

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Estabilidade de soluções ondas
viajantes periódicas para as equações
de Boussinesq e de Korteweg - de Vries**

por

Lynnyngs Kelly Arruda S. de Paiva [†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

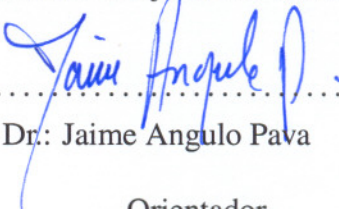
Orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava
Co-orientadora: Profa. Dra. Márcia Scialom

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

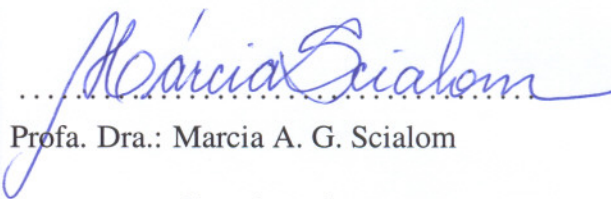
Estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para as equações de Boussinesq e de Korteweg - de Vries

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de Paiva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de junho de 2005.


.....
Prof. Dr.: Jaime Angulo Pava

Orientador


.....
Profa. Dra.: Marcia A. G. Scialom

Co-orientadora

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Jaime Angulo Pava - IMECC/UNICAMP
2. Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro - IMECC/UNICAMP
3. Prof. Dr. Marko Rojas Medar - IMECC/UNICAMP
4. Prof. Dr. Rolci de Almeida Cipolatti - UFRJ
5. Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández - UFAL

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Paiva, Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de
P166e Estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para as equações
Boussinesq e de Korteweg-de Vries / Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de Paiva --
Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientadores: Jaime Angulo Pava; Marcia A. G. Scialom

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Equações de evolução
não-linear. 3. Equações diferenciais hiperbólicas. I. Pava, Jaime Angulo. II.
Scialom, Marcia A. G. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Stability of periodic travelling wave solutions for the Boussinesq and
Korteweg- de Vries equations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Partial differential equations. 2. Nonlinear
equations of evolution. 3. Hyperbolic differential equations.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

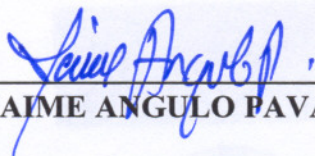
Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (UNICAMP)
Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar (UNICAMP)
Prof. Dr. Rolci de Almeida Cipolatti (UFRJ)
Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández (UFAL)

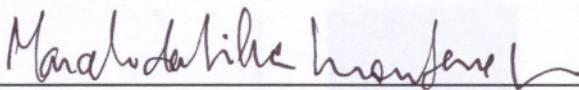
Data da defesa: 24/06/2005

Tese de Doutorado defendida em 24 de junho de 2005 e aprovada

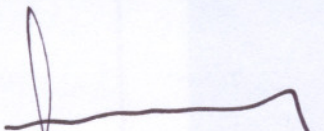
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



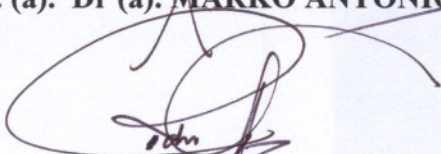
Prof. (a). Dr (a). JAIME ANGULO FAVA



Prof. (a). Dr (a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO



Prof. (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR



Prof. (a). Dr (a). ROLCI DE ALMEIDA CIPOLATTI



Prof. (a) Dr. (a) ADÁN JOSÉ CORCHO FERNÁNDEZ

Boussinesq est considéré comme l'un des grands spécialistes français de la mécanique et de la physique mathématique. Ses travaux en hydrodynamique constituent également une partie importante de son oeuvre. En 1897, il y a 100 ans, il apporta une contribution déterminante à la connaissance de la turbulence et de la couche limite par la publication de son ouvrage intitulé "Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides". Dans ce qui suit, les étapes marquantes de sa vie et de son oeuvre sont retracées. Un hommage est ainsi rendu à ce savant relativement peu connu comme hydromécanicien, dont la vie se déroula dans le calme et la solitude.

Regarding T. Brooke Benjamin, Hunt describes him as follows:

Brooke Benjamin had a most attractive aura - wise, sensitive and with a touch of mystery - in fact a bit of a Cheshire cat. He was about 6 feet tall, moving slowly, smiling slightly, often with a pipe in his mouth, and speaking so that every word counted. Along with most academics he had strong views on how research should be managed. At Essex he was able to put his ideas into practice, whereas at Oxford he focused more on public issues of science. He continued to play the violin and the piano at home and enjoyed sharing his masterful critiques of musical performances. He wrote poetry for his own enjoyment. He endeared himself to 'technical' academic colleagues by his enthusiasm for Britain's steam railways and for railway museums.

*... à minha família e,
em especial, uma homenagem póstuma ao meu tio Dr. Raimundo Vasconcelos de Arruda.*

À Deus, pelo seu amor e infinita misericórdia.

Aos meus pais José Emilson Lima Saraiva e Maria Fátima Arruda de Vasconcelos Saraiva pelo que sou, pelo apoio moral, confiança, disciplina e amor dispensados ao longo de minha vida. Aos meus irmãos e avós, em especial, ao meu avô materno (em memória) Manoel Cavalcante de Vasconcelos, por seu incentivo constante ao hábito da boa leitura e da pesquisa incessante, passos essenciais à concretização da meta de minha vida.

Aos professores Jaime Angulo e Márcia Scialom, pela orientação.

À professora Hebe de Azevedo Biagioni, em minha introdução às equações diferenciais parciais de evolução, por seus ensinamentos e discussões frutíferas em nossos seminários sobre a teoria de semigrupos e sobretudo por seu exemplo de companheirismo e simplicidade.

Aos professores Helena Nussensweig Lopes e Jorge P. Zubelli, coordenadores do Projeto Alfa (AML/B7-311/97/0666/II-0143-FCD/ PDEs in Industry and Engineering), Márcia Scialom e Jaime Angulo Pava, pela indicação para a participação neste projeto, na Universidade de Paris - Dauphine/França. Ao PRONEX e ao Austrian Science Fund, pelo apoio financeiro.

Aos professores Éric Séré e Jean Dolbeaut, pela orientação e amizade durante o período em que estive em Paris.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFC; tenho necessidade de expressar o meu apreço pelo professor Antônio Gervásio Colares, orientador de mestrado, exímio geômetra e amigo espirituoso.

Aos meus amigos e particularmente à Lourdes Crispim e sua singular família: Cidinha Kugelmeier, Werner Kugelmeier e seus filhos; à minha fiel amiga Júlia Victória Toledo Benavides e aos amigos de todas as horas Aline Pinto, Marcelo Furtado, Eugenio Massa, PC, Luizinho, Lidianne e a tantos outros que já não os posso enumerar.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP, em especial à Cidinha, Ednaldo e Tânia, sou grata pela prestreza.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido durante o período de meu Doutorado.

Ao meu marido Odair, pelo seu amor e dedicação sem medida.

Abstract

This thesis is concerned with nonlinear stability properties of periodic travelling wave solutions of the generalized Boussinesq equation

$$u_{tt} = u_{xx} - (u^p + u_{xx})_{xx}, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

for $p = 2$ and $p = 3$ and of the classical Korteweg - de Vries equation

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

For the generalized Boussinesq equation, in the cases where $p = 2$ and $p = 3$, it is shown that the special *cnoidal wave solutions* and *dnoidal wave solutions*, respectively, are nonlinearly stable in the space $H^1_{per}([0, L]) \times L^2_{per}([0, L])$, for a range of their speeds of propagation.

For the classical Korteweg - de Vries equation, it is shown the existence of a non-trivial smooth curve of periodic travelling wave solutions depending on the classical Jacobian elliptic functions. We find positive *cnoidal wave* solutions. Then we prove the nonlinear stability of these cnoidal wave solutions in the space $H^1_{per}([0, L])$.

These results are proved by using the framework established in [21] by Grillakis, Shatah and Strauss and the recently works [2, 5, 6].

Resumo

Nesta tese, estudamos propriedades de estabilidade não linear de soluções ondas viajantes periódicas da equação de Boussinesq generalizada

$$u_{tt} = u_{xx} - (u^p + u_{xx})_{xx}, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

nos casos em que $p = 2$ e $p = 3$ e da equação de Korteweg - de Vries clássica

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Para a equação de Boussinesq generalizada, nos casos em que $p = 2$ e $p = 3$, mostramos que as soluções especiais conhecidas como *ondas cnoidais* e *ondas dnoidais*, respectivamente, são orbitalmente estáveis no espaço $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, para uma certa classe de suas velocidades de propagação.

Para a equação de Korteweg - de Vries clássica, mostramos a existência de uma curva suave não trivial de soluções ondas viajantes periódicas dependendo das funções elípticas jacobianas. Encontramos soluções *ondas cnoidais* positivas. Então provamos a estabilidade não linear destas soluções ondas cnoidais no espaço $H_{per}^1([0, L])$.

Provamos estes resultados de estabilidade utilizando principalmente a teoria abstrata desenvolvida por Grillakis, Shatah e Strauss em [21] e os recentes trabalhos [2, 5, 6].

SUMÁRIO

Abstract	i
Resumo	ii
1 Introdução	1
2 O problema de Cauchy para a equação generalizada de Boussinesq periódica	9
2.1 Equação de Boussinesq: Teoria Local	9
2.1.1 Teoria de Kato: Boa colocação em $H^{s+2} \times H^{s+1}$, $s > \frac{1}{2}$	10
2.1.2 Existência local em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$	17
2.2 Comportamento assintótico de soluções: Blow-up	22
3 Estabilidade de ondas viajantes periódicas para a equação de Boussinesq - Caso $A_\phi \neq 0$	27
3.1 Estrutura hamiltoniana do sistema (3.0.1)	29
3.2 Ondas periódicas viajantes do sistema (3.0.1)	30
3.3 Considerações fundamentais na teoria de estabilidade	32
3.4 Estabilidade	33
3.4.1 Soluções constantes e estabilidade	33
3.4.2 Estabilidade de ondas cnoidais para o sistema (3.0.1)	37
3.4.3 Existência de uma curva suave de ondas cnoidais com um período fundamental fixo	37

3.4.4	Análise espectral do operador $\mathcal{L}_c$	47
3.4.5	Convexidade da função $d(c)$	48
3.4.6	Um teorema de existência global	61
4	Estabilidade de ondas viajantes periódicas para a equação de Boussinesq modificada	
	- Caso $A_\phi = 0$	63
4.1	Estrutura hamiltoniana do sistema (4.0.1)	64
4.2	Ondas periódicas viajantes do sistema (4.0.1)	64
4.3	Estabilidade	67
4.3.1	Soluções constantes e estabilidade	67
4.3.2	Estabilidade de soluções não triviais para o sistema 4.0.1	69
4.3.3	Existência de uma curva suave de soluções dnoidais com um período fixo	69
4.3.4	Análise espectral do operador $\mathcal{L}_c$	73
4.3.5	Convexidade de $d(c)$	74
4.3.6	Um teorema de existência global	82
5	Estabilidade de ondas viajantes periódicas para as equações de Korteweg - de Vries e de Boussinesq - Caso $A_\phi = 0$	83
5.1	Ondas periódicas viajantes da equação (5.0.1)	84
5.2	Estabilidade para a equação de Korteweg - de Vries	87
5.2.1	Estabilidade de ondas cnoidais para a KdV	88
5.2.2	Existência de uma curva suave de soluções cnoidais com um período fixo	88
5.2.3	Convexidade de $d(c)$	92
5.3	Estabilidade para a equação de Boussinesq	95
	Considerações Finais	97
6	Apêndice	99
6.1	Integrais elípticas Jacobianas	99
6.2	Teoria de Floquet para $\mathcal{L}_{cn}$ e $\mathcal{L}_{dn}$	102
	Referências Bibliográficas	109

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste trabalho, propomo-nos principalmente a investigar propriedades de estabilidade não linear de soluções ondas viajantes periódicas para a equação de Boussinesq generalizada

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (f(u))_{xx} = 0, \quad (1.0.1)$$

a qual pode ser reescrita equivalentemente como um sistema de equações da forma

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = (u - u_{xx} - f(u))_x \end{cases} \quad (1.0.2)$$

para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e $f(u) = u^p$, $p \geq 2$ e para a equação de Korteweg - de Vries (KdV)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.0.3)$$

para $x, t \in \mathbb{R}$ e $u(x, t) \in \mathbb{R}$.

O sistema (1.0.2) possui duas quantidades conservadas básicas, a saber, a energia

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 + v^2 + u_x^2 - F(u) dx, \quad (1.0.4)$$

onde $F'(z) = f(z)$ e $F(0) = 0$ e o momento

$$I(u, v) = \int_0^L uv dx. \quad (1.0.5)$$

Estas duas quantidades serão relevantes na investigação da estabilidade de ondas viajantes periódicas. A conservação de energia pode implicar em existência global de solução para (1.0.2) desde

que seja positiva definida. No entanto, sendo negativa definida, é possível mostrar blow-up em tempo finito, *vide* [25] e [40].

Destacamos que cronologicamente, o primeiro tratamento matemático do problema da estabilidade de ondas viajantes foi feito por Joseph Valentin Boussinesq, em 1871, (v. [15, 16]), com relação às ondas solitárias associadas à equação

$$u_{tt} - gh u_{xx} - gh \left(\frac{3u^2}{2h} + h^2 \frac{u_{xx}}{3} \right)_{xx} = 0. \quad (1.0.6)$$

Tal equação, que viria a ser conhecida como equação de Boussinesq clássica, modela a propagação unidimensional de ondas de água ao longo de um canal com fundo plano e profundidade constante h , as quais têm um largo comprimento de onda e uma pequena amplitude em comparação com h . Assim, a elevação u da superfície de água, considerada como função da coordenada x ao longo do canal e do tempo t , satisfaz aproximadamente à equação (1.0.6), onde g é a aceleração gravitacional. Usando esta equação, Boussinesq obteve uma representação explícita de ondas solitárias,

$$u(x, t) = \phi(x - ct),$$

em termos de funções elementares, a saber, $\phi(x) = k_1(c) \operatorname{sech}^2(k_2(c)x)$, onde $k_1(c) = \frac{3c}{2}$, $k_2(c) = \frac{\sqrt{c}}{2}$. O tipo de estabilidade que Boussinesq estudou foi aquela chamada de estabilidade de forma, a qual consiste essencialmente em ver que uma pequena perturbação da onda solitária ϕ irá evoluir pelo fluxo gerado por (1.0.6) sem forte mudança de forma e perto da onda ϕ , para todo tempo t . Como é sabido atualmente, seus resultados formais continham algumas lacunas.

