Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
Departamento de Matemática

Aplicações de Métodos de Topologia Algébrica em Teoria de Grupos

por

Patricia Massae Kitani†

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientadora: Prof. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova

Junho de 2005

Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP †.

Aplicações de Métodos de Topologia Algébrica em teoria de Grupos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Patricia Massae Kitani** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de junho de 2005.

Prof. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova
Orientadora

Banca examinadora:

Prof. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova.
Prof. Dra. Fernanda Soares Pinto Cardona.
Prof. Dr. Ketty Abaroa de Rezende.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Kitani, Patricia Massae

K646a Aplicações de métodos de topologia algébrica em teoria de grupos / Patricia Massae Kitani -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Dessislava Hristova Kochloukova

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria de grupos. 2. Topologia algebrica. 3. Grupos fundamentais (Matemática). I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Aplications of methods of algebraic topology in group theory.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Group theory. 2. Algebraic topology. 3. Fundamental groups (Mathematics)

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (UNICAMP)
Profa. Dra. Fernanda Soares Pinto Cardona (IME-USP)
Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (UNICAMP)

Data da defesa: 29/06/2005

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de junho de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Ketty A. de Rezende

Prof. (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE

Fernanda S P Cardona

Prof. (a). Dr (a). FERNANDA SOARES PINTO CARDONA

Agradecimentos

Foram anos de muito estudo, esforço e enfim, estou aqui e graças a ajuda de muitos companheiros que agora venho agradecer. Cada palavra de incentivo e cada ajuda foram muito importante durante estes anos de mestrado.

Primeiramente agradeço à minha família que é base de tudo na minha vida, que sempre me incentivou nos estudos e mesmo longe, sempre dando forças para seguir adiante.

Agradeço muito à minha orientadora Dessislava, pela paciência, disponibilidade e ajuda nos estudos.

Ainda sou grata a todos os amigos que conquistei durante este período, pelo companheirismo, ajuda nos estudos e alegria nos momentos de descontração. Em especial agradeço: Claudenir, João Eloir e Simão que me ajudaram em todos os momentos com muita paciência.

Ao Feodor, João Eloir e Rodolfo agradeço pela ajuda na parte computacional.

Um agradecimento especial também ao meu professor de graduação Cifuentes que contribuiu muito na minha formação e apoiou-me a vir para Campinas.

Por fim, agradeço a Fapesp pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho consistiu no estudo das aplicações de topologia algébrica (recobrimentos, teorema de Van Kampen) em teoria de grupos e também, no estudo detalhado do resultado de R. Bieri, R. Strebel [Proc. London Math. Soc. (3) 41 (1980), no. 3, 439–464], que para um grupo G do tipo FP_2, ou G contém subgrupo livre não cíclico ou para qualquer subgrupo normal $N \lhd G$ tal que $Q = G/N$ é abeliano, $N/[N,N]$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo manso via conjugação. A definição de módulo manso usa o invariante de Bieri-Strebel $\Sigma_A(Q)$, nesse caso $A = N/[N,N]$.

Abstract

This work consisted of the study of the applications of algebraic topology (covering maps, Van Kampen theorem) in group theory and also, in the detailed study of a result of R. Bieri, R. Strebel [Proc. London Math. Soc. (3) 41 (1980), no. 3, 439–464], that for a group G of type FP_2, either G has a free non-cyclic subgroup or for any normal subgroup $N \lhd G$ such that $Q = G/N$ is abelian, $N/[N, N]$ is a tame $\mathbb{Z}Q$-module where Q acts via conjugation. The definition of tame module uses the Bieri-Strebel invariant $\Sigma_A(Q)$, in this case $A = N/[N, N]$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos aplicações dos métodos de topologia algébrica em teoria de grupos. A tese é dividida em 3 partes. A primeira estuda propriedades combinatoriais de grupos : grupos livres, grupos finitamente apresentáveis (no sentido que são definidos com número finito de geradores e relações), "push-out"de grupos e grupos livres amalgamados. Os grupos livres amalgamados são partes importantes da teoria de Bass-Serre sobre grupos que agem sobre árvores (veja [11], [6]) mas neste trabalho não abordamos esse assunto. Os métodos usados para desenvolver esse capítulo são combinatoriais e seguimos do livro de Cohen [6], a exposição dessa matéria.

A segunda parte trata propriedades básicas de topologia algébrica. A princípio estudamos propriedades do grupo fundamental e recobrimentos de espaços topológicos. O grupo fundamental de um espaço topológico é um invariante importantíssimo nos estudos de espaços topológicos. No caso de recobrimentos de espaços existe resultado que liga o grupo fundamental da base com o grupo dos automorfismos do recobrimento (veja teorema 2.11 e corolário 2.8). Estudamos também o Teorema de Van Kampen : sejam X a união de dois espaços U e V que são abertos em X e, X, U, V e $U \cap V$ são todos conexos por caminhos, então o grupo fundamental de X é o push-out dos grupos fundamentais dos espacos U, V, $U \cap V$ com aplicações induzidas pela inclusões dos espaços correspondentes (veja teorema 2.12, [9]).

No terceiro capítulo estudamos um resultado de Bieri-Strebel (Teorema 4.1, [4]) :

Teorema : Seja G um grupo de tipo homológico FP_2 sobre um anel R comutativo e Noetheriano. Seja N um subgrupo normal de G tal que G/N é abeliano. Então ou N contém subgrupo livre não cíclico ou $N/[N, N]$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo manso via ação de Q induzida pela conjugação.

Para um número natural m dizemos que um grupo G tem tipo homológico FP_m sobre R se existe resolução projetiva de RG - módulo trivial R, com todos os módulos de dimensão $\leq m$ finitamente gerados (veja [2]). Neste trabalho nós supomos que R é o anel dos inteiros e que G é finitamente apresentável. Cada grupo finitamente apresentável tem tipo homológico FP_2 mas a inversa não vale (isso foi demonstrado recentemente em [1]). No artigo [4] algumas reduções são feitas para chegar no

caso de grupos finitamente apresentáveis. Evitamos essas reduções técnicas assumindo que o grupo G é finitamente apresentável (isso não afeta a idéia principal da demonstração). Estudamos o complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ de G com respeito a uma apresentação finita de G, G age propriamente descontínuo em $\tilde{\Gamma}$, e estudamos o recobrimento $\tilde{\Gamma} \to \Gamma = \tilde{\Gamma}/N$. Pelos resultados do capítulo 2 o grupo fundamental de Γ é isomorfo a N. A definição de $\mathbb{Z}Q$-módulo manso está ligada com a definição do invariante de Bieri-Strebel (seção 3.4). Um $\mathbb{Z}Q$-módulo A não é manso se existem dois pontos antipodais em $S(Q) \setminus \Sigma_A(Q)$. Em geral consideramos dois caracteres antipodais de G, com N no núcleo e cada um desses caracteres define um subespaço de Γ. Aplicando o Teorema de Van Kampen sobre esses subespaços (com união Γ) obtemos uma decomposição do grupo N como "push-out". Usando mais reduções podemos assumir que N vira produto livre amalgamado de dois subgrupos M_1 e M_2 tais que ou um dos grupos é igual a N (nesse caso um dos caracteres define elemento de $\Sigma_A(Q)$ onde $A = N/[N, N]$) ou $M_1 \neq N, M_2 \neq N$ e não é permitido que $[N : M_1] = [N : M_2] = 2$. No último caso N sempre contém um subgrupo livre não cíclico.

Capítulo 1

Grupos Livres e Produtos Livres Amalgamados

Neste capítulo inicial apresentaremos os conceitos algébricos que serão utilizados durante o capítulo posterior. Estaremos definindo grupos livres, grupos finitamente apresentáveis e suas propriedades básicas.

1.1 Grupos Livres

Definição 1.1. Sejam $\mathbb{X}$ um conjunto, $\mathbb{G}$ um grupo e $i : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{G}$ uma aplicação. O par $(\mathbb{G}, i)$ é chamado um *grupo livre sobre* $\mathbb{X}$ se para qualquer grupo H e qualquer aplicação $f : \mathbb{X} \longrightarrow H$ existe um único homomorfismo $\varphi : \mathbb{G} \longrightarrow H$ tal que $f = \varphi i$. Normalmente chamaremos $\mathbb{G}$ de grupo livre, omitindo a aplicação i.

Exemplo 1.1. O grupo $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é livre sobre o conjunto $\mathbb{X} = \{x\}$ tal que $i(x) \in \{-1, 1\}$.

Exemplo 1.2. O grupo trivial $\{1\}$ é livre sobre o conjunto vazio.

Proposição 1.1. *Sejam* $(\mathbb{G}_1, i_1)$ *e* $(\mathbb{G}_2, i_2)$ *grupos livres sobre* $\mathbb{X}$. *Então existe isomorfismo* $\varphi : \mathbb{G}_1 \longrightarrow \mathbb{G}_2$ *tal que* $\varphi i_1 = i_2$.

Demonstração: Como $(\mathbb{G}_1, i_1)$ é livre sobre $\mathbb{X}$, o homomorfismo φ existe. Analogamente existe um homomorfismo $\psi : \mathbb{G}_2 \longrightarrow \mathbb{G}_1$ tal que $\psi i_2 = i_1$. Então, $\psi\varphi i_1 = i_1 = Id_{\mathbb{G}_1} i_1$. Então pela propriedade de grupo livre temos que $\psi\varphi = Id_{\mathbb{G}_1}$. Do mesmo modo temos que $\varphi\psi = Id_{\mathbb{G}_2}$ e então, φ é isomorfismo. □

Faremos agora a construção do grupo livre $F(\mathbb{X})$ sobre o conjunto $\mathbb{X}$. Seja $M(\mathbb{X})$ o conjunto das seqüências finitas $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ de elementos de $\mathbb{X}$. Definimos uma multiplicação do seguinte modo:

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})$$

A multiplicação assim definida é associativa e com unidade 1, que é a sequência vazia. Também, $x \mapsto (x)$ é injetiva, e se identificamos x com (x), todo elemento de $M(\mathbb{X})$ pode ser unicamente escrito como produto $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, para algum n. Observamos que $M(\mathbb{X})$ não é grupo pois os elementos diferentes da unidade não possuem inversos.

Seja $- : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{X}}$ uma aplicação biunívoca tal que $\mathbb{X} \cap \overline{\mathbb{X}} = \emptyset$. Então, denotamos $\bar{x} \in \overline{\mathbb{X}}$ por x^{-1}. Dizemos que os elementos de $M(\mathbb{X} \cup \overline{\mathbb{X}})$ são *palavras sobre* $\mathbb{X}$. Se ω é uma palavra $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, onde $x_{i_j} \in \mathbb{X}$ e $\varepsilon_j = \pm 1$, então n é chamado o comprimento de ω e é denotado por $|\omega|$ ou $l(\omega)$ e $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ é o conjunto de letras de ω. Dizemos que w é uma palavra reduzida quando $x_{i_r} = x_{i_{r+1}}$ implica que $\varepsilon_r \neq -\varepsilon_{r+1}$, para $1 \leq r \leq n-1$.

Suponha que ω é uma palavra não reduzida, então existe um r tal que $\varepsilon_r = -\varepsilon_{r+1}$ e $x_{i_r} = x_{i_{r+1}}$. Agora seja ω' a palavra $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}} x_{i_{i+2}}^{\varepsilon_{r+2}} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Dizemos que ω' é obtida a partir de ω por uma redução elementar. Se ω'' é obtida de ω por uma sequência de reduções elementares dizemos que ω'' é *redução de* ω.

Definamos agora a seguinte relação de equivalência $\equiv$:

$\omega \equiv \omega'$ se, e somente se, ω é idêntico a ω' ou, se existe uma sequência de palavras $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ tal que $\omega_1 = \omega$ e $\omega_k = \omega'$ e para todo $j < k$ uma das palavras ω_j e ω_{j+1} vem da outra por uma redução elementar.

O conjunto de classes de equivalência é denotado por $F(\mathbb{X})$. A classe de equivalência de ω é denotado por $[\omega]$. É fácil verificar que se u, u', ω, ω' e v são palavras então:

$\omega \equiv \omega' \Rightarrow u\omega v \equiv u\omega' v$

$u \equiv u', \omega \equiv \omega' \Rightarrow u\omega \equiv u'\omega'$

Então, com a lei de composição $[u][\omega] = [u\omega]$ temos que $F(\mathbb{X})$ é um grupo. O elemento inverso de $[x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}]$ é $[x_{i_n}^{-\varepsilon_n} \ldots x_{i_2}^{-\varepsilon_2} x_{i_1}^{-\varepsilon_1}]$. Definimos uma aplicação $i : \mathbb{X} \longrightarrow F(\mathbb{X})$ por $i(x) = [x]$ e claramente $F(\mathbb{X})$ é gerado por $i(\mathbb{X})$.

Teorema 1.2. *O grupo $(F(\mathbb{X}), i)$ é grupo livre sobre $\mathbb{X}$.*

Demonstração: Sejam G um grupo e $f : \mathbb{X} \longrightarrow G$ uma aplicação. Definimos uma aplicação $\psi : M(\mathbb{X} \cup \overline{\mathbb{X}}) \longrightarrow G$ tal que $\psi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}) = f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} f(x_{i_2})^{\varepsilon_2} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n}$. Se ω' é obtido de ω por uma redução elementar então, ω e ω' tem a mesma imagem. Então, a aplicação ψ define uma aplicação $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ dada por $\varphi([\omega]) = \psi(\omega)$ e é homomorfismo e $f = \varphi i$. O homomorfismo φ com esta propriedade é único pois $F(\mathbb{X})$ é gerado por $i(\mathbb{X})$. □

Teorema 1.3. (Forma Normal de Grupos Livres) *Existe somente uma palavra reduzida para cada classe de equivalência.*

Demonstração: Sejam S o conjunto das palavras reduzidas em $M(\mathbb{X} \cup \overline{\mathbb{X}})$ e G o grupo de permutações de S. Definimos um homomorfismo $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ tal que $\varphi([\omega])$ é uma permutação que envia a sequência vazia ( ) em ω quando ω é uma palavra reduzida. Isso implica que quando ω e ω' são ambas palavras reduzidas e $[\omega] = [\omega']$, a permutação $\varphi([\omega])$ envia ( ) em ω e ω', portanto ω e ω' são iguais.

No teorema anterior demonstramos que $F(\mathbb{X})$ é grupo livre e por isso, basta definirmos uma aplicação $f : \mathbb{X} \longrightarrow G$. Definimos $f(x)$ como a permutação que envia ω a $x\omega$ se ω não começa com x^{-1} e envia ω a u se ω é $x^{-1}u$ como palavra. Facilmente se verifica que $f(x)$ é uma permutação de S cuja inversa envia ω a $x^{-1}\omega$ se ω não começa com x e envia ω a v se ω é xv como palavra. Lembremos que uma palavra reduzida não pode iniciar com xx^{-1} nem $x^{-1}x$.

Se ω é uma palavra reduzida $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ então, $\varphi([\omega])$ é o produto $f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} f(x_{i_2})^{\varepsilon_2} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n}$ e por indução sobre n temos que $\varphi([\omega])$ envia ( ) a ω. □

Corolário 1.1. *A aplicação $i : \mathbb{X} \longrightarrow F(\mathbb{X})$ é injetiva.*

Demonstração: Se x e y são elementos distintos de $\mathbb{X}$, eles são palavras reduzidas. Então, eles pertecem às classes de equivalências distintas. □

Teorema 1.4. *$F(\mathbb{X})$ é isomorfo a $F(\mathbb{Y})$ se e somente se $|\mathbb{X}| = |\mathbb{Y}|$.*

Demonstração: Seja f uma aplicação biunívoca de $\mathbb{X}$ sobre $\mathbb{Y}$. Então, f estende-se a um homomorfismo $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow F(\mathbb{Y})$. A aplicação f^{-1} de $\mathbb{Y}$ sobre $\mathbb{X}$ é estendida ao homomorfismo $\psi : F(\mathbb{Y}) \longrightarrow F(\mathbb{X})$. A composição $\psi\varphi$ e a identidade de $F(\mathbb{X})$ estendem a identidade de $\mathbb{X}$, então pela unicidade na definição de produto livre temos que $\psi\varphi$ é a identidade de $F(\mathbb{X})$. Analogamente $\varphi\psi$ é a identidade de $F(\mathbb{Y})$ e então, φ é isomorfismo.

Agora suponhamos que $F(\mathbb{X})$ é isomorfo a $F(\mathbb{Y})$. O número de isomorfismo de $F(\mathbb{X})$ a $\mathbb{Z}_2$ é o mesmo que o número de homomorfismo de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Z}_2$ e é igual a $2^{|\mathbb{X}|}$. Então $2^{|\mathbb{X}|} = 2^{|\mathbb{Y}|}$. Se um dos conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ é finito, isso implica que $|\mathbb{X}| = |\mathbb{Y}|$.

Suponhamos que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são infinitos. Neste caso, usando o axioma da escolha temos que $|M(\mathbb{X} \cup \overline{\mathbb{X}})| = |\mathbb{X} \cup \overline{\mathbb{X}}| = |\mathbb{X}|$ e como $F(\mathbb{X})$ é o conjunto das classes de equivalência de $M(\mathbb{X} \cup \overline{\mathbb{X}})$ temos $|F(\mathbb{X})| \leq |\mathbb{X}|$. Como $i : \mathbb{X} \longrightarrow F(\mathbb{X})$ é injetora, $|\mathbb{X}| \leq |F(\mathbb{X})|$. Então, $|\mathbb{X}| = |F(\mathbb{X})| = |F(\mathbb{Y})| = |\mathbb{Y}|$. □

Dizemos que um grupo G é grupo livre se é isomorfo a $F(\mathbb{X})$ para algum $\mathbb{X}$.

Definição 1.2. Seja G um grupo livre e $i : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ um isomorfismo. A imagem de $\mathbb{X}$ em G é chamada *base de* G, e G é chamado de livre sobre a imagem de $\mathbb{X}$. O número cardinal de uma base de G é chamado posto de G.

Proposição 1.5. *Sejam G um grupo e $\mathbb{X}$ um subconjunto de G. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *G é um grupo livre com base $\mathbb{X}$.*
2. *Todo elemento g de G pode ser escrito como um produto $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ para algum $n \geq 0$ ($n = 0$ corresponde a $g = 1_G$), onde $x_{i_r} \in \mathbb{X}, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$ e se $x_{i_r} = x_{i_{r+1}}$ então, $\varepsilon_r \neq -\varepsilon_{r+1}$, e este produto é único, isto é, para g fixo, $n, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ são únicos.*
3. *G é gerado por $\mathbb{X}$ e $1 \neq x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ para todo $n \geq 1$ tal que $x_{i_r} \in \mathbb{X}, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$ e se $x_{i_r} = x_{i_{r+1}}$ então, $\varepsilon_r \neq -\varepsilon_{r+1}$.*

Demonstração: Por definição (2) implica (3). (1) implica (2) pois G é isomorfo a $F(\mathbb{X})$ e toda classe $[\omega] \in F(\mathbb{X})$ tem um único representante ω que é a palavra reduzida.

Suponha agora que a condição (3) é assegurada. Consideremos o homomorfismo $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ que é a identidade sobre $\mathbb{X}$. Como G é gerado por $\mathbb{X}$, o homomorfismo φ é sobrejetor. Pela condição (3), $Ker(\varphi)$ é trivial. Então, φ é isomorfismo e G é livre com base $\varphi(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$. □

Corolário 1.2. *Sejam G um grupo gerado por um subconjunto $\mathbb{X}$ e $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo tal que φ é biunívoca sobre $\mathbb{X}$ e $\varphi(G)$ é um grupo livre com base $\varphi(\mathbb{X})$. Então G é livre com base $\mathbb{X}$.*

Corolário 1.3. *Sejam G um grupo livre com base $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ um subconjunto de $\mathbb{X}$. Então o subgrupo de G gerado por $\mathbb{Y}$ é um grupo livre com base $\mathbb{Y}$.*

1.2 Geradores e Relações de Grupos

Proposição 1.6. *Todo grupo é quociente de um grupo livre.*

Demonstração: Seja $f : G \longrightarrow G$ a identidade de G; f estende-se a um único homomorfismo $F(G) \longrightarrow G$ que é sobrejetivo. □

Definição 1.3. Sejam G um grupo, $\mathbb{X}$ um conjunto e $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ um homomorfismo sobrejetor. Então os elementos de $\varphi(\mathbb{X})$ são chamados de *geradores de* G e os elementos de $Ker(\varphi)$ são chamados *relações de* G (sobre φ). $\langle \mathbb{X}|R\rangle$ é chamado *apresentação de* G se existe um homomorfismo sobrejetor $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ tal que R é um subconjunto do núcleo de φ e esse núcleo é o menor subgrupo normal de $F(\mathbb{X})$ que contém R. O núcleo é chamado *fecho normal de* R *em* $F(\mathbb{X})$ é denotado por $Ker(\varphi) = \langle R^{F(\mathbb{X})}\rangle = \langle\{r^f \mid r \in R, f \in F(\mathbb{X})\}\rangle \subseteq F(\mathbb{X})$; onde $r^f = f^{-1}rf$. Se ambos $\mathbb{X}$ e R são conjuntos finitos dizemos que a *apresentação é finita*. Também escrevemos $\langle R\rangle^{F(\mathbb{X})}$ para $\langle R^{F(\mathbb{X})}\rangle$.

