões em s que deverão ser derivadas para o cálculo dos resíduos, correspondentes ao terceiro produto (as duas primeiras), ao segundo e ao primeiro, respectivamente, de 3.7.7.

Cada uma delas pode ser escrita da forma que apresentamos a seguir, a fim de que se possam calcular os limites das suas derivadas:

3.7.12 $$B_i''=\Gamma^{3k-2}(s+(N-8)/2+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div\Big\{Q(s)\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{2}(s+(N-9)/2+j)^2\}\ (s+(N-8)/2+i')\Big\}$$

3.7.13 $$B_i''=\Gamma^{3k-4}(s+(N-9)/2+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-6)/2-j)\}\div\Big\{Q(s)\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{2}(s+(N-8)/2+j)\}\ (s+(N-9)/2+i')\Big\}$$

onde $i'=3-i$ e $i=1,2$.

Para $i=1,2,\ldots,3k-3$

3.7.14 $$B_i'=\Gamma^{i+1}(s+(N-4)/2-3k+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-3-i}\Gamma(s+(N-4)/2-1-j)\}$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div\Big\{Q^*(s)\ \ \{\prod_{j=1}^{i-1}(s+(N-4)/2-3k+j)^j\}\Big\}$$

3.7.15 $$B_{3k-2}'=\Gamma^{3k-2}(s+(N-4)/2-1)\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div\Big\{Q^*(s)\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-3}(s+(N-4)/2-3k+j)^j\}\Big\}$$

e para $i=3k+1,3k+2,\ldots$

3.7.16 $$B_i'=\Gamma^{3k-2}(s+(N-4)/2-3k+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\div\Big\{Q^*(s)\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-2}(s+(N-4)/2-3k+j)^j\}\ \{\prod_{j=1}^{i-3k+1}(s+(N-4)/2+j-2)^{3k-2}\}\Big\}$$

Para $i=1,2,\ldots,3k-5$, temos

3.7.17 $$B_i=\Gamma^{i+1}(s+(N-3)/2-3k+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-5-i}\Gamma(s+(N-9)/2-j)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-6)/2-j)\}\div\left(Q^*(s)\{\prod_{j=1}^{i-1}(s+(N-3)/2-3k+j)^j\}\right)$$

para $i=3k-4,3k-3$

3.7.18 $$B_i=\Gamma^{3k-4}(s+(N-3)/2-3k+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-6)/2-j)\}\div\left(Q^*(s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{i-1}(s+(N-3)/2-3k+j)^j\}\right)$$

e para $i=3k,3k+1,\ldots$

3.7.19 $$B_i=\Gamma^{3k-4}(s+(N-3)/2-3k+i+1)\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(s+(N-6)/2-j)\}\div\left(Q^*(s)\right.$$

$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{3k-4}(s+(N-3)/2-3k+j)^j\}\{\prod_{j=1}^{i-3k+3}(s+(N-3)/2+j-4)^{3k-4}\}\right)$$

onde

3.7.20 $$Q(s)=\{\prod_{j=1}^{2k-2}\Gamma(s+(N-3)/2+j/(2k-1)\}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\Gamma(s+(\frac{N-3}{2}+\frac{j-2}{2k-1})\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\Gamma(s+(N-3)/2+(2j-3)/(4k-2))\}$$

e

$$3.7.21 \qquad Q^*(s)=Q(s)\{\prod_{j=1}^{2}(s+(N-9)/2+j)^2(s+(N-8)/2+j)\}$$

Calculando os limites das expressões de 3.7.12 a 3.7.21, das derivadas de seus logarítmos quando $s \to s_o$, ficamos com :

para $i=1,2$, $\lambda=1,2,\ldots,3k-3$ e $s_o=-i-(N-8)/2$

$$3.7.22 \qquad B''_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(-1/2-i-j)\}\div\left\{Q(-i-(N-8)/2)\{\prod_{j=1}^{2}(j-i-\tfrac{1}{2})^2\}(3-2i)\right\}$$

$$3.7.23 \qquad A''_{oi}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-4}\psi(-i-j-1/2)-D''_{oi}-2\sum_{j=1}^{2}1/(j-i-1/2)+\frac{1}{2i-3}$$

$$3.7.24 \qquad A''_{oi}{}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left\{(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-4}\zeta(\lambda+1,-i-j-1/2)\; -\right.$$

$$\left.-C''_{oi\lambda}+2\sum_{j=1}^{2}1/(j-i-1/2)^{\lambda+1}+1/(3-2i)^{\lambda+1}\right\}$$

e para $s_o=-i-(N-9)/2$ e $\lambda=1,2,\ldots,3k-4$

$$3.7.25 \qquad B''_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3/2-i-j)\}\div\left\{Q(-i-(N-9)/2)\{\prod_{j=1}^{2}(1/2+j-i)\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,(3-2i)^2\right\}$$

$$3.7.26 \qquad A''_{oi}=-(3k-4)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3/2-i-j)-D''_{oi}-\sum_{j=1}^{2}1/(j-i+\tfrac{1}{2})\quad-\frac{2}{3-2i}$$

$$3.7.27 \qquad A''_{oi}{}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left\{(3k-4)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3/2-i-j)-\right.$$

$$-C''_{oi\lambda}+\sum_{j=1}^{2} 1/(j-i+1/2)^{\lambda+1} + 2/(3-2i)^{\lambda+1} \Big)$$

onde

3.7.28 $$Q(-i-(N-8)/2)=\{\prod_{j=1}^{2k-2} \Gamma(5/2-i+j/(2k-1))\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1} \Gamma(5/2-i+(j-2)/(2k-1))\}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1} \Gamma(5/2-i+\frac{2j-3}{4k-2})\}$$