A primeira prova rigorosa da estabilidade de ondas solitárias associada à equações de evolução não lineares apareceu um século mais tarde, em 1972, apresentada por T. B. Benjamin em [8], sobre as ondas solitárias associadas à equação de Korteweg - de Vries (1.0.3). Tais ondas são dadas por

$$\phi(x - ct) = k_1(c) \operatorname{sech}^2[k_2(c)(x - ct)] \quad (1.0.7)$$

onde $k_1(c) = \frac{3c}{2}$, $k_2(c) = \frac{\sqrt{c}}{2}$. Assim, combinando técnicas modernas de análise e uma maior elaboração do argumento originalmente dado por Boussinesq para a equação (1.0.6), o resultado de estabilidade orbital (ou de forma) de Benjamin pode ser estabelecido como segue. A órbita gerada por ϕ dada por

$$\Omega_\phi = \{\phi(\cdot + y) : y \in \mathbb{R}\},$$

é estável em $H^1(\mathbb{R})$ com relação ao fluxo gerado pela equação KdV. Ou seja, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $\|u_0 - \phi\|_1 < \delta$, então a solução $u(x, t)$ de (1.0.3) com dado inicial $u(x, 0) = u_0$, satisfaz

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \|u(t) - \phi(\cdot + y)\|_1 < \epsilon, \quad (1.0.8)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Aqui, $\|\cdot\|_1$ representa a norma em $H^1(\mathbb{R})$.

Importante se torna nesse ponto abrirmos um parêntese a respeito da equação de Korteweg - de Vries. Em 1895, Diederik Johannes Korteweg e seu aluno Gustav de Vries deduziram em [28] a equação

$$u_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{2}{3} \alpha u + \frac{1}{3} \sigma u_{xx} \right)_x, \quad (1.0.9)$$

onde $l + u(x, t)$ representa a elevação da superfície de água sobre o fundo do canal no tempo t e a uma distância x da origem das coordenadas, g é a aceleração gravitacional, α é uma constante pequena em relação a velocidade do movimento uniforme do líquido e σ é uma constante relacionada com a conhecida tensão capilar de uma superfície com respeito a densidade do fluido. Esta equação é válida para ondas com uma amplitude pequena comparativamente a altura l do canal.

Após uma mudança de variáveis, a equação (1.0.9), conhecida hoje como equação de Korteweg - de Vries clássica, pode ser reescrita como

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.0.10)$$

onde $u(x, t)$ denota a forma da onda. Esta equação possui um termo não linear, a saber, $6uu_x$ e um termo dispersivo u_{xxx} . A procura por uma onda viajante $u(x, t) = \phi(x - ct)$ em (1.0.10) nos pode conduzir a soluções periódicas; com efeito, podemos encontrar ϕ em termos do quadrado da função elíptica $cn(\cdot; k)$, razão pela qual estas ondas viajantes são chamadas de ondas cnoidais. Um fato importante a ser observado é que quando o módulo k desta função elíptica se aproxima de 1, esta solução periódica tende ao sólito

$$u(x, t) = -a \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{a}{2}} (x - 2at) \right\}, \quad (1.0.11)$$

onde a é uma constante que depende de c e quando o módulo se aproxima de zero, obtemos a onda sinusoidal deduzida por Stokes. Imediatamente após a publicação do artigo de Korteweg e de Vries [28], a onda estacionária não foi considerada um tópico importante e após um longo período adormecida renasceu como uma das equações mais fundamentais no fenômeno do sólito. De fato, é de experiências numéricas desta equação que Zabusky e Kruskal introduziram o termo “sólito” [48]. Nesta mesma ocasião, outros pesquisadores propuseram problemas interessantes, como o problema ainda em aberto de Fermi, Pasta e Ulam relacionado a condutividade de calor finita em sólidos [20].

Nas duas últimas décadas, cresceu consideravelmente o interesse pelo estudo da existência e estabilidade de ondas solitárias em ciências naturais e aplicadas, como por exemplo, na mecânica quântica, física do estado sólido e cristalografia. (*Vide* por exemplo, [12], [21, 22], [29], [31], [37],

[41, 42], [44], [45, 47], [49]). Destacamos em particular o artigo de Bona & Sachs de 1988 [13], por tratar-se da existência global e estabilidade de ondas solitárias para o sistema (1.0.2), em que os autores demonstraram que a solução onda solitária

$$\vec{\phi}_c = (\phi_c(x - ct), \psi_c(x - ct)) = (k_1 \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}}(k_2(x - ct)), -ck_1 \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}}(k_2(x - ct))),$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 = k_1(c, p) &= \left[\left(\frac{p+1}{2} \right) (1 - c^2) \right]^{\frac{1}{p-1}}, \\ k_2 = k_2(c, p) &= \frac{(1 - c^2)^{\frac{1}{2}} (p - 1)}{2} \end{aligned}$$

é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ para todo c satisfazendo $\frac{(p-1)}{4} < c^2 < 1$, com $p < 5$. Notamos que este resultado, no caso $p = 2$, completa a teoria iniciada por Boussinesq.

Quanto a existência, estabilidade ou instabilidade de ondas viajantes periódicas para equações de evolução dispersivas, o primeiro estudo realizado foi feito por Benjamin em [8], com relação as ondas periódicas de tipo cnoidal associadas à equação de Korteweg -de Vries (1.0.3). Este trabalho, possuía alguns lapsos em pontos centrais da teoria de estabilidade os quais foram recentemente justificados por Angulo & Bona em [5] (v. também [3]). Nosso trabalho, dentre outros resultados, cobre o caso não analisado em [5], o qual ficará claro no que se segue.

Nesta tese, fazendo uso da teoria desenvolvida por Grillakis, Shatah & Strauss [21], estudamos a estabilidade de soluções ondas viajantes L -periódicas do sistema (1.0.2), a saber,

$$(u(x, t), v(x, t)) = (\phi(x - ct), \psi(x - ct))$$

onde $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem $\phi(x + L) = \phi(x)$, $\psi(x + L) = \psi(x) \forall x \in \mathbb{R}$, $\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(L)$, $\psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(L) \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{cases} -c\phi = \psi \\ -c\psi = \phi - \phi'' - f(\phi) + A_\phi, \end{cases} \quad (1.0.12)$$

onde A_ϕ é uma constante de integração. Aqui, estamos interessados nos casos $p = 2, 3$. As soluções que obtivemos são dadas em termos das funções elípticas Jacobianas clássicas, denominadas respectivamente de cnoidais e dnoidais.

As soluções cnoidais associadas ao caso $p = 2$ serão da forma

$$\phi(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k \right], \quad (1.0.13)$$

onde cn é definido como

$$cn(u; k) = \sqrt{1 - sn^2(u; k)}$$

e $sn(u; k) = y_1$ sendo a função inversa da integral elíptica do primeiro tipo

$$u(y_1; k) = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Aqui, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ serão os zeros reais do polinômio $p_\phi(t) = -t^3 + 3wt^2 + 6A_\phi t + 6B_\phi$, que é obtido da forma de quadratura da equação

$$\phi'' - (1 - c^2)\phi + \frac{\phi^2}{2} = A_\phi, \quad (1.0.14)$$

onde $c \in (-1, 1)$. (A forma de quadratura de (1.0.14) é obtida multiplicando-se esta equação por ϕ' e integrando).

Considerando sem perda de generalidade $A_\phi = 0$ em (1.0.14), uma vez que a constante de integração pode ser absorvida em uma nova variável satisfazendo uma equação da mesma forma que (1.0.14), verificamos facilmente que ela possui uma solução constante não nula $\phi_0 = 2 - 2c^2$, o que implica diretamente na existência de uma única solução constante para o sistema (1.0.2), dada por $(\phi_0, -c\phi_0) = (2 - 2c^2, 2c^3 - 2c)$. Demonstramos aqui, que $(2 - 2c^2, 2c^3 - 2c)$ é estável desde que $c^2 > \frac{1}{5}$ e $1 - c^2 < \frac{4\pi^2}{L^2}$, onde $L > 0$ é um número fixo. (*Vide* Teorema 3.1).

Já no estudo da estabilidade de soluções não triviais da equação, ou seja, soluções cnoidais, tratamos dos casos em que $A_\phi \neq 0$ e $A_\phi = 0$ separadamente. No primeiro caso, demonstramos que existem $\epsilon > 0$ e $L_0 > 0$ tais que a onda cnoidal $(\phi, -c\phi)$ dada por (1.0.13) é estável para $c \in (-1, -1 + \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1)$ e $L > L_0$ (v. Teorema 3.7). Numericamente, é possível estimar $L_0 \sim 4.256151539$. No segundo caso, obtemos estabilidade para a onda viajante $(\phi, -c\phi)$, com ϕ dada por (1.0.13) e com um período fixo $L > 2\pi$ tal que $c^2 > \frac{1}{3}$ e $1 - c^2 > \frac{4\pi^2}{L^2}$, (v. Teorema 5.7). Notamos que para solucionar o caso $A_\phi \neq 0$, utilizamos a teoria desenvolvida por Angulo & Bona em [5] para tratar do problema de estabilidade de ondas cnoidais para a equação de Korteweg - de Vries. Neste trabalho os autores obtiveram um resultado desenvolvendo uma teoria com média zero e considerando a constante de integração $A_\phi \neq 0$. O caso $A_\phi = 0$, para ϕ não constante, não foi considerado nesse trabalho. A fim de solucionar o caso $A_\phi = 0$ para a equação de Boussinesq, desenvolvemos uma teoria de estabilidade para a equação de Korteweg - de Vries para o caso não considerado em [5]. (*Vide* Capítulo 5).

Agora, com relação ao caso $p = 3$, ou seja, a equação de Boussinesq modificada, encontramos as soluções dnoidais da forma

$$\phi(\xi) = \eta_1 \operatorname{dn}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\xi; k\right) \quad (1.0.15)$$

onde dn é definido como

$$dn(u; k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u; k)},$$

e η_1 será um zero real do polinômio $p_\phi(t) = -t^4 + 2wt^2 + 4B_\phi$, que se obtém da forma de quadratura da equação

$$\phi'' - (1 - c^2)\phi + \phi^3 = 0, \quad (1.0.16)$$

associada ao sistema de equações satisfeito por ϕ, ψ em (1.0.12), com $p = 3$ e $c \in (-1, 1)$. Aqui estamos considerando o caso em que as quatro raízes de $p_\phi(t)$ são reais e portanto simétricas, a saber, $\eta_1, -\eta_1, \eta_2, -\eta_2$, já que existem outras soluções de tipo cnoidal de (1.0.16), quando consideramos duas raízes de p_ϕ de tipo imaginário puro (*Vide* Observação 4.5 da Seção 4.3.3). Notamos que não se tem conhecimento de resultado de estabilidade para estas ondas.

Para as soluções $(\phi, -c\phi)$, com ϕ dada por (1.0.15) e com período $L > 2\pi$, mostramos estabilidade para $c^2 > 1 - w_0$, onde $0 < w_0 < \frac{1}{2}$ e $1 - c^2 > \frac{2\pi^2}{L^2}$ (v. Teorema 4.4). Para a obtenção deste resultado fizemos uso do trabalho de Angulo em [6]. Demonstramos também a estabilidade para as soluções constantes $(\phi_0, \psi_0) = (\sqrt{1 - c^2}, -c\sqrt{1 - c^2})$ e $(\phi_1, \psi_1) = (-\sqrt{1 - c^2}, c\sqrt{1 - c^2})$ da equação (1.0.16), para $c^2 > 1/3$ e $1 - c^2 < \frac{2\pi^2}{L^2}$ (v. Teorema 4.1).

Além disso, demonstramos ainda que o sistema (1.0.2), $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ é localmente bem colocado em $H_{per}^{s+2}([0, L]) \times H_{per}^{s+1}([0, L])$, para $s > 1/2$, utilizando a teoria abstrata das equações de evolução não lineares desenvolvida por Tosio Kato (v. [26]). Neste espaço, obtivemos um resultado de blow-up de soluções L -periódicas para este sistema.

Provamos também a existência de solução fraca local em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ através da teoria de semigrupos (*vide* [38]). Essa existência revela-se fundamental em nosso estudo de estabilidade se queremos perturbar as ondas viajantes por dados iniciais neste espaço. Usando nossa teoria de estabilidade, mostrada nos capítulos 4 e 5, demonstramos a existência global de soluções em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, nos casos em que $p = 2$ e $p = 3$, para dados iniciais próximos das ondas viajantes periódicas na norma deste espaço.

Organizamos esta tese da seguinte forma. No capítulo 2, estudamos o problema de Cauchy associado ao sistema (1.0.2), o qual é necessário para o nosso estudo da estabilidade. Nos capítulos 3 e 4, tratamos da estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas constantes e não constantes, a saber, ondas cnoidais (Caso $A_\phi \neq 0$) e dnoidais, respectivamente, para o sistema (1.0.2). No capítulo 5 tratamos da estabilidade de soluções cnoidais para a equações de Korteweg - de Vries e de Boussinesq, ambas no caso em que $A_\phi = 0$. Finalmente, no capítulo 6 (Apêndice 1), estabelecemos algumas propriedades das integrais elípticas Jacobianas retiradas do livro de Byrd & Friedman (*vide* [11]), fundamentais à nossa teoria de estabilidade. Também apresentamos a teoria

de Floquet associada a dois operadores cujos espectros possuem propriedades essenciais para o nosso estudo. A teoria de Floquet é usada para obter uma análise espectral detalhada das formas jacobianas das equações de Lamé associadas ao estudo de tais espectros.

CAPÍTULO 2

O problema de Cauchy para a equação generalizada de Boussinesq periódica

Neste capítulo, estudaremos o problema de Cauchy associado à equação generalizada de Boussinesq periódica (1.0.1). Na subseção 2.1.1, demonstramos um resultado de boa colocação local em $H_{per}^{s+2}([0, L]) \times H_{per}^{s+1}([0, L])$, $s > \frac{1}{2}$ como consequência da Teoria abstrata de Kato (1975) (v. [26]) para equações de evolução quase lineares. Na subseção seguinte, utilizamos a Teoria de Semi-grupos para obtermos um teorema de existência local em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Este último espaço será central em nossa teoria de estabilidade. Na última seção, tratamos do blow-up de soluções periódicas. Aqui, a noção de boa colocação inclui a existência, unicidade e dependência contínua da solução com relação ao dado inicial.

2.1 Equação de Boussinesq: Teoria Local

Demonstraremos alguns teoremas de boa colocação local para o problema de valor inicial periódico associado à equação de Boussinesq generalizada

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (f(u))_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}. \\ u(x + L, 0) = h(x) \\ u_t(x + L, 0) = g(x) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

onde L é um período fixado.

Como sabemos, a equação (2.1.1) é formalmente equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = (u - u_{xx} - f(u))_x \end{cases} \quad (2.1.2)$$

com

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_0(x + L) = u_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_0(x + L) = v_0(x), \end{cases} \quad (2.1.3)$$

onde $f(u) = u^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Estabelecemos a seguir, a noção formal de boa colocação, a qual nos referimos anteriormente.

Definição 2.1. (Boa colocação) Dizemos que o problema de valor inicial (2.1.2)-(2.1.3) é localmente bem colocado em X se:

- (1) Para cada $\vec{u}_0 = (u_0, v_0) \in X$, existe um $T > 0$ e uma única solução $\vec{u} \in C([0, T]; X)$ com $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$.
- (2) Para cada $T_* \in (0, T)$, a aplicação dado - solução

$$\vec{u}_0 \in X \mapsto \vec{u} \in C([0, T_*]; X)$$

é contínua. Em outras palavras, a solução depende continuamente do dado inicial.