Observamos que $\mathbb{G}$ é finitamente apresentável se $\mathbb{G} \cong \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})}\rangle}$, onde $\mathbb{X}$ é um subconjunto finito de $\mathbb{G}$.

Exemplo 1.3. O grupo $F(\mathbb{X})$ tem apresentação $\langle \mathbb{X}|\emptyset\rangle$.

Exemplo 1.4. $\mathbb{X} = \{x\}, R = \emptyset$. Aqui $F(\mathbb{X})$ é cíclico, infinito e $\langle \mathbb{X}|R\rangle = \mathbb{G} \cong \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})}\rangle} \cong \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.5. $\mathbb{X} = \{x\}, R = \{x^n\}$

$\langle x|x^n\rangle$ é uma apresentação do grupo cíclico de ordem n.

$\langle x|x^n\rangle = \mathbb{G} \cong \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})}\rangle} \cong \mathbb{Z}_n$

Teorema 1.7. (Teorema de von Dyck) *Sejam G e H grupos, $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ um homomorfismo sobrejetor que dá apresentação $\langle \mathbb{X}|R\rangle$ de G, $f : \mathbb{X} \longrightarrow H$ uma função e $\theta : F(\mathbb{X}) \longrightarrow H$ o homomorfismo que estende f. Se $\theta(r) = 1$ para todo $r \in R$ então existe um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow H$ tal que $f(x) = \psi\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.*

Demonstração: Já temos assegurado que $R \subseteq Ker(\theta)$ e, desde que $Ker(\varphi)$ é, por definição, o subgrupo normal gerado por R, vemos que $Ker(\varphi) \subseteq Ker(\theta)$. Segue que o homomorfismo desejado ψ pode ser definido fazendo $\psi(g)$ como $\theta(y)$ para qualquer $y \in F(\mathbb{X})$ tal que $\varphi(y) = g$. □

Definição 1.4. Seja $\langle \mathbb{X}|R\rangle$ uma apresentação de um grupo G que é associada a um epimorfismo $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$. Então, $\langle \mathbb{X}|R \cup S\rangle$ é uma apresentação de G associada também a φ, onde S é um subconjunto do fecho normal de R em $F(\mathbb{X})$. Dizemos que $\langle \mathbb{X}|R \cup S\rangle$ é obtida a partir da apresentação $\langle \mathbb{X}|R\rangle$ *por uma transformação geral de Tietze de tipo* I e que $\langle \mathbb{X}|R\rangle$ é obtido da apresentação $\langle \mathbb{X}|R \cup S\rangle$ *por uma transformação geral de Tietze do tipo* I'. Se S tem um só elemento dizemos que estas transformações são simples.

Definição 1.5. Sejam $\mathbb{Y}$ um subconjunto de G tal que $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \emptyset$ e u_y um elemento de $F(\mathbb{X})$ para todo $y \in \mathbb{Y}$. Então temos uma apresentação $\langle \mathbb{X} \cup \mathbb{Y} | R \cup \{yu_y^{-1} | y \in \mathbb{Y}\}\rangle$ de G que é associada a um homomorfismo $\psi : F(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) \longrightarrow G$ cuja restrição sobre $F(\mathbb{X})$ é φ e $\psi(y) = \varphi(u_y)$. Dizemos que $\langle \mathbb{X} \cup \mathbb{Y} | R \cup \{yu_y^{-1} | y \in \mathbb{Y}\}\rangle$ é obtida a partir de $\langle \mathbb{X} | R\rangle$ *por uma transformação geral de Tietze do tipo* II e que $\langle \mathbb{X} | R\rangle$ é obtida de $\langle \mathbb{X} \cup \mathbb{Y} | R \cup \{yu_y^{-1} | y \in \mathbb{Y}\}\rangle$ *por uma transformação geral de Tietze do tipo* II'. Se Y contém um só elemento dizemos que estas transformações são simples.

Observação 1.1. *O núcleo de ψ é o fecho normal N de $R \cup \{yu_{y^{-1}}\}_{y \in \mathbb{Y}}$ em $F(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y})$. É claro que N é um subconjunto do núcleo de ψ. Então ψ induz um homomorfimo $\pi : F(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y})/N \longrightarrow G$ e pelo Teorema de Von Dyck existe um homomorfismo $\theta : G \longrightarrow F(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y})/N$ que envia $\varphi(x)$ a classes de x em $F(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y})/N$ para cada $x \in \mathbb{X}$. Então $\pi\theta$ e $\theta\pi$ são identidades de G e $F(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y})/N$ respectivamente.*

Teorema 1.8. *Duas apresentações de um grupo G podem ser obtidas uma da outra por uma sequência de transformações gerais de Tietze. No caso onde ambas as apresentações serem finitas, as transformações podem ser escolhidas simples.*

Teorema 1.9. *Seja G um grupo com duas apresentações $\langle \mathbb{X} | R\rangle$ e $\langle \mathbb{Y} | S\rangle$ com homomorfismos associados $\varphi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow G$ e $\psi : F(\mathbb{Y}) \longrightarrow G$. Se $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ e R são todos finitos, existe um subconjunto finito S_1 de S tal que $\langle \mathbb{Y} | S_1\rangle$ é uma apresentação de G com homomorfismo associado ψ.*

As demonstrações destes resultados não são difíceis, mas são longas e usam-se propriedades combinatoriais de grupos. Este Teorema implica o seguinte resultado.

Teorema 1.10. *Sejam H_1 um grupo finitamente gerado, H_2 um grupo finitamente apresentável e $H_1 \xrightarrow{\mu} H_2$ um homomorfismo sobrejetor de grupos. Então existe um subconjunto finito Y de H_1 tal que $Ker(\mu)$ é o fecho normal de Y em H_1, isto é, $Ker(\mu) = \langle Y^{H_1}\rangle$.*

Corolário 1.4. *Ser finitamente apresentável para um grupo não depende da escolha do conjunto finito de geradores.*

Demonstração (do corolário): Seja H_2 um grupo finitamente apresentável. $H_2 = \langle \mathbb{X} | R\rangle$, onde $\mathbb{X}$ é finito. Sejam $\mathbb{X}_1$ um subconjunto finito de H_2 tal que $H_2 = \langle \mathbb{X}_1\rangle$ e $H_1 = F(\mathbb{X}_1)$ onde $F(\mathbb{X}_1)$ é o grupo livre com base X_1. Então, pela propriedade universal de grupo livre, existe um único homomorfismo $\mu : H_1 \longrightarrow H_2$ cuja restição sobre $\mathbb{X}_1$ é a identidade.

Agora, pelo teorema anterior temos que existe um subconjunto finito Y de $Ker(\mu)$ tal que $Ker(\mu) = \langle Y^{H_1}\rangle$. E temos que $\langle \mathbb{X}_1 | Y\rangle$ é uma apresentação finita de H_2. □

1.3 Produto Livre

Definição 1.6. Sejam $\{G_\alpha\}$ uma família de grupos, G um grupo e $i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$ homomorfismos. Então, $(G, \{i_\alpha\})$ é chamado de produto livre dos grupos G_α se para todo grupo H e homomorfismos $f_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$ existe um único homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que $f_\alpha = fi_\alpha$ para todo α.

Proposição 1.11. *Se $(G, \{i_\alpha\})$ e $(H, \{j_\alpha\})$ são produtos livres do grupo G_α então, existe um único isomorfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que $fi_\alpha = j_\alpha$ para todo α.*

Demonstração: Pela definição de produto livre existe um homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que $fi_\alpha = j_\alpha$ para todo α, e também um homomorfismo $f' : H \longrightarrow G$ tal que $f'j_\alpha = i_\alpha$ para todo α. Desde que $f'fi_\alpha = i_\alpha$ para todo α, a unicidade do homomorfismo na definição, garante que $f'f$ é a identidade da aplicação em G, e analogamente temos que ff' é a identidade em H. □

Proposição 1.12. *Seja (G, i_α) produto livre do grupo G_α. Então:*

1. *i_α é um monomorfismo se, e somente se, existe um grupo H e homomorfismos $f_\beta : G_\beta \longrightarrow H$ para todo β tal que f_α é um monomorfismo.*
2. *i_α é um monomorfismo para todo α.*

Demonstração: (2) segue de (1) tomando $H = G_\alpha$ e f_α sendo a identidade e todos os f_β sendo trivial. (1) é assegurado porque existe um homomorfismo f com $f_\alpha = fi_\alpha$. □

Teorema 1.13. *Qualquer família de grupos G_α tem produto livre.*

Demonstração: Seja G_α grupo com apresentação $\langle \mathbb{X}_\alpha | R_\alpha \rangle$ e com o homomorfismo associado φ_α. Identificamos G_α com $\dfrac{F(\mathbb{X}_\alpha)}{\langle R_\alpha \rangle^{F(\mathbb{X}_\alpha)}}$ e φ_α com a projeção canônica. Podemos assumir que $\mathbb{X}_\alpha \cap \mathbb{X}_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$. Seja G o grupo $\dfrac{F(\bigcup \mathbb{X}_\alpha)}{\langle \bigcup R_\alpha \rangle^{F(\bigcup \mathbb{X}_\alpha)}}$ de modo que G tenha apresentação $\langle \bigcup \mathbb{X}_\alpha | \bigcup R_\alpha \rangle$ com o homomorfismo natural φ associado, isto é, com a projeção canônica. Pelo Teorema de von Dyck, a inclusão de $\mathbb{X}_\alpha$ em $\bigcup \mathbb{X}_\alpha$ induz um homomorfismo i_α de G_α em G. Mostraremos que $(G, \{i_\alpha\})$ é o produto livre.

Então, sejam $f_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$ homomorfismos. f_α induz um homomorfismo ψ_α de $F(\mathbb{X}_\alpha)$ em H tal que $\psi_\alpha(R_\alpha) = 1$, isto é, $\psi_\alpha(x) = f_\alpha(\varphi_\alpha(x)), \forall x \in \mathbb{X}_\alpha$. Então existe um homomorfismo ψ de $F(\bigcup \mathbb{X}_\alpha)$ em H tal que ψ restrito a $\mathbb{X}_\alpha$ é ψ_α. Desde que $\psi(\bigcup R_\alpha) = 1$, ψ induz um homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ com $f\varphi = \psi$. Também, para todo $x_\alpha \in \mathbb{X}_\alpha$, $fi_\alpha(\varphi_\alpha(x_\alpha)) = f\varphi(x_\alpha) = \psi(x_\alpha)$ por

definição de f e i_α, e $\psi(x_\alpha) = \psi_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha\varphi_\alpha(x_\alpha)$ por definição de ψ e ψ_α. Desde que $\varphi_\alpha(\mathbb{X}_\alpha)$ gera G_α, vemos que $f_\alpha = fi_\alpha$. Temos ainda que f é único pois G é gerado por $\bigcup i_\alpha(\varphi_\alpha(\mathbb{X}_\alpha))$. □

Teorema 1.14. (Forma Normal) *Seja $(G, \{i_\alpha\})$ o produto livre dos grupos G_α. Então:*

1. *cada i_α é um monomorfismo.*
2. *olhando i_α como a inclusão, qualquer elemento g de G pode ser unicamente escrito como $g_1g_2\dots g_n$, onde $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$ para algum α_i, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$ para $r < n$ ($n = 0$ corresponde a $g = 1$).*

Demonstração: Denotemos $i_\alpha(g_\alpha)$ por $\bar{g}_\alpha$ para $g_\alpha \in G_\alpha$.

(1) já foi provado, e provaremos (2) mostrando que qualquer $u \in G$ pode ser escrito unicamente como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$.

Desde que nossa construção mostra que $\bigcup i_\alpha G_\alpha$ gera G, qualquer u pode ser escrito como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ é permitido. Se $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ e $g_r \neq g_{r+1}^{-1}$ então podemos escrever u como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_{r-1}\bar{h}\bar{g}_{r+2} \dots \bar{g}_n$, onde $1 \neq h = g_rg_{r+1} \in G_{\alpha_r}$, enquanto que se $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ e $g_r = g_{r+1}^{-1}$ podemos escrever u como $\bar{g}_1\bar{g}_2 \dots \bar{g}_{r-1}\bar{g}_{r+2} \dots \bar{g}_n$. Por indução em n, existe pelo menos uma forma de escrever u da forma desejada.

Para provar a unicidade, seguiremos o método utilizado na demonstração do Teorema 1.3. Seja S o conjunto de todas as sequências $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$, em particular, a sequência vazia $(\ )$ está em S.

Tomemos $g_\alpha \in G_\alpha \setminus \{1\}$. Uma aplicação de S em S é definida aplicando:

$(g_1, \dots, g_n)$ a $(g_\alpha, g_1, \dots, g_n)$ se $\alpha \neq \alpha_1$

$(g_1, \dots, g_n)$ a $(g_\alpha g_1, g_2, \dots, g_n)$ se $\alpha = \alpha_1$ e $g_\alpha g_1 \neq 1$

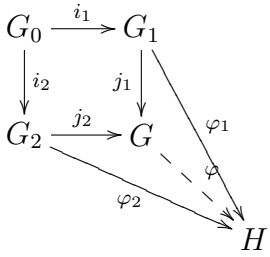
$(g_1, \dots, g_n)$ a $(g_2, \dots, g_n)$ se $\alpha = \alpha_1$ e $g_\alpha g_1 = 1$

Isto define uma função φ_α de G_α para o conjunto das aplicações de S nele mesmo (definindo $\varphi_\alpha(1)$ como sendo a identidade), onde a operação do conjunto de aplicações de S em S é composição. φ_α preserva a multiplicação. Isto implica que φ_α aplica em $Sym(S)$, o grupo das permutações de S, desde que $\varphi_\alpha(g_\alpha)$ tem inverso $\varphi_\alpha(g_\alpha^{-1})$.

Seja $\varphi : G \longrightarrow Sym(S)$ o homomorfismo tal que $\varphi_\alpha = \varphi i_\alpha$ para todo α. Tomamos $u \in G$ e o escrevemos como $h_1h_2 \dots h_m$, com $h_i \neq 1$, $h_i \in G_{\alpha_i}$, e $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Facilmente se prova que $\varphi(u)$ aplicado na sequência vazia nos dá a sequência $(h_1, h_2, \dots, h_m)$, e então $h_1, h_2, \dots, h_m$ são unicamente determinados por u. □

1.4 "Push-out"e Produto Livre Amalgamado

Definição 1.7. Sejam G_0, G_1 e G_2 grupos, $i_1 : G_0 \longrightarrow G_1$ e $i_2 : G_0 \longrightarrow G_2$ homomorfismos. Suponha que exista um grupo G munido com $j_k : G_k \longrightarrow G$ homomorfismos tais que $j_1 i_1 = j_2 i_2$ e para todo grupo H munido com homomorfismos $\varphi_k : G_k \longrightarrow H$ tais que $\varphi_1 i_1 = \varphi_2 i_2$ existe um único homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi j_k = \varphi_k$, $k = 1, 2$. Dizemos que G é "push-out"de G_0, G_1, G_2, i_1 e i_2.



Teorema 1.15. *Para quaisquer G_0, G_1, G_2, i_1 e i_2, existe o "push-out".*

Demonstração: Para $r = 1, 2$, seja G_r grupo com apresentação $\langle \mathbb{X}_r | R_r \rangle$, onde ϑ_r é o homomorfismo associado e $\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2 = \emptyset$. Identificamos G_r com $\dfrac{F(\mathbb{X}_r)}{\langle R_r \rangle^{F(\mathbb{X}_r)}}$ e ϑ_r com projeção canônica. Seja Y um conjunto de geradores de G_0, e escolha para todo $y \in Y$, $w_{yr} \in F(\mathbb{X}_r)$ tal que $i_r(y) = \vartheta_r(w_{yr})$. Seja G o grupo com apresentação $\langle \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2 | R_1, R_2, \{w_{y1}^{-1} w_{y2}\}_{y \in Y} \rangle$ com homomorfismo associado π. Então, temos a aplicação natural j_r de G_r em G, induzida pela inclusão de $\mathbb{X}_r$ em $\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$, e G é gerado por $j_1(G_1) \cup j_2(G_2)$. Portanto, existe no máximo um homomorfismo de G com específicos valores em $j_1(G_1) \cup j_2(G_2)$.

Suponha que tenhamos os homomorfismos φ_r de G_r ao grupo H tais que $\varphi_1 i_1 = \varphi_2 i_2$. Então φ_r definem homomorfismos ψ_r de $F(\mathbb{X}_r)$ a H que é trivial em R_r. Seja $\mu : F(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) \longrightarrow H$ o homomorfismo definido por $\mu|_{\mathbb{X}_r} = \psi_r|_{\mathbb{X}_r}$. Pelo Teorema 1.7 existe $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi\pi = \mu$, que por construção satisfaz $\varphi j_r = \varphi_r$. □

Definição 1.8. Quando i_1 e i_2 são injetivas, o "push-out"G é chamado de produto livre amalgamado de G_1 e G_2 com amálgama G_0.

Neste caso, geralmente olhamos G_0 como um subgrupo de G_1 e G_2, e i_1 e i_2 como as inclusões. Denotamos G por $G_1 *_{G_O} G_2$.

Definição 1.9. Dizemos que um conjunto S é transversal a esquerda de um subgrupo C em A se S contém exatamente um membro de cada classe lateral aC, isto é, $A = \overset{\circ}{\bigcup_{a \in S}} aC$.

Podemos provar o Teorema da Forma Normal usando os conjuntos transversais S e T.

Teorema 1.16. (Forma Normal) *Sejam G o produto livre amalgamado de A, B com amálgama C, $i_A : C \longrightarrow A$ e $i_B : C \longrightarrow B$ são inclusões e, S e T transversais a esquerda de C em A e B respectivamente, com $1 \in S \cap T$. Considerando $j_A : A \longrightarrow G$ e $j_B : B \longrightarrow G$ homomorfismos da definição do "push-out"($G_1 = A, G_2 = B, j_1 = j_A, j_2 = j_B, i_1 = i_A$ e $i_2 = i_B$), temos:*

1. *j_A e j_B são monomorfismos.*
2. *$j_A(A) \cap j_B(B) = j_A(C) = j_B(C)$.*
3. *Considerando j_A e j_B inclusões, qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como $u_1 u_2 \dots u_n c$, onde $n \geq 0, c \in C$ e $u_1, u_2, \dots, u_n$ vem alternadamente de $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$.*

Demonstração: Pela definição de produto livre amalgamado, sabemos que a restrição de j_A sobre C é igual à restrição de j_B sobre C. Também considerando j_A e j_B como inclusões, uma vez que a parte (1) é demonstrada, (2) pode ser expresso como $A \cap B = C$. Então (2) segue da unicidade em (3).

Denotemos $j_A(a)$ por $\bar{a}$ e $j_B(b)$ por $\bar{b}$. Como no Teorema da Forma Normal para produto livre, para provar (1) e (3) é suficiente mostrar que para qualquer $g \in A *_C B$ existem únicos $u_1, u_2, \dots, u_n$ e c com $n \geq 0$, $c \in C$ e $u_1, u_2, \dots, u_n$ vindos alternadamente de $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$ tal que $g = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_n \bar{c}$. Agora qualquer g pode ser escrito como $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_k$, onde $g_i \in A \cup B$ para algum k. Se g_i e g_{i+1} pertencem ambos a A ou ambos a B, podemos expressar g como $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_{i-1} \bar{h} \bar{g}_{i+2} \dots \bar{g}_k$, onde $h = g_i g_{i+1}$. Continuando desta forma, vemos que g pode ser expressa ou como $\bar{c}$ ou como $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_n$, onde $g_1, g_2, \dots, g_n$ são alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$.