3.7.29 $$D''_{oi}=\sum_{j=1}^{2k-2} \psi(5/2-i+j/(2k-1))+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1} \psi(5/2-i+(j-2)/(2k-1))+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1} \psi(5/2-i+(2j-3)/(4k-2)),$$

3.7.30 $$C''_{oi\lambda}=\sum_{j=1}^{2k-2} \zeta(\lambda+1,5/2-i+j/(2k-1))+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1} \zeta(\lambda+1,5/2-i+\frac{j-2}{2k-1})+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1} \zeta(\lambda+1,5/2-i+(2j-3)/(4k-2)),$$

3.7.31 $$Q(-i-(N-9)/2)=\{\prod_{j=1}^{2k-2} \Gamma(3+j/(2k-1))\}\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1} \Gamma(3+\frac{j-2}{2k-1})\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1} \Gamma(3+(2j-3)/(4k-2))\},$$

3.7.32 $$D'_{oi}=\sum_{j=1}^{2k-2} \psi(3+j/(2k-1))+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1} \psi(3+(j-2)/(2k-1))+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1} \psi(3+(2j-3)/(4k-2))$$

e

3.7.33 $$C''_{oi\lambda}=\sum_{j=1}^{2k-2}\zeta(\lambda+1,3+j/(2k-1))+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3+(j-2)/(2k-1))+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3+(2j-3)/(4k-2))$$

para $i=1,2,\ldots,3k-3,\ \lambda=1,2,\ldots,i-2$ e $s_o=3k-i-\frac{N-4}{2}$;

3.7.34 $$B'_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-3-i}\Gamma(3k-i-j-1)\}\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(3k-i-j-5/2)\}\div\Big(\Omega^*(3k-i-\frac{N-4}{2})$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{i-1}(j-i)^j\}\Big)$$

3.7.35 $$A'_{oi}=-(i+1)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-3-i}\psi(3k-1-i-j)+\sum_{j=1}^{3k-4}\psi(3k-5/2-i-j)-D'_{oi}-$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1}j/(j-i)$$

3.7.36 $$A'^{(\lambda)}_{oi}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\Big((i+1)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-3-i}\zeta(\lambda+1,3k-1-i-j)+$$

$$+\sum_{j=1}^{3k-4}\zeta(\lambda+1,3k-5/2-i-j)-C'_{oi}+\sum_{j=1}^{i-1}j/(j-i)^{\lambda+1}\Big)$$

para $i=3k-2$ e $\lambda=1,2,\ldots,3k-4$

3.7.37 $$B'_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(3k-5/2-i-j)\}\div\Big(\Omega^*(2-\frac{N-4}{2})\{\prod_{j=1}^{3k-3}(j-5/2-i)^j\}\Big)$$

3.7.38 $$A'_{oi}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-4}\psi(3k-5/2-i-j)-D'_{oi}-\sum_{j=1}^{3k-3}j/(j-5/2-i)$$

3.7.39 $$A'^{(\lambda)}_{oi}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left[(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-4}\zeta(\lambda+1,3k-5/2-i-j)-\right.$$
$$\left.-C'_{oi\lambda}+\sum_{j=1}^{3k-3}j/(j-5/2-i)^{\lambda+1}\right]$$

e para $i=3k+1,3k+2,\ldots$ (ainda $\lambda=1,2,\ldots,3k-4$)

3.7.40 $$B'_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-4}\Gamma(3k-5/2-i-j)\}\div\left[Q^{*}(3k-i-(N-4)/2)\{\prod_{j=1}^{3k-2}(j-i)^{j}\}\right.$$
$$\left.\cdot\{\prod_{j=1}^{i-3k+1}(3k+j-2-i)^{3k-2}\}\right]$$

3.7.41 $$A'_{oi}=-(3k-2)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-4}\psi(3k-5/2-i-j)-D'_{oi}-\sum_{j=1}^{3k-2}j/(j-i)-$$
$$-(3k-2)\sum_{j=1}^{i-3k+1}1/(3k+j-2-i)$$

3.7.42 $$A'^{(\lambda)}_{oi}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\left[(3k-2)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-4}\zeta(\lambda+1,3k-5/2-i-j)-\right.$$
$$\left.-C'_{oi\lambda}+\sum_{j=1}^{3k-2}j/(j-i)^{\lambda+1}+(3k-2)\sum_{j=1}^{i-3k+1}1/(3k+j-2-i)^{\lambda+1}\right]$$

onde

3.7.43 $$\Omega^{*}(3k-i-(N-4)/2)=\{\prod_{j=1}^{2k-2}\Gamma(3k+1/2+j/(2k-1)-i)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\Gamma(3k+1/2+(j-2)/(2k-1)-i)\}\{\prod_{j=1}^{2}(3k-5/2+j-i)^{2}\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\Gamma(3k+1/2+(2j-3)/(4k-2)-i)\}\{\prod_{j=1}^{2}(3k-2+j-i)\}$$