Nosso objetivo central é estudar o problema (2.1.2)-(2.1.3) de tal forma que nossos resultados de boa colocação possam ser aplicados no estudo da estabilidade de ondas periódicas e no estudo de singularidades das soluções.

Quando $p = 2$, a equação (2.1.1) é conhecida como equação de Boussinesq clássica deduzida originalmente em [16]. Quando $p = 3$, denomina-se equação de Boussinesq modificada.

2.1.1 Teoria de Kato: Boa colocação em $H^{s+2} \times H^{s+1}$, $s > \frac{1}{2}$.

Consideremos o problema de Cauchy para a equação de evolução quase linear

$$\frac{du}{dt} + A(t, u)u = f(t, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = \phi, \quad (2.1.4)$$

em um espaço de Banach X . Fazemos as seguintes suposições:

- (X) X é um espaço de Banach reflexivo. Existe um espaço de Banach $Y \hookrightarrow X$, continuamente e densamente mergulhado em X . Existe um isomorfismo S de Y sobre X . A norma de Y é escolhida de modo que S torne-se uma isometria.

(A1) A é uma função de $[0, T] \times W$ em $G(X, 1, \beta)$, onde W é uma bola aberta em Y e β é um número real. Em outras palavras,

$$\|e^{-sA(t,y)}\|_X \leq e^{\beta s}, \quad s \in [0, \infty), \quad t \in [0, T], \quad y \in W. \quad (2.1.5)$$

Note que se X é um espaço de Hilbert, então $A \in G(X, 1, \beta)$ se, e somente se,

- a) $\langle A\phi, \phi \rangle_X \geq -\beta \|\phi\|_X^2, \quad \forall \phi \in D(A)$
- b) $A + \lambda$ é sobrejetivo para algum (todo) $\lambda > \beta$.

Neste caso, A é dito quase m-acretivo. Quando $\beta = 0$, dizemos que A é m-acretivo.

(A2) Para $t, y \in [0, T] \times W$, temos

$$SA(t, y)S^{-1} = A(t, y) + B(t, y), \quad (2.1.6)$$

onde

$$B(t, y) \in B(X), \quad \|B(t, y)\|_X \leq \lambda_1 \quad (2.1.7)$$

com $\lambda_1 > 0$ uma constante. Além disso, $\forall y, z \in W$,

$$\|B(t, y) - B(t, z)\|_X \leq \mu \|y - z\|_Y \quad (2.1.8)$$

com μ uma constante.

A relação (2.1.6) é satisfeita no sentido estrito incluindo o domínio da relação. Assim, $x \in X$ pertence a $D(A(t, y))$ se, e somente se, $S^{-1}x \in D(A(t, y))$ com $A(t, y)S^{-1}x \in Y$.

(A3) Para $t, y \in [0, T] \times W$, temos $A(t, y) \in B(Y, X)$ (no sentido que $D(A(t, y)) \supset Y$ e a restrição de $A(t, y)$ a Y pertence a $B(Y, X)$). Para $y \in W$, $t \rightarrow A(t, y)$ é contínua na norma $B(Y, X)$. Para cada $t \in [0, T]$, $y \rightarrow A(t, y)$ é Lipschitz contínua no sentido que

$$\|A(t, y) - A(t, z)\|_{Y, X} \leq \mu_1 \|y - z\|_X, \quad (2.1.9)$$

onde μ_1 é uma constante.

(A4) Seja y_0 o centro de W . Então $A(t, y)y_0 \in Y$ para todos $t, y \in [0, T] \times W$, com

$$\|A(t, y)y_0\|_Y \leq \lambda_2, \quad t \in [0, T], \quad y \in W. \quad (2.1.10)$$

(f1) A função $f : [0, T] \times W \rightarrow Y$ é limitada, ou seja,

$$\|f(t, y)\|_Y \leq \lambda_3, \quad t \in [0, T], \quad y \in W. \quad (2.1.11)$$

Para cada $y \in W$, $t \rightarrow f(t, y)$ é contínua de $[0, T]$ em X .

Para cada $t \in [0, T]$, $y \in W \rightarrow f(t, y)$ é Lipschitz contínua em X (respectivamente em Y), a saber,

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_X \leq \mu_2 \|y - z\|_X \quad \forall y, z \in W \quad (2.1.12)$$

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_Y \leq \mu_3 \|y - z\|_Y \quad \forall y, z \in W. \quad (2.1.13)$$

Observação 2.1. 1. A condição (2.1.10) é trivialmente satisfeita se $y_0 = 0$.

2. Em muitos casos $A(t, y)$ está bem definida para todo $y \in Y$, então W pode ser escolhida como uma bola arbitrária com centro na origem de Y , no entanto, as constantes β , λ_1 , μ_1 , ... dependerão do raio da bola.

Observação 2.2. As condições (2.1.8) e (2.1.13) não são necessárias para a prova da existência e unicidade de solução. Elas são usadas somente na prova da dependência contínua.

A seguir, temos um teorema abstrato, do qual faremos uso neste capítulo.

Teorema 2.1. (Kato-1983) *Suponha que as condições (X), (A1)-(A4), e (f1) sejam satisfeitas. Se $\phi \in W$, então (2.1.4) tem uma única solução*

$$u \in C([0, T']; W) \cap C^1([0, T']; X) \quad \text{com} \quad u(0) = \phi, \quad (2.1.14)$$

onde $T' > 0$, $T' \leq T$.

Para obtermos a dependência contínua da solução u com relação ao dado inicial, consideremos em adição a (2.1.4), uma sequência de equações

$$\frac{du^n}{dt} + A^n(t, u^n)u^n = f^n(t, u^n), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u^n(0) = \phi^n, \quad (2.1.15)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$. Para as funções A^n e f^n , suponhamos as condições (A1)-(A4) e (f1) com os mesmos X, Y, S e W . Temos então o seguinte teorema.

Teorema 2.2. (Dependência contínua) *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 2.1 são satisfeitas para a sequência (2.1.15) uniformemente em n (no sentido de que as constantes $\lambda_1, \dots, \mu, \dots, \mu_3$ são independentes de n). Além disso, suponhamos que para cada $t, y \in [0, T] \times W$*

$$A^n(t, y) \rightarrow A(t, y) \quad \text{fortemente em} \quad B(Y, X), \quad (2.1.16)$$

$$B^n(t, y) \rightarrow B(t, y) \quad \text{fortemente em} \quad B(X), \quad (2.1.17)$$

$$f^n(t, y) \rightarrow f(t, y) \quad \text{em} \quad Y, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1.18)$$

Se $\phi, \phi^n \in W$ e $\phi^n \rightarrow \phi$ na norma de Y quando $n \rightarrow \infty$, então existe $T'' > 0$, $T'' < T$, tal que existem únicas soluções

$$u^n \in C([0, T'']; W) \cap C^1([0, T'']; X) \text{ com } u^n(0) = \phi^n \quad (2.1.19)$$

para (2.1.15), $n = 1, 2, \dots$, e uma única solução u para (2.1.4) na mesma classe. Além disso, temos

$$u^n(t) \rightarrow u(t) \text{ em } Y, \text{ uniformemente em } t \in [0, T'']. \quad (2.1.20)$$

Para aplicar os Teoremas 2.1 e 2.2 em nosso caso, vamos introduzir a seguinte notação:

Para $T > 0$ um número real finito e s um número real, seja

$$X_s(T) = C([0, T]; H_{per}^{s+2}([0, L])) \cap C^1([0, T], H_{per}^s([0, L])). \quad (2.1.21)$$

Teorema 2.3. (Existência local de soluções) Sejam $u_0 \in H_{per}^{s+2}([0, L])$ e $v_0 \in H_{per}^{s+1}([0, L])$ para $s > \frac{1}{2}$. Seja $Y = H_{per}^{s+2}([0, L]) \times H_{per}^{s+1}([0, L])$. Então existem $T > 0$, dependendo somente da norma $\|(u_0, v_0)\|_Y$ e únicas funções $u \in X_s(T)$ e $v \in X_{s-1}(T)$ que resolvem o problema de valor inicial (2.1.2)-(2.1.3). Além disso, o par (u, v) depende continuamente de (u_0, v_0) no sentido que a aplicação que associa a cada (u_0, v_0) a solução correspondente (u, v) de (2.1.2)-(2.1.3) é contínua de Y em $X_s(T) \times X_{s-1}(T)$.

Para aplicarmos a Teoria de Kato nesta situação, consideremos Y como no enunciado do teorema acima, e seja $X = H_{per}^s([0, L]) \times H_{per}^{s-1}([0, L])$. Claramente, Y está continuamente e densamente mergulhado em X com suas normas usuais. Definamos $S : Y \rightarrow X$ por $S = (J^2, J^2) \equiv (I - \partial_x^2, I - \partial_x^2)$, com I denotando o operador identidade. S é um isomorfismo linear de Y em X . A injetividade é óbvia e a sobrejetividade segue diretamente do fato que para toda função $f \in L_{per}^2([0, L])$, o problema $-u'' + u = f$ com condições de contorno $u(0) = u(L)$ e $u'(0) = u'(L)$ tem uma única solução (v. [19]).

$S : Y \rightarrow X$ é uma isometria, pois para $(f, g) \in H_{per}^{s+2}([0, L]) \times H_{per}^{s+1}([0, L])$ temos

$$\|(I - \partial_x^2)f\|_s^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s (1 + k^2)^2 |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_{s+2}^2$$

e analogamente,

$$\|(I - \partial_x^2)g\|_{s-1}^2 = \|g\|_{s+1}^2.$$

O problema de valor inicial (2.1.2)- (2.1.3), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} U_t + AU = F(t, U) \\ U(0) = \varphi = (u_0, v_0), \end{cases} \quad (2.1.22)$$

onde A é a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x + \partial_x^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.23)$$

e F é o operador não linear dado por

$$F = F(t, u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(f(u))_x \end{pmatrix}. \quad (2.1.24)$$

Mostraremos agora a condição (A1). Para isto, verificaremos inicialmente que A é um operador antisimétrico.

Sejam $\vec{f} = (f, g)$, $\vec{p} = (p, q) \in D(A) = Y = H_{per}^{s+2}([0, L]) \times H_{per}^{s+1}([0, L])$. Temos,

$$\begin{aligned} \langle A \vec{f}, \vec{p} \rangle_X &= \langle (-\partial_x g, (\partial_x^3 - \partial_x)f), (p, q) \rangle_X = \langle -\partial_x g, p \rangle_s \\ &+ \langle (\partial_x^3 - \partial_x)f, q \rangle_{s-1} = \langle g, J^2 \partial_x p \rangle_{s-1} + \langle Jf, J \partial_x q \rangle_{s-1} \\ &= \langle g, (\partial_x - \partial_x^3)p \rangle_{s-1} + \langle f, \partial_x q \rangle_s = -\langle \vec{f}, A \vec{p} \rangle_X, \end{aligned}$$

pois

$$\langle -\partial_x g, p \rangle_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s (\widehat{-\partial_x g}(k)) \overline{\widehat{p}(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^{s-1} \widehat{g}(k) \overline{J^2 \partial_x p(k)}$$

e

$$\begin{aligned} \langle (\partial_x^3 - \partial_x)f, q \rangle_{s-1} &= - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^{s-1} (1 + k^2) \widehat{\partial_x f}(k) \overline{\widehat{q}(k)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{ik \widehat{q}(k)} = \langle f, \partial_x q \rangle_s. \end{aligned}$$

E portanto, $A = -A^*$ e, conseqüentemente, $\langle A \vec{u}, \vec{u} \rangle_X = 0$ para $\vec{u} \in D(A)$. Logo, pelo Teorema de Stone, (v. [38]), A gera um grupo de operadores unitários em $H_{per}^s([0, L]) \times H_{per}^{s-1}([0, L])$. Além disso, o fato de A ser um operador fechado juntamente com a igualdade $\langle A \vec{u}, \vec{u} \rangle_X = 0$, nos dá que $A + \lambda I$ possui imagem fechada para todo $\lambda > 0$. Portanto, para que mostremos que $A + \lambda I$ é sobrejetivo para todo $\lambda > 0$, é suficiente provar que $A + \lambda I$ tem imagem densa para $\lambda > 0$. Para isto, seja $(z, w) \in X$ tal que $\langle (A + \lambda I)(u, v), (z, w) \rangle_X = 0$ para todo $(u, v) \in D(A)$. Então, $(z, w) \in D(A^*) = D(A)$ e $\langle (u, v), (-A + \lambda I)(z, w) \rangle_X = 0$ para todo $(u, v) \in D(A)$. Tomando

$(u, v) = (z, w)$, obtemos $\langle (z, w), (-A + \lambda I)(z, w) \rangle_X = 0$ e portanto $(z, w) = 0$, já que $\lambda \neq 0$ e $\langle A(\vec{u}), \vec{u} \rangle_X = 0$. Daí, segue-se que A é m-acretivo.

Verifiquemos então a condição (A2).

Observemos inicialmente que o candidato natural para B é $[S, A]S^{-1}$. Agora,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x + \partial_x^3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I + \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x^2 & 0 \\ 0 & \partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= -D\tilde{I} + D^3E \end{aligned}$$

onde

$$D = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}, \quad \tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} \partial_x^2 & 0 \\ 0 & \partial_x^2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Mas então, com a notação acima, $S = I - D^2$. Assim,

$$\begin{aligned} [S, A] &= (I - D^2)(-D\tilde{I} + D^3E) - (-D\tilde{I} + D^3E)(I - D^2) \\ &= D^3\tilde{I} - D^5E - D\tilde{I}D^2 + D^3ED^2. \end{aligned}$$

E isto nos permite concluir que $B \equiv 0$.

Para verificarmos a condição (A3), basta que mostremos que $A \in B(Y, X)$. Com efeito, para $(u, v) \in Y$, temos

$$\begin{aligned} \|A(u, v)\|_X^2 &= \|(-v_x, -u_x + u_{xxx})\|_X^2 \\ &= \| -v_x \|_s^2 + \| -u_x + u_{xxx} \|_{s-1}^2 \leq C\|(u, v)\|_Y^2. \end{aligned}$$

A condição (A4) é trivialmente satisfeita pois A não depende de t nem de y e portanto y_0 pode ser tomado como sendo o zero.

A condição (f1) segue do fato de f ser de classe C^2 e do fato de que $H_{per}^s([0, L])$ é uma álgebra de Banach para $s > \frac{1}{2}$.