Indutivamente, escrevamos $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \dots \bar{g}_{n-1}$ como $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_{n-1} \bar{c}$, onde $u_i \in (S \cup T) \setminus \{1\}$, $u_1 \in g_1 C$ e $u_i \in C g_i C$ para cada $i > 1$, e que u_i vem alternadamente de $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$. Então, $g = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} \bar{c} \bar{g}_n = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} \bar{h}$, onde $h = c g_n$, e ainda $g = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} \bar{u}_n \bar{d}$, onde $h = u_n d$ com $u_n \in S \cup T$.

Desde que $u_n d = c g_n$, temos que $u_n \in C g_n C$, que é o desejado. Também temos que $u_n \neq 1$ pois $g_n \notin C$. Logo temos provado que cada elemento de G pode ser escrito na forma desejada.

Agora provemos a unicidade pelo método utilizado no Teorema da Forma Normal para grupos livres. Seja $\mathbb{X}$ o conjunto de todas as sequências $(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$ com $n \geq 0, c \in C$ e $u_1, u_2, \dots, u_n$

alternadamente em $S \setminus \{1\}$ e $T \setminus \{1\}$. Definimos um homomorfismo φ de G em $Sym(\mathbb{X})$ tal que, quando g é expresso como $\bar{u}_1\bar{u}_2 \dots \bar{u}_n\bar{c}$ da forma desejada, a ação de $\varphi(g)$ na seguência (1) é a sequência $(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$. Isto provará a unicidade da representação de g. Observamos que o grupo de permutações $Sym(\mathbb{X})$ atua sobre $\mathbb{X}$ à direita.

Pela definição de produto livre amalgamado, para construir φ basta definir $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ para $a \in A$ e $b \in B$ com as propriedades que

$\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2),\ \forall a_1, a_2 \in A$

$\varphi(b_1b_2) = \varphi(b_1)\varphi(b_2),\ \forall b_1, b_2 \in B$

e que as definições de φ em A e em B concordam-se em C (então é automaticamente aplicação de A em $Sym(\mathbb{X})$, desde que $\varphi(a^{-1})$ é o inverso de $\varphi(a)$). Definimos φ em A, onde a ação de $\varphi(a)$ em $(u_1, u_2, \dots, u_n, c)$ é:

$(u_1, u_2, \dots, u_n, v, d)$ se $u_n \notin A, ca = vd$ com $v \in S \setminus \{1\}$ e $d \in C$,

$(u_1, u_2, \dots, u_n, d)$ se $u_n \notin A$ e $ca = d$ com $d \in C$ (isto é, se $a \in C$),

$(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v, d)$ se $u_n \in A$ e $u_nca = vd$ com $v \in S \setminus \{1\}$ e $d \in C$,

$(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, d)$ se $u_n \in A$ e $u_nca = d$ com $d \in C$.

Não é difícil provar que $\varphi(a'a) = \varphi(a')\varphi(a)$. Definimos φ em B de forma semelhante, trocando A por B. E também é fácil verificar que as definições de φ em A e em B concordam-se em C. □

Pela inconveniência de trabalhar com transversais, o seguinte teorema é mais utilizado:

Teorema 1.17. (Forma Reduzida) *Seja G o produto livre amalgamado de A e B com amálgama C, $i_A : C \longrightarrow A$ e $i_B : C \longrightarrow B$. Considerando $j_A : A \longrightarrow G$ e $j_B : B \longrightarrow G$ inclusões, temos:*

1. *qualquer $w \in G \setminus C$ pode ser escrita como $g_1g_2 \dots g_n$, onde $n \geq 1$ e g_i vem alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$.*

2. *se também podemos escrever w como $h_1h_2 \dots h_m$ com h_j alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$ então, $m = n$ e $h_1 \in g_1C$ e $h_i \in Cg_iC$ para todos os outros i.*

3. *se $n > 1$ então, $w \notin A \cup B$.*

4. *qualquer produto $g_1g_2 \dots g_n$, onde $n \geq 1$ e g_i vem alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$ não pode estar em C.*

Demonstração: O item (1) já foi provado anteriormente no Teorema da Forma Normal. Mostramos também que se w é expresso como em (1) então, sua forma normal é $u_1u_2 \dots u_nc$ onde $u_1 \in g_1C$ e $u_i \in Cg_iC$ para todos os outros i. Então (2) segue devido à unicidade da forma normal. O Teorema da Forma Normal ainda nos diz que tal produto não pode estar em C e pode pertencer somente a $A \cup B$ se $n = 1$. □

Proposição 1.18. *Sejam A e B subgrupos de um grupo G e $C = A \cap B$. Então, $G = A *_C B$ se, e somente se, todo elemento de $G \setminus C$ pode ser escrito como um produto $g_1g_2 \dots g_n$ com g_i alternadamente de $A \setminus C$ e $B \setminus C$ e nenhum deste produto é igual a 1.*

Demonstração: Uma das inclusões vem da propriedade de produto livre amalgamado.

Agora seja G com esta propriedade. As inclusões de A e B em G nos dá um homomorfismo de $A *_C B$ em G que é injetora e sobrejetora pelas condições dadas. Logo $G = A *_C B$. □

Capítulo 2

Topologia Algébrica

Neste capítulo apresentaremos alguns fatos básicos da topologia algébrica como o grupo fundamental e espaços de recobrimento. Iniciaremos dando as definições básica de topologia como homotopia entre aplicações contínuas gerais e depois restringiremos a caminhos fechados para definir grupo fundamental.

Alguns dos teoremas que trataremos aqui serão de grande importância no desenvolvimento do capítulo 3, como por exemplo o teorema de Seifert-Van Kampen ou o teorema que nos dará a caracterização do grupo fundamental do Complexo de Cayley Γ.

2.1 Grupo fundamental

Neste capítulo, X, Y e Z são espaços topológicos e I estará significando o intervalo compacto $[0, 1]$.

Definição 2.1. Duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$ são *homotópicas* quando existe uma aplicação contínua

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se uma *homotopia entre f e g* e denotaremos neste caso por $H : f \simeq g$ ou simplesmente $f \simeq g$.

Definição 2.2. Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ chama-se *equivalência homotópica* quando existe $g : Y \longrightarrow X$ contínua tal que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. Diz-se então, que g é um *inverso homotópico de f* e que os espaços topológicos X e Y tem o *mesmo tipo de homotopia*.

Definição 2.3. X é *contrátil* quando tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Citaremos agora algumas propriedades básicas de homotopias, mas sem provar pois esse não é o nosso objetivo principal. Temos que:

1. A relação de homotopia $f \simeq g$ é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y.

2. Sejam $f, f' : X \longrightarrow Y$ e $g, g' : Y \longrightarrow Z$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ então, $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

3. X é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade $id : X \longrightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante $X \longrightarrow X$, isto é, uma aplicação com imagem num ponto.

4. Um espaço contrátil X é conexo por caminhos.

5. Se X ou Y é contrátil então, toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ é homotópica a uma constante.

A prova pode ser encontrada no capítulo 1 em [8] ou em qualquer livro de topologia.

Vejamos agora um caso particular de homotopia, a homotopia de caminhos fechados baseados num ponto $x_0 \in X$.

Definição 2.4. Dizemos que uma aplicação contínua $\alpha : I \longrightarrow X$ é um *caminho*. Dizemos que α é um *caminho fechado baseado no ponto* $x_0 \in X$ se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Dizemos também *caminho fechado com ponto básico* x_0 ou *caminho fechado com ponto base* x_0 para caminho fechado baseado no ponto x_0.

Definição 2.5. Sejam $a, b, c \in X$, $\alpha : I \longrightarrow X$ caminho entre a e b, e $\beta : I \longrightarrow X$ caminho entre b e c. Definimos o *caminho* $\alpha * \beta$ *entre* a *e* c por:

$$(\alpha * \beta)(t) = \alpha(2t) \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$(\alpha * \beta)(t) = \beta(2t-1) \qquad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

Definição 2.6. Os caminhos fechados $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ baseados no ponto $x_0 \in X$ (ou seja, $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ e $\beta(0) = \beta(1) = x_0$) são *homotópicos com extremos fixos* quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ tais que $H(s,0) = \alpha(s), H(s,1) = \beta(s), H(0,t) = H(1,t) = x_0$ para quaisquer $s, t \in I$. Como temos que a homotopia é uma relação de equivalência, denotemos por $\Pi_1(X, x_0)$ o conjunto das classes de equivalência no conjunto dos caminhos fechados em X baseadas

no ponto x_0. O conjunto $\Pi_1(X, x_0)$ munido com a operação $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ é um grupo chamado de *grupo fundamental de X com ponto base x_0*, onde o elemento inverso de $[\alpha]$ é $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$, com $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$.

Exemplo 2.1. O grupo fundamental da esfera S^1 baseado no ponto x_0 é isomorfo ao grupo dos números inteiros $\mathbb{Z}$, isto é, $\Pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Proposição 2.1. *Cada classe de homotopia γ de caminhos que ligam x_0 a x_1 induz um isomorfismo $\bar{\gamma} : \Pi_1(X, x_1) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$, dado por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, $\alpha \in \Pi_1(X, x_1)$*

Demonstração: Seja γ uma classe de homotopia de caminhos que ligam x_0 a x_1. Se $\alpha \in \Pi_1(X, x_1)$ então $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in \Pi_1(X, x_0)$. Além disso $\gamma(\alpha\beta)\gamma^{-1} = (\gamma\alpha\gamma^{-1})(\gamma\beta\gamma^{-1})$. Logo,$\bar{\gamma}(\alpha)$ definido por $\gamma\alpha\gamma^{-1}$, é um homomorfismo. Como $\alpha \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma$ é um inverso bilateral para $\bar{\gamma}$, concluímos que $\bar{\gamma}$ é um isomorfismo. □

Corolário 2.1. *Se X é conexo por caminhos então, para quaisquer pontos básicos $x_0, x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\Pi_1(X, x_0)$ e $\Pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. Neste caso, denotamos o grupo fundamental de X por $\Pi_1(X)$.*

Uma aplicação contínua $h : X \longrightarrow Y$ induz um homomorfismo $h_\# : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0)$, $y_0 = h(x_0)$, definido por $h_\#(\alpha) = [h \circ f]$, onde $\alpha = [f]$.

Proposição 2.2. *Se dois espaços topológicos conexos por caminhos X e Y, tem o mesmo tipo de homotopia então seus grupos fundamentais são isomorfos.*

Demonstração: Como X e Y tem o mesmo tipo de homotopia então, existem funções contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ tais que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. Então, temos os homomorfismos induzidos $(g \circ f)_\#$ e $(f \circ g)_\#$. Usando que a induzida da identidade é a identidade e que a induzida da composição é a composição das induzidas, facilmente provamos que $id = (id_X)_\# = (g \circ f)_\# = (g)_\# \circ (f)_\#$ e $id = (id_Y)_\# = (f \circ g)_\# = (f)_\# \circ (g)_\#$ e portanto, $\Pi_1(X) \cong \Pi_1(Y)$. □

Corolário 2.2. *O grupo fundamental de um espaço contrátil possui um único elemento, o elemento neutro.*

Definição 2.7. Um espaço topológico X é dito *simplesmente conexo* quando é conexo por caminhos e tem-se $\Pi_1(X, x_0) = \{1\}$ para um $x_0 \in X$ (então para qualquer $x_0 \in X$).

Observamos que todo espaço contrátil é simplesmente conexo.

2.2 Espaços de Recobrimento

Definição 2.8. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é dita *localmente injetiva* se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que $f|_U$ é injetiva.

Definição 2.9. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Z \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Um *levantamento de g (relativamente a f)* é uma aplicação contínua $\tilde{g} : Z \longrightarrow X$ tal que $f \circ \tilde{g} = g$.

Proposição 2.3. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua, localmente injetiva, definida num espaço de Hausdorff X. Se Z é conexo e $g : Z \longrightarrow Y$ é contínua então, dois levantamentos $\tilde{g}, \hat{g} : Z \longrightarrow X$ de g, que coincidem num ponto $z_0 \in Z$ são iguais.*

Demonstração: O conjunto $A = \{z \in Z; \tilde{g}(z) = \hat{g}(z)\}$ não é vazio pois $z_0 \in A$. Como X é um espaço de Hausdorff, A é fechado em Z. Para concluir que $\tilde{g} = \hat{g}$, basta então provar que A é aberto em Z. Seja então, $a \in A$. Existe uma vizinhança V de $\tilde{g}(a) = \hat{g}(a)$ tal que $f|_V$ é injetiva. Pela continuidade de $\tilde{g}$ e $\hat{g}$, existe uma vizinhança U de a com $\tilde{g}(U) \subset V$ e $\hat{g}(U) \subset V$. Então, para todo $z \in U$ temos $f\tilde{g}(z) = g(z) = f\hat{g}(z)$ e, pela injetividade de f em V, $\tilde{g}(z) = \hat{g}(z)$. Logo $U \subset A$. □

Definição 2.10. Uma aplicação $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ chama-se uma *aplicação de recobrimento* quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ é uma reunião de abertos U_α, dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V. Cada aberto V desse tipo chama-se uma *vizinhança distinguida*. O espaço $\tilde{X}$ chama-se um *espaço de recobrimento de X* e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ chama-se a *fibra sobre x*. Às vezes, X chama-se a *base*.

Exemplo 2.2. A aplicação $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1, p(t) = (\cos t, sen\, t)$ é recobrimento.

Quando $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um recobrimento, a condição de que $\tilde{X}$ seja Hausdorff pode ser omitida da Proposição 2.3. Então, temos:

Proposição 2.4. *Sejam $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ uma aplicação de recobrimento e Z um espaço conexo. Se $\tilde{g}, \hat{g} : Z \longrightarrow \tilde{X}$ são tais que $p \circ \tilde{g} = p \circ \hat{g} = g$, então ou $\tilde{g}(z) \neq \hat{g}(z)$ para todo $z \in Z$ ou então, $\tilde{g} = \hat{g}$.*

Demonstração: Como p é localmente injetiva, usamos a demonstração da Proposição 2.3 para concluir que o conjunto $A = \{z \in Z; \tilde{g}(z) = \hat{g}(z)\}$ é aberto. Para mostrar que A é fechado, sem usar que $\tilde{X}$ é um espaço de Hausdorff, seja $z \in Z$ tal que $\tilde{g}(z) \neq \hat{g}(z)$. Estes pontos se aplicam por p no

mesmo ponto $g(z) \in X$. Seja V uma vizinhança distinguida de $g(z)$. Então, $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, reunião disjunta de abertos que se aplicam homeomorficamente por p sobre V. Existem portanto $\alpha \neq \beta$ tais que $\tilde{g}(z) \in U_\alpha$ e $\hat{g}(z) \in U_\beta$. Tomando uma vizinhança aberta $W \ni z$ em Z tal que $\tilde{g}(W) \subset U_\alpha$ e $\hat{g}(W) \subset U_\beta$ vemos que $\tilde{g}(w) \neq \hat{g}(w)$ para todo $w \in W$. Logo $W \subseteq Z \setminus A$ e assim $Z \setminus A$ é aberto e A é fechado. □

Dada uma aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$, sejam $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $x = p(\tilde{x})$. Usaremos a notação $H(\tilde{x})$ para representar a imagem do homomorfismo $p_\# : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \Pi_1(X, x)$, induzido pela projeção de recobrimento p.

Se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo então, $H(\tilde{x}) = \{1\}$ para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Teorema 2.5. *Sejam $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento, $a, b : I \longrightarrow X$ caminhos que começam no mesmo ponto x e terminam no mesmo ponto y, e $\tilde{a}, \tilde{b} : I \longrightarrow \tilde{X}$ seus levantamentos a partir de um ponto $\tilde{x} \in \tilde{X}$, isto é, $\tilde{a}(0) = \tilde{x} = \tilde{b}(0)$. A fim de que $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$, é necessário e suficiente que $[ab^{-1}] \in H(\tilde{x})$.*

Demonstração: Supondo que $[ab^{-1}] \in H(\tilde{x})$, o levantamento $\tilde{c}$ do caminho ab^{-1} a partir do ponto $\tilde{x}$ é fechado. Os caminhos $\tilde{a}, \tilde{b} : I \longrightarrow \tilde{X}$, definidos por $\tilde{a}(s) = \tilde{c}(s/2)$ e $\tilde{b}(s) = \tilde{c}(1 - s/2)$, começam no ponto $\tilde{x}$, terminam no mesmo ponto $\tilde{c}(1/2)$ e são levantamentos de a e b respectivamente. A recíproca é clara. □

Corolário 2.3. *Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento, com $\tilde{X}$ conexo por caminhos. Fixado um ponto $x_0 \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Para algum $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, o subgrupo $H(\tilde{x}_0) \subset \Pi_1(X, x_0)$ é normal;*
2. *Os subgrupos $H(\tilde{x}) \subset \Pi_1(X, x_0)$, quando $\tilde{x}$ percorre $p^{-1}(x_0)$, são normais e iguais entre si;*
3. *Dado um caminho fechado $a : I \longrightarrow X$, com ponto básico x_0, ou todos os levantamentos de a a partir dos pontos $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ são fechados ou nenhum é.*

Demonstração: Tendo em vista o teorema acima, a condição (3) equivale a dizer que $[a] \in H(\tilde{x}_0)$ se, e somente se, $[a] \in H(\tilde{x})$ para todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Mas isto significa dizer que os grupos $H(\tilde{x})$ são todos iguais, quando $\tilde{x}$ varia na fibra $p^{-1}(x_0)$. Mas esses grupos constituem uma classe de conjugação, logo são iguais se, e somente se, um deles é normal, e portanto todos são. □

Definição 2.11. Quando $\tilde{X}$ é conexo por caminhos e uma das condições do corolário acima é satisfeita, dizemos que $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é *um recobrimento regular*.

2.2.1 Ações Propriamente Descontínuas de Grupos

Sabemos que o conjunto dos homeomorfismos de um espaço topológico X é um grupo em relação à operação composição. Um subgrupo G desse grupo chama-se grupo de homeomorfismos de X.

A órbita de um ponto $x \in X$ relativamente a um grupo de homeomorfismos G é o conjunto $G \cdot x = \{g(x) | g \in G\}$. A relação "existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$"é uma relação de equivalência entre pontos $x, y \in X$. A classe de equivalência de um ponto $x \in X$ segundo essa relação é a sua órbita $G \cdot x$. Por simplicidade de notação indicaremos $g(x)$ apenas por gx.

Definição 2.12. Um grupo G de homeomorfismos de X diz-se *propriamente descontínuo* quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que, para todo $g \in G$ diferente da identidade, tem-se $g \cdot V \cap V = \emptyset$. Equivalentemente: se $g \neq h$ em G então, $g \cdot V \cap h \cdot V = \emptyset$. Diremos que V é uma vizinhança conveniente de x.

Se G é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de um espaço X então, para todo $g \neq id_X$ em G e todo $x \in X$ tem-se $gx \neq x$, ou seja, a menos da identidade, os homeomorfismos pertencentes a G não possuem pontos fixos. Diz-se também que G *opera livremente em* X.

Dado um grupo G de homeomorfismos de X, indicamos por X/G o espaço quociente de X pela relação de equivalência cujas classes são as órbitas $G \cdot x, x \in X$. A projeção canônica $p : X \longrightarrow X/G$ associa a cada ponto $x \in X$ sua órbita $p(x) = G \cdot x$. A topologia de X/G tem como abertos os conjuntos $A \subset X/G$ tais que $p^{-1}(A)$ é aberto em X. Assim, os abertos de X/G tem a forma $p(U)$ onde $U \subset X$ é um aberto que é união de órbitas.

A aplicação $p : X \longrightarrow X/G$ é aberta pois se $V \subset X$ é aberto então $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$ é aberto em X.

Teorema 2.6. *Seja G um grupo de homeomorfismos operando livremente no espaço X. Se G é propriamente descontínuo então, a projeção canônica $p : X \longrightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração: Sejam $y = p(x)$ um ponto arbitrário de X/G e $U \ni x$ uma vizinhança conveniente. Como p é uma aplicação aberta, $V = p(U)$ é uma vizinhança aberta de y. Temos que $p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ é reunião de abertos, dois a dois disjuntos (pois U é conveniente), restrita a cada um dos quais a aplicação contínua aberta p é injetiva, logo é um homeomorfismo sobre $p(g \cdot U) = p(U) = V$. Logo p é recobrimento. □

Quando G é um grupo de homeomorfismos que age propriamente descontínuo sobre o espaço topológico X, conexo por caminhos, a aplicação quociente $p : X \longrightarrow X/G$ é um recobrimento regular.