3.7.44 $$D'_{oi}=\sum_{j=1}^{2k-2}\psi(3k+1/2+j/(2k-1)-i)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\psi(3k+1/2+\frac{j-2}{2k-1}-i)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\psi(3k+1/2+(2j-3)/(4k-2)-i)+2\sum_{j=1}^{2}1/(3k-5/2+j-i)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}1/(3k+j-2-i)$$

3.7.45 $$C'_{oi\lambda}=\sum_{j=1}^{2k-2}\zeta(\lambda+1,3k+1/2+j/(2k-1)-i)-\sum_{j=1}^{2}1/(3k+j-2-i)^{\lambda+1}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3k+1/2+(j-2)/(2k-1)-i)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3k+1/2+\frac{2j-3}{4k-2}-i)-2\sum_{j=1}^{2}1/(3k-5/2+j-i)^{\lambda+1}.$$

Finalizando, para $i=1,2,\ldots,3k-5$, $\lambda=1,2,\ldots,i-2$ e $s_o=3k-i-(N-3)/2$

3.7.46 $$B_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-5-i}\Gamma(3k-3-i-j)\}\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3k-3/2-i-j)\}\div$$

$$\div\left\{\Omega^{*}(3k-i-(N-3)/2)\{\prod_{j=1}^{i-1}(j-i)^{j}\}\right\}$$

3.7.47 $$A_{oi}=-(i+1)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-5-i}\psi(3k-3-i-j)+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3k-3/2-i-j)-D_{oi}-$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i)$$

3.7.48 $$A_{oi}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\Big[(i+1)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-5-i}\zeta(\lambda+1,3k-3-i-j)+$$

$$+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3k-3/2-i-j)-C_{oi\lambda}+\sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i)^{\lambda+1}\Big]$$

para $i=3k-4,3k-3$ e $\lambda=1,2,\ldots,3k-6$

3.7.49 $$B_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3k-3/2-i-j)\}\div\Big[\Omega^{*}(3k-i-(N-3)/2)\{\prod_{j=1}^{i-1}(j-i)^{j}\}\Big]$$

3.7.50 $$A_{oi}=-(3k-4)\gamma+\sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3k-3/2-i-j)-D_{oi}-\sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i)$$

3.7.51 $$A_{oi}^{(\lambda)}=(-)^{\lambda+1}\lambda!\Big[(3k-4)\zeta(\lambda+1,1)+\sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3k-3/2-i-j)-$$

$$-C_{oi\lambda}+\sum_{j=1}^{i-1} j/(j-i)^{\lambda+1}\Big]$$

e para $i=3k,3k+1,\ldots$ e ainda $\lambda=1,2,\ldots,3k-6$, temos

3.7.52 $$B_{oi}=\{\prod_{j=1}^{3k-2}\Gamma(3k-3/2-i-j)\}\div\Big[\Omega^{*}3k-i-(N-3)/2)\{\prod_{j=1}^{3k-4}(j-i)^{j}\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{i-3k+3}(3k+j-4-i)^{3k-4}\}\Big]$$

3.7.53 $$A_{oi} = -(3k-4)\gamma + \sum_{j=1}^{3k-2} \psi(3k-3/2-i-j) - D_{oi} - \sum_{j=1}^{3k-4} j/(j-i) - (3k-4)\sum_{j=1}^{i-3k+3} 1/(3k+j-4-i)$$

e, finalmente,

3.7.54 $$A_{oi}^{(\lambda)} = (-)^{\lambda+1}\lambda!\left[(3k-4)\zeta(\lambda+1,1) + \sum_{j=1}^{3k-2}\zeta(\lambda+1,3k-3/2-i-j) - C_{oi\lambda} + \sum_{j=1}^{3k-4} j/(j-i)^{\lambda+1} + (3k-4)\sum_{j=1}^{i-3k+3} 1/(3k+j-4-i)^{\lambda+1}\right]$$

onde

3.7.55 $$Q^{*}(3k-i-(N-3)/2) = \{\prod_{j=1}^{2k-2}\Gamma(3k+j/(2k-1)-i)\}\{\prod_{j=1}^{2}(3k+j-\tfrac{5}{2}-i)\}\cdot \cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2k-1}\Gamma(3k+(j-2)/(2k-1)-i)\}\{\prod_{j=1}^{2}(3k+j-3-i)^2\}\cdot \cdot\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\Gamma(3k+(2j-3)/(4k-2)-i)\}$$

3.7.56 $$D_{oi} = \sum_{j=1}^{3k-2}\psi(3k+j(/(2k-1)-i) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq =}}^{2k-1}\psi(3k+(j-2)/(2k-1)-i) + + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+1}}^{2k-1}\psi(3k+(2j-3)/(4k-2)-i) - 2\sum_{j=1}^{2} 1/(3k+j-3-i) - - \sum_{j=1}^{2} 1/(3k+j-5/2-i)$$

e

3.7.57 $$C_{oi\lambda}=\sum_{j=1}^{2k-2}\zeta(\lambda+1,3k+j/(2k-1)-i)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3k+\frac{j-2}{2k-1}-i)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k+1}}^{2k-1}\zeta(\lambda+1,3k+(2j-3)/(4k-2)-i)-2\sum_{j=1}^{2}1/(3k+j-3-i)^{\lambda+1}-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}1/(3k+j-5/2-i)^{\lambda+1}.$$