De fato, dados $(u, v), (z, w) \in W \subset Y$

$$\begin{aligned} \|F(u, v) - F(z, w)\|_X^2 &= \|(0, f(z)_x - f(u)_x)\|_X^2 = \|(z^p)_x - (u^p)_x\|_{s-1}^2 \\ &= \|[z^p - u^p]_x\|_{s-1}^2 \leq C\|(u, v) - (z, w)\|_X^2, \end{aligned}$$

(2.1.25)

pois,

$$z^p - u^p = (z - u)(z^{p-1} + z^{p-2}u + \dots + zu^{p-2} + u^{p-1})$$

e

$$\begin{aligned} \|[z^p - u^p]_x\|_{s-1} &\leq \|z^p - u^p\|_s \\ &= \|(z - u)(z^{p-1} + z^{p-2}u + \dots + zu^{p-2} + u^{p-1})\|_s \\ &\leq \|z - u\|_s \|z^{p-1} + z^{p-2}u + \dots + zu^{p-2} + u^{p-1}\|_s \\ &\leq (\|z^{p-1}\|_{s+2} + \|z^{p-2}u\|_{s+2} + \dots + \|u^{p-1}\|_{s+2}) \|z - u\|_s \\ &\leq (\|z\|_{s+2}^{p-1} + \|z\|_{s+2}^{p-2} \|u\|_{s+2} + \dots + \|u\|_{s+2}^{p-1}) \|z - u\|_s \\ &\leq \mu_2 \|(u, v) - (z, w)\|_X, \end{aligned}$$

onde μ_2 é uma constante que depende do raio da bola W . Também,

$$\begin{aligned} \|F(u, v) - F(z, w)\|_Y^2 &= \|(z^p - u^p)_x\|_{s+1}^2 \leq \|z^p - u^p\|_{s+2}^2 \\ &= \|(z - u)(z^{p-1} + z^{p-2}u + \dots + zu^{p-2} + u^{p-1})\|_{s+2}^2 \\ &\leq \|(z - u)\|_{s+2}^2 \|(z^{p-1} + z^{p-2}u + \dots + zu^{p-2} + u^{p-1})\|_{s+2}^2 \\ &\leq \|(z - u)\|_{s+2}^2 \|(z^{p-1} + z^{p-2}u + \dots + zu^{p-2} + u^{p-1})\|_{s+2}^2 \\ &\leq \mu_3 \|(z - u)\|_{s+2}^2 \leq \mu_3 \|(u, v) - (z, w)\|_Y^2 \end{aligned}$$

onde μ_3 é uma constante que depende do raio da bola W .

Agora, o Teorema 2.3 segue diretamente dos Teoremas 2.1 e 2.2 tomando $A^n = A \forall n$, $B^n = B \forall n$ e $F^n = F \forall n$. $\square$

O Teorema 2.3 quando interpretado em relação ao problema de valor inicial (2.1.1) para a equação de segunda ordem nos dá o corolário seguinte.

Antes de enunciarmos o corolário nos será conveniente a seguinte notação: Para T positivo e s um número real, definamos

$$Y_s(T) = X_s(T) \cap C^2([0, T]; H_{per}^{s-2}([0, L])).$$

Corolário 2.1. *Sejam $u_0 \in H_{per}^{s+2}([0, L])$ e $v_0 \in H_{per}^{s+1}([0, L])$, onde $s > \frac{1}{2}$. Então existe um $T > 0$, dependendo somente da norma de $(u_0, v_0) \in H_{per}^{s+2}([0, L]) \times H_{per}^{s+1}([0, L])$, e uma única função $u \in Y_s(T)$ que é uma solução da equação (2.1.1) no sentido das distribuições em $\mathbb{R} \times [0, T]$, e para a qual $u(\cdot, 0) = u_0$ e $u_t(\cdot, 0) = v'_0$. A solução u depende continuamente do dado (u_0, v_0) no sentido de que a aplicação que associa a cada (u_0, v_0) a solução u correspondente é contínua de $H_{per}^{s+2}([0, L]) \times H_{per}^{s+1}([0, L])$ em $Y_s(T)$. Se $s > \frac{5}{2}$ então a solução é clássica.*

Observação 2.3. Note que $u \in Y_s(T)$ porque $\frac{du}{dt} = v_x \in H_{per}^{s-2}$. Além disso, para $s > \frac{5}{2}$ a solução será clássica devido ao teorema de mergulho de Sobolev.

2.1.2 Existência local em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$

A seguir, apresentamos o resultado principal deste capítulo. Em sua demonstração, alguns argumentos assemelham-se àqueles utilizados por Y. Liu em [33].

Antes disso, introduzimos a seguinte notação conveniente;

$$X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]).$$

Aqui, a equação $U_t + AU = F(t, U)$, com A dada por (2.1.23) e F por (2.1.24), será considerada apenas no sentido fraco.

Definição 2.2. Uma solução fraca de (2.1.2) em um intervalo de tempo $\mathcal{I}$ é uma função $\vec{u} = (u, v) \in C(\mathcal{I}; X)$ (contínua com valores em X), tal que

$$\frac{d}{dt} \langle (u(t), v(t)), \Psi \rangle = \langle \mathcal{J} \delta H(u(t), v(t)), \Psi \rangle$$

$\forall \Psi \in D(\mathcal{J}) \subset X'$. Aqui, $\mathcal{J}$ é o operador antisimétrico $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}$,

$$H = \int_0^L \frac{1}{2} (u^2(x, t) + v^2(x, t) + u_x^2(x, t) - \frac{2}{p+1} u^{p+1}(x, t)) dx$$

é a energia e δH denota a derivada de Fréchet de H , dada por $\delta H = (u - u_{xx} - u^p, v)$.

Antes de estabelecermos nosso teorema principal, enunciaremos aqui, alguns teoremas básicos da Teoria de Semigrupos e de E.D.O., os quais podem ser encontrados em [23] e [38], dos quais faremos uso para a demonstração do nosso teorema de existência.

Teorema 2.4. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ contínua em t para $t \geq 0$ e localmente Lipschitz contínua em u , uniformemente em t em intervalos limitados. Se $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$ em X , então para todo $u_0 \in X$ existe um $t_{max} \leq \infty$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.1.26)$$

possui uma única solução mild u em $[0, t_{max})$. Além disso, se $t_{max} < \infty$ então

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Definição 2.3. Uma solução mild do problema de valor inicial (2.1.26) é uma solução contínua u da equação integral

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Teorema 2.5. (Regularidade) Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um C^0 semigrupo $T(t)$ em X . Se $f : [t_0, T] \times X \rightarrow X$ é continuamente diferenciável então a solução mild de

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.1.27)$$

com $u_0 \in D(A)$ é uma solução clássica do problema de valor inicial.

Teorema 2.6. Seja $U(t, u)$ contínua em um conjunto aberto E e $u = u^0(t)$ a solução maximal do problema

$$u' = U(t, u), \quad u(t_0) = u_0.$$

Seja $v(t)$ uma função contínua em $[t_0, t_0 + a]$ satisfazendo a condição $v(t_0) \leq u^0$, $(t, v(t)) \in E$ e $v(t)$ tem uma derivada a direita $D_R v(t)$ em $t_0 \leq t < t_0 + a$ tal que

$$D_R v(t) \leq U(t, v(t)).$$

Então,

$$v(t) \leq u^0(t)$$

em um intervalo comum de existência de $u^0(t)$ e $v(t)$.

Agora, enunciamos nosso teorema.

Teorema 2.7. Sejam $\vec{u}_0 = (u_0, v_0) \in X$ e $f(u) = u^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Então existe $T > 0$, e uma única solução fraca $\vec{u} = (u, v)$ de (2.1.2)-(2.1.3) com $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$.

Demonstração: Para obtermos uma solução fraca para o sistema (2.1.2), consideremos o problema aproximado para $\vec{u} = (u, v)$,

$$\begin{cases} \vec{u}_t + A\vec{u} = F(\vec{u}), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0^n \end{cases} \quad (2.1.28)$$

com $\vec{u}_0^n \in D(A) = H_{per}^3([0, L]) \times H_{per}^2([0, L])$ e $\vec{u}_0^n \rightarrow \vec{u}_0$ em X , (asseguramos a existência desta sequência pela densidade de $D(A)$ em X), onde A é dada como em (2.1.23) e $-A$ é o gerador infinitesimal de um C^0 grupo de operadores unitários em X e F é definida em (2.1.24). Sendo F

de classe C^∞ , a aplicação $(u, v) \rightarrow (0, \partial_x f(u))$ é localmente Lipschitz em X . Mas então, para todo $\vec{u}_0^n \in D(A)$ existe um $T_n > 0$ (T_n tempo maximal de existência de $\vec{u}^n$) tal que o problema de valor inicial (2.1.28) possui uma única solução $\vec{u}^n \in C([0, T_n]; D(A)) \cap C^1([0, T_n]; X)$. Além disso, se $T_n < \infty$ então

$$\lim_{t \rightarrow T_n} \|\vec{u}^n(t)\|_X = \infty. \quad (2.1.29)$$

(v. Teoremas 2.4 e 2.5).

Mostraremos agora que existe $T > 0$ tal que $\vec{u}^n$ está definida em $[0, T]$ independentemente de n . Para isto, observemos inicialmente que em $[0, T_n)$, temos a seguinte estimativa para (2.1.28)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{u}^n(t)\|_X^2 &= \langle \vec{u}^n(t), \partial_t \vec{u}^n(t) \rangle_X = \langle \vec{u}^n, -A\vec{u}^n + F(\vec{u}^n) \rangle_X \\ &\leq \left| \int_0^L \partial_x f(u^n(t)) \cdot v^n(t) dx \right| \\ &\leq \|\partial_x f(u^n(t))\|_0 \|v^n(t)\|_0 \\ &= \left(\int_0^L |p(u^n(t))^{p-1} (u^n(t))_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v^n(t)\|_0 \\ &\leq p \|u^n(t)\|_\infty^{p-1} \left(\int_0^L (u_x^n(t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v^n(t)\|_0 \\ &\leq S(L)p \|u^n(t)\|_1^{p-1} \|u_x^n\|_0 \|v^n(t)\|_0 \\ &\leq S(L)p \|\vec{u}^n(t)\|_X^{p-1} \|\vec{u}^n\|_X^2, \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

onde utilizamos na primeira igualdade acima que $-A\vec{u}^n \in X$ ($A\vec{u}^n \in X$ porque $\vec{u}^n \in D(A)$).

Seja agora $\tilde{f}(s) = S(L)p s^{\frac{p-1}{2}}$, a qual é uma função contínua, positiva e crescente em $\mathbb{R}^+$. Então, integrando a desigualdade acima de 0 a t , obtemos

$$\|\vec{u}^n(t)\|_X^2 - \|\vec{u}_0^n\|_X^2 \leq \int_0^t \tilde{f}(\|\vec{u}^n(\tau)\|_X^2) \|\vec{u}^n(\tau)\|_X^2 d\tau, \quad \text{para } t \in [0, T_n).$$

Pela desigualdade de Gronwall, segue-se que

$$\|\vec{u}^n(t)\|_X^2 \leq \|\vec{u}_0^n\|_X^2 \exp \left[\int_0^t \tilde{f}(\|\vec{u}^n(\tau)\|_X^2) d\tau \right], \quad \text{para } t \in [0, T_n). \quad (2.1.31)$$

Mas então, existe $T > 0$, independente de n , tal que u_n está definida em $[0, T]$. De fato, comparamos $\|\vec{u}^n(t)\|_X^2$ com a solução maximal

$$\begin{aligned} y^{\frac{p-1}{2}}(t) &\equiv \frac{2(\sup_n \|\vec{u}_0^n\|_X)^{p-1}}{2 - S(p-1)pt(\sup_n \|\vec{u}_0^n\|_X)^{p-1}}, \\ t \in [0, T_0) &\equiv [0, \frac{2}{p(p-1)S(\sup_n \|\vec{u}_0^n\|_X)^{p-1}}) \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

do problema de Cauchy escalar

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \tilde{f}(y)y, \\ y(0) = y_0 = \sup_n \|\vec{u}_0^n\|_X^2. \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$\|\vec{u}^n(t)\|_X^2 \leq y(t) \text{ em } [0, T_n) \cap [0, T_0), \quad (2.1.33)$$

(v. Teorema 2.6). Portanto $T_n \geq T_0$, pois se $T_n < T_0$ então (2.1.33) implica que

$$\|\vec{u}^n(t)\|_X^2 \leq y(t) \text{ em } [0, T_n).$$

Agora, como $y(t)$ é limitada em $[0, T_n]$, então $\vec{u}^n$ seria limitada em $[0, T_n)$ e portanto $\vec{u}^n$ poderia ser estendida ainda mais, o que é uma contradição. Seja $T < T_0$. Então, pelo que vimos acima, $\vec{u}^n$ está definida em $[0, T]$ para todo n . Além disso,

$$\|\vec{u}^n(t)\|_X^2 \leq c_0 y_0 = K^2 \quad (2.1.34)$$

em $[0, T]$, onde K é uma constante independente de n , pois por (2.1.31) e por (2.1.33), temos a seguinte desigualdade em $[0, T]$

$$\begin{aligned} \|\vec{u}^n(t)\|_X^2 &\leq \|\vec{u}_0^n\|_X^2 \exp \left[\int_0^t \tilde{f}(\|\vec{u}^n(\tau)\|_X^2) d\tau \right] \\ &\leq \|\vec{u}_0^n\|_X^2 \exp \left[\int_0^T \tilde{f}(y(\tau)) d\tau \right] \leq c_0(T) \|\vec{u}_0^n\|_X^2 \\ &\leq c_0(T) y_0, \end{aligned}$$

já que $y(t)$ é limitada em $[0, T]$.

Assim, de (2.1.34) deduzimos que existe $\vec{u}(t) \in C([0, T]; X)$ solução fraca de (2.1.2) tal que $\vec{u}^n(t) \rightharpoonup \vec{u}(t)$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, afirmamos inicialmente que existe uma subsequência $\{\vec{u}^{n^k}\}$ de $\{\vec{u}^n\}$ tal que, $\{\vec{u}^{n^k}\} : [0, T] \rightarrow X$ converge pontualmente em X , com X munido da topologia fraca. Esta afirmação segue do Teorema de Ascoli-Arzelà aplicado ao espaço $C_w([0, T]; B)$, onde B é a bola $B := \{v \in X; \|v\| \leq K\}$, munido da topologia fraca de X . De fato, pelo Teorema de Banach-Alaoglu, temos que B é compacta e metrizável já que X é separável. Além disso, B é metrizável com a seguinte métrica

$$d(\vec{u}, \vec{v}) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \rho_j(\vec{u}, \vec{v})$$

onde

$$\rho_j(\vec{u}, \vec{v}) := \min \left\{ \frac{1}{K} |\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{b}_j \rangle_X|, 1 \right\}$$

e $\{\vec{b}_j\}$ é um conjunto qualquer total ortonormal em X . Como $\vec{u}^n \in C([0, T]; X)$ e $\|\vec{u}^n\|_X \leq K$ $\forall t \in [0, T]$ e $\forall n$, temos que $\vec{u}^n \in C([0, T], B) \forall n$. Para aplicarmos o Teorema de Ascoli-Arzelà, vamos verificar agora que $\{\vec{u}^n\}$ é equicontínuo.

Fixado j , dados $t, t_0 \in [0, T]$, pelo Teorema do Valor Médio para funções reais, existe $t' \in (t, t_0)$ tal que

$$\begin{aligned} |\langle \vec{u}^n(t) - \vec{u}^n(t_0), \vec{b}_j \rangle_X| &= \left| \left[\left\langle \frac{d}{dt}(\vec{u}^n(t)), \vec{b}_j \right\rangle_X \right]_{t=t_0} \right| |t - t_0| \\ &= |\langle \vec{u}^{n'}(t'), \vec{b}_j \rangle_X| |t - t_0| \\ &\leq \frac{d}{dt} \|\vec{u}^n(t)\|_X^2 |t - t_0| \\ &\leq 2S(L)K^{p+1} |t - t_0| \end{aligned}$$

onde utilizamos na última desigualdade acima (2.1.30) e (2.1.34). Assim,

$$d(\vec{u}^n(t), \vec{u}^n(t_0)) \leq C |t - t_0| \quad \forall t, t_0 \in [0, T].$$

Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, existem $\vec{u} \in C([0, T]; B) \subset C_w([0, T], X)$ e uma subsequência $\{\vec{u}^{n_j}\}$ de $\{\vec{u}^n\}$, a qual denotaremos ainda por $\{\vec{u}^n\}$, tal que

$$\vec{u}^n(t) \rightharpoonup \vec{u}(t) \quad (2.1.35)$$

$\forall t \in [0, T]$.