Teorema 2.7. *Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento, onde o espaço X é conexo por caminhos. Sejam Z um espaço conexo e localmente conexo por caminhos (logo conexo por caminhos) e $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ uma aplicação contínua. Dado $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, a fim de que f possua um levantamento $\tilde{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, é necessário e suficiente que $f_{\#}(\Pi_1(Z, z_0)) \subset H(\tilde{x}_0)$.*

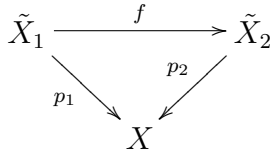
A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 153 no livro [8].

Corolário 2.4. *Sejam X conexo por caminhos e Z simplesmente conexo. Toda aplicação $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ admite um levantamento $\tilde{f} : (\tilde{Z}, \tilde{z}_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, onde $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ é escolhido arbitrariamente.*

Por este corolário, podemos ver que todo caminho pode ser levantado.

2.2.2 Homomorfismo entre Recobrimentos

Sejam $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \longrightarrow X$ dois recobrimentos com a mesma base X. Um *homomorfismo* entre eles é uma aplicação contínua $f : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ f = p_1$, o que torna comutativo o diagrama abaixo:



Diz-se que $f : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ é um isomorfismo quando f é um homeomorfismo tal que $p_2 \circ f = p_1$. Então $f^{-1} : \tilde{X}_2 \longrightarrow \tilde{X}_1$ também é um isomorfismo. Neste caso, os recobrimentos p_1 e p_2 dizem-se *isomorfos*.

Um *endomorfismo de um recobrimento* é um homomorfismo do recobrimento em si mesmo. Quando o endomorfismo f for um homeomorfismo de $\tilde{X}$ sobre si mesmo, dizemos que f é um *automorfismo*. O conjunto $G(\tilde{X}|X)$ dos automorfismos de recobrimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ constitui um grupo relativamente à composição de aplicações.

O grupo dos automorfismo do recobrimento $p : X \longrightarrow X/G$ é exatamente o grupo G. Com efeito, se $g \in G$ então para todo $x \in X$, vale $p(gx) = G \cdot gx = G \cdot x = p(x)$, logo $p \circ g = p$ e

daí $g \in G(X|X/G)$. Reciprocamente, dado um automorfismo $f : X \longrightarrow X$, fixemos $x_0 \in X$ e seja $x_1 = f(x_0)$. Então x_1 pertence à mesma fibra que x_0, logo existe $g \in G$ com $gx_0 = x_1$. Portanto f e g são levantamentos de p que coincidem no ponto x_0. Como X é conexo, temos $f = g$, donde $f \in G$.

Teorema 2.8. *Sejam $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \longrightarrow X$ recobrimentos com a mesma base X. Se $\tilde{X}_2$ é conexo e localmente conexo por caminhos, todo homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ é um recobrimento. Em particular, f é sobrejetivo.*

A demonstração pode ser encontrada no Capítulo 5, Proposição 7 no livro [8].

No próximo teorema, temos os recobrimentos $p_i : \tilde{X}_i \longrightarrow X$, $i = 1, 2$. Dados os pontos $\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$ com $p_i(\tilde{x}_i) = x_0$, indicaremos com $H_i(\tilde{x}_i)$ os subgrupos de $\Pi_1(X, x_0)$ que são imagens dos homomorfismos induzidos $(p_i)_\# : \Pi_1(\tilde{X}_i, \tilde{x}_i) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0), i = 1, 2$.

Teorema 2.9. *Sejam $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ conexos e localmente conexos por caminhos. A fim de que exista um homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ com $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ é necessário e suficiente que $H_1(\tilde{x}_1) \subset H_2(\tilde{x}_2)$.*

Demonstração: Segue-se do Teorema 2.7, pois um homomorfismo f é um levantamento de p_1 relativamente ao recobrimento p_2. □

Corolário 2.5. *Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento, cujo domínio $\tilde{X}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento $q : \tilde{Y} \longrightarrow X$ com $\tilde{Y}$ conexo, existe um recobrimento $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ tal que $q \circ f = p$*

Corolário 2.6. *Nas hipóteses do Teorema 2.9, o homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$, com $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ é um isomorfismo se, e somente se, $H_1(\tilde{x}_1) = H_2(\tilde{x}_2)$.*

Por enquanto vamos supor $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ recobrimento e até o fim desta seção iremos supor $\tilde{X}$ conexo e localmente conexo por caminhos. Sejam $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Como vimos, existe um endomorfismo $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ se, e somente se, $H(\tilde{x}_0) \subset H(\tilde{x}_1)$. Sabemos também que $H(\tilde{x}_1) = \alpha^{-1}H(\tilde{x}_0)\alpha$, onde $\alpha \in \Pi_1(X, x_0)$ é a classe de homotopia de $a = p \circ \tilde{a}$, onde o caminho $\tilde{a}$ começa em $\tilde{x}_0$ e termina em $\tilde{x}_1$, no espaço $\tilde{X}$. Então dados dois pontos quaisquer $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ situados na mesma fibra $p^{-1}(x_0)$, existe um automorfismo $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ se, e somente se, $H(\tilde{x}_0) = H(\tilde{x}_1)$.

Se o recobrimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é regular, segue-se então que, dados dois pontos quaisquer $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ situados na mesma fibra $p^{-1}(x_0)$, existe um endomorfismo $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Além disso, todo endomorfismo de um recobrimento regular é um automorfismo. Então o grupo $G(\tilde{X}|X)$ dos automorfismos de um recobrimento regular atua transitivamente nas fibras.

O normalizador do subgrupo K num grupo G é o conjunto $N(K)$ formado pelos elementos $g \in G$ tais que $g^{-1}Kg = K$. O normalizador $N(K)$ é o maior subgrupo de G que contém K como subgrupo normal. K é um subgrupo normal do grupo G se, e somente se, $N(K) = G$.

Ainda temos que o grupo fundamental $\Pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente à direita na fibra $p^{-1}(x_0)$ e a atuação de $\alpha \in \Pi_1(X, x_0)$ sobre $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ é representado por $\tilde{x} \cdot \alpha$ e $\tilde{x} \cdot \alpha = \tilde{a}(1)$ onde $\tilde{a} : I \longrightarrow \tilde{X}$ é o levantamento, a partir de $\tilde{x}$, de um caminho $a : I \longrightarrow X$ tal que $\alpha = [a]$.

Em termo destas noções, a existência de um endomorfismo $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ com $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, onde $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$, equivalente à afirmação de que $H(\tilde{x}_0) \subset \alpha^{-1}H(\tilde{x}_0)\alpha$. Além disso, f é um automorfismo se, e somente se, $H(\tilde{x}_0) = \alpha^{-1}H(\tilde{x}_0)\alpha$, ou seja, se, e somente se, $\alpha \in N(H(\tilde{x}_0))$.

Em particular, para cada $\alpha \in N(H(\tilde{x}_0))$, existe um único automorfismo $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$.

Com estes dados temos:

Lema 2.10. *Seja $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ um endomorfismo do recobrimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$. Para quaisquer $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\alpha \in \Pi_1(X, p(\tilde{x}))$, vale $f(\tilde{x} \cdot \alpha) = f(\tilde{x}) \cdot \alpha$.*

Demonstração: Sejam $\alpha = [a]$ e $\tilde{a}$ um levantamento de a começando no ponto $\tilde{x}$. Então $\tilde{x} \cdot \alpha = \tilde{a}(1)$, donde $f(\tilde{x} \cdot \alpha) = f(\tilde{a}(1))$. Por outro lado, $f \circ \tilde{a}$ é um levantamento de a que começa no ponto $f(\tilde{x})$. Logo $f(\tilde{x}) \cdot \alpha = (f \circ \tilde{a})(1) = f(\tilde{a}(1)) = f(\tilde{x} \cdot \alpha)$. □

Teorema 2.11. *Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento com $\tilde{X}$ conexo e localmente conexo por caminhos. Para cada $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, existe um isomorfismo de grupos $G(\tilde{X}|X) \cong N(H(\tilde{x}_0))/H(\tilde{x}_0)$, onde $N(H(\tilde{x}_0))$ é o normalizador do subgrupo $H(\tilde{x}_0)$ em $\Pi_1(X, x_0)$, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.*

Demonstração: Definimos uma aplicação $\varphi : N(H(\tilde{x}_0)) \longrightarrow G(\tilde{X}|X)$ do seguinte modo: para cada $\alpha \in N(H(\tilde{x}_0))$, $\varphi(\alpha) = f$ onde $f : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ é o automorfismo tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$. Se $\varphi(\alpha) = f$ e $\varphi(\beta) = g$, temos $\tilde{x}_0 \cdot \alpha = f(\tilde{x}_0)$ e $\tilde{x}_0 \cdot \beta = g(\tilde{x}_0)$. Pelo lema acima,

$$(f \circ g)(\tilde{x}_0) = f(g(\tilde{x}_0)) = f(\tilde{x}_0 \cdot \beta) = f(\tilde{x}_0) \cdot \beta = \tilde{x}_0 \cdot \alpha\beta.$$

Portanto $f \circ g = \varphi(\alpha\beta)$ e φ é um homomorfismo de grupos. Tem-se $\varphi(\alpha) = id_{\tilde{X}}$, ou seja $\tilde{x}_0 \cdot \alpha = \tilde{x}_0$, se, e somente se, $\alpha \in H(\tilde{x}_0)$. Assim, $H(\tilde{x}_0)$ é o núcleo de φ. Afirmamos que φ é sobrejetivo. Com efeito, dado $f \in G(\tilde{X}|X)$, seja $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Como $\Pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente em $p^{-1}(x_0)$, existe $\alpha \in \Pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$. Sendo f um automorfismo, temos

$\alpha \in N(H(\tilde{x}_0))$. Como $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$, segue-se que $f = \varphi(\alpha)$. O teorema do Isomorfismo para grupos nos fornece, por passagem ao quociente, um isomorfismo $\overline{\varphi} : N(H(\tilde{x}_0))/H(\tilde{x}_0) \longrightarrow G(\tilde{X}|X)$. □

Corolário 2.7. *Se $\tilde{X}$ é conexo e localmente conexo por caminhos e o recobrimento é regular, tem-se um isomorfismo $G(\tilde{X}|X) \cong \Pi_1(X, x_0)/H(\tilde{x}_0)$ para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

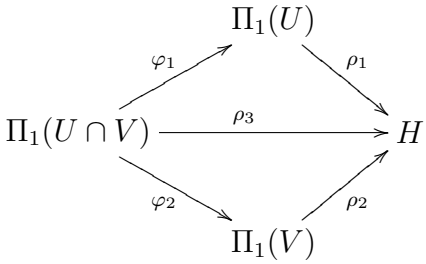
Corolário 2.8. *Se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo então o grupo $G(\tilde{X}|X)$ é isomorfo ao grupo fundamental $\Pi_1(X, x_0)$.*

2.3 Teorema de Seifert-Van Kampen

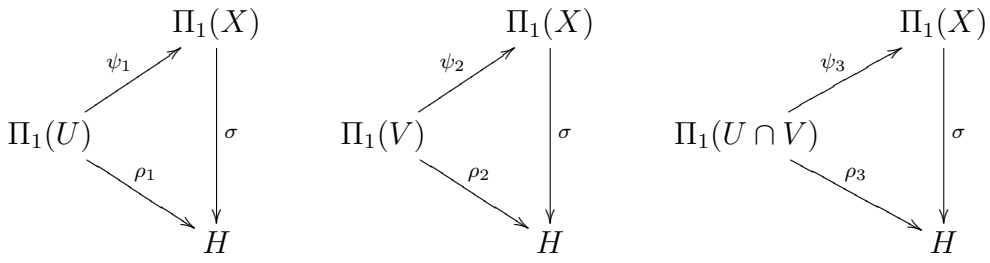
Assuma que U e V são subconjutos abertos, conexos por caminhos de X tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V$ é não vazio e conexo por caminhos. Escolhemos um ponto básico $x_0 \in U \cap V$ para todo o grupo fundamental que iremos considerar nesta seção.

Sabemos que dados i_1, i_2 e i_3 aplicações de inclusão de U, V e $U \cap V$ em X respectivamente, temos ψ_1, ψ_2 e ψ_3 homomorfismos de $\Pi_1(U)$, $\Pi_1(V)$ e $\Pi_1(U \cap V)$ em $\Pi_1(X)$ respectivamente. Denotamos por φ_1, φ_2 os homomorfismos de $\Pi_1(U \cap V)$ em $\Pi_1(U)$ e $\Pi_1(V)$ induzidos pelas inclusões de $U \cap V$ em U e V. Enunciemos então:

Teorema 2.12. (Seifert-Van Kampen)*Seja H um grupo qualquer, ρ_1, ρ_2 e ρ_3 homomorfismos tais que tornam o seguinte diagrama comutativo*



Então, existe um único homomorfismo $\sigma : \Pi_1(X) \longrightarrow H$ tal que os três diagramas abaixo são comutativos:



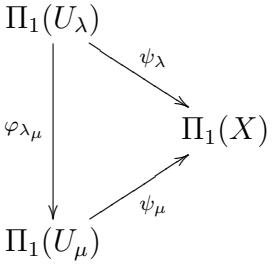
Observação 2.1. *O Teorema de Seifert-Van Kampen é equivalente a dizer que* $\Pi_1(X)$ *é "push-out"de* $\Pi_1(U \cap V)$, $\Pi_1(U)$, $\Pi_1(V)$, φ_1 *e* φ_2.

Este teorema é um caso particular do teorema que iremos enunciar logo em seguida, mas antes faremos algumas considerações para as hipóteses do teorema:

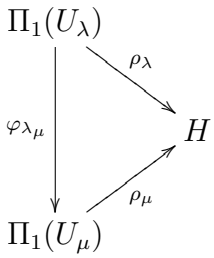
1. X é um espaço topológico conexo por caminhos e $x_0 \in X$.
2. $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura de X por conjuntos abertos, conexo por caminhos tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $x_0 \in U_\lambda$.
3. Para quaisquer dois índices $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existe um índice $\lambda \in \Lambda$ tal que $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = U_\lambda$.

Iremos considerar o ponto x_0 como o ponto básico dos grupos fundamentais dos conjuntos citados acima, mas para abreviar, iremos omitir o ponto básico da notação do grupo fundamental.

Se $U_\lambda \subset U_\mu$, então a aplicação $\varphi_{\lambda_\mu} : \Pi_1(U_\lambda) \longrightarrow \Pi_1(U_\mu)$ estará denotando o homomorfismo induzido pela aplicação de inclusão. Semelhantemente, para qualquer índice λ, $\psi_\lambda : \Pi_1(U_\lambda) \longrightarrow \Pi_1(X)$ é induzido pela inclusão de $U_\lambda \longrightarrow X$. Se $U_\lambda \subset U_\mu$, o seguinte diagrama é comutativo:



Teorema 2.13. *Sobre as hipóteses acima citadas, o grupo fundamental* $\Pi_1(X)$ *satisfaz a seguinte propriedade universal: Sejam* H *um grupo qualquer e* $\rho_\lambda : \Pi_1(U_\lambda) \longrightarrow H$ *sendo qualquer coleção de homomorfismos definidos para todo* $\lambda \in \Lambda$ *tal que se* $U_\lambda \subset U_\mu$ *o seguinte diagrama é comutativo:*



Então, existe um único homomorfismo $\sigma : \Pi_1(X) \longrightarrow H$ tal que para $\lambda \in \Lambda$ o seguinte diagrama é comutativo:

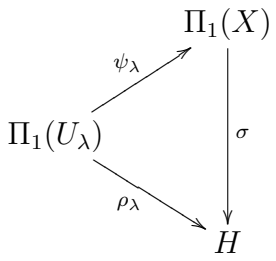


Diagrama 1

Mais ainda, esta propriedade univesal, caracteriza $\Pi_1(X)$ a menos de isomorfismo.

A demonstração dos seguintes Lemas pode ser encontrada em [9], Lema 2.3 e Lema 2.4. A demonstração do primeiro lema é fácil e do segundo é longa e técnica.

Lema 2.14. *O grupo $\Pi_1(X)$ é gerado pela união de imagens $\psi_\lambda(\Pi_1(U_\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$.*

Lema 2.15. *Sejam $\beta_i \in \Pi_1(U_{\lambda_i}), i = 1, \ldots, q$ tais que $\psi_{\lambda_1}(\beta_1) \cdot \psi_{\lambda_2}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot \psi_{\lambda_q}(\beta_q) = 1$. Então, o produto $\rho_{\lambda_1}(\beta_1) \cdot \rho_{\lambda_2}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot \rho_{\lambda_q}(\beta_q) = 1$.*

Demonstração do Teorema 2.13: Sejam H um grupo qualquer e $\rho_\lambda : \Pi_1(U_\lambda) \longrightarrow H$, $\lambda \in \Lambda$, um conjunto de homomorfismos satisfazendo as hipóteses do teorema. Iremos mostrar a existência de um único homomorfismo $\sigma : \Pi_1(X) \longrightarrow H$ tal que torna o diagrama 1 do teorema 2.13 comutativo para qualquer $\lambda \in \Lambda$.

Pelo lema 2.14, é claro que um homomorfismo σ, se existe, deve ser único. Seja $\alpha \in \Pi_1(X)$. Então pelo lema 2.14, temos

$$\alpha = \psi_{\lambda_1}(\alpha_1) \cdot \psi_{\lambda_2}(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot \psi_{\lambda_n}(\alpha_n) \tag{2.1}$$

onde $\alpha_i \in \Pi_1(U_{\lambda_i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Portanto, se o homomorfismo σ existe, devemos ter que

$$\sigma(\alpha) = \rho_{\lambda_1}(\alpha_1) \cdot \rho_{\lambda_2}(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot \rho_{\lambda_n}(\alpha_n). \tag{2.2}$$

Tomaremos a equação 2.2 como definição de σ e para justificar esta definição, deveremos mostrar que σ independe da escolha da representação de α na forma 2.1. Mas o Lema 2.15 nos dá essa independência. E então, σ é homomorfismo e a comutatividade desejada é assegurada. □

Capítulo 3

O Invariante de Bieri-Strebel e Módulo Manso

Neste capítulo introduziremos conceitos novos como o Invariante de Bieri-Strebel e Módulo Manso que aparecem em um dos resultados do Teorema Principal. Também aparece aqui o complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ que é de grande importância nos resultados deste trabalho.

No desenvolver deste capítulo, resgataremos vários teoremas e conceitos que foram discutidos em capítulos anteriores, mas a princípio, daremos uma breve apresentação dos grupos do tipo $\mathbb{FP}_m$ e suas propriedades, pois este tipo de grupo faz parte da versão generalizada que o nosso Teorema Principal possui. Esta versão trabalha com grupos do tipo $\mathbb{FP}_2$ enquanto nós abordaremos sobre grupos Finitamente Apresentáveis.

$\mathbb{Z}$ estará denotando o conjunto dos números inteiros.

3.1 Propriedade FPm

Definição 3.1. Um grupo $\mathbb{G}$ é dito do tipo $\mathbb{FP}_m$ sobre $\mathbb{Z}$ se existe uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}\mathbb{G}$-módulo trivial $\mathbb{Z}$

$$\ldots \to \mathbb{F}_i \to \ldots \to \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

tal que cada $\mathbb{F}_i$ é finitamente gerado, $\forall 0 \leq i \leq m$.

Observação 3.1. *Seja R um anel. Um R-módulo é projetivo se, e somente se, é somando de R-módulo livre.*

Lema 3.1. *Um grupo $\mathbb{G}$ tem tipo $\mathbb{FP}_m$ sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, existe resolução livre do $\mathbb{ZG}$-módulo trivial $\mathbb{Z}$*

$$\ldots \to \mathbb{F}_i \to \ldots \to \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

tal que cada $\mathbb{F}_i$ é finitamente gerado, $\forall 0 \leq i \leq m$.

Lembrando que cada módulo livre é módulo projetivo, podemos observar que uma das implicações do lema é imediato. Mas a demonstração do lema pode ser encontrada no Capítulo 8, Proposição 4.3 em [5].