Com as expressões de 3.7.22 a 3.7.57, montamos a função f(x) e o último resultado deste nosso trabalho é o

teorema 3.6: Para testar se a matriz de covariâncias de uma distribuição normal (nh)-variada é da forma dada em 3.2.1, contra a sua negação, a função densidade do critério da razão da verossimilhança L(vc) de Votaw, para o caso em que o número de atributos é h = 3 e o número de repetições é n=2k, para k=2,3,... , é

3.7.58 $$f(x)=\{\prod_{a=1}^{3}\prod_{j=1}^{2k-1}\Gamma((N-1)/2+(2j-a-1)/(4k-2))\}\div$$

$$\div\{\prod_{j=1}^{6k-3}\Gamma((N-3-j)/2)\}x^{N/2}\left(\sum_{j=1}^{2}x^{i}\{\frac{x^{-4}}{(3k-2)!}\sum_{\eta=0}^{3k-2}\binom{3k-2}{\eta}\cdot\right.$$

$$\cdot(-\ln x)^{3k-2-\eta}B_{oi}^{\prime\prime}(\eta)+\frac{x^{-9/2}}{(3k-3)!}\sum_{\eta=0}^{3k-3}\binom{3k-3}{\eta}\cdot$$

$$\cdot(-\ln x)^{3k-3-\eta}B_{oi}^{\prime\prime}(\eta)\}+\sum_{i=1}^{3k-2}\frac{x^{i-3k-2}}{(i-1)!}\sum_{\eta=0}^{i-1}\binom{i-1}{\eta}\cdot$$

$$(-\ln x)^{i-1-\eta}B_{oi}^{\prime}(\eta)+\sum_{i=3k+1}^{\infty}\frac{x^{i-3k-2}}{(3k-3)!}\sum_{\eta=0}^{3k-3}\binom{3k-3}{\eta}\cdot$$

$$\cdot(-\ln x)^{3k-3-\eta}\, B'^{(\eta)}_{oi} + \sum_{i=1}^{3k-5} \frac{x^{i-3k-3/2}}{(i-1)!} \sum_{\eta=0}^{i-1} \binom{i-1}{\eta} \cdot$$

$$\cdot(-\ln x)^{i-1-\eta}\, B^{(\eta)}_{oi} + \sum_{i=3k-4}^{\infty} \frac{x^{i-3k-3/2}}{(3k-5)!} \sum_{\eta=0}^{3k-5} \binom{3k-5}{\eta} \cdot$$

$$\cdot(-\ln x)^{3k-5-\eta}\, B^{(\eta)}_{oi} \Bigg\}$$

onde os coeficientes $B'''^{(\eta)}_{oi}$, $B''^{(\eta)}_{oi}$, $B'^{(\eta)}_{oi}$ e $B^{(\eta)}_{oi}$, bem como as respectivas derivadas do logarítmo são dados nos itens de 3.7.22 a 3.7.57 e a fórmula de recorrência para o cálculo dos $B^{(\eta)}$ em 1.7.10.

APÊNDICE A

A TRANSFORMADA DE MELLIN E SEU USO NA ESTATÍSTICA

Nos últimos anos a transformada de Mellin tem sido usada, com sucesso, em áreas como Física e Estatística e nesta, em problemas de determinação de distribuições exatas de produtos e quocientes de variáveis aleatórias independentes, bem como de testes de hipóteses.

Pelo que se sabe, Nair (1938) foi o primeiro a utilizá-la na Estatística para a determinação de distribuições exatas para testes de hipóteses de igualdade de variâncias de k populações normais e também de igualdade de matrizes de covariâncias de k populações normais bi-variadas, bem como para o teste de independência entre a média aritmética e a razão da média geométrica pela aritmética de amostras de uma população com distribuição gama.

Epstein (1948) a utilizou para a determinação do produto de duas variáveis aleatórias independentes. Nesse artigo de suma importância, Epstein desenvolveu um método simples para a aplicação da transformada de Mellin em distribuições contínuas de variáveis aleatórias que assumem valores reais negativos e positivos. Levy (1959) destacou a necessidade de uma teoria geral para a multiplicação de variáveis aleatórias e Zalotarev (1962) iniciou a construção de uma tal teoria baseado nas distribuições infinitamente divisíveis dando uma série de teoremas (sem provas) que mostram similaridades e diferenças entre essa e a teoria para adição dessas variáveis.

Springer e Thompson (1966) generalizaram o método de Epstein para o produto de n variáveis aleatórias independentes de valores reais positivos e negativos e obtiveram distribuições de produtos de n variáveis aleatórias independentes normais padronizadas ($n \leq 7$), quando Epstein o havia feito para n=2.

Rathie e Kaufmann (1977) dão uma ampla bibliografia sobre distribuições de produtos e quocientes de variáveis aleatórias independentes. Cordeiro e Rathie (1979), motivados pela necessidade de previsão de safras de trigo e soja para uma região do Estado do Rio Grande do Sul, através de um projeto coordenado pela CODETEC - Companhia do Desenvolvimento Tecnológico, determinaram, com o uso das técnicas de Epstein, a distribuição do produto de duas variáveis aleatórias independentes normais com quaisquer médias e quaisquer variâncias, resultado esse que coincidiu com o de Craig (1936), que utilizando a transformada de Laplace e os semi-invariantes o apresentou como uma série de funções de Bessel modificadas do segundo tipo.