Como $\|\vec{u}^n(t)\|_X^2 \leq y(t) \quad \forall t \in [0, T]$, segue-se de (2.1.35) que

$$\|\vec{u}(t)\|_X^2 \leq \liminf_n \|\vec{u}^n(t)\|_X^2 \leq y(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Resta-nos mostrar que

$$\vec{u}'(t) = F(\vec{u}(t)) - A(\vec{u}(t))$$

fracamente, i.e.,

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{u}(t), \Psi \rangle = \langle F(\vec{u}(t)) - A(\vec{u}(t)), \Psi \rangle \quad (2.1.36)$$

$\forall \Psi \in X'$. É o que faremos a seguir.

Observemos inicialmente que para j fixado, temos

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{u}^n(t), \vec{b}_j \rangle_X = \langle \vec{u}^{n'}(t), \vec{b}_j \rangle_X = \langle F(\vec{u}^n(t)) - A(\vec{u}^n(t)), \vec{b}_j \rangle_X,$$

de onde obtemos

$$\langle \vec{u}^n(t) - \vec{u}^n(0), \vec{b}_j \rangle_X = \int_0^t \langle F(\vec{u}^n(s)) - A(\vec{u}^n(s)), \vec{b}_j \rangle_X ds. \quad (2.1.37)$$

(2.1.35) juntamente com o fato de que $\{\vec{b}_j\}$ é um conjunto total em X , nos permite concluir que

$$\langle \vec{u}(t) - \vec{u}(0), \vec{w} \rangle_X = \int_0^t \langle F(\vec{u}(s)) - A(\vec{u}(s)), \vec{w} \rangle_X ds \quad (2.1.38)$$

$\forall \vec{w} \in X$.

O nosso plano seguinte é estender (2.1.38) a todo X' , i.e., mostraremos que

$$\Psi(\vec{u}(t)) - \Psi(\vec{u}(0)) = \int_0^t \Psi(F(\vec{u}(s)) - A(\vec{u}(s))) ds, \quad (2.1.39)$$

para todo $\Psi \in X'$, de onde seguir-se-á (2.1.36) pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Agora, (2.1.39) segue diretamente do fato de que como X é um espaço de Hilbert, pelo Teorema de Representação de Riesz, $X' = \{\langle \vec{w}, \cdot \rangle_X \mid \vec{w} \in X\}$ e então claramente de (2.1.38), (2.1.39) vale $\forall \Psi \in X'$.

Quanto a unicidade de $\vec{u}$, a prova é clássica. (*Vide* [36]).

□

2.2 Comportamento assintótico de soluções: Blow-up

O nosso resultado do blow-up de soluções L -periódicas possui essencialmente a mesma demonstração daquele desenvolvido por R.L. Sachs em [40] para o caso não periódico. Será provado que para um determinado conjunto de valores iniciais, as soluções "explodem" em tempo finito. Aqui, usaremos o Teorema 2.3.

Para isto, observemos que o sistema (2.1.2) é de tipo Hamiltoniano, isto é, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u_t &= (H_v)_x \\ v_t &= (H_u)_x \end{aligned}$$

onde H_u, H_v representam derivadas direcionais do funcional H definido em $H_{per}^s([0, L]) \times H_{per}^{s-1}([0, L])$, para $s \geq 1$, por

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^L [u^2(x) + v^2(x) + u_x^2(x) - 2G(u(x))] dx,$$

e $G(s) = \int_0^s f(t)dt$. Nesta seção, trataremos do caso em que $f(u) = u^p$. As seguintes quatro quantidades conservadas pelo fluxo da equação de Boussinesq são uma consequência imediata da forma hamiltoniana do sistema (2.1.2), dadas pelas integrais

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^L u(x, t) dx \\ C_1 &= \int_0^L v(x, t) dx \\ I &= \int_0^L u(x, t) v(x, t) dx \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$$H = \int_0^L \frac{1}{2}(u^2(x, t) + v^2(x, t) + u_x^2(x, t) - \frac{2}{p+1}u^{p+1}(x, t)) dx.$$

Para provarmos o blow-up para a equação de Boussinesq, adicionaremos uma condição sobre o dado inicial $u(x, 0)$, a saber, a condição (2.2.3) abaixo. Verificaremos no lema a seguir que a evolução $u(x, t)$ preserva esta condição localmente.

Lema 2.1. *O problema de valor inicial para a equação de Boussinesq*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} - (u^p)_{xx} &= 0 \\ u(x, 0) &= h(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

possui uma teoria de boa colocação local no espaço de Sobolev $H_{per}^s([0, L])$, $s > \frac{5}{2}$. Mais precisamente, existe um tempo maximal T que pode ser infinito, tal que para $T^ < T$, a solução $u(t)$ pertence ao espaço $C([0, T^*]; H_{per}^s([0, L])) \cap C^1([0, T^*]; H^{s-2})$. Se além disso, existem funções $v_0(x)$ e $w_0(x)$ tais que os valores iniciais $u(x, 0)$ e $u_t(x, 0)$ satisfazem as relações*

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= (w_0(x))_x \\ u_t(x, 0) &= (v_0(x))_x \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

então existem $w(x, t), v(x, t)$ satisfazendo o sistema

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= v(x, t) \\ v_t(x, t) &= (w_x(x, t) - w_{xxx}(x, t) - w_x^p(x, t))_x. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Ainda mais, para todo $t \in [0, T^]$, $u(x, t) = (w(x, t))_x$ e as funções w e v pertencem a*

$$C([0, T^*]; H_{per}^{s+1}([0, L])) \cap C^1([0, T^*]; H_{per}^{s-1}([0, L]))$$

e

$$C([0, T^*]; H_{per}^{s-1}([0, L])) \cap C^1([0, T^*]; H_{per}^{s-3}([0, L])),$$

respectivamente.

Demonstração: O primeiro resultado é uma consequência imediata do Corolário 2.1 do Teorema 2.3 demonstrado na seção 2.1. Agora, integrando a primeira equação do sistema (2.1.2) de 0 a t , obtemos

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t v_x(x, s) ds = (w_0(x) + \int_0^t v(x, s) ds)_x = (w(x, t))_x,$$

já que $u(x, 0) = (w_0(x))_x$ por hipótese. Derivando a seguinte igualdade com relação a t

$$w(x, t) = w_0(x) + \int_0^t v(x, s) ds,$$

obtemos imediatamente que $w_t(x, t) = v(x, t)$. Além disso, da segunda equação do sistema (2.1.2) segue-se (utilizando o fato que $u(x, 0) = (w_0(x))_x$) a segunda equação de (2.2.4). $\square$

A desigualdade diferencial no lema a seguir desempenha um papel central na demonstração do blow-up em tempo finito para o sistema (2.1.2)-(2.1.3).

Lema 2.2. *Suponhamos que uma função $\Psi(t)$ duas vezes diferenciável e positiva, satisfaz para $t \geq 0$ a desigualdade*

$$\Psi''\Psi - (1 + \alpha)(\Psi')^2 \geq 0$$

onde $\alpha > 0$. Se $\Psi(0) > 0$ e $\Psi'(0) > 0$, então $\Psi(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_1 \leq \frac{\Psi(0)}{\alpha\Psi'(0)}$.

Demonstração: Vide Levine [32]. $\square$

Enunciamos agora nosso Teorema principal desta seção.

Teorema 2.8. *Suponhamos que os valores iniciais $u(x, 0)$ e $u_t(x, 0)$ satisfaçam as seguintes condições:*

(i) $u(x, 0) = (w_0(x))_x$, $u_t(x, 0) = (v_0(x))_x$
para algum $w_0 \in H_{per}^{s+1}([0, L])$ e para algum $v_0 \in H_{per}^{s-1}([0, L])$, $s > \frac{5}{2}$.

(ii) $H = \int_0^L \frac{1}{2}(u^2(x, 0) + v^2(x, 0) + u_x^2(x, 0) - \frac{2}{p+1}u^{p+1}(x, 0))dx < 0$

(iii) $\int_0^L v(x, 0)w(x, 0)dx > 0$.

Então o tempo maximal de existência de w e conseqüentemente o de u é finito.

Demonstração: Do Lema 2.1, os cálculos que faremos abaixo fazem sentido para $t < T^*$. Definamos $\Psi(t)$ por

$$\Psi(t) = \int_0^L w^2(x, t) dx.$$

Claramente, $\Psi(0)$ é finito. Além disso,

$$\Psi'(t) = 2 \int_0^L v(x, t) w(x, t) dx$$

já que $w_t(x, t) = v(x, t)$. Observemos que $\Psi'(0) > 0$ pela hipótese (iii). Suponhamos que o tempo maximal de existência é maior que

$$T^{**} = \frac{4\Psi(0)}{\Psi'(0)},$$

teremos então uma contradição pelo Lema 2.2, uma vez que todas as hipóteses serão satisfeitas com $\alpha = \frac{p-1}{4}$. De fato,

$$\Psi''\Psi - (1 + \alpha)(\Psi')^2 \geq 0,$$

pois

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \langle w, w \rangle_0 \\ \Psi'(t) &= 2\langle v, w \rangle_0 \\ \Psi''(t) &= 2\langle v, v \rangle_0 + 2\langle v_t, w \rangle_0,\end{aligned}$$

e $w_t = v$. Aqui, $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ denota o produto interno usual de $L^2_{per}([0, L])$.

Utilizando a equação para v_t , integração por partes, a periodicidade de u e w e o fato de que $u = w_x$, segue-se que a última equação acima pode ser reescrita como

$$\Psi''(t) = 2\langle v, v \rangle_0 - 2\langle u, u - u_{xx} - u^p \rangle_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Psi''(t)\Psi - (1 + \alpha)(\Psi')^2 &= 2\langle w, w \rangle_0[\langle v, v \rangle_0 - \langle u, u - u_{xx} - u^p \rangle_0] \\ &\quad - 4(1 + \alpha)\langle v, w \rangle_0^2 \\ &= 4(1 + \alpha)[\langle v, v \rangle_0\langle w, w \rangle_0 - \langle v, w \rangle_0^2] \\ &\quad - 2\langle w, w \rangle_0[\langle u, u - u_{xx} - u^p \rangle_0 + (1 + 2\alpha)\langle v, v \rangle_0].\end{aligned}$$

O primeiro termo na última igualdade acima é claramente não negativo pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, portanto resta-nos verificar que o segundo termo é também não negativo. Para isto, é suficiente mostrar que

$$\langle u, u - u_{xx} - u^p \rangle_0 + (1 + 2\alpha)\langle v, v \rangle_0 < 0$$

Para ver isso, note que

$$\begin{aligned}
 \langle u, u - u_{xx} - u^p \rangle_0 + \frac{p+1}{2} \langle v, v \rangle_0 &= \frac{p+1}{2} [\langle v, v \rangle_0 + \langle u, u \rangle_0 + \langle u_x, u_x \rangle_0 \\
 &\quad - \frac{2}{p+1} \langle u, u^p \rangle_0] - \frac{p-1}{2} [\langle u, u \rangle_0 + \langle u_x, u_x \rangle_0] \\
 &= (p+1)H - \frac{p-1}{2} [\langle u, u \rangle_0 + \langle u_x, u_x \rangle_0] < 0,
 \end{aligned}$$

pela hipótese (ii), já que H independe de t . Assim a contradição segue usando o Lema 2.2.

Concluimos então que o tempo maximal de existência de w é finito.

Agora, a igualdade $u(x, t) = (w(x, t))_x$, com w definida no máximo até o tempo $T^{**} < \infty$ implica que sua derivada $u(x, t) = w_x(x, t)$ também existe apenas até esse mesmo tempo finito, ou seja, o tempo maximal de existência de u é finito. $\square$

CAPÍTULO 3

Estabilidade de ondas viajantes periódicas para a equação de Boussinesq - Caso $A_\phi \neq 0$

Neste capítulo, estudaremos a estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas da forma $\vec{\phi}(x, t) = (\phi(x - ct), \psi(x - ct))$ associadas ao sistema de equações de evolução,

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = (u - u_{xx} - \frac{u^2}{2})_x \end{cases} \quad (3.0.1)$$

como uma aplicação da teoria de Grillakis, Shatah e Strauss em [21] e da recente teoria de estabilidade de ondas cnoidais associadas à KdV, desenvolvida por Angulo & Bona em [5] (v. também [3]). Aqui, suporemos $\int_0^L \phi dx = 0$. Um problema interessante a ser considerado é o estudo da estabilidade de ondas viajantes periódicas no caso em que $\int_0^L \phi dx = \lambda \neq 0$.

A estabilidade a ser tratada aqui é do tipo orbital, cujo significado formal será estabelecido na seguinte definição.

Definição 3.1. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Hilbert e Y um subespaço imerso densamente em X . Um conjunto $W \subset X$ é dito X -estável com respeito ao fluxo da equação de Boussinesq (3.0.1), se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $\vec{u}_0 \in Y$ com*

$$\inf_{\vec{\psi} \in W} \|\vec{u}_0 - \vec{\psi}\|_X \leq \delta$$

a solução $\vec{u}(t)$ da equação de Boussinesq com $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ pode ser estendida a uma solução

global em $C([0, \infty); Y)$ e

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \inf_{\vec{\psi} \in W} \|\vec{u}(t) - \vec{\psi}\|_X \leq \epsilon.$$

Caso contrário, dizemos que W é X -instável.

Em nossa teoria,

$$X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$$

e W será a órbita gerada pela onda viajante $\vec{\phi}$, a saber, $\Omega_{\vec{\phi}} = \{\vec{\phi}(\cdot + y); y \in \mathbb{R}\}$.

A demonstração de estabilidade está baseada em uma análise local dos funcionais invariantes com o tempo H e I , definidos em (3.1.1) e em (3.1.6). A chave desta abordagem local está em mostrar que se $\vec{u}_0$ está suficientemente próximo de $\vec{\phi}$ na norma de X e $I(\vec{u}_0) = I(\vec{\phi})$, então

$$H(\vec{u}) - H(\vec{\phi}) \geq f(d_0(\vec{u}, \vec{\phi})) \quad (3.0.2)$$

onde $f(\eta)$ é uma função monótona não decrescente perto de zero, com $f(0) = 0$, $f(\epsilon) > 0$, para ϵ pequeno, e $d_0(\vec{u}, \vec{\phi}) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \|\vec{u} - \vec{\phi}(\cdot + y)\|_X$. Então, da estimativa (3.0.2), da continuidade de $\vec{u}$ e da invariância do funcional de Liapunov $H(\vec{u}) - H(\vec{\phi})$ obtemos a estabilidade orbital de $\Omega_{\vec{\phi}}$ como na definição 3.1.