Lema 3.2. *Cada grupo $\mathbb{G}$ tem tipo $\mathbb{FP}_0$.*

Demonstração: Basta tomar o seguinte epimorfismo de $\mathbb{ZG}$-módulo:

$\varepsilon : \mathbb{ZG} \longrightarrow \mathbb{Z}$, que é definido da seguinte maneira

$$\varepsilon\left(\sum_{\substack{z_g \in \mathbb{Z} \\ g \in \mathbb{G}}} z_g.g\right) = \sum_{z_g \in \mathbb{Z}} z_g$$

Esta aplicação é chamada de augmentação. □

Lema 3.3. *$\mathbb{G}$ é finitamente gerado $\iff$ $\mathbb{G}$ tem tipo $\mathbb{FP}_1$ sobre $\mathbb{Z}$.*

Lema 3.4. *$\mathbb{G}$ é finitamente apresentável $\Longrightarrow$ $\mathbb{G}$ tem tipo $\mathbb{FP}_2$.*

A demontração destes dois últimos lemas pode ser encontrada na Proposição 2.1 em [2] e no Capítulo 2, Proposição 5.4 em [5]. De fato, se $\mathbb{G}$ é finitamente apresentável existem uma apresentação finita $\langle X|R\rangle$ de $\mathbb{G}$ e um epimorfismo de grupos $\varphi\colon F(X) \longrightarrow \mathbb{G}$ com núcleo K sendo o fecho normal de R em $F(X)$. Não é difícil demonstrar que $\mathbb{G}$ tem tipo $\mathbb{FP}_2$ se, somente se $\bar{K} = K/[K,K]$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[F(X)]$-módulo via conjugação. Ao mesmo tempo, a imagem de R em $\bar{K}$ gera $\bar{K}$ como $\mathbb{Z}[F(X)]$-módulo. Isso mostra que a propriedade ser finitamente apresentável implica tipo $\mathbb{FP}_2$.

Agora iremos somente enunciar o Teorema geral que motivou este estudo, mas iremos definir somente mais tarde *Módulo Manso*, pois ainda necessitamos de alguns conceitos novos para tal módulo.

Teorema 3.5. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo do tipo $\mathbb{FP}_2$ sobre $\mathbb{Z}$, $N \lhd \mathbb{G}$ um subgrupo normal de $\mathbb{G}$ com $Q = \dfrac{\mathbb{G}}{N}$ abeliano. Então, ou N contém subgrupo livre não cíclico ou $\dfrac{N}{[N,N]}$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo manso via conjugação.*

Observação 3.2. *Cada subgrupo característico é normal. Se M é um grupo e $N \leq M$ um subgrupo, então $[N, N]$ é subgrupo característico de N. Portanto, temos que $[N, N]$ é subgrupo normal de N e se $N \lhd M$ então $[N, N]$ é normal em M. Observamos que G age sobre N a esquerda via conjugação, isto é, $g * n = gng^{-1}$ e isso induz uma ação de $G/[N, N]$ sobre $N/[N, N]$. Como $N/[N, N]$ é abeliano e age trivialmente sobre si mesmo, então a ação de $G/[N, N]$ sobre $N/[N, N]$ induz uma ação de $\dfrac{G/[N,N]}{N/[N,N]} \cong \dfrac{G}{N} = Q$ sobre $\dfrac{N}{[N,N]}$, isto é, $N/[N, N]$ é $\mathbb{Z}Q$-módulo a esquerda. Como Q é finitamente apresentável (pois é grupo abeliano finitamente gerado e G é finitamente gerado) o Teorema 1.10 implica que N é o fecho normal em G de um conjunto finito. Portanto $N/[N, N]$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado via ação de Q induzida pela conjugação.*

3.2 Complexo de Cayley

Definição 3.2. Seja X um espaço de Hausdorff. Então X é um CW*-complexo* se as seguintes condições são asseguradas:

1. X é união disjunta de células e, toda célula e é homeomorfa a algum espaço euclideano $\mathbb{R}^{|e|}$, onde $|e|$ é chamado de dimensão de e.

2. o n-ésimo esqueleto de uma CW-decomposição é $X^n = \cup_{|e|\leq n} e$. Além disso para toda célula e de dimensão n existe uma aplicação contínua $\varphi_e : (B^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X^{n-1} \cup e, X^{n-1})$ tal que a restrição de $\varphi_e : B^n \backslash S^{n-1} \longrightarrow e$ é um homeomorfismo.

3. O fecho $\bar{e}$ de toda célula e está contido numa união finita de células.

4. Um subconjunto $A \subseteq X$ é fechado em X se, somente se $A \cap \bar{e}$ é fechado em $\bar{e}$ para toda célula e da CW-decomposição de X.

Durante esta seção, estaremos usando $\mathbb{G}$ como grupo finitamente apresentável, $\mathbb{X}$ um subconjunto finito de $\mathbb{G}$, $F(\mathbb{X})$ o grupo livre com base $\mathbb{X}$ e R um subconjunto finito de $F(\mathbb{X})$.

$\langle \mathbb{X}, R \rangle$ uma apresentação do grupo $\mathbb{G}$; $\mathbb{G} \cong \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})} \rangle}$.

Faremos agora a construção do Complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ em relação à apresentação $\langle \mathbb{X}, R \rangle$.

$\tilde{\Gamma}$ é um CW-complexo de dimensão 2, constituído pelos vértices, arestas e células que são construídos do seguinte modo:

Para o conjunto dos vértices tomamos o conjunto $\mathbb{G}$ e denotamos por $V(\tilde{\Gamma})$.

$V(\tilde{\Gamma})$ é um conjunto discreto.

Para as arestas tomamos o produto cartesiano $\mathbb{G} \times \mathbb{X}$ que denotamos por $E(\tilde{\Gamma})$.

Seja $e = (g, x) \in \mathbb{G} \times \mathbb{X} = E(\tilde{\Gamma})$

Definimos:

$\sigma(e) = g$ como o começo da aresta e e

$\tau(e) = g.\pi(x)$ como o fim da aresta e, onde a aplicação π é a seguinte projeção canônica:

$\pi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{G} = \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})} \rangle}$.

Ambos, $\sigma(e) = g$ e $\tau(e) = g.\pi(x)$ são vértices.

$$g = \sigma(e). \xrightarrow{e=(g,x)} .g\pi(x) = \tau(e)$$

Ainda considerando as arestas, é conveniente definirmos as arestas $\mathbb{G} \times \mathbb{X}^{-1}$.

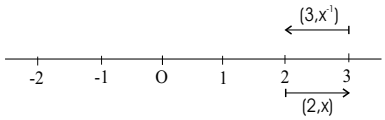
$(g, x^{-1}) \in \mathbb{G} \times \mathbb{X}^{-1}$ é a aresta inversa de $(g.\pi(x^{-1}), x) \in \mathbb{G} \times \mathbb{X}$.

$$g\pi(x^{-1}). \underset{(g,x^{-1})}{\overset{(g\pi(x^{-1}),x)}{\rightleftarrows}} .g$$

Na realização geométrica do complexo, a aresta e a inversa são representadas com um único intervalo unitário.

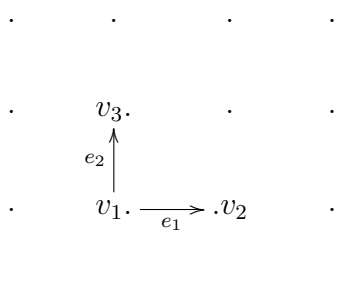
Exemplo 3.1. Seja $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \langle \mathbb{X} \rangle$ com $\mathbb{X} = \{x\}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros.

Temos que $V(\tilde{\Gamma}) = \mathbb{Z}$ e $E(\tilde{\Gamma}) = \mathbb{Z} \times \{x\}$.



Exemplo 3.2. Seja $\mathbb{G} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Temos que $V(\tilde{\Gamma}) = \mathbb{G} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$; seja $\mathbb{X} = \{x, y\}$, onde $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Sejam $v_1 = (z_1, z_2), v_2 = (z_1 + 1, z_2), v_3 = (z_1, z_2 + 1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, então, $e_1 = (v_1, x) \in E(\tilde{\Gamma})$ e $e_2 = (v_1, y) \in E(\tilde{\Gamma})$. Graficamente:



$V(\tilde{\Gamma})$ e $E(\tilde{\Gamma})$ formam o grafo de $\tilde{\Gamma}$ e $\mathbb{G}$ age sobre o grafo via multiplicação $*$ à esquerda.

Vejamos como $\mathbb{G}$ está atuando pela multiplicação à esquerda em $E(\tilde{\Gamma})$:

Seja $(g, x^{\varepsilon}) \in E(\tilde{\Gamma})$, $\varepsilon = \pm 1$ e definimos $g_1 * (g, x^{\varepsilon}) = (g_1 g, x^{\varepsilon}) \in E(\tilde{\Gamma})$, $g, g_1 \in \mathbb{G}$.

Como o produto em $\mathbb{G}$ é associativo, temos que $(g_1 g_2) * (g, x^{\varepsilon}) = g_1 * (g_2 * (g, x^{\varepsilon}))$.

Vejamos também como $\mathbb{G}$ age sobre $V(\tilde{\Gamma})$ via multiplicação à esquerda:

$g, g_1 \in \mathbb{G} = V(\tilde{\Gamma})$, $\varepsilon = \pm 1$ e definimos $g_1 * g = g_1 g$.

Com esta definição, temos que

$\sigma(g_1 * (g, x^{\varepsilon})) = g_1 * \sigma((g, x^{\varepsilon}))$ e $\tau(g_1 * (g, x^{\varepsilon})) = g_1 * \tau((g, x^{\varepsilon}))$.

Definição 3.3. Um *caminho no grafo* $V(\tilde{\Gamma}) \cup E(\tilde{\Gamma})$ é uma sequência $e_1 e_2 e_3 \dots e_k$, $k \geq 1$ e $\forall 1 \leq i \leq k-1,\ \tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})$, $e_i \in \mathbb{G} \times \mathbb{X}^{\pm 1}$.

Se $k = 0$, o caminho $e_1 e_2 e_3 \dots e_k$ é um ponto.

Observação 3.3. *Daqui para frente, quando falarmos em caminhos, estaremos nos referindo a caminhos no grafo $V(\tilde{\Gamma}) \cup E(\tilde{\Gamma})$ definido acima.*

Definição 3.4. Um caminho $e_1 e_2 e_3 \dots e_k$, $e_i \in E(\tilde{\Gamma})$ é dito *fechado* se $\tau(e_k) = \sigma(e_1)$.

Definição 3.5. Sejam $e_i = (g_i, x_i^{\varepsilon_i}) \in E(\tilde{\Gamma})$ e $\varepsilon = \pm 1$, $x_i \in \mathbb{X}$. O *rótulo de um caminho* $e_1 e_2 e_3 \dots e_k$ (não necessariamente fechado) é $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3} \dots x_k^{\varepsilon_k}$ e é uma palavra sobre o alfabeto $\mathbb{X} \cup \mathbb{X}^{-1}$. O conjunto de todas as palavras sobre $M \cup M^{-1}$ é denotado por $M(\mathbb{X} \cup \mathbb{X}^{-1})$. O grupo livre $F(\mathbb{X})$ por construção é $\dfrac{M(\mathbb{X} \cup \mathbb{X}^{-1})}{\sim}$, onde $\sim$ é a classe de equivalência definida no capítulo 1.

Definição 3.6. Dizemos que um caminho $e_1 e_2 e_3 \dots e_k$ é *reduzido* se não existe i tal que $e_{i+1} = \bar{e}_i$, onde $\bar{e} = \overline{(g, x^{\varepsilon})} = (g \cdot \pi(x^{\varepsilon}), x^{-\varepsilon})$, $g \in V(\tilde{\Gamma})$, $\varepsilon = \pm 1$.

Observação 3.4. *O caminho é reduzido $\Leftrightarrow$ o rótulo do caminho é palavra reduzida. Nesse caso podemos identificar o rótulo com um elemento do grupo livre $F(\mathbb{X})$.*

Lema 3.6. *Um caminho é fechado se, e somente se a imagem do seu rótulo via $\pi\colon F(\mathbb{X}) \to \mathbb{G} \cong \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})}\rangle}$ pertence ao núcleo de π, $Ker(\pi)$.*

Demonstração: Seja $e_1e_2e_3\dots e_k$ um caminho fechado com ponto base em $g \in \mathbb{G}$. Neste caso temos:

$e_1 = (g, x_1^{\varepsilon_1})$

$e_2 = (g\pi(x_1^{\varepsilon_1}), x_2^{\varepsilon_2})$

$e_3 = (g\pi(x_1^{\varepsilon_1})\pi(x_2^{\varepsilon_2}), x_3^{\varepsilon_3})$

$\vdots$

$e_k = (g\pi(x_1^{\varepsilon_1})\pi(x_2^{\varepsilon_2})\pi(x_3^{\varepsilon_3})\dots\pi(x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}), x_k^{\varepsilon_k})$

Como π é homomorfismo temos que $\tau(e_k) = g\pi(x_1^{\varepsilon_1})\pi(x_2^{\varepsilon_2})\pi(x_3^{\varepsilon_3})\dots\pi(x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}})\pi(x_k^{\varepsilon_k}) = g\pi(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k})$

Ainda temos que:

$e_1e_2e_3\dots e_k$ é um caminho fechado $\Leftrightarrow g = \sigma(e_1) = \tau(e_k) = g\pi(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k}) \Leftrightarrow 1_{\mathbb{G}} = \pi(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k}) \Leftrightarrow x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k} \in Ker(\pi)$, onde $x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k}$ é a imagem do rótulo do caminho $e_1e_2e_3\dots e_k$ em $F(\mathbb{X})$.

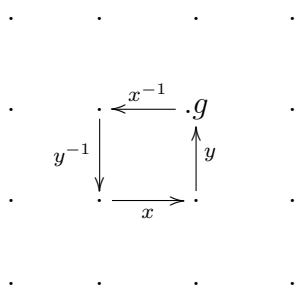
O que conclui a nossa demonstração. □

Agora para completar o Complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ nos falta definir as células de dimensão 2 . Para o conjunto das células, tomamos $\mathbb{G} \times R$ que denotamos por $C(\tilde{\Gamma})$. Dado $r \in R \subseteq F(\mathbb{X})$, temos $r = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_k^{\varepsilon_k}$ que é uma palavra reduzida, $x_i \in \mathbb{X}\cup\mathbb{X}^{-1}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Seja $c = (g, r) \in C(\tilde{\Gamma})$. O bordo de c denotado por ∂c é um caminho fechado no grafo com fim e começo no vértice g e rótulo r como palavra.

Observação 3.5. *$R \subseteq Ker(\pi)$ então, a imagem do rótulo do caminho $e_1e_2e_3\dots e_k$ em $F(\mathbb{X})$ está em $Ker(\pi)$ e portanto pelo Lema 3.6 temos que o caminho $e_1e_2e_3\dots e_k$ é fechado.*

O complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ pode ser identificado pela tripla $(V(\tilde{\Gamma}), E(\tilde{\Gamma}), C(\tilde{\Gamma}))$. A realização geométrica de $\tilde{\Gamma}$ é dada pela topologia de CW-complexo.

Exemplo 3.3. Sejam $\mathbb{G} = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{X} = \{x, y\}$, onde $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$. $V(\tilde{\Gamma}) = \mathbb{G} = \langle\mathbb{X}|R\rangle$ e $E(\tilde{\Gamma}) = \mathbb{G}\times\mathbb{X}$



Queremos que $\mathbb{G}$ seja abeliano então, devemos ter $R = \{x^{-1}y^{-1}xy\}$.

Seja $c = (g, r) \in C(\tilde{\Gamma}) = \mathbb{G} \times R$.

Calculando ∂c=$(g, x^{-1})(g\pi(x^{-1})$,$y^{-1})(g\pi(x^{-1}y^{-1})$,$x)(g\pi(x^{-1}y^{-1}x), y)$ e $c \cong D^2$, onde D^2 é o disco em $\mathbb{R}^2$.

Neste caso temos que o Complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ é o espaço $\mathbb{R}^2$.

Proposição 3.7. *O complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ é conexo por caminhos.*

Demonstração: Seja $\langle \mathbb{X}, R\rangle$ a apresentação do grupo $\mathbb{G}$ usada na definição de $\tilde{\Gamma}$. Basta mostrar que dados dois vértices de $\tilde{\Gamma}$ existe um caminho que os liga.

Sejam $g_1, g_2 \in V(\tilde{\Gamma}) = \mathbb{G}$ e $*$ denota a ação a esquerda de $\mathbb{G}$ sobre o grafo de $\tilde{\Gamma}$.

Se existe um caminho ω no grafo de $\tilde{\Gamma}$ com começo $1_{\mathbb{G}}$ e fim $g_1^{-1}g_2 = g$ então, $g_1 * \omega$ será um caminho no grafo que liga g_1 e g_2. Mostraremos então, que existe tal caminho ω entre $1_{\mathbb{G}}$ e g.

Temos que a aplicação $\pi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})}\rangle} = \mathbb{G}$ é sobrejetora, então, dado $g \in \mathbb{G}$, existe uma palavra reduzida $x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}...x_k^{\varepsilon_k} \in F(\mathbb{X})$ tal que $g = \pi(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}...x_k^{\varepsilon_k})$. Como π é homomorfismo temos que $g = \pi(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}...x_k^{\varepsilon_k}) = \pi(x_1^{\varepsilon_1})\pi(x_2^{\varepsilon_2})...\pi(x_k^{\varepsilon_k})$ e dados o ponto inicial (no nosso caso $1_{\mathbb{G}}$) e os rótulos, conseguimos o seguinte caminho:

$(1_{\mathbb{G}}, x_1^{\varepsilon_1})(1_{\mathbb{G}}.\pi(x_1^{\varepsilon_1}), x_2^{\varepsilon_2})...(1_{\mathbb{G}}.\pi(x_1^{\varepsilon_1}).\pi(x_2^{\varepsilon_2})...\pi(x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}), x_k^{\varepsilon_k}) =: \omega$

Este é o caminho que precisávamos. Logo, existe $g_1 * \omega$, caminho entre g_1 e g_2 e portanto $\tilde{\Gamma}$ é conexo por caminhos. □

Proposição 3.8. *O grupo fundamental $\Pi_1(\tilde{\Gamma})$ é trivial, isto é, o complexo de Cayley $\tilde{\Gamma}$ é simplesmente conexo.*

Demonstração: Seja $\tilde{\Gamma}$ o complexo de Cayley associado à apresentação $\langle \mathbb{X}, R\rangle$ de $\mathbb{G}$.

Temos que os 3 itens abaixo são equivalentes:

1. $\Pi_1(\tilde{\Gamma}) = 1$
2. cada caminho fechado em $\tilde{\Gamma}$ é homotópico ao caminho trivial.
3. cada caminho fechado no grafo de $\tilde{\Gamma}$ é homotópico ao caminho trivial em $\tilde{\Gamma}$.

Iremos demonstrar o item 3 para obtermos o resultado desejado.

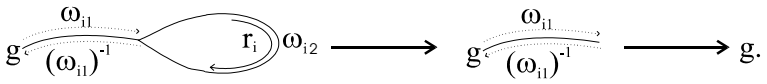
Seja ω um caminho fechado e reduzido no grafo de $\tilde{\Gamma}$, com $\sigma(\omega) = \tau(\omega) = g$, $g \in \mathbb{G}$. Como o rótulo de ω é uma palavra reduzida em $\mathbb{X} \cup \mathbb{X}^{-1}$, podemos identificar esse rótulo com um elemento de $F(\mathbb{X})$.

Como ω é um caminho fechado, temos pelo Lema 3.6 que o rótulo de ω pertence a $Ker(\pi) = \langle R^{F(\mathbb{X})} \rangle$.

Denotemos (rótulo (ω))$=$ $(r_1^{f_1})^{\varepsilon_1}(r_2^{f_2})^{\varepsilon_2}...(r_j^{f_j})^{\varepsilon_j}$ em $F(\mathbb{X})$ onde $r_i \in R$, $f_i \in F(\mathbb{X})$, $\varepsilon_i = \pm 1$ $\forall 1 \leq i \leq j$ e lembrando que $r_i^{f_i} = (f_i)^{-1} r_i f_i$. É possível que ocorra cancelamento em $(r_1^{f_1})^{\varepsilon_1}(r_2^{f_2})^{\varepsilon_2}...(r_j^{f_j})^{\varepsilon_j}$. Temos que ω é homotópico à concatenação de caminhos fechados ω_i baseados em g com rótulos $(r_i^{f_i})^{\varepsilon_i}$ como palavras sobre o alfabeto $\mathbb{X} \cup \mathbb{X}^{-1}$.