Na introdução do capítulo II deste trabalho, nos referimos a outras contribuições nessa área.

A transformada de Mellin, segundo o próprio, apareceu, pela primeira vez, em 1896 (vide Mellin (1896)). Em Mellin (1910) o resultado dando a reciprocidade entre a transformada e sua inversa é, basicamente, o mesmo que apresentamos aqui.

Por definição, a transformada de Mellin F(s) correspondente a uma função f(x), definida para $x \geq 0$ é

$$(1) \qquad F(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)\,dx$$

Sob certas restrições em f(x), F(s) considerada função da variável complexa s, é uma função do tipo exponencial e analítica numa faixa paralela ao eixo imaginário. A largura da faixa é governada pela ordem de magnitude de f(x) numa vizinhança da origem e para valores grandes de x. Em particular, se f(x) decai exponencialmente, quando $x \to \infty$, F(s) é analítica em um semiplano.

A existência da transformada inversa de Mellin é dada pelo

teorema 1: Se $y^{\sigma-1}f(y)$ for Lebesgue-integrável em $(0,\infty)$ e f(y) for de variação limitada em uma vizinhança de $y = x$, então

$$(2) \qquad 1/2(f(x+)+f(x-))=1/(2\pi i)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\,x^{-s}ds. \quad (s=\sigma+i\infty),$$

onde F(S) é dada por (1).

A prova deste teorema está em Titchmarsh (1948),pg.46.

As afirmações no parágrafo logo abaixo de (1) decorrem do teorema abaixo (Titchmarsh (1948), pg.47))

teorema 2: Seja $f(z)$ uma função analítica de $z=re^{i\theta}$, regular para $-\alpha < \theta < \beta$, com $0< \alpha \leq \pi$, $0 < \beta \leq \pi$; suponhamos que $f(z)$ seja $O(|z|^{-a-\varepsilon})$ para z perto da origem e $O(|z|^{-b+\varepsilon})$ para z grande, com $-a < b$, uniformemente em qualquer ângulo dentro da faixa acima.

Então $F(s)$ é uma função analítica de s, regular para $a < \sigma < b$ e

(3) $$F(s)=\begin{cases} O(e^{-(\beta-\varepsilon)t}) & (t \to \infty) \\ O(e^{(\alpha-\varepsilon)t}) & (t \to -\infty), \end{cases}$$

para todo $0 < \varepsilon < \infty$, uniformemente na faixa $a < \sigma < b$ e vale (2) nessa faixa.

Reciprocamente, se $F(s)$ satisfaz (3) e $f(x)$ é definida por (2), então $f(x)$ satisfaz as condições do enunciado e (1) vale.

Sejam $f(x)$ e $g(y)$ funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias independentes X e Y, respectivamente. Seja $h(z)$ a densidade de $Z=XY$.

Sejam, também, $F(s)$, $G(s)$ as transformadas de Mellin de $f(x)$ e $g(y)$, respectivamente.

Por métodos diretos de transformações de variáveis, sabemos que

(4) $$h(z)= \int_0^\infty f(z/y)g(y)/y \; dy$$

Também vale (vide Titchmarsh (1948),pg.52) a relação

(5) $$1/(2\pi i)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} G(s)F(s)z^{-s}ds =\int_0^\infty f(z/y)g(y)/y \; dy.$$

Esta propriedade é a que permite o uso da transformada de Mellin para a determinação de distribuições de produtos de variáveis aleatórias independentes; ela é chamada de convolução de Mellin.

Vamos tratar, agora, do problema da unicidade da transformada de Mellin no conjunto das funções densidades de probabilidades contínuas com suporte (o,∞).

Devemos, no entanto, introduzir algumas definições e resultados.

Uma função complexa a variável real é dita suave se possuir todas as derivadas, de qualquer ordem, contínuas.

Sejam D(K), o conjunto de todas a funções complexas suaves, definidas em R, que se anulam fora de K e D a união de todos os possíveis D(K), K subconjunto compacto de R. D é espaço linear com respeito à adição de funções e multiplicação por número complexo (Zemanian (1968), pg.5).

O espaço dual D' de D é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos definidos em D. Os elementos de D' são chamados distribuições.

Seja a função

$$(6) \qquad \kappa_{a,b}(t) = \begin{cases} e^{at} & 0 \leq t < \infty \\ e^{bt} & -\infty < t < 0 \end{cases} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

e seja $L_{a,b}$ o espaço de todas as funções complexas $\phi(t)$ $-\infty < t < \infty$, tais que

$$(7) \qquad \gamma_k(\phi) = \gamma_{a,b,k}(\phi) = \sup_{\infty < t < \infty} |\kappa_{a,b}(t) D^k\phi(t)| < \infty \quad , k=0,1,2,\ldots$$

onde

$$D^k\phi(t) = d^k/dt^k \ \phi(t)$$

$L_{a,b}$ é um espaço linear com respeito à multiplicação - por números complexos e a adição ponto a ponto de funções e γ_k é semi-norma sobre $L_{a,b}$ (Zemanian (1968), pg.48).