As seguintes hipóteses são condições suficientes para a obtenção de (3.0.2). Vide [7, 12, 21, 45].

Hipótese 1. (Existência de solução) Para cada $\vec{u}_0 \in X$ existe $T > 0$, T dependendo de $\|\vec{u}_0\|_X$, tal que o sistema hamiltoniano (3.1.2) tem uma solução fraca no sentido da definição 2.2, $\vec{u} \in C([0, T]; X)$ com $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ e $H(\vec{u}(t)) = H(\vec{u}_0)$, $I(\vec{u}(t)) = I(\vec{u}_0)$ para todo $t \in [0, T]$.

Hipótese 2. (Existência de ondas periódicas viajantes) O sistema (3.0.1) possui uma família de soluções ondas periódicas viajantes $\{\vec{\phi}_c\}_c$ e além disso, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que, para cada $c \in (c_1, c_2)$, a aplicação $c \rightarrow \vec{\phi}_c = (\phi_c, \psi_c)$ é de classe C^1 e a função

$$d(c) = H(\vec{\phi}_c) + cI(\vec{\phi}_c) \quad (3.0.3)$$

é uma função convexa de c , onde H e I são os invariantes de movimento mencionados acima.

Hipótese 3. (Espectro do Hessiano) Para $c \in (c_1, c_2)$, $\mathcal{L}_c \equiv (H'' + cI'')(\vec{\phi}_c)$
 $= \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx} - \phi_c & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$ possui exatamente um autovalor negativo, o qual é simples, o zero é um autovalor simples com autofunção associada $\frac{d}{dx} \vec{\phi}_c$ e o resto do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.

3.1 Estrutura hamiltoniana do sistema (3.0.1)

Para $(u(t), v(t)) \in H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, com $t \geq 0$, definamos o funcional

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 + v^2 + u_x^2 - \frac{1}{3} u^3 dx \quad (3.1.1)$$

Então é fácil verificar que o sistema (3.0.1) é formalmente equivalente ao sistema Hamiltoniano

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{J} \delta H(u, v) \quad (3.1.2)$$

onde $\mathcal{J}$ é o operador antissimétrico

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

e δH denota o gradiente do funcional H calculado com respeito ao produto interno de $L_{per}^2([0, L])$. Isto é, se H é um funcional definido em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, então δH possui componentes $\delta_u H$ e $\delta_v H$ pertencentes a $H_{per}^{-1}([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, que satisfazem as relações

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(u + \varepsilon g, v + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = \langle g, \delta_u H \rangle_1 + \langle h, \delta_v H \rangle_0 \quad (3.1.4)$$

para todo $(g, h) \in H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Os colchetes $\langle, \rangle_s$ com sub-índice s representam o par de dualidade $H_{per}^s([0, L]) - H_{per}^{-s}([0, L])$. Em nosso caso, é fácil verificar que

$$H_u(u, v) = u - u_{xx} - \frac{u^2}{2}, \quad H_v(u, v) = v. \quad (3.1.5)$$

Analogamente, podemos verificar que para o funcional

$$I(u, v) = \int_0^L uv dx \quad (3.1.6)$$

temos que

$$\delta I(u, v) = (v, u). \quad (3.1.7)$$

Observemos que o sistema (3.0.1) é invariante por translação em x , ou seja, se $(u(x, t), v(x, t))$ é uma solução, então também o é $(u(x + x_0, t), v(x + x_0, t))$ para $x_0 \in \mathbb{R}$. O mesmo ocorre aos funcionais H e I , ou seja $H(\tau_s u, \tau_s v) = H(u, v)$ e $I(\tau_s u, \tau_s v) = I(u, v)$, onde τ_s denota o operador translação $\tau_s u = u(\cdot + s)$. Além disso, H e I são funcionais contínuos e suaves em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$.

3.2 Ondas periódicas viajantes do sistema (3.0.1)

Uma onda viajante L -periódica do sistema (3.0.1) é uma solução da forma

$$\vec{\phi}(x, t) = (\phi(x - ct), \psi(x - ct))$$

com $\phi^{(j)}(\xi + L) = \phi^{(j)}(\xi)$ e $\psi^{(j)}(\xi + L) = \psi^{(j)}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $j \in \mathbb{N}$, a qual representa um onda que viaja com velocidade c . Nesta seção, mostraremos inicialmente a existência de soluções periódicas com um período fundamental dado naturalmente pelas funções elípticas Jacobianas.

Substituindo uma solução como esta em (3.0.1), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{cases} -c\phi' = \psi' \\ -c\psi' = (\phi - \phi'' - \frac{\phi^2}{2})', \end{cases} \quad (3.2.1)$$

onde “ $' = \frac{d}{d\xi}$ ” e $\xi = x - ct$. Integrando (3.2.1) com respeito a ξ , obtemos

$$\begin{cases} -c\phi = \psi + K_1 \\ -c\psi = \phi - \phi'' - \frac{\phi^2}{2} + K_2, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

onde K_1 e K_2 são constantes de integração. Por questão de simplicidade, consideraremos aqui $K_1 = 0$. Substituindo a primeira equação acima na segunda, chegamos à equação diferencial

$$\phi'' - w\phi + \frac{\phi^2}{2} = A_\phi, \quad (3.2.3)$$

onde consideramos $w = w(c) = 1 - c^2 > 0$ e $A_\phi = K_2 \neq 0$.

Multiplicando a equação (3.2.3) por ϕ' e integrando o resultado, obtemos a seguinte equação de primeira ordem

$$\begin{aligned} [\phi'(\xi)]^2 &= \frac{1}{3}[-\phi^3(\xi) + 3w\phi^2(\xi) + 6A_\phi\phi(\xi) + 6B_\phi] \equiv \frac{1}{3}p_\phi(\phi(\xi)) \\ &= \frac{1}{3}(\phi - \beta_1)(\phi - \beta_2)(\beta_3 - \phi) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

onde B_ϕ é uma constante de integração e $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os zeros reais do polinômio $p_\phi(t) = -t^3 + 3wt^2 + 6A_\phi t + 6B_\phi$, os quais satisfazem as seguintes relações

$$\begin{cases} 3w = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ A_\phi = -\frac{1}{6}(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1) \\ B_\phi = \frac{1}{6}\beta_1\beta_2\beta_3. \end{cases}$$

Além disso, suponhamos que estes estão ordenados de modo que $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ e $\beta_3 > 0$ (pois $3w > 0$). Neste caso, de (3.2.4) temos $\beta_2 \leq \phi \leq \beta_3$. Se definirmos $\varphi = \phi/\beta_3$, (3.2.4) torna-se

$$(\varphi')^2 = \frac{\beta_3}{3}(\varphi - \eta_1)(\varphi - \eta_2)(1 - \varphi)$$

onde $\eta_i = \beta_i/\beta_3$, $i = 1, 2$. Se considerarmos a crista da onda em $\xi = 0$, $\varphi(0) = 1$. Agora, definimos uma nova variável ψ pela relação

$$\varphi = 1 + (\eta_2 - 1)\sin^2\psi,$$

e então obtemos

$$(\psi')^2 = \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_1) \left[1 - \left(\frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1} \right) \sin^2\psi \right],$$

e $\psi(0) = 0$. Definindo

$$k^2 = \frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1}, \quad l = \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_1),$$

segue-se que $0 < k^2 < 1$ and $l > 0$. Então obtemos que

$$\int_0^{\psi(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \sqrt{l} \xi.$$

Como consequência da definição da função elíptica Jacobiana $y = \operatorname{sn}(u; k)$ (vide Apêndice (6.1.6)), podemos reescrever a última igualdade como

$$\sin \psi(\xi) = \operatorname{sn}(\sqrt{l} \xi; k),$$

e portanto

$$\varphi = 1 + (\eta_2 - 1)\operatorname{sn}^2(\sqrt{l} \xi; k).$$

Utilizando que $\operatorname{sn}^2 + \operatorname{cn}^2 = 1$, concluímos que

$$\phi(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k \right]. \quad (3.2.5)$$

ϕ é chamada de solução **onda cnoidal** para a equação (3.2.3). Assim, o par $(\phi, -c\phi)$ onde ϕ é dada como acima, representa uma solução tipo onda cnoidal para o sistema (3.0.1). A onda cnoidal ϕ em (3.2.5) possui período fundamental T_ϕ igual a

$$T_\phi \equiv \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}} K(k), \quad (3.2.6)$$

pois cn^2 tem período fundamental $2K(k)$, onde $K(k)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo determinada pelo módulo k , definida no Apêndice desta tese.

Façamos agora uma análise de propriedades do período T_ϕ . Para isto, observemos que de (3.2.6), temos que $w^2 + 2A_\phi > 0$. Além disso, o período fundamental da ϕ depende a priori de $w = w(c) = 1 - c^2$ e satisfaz a seguinte desigualdade

$$T_\phi^2 > \frac{(2\pi)^2}{w^2 + 2A_\phi}. \quad (3.2.7)$$

Com efeito, fazendo a mudança de variáveis $\psi = \phi + r$ com $r + w = \sqrt{w^2 + 2A_\phi}$, obtemos que ψ satisfaz a equação (3.2.3) com $W \equiv r + w$ em lugar de w e $A_\phi = 0$. Além disso, os β'_i s satisfazem novas relações, a saber,

$$-\beta_1 = \beta_2 + \beta_3 - 3W = \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_2 + \beta_3}$$

com $0 < \beta_2 < 2W < \beta_3 < 3W$. (Esta desigualdade será demonstrada no caso $A_\phi = 0$). Agora, aproximando $K(k)$ pelo termo linear na varável k^2 , $\frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4}k^2\right]$ (vide (6.1.4) no Apêndice) temos que $T_\phi > \frac{3\pi\sqrt{3}}{2}J(\beta_2, \beta_3)$ com

$$J(\beta_2, \beta_3) = \frac{3\beta_3 + \beta_2 - 4W}{(2\beta_3 + \beta_2 - 3W)^{\frac{3}{2}}}.$$

Então, via multiplicadores de Lagrange, obtemos $J(\beta_2, \beta_3) > \frac{7^{5/4}}{(6^{3/2}\sqrt{W})}$ e além disso $T_\phi > \frac{2\pi}{\sqrt{W}}$, o que implica na relação (3.2.7).

3.3 Considerações fundamentais na teoria de estabilidade

Um importante operador a ser considerado em nossa teoria de estabilidade é o operador linearizado $\mathcal{L}_c$ ao redor de $\vec{\phi}$, a saber,

$$\mathcal{L}_c \equiv H''(\vec{\phi}) + cI''(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx} - \phi & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

ou seja, $\mathcal{L}_c : H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \rightarrow H^{-1}([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, é o Hessiano associado ao operador $H + cI$ definido em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Além disso, $\mathcal{L}_c$ é auto-adjunto, no sentido que, se definirmos $X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, $X' = H^{-1}([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ e $G = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, com $G : X \rightarrow X'$, então o operador limitado $G^{-1}\mathcal{L}_c : X \rightarrow X$ é auto-adjunto em X . Além disso, de (3.2.1) temos que,

$$\mathcal{L}_c\left(\frac{d}{dx}\vec{\phi}\right) = 0. \quad (3.3.2)$$

Observemos que o "espectro" de $\mathcal{L}_c$, definido em (3.3.1), consiste dos números reais λ tais que $G^{-1}\mathcal{L}_c - \lambda I$ não seja invertível. Deste modo, obteremos de (3.3.2) que $\lambda = 0$ pertence ao espectro de $\mathcal{L}_c$, com $\frac{d}{dx}\vec{\phi}$ em seu núcleo.

Veremos no Teorema 3.6 de uma subseção posterior, que a convexidade da função d , definida em (3.0.3), implicará na estabilidade da onda periódica $\vec{\phi}$.

Notemos que de acordo com a definição de d em (3.0.3), por (3.2.2) e supondo que $A_\phi \neq 0$ e $\int_0^L \phi = 0$, temos para $Y = L_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$,

$$\begin{aligned} d'(c) &= \langle H'(\phi, \psi) + cI'(\phi, \psi), \frac{d}{dc}(\phi, \psi) \rangle_Y + I(\phi, \psi) \\ &= \langle (\phi - \phi'' - \frac{\phi^2}{2}, \psi) + c(\psi, \phi), \frac{d}{dc}(\phi, \psi) \rangle_Y + I(\phi, \psi) \\ &= \langle (\phi - \phi'' - \frac{\phi^2}{2} + c\psi, \psi + c\phi), \frac{d}{dc}(\phi, \psi) \rangle_Y + I(\phi, \psi) \\ &= \langle (A_\phi, 0), \frac{d}{dc}(\phi, \psi) \rangle_Y + I(\phi, \psi) = I(\phi, \psi). \end{aligned}$$

Portanto, por (3.2.2)

$$d''(c) = \frac{d}{dc}I(\phi, \psi) = \frac{d}{dc} \left[- \int_0^L c\phi^2 dx \right] = - \frac{d}{dc} \int_0^L c\phi^2 dx. \quad (3.3.3)$$

Assim, para determinar a convexidade de d , precisamos determinar que a função $c \rightarrow \int_0^L c\phi^2$ é decrescente.

3.4 Estabilidade

Nesta seção usaremos as idéias do trabalho de J. Angulo e J. Bona [5], o qual apresenta uma teoria sobre a estabilidade de soluções cnoidais para a KdV. Em [5], os autores completam alguns pontos cruciais em um dos trabalhos pioneiros de T. Brooke Benjamin em [8] sobre o assunto. Iniciamos nossa teoria de estabilidade estudando o caso de soluções constantes.

3.4.1 Soluções constantes e estabilidade

Seja (ϕ, ψ) uma solução onda L -periódica viajante de (3.0.1). Então $\psi = -c\phi$ e ϕ satisfaz (3.2.3). Suponhamos sem perda de generalidade que $A_\phi = 0$ em (3.2.3) (o caso geral se reduz a este considerando a mudança de variáveis $\varphi = \phi + r$ com $r + w = \sqrt{w^2 + 2A_\phi}$). Neste caso, temos uma solução constante não trivial $\phi_0 = 2(1 - c^2)$. Mas então, $(\phi_0, \psi_0) = (2 - 2c^2, 2c^3 - 2c)$ é uma solução constante para o sistema (3.0.1). Em seguida mostraremos estabilidade para a solução constante para determinados valores de L e c .