Analisemos rótulo$(\omega_i) = (r_i^{f_i})^{\varepsilon_i}$. Observamos que ω_i é caminho fechado em g e é homotópico à concatenação de caminhos ω_{i1}, ω_{i2} e ω_{i1}^{-1}, onde ω_{i1} é caminho com começo g e rótulo f_i^{-1}, ω_{i2} é caminho fechado baseado no ponto final de ω_{i1} com rótulo r_i.

Por hipótese ω_{i2} é contrátil e portanto ω_i é homotópico a um ponto. Logo ω é homotópico ao caminho trivial em $\tilde{\Gamma}$.



□

Já vimos que $\mathbb{G}$ age sobre o grafo de $\tilde{\Gamma}$ via multiplicação à esquerda. Vejamos agora que $\mathbb{G}$ age livremente sobre $\tilde{\Gamma}$ via multiplicação à esquerda. Definamos $g_1 * (g, r) := (g_1 g, r)$, $g, g_1 \in \mathbb{G}$ e $r \in R$. Um cálculo fácil mostra que $\partial(g_1 * (g, r)) = g_1 * (\partial(g, r))$. Logo, se $g \in \mathbb{G}$, $g \neq 1_{\mathbb{G}}$, $e \in V(\tilde{\Gamma}) \cup E(\tilde{\Gamma}) \cup C(\tilde{\Gamma})$ então, $ge \neq e$ e $ge \in V(\tilde{\Gamma}) \cup E(\tilde{\Gamma}) \cup C(\tilde{\Gamma})$, isto é, $\mathbb{G}$ age livremente sobre $\tilde{\Gamma}$.

Agora, seja $\Gamma = \dfrac{\tilde{\Gamma}}{N}$, onde $N \lhd \mathbb{G}$ é um subgrupo normal de $\mathbb{G}$. O complexo Γ é o quociente de $\tilde{\Gamma}$ via ação do subgrupo N.

Seja θ a projeção canônica de $\tilde{\Gamma}$ em Γ. A cada ponto em Γ, está associado uma N- órbita em $\tilde{\Gamma}$, que é um subconjunto fechado em $\tilde{\Gamma}$, isto é, N- órbita=$\{g * v | g \in N\}$ e v um ponto fixo em $\tilde{\Gamma}$.

Temos os seguintes resultados (2 é mais forte que 1):

1. $\mathbb{G}$ age livremente sobre $\tilde{\Gamma}$;
2. A ação do grupo $\mathbb{G}$ sobre $\tilde{\Gamma}$ é propriamente descontínua, isto é, $\forall v \in \tilde{\Gamma}$, $\exists\, u_v$ vizinhança de v em $\tilde{\Gamma}$ tal que $\forall g \in \mathbb{G}\backslash\{1_{\mathbb{G}}\}$: $(g * u_v) \cap u_v = \emptyset$.

Os itens acima valem para $\mathbb{G}$, logo valem para qualquer subgrupo de $\mathbb{G}$, em particular para N.

Podemos identificar Γ por $(V(\Gamma), E(\Gamma), C(\Gamma))$ onde

$V(\Gamma) = \{Ng|\ \ g \in \mathbb{G}\} = \dfrac{\mathbb{G}}{N}$

$E(\Gamma) = \{(Ng, x)|g \in \mathbb{G},\ \ x \in \mathbb{X}\} = \dfrac{\mathbb{G}}{N} \times \mathbb{X}$

$C(\Gamma) = \{(Ng, r)|g \in \mathbb{G},\ \ r \in R\} = \dfrac{\mathbb{G}}{N} \times R$

Assim Γ também tem estrutura de CW-complexo.

Temos então, que N age livremente sobre $\tilde{\Gamma}$ e ainda mais, essa ação é propriamente descontínua. Logo pelo Teorema 2.6 temos que θ é uma aplicação de recobrimento. Com estes resultados, estamos nas hipóteses do Corolário 2.8, que nos mostra que o grupo fundamental de Γ é isomorfo ao grupo de automorfismos do recobrimento θ. Mas temos que o grupo de automorfismos do recobrimento θ é exatamente N, e podemos concluir que $\Pi_1(\Gamma) \cong N$.

3.3 Um Conjunto Finito de Geradores de $\mathbb{G}$

Agora vamos supor que $Q = \dfrac{\mathbb{G}}{N}$ é um grupo abeliano finitamente gerado. Pela classificação de grupos abelianos finitamente gerados existe um subgrupo Q_0 de Q tal que $Q_0 \cong \mathbb{Z}^n$ e Q_0 tem índice finito em Q (este resultado pode ser encontrado no Capítulo 1.10, Teorema 8 do livro [7]). Denotemos por $\mathbb{G}_0$ a pré-imagem de Q_0 pela projeção canônica $- : \mathbb{G} \longrightarrow Q$. Pelo teorema do isomorfismo temos que $\dfrac{\mathbb{G}}{\mathbb{G}_0} \cong \dfrac{Q}{Q_0}$.

Então $\mathbb{G}_0$ é subgrupo de índice finito em $\mathbb{G}$ tal que $N \subseteq \mathbb{G}_0 \subseteq \mathbb{G}$ e $\dfrac{\mathbb{G}_0}{N} \cong \mathbb{Z}^n$.

Observação 3.6. *Como o índice de $\mathbb{G}_0$ em $\mathbb{G}$ é finito, $\mathbb{G}$ é finitamente apresentável se, e somente se,*

$\mathbb{G}_0$ é finitamente apresentável. Então podemos substituir $\mathbb{G}_0$ por $\mathbb{G}$ e de agora em diante iremos supor $\frac{\mathbb{G}}{N} \cong \mathbb{Z}^n$.

Sejam $\{q_1, q_2, q_3 \dots q_n\}$ uma base de $\mathbb{Z}^n$ e $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ um subconjunto de $\mathbb{G}$ com a seguinte propriedade:

$$\begin{array}{rccc} - & : & \mathbb{G} & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{G}}{N} \\ & & t_i & \longmapsto & \bar{t_i} = q_i = Nt_i \end{array}$$

onde T é o conjunto de elementos de $\mathbb{G}$ tal que a imagem de T em $\frac{\mathbb{G}}{N}$ é uma base como grupo livre abeliano, $\frac{\mathbb{G}}{N} = \langle\, \overline{T}\, \rangle$.

Lema 3.9. *$\mathbb{G}$ é finitamente gerado então, existe um subconjunto finito M de N tal que $M \cup T$ gera $\mathbb{G}$.*

Demonstração: Vejamos como construir o conjunto M. Como $\mathbb{G}$ é finitamente gerado, seja $\mathbb{G} = \langle V_0 \rangle$, para um subconjunto finito V_0 de $\mathbb{G}$. Então $\mathbb{G} = \langle V_0 \cup T \rangle$ e sejam $v \in V_0$ e $-$ a projeção canônica $\mathbb{G} \longrightarrow \frac{\mathbb{G}}{N} = \langle \overline{T} \rangle$. Logo, $vN = \bar{v} = \bar{t_1}^{z_1} \bar{t_2}^{z_2} \dots \bar{t_n}^{z_n} = t_1^{z_1} t_2^{z_2} \dots t_n^{z_n} N$. Então, existem $h_v \in N$ e z_i dependentes de v tal que $v = t_1^{z_1} t_2^{z_2} \dots t_n^{z_n} h_v$.

Afirmamos que $\mathbb{G} = \langle T \cup \{h_v\}_{v \in V_0} \rangle$. É claro que $\mathbb{G} \supseteq \langle T \cup \{h_v\}_{v \in V_0} \rangle$. Mostraremos que $\mathbb{G} \subseteq \langle T \cup \{h_v\}_{v \in V_0} \rangle$. Já temos que $\mathbb{G} = \langle V_0 \cup T \rangle$ então, basta mostrarmos que $V_0 \cup T \subseteq \langle T \cup \{h_v\}_{v \in V_0} \rangle$. Se $v \in V_0$ então, $v = t_1^{z_1} t_2^{z_2} \dots t_n^{z_n} h_v$.

Temos que $\{h_v\}_{v \in V_0} \subseteq N$ então, definimos $M = \{h_v\}_{v \in V_0}$. □

Conseguimos, então, um conjunto de geradores adequado para $\mathbb{G}$, $\mathbb{G} = \langle M \cup T \rangle$. Observamos que

$V(\Gamma) = \dfrac{V(\tilde{\Gamma})}{N} = \dfrac{\mathbb{G}}{N} = Q \cong \mathbb{Z}^n$,

$E(\Gamma) = \dfrac{E(\tilde{\Gamma})}{N} \times \mathbb{X} \cong Q \times \mathbb{X}$, $\mathbb{X} := M \cup T$.

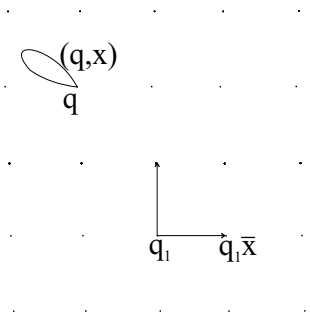
Temos no grafo de Γ dois tipos de arestas (q, x), dependendo se $x \in M$ ou $x \in T$. Como $\mathbb{X} = M \cup T$ e $M \subseteq N$, podemos ter os seguintes casos:

1. se $x \in M$ então, $\bar{x} = \bar{1}$ em Q pois $Q = \dfrac{G}{N}$.

2. se $x \in T$ então, $\bar{x}$ pertence a uma base de $\mathbb{Z}^n$ sobre $\mathbb{Z}$.

No primeiro caso temos que a aresta (q, x) é fechada com início e fim q (loop) e no segundo temos que é um segmento de reta com início q e fim $q\bar{x}$.

Vejamos graficamente para o caso em que $n = 2$:



3.4 O invariante de Bieri-Strebel e Módulo Manso

Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e $v : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ um homomorfismo não nulo de grupos abelianos, onde $\mathbb{R}$ é o grupo dos reais munido com a operação de adição: $v(q_1q_2) = v(q_1) + v(q_2)$. O grupo $Q = \dfrac{\mathbb{G}}{N}$ está munido com a operação de multiplicação, mas se $Q \cong \mathbb{Z}^n$ como grupo abeliano, a operação de $\mathbb{Z}^n$ é $+$.

Definamos agora o seguinte subconjunto de Q:

$$Q_v = \{q \in Q | v(q) \geq 0\}.$$

Observe que Q_v não é um subgrupo mas um submonóide de Q, isto é, $1_Q \in Q_v$ e se $q_1, q_2 \in Q_v$ então, $q_1q_2 \in Q_v$. Definimos $Hom(Q, \mathbb{R})$ como o conjunto de homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, isto é, homomorfismos de grupos abelianos.

O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço com produto interno $(\ ,\ )$, então para cada $\omega \in \mathbb{R}^n$ temos um homomorfismo de grupos abelianos:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\omega & : & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & (t, \omega) \end{array}$$

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \\ \omega & \longmapsto & \varphi_\omega \end{array} \tag{3.1}$$

é um isomorfismo de grupos abelianos.

Lembrando que, se Q é um grupo abeliano finitamente gerado qualquer, temos que ele pode ser escrito como soma direta de um grupo abeliano finito B e um subgrupo abeliano livre $F \cong \mathbb{Z}^n$ para algum n, ou seja, $Q \cong \mathbb{Z}^n \oplus B$ (na notação aditiva).

Quando B é um grupo abeliano finito, temos que $Hom(B, \mathbb{R}) = 0$. De fato: se $b \in B$ existe um $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ tal que $ab = 0$. Se $\varphi \in Hom(B, \mathbb{R})$ homomorfismo de Z-módulos, temos que $0 = \varphi(0) = \varphi(ab) = a\varphi(b)$. Como $a \neq 0$ e $\mathbb{R}$ não possui divisores de zero, devemos ter $\varphi(b) = 0$. Como b foi tomado arbitrariamente, $\varphi \equiv 0$. Ou seja, $Hom(B, \mathbb{R}) = 0$.

Então se $Q \cong \mathbb{Z}^n \oplus B$ e considerando que $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ temos:

$Hom(Q, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z}^n \oplus B, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \oplus Hom(B, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \oplus Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$

Portanto, $Hom(Q, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. No caso $Q = \mathbb{Z}^n$ o último isomorfismo foi explicado com a aplicação (3.1).

Definição 3.7. Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom(Q, \mathbb{R})$ não-triviais. Dizemos que φ_1 e φ_2 são equivalentes $(\varphi_1 \sim \varphi_2)$ se existe um número real positivo r tal que $\varphi_1 = r \cdot \varphi_2$, onde $(r \cdot \varphi_2)(q) = r \cdot \varphi_2(q), q \in Q$. É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência, isto é, $\varphi \sim \varphi$, $\varphi_1 \sim \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 \sim \varphi_1$, e $\varphi_1 \sim \varphi_2$ e $\varphi_2 \sim \varphi_3 \Rightarrow \varphi_1 \sim \varphi_3$. Definimos então, o seguinte quociente:

$$S(Q) = \frac{Hom(Q, \mathbb{R}) \backslash \{0\}}{\sim}$$

Denotamos por $[\varphi]$ a classe de equivalência de φ. Se $[\varphi] \in S(Q)$, podemos identificar esta classe de equivalência com a intersecção do correspondente raio em $\mathbb{R}^n$ com a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. E podemos então, ver $S(Q)$ como a esfera unitária S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$. Chamamos $S(Q)$ de esfera de homomorfismo de Q.

Definição 3.8. Sejam Q um grupo finitamente gerado e A um $\mathbb{Z}Q$-módulo a esquerda finitamente gerado. Definimos o *invariante de Bieri-Strebel* como o seguinte conjunto:

$$\Sigma_A(Q) = \{[\varphi] \in S(Q) | A \text{ é finitamente gerado como } \mathbb{Z}Q_\varphi\text{-módulo } \}$$

$\mathbb{Z}Q_\varphi = \{\sum_{z_q \in \mathbb{Z}} z_q q \mid q \in Q_\varphi$ e quase todos os coeficientes z_q são zero, $z_q \in \mathbb{Z}\ \} \subseteq \mathbb{Z}Q$.

Observamos que $\mathbb{Z}Q_\varphi$ é subanel de $\mathbb{Z}Q$ pois Q_φ é submonóide de Q.

Definição 3.9. Um $\mathbb{Z}Q$-módulo A é dito *Manso* se $S(Q) = \Sigma_A(Q) \cup -\Sigma_A(Q)$.

Ou equivalentemente: $S(Q) = \Sigma_A(Q) \cup -\Sigma_A(Q) \iff \nexists [\varphi] \in S(Q)$ tal que $[\varphi] \notin \Sigma_A(Q)$ e $[\varphi] \notin -\Sigma_A(Q)$.

Exemplo 3.4. Considerando o exemplo 3.2, onde $\mathbb{G} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}$ e $Q = \mathbb{G}/A = \mathbb{Z}$. Então Q age trivialmente sobre A via conjugação. Como A é finitamente gerado como grupo abeliano, A é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}Q_\varphi$ para qualquer $[\varphi] \in S(Q)$. Nesse caso $\Sigma_A(Q) = S(Q)$ e $S(Q) \cong S^0$ tem exatamente dois pontos.

Exemplo 3.5. Sejam $A = \mathbb{Z}[1/2]$ subanel do anel dos números racionais gerado por $\mathbb{Z}$ e $1/2$, e $Q = \langle q \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Q age sobre A do seguinte modo: $q^i a = 2^i a, a \in A, i \in \mathbb{Z}$.

Seja $\varphi \in Hom(Q, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. $S(Q)$ possui 2 pontos que correspondem aos seguintes homomorfismos:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & Q & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & q & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi_2 : & Q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q & \longmapsto & -1 \end{array}$$

Então, $S(Q) = \{[\varphi_1], [\varphi_2]\}$,

$Q_{\varphi_1} = \{b \in Q | \varphi_1(b) \geq 0\} = \{q^i | i \geq 0\}$,

$Q_{\varphi_2} = \{b \in Q | \varphi_2(b) \geq 0\} = \{q^i | i \leq 0\}$.

$A = \mathbb{Z}[1/2]$ não é finitamente gerado por $\mathbb{Z}Q_{\varphi_1}$. De fato:

$\mathbb{Z}Q_{\varphi_1} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}q \oplus \mathbb{Z}q^2 \oplus \ldots$, q age sobre A via multiplicação por 2 e se $a \in A$, temos que $\mathbb{Z}Q_{\varphi_1} a = \mathbb{Z}a$ pois $\mathbb{Z}qa = \mathbb{Z}(qa) = \mathbb{Z}(2a) \subseteq \mathbb{Z}a$, e $\mathbb{Z}q^i a = \mathbb{Z}2^i a \subseteq \mathbb{Z}a$.

Se A for finitamente gerado por $\mathbb{Z}Q_{\varphi_1}$ então, $A = \mathbb{Z}Q_{\varphi_1} a_1 + \mathbb{Z}Q_{\varphi_1} a_2 + \mathbb{Z}Q_{\varphi_1} a_3 + \ldots + \mathbb{Z}Q_{\varphi_1}$ a_i, $a_j \in A = \mathbb{Z}[1/2]$. Então, A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}$-módulo.

Temos ainda que $a_j = \frac{z_j}{2^{\alpha_j}}$, daí se α=máx$\{\alpha_j\}$ então, $a_j \in \frac{\mathbb{Z}}{2^\alpha}$. Portanto, $\sum \mathbb{Z}a_i \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2^\alpha}$, $\frac{1}{2^{\alpha+1}} \in A \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2^\alpha}$ e $\frac{1}{2^{\alpha+1}} \in \frac{\mathbb{Z}}{2^\alpha}$, o que é uma contradição. Portanto, $[\varphi_1] \notin \Sigma_A(Q)$.

Mas A é finitamente gerado por $\mathbb{Z}Q_{\varphi_2}$ pois q^{-1} age sobre A via multiplicação por 1/2 e se $a_0 := 1 \in \mathbb{Z}[1/2] = A, i > 0$ temos que $\mathbb{Z}q^{-i}a_0 = \dfrac{\mathbb{Z}a_0}{2^i} = \dfrac{\mathbb{Z}}{2^i}$. Daí, $\mathbb{Z}Q_{\varphi_2}a_0 = \mathbb{Z} + \dfrac{\mathbb{Z}}{2} + \dfrac{\mathbb{Z}}{2^2} \ldots =$ $\mathbb{Z}[1/2]$ e portanto, $[\varphi_2] \in \Sigma_A(Q)$.

Observamos que neste exemplo a esfera $S(Q)$ não é conexa.

3.5 Complexo Γ, Subcomplexo Γ_v e Subcomplexo Γ_{-v}

Nessa subseção consideraremos $\Gamma = \tilde{\Gamma}/N$, $Q = \dfrac{\mathbb{G}}{N} \cong \mathbb{Z}^n$ e $v = (\ \ , \omega) : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ homomorfismo não nulo, $\omega \in \mathbb{R}^n$ fixo. Denotemos por Γ_v o subcomplexo maximal de Γ que tem vértices em $Q_v = \{q \in Q |\ v(q) \geq 0\}$. Analogamente temos Γ_{-v}, o subcomplexo maximal de Γ que tem vértices em Q_{-v}. Para nós é interessante que a interseção de dois subcomplexos seja conexo, mas em geral $\Gamma_v \cap \Gamma_{-v}$ pode não ser conexo. Para que isto ocorra, fazemos uma translação em Γ_{-v} com um determinado $q \in Q$.

Lema 3.10. *Seja $q \in Q$. Se $v(q) \geq \sqrt{2}||\omega||$, então $\Gamma_v \cap q\Gamma_{-v}$ é conexo.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada na página 455 do artigo [4].

Lema 3.11. *Sejam $\mathbb{G} = \langle \mathbb{X}|R\rangle$, l o comprimento máximo dos elementos de R se $R \neq \emptyset$, e $l = 1$ se $R = \emptyset$. Se $q \in Q$ com $v(q) \geq l||\omega||$, então, $\Gamma = \Gamma_v \cup q\Gamma_{-v}$.*

Demonstração: Precisamos demonstrar que:

1. $V(\Gamma) = V(\Gamma_v) \cup V(q\Gamma_{-v})$
2. $E(\Gamma) = E(\Gamma_v) \cup E(q\Gamma_{-v})$
3. $C(\Gamma) = C(\Gamma_v) \cup C(q\Gamma_{-v})$

Vemos que o item 1, $E(\Gamma) \supseteq E(\Gamma_v) \cup E(q\Gamma_{-v})$ e $C(\Gamma) \supseteq C(\Gamma_v) \cup C(q\Gamma_{-v})$ são claros.