Seja $L(w,z)=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} L_{a_\nu,b_\nu}$ tal que $a_\nu \to w+$ e $b_\nu \to z-$ e $\{a_\nu\}_1^\infty$, $\{b_\nu\}_1^\infty$ são monótonas. Então $L(w,z)$ e seu dual $L'(w,z)$ são espaços lineares (e completos) (Zemanian (1968), pg.50).

Seja

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \langle f,\phi\rangle \qquad \sigma_1 < \text{Re } s < \sigma_2, \tag{8}$$

onde $\phi(t)=e^{-st}$, para s pertencente ao conjunto Ω_f de convergência de $F(s)$, a transformada de Laplace bilateral. Neste caso Ω_f é a faixa paralela ao eixo imaginário cuja intersecção com a reta é o intervalo (σ_1,σ_2).

O resultado abaixo é um teorema de unicidade da transformada de Laplace bilateral, que utilizaremos na prova da unicidade da transformada de Mellin de funções densidade de probabilidade com suporte em R^{++}.

teorema 3: (Zemanian (1968), pg.69) - Se $F(s)$ e $G(s)$ são transformadas de Laplace bilaterais de $f(x)$ e $g(x)$, para $s\in\Omega_f$ e $s\in\Omega_g$, respectivamente, se $\Omega_f\ \Omega_g \neq \Phi$ e se $F(s)=G(s)$ para $s\in\Omega_f\ \Omega_g$, então $f=g$ no sentido da igualdade em $L'(w,z)$, onde o intervalo $w<\sigma<z$ é a intersecção de $\Omega_f\ \Omega_g$ com a reta real.

O sentido da igualdade em $L'(w,z)$, significa que para cada $\phi\in L'(w,z)$,

$$\langle f,\phi\rangle = \langle g,\phi\rangle.$$

Em particular, a igualdade vale para toda $\phi\in D$.

Como cololário do teorema acima temos o resultado que procuramos:

corolário 1: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções densidade de probabilidade com suporte em R^{++} e sejam $F(s)$ e $G(s)$ suas transformadas de - Mellin com $\Omega_f\ \Omega_g \neq \phi$. Se $F(s)=g(s)$ em $\Omega_f\ \Omega_g$, então as distribuições de probabilidade cujas densidades são f e g, coincidem.

prova:

temos que

$$
(9)\quad \text{e}\quad
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f^*(x)\,dx, \qquad s\varepsilon\Omega_f \\
G(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} g^*(x)\,dx, \qquad s\varepsilon\Omega_g
\end{aligned}
$$

onde $f^*(x)=f(e^{-x})$, $g^*(x)=g(e^{-x})$ e $o<x<\infty$.

Pela notação dada anteriormente,

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \langle f^*,\phi\rangle \\
G(s) &= \langle g^*,\phi\rangle, \qquad \phi(x)=e^{-sx}.
\end{aligned}
$$

Se $F(s)=g(s)$, $\sigma_1<\operatorname{Re} s<\sigma_2$, onde $(\sigma_1,\sigma_2)=\Omega_f\ \Omega_g\ R$, então pelo teorema anterior,

$$(10)\qquad \langle f^*,\phi\rangle = \langle g^*,\phi\rangle \quad \text{para toda } \phi\ \varepsilon\ D.$$

Seja $\chi_{(a,b)}(x)$ a função indicadora do intervalo aberto (a,b).

Então

$$(11)\qquad e^{-sx}\chi_{(a,b)}(x) = \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu^{a,b}(x) \qquad \sigma_1<\operatorname{Re} s<\sigma_2$$

onde

$$(12)\qquad \phi_\nu^{a,b}(x) = e^{-sx}\exp\{1/(\psi_\nu^{a,b}(x)-\nu^{-1})\},\quad \sigma_1<\operatorname{Re} s<\sigma_2$$

com

$$(13)\qquad \psi_\nu^{a,b}(x) = \inf\{|x-y|;\ y\varepsilon(a+\nu^{-1},b-\nu^{-1})\}$$

sendo a distância de x ao intervalo $(a+\nu^{-1}, b-\nu^{-1})$, para $\nu \geq \nu_0$ tal que $b-a-2\nu_0>0$.

Em particular, $\phi_\nu^{a,b} \in D$ e $\phi_\nu^{a,b} \leq \chi^*_{(a,b)}$ para todo $\nu > \nu_0$. Do teorema 3 decorre que

$$(14) \qquad \langle f^*, \phi_\nu^{a,b} \rangle = \langle g^*, \phi_\nu^{a,b} \rangle, \qquad \nu \geq \nu_0,$$

que, pelo teorema da convergência monótona implica

$$(15) \qquad \langle f^*, \chi^*_{(a,b)} \rangle = \langle g^*, \chi^*_{(a,b)} \rangle$$

onde

$$\chi^*_{(a,b)}(x) = e^{-sx} \chi_{(a,b)}(x), \qquad \sigma_1 < \mathrm{Re}\ s < \sigma_2$$

para cada par de números reais a,b.