Teorema 3.1. *Seja $L > 0$. Considere $c \in (-1, 1)$. A solução constante $\vec{\phi}_0 = (\phi_0, \psi_0) = (2 - 2c^2, 2c^3 - 2c)$ é orbitalmente estável em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ com respeito ao fluxo da equação de Boussinesq se $\frac{1}{5} < c^2 < 1$ e $1 - c^2 < \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$.*

Verificaremos a seguir as condições exigidas no início deste capítulo, a saber, as hipóteses 1-2-3.

a) Análise espectral do operador $\mathcal{L}_0$

Consideremos $\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx} - \phi_0 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$, onde $\phi_0 = 2(1 - c^2)$. Demonstraremos que para $c \in (-1, 1)$, tal que $1 - c^2 < \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, o operador $\mathcal{L}_0$ possui um único autovalor negativo, o qual é simples, e o resto de seu espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores positivos. Para isto, consideremos inicialmente $c \neq 0$ e sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(f, g) \in D(\mathcal{L}_0)$ tais que $\mathcal{L}_0(f, g) = \lambda(f, g)$. Então,

$$\begin{cases} f - f'' - \phi_0 f + cg = \lambda f \\ cf + g = \lambda g \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L) \\ g(0) = g(L), \quad g'(0) = g'(L). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Observemos que $\lambda \neq 1$, pois caso contrário $f = g = 0$, mas $(0, 0)$ não é autofunção. Mas então, da segunda equação de (3.4.1) temos que $g = \frac{c}{\lambda - 1}f$. Logo, substituindo na primeira equação de (3.4.1) obtemos que f satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} f - f'' - \phi_0 f + \frac{c^2}{\lambda - 1}f = \lambda f \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L), \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} -f'' = kf, \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L) \end{cases} \quad (3.4.2)$$

onde $k = \frac{1}{\lambda - 1}[\lambda^2 - \lambda - (\lambda - 1) + \phi_0(\lambda - 1) - c^2]$.

As autofunções associadas ao problema (3.4.2) são $f_n^-(x) = \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ e $f_n^+(x) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ para $n \geq 1$, com autovalor $k = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2$. Observemos que o zero é autovalor com autofunção associada $f \equiv 1$. Assim, resolvendo a equação do segundo grau, para $n \geq 0$,

$$\frac{1}{\lambda_n - 1}[\lambda_n^2 - \lambda_n - (\lambda_n - 1) + \phi_0(\lambda_n - 1) - c^2] = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2,$$

obtemos que os autovalores associados a (3.4.1) são dados por

$$\lambda_n^\pm = \frac{(2c^2 + \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2) \pm \sqrt{(2c^2 + \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2)^2 - 4[c^2 - 1 + \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2]}}{2}.$$

Estudaremos agora o sinal de $p_n(c)$ dado por

$$p_n(c) = 4c^4 + 4c^2 \left[\left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^4 + 4 - 4 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2,$$

para todo $c \in (-1, 1)$. Para isto, fazendo $y = c^2$, obtemos uma equação do segundo grau em y cujo valor de Δ é

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[4 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 4 \right]^2 - 16 \left[\left(\frac{2n\pi}{L} \right)^4 + 4 - 4 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \right] \\ &= 32 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 48. \end{aligned}$$

Se $2 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 < 3$ então $\Delta < 0$ e assim $p_n(c) > 0$ para todo $c \in (-1, 1)$. Se $2 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 > 3$ então $\Delta > 0$ e daí, temos que

$$y_0^\pm = \frac{4 - 4 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \pm \sqrt{32 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 48}}{8}$$

representam duas raízes para $p_n(y)$. Agora, como estamos supondo $2 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 3 > 0$, então $2 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 2 > 1 > 0$ e daí

$$y_0^- = \frac{4 - 4 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - \sqrt{32 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 48}}{8} < 0$$

e também $y_0^+ < 0$. De fato,

$$\begin{aligned} y_0^+ &= \frac{4 - 4 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 + \sqrt{32 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 48}}{8} < 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 + \sqrt{2 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 3} &< 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 1 &> \sqrt{2 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 3} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 + 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 2 \right)^2 &> 0, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $p_n(c)$ não possui raízes reais.

Se $\Delta = 0$ então $p_n(c)$ não possuirá raízes reais. De onde concluímos que $p_n(c) > 0$, $\forall c \in (-1, 1)$.

Observamos então que os autovalores λ_0^- e λ_0^+ são simples com autofunções associadas dadas respectivamente por $(1, \frac{c}{\lambda_0^- - 1})$ e $(1, \frac{c}{\lambda_0^+ - 1})$. Também, as autofunções associadas aos autovalores duplos $(\lambda_n^\pm)_{n \geq 1}$ são dadas por $(\cos(\frac{2n\pi x}{L}), \frac{c}{\lambda_n^\pm - 1}(\cos(\frac{2n\pi x}{L})))$ e $(\sin(\frac{2n\pi x}{L}), \frac{c}{\lambda_n^\pm - 1}(\sin(\frac{2n\pi x}{L})))$.

Agora queremos que o primeiro autovalor de $\mathcal{L}_0$, a saber, λ_0^- seja negativo. Para $c^2 < 1$, temos que

$$\lambda_0^- = \frac{2c^2 - \sqrt{4c^4 - 4c^2 + 4}}{2} < 0,$$

pois $\lambda_0^- < 0 \Leftrightarrow 2c^2 < \sqrt{4c^4 - 4c^2 + 4} \Leftrightarrow 4c^4 < 4c^4 - 4c^2 + 4 \Leftrightarrow c^2 < 1$. Além disso,

$$\lambda_1^- = \frac{(2c^2 + (\frac{2\pi}{L})^2) - \sqrt{(2c^2 + (\frac{2\pi}{L})^2)^2 - 4[c^2 - 1 + (\frac{2\pi}{L})^2]}}{2} > 0$$

se, e somente se, c é escolhido tal que $1 - c^2 < (\frac{2\pi}{L})^2$. Observemos também que com esta restrição, todos os demais autovalores são positivos. Temos ainda que, $\lambda_n^\pm$ é um autovalor duplo $\forall n \geq 1$ e zero não está no espectro de $\mathcal{L}_0$.

Observação 3.1. Lembramos aqui que não poderia ocorrer $1 - c^2 = (\frac{2\pi}{L})^2$, pois neste caso, o zero seria um autovalor duplo, de modo que não poderíamos aplicar a teoria de Grillakis, Shatah e Strauss [21].

Suponhamos agora $c = 0$. Então o problema (3.4.1) se reduz ao problema

$$\begin{cases} -f'' = (\lambda + 1)f, \\ g = \lambda g \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L) \\ g(0) = g(L), \quad g'(0) = g'(L). \end{cases} \quad (3.4.3)$$

As autofunções associadas ao problema (3.4.3) são $(f_n^-(x), 0) = (\sin(\frac{2n\pi x}{L}), 0)$ e $(f_n^+(x), 0) = (\cos(\frac{2n\pi x}{L}), 0)$ para $n \geq 1$, com autovalor $\lambda_n = (\frac{2n\pi}{L})^2 - 1$. Para $n = 0$, $\lambda_0 = -1$ e $\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow (\frac{2\pi}{L})^2 > 1 > 1 - c^2$.

b) Convexidade de $d(c)$

Agora, analisaremos o sinal de

$$d''(c) = \frac{d}{dc} I(\phi_0, \psi_0),$$

para I definido em (3.1.6) e $(\phi_0, \psi_0) = (2(1 - c^2), -2c(1 - c^2))$. Assim,

$$\begin{aligned} d''(c) &= -\frac{d}{dc} \left(c \int_0^L \phi_0^2 dx \right) = -\int_0^L \phi_0^2 dx - c \frac{d}{dc} \int_0^L \phi_0^2 dx \\ &= -4(1 - c^2)^2 L - c \frac{d}{dc} [4(1 - c^2)^2 L] \\ &= 4(1 - c^2)L(5c^2 - 1). \end{aligned}$$

De onde concluímos que $d''(c) > 0$ se, e somente se, $c^2 > \frac{1}{5}$.

c) Verificação da propriedade de estabilidade para as soluções constantes

Notamos que na teoria de [21], a derivada espacial de uma onda viajante é considerada não nula e pertencendo ao $\text{Kernel}(\mathcal{L}_0)$ (vide (3.3.2)). Como no caso de soluções constantes, esta derivada é zero, é possível verificar que ainda assim podemos aplicar esta teoria. Vide Lemas 3.3 e 3.4 com $A_\phi = 0$ e $\frac{d}{dx} \vec{\phi}_0 = 0$.

Observação 3.2. *É importante salientar que temos um resultado de existência global em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ de soluções para (3.0.1), com dado inicial perto de (ϕ_0, ψ_0) , similar ao Teorema 3.8 abaixo.*

3.4.2 Estabilidade de ondas cnoidais para o sistema (3.0.1)

Nesta subseção desenvolveremos uma teoria de estabilidade das ondas cnoidais da forma dada em (3.2.5) para o sistema (3.0.1) com $A_\phi \neq 0$ em (3.2.2), que possuem média zero sobre um período fundamental fixo L e determinada velocidade de onda c . Esta teoria está baseada nos trabalhos de Angulo & Bona e de Grillakis & Shatah & Strauss (vide [5] e [21]).

Para isto, começamos por estabelecer a existência de uma curva suave de soluções do tipo ondas cnoidais da forma (3.2.5) para o sistema (3.0.1), com um período fundamental arbitrário, L , e média zero sobre ele.

3.4.3 Existência de uma curva suave de ondas cnoidais com um período fundamental fixo

Sejam $\beta_i, i = 1, 2, 3$, tais que $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3w$, com $w = 1 - c^2$ e a onda cnoidal

$$\phi_w(\xi) \equiv \phi_w(\xi; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)cn^2 \left[\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k_\phi \right], \quad (3.4.4)$$

obtida na seção 3.2, como solução de

$$\phi''(\xi) + \frac{1}{2}\phi^2(\xi) - w\phi(\xi) = A_\phi. \quad (3.4.5)$$

A seguir, mostraremos que é possível escolher os β'_i s tais que $\phi = \phi_w$ tenha média zero em $[0, T_\phi]$, com T_ϕ dado por (3.2.6), isto é,

$$\int_0^{T_\phi} \phi(\xi) d\xi = 0. \quad (3.4.6)$$

Inicialmente, encontraremos uma relação *a priori* desta condição. De fato, (3.4.4) and (3.4.6) requerem que

$$\beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \frac{1}{2K} \int_0^{2K} cn^2(\xi; k) d\xi = 0. \quad (3.4.7)$$

Pondo $E(u) = E(\theta, k)$ com $\cos \theta = cn u$, então de [11] e da definição de $E(k)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^K cn^2(u; k) du &= \frac{1}{k^2} [E(u) - k'^2 u] \Big|_0^K = \frac{1}{k^2} [E(\frac{\pi}{2}, k) - k'^2 K(k) - E(0, k)] \\ &= \frac{1}{k^2} [E(k) - k'^2 K(k)]. \end{aligned}$$

Portanto, da igualdade $\int_0^{2K} cn^2(\xi; k) d\xi = \int_{-K}^K cn^2(\xi; k) d\xi$ e da paridade de cn temos de (3.4.7) a seguinte condição

$$\beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 K(k)} = 0. \quad (3.4.8)$$

Agora, usando as relações $(\beta_3 - \beta_2)k'^2 = (\beta_2 - \beta_1)k^2$ e $\frac{dK}{dk} = [E(k) - k'^2 K(k)]/kk'^2$ obtemos as seguintes relações equivalentes a (3.4.8),

$$\beta_1 K(k) + (\beta_3 - \beta_1)E(k) = 0, \quad (3.4.9)$$

e

$$\frac{dK}{dk} = -\frac{\beta_2}{\beta_3 - \beta_2} \frac{k}{k'^2} K. \quad (3.4.10)$$

Assim, temos o seguinte teorema. Este teorema pode ser encontrado em [5] (*Vide também* [2]). Repetiremos aqui sua prova para conveniência do leitor.

Teorema 3.2. (*Existência de ondas cnoidais com média zero sobre $[0, T_\phi]$*) Para todo $\beta_3 > 3$ existem únicos β_1, β_2 satisfazendo $\beta_1 < \beta_2 < 0 < \beta_3$ e $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3$, tais que a onda cnoidal $\phi_1 = \phi_1(\cdot; \beta_i)$ em (3.4.4) é uma solução de (3.4.5) com $w = 1$ e média zero sobre $[0, T_\phi]$, a saber,

$$\beta_1 K(k) + (\beta_3 - \beta_1)E(k) = 0, \quad (3.4.11)$$

onde $k^2 = (\beta_3 - \beta_2)/(\beta_3 - \beta_1)$. Além disso, a aplicação $\beta_3 \in (3, \infty) \rightarrow \beta_2 \equiv \beta_2(\beta_3)$ é contínua.

Demonstração: Seja $\beta_3 > 3$. Denotaremos por $\alpha := \frac{\beta_3-3}{2}$, $\beta := \frac{1}{\alpha}$ e I o intervalo aberto $(-\alpha, 0)$. Definamos para $x \in I$, a função contínua

$$J(x) = \frac{K(k(x))}{E(k(x))} + \frac{\beta_3}{3 - \beta_3 - x} - 1,$$

onde $k(x) = \sqrt{\frac{\beta_3-x}{2\beta_3+x-3}}$. Será provado que para todo $\beta_3 > 3$, existe um único $\beta_2 := \beta_2(\beta_3) \in I$ tal que $J(\beta_2) = 0$. Seja A uma função definida para $x \in I$ por

$$A(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{-\beta_3 + (\beta_3 - x)t^2}{\sqrt{2\beta_3 - 3 + x - (\beta_3 - x)t^2}} dt. \quad (3.4.12)$$

É fácil ver que $J(x) = 0$ se, e somente se $A(x) = 0$. Então, para provar que J tem um único zero no intervalo I , é suficiente provar que a função A é estritamente decrescente neste intervalo. Inicialmente, provaremos que existe pelo menos um ponto $x_0 \in I$ tal que $J(x_0) = 0$. De fato, usando as propriedades das funções E e K temos a existência de tal ponto como consequência do seguinte,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\alpha} A(x) &= \lim_{x \rightarrow -\alpha} \left[\frac{\beta_3 - 3 + x}{\sqrt{2\beta_3 - 3 + x}} K(k(x)) - \sqrt{2\beta_3 - 3 + x} E(k(x)) \right] = +\infty, \\ A(0) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\beta_3(t^2 - 1)}{\sqrt{2\beta_3 - 3 - \beta_3 t^2}} dt < 0. \end{aligned}$$

Agora, provaremos a unicidade. Fazendo a mudança de variáveis $s = (\sqrt{\beta_3 - x}) t$ em (3.4.12), obtemos que

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{\sqrt{\beta_3}} \frac{-\beta_3 + s^2}{\sqrt{\beta_3 - x - s^2} \sqrt{2\beta_3 - 3 + x - s^2}} ds \\ &+ \int_{\sqrt{\beta_3}}^{\sqrt{\beta_3-x}} \frac{-\beta_3 + s^2}{\sqrt{\beta_3 - x - s^2} \sqrt{2\beta_3 - 3 + x - s^2}} ds. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Denotemos por $N(x)$ e $P(x)$ a primeira e segunda integrais, respectivamente, no lado direito de (3.4.13). Será provado que ambas são funções decrescentes em I .

(i). Sejam $-\alpha < x_1 < x_2 < 0$ e $s \in [0, \sqrt{\beta_3}]$. Como a parábola $f(x) = (\beta_3 - x - s^2)(2\beta_3 - 3 + x - s^2)$ assume seu valor máximo no ponto $x_{max} = -\alpha$ e $f(0) > 0$, temos que $f(x_1) > f(x_2) > 0$. Portanto $N(x_1) > N(x_2)$, já que $-\beta_3 + s^2 \leq 0$.