Em (2) temos 2 tipos de arestas: aresta fechada e aresta com início e fim distintos.

No primeiro caso, não temos problema pois a aresta fechada é uma curva fechada que está inteiramente contida em Γ_v ou $q\Gamma_{-v}$.

No segundo caso podemos ter que a aresta e está com um vértice em Γ_v e o outro vértice em $q\Gamma_{-v}$. Este é um caso ruim para nós. Ver figura 3.1

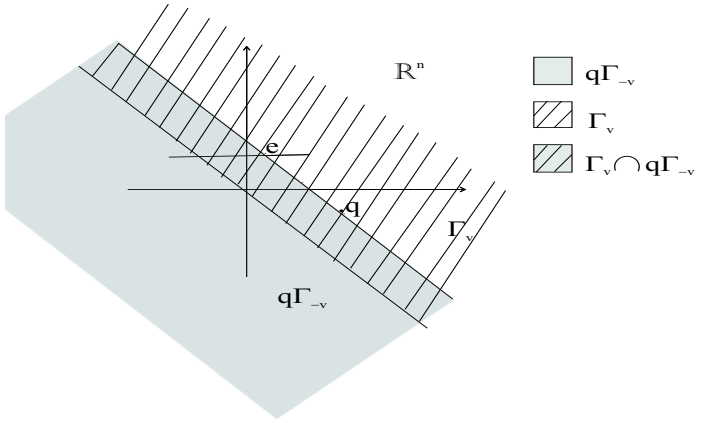


Figura 3.1: caso ruim

Observemos o que ocorre neste caso:

Temos que $v(q) = (q, \omega)$ e tomemos a projeção de e sobre ω. Daí:

$1 = ||e|| \geq ||proj_\omega e|| > ||proj_\omega q|| = \dfrac{||(q,\omega)\cdot\omega||}{||\omega||^2} = \dfrac{|(q,\omega)|}{||\omega||} = \dfrac{|v(q)|}{||\omega||} = \dfrac{v(q)}{||\omega||}.$

Logo se $v(q) = (q, \omega) < ||\omega||$ não caimos nas hipóteses do lema e portanto, se $v(q) \geq ||\omega||$, o item 2 vale.

No item 3, o caso ruim novamente ocorre quando a célula c não está inteiramente em Γ_v ou em $q\Gamma_{-v}$. Figura 3.2.

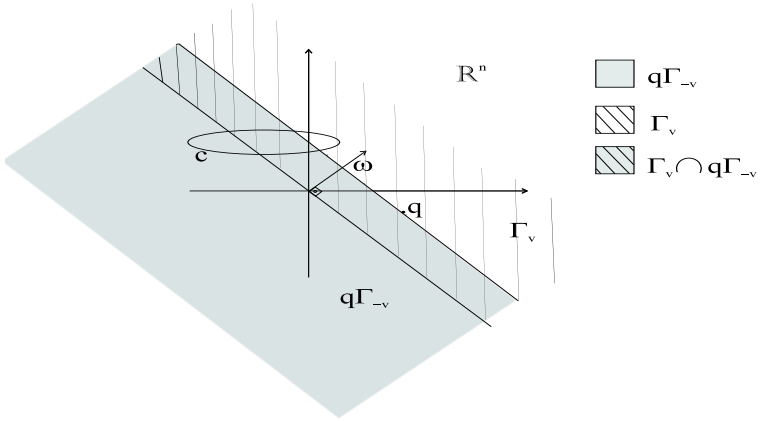


Figura 3.2: caso ruim

Se isto ocorre, tomamos agora a projeção de c sobre ω. A célula é fechada e conexa, logo a projeção $(proj_\omega c)$ é um intervalo fechado. Então

$\dfrac{1}{2}l \geq |\dfrac{1}{2}\partial c| \geq ||proj_\omega c|| > ||proj_\omega q|| = \dfrac{||(q,\omega)\cdot\omega||}{||\omega||^2} = \dfrac{|(q,\omega)|}{||\omega||} = \dfrac{(q,\omega)}{||\omega||}$

Logo, $\frac{(q,\omega)}{||\omega||} < \frac{l}{2}$. Então, $v(q) = (q,\omega) < \frac{l}{2}||\omega|| < l||\omega||$

Ou seja, o caso ruim não cai nas hipóteses do lema. E portanto, temos que o item 3 vale se $v(q) \geq l||\omega||$. □

3.6 Teorema do Módulo Manso

Nesta seção iremos demonstrar uma versão do Teorema 4.1 do artigo [4]. Vamos supor que o grupo $\mathbb{G}$ não é somente do tipo $\mathbb{FP}_2$ mas finitamente apresentável (isto é bem mais forte que $\mathbb{FP}_2$, em geral). No artigo original é considerada uma sequência exata curta de grupos $S \to H \to \mathbb{G}$, onde H é finitamente apresentável e $\frac{S}{[S,S]} \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$. As técnicas dos próximos capítulos se aplicam em H e todos os resultados sobre H passam para o quociente $\mathbb{G}$. Para não fazermos muitas reduções técnicas escolhemos trabalhar somente com o caso $\mathbb{G}$ finitamente apresentável, que é o caso principal.

O resto da dissertação contém a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 3.12. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo finitamente apresentável, $N \lhd \mathbb{G}$ um subgrupo normal de $\mathbb{G}$ com $Q = \frac{\mathbb{G}}{N}$ abeliano. Então, ou N contém subgrupo livre não cíclico ou $\frac{N}{[N,N]}$ é um $\mathbb{Z}Q$-módulo manso via conjugação.*

Denotemos: $\Gamma_1 = \Gamma_v$, $\Gamma_2 = q\Gamma_{-v}$, $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conexo por caminhos, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Observamos que $v(q) > 0$. Sejam $\tilde{\alpha}_j$ os homomorfismos induzido pelo mergulho de $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ em Γ_j e $\tilde{\beta}_j$ os homomorfismos induzido pelo mergulho de Γ_j em Γ, $j = 1, 2$.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\Gamma_{12}) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} & \Pi_1(\Gamma_1) \\ {\scriptstyle \tilde{\alpha}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\beta}_1} \\ \Pi_1(\Gamma_2) & \xrightarrow[\tilde{\beta}_2]{} & \Pi_1(\Gamma) \end{array}$$

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen, temos que $\Pi_1(\Gamma)$ é "push-out"de $\Pi_1(\Gamma_{12})$, $\Pi_1(\Gamma_1)$, $\Pi_1(\Gamma_2)$, $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$. Definimos M_j como a imagem de $\Pi_1(\Gamma_j)$ em $\Pi_1(\Gamma)$ via $\tilde{\beta}_j$, M_{12} como a imagem de $\Pi_1(\Gamma_{12})$ em $\Pi_1(\Gamma)$ via $\tilde{\beta}_1 \circ \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_2 \circ \tilde{\alpha}_2$, α_j a inclusão de M_{12} em M_j e $M = \Pi_1(\Gamma)$ é o grupo N.

Lema 3.13. *M é "push-out"de M_{12}, M_1, M_2, α_1 e α_2.*

Demonstração: Sejam β_1 inclusão de M_1 em M, β_2 inclusão de M_2 em M, h_1, h_2 homomorfismos de grupos tais que $h_1\alpha_1 = h_2\alpha_2$ e H um grupo.

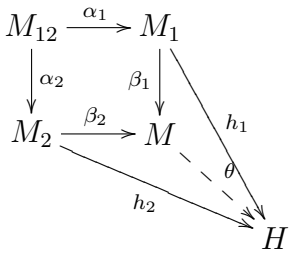


diagrama 1

Mostraremos que existe um único homomorfismo θ tal que $h_1 = \theta\beta_1$ e $h_2 = \theta\beta_2$. Observemos o seguinte diagrama:

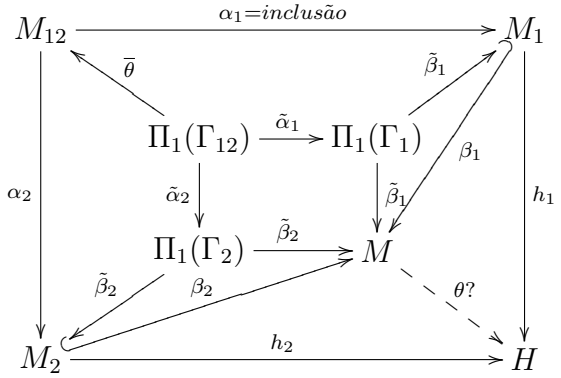


diagrama 2

onde $\overline{\theta} = \tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_2\tilde{\alpha}_2$.

Temos que $h_2\alpha_2(\overline{\theta}) = h_1\alpha_1(\overline{\theta})$ pois por hipótese $h_2\alpha_2 = h_1\alpha_1$. Então, temos que $\tilde{h}_1\tilde{\alpha}_1 = \tilde{h}_2\tilde{\alpha}_2$ onde $\tilde{h}_1 = h_1\tilde{\beta}_1$ e $\tilde{h}_2 = h_2\tilde{\beta}_2$. Já temos que $M = \Pi_1(\Gamma)$ é "push-out"de $\Pi_1(\Gamma_{12}), \Pi_1(\Gamma_1), \Pi_1(\Gamma_2), \tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$. Então, dados $\tilde{h}_j$ homomorfismo de $\Pi_1(\Gamma_j)$ em H tais que $\tilde{h}_1\tilde{\alpha}_1 = \tilde{h}_2\tilde{\alpha}_2$, existe um único $\tilde{\theta}$ tal que $\tilde{h}_j = \tilde{\theta}\tilde{\beta}_j$.

Portanto, no diagrama 1 temos a existência de $\theta := \tilde{\theta}$. Falta mostrarmos que é único.

Observamos que $M = \langle Im\tilde{\beta}_1 \cup Im\tilde{\beta}_2\rangle$, então $M = \langle Im\beta_1 \cup Im\beta_2\rangle$. Isso mostra que se θ existe, deve ser único.

Logo, M é "push-out"de $M_{12},\ M_1,\ M_2,\ \alpha_1$ e α_2. No caso quando α_1 e α_2 são injetivos, o "push-out"M é também chamado de produto livre amalgamado e denotado por $M_1 *_{M_{12}} M_2$ como visto no capítulo 1. □

Proposição 3.14. *Seja $M = M_1 *_{M_{12}} M_2$ um produto livre amalgamado. Então, uma das seguintes condições vale:*

1. *M contém subgrupo livre não cíclico;*
2. *$[M_1 : M_{12}] = 2 = [M_2 : M_{12}]$;*
3. *$M_{12} = M_1$ ou $M_{12} = M_2$.*

Antes de demonstrarmos esta proposição, observemos que $M = \Pi_1(\Gamma) \cong N$ e portanto o item 1 da Proposição 3.14 implica um dos resultados do nosso teorema principal (isto é, N tem subgrupo livre não cíclico).

Vamos mostrar que se o item 2 vale, podemos mudar q na definição de Γ_2 para obter uma nova decomposição de $\Pi_1(\Gamma)$ como produto livre amalgamado, onde o item 3 vale. Recordamos que M_1 é a imagem de $\Pi_1(\Gamma_1)$ em $\Pi_1(\Gamma)$, M_2 é a imagem de $\Pi_1(\Gamma_2)$ em $\Pi_1(\Gamma)$.

Seja $g \in M_1 \setminus M_{12}$, então $M_{12} \subsetneq \langle M_{12}, g\rangle \subseteq M_1$, $V = \langle M_{12}, g\rangle$. Pelo Teorema de Lagrange temos que $2 = [M_1 : M_{12}] = [M_1 : V][V : M_{12}]$. Como $M_{12} \subsetneq \langle M_{12}, g\rangle = V$ então, $[V : M_{12}] = 2, [M_1 : V] = 1$ e portanto $M_1 = V = \langle M_{12}, g\rangle$. Como $g \in M_1$, então g é imagem de um elemento $[\gamma]$ de $\Pi_1(\Gamma_1)$ em $\Pi_1(\Gamma)$, onde γ é caminho fechado em Γ_1 com ponto inicial $1_Q \in V(\Gamma)$. Ainda, $g \notin M_{12}$ implica que $\gamma \nsubseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Então, tomemos um $\tilde{q} \in Q$ de modo que $\gamma \subseteq \tilde{\Gamma}_{12} = \Gamma_1 \cap \tilde{\Gamma}_2$, onde $\tilde{\Gamma}_2 = \tilde{q}\Gamma_{-v} \subseteq \Gamma_2$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$. Sejam $\tilde{M}_{12}$ a imagem de $\Pi_1(\tilde{\Gamma}_{12})$ em $\Pi_1(\Gamma)$ e $\tilde{M}_2$ a imagem de $\Pi_1(\tilde{\Gamma}_2)$ em $\Pi_1(\Gamma)$. Então a nova decomposição $\Gamma = \Gamma_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$ dá a decomposição de M como produto livre amalgamado $M_1 *_{\tilde{M}_{12}} \tilde{M}_2$. Nesse caso $M_1 = \tilde{M}_{12}$, isto é, $M_1 = \langle M_{12}, g\rangle \subseteq \tilde{M}_{12}$ pois $M_{12} \subseteq \tilde{M}_{12}$ e $g \in \tilde{M}_{12} \subseteq M_1$.

Ocorrendo o caso 3, temos que $M = M_1$ ou $M = M_2$. Observamos que $M = M_1 *_{M_{12}} M_2 = \langle M_1, M_2\rangle$. Se $M_1 = M_{12}$ temos que $M_1 = M_{12} \subseteq M_2,\ M = \langle M_1, M_2\rangle = \langle M_2\rangle = M_2$. Portanto $M = M_2$, e quando isto ocorre temos que $\Pi_1(\Gamma_v) \xrightarrow{\tilde{\beta}_1} \Pi_1(\Gamma) = N$ é sobrejetora.

Analogamente, se $M_2 = M_{12}$ concluimos que $M = M_1$ e $\Pi_1(\Gamma_2) \xrightarrow{\tilde{\beta}_2} \Pi_1(\Gamma) \cong N$ é sobrejetora.

Voltando às definições que tínhamos anteriormente, demonstremos então, o seguinte resultado:

Lema 3.15. *$\Pi_1(q\Gamma_{-v}) \xrightarrow{\tilde{\beta}_2} \Pi_1(\Gamma) \cong N$ é sobrejetora $\implies$ $\Pi_1(\Gamma_{-v}) \xrightarrow{\hat{\beta}_2} \Pi_1(\Gamma) \cong N$ é sobrejetora, onde $\tilde{\beta}_2$ é homomorfismo induzido pela inclusão de Γ_{-v} em Γ.*

Demonstração: Temos os seguintes isomorfismos:

1. $\Pi_1(\Gamma_{-v}, 1_Q) \cong \Pi_1(q\Gamma_{-v}, q)$
2. $\Pi_1(q\Gamma_{-v}, q) \cong \Pi_1(q\Gamma_{-v}, 1_Q)$

No primeiro caso, basta tomar a translação por q e q^{-1}.

No segundo caso, observamos que o subcomplexo $q\Gamma_{-v}$ é conexo por caminhos. O isomorfismo $\Pi_1(q\Gamma_{-v}, q) \overset{\phi}{\cong} \Pi_1(q\Gamma_{-v}, 1_Q)$ é dado da seguinte maneira:

$\phi([\gamma_1]) = [l\gamma_1 l^{-1}]$ com inversa $\phi^{-1}([\gamma_2]) = [l^{-1}\gamma_2 l]$, onde $\gamma_1 \subseteq q\Gamma_{-v}$ é um caminho fechado com ponto básico q, $l \in q\Gamma_{-v}$ é um caminho com início em 1_Q e fim q e $\gamma_2 \subseteq q\Gamma_{-v}$ é um caminho fechado com ponto básico 1_Q. Então $l\gamma_1 l^{-1}$ é um caminho fechado em $q\Gamma_{-v}$ com ponto básico 1_Q e $l^{-1}\gamma_2 l$ é um caminho fechado em $q\Gamma_{-v}$ com ponto básico q.

Por 1 e 2 temos que $\Pi_1(\Gamma_{-v}, 1_Q) \cong \Pi_1(q\Gamma_{-v}, 1_Q)$: $\forall \gamma \subseteq \Gamma_{-v}$ caminho fechado com ponto básico 1_Q associamos $\tilde{\gamma} := l(q\gamma)l^{-1}$ caminho fechado em $q\Gamma_{-v}$ com ponto básico 1_Q, onde $q\gamma$ é o caminho obtido de γ usando a translação com q.

Agora vamos discutir em detalhes o isomorfismo $\Pi_1(\Gamma) \overset{\psi}{\cong} N$. Sejam δ um caminho reduzido e fechado em Γ com começo 1_Q, ω a imagem do rótulo de δ em $F(\mathbb{X})$, então $\omega \in F(\mathbb{X})$ e $\pi : F(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{G}$ é a projeção canônica, lembrando que $\mathbb{G} \cong \dfrac{F(\mathbb{X})}{\langle R^{F(\mathbb{X})} \rangle}$. Para cada δ está associado um ω e a imagem $\pi(\omega)$ deve ser elemento de N, pelo Lema 3.6. Então o isomorfismo ψ é dado por $\psi([\delta]) = \pi(\omega)$.

Agora sejam γ um caminho reduzido e fechado em Γ_{-v} com ponto básico 1_Q e $\hat{\omega}$ a imagem do rótulo de γ em $F(\mathbb{X})$. Sejam $\tilde{\gamma} := l(q\gamma)l^{-1}$ caminho fechado em $q\Gamma_{-v}$ com ponto básico 1_Q e ω_1 a imagem do rótulo de l em $F(\mathbb{X})$. Então $\hat{\beta}_2([\gamma]) = \pi(\hat{\omega})$, $\tilde{\beta}_2([\tilde{\gamma}]) = \tilde{\beta}_2([l(q\gamma)l^{-1}]) = \pi(\omega_1\hat{\omega}\omega_1^{-1}) = \pi(\omega_1)\pi(\hat{\omega})\pi(\omega_1)^{-1}$ observando que o rótulo de $q\gamma$ é igual ao de γ.

Denotemos $\pi(\omega_1)$ por h, e temos que $Im(\hat{\beta}_2) = \{\pi(\hat{\omega}) |\ \hat{\omega}$ é a imagem em $F(\mathbb{X})$ do rótulo de γ, $[\gamma] \in \Pi_1(\Gamma_{-v}, 1_Q)\}$ e $Im(\tilde{\beta}_2) = h\{\pi(\hat{\omega}) |\ \hat{\omega}$ é a imagem em $F(\mathbb{X})$ do rótulo de $\gamma, [\gamma] \in \Pi_1(\Gamma_{-v}, 1_Q)\}h^{-1} = hIm(\hat{\beta}_2)h^{-1}$.

Finalmente $hIm(\hat{\beta}_2)h^{-1} = Im(\tilde{\beta}_2) = N$ pois $\tilde{\beta}_2$ é sobrejetora. Como $N \lhd \mathbb{G}$ e $h \in \mathbb{G}$ temos $Im(\hat{\beta}_2) = h^{-1}Im(\tilde{\beta}_2)h = N$. Portanto $\hat{\beta}_2$ é sobrejetora. □

Voltemos agora à demonstração da Proposição 3.14.

Demonstração (Proposição 3.14)**:** O fato que a Proposição 3.14 vale pode ser visto como corolário da Teoria de Bass-Serre sobre grupos que agem sobre árvores. Como nesse trabalho nós não abordamos essa teoria, vamos considerar uma demonstração usando forma reduzida de elementos do produto livre amalgamado, discutido no Teorema 1.17 do primeiro capítulo.

Suponhamos então que os itens 2 e 3 não sejam válidos. Então existem $a_1, a_2 \in M_1 \setminus M_{12}$ e $b_1, b_2 \in M_2 \setminus M_{12}$.

Temos que $a_1b_1, a_2b_2 \in M$ e discutiremos quando a_1b_1 e a_2b_2 geram subgrupo de M que é livre de posto 2, isto é, quando M possui subgrupo livre não cíclico.