Pelo mesmo teorema da convergência monótona temos

$$(16) \qquad \langle f^*, \chi^*_{(a,\infty)} \rangle = \langle g^*, \chi^*_{(a,\infty)} \rangle$$

isto é,

$$(17) \qquad \int_a^\infty e^{-sx} f^*(x)\,dx = \int_a^\infty e^{-sx} g^*(x)\,dx$$

ou ainda

$$(18) \qquad \int_{-\infty}^{e^{-a}} x^{s-1} f(x)\,dx = \int_0^{e^{-a}} x^{s-1} f(x)\,dx = \int_0^{e^{-a}} x^{s-1} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{e^{-a}} x^{s-1} g(x)\,dx$$

$$a \in R, \qquad \sigma_1 < \mathrm{Re}\ s < \sigma_2$$

o que equivale a

(19) $$\int_{\infty}^{a} x^{s-1} f(x)\,dx = \int_{\infty}^{a} x^{s-1} g(x)\,dx\ , \qquad a \in R.$$

Como

$$x^{\sigma-1} f(x) \geq 0 \ \text{ e } \ x^{\sigma-1} g(x) \geq 0, \quad (s=\sigma+i\tau), \quad \sigma_1<\sigma<\sigma_2$$

se definirmos

$$\mu_f(A) = \int_A x^{\ -1} f(x)\,dx \quad , \quad \mu_g(A) = \int_A x^{\ -1} g(x)\,dx$$

para todo subconjunto A Borel-mensurável de R, temos que μ_f e μ_g são medidas finitas, para todo $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$.

Como a classe $\{(-\infty,a)\}_{a\varepsilon R}$ é fechada por intersecção finita, o teorema da extensão e da unicidade de medidas (vide p.e. Bauer (1971), pg. 27) garante

(20) $$x^{\ -1} f(x) = x^{\ -1} g(x) \quad \text{Lebesgue-quase toda parte,}$$

isto é

(21) $$f(x) = g(x) \quad \text{Lebesgue-quase toda parte,}$$

e temos, portando que as distribuições,de que f e g são densidades, são iguais.

APÊNDICE A

A FUNÇÃO G

A função G foi introduzida por Pincherle (1888), estudada por Barnes(1908) e Mellin (1910) e foi Meijer (1941,1946) (vide Erdelyi e outros (1953),pg.207 e Luke (1969),vol.I,pg.143) quem a introduziu como integral de Mellin-Barnes (vide Dixon e Ferrar (1936)).

Como essa integral, ela é definida como

$$(1) \qquad G^{m,n}_{p,q}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\right.\right)=(2\pi i)^{-1}\int_L z^s\{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\}\cdot$$

$$\cdot\{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)\}\div\left\{\{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\}\{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)\}\right\} ds$$

onde $0 \leq m \leq p$, $0 \leq n \leq q$, produto vazio vale a unidade e os parâmetros complexos a_j e b_h são tais, que nenhum polo de $\Gamma(b_j-s)$ ($j=1,2,\dots,m$) coincide com nenhum polo de $\Gamma(1-a_j+s)$ ($j=1,2,\dots,n$), - isto é,

$a_j-b_h\neq 1,2,\dots$ para $j=1,2,\dots,m$ e $h=1,2,\dots,n$.

Também é necessário $z \neq 0$.

Há tres possibilidades para o caminho l:

i) L vai de $-i\infty$ a $+i\infty$, com alguns desvios, se necessários, de modo que todos os polos de (b_j-s) ($j=1,2,\dots,m$) fiquem a sua direita e todos os de $\Gamma(1-a_j+s)$ ($j=1,2,\dots,n$) a sua esquerda. A integral converge se $p+q<2(m+n)$ e $|\arg z|<(m+n-(p+q)/2)\pi$.

ii) L é um ciclo começando e terminando em $+\infty$, no sentido horário, englobando todos os polos de $\Gamma(b_j-s)$ $(j=1,2,\ldots,m)$, mas nenhum polo de $\Gamma(1-a_j+s)$ $(j=1,2,\ldots,n)$. A integral converge se $q \geq 1$ e, ou $p < q$ ou $p = q$ e $|z| < 1$.

iii) L é um ciclo começando e terminando em $-\infty$, no sentido anti-horário, englobando todos os polos de $\Gamma(1-a_j+s)$ $(j=1,2,\ldots,n)$, - mas nenhum polo de $\Gamma(b_j-s)$ $(j=1,2,\ldots,m)$. A integral converge se $p \geq 1$ e, ou $p > q$ ou $p = q$ e $|z| > 1$.

A demonstração destas afirmações está em Luke (1969).

APÊNDICE C

A FUNÇÃO H

A função H é uma função hipergeométrica generalizada da qual a função G-de Meijer (vide apêndice B) é um caso especial.

Ela foi introduzida e estudada por Fox (1961) e Braaksma (1964) a estudou, em detalhes, em suas expansões assintóricas e continuações analíticas.

Recentemente, Mathai e Saxena (1978) a apresentaram em livro, onde dão bastante detalhes sobre os trabalhos de Fox e Braaksma e, também, alguns aspectos de suas aplicações na Estatística e outras disciplinas.

Aqui daremos somente sua definição, o que é suficiente para o entendimento de seu uso na resolução geral do problema do capítulo I deste trabalho.