Um grupo gerado por g_1 e g_2 é livre de posto 2 se, e somente se, qualquer palavra reduzida não trivial de g_1 e g_2 é sempre diferente da unidade.

Consideramos $g_1^{\alpha_1}g_2^{\beta_1}g_1^{\alpha_2}g_2^{\beta_2}\dots g_1^{\alpha_k}g_2^{\beta_k}$, onde $\beta_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0, \dots, \alpha_k \neq 0$($\alpha_1$ e β_k podem ser zeros). Substituimos g_1 com a_1b_1, g_2 com a_2b_2 e obtemos uma palavra de a_1, a_2, b_1 e b_2 que representa elemento do produto livre amalgamado $M_1 *_{M_{12}} M_2$. Estudaremos possibilidades sobre subpalavras com o objetivo de ver quando podemos usar o critério de forma reduzida sobre elementos do produto livre amalgamado.

Podemos ter por exemplo:

$a_1b_1a_1b_1$	$a_2b_2a_2b_2$
$a_1b_1a_2b_2$	$a_2b_2a_1b_1$
$a_1\underline{b_1b_2^{-1}}a_2^{-1}$	$a_2\underline{b_2b_1^{-1}}a_1^{-1}$
$b_1^{-1}\underline{a_1^{-1}a_2}b_2$	$b_2^{-1}\underline{a_2^{-1}a_1}b_1$
$b_1^{-1}a_1^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1}$	$b_2^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}$
$b_1^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}$	$b_2^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1}$

Queremos que $b_1b_2^{-1} \notin M_{12}, a_1^{-1}a_2 \notin M_{12}, b_2b_1^{-1} \notin M_{12}$ e $a_2^{-1}a_1 \notin M_{12}$. Mas como M_{12} é grupo, podemos somente considerar os casos em que $b_1b_2^{-1} \notin M_{12}, a_1^{-1}a_2 \notin M_{12}$.

Observamos que $b_1b_2^{-1} \notin M_{12}$ é equivalente a $M_{12}b_1 \neq M_{12}b_2$ e que $a_1^{-1}a_2 \notin M_{12}$ é equivalente a $a_1M_{12} \neq a_2M_{12}$. Então:

$\exists a_1, a_2 \in M_1 \setminus M_{12} : a_1M_{12} \neq a_2M_{12} \Leftrightarrow [M_1 : M_{12}] \geq 3$

$\exists b_1, b_2 \in M_2 \setminus M_{12} : M_{12}b_1 \neq M_{12}b_2 \Leftrightarrow [M_2 : M_{12}] \geq 3$

Considerando $g_1 = a_1b_1$, $g_2 = a_2b_2$ e levando em conta que $b_1b_2^{-1} \notin M_{12}, a_1^{-1}a_2 \notin M_{12}$ mais o

resultado do Teorema 1.17 temos que $g_1^{\alpha_1}g_2^{\beta_1}g_1^{\alpha_2}g_2^{\beta_2}\dots g_1^{\alpha_k}g_2^{\beta_k} \neq 1$.

Agora, consideramos o caso em que $[M_1 : M_{12}] < 3$ ou $[M_2 : M_{12}] < 3$. Como M_1 e M_2 possuem papéis simétricos então, podemos supor $[M_1 : M_{12}] < 3$.

Se $[M_1 : M_{12}] < 3$ então, $[M_1 : M_{12}] = 1$ ou $[M_1 : M_{12}] = 2$. Como estamos supondo que os itens (2) e (3) não valem então, $[M_2 : M_{12}] \neq 1$ e $[M_1 : M_{12}] \neq 1$. Logo restam que $[M_1 : M_{12}] = 2$ e $[M_2 : M_{12}] \neq 2$.

Sejam $g_1 = ab_3, g_2 = b_1ab_2$, onde $a \in M_1 \setminus M_{12}, b_1, b_2, b_3 \in M_2 \setminus M_{12}$ e consideramos quando g_1 e g_2 geram subgrupo livre de posto 2. Como no caso anterior procuremos onde ocorre uma cancelação, isto é, quando o produto consecutivo de dois elementos de um mesmo grupo está em M_{12}.

Podemos ter:

$b_1\underline{ab_2}\underline{b_1}ab_2$ $\qquad$ $b_2^{-1}a^{-1}\underline{b_1^{-1}b_2^{-1}}a^{-1}b_1^{-1}$

$\underline{ab_3}\underline{b_1}ab_2$ $\qquad$ $\underline{ab_3}\underline{b_2^{-1}}a^{-1}b_1^{-1}$

$b_1\underline{ab_2}\underline{b_3^{-1}}a^{-1}$ $\qquad$ $b_2^{-1}a^{-1}\underline{b_1^{-1}b_3^{-1}}a^{-1}$

Como M_{12} é grupo podemos considerar somente os seguintes casos: $b_2b_1 \notin M_{12}, b_3b_1 \notin M_{12}$ e $b_3b_2^{-1} \notin M_{12}$.

$b_2b_1 \notin M_{12} \Leftrightarrow M_{12}b_2 \neq M_{12}b_1^{-1}$

$b_3b_1 \notin M_{12} \Leftrightarrow M_{12}b_3 \neq M_{12}b_1^{-1}$

$b_3b_2^{-1} \notin M_{12} \Leftrightarrow M_{12}b_3 \neq M_{12}b_2$

Portanto precisamos $M_{12}, M_{12}b_1^{-1}, M_{12}b_2$ e $M_{12}b_3$ como classes laterais a direita, diferentes dois a dois, isto é, precisamos $[M_2 : M_{12}] \geq 4$.

Considerando os casos acima, mais o resultado do Teorema 1.17 e novamente substituindo $g_1 = ab_3, g_2 = b_1ab_2$ em $g_1^{\alpha_1}g_2^{\beta_1}g_1^{\alpha_2}g_2^{\beta_2}\dots g_1^{\alpha_k}g_2^{\beta_k}$ temos que $g_1^{\alpha_1}g_2^{\beta_1}g_1^{\alpha_2}g_2^{\beta_2}\dots g_1^{\alpha_k}g_2^{\beta_k} \neq 1$. Logo se $[M_2 : M_{12}] \geq 4$,$\langle g_1, g_2\rangle$ é subgrupo livre de posto 2.

Consideramos agora o caso quando $[M_1 : M_{12}] = 2$ e $[M_2 : M_{12}] = 3$. Sejam $a \in M_1 \setminus M_{12}$, $b \in M_2 \setminus M_{12}, g_1 = bab$ e $g_2 = ababa^{-1}$. Queremos mostrar que g_1 e g_2 geram subgrupo livre de posto 2. Vejamos onde ocorrem as cancelações em $g_1^{\alpha_1}g_2^{\beta_1}g_1^{\alpha_2}g_2^{\beta_2}\dots g_1^{\alpha_k}g_2^{\beta_k}$. Observamos que $b^2 \notin M_{12}$ então $(bab)^m$ tem uma das seguintes formas reduzidas:

$$(bab)^m = \begin{cases} babbab...bab, & \text{se} \quad m > 0 \\ b^{-1}a^{-1}b^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}...b^{-1}a^{-1}b^{-1}, & \text{se} \quad m < 0 \end{cases}$$

Vejamos agora $(ababa^{-1})^m$:

$$(ababa^{-1})^m = \begin{cases} a(bab)(bab)\dots(bab)a^{-1}, & \text{se} \quad m > 0 \\ a(b^{-1}a^{-1}b^{-1})(b^{-1}a^{-1}b^{-1})\dots(b^{-1}a^{-1}b^{-1})a^{-1}, & \text{se} \quad m < 0 \end{cases}$$

Como $(g_1)^m = (bab)^m$ inicia e termina com b ou b^{-1}, $(g_2)^m = (ababa^{-1})^m$ inicia com a e termina com a^{-1} e em $b^{\pm 1}a^{\pm 1}$ não ocorre cancelamento, consequentemente temos que $g_1^{\alpha_i}g_2^{\beta_i}$ e $g_2^{\beta_i}g_1^{\alpha_{i+1}}$ são formas reduzidas. Logo $g_1^{\alpha_1}g_2^{\beta_1}g_1^{\alpha_2}g_2^{\beta_2}\dots g_1^{\alpha_k}g_2^{\beta_k}$ pode ser apresentado como palavra reduzida de a, a^{-1}, b e b^{-1} em $M_1 *_{M_{12}} M_2$, portanto $g_1^{\alpha_1}g_2^{\beta_1}g_1^{\alpha_2}g_2^{\beta_2}\dots g_1^{\alpha_k}g_2^{\beta_k} \neq 1$. Então, $\langle g_1, g_2\rangle$ é subgrupo livre de posto 2. □

Agora vamos considerar um complexo de $\mathbb{Z}$-módulos livre:

$$\wp: \quad \mathbb{Z}C \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}E \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}V \xrightarrow{\partial_0=\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_{-1}} 0$$

$\mathbb{Z}I$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base I, para $I = C, E$ ou V, isto é, os conjuntos de células, arestas ou vértices de um $CW-$complexo.

Observação 3.7. *Podemos ter outros complexos, mas para nós é suficiente o complexo acima.*

Como $\mathbb{Z}I$ é módulo livre, precisamos somente definir ∂_i sobre a base, isto é, precisamos definir $\partial_0|_V, \partial_1|_E$ e $\partial_2|_C$. $\partial_0|_V$ é a aplicação de augmentação:

$$\begin{array}{rccc} \partial_0|_V & : & V & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & g & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Lembrando que $\tau(e)$ é o fim da aresta e e $\sigma(e)$ é o início de e, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \partial_1|_E & : & E & \longrightarrow & \mathbb{Z}V \\ & & e & \longmapsto & \tau(e) - \sigma(e) \end{array}$$

Finalmente, no caso das células $c \in C$, o bordo ∂c de c é um caminho fechado $e_1^{\varepsilon_1}\dots e_k^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_i = \pm 1, e_i \in E$. Definimos $\partial_2(c) = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_k e_k$.

Agora é fácil ver que $Im(\partial_2) \subseteq Ker(\partial_1)$ e $Im(\partial_1) \subseteq Ker(\partial_0)$

Denotamos por $H_i(\Gamma)$ para $i = 0, 1$ os grupos homológicos do complexo $\wp$, isto é,

$$H_1(\Gamma) = \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)}, H_0(\Gamma) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)}.$$

Observamos que $Ker(\partial_0)$ é o $\mathbb{Z}$-módulo gerado por $v_1 - v_2$, $v_1, v_2 \in V$. Sejam v_1 e v_2 conexos por caminho $e_1^{\varepsilon_1}\dots e_k^{\varepsilon_k}$. Então $\partial_1(\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_k e_k) = v_2 - v_1$ e $v_2 - v_1 \in Im(\partial_1)$, logo $Im(\partial_1) = Ker(\partial_0)$. Isto é, $H_0(\Gamma) = 0$ se, e somente se, Γ é conexo por caminhos.

Observação 3.8. *Os grupos homológicos H_i podem ser definidos por qualquer espaço topológico e para qualquer $i \geq 0$.*

Teorema 3.16. *(Hurewicz) Seja $\mathbb{X}$ um espaço topológico conexo por caminhos. Então, existe isomorfismo entre $H_1(\mathbb{X})$ e $\dfrac{\Pi_1(\mathbb{X})}{[\Pi_1(\mathbb{X}), \Pi_1(\mathbb{X})]}$ e esse isomorfismo é natural.*

Observação 3.9. $\Pi_1(\mathbb{X})$ *não depende do ponto básico se $\mathbb{X}$ for conexo por caminhos.*

O Teorema 3.14 implica três possibilidades, na qual o item 1 diz que $M = M_1 *_{M_{12}} M_2$ contém subgrupo livre não cíclico, que é um dos resultados do nosso teorema principal. Supondo então, que o item 1 não vale vimos que o item 3 é sempre válido (trocando se necessário o subcomplexo Γ_2) e portanto $M_1 = M = N$ ou $M_2 = M = N$.

Se N não possui subgrupo livre de posto 2 então, $\Pi_1(\Gamma_v) \to \Pi(\Gamma)$ é sobrejetora ou $\Pi_1(\Gamma_{-v}) \to \Pi(\Gamma)$ é sobrejetora e isto implica que :

1. $H_1(\Gamma_v) \xrightarrow{i_*} H_1(\Gamma)$ é epimorfismo ou
2. $H_1(\Gamma_{-v}) \xrightarrow{i_*} H_1(\Gamma)$ é epimorfismo.

Como Γ é conexo por caminhos, temos pelo teorema de Hurewicz que $H_1(\Gamma) \cong \dfrac{\Pi_1(\Gamma)}{[\Pi_1(\Gamma), \Pi_1(\Gamma)]} = \dfrac{N}{[N, N]}$.

Nosso objetivo agora será demonstrar que $H_1(\Gamma_v)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_v$-módulo pois isto implica que $H_1(\Gamma)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_v$-módulo.

E do mesmo modo, pode-se demonstrar que $H_1(\Gamma_{-v})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_{-v}$-módulo.

Então, $\dfrac{N}{[N, N]}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_v$-módulo ou $\dfrac{N}{[N, N]}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_{-v}$-módulo. E isto significa que $\dfrac{N}{[N, N]}$ é $\mathbb{Z}Q$-módulo manso, que é o outro resultado do nosso teorema principal.

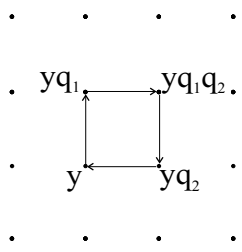
Lema 3.17. $H_1(\Gamma_v)$ *é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_v$-módulo.*

Demonstração: Consideremos o seguinte complexo:

$$\mathbb{Z}C(\Gamma_v) \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}E(\Gamma_v) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}V(\Gamma_v) \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como ∂_i é homomorfismo de $\mathbb{Z}Q_v$-módulos então, $Ker(\partial_1)$, $Im(\partial_2)$ e $H_1(\Gamma_v) = \dfrac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)}$ são $\mathbb{Z}Q_v$-módulos. Basta demonstrarmos que $Ker(\partial_1)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_v$-módulo.

$Ker(\partial_1)$ é um $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Z}E(\Gamma_v)$ gerado por elementos que são arestas fechadas (loops) e abelianização de caminhos fechados γ em Γ_v, isto é, $\gamma = (y, q_1) + (yq_1, q_2) - (yq_2, q_1) - (y, q_2)$, onde $y, yq_1, yq_2, yq_1q_2 \in Q_v$ e $\{q_1, q_2\}$ pertence a imagem de T em $Q = \dfrac{\mathbb{G}}{N}$. Lembremos que $\mathbb{G}$ tem apresentação $\langle \mathbb{X}|R\rangle$ com conjunto especial de geradores $\mathbb{X} = M \cup T$ definido na subseção 3.3.



As arestas fechadas em Γ_v formam um número finito de Q_v-órbitas disjuntas e esse número é exatamente $|M|$.

Resta verificar que o segundo tipo de geradores (do tipo γ) é finito módulo a ação de Q_v. Suponhamos que para a base $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de Q, $v(q_i) \geq 0, \forall i$. Caso $v(q_j) < 0$ para algum j, trocamos q_j por q_j^{-1}. Como v é homomorfismo, observamos que $v(yq_i) = v(y) + v(q_i) \geq v(y)$ e portanto, o valor minimal de v sobre as arestas em γ é $v(y)$.

Consideramos $\gamma = (y, q_1) + (yq_1, q_2) - (yq_2, q_1) - (y, q_2)$ em $\mathbb{Z}\Gamma_v$. Então devemos ter $v(y) \geq 0$. Mas $v(y) \geq 0$ se, somente se $y \in Q_v = V(\Gamma_v)$. Logo os caminhos fechados em Γ_v são junções de caminhos do tipo γ.

Seja $\tilde{\gamma} := (1, q_1) + (q_1, q_2) - (q_1q_2, q_1) - (q_2, q_2) \in \mathbb{Z}E(\Gamma_v), E(\Gamma_v) = Q_v \times \mathbb{X}, \tilde{\gamma} \in Ker(\partial_1)$, $\tilde{\gamma}$ é fixo e existe só um número finito de elementos deste tipo. Então, $\gamma = y\tilde{\gamma}$. Logo γ e portanto, os caminhos fechados em Γ_v formam um número finito de Q_v-órbitas com todos os geradores $\tilde{\gamma}$ possíveis.

Logo os geradores de $Ker(\partial_1)$ formam um número finito de Q_v-órbitas e portanto, $Ker(\partial_1)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_v$-módulo. O que nos mostra que $H_1(\Gamma_v)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q_v$-módulo. □

Assim temos todos os dados e encaminhamentos para a demonstração do Teorema Principal.

3.7 Grupos Metabelianos

Observamos que o artigo [4] contém mais resultados do que nós discutimos no terceiro capítulo. Dizemos que G é grupo *metabeliano* se existe uma sequência exata curta de grupos $A \to G \to Q$ com A e Q abelianos. No caso de G ser finitamente gerado e metabeliano (nesse caso G não pode ter subgrupo livre não cíclico), a volta do Teorema 4.1 de Bieri-Strebel vale. Este vem como o Teorema 5.4 do artigo [4].

Teorema 5.4: Seja G um grupo finitamente gerado com subgrupo normal abeliano A e quociente $Q = G/A$ também abeliano. Então as seguintes condições são equivalentes:

1. G é finitamente apresentável,
2. G tem tipo FP_2,
3. A é um $\mathbb{Z}Q$-módulo manso, onde Q age sobre A via conjugação.

3.8 Um Exemplo

Seja A o grupo abeliano $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ com operação $+$ e $Q \cong \mathbb{Z}$ grupo infinito cíclico com gerador q. Consideramos o produto semi-direto $G = A \rtimes Q$ (a definição pode ser encontrada em [10]) onde q age via conjugação por meio da multiplicação com $2/3$, isto é,

$$qaq^{-1} = \frac{2a}{3} \in A$$

para cada $a \in A$. Neste caso vemos que G é metabeliano. Neste caso A é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-módulo via conjugação (de fato é cíclico com gerador 1), $S(Q)$ como no exemplo 3.5 tem dois pontos e $\Sigma_A(Q) = \emptyset$ pois A não é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$-módulo e A não é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[\frac{3}{2}]$-módulo. Observamos que $\mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$, o anel gerado por $\mathbb{Z}$ e $2/3$, é igual a $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ e $\mathbb{Z}[\frac{3}{2}]$, o anel gerado por $\mathbb{Z}$ e $3/2$, é igual a $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Então A não é um $\mathbb{Z}Q$-módulo manso. Por outro lado G é extensão de um grupo abeliano por outro abeliano, portanto é solúvel. Grupos solúveis não contém subgrupos livres não cíclicos. Então, pelo Teorema principal G não é finitamente apresentável.

Observamos que esse exemplo segue também do resultado principal de [3] que usa decomposição de grupos do tipo $\mathbb{FP}_2$ como extensões HNN, mas essas extensões não foram estudadas nesse trabalho. Ressaltamos somente que os produtos livres amalgamados e as extensões HNN são os blocos básicos na construção do grupo fundamental de grafo de grupos, que é objeto principal da teoria de Bass-Serre sobre grupos que agem sobre árvores.

Conclusão

Nesta tese alcançamos os nossos objetivos e apresentamos como as técnicas da teoria combinatorial de grupos (grupos livres, grupos finitamente apresentáveis, "push-out", geradores e relações de grupos) e da topologia algébrica (grupo fundamental, recobrimento de espaços topológicos, grupos que agem propriamente descontínuos e Teorema de Seifert-Van Kampen) podem ser usados para obter resultados em teoria de grupos.

Referências Bibliográficas

[1] M. Bestvina, N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*. Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 445–470.

[2] R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups*. Second edition. Queen Mary College Mathematical Notes. Queen Mary College, Department of Pure Mathematics, London, 1981.

[3] R. Bieri, R. Strebel, *Almost finitely presented soluble groups*. Comment. Math. Helv. 53 (1978), no. 2, 258–278.

[4] R. Bieri, R. Strebel, *Valuations and finitely presented metabelian groups*. Proc. London Math. Soc. (3) 41 (1980), no. 3, 439–464.

[5] K. S. Brown, *Cohomology of groups*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[6] D. E. Cohen, *Combinatorial group theory: a topological approach*. London Mathematical Society Student Texts, 14. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[7] S. Lang, *Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.

[8] E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

[9] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*. Reprint of the 1967 edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[10] J. Rotman, *An introduction to homological algebra*. Academic Press, New York-London, 1979.

[11] J.P. Serre, *Trees*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.