Sua definição como uma integral do tipo Mellin-Barnes é:

$$(1) \qquad H^{m,n}_{p,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_1,A_1),\dots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\dots,(b_q,B_q)\end{matrix}\right) = (2\pi i)^{-1}\int_L z^s \frac{\{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-B_js)\}\{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+A_js)\}}{\{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+B_js)\}\{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-A_js)\}}\,ds$$

onde $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$; m,n,p e q inteiros; A_j $(j=1,2,\dots,p)$ e B_j $(j=1,2,\dots,q)$ são números positivos e os a_j $(j=1,2,\dots,p)$ e b_j $(j=1,2,\dots,q)$ são números complexos tais que

$$A_j(b_h+r) \neq B_h(a_j-t-1)$$

para $r,t = 0,1,2,\ldots$, $h=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ e L é um contorno separando os polos de $\Gamma(b_j-B_js)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ dos de $\Gamma(1-a_j+A_js)$ $(j=1,2,\ldots,n)$.

A integral converge

i) para todo $z \neq 0$, se $\mu > 0$;

ii) para $0 < |z| < \beta^{-1}$, se $\mu = 0$,

onde

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j$$

e

$$\beta = \{\prod_{j=1}^{p} A_j^{A_j}\}\{\prod_{j=1}^{q} B_j^{-B_j}\}.$$

Mais detalhes sobre o contorno L e as condições de convergência estão disponíveis em Braaksma(1964).

18.Hogg,R. e Craig,A.T.(1970)-Introduction to Mathematical Statistics;MacMillan,London

19.Jain,S.K.,Rathie,P.N. e Shah,M.C.(1975)-The Exact Distribution of Certain Likelihood ratio Criteria;Sankhya,37-a;150-163

20.Krishnaiah,P.R.(1976)-Some Recent Developments on Complex Multivariate Distributions;J.Mult.Anal.,6;1-30

21.Lomnicki,Z.A.(1967)-On the Distribution of Products of Random Variables;J.Royal Statist.Assoc.,B29;513-524

22.Lukacs,E.(1970)-Characteristic Functions;Griffin,London

23.Luke,Y.L.(1969)-The Special Functions and their Approximations Ac.Press,NY

24.Mathai,A.M. e Rathie,P.N.(1971)-The Problem of Testing Independence;Statistica,31;673-688

25.idem(1971a)-The Exact Distribution of Wilks' Criterion;Ann. Math.Statist.,42;1010-1019

26.ibidem(1971b)-The Exact Distribution of Wilks' Generalized Variance in the non-Central Linear Case;Sankhya,A33;45-60

27.ibidem(1970)-The Exact Distribution of Votaw's Criteria;Ann. Inst.Statist.Math.,22;89-116

28.ibidem(1977a)-The Exact non-null Distribution for Testing Equality of Covariance Matrices;Sankhya,a publicar e Rel.Int.IMECC40

29.ibidem(1977b)-The Non-Null Distribution of Wilks' L_{vc} Criterion Statistica,a publicar e Rel.Int.IMECC 69

30.ibidem(1980)-On the Non-Null Distribution of a Test Criterion for Testing Equality of Populations;Mult.Analysis V;North-Holland;327-335

31.Mathai,A.M. e Saxena,R.K.(1973)-Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences; Springer Verlag,NY

32.idem(1978)-The H-Function with Apllications in Statistics and other Disciplines;Wiley,New Dehli

33.Meijer,C.S.(1941)-On the G-Function;Nederl.Akad.Wetensch.Proc. 44;1062-1070

34.idem(1946)-On the G-Function I a VIII;idem,49;227-237,344-356 457-469,632-641,765-772,936-943,1063-1072,1165-1175

35.Mellin,H.(1896)-Acta Societatis Scientiarum Fennicae,Tom.21
36.idem(1902)-Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential-und Differenzengleichung;Acta.Math.,25;139-164
37.ibidem(1910)-Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma-und der Hypergeometrischen Functionen,Math.Annalen,68;305-337
38.Nair,V.S.(1938)-The Application of the Moment Function in the Study of Distribution Laws in Statistics;Biometrika,30;274-294
39.Pincherle(1888)-Sulle Funzione Ipergeometriche Generalizzate; Accad.dei Lincei Rend.(4),vol-4
40.Rathie,A.K.(1979)-On the Nul Distribution of Likelihood Ratio Criterion for Reality of Covariance Matrix;trab.não publicado
41.Rathie,P.N. e Kaufmann,H.(1977)-On the Distributions of Products and Quocients of Random Variables;Metron,35;133-148
42.Rathie,P.N. e Srivastava,T.N.(1979)-The Exact Distribution of Votaw's Criterion $\overline{H}_1(m)$;não publicado
43.Sneddon,I.N.(1972)-The Use of Integral Transforms;McGraw-Hill,NY
44.Springer,M.D. e Thompson,W.E.(1966)-The Distribution of Products of Independent Random Variables;SIAM J.Appl.Math.,14;511-526
45.Titchmarsh,E.C.(1948)-Introduction to The Theory of Fourier Integrals,Oxford Univ.Press,London
46.Votaw,Jr.D.F.(1948)-Testing Compound Symmetry in a Normal Multivariate Distribution;Ann.Math.Statist.,19;447-473
47.Whittaker,E.T. e Watson,G.N.(1969)-A Course of Modern Analysis Cambridge Uni.Press.,London
48.Zalotarev,V.M.(1962)-On a General Theory of Multiplication of Random Variables;Dokl.Akad.Nauk.,SSSR,142;778-791
49.Zemanian,A.H.(1968)-Generalized Integral Transformations;Interscience,NY.