(ii). Fazendo $t^2 = -\beta_3 + s^2$ na expressão integral para $P(x)$, segue-se que

$$P(x) = \int_0^{\sqrt{-x}} \frac{t^3}{\sqrt{-x-t^2}\sqrt{\beta_3-3+x-t^2}\sqrt{\beta_3+t^2}} dt.$$

Fazendo agora a mudança de variável $s = \sqrt{\frac{\alpha}{-x}}t$ na expressão acima, temos

$$P(x) = \beta^2 \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{x^2 s^3}{\sqrt{-x+\beta s^2 x} \sqrt{2\alpha+x+\beta s^2 x} \sqrt{2\alpha+3-\beta s^2 x}} ds.$$

Seja $s \in [0, \sqrt{\alpha}]$ fixo, mas arbitrário. Para provarmos que P é uma função decrescente no intervalo I , será suficiente mostrarmos que

$$h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{-x+\beta s^2 x} \sqrt{2\alpha+x+\beta s^2 x} \sqrt{2\alpha+3-\beta s^2 x}}$$

é uma função decrescente, para $x \in I$. Agora, observemos que h é uma função decrescente em I se, e somente se

$$g(x) = \frac{(2\alpha + (1 + \beta s^2)x)(2\alpha + 3 - \beta s^2 x)}{x^3}$$

o é. Como $g'(x) < 0$ se, e somente se

$$q(x) = (\beta s^2 + \beta^2 s^4)x^2 + (-4\alpha - 6 - 6\beta s^2)x + (-12\alpha^2 - 18\alpha) < 0,$$

para $x \in I$, então, para provarmos o decrescimento de g em I , nos será suficiente mostrarmos que $q(0), q(-\alpha) < 0$. De fato, temos que $q(0) = -12\alpha^2 - 18\alpha < 0$ e $q(-\alpha) = s^4 + (\alpha + 6)s^2 - 8\alpha^2 - 12\alpha < -6\alpha^2 - 6\alpha < 0$.

De (i) e (ii), concluímos que A é uma função estritamente decrescente em I . Portanto, A e também J possuem um único zero em I . Além disso, se $\beta_2 \in (\frac{3-\beta_3}{2}, 0)$ é tal que $J(\beta_2) = 0$ então definindo $\beta_1 \equiv 3 - \beta_2 - \beta_3$ obtemos (3.4.11). Assim, temos a existência de uma onda cnoidal com média zero em $[0, T_{\phi_1}]$.

A continuidade da aplicação $\beta_3 \in (3, \infty) \rightarrow \beta_2 = \beta_2(\beta_3)$ segue como consequência do Teorema da Função Implícita aplicado à função $A(x, \beta_3)$ em (3.4.12), observando que $\partial_x A(\beta_2(\beta_3), \beta_3) < 0$.

□

Observação 3.3. Do Teorema 3.2 temos que todo $\beta_3 > 3$ existe uma única escolha de $\beta_2 \in I = (\frac{3-\beta_3}{2}, 0)$ tal que β_2 é o único zero no intervalo I da função J e a aplicação $\beta_3 \in (3, \infty) \mapsto$

$\beta_2 = \beta_2(\beta_3)$ é contínua. Então, se considerarmos o período fundamental T_{ϕ_1} como uma função do parâmetro β_3 , temos

$$T_{\phi_1}(\beta_3) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2\beta_3 + \beta_2(\beta_3) - 3}} K\left(\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_2(\beta_3)}{2\beta_3 + \beta_2(\beta_3) - 3}}\right),$$

e consequentemente $T_{\phi_1}(\beta_3) \rightarrow +\infty$ quando $\beta_3 \rightarrow 3$, já que $K(k) \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow 1$. Por outro lado, como $J(\beta_2) = 0$ e $\frac{3-\beta_3}{2} < \beta_2 < 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq T_{\phi_1}(\beta_3) &= 4\sqrt{3} \frac{\sqrt{2\beta_3 + \beta_2 - 3}}{\beta_3 + \beta_2 - 3} E(k(\beta_2)) \leq 2\pi\sqrt{3} \frac{\sqrt{2\beta_3 + \beta_2 - 3}}{\beta_3 + \beta_2 - 3} \\ &\leq 4\pi\sqrt{3} \frac{\sqrt{2\beta_3 + \beta_2 - 3}}{\beta_3 - 3} < 4\pi\sqrt{3} \frac{\sqrt{2\beta_3 - 3}}{\beta_3 - 3}, \end{aligned}$$

e então $T_{\phi_1}(\beta_3) \rightarrow 0$ quando $\beta_3 \rightarrow +\infty$.

Demonstramos agora a existência de uma curva suave de ondas cnoidais com média zero.

Lema 3.1. *Seja $L > 0$ um número fixo e consideremos β_i , $i = 1, 2, 3$, um trio arbitrário, mas fixo como definido no Teorema 3.2. Definamos $w_0 = T_{\phi_1}^2/L^2$, onde $T_{\phi_1} = T_{\phi_1}(\beta_i)$. Então,*

(1) *existe um intervalo $I(w_0)$ em torno de w_0 , uma bola $B(\vec{\beta})$ centrada em $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e uma única função suave*

$$\begin{aligned} \Pi : I(w_0) &\rightarrow B(\vec{\beta}) \\ w &\rightarrow (\alpha_1(w), \alpha_2(w), \alpha_3(w)) \end{aligned}$$

tal que $\Pi(w_0) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $\alpha_i \equiv \alpha_i(w)$ satisfazem as relações

$$\begin{cases} \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}} K(k) = L\sqrt{w}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \\ \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 K(k)} = 0, \end{cases} \quad (3.4.14)$$

onde $k^2 = (\alpha_3 - \alpha_2)/(\alpha_3 - \alpha_1)$.

(2) *A onda cnoidal $\phi_1 = \phi_1(\cdot; \alpha_i)$, dada por (3.4.4) com α_i em lugar de β_i , possui período fundamental $L\sqrt{w}$, média zero sobre $[0, L\sqrt{w}]$ e satisfaz a equação diferencial (3.4.5) com $w = 1$. Além disso, para todo $w \in I(w_0)$*

$$A_{\phi_1}(w) = \frac{1}{2L\sqrt{w}} \int_0^{L\sqrt{w}} \phi_1^2(x) dx = -\frac{1}{6} \sum_{i < j} \alpha_i(w) \alpha_j(w).$$

Demonstração: Aplicaremos o Teorema da Função Implícita. Para isto, consideremos o seguinte conjunto aberto

$$\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, w) \mid \alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3, \alpha_3 > 3 \text{ e } w > 0\} \subset \mathbb{R}^4$$

e definamos a função $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, w) = & \left(\frac{4\sqrt{3} K(k)}{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}} - L\sqrt{w}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3, \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 K(k)} \right) \\ & \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

onde $k^2 \equiv k^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_3 - \alpha_2)/(\alpha_3 - \alpha_1)$. Então, do Teorema 3.2, temos que

$$\Phi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, w_0) = (0, 0, 0).$$

Agora, calculemos $\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \Phi_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3, w_0)$. Inicialmente, usando as relações (v. Apêndice)

$$\begin{cases} \frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{kk'^2} \Big|_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)} = -\frac{\beta_2}{\beta_3 - \beta_2} \frac{k_1}{k_1'^2} K(k_1), \\ \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}} K(k_1) = L\sqrt{w_0} \end{cases}$$

com $k_1^2 = (\beta_3 - \beta_2)/(\beta_3 - \beta_1)$, temos para Φ_1 que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, w_0) = -\frac{4\sqrt{3} \beta_1}{2(\beta_3 - \beta_1)^{3/2}(\beta_2 - \beta_1)} K(k_1) = \frac{-\beta_1 L\sqrt{w_0}}{2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (3.4.16)$$

Analogamente, obtemos as relações

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, w_0) &= \frac{4\sqrt{3} \beta_2}{2\sqrt{\beta_3 - \beta_1}(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)} K(k_1) = \frac{\beta_2 L\sqrt{w_0}}{2(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, w_0) &= \frac{-4\sqrt{3} \beta_3}{2(\beta_3 - \beta_1)^{3/2}(\beta_3 - \beta_2)} K(k_1) = \frac{-\beta_3 L\sqrt{w_0}}{2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)}. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Agora, da definição de Φ_2 segue-se que $\nabla_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, w_0) = (1, 1, 1)$. Com respeito a Φ_3 , temos inicialmente da relação

$$\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 K} = \frac{k'^2}{kK} \frac{dK}{dk}$$

que

$$\Phi_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, w_0) = \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) \frac{k'^2}{kK} \frac{dK}{dk}.$$

Então, como K satisfaz a equação diferencial hipergeométrica (v. Apêndice)

$$kk'^2 \frac{d^2 K}{dk^2} + (1 - 3k^2) \frac{dK}{dk} - kK = 0, \quad (3.4.18)$$

e do Teorema 3.2, $\frac{k'^2}{kK} \frac{dK}{dk} \Big|_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)} = -\frac{\beta_2}{\beta_3 - \beta_2}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \nabla_{(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3)} \Phi_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3, c_0) = \\ \left(\frac{\beta_2 \beta_3 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_3}{2(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)}, \frac{\beta_2 \beta_3 - \beta_1 \beta_3 + \beta_1 \beta_2}{2(\beta_3 - \beta_2)(\beta_2 - \beta_1)}, \frac{\beta_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_3 - \beta_2 \beta_3}{2(\beta_3 - \beta_2)(\beta_3 - \beta_1)} \right). \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Além disso, de (3.4.16), (3.4.17) e (3.4.19) obtemos que o determinante jacobiano de $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot, w)$ satisfaz,

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3)} \Big|_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3, w_0)} = L\sqrt{w_0} \frac{\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_3}{4(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)(\beta_3 - \beta_1)}. \quad (3.4.20)$$

Agora, como a onda cnoidal $\phi_1 = \varphi_1(\cdot; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ satisfaz (3.4.5) com as condições $w = 1$, $A_{\phi_1} = -\frac{1}{6}(\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_3 \beta_1)$, média zero em $[0, T_{\phi_1}]$ e $\phi_1'(0) = \phi_1'(T_{\phi_1})$, temos de (3.4.5) que

$$\frac{1}{2} \int_0^{T_{\phi_1}} \phi_1^2(\xi) d\xi = A_{\phi_1} T_{\phi_1} = A_{\phi_1} L\sqrt{w_0}, \quad (3.4.21)$$

e então de (3.4.20)

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3)} \Big|_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3, c_0)} = -\frac{3}{4(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)(\beta_3 - \beta_1)} \int_0^{T_{\phi_1}} \phi_1^2(\xi) d\xi \neq 0. \quad (3.4.22)$$

Assim, do Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças $I(w_0)$, $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, e uma única função suave $\Pi : I(w_0) \mapsto B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tal que

$$\Phi(\Pi(w), w) = (0, 0, 0) \text{ para todo } w \in I(w_0). \quad (3.4.23)$$

Finalmente, de (3.2.6), (3.4.8) e (3.4.15), segue-se o Lema. □

Agora, calculamos as derivadas $\frac{d}{dw} \alpha_i$.

Corolário 3.1. *Seja $\Pi : I(w_0) \mapsto B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ a função suave definida no Lema 3.1, satisfazendo $\Phi(\Pi(w), w) = (0, 0, 0)$ para todo $w \in I(w_0)$. Denotando $\Pi(w) = (\alpha_1(w), \alpha_2(w), \alpha_3(w))$ temos as relações*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw}\alpha_1(w) &= \frac{1}{w(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)} \left(\alpha_3^2(\alpha_1-\alpha_2) + \alpha_2^2(\alpha_1-\alpha_3) \right), \\
\frac{d}{dw}\alpha_2(w) &= \frac{1}{w(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)} \left(\alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_3) + \alpha_3^2(\alpha_2-\alpha_1) \right), \\
\frac{d}{dw}\alpha_3(w) &= \frac{1}{w(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)} \left(\alpha_1^2(\alpha_3-\alpha_2) + \alpha_2^2(\alpha_3-\alpha_1) \right).
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

Demonstração: Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Então derivando com respeito a w a relação (3.4.23) e utilizando (3.4.20), (3.4.22) (substituindo aqui β'_i s por α'_i s), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw}\Pi(w) &= \begin{bmatrix} \nabla_\alpha \Phi_1 \\ \nabla_\alpha \Phi_2 \\ \nabla_\alpha \Phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{L}{2\sqrt{w}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{w(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)} \begin{bmatrix} \alpha_3^2(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_3) \\ \alpha_1^2(\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_3^2(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \alpha_1^2(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_2^2(\alpha_3 - \alpha_1) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

demonstrando (3.4.24). □

A seguir, estabeleceremos o teorema principal desta seção, a respeito da existência de uma curva suave de soluções ondas cnoidais para o sistema (3.0.1) com um período fixo L e com média zero em $[0, L]$. A notação empregada no Teorema 3.3 abaixo será idêntica àquela utilizada no Lema 3.1.

Teorema 3.3. *Seja $L > 0$ um número fixo e consideremos $w \in I(w_0)$. Então existe $\phi_w \in H_{per}^n([0, L])$, $n \geq 0$, tal que $\int_0^L \phi_w d\xi = 0$ e satisfaz a equação*

$$\phi_w''(\xi) + \frac{1}{2}\phi_w^2(\xi) - w\phi_w(\xi) = A_{\phi_w} \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.4.25}$$

onde

$$A_{\phi_w} = \frac{1}{2L} \int_0^L \phi_w^2(\xi) d\xi = -\frac{w^2}{6} \sum_{i < j} \alpha_i(w)\alpha_j(w). \tag{3.4.26}$$

Além disso, a aplicação $w \in I(w_0) \mapsto \phi_w \in H_{per}^n([0, L])$ é uma função de classe C^1 .

Demonstração: Seja $\phi_1 \equiv \phi_1(\cdot; \alpha_i)$ a onda cnoidal determinada pelo Lema 3.1 com período fundamental $L\sqrt{w}$, média zero em $[0, L\sqrt{w}]$ e satisfazendo (3.4.5) com $w = 1$. Definamos

$$\phi_w(\xi) = w\phi_1(\sqrt{w}\xi) \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.4.27}$$

Observemos que ϕ_w tem a forma (3.2.5) com $\beta_i = w\alpha_i$ e $\sum \beta_i = 3w$. Então, ϕ_w tem período L e média zero sobre $[0, L]$. Além disso, ϕ_w satisfaz a equação diferencial

$$\phi_w''(\xi) + \frac{1}{2}\phi_w^2(\xi) - w\phi_w(\xi) = w^2 A_{\phi_1}(w).$$

Agora, das propriedades de ϕ_1 obtemos a relação

$$A_{\phi_1}(w) = \frac{1}{2L\sqrt{w}} \int_0^{L\sqrt{w}} \phi_1^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2Lw^2} \int_0^L \phi_w^2(\xi) d\xi \equiv \frac{1}{w^2} A_{\phi_w}(w), \quad (3.4.28)$$

e então ϕ_w satisfaz (3.4.25). Além disso, de (3.4.28) e do Lema 3.1 obtemos (3.4.26).

Finalmente, da regularidade de ϕ_1 e α_i 's obtemos a regularidade da curva $w \rightarrow \phi_w$. $\square$

Observação 3.4. *Seja $L > 0$ um número fixo. Por (3.2.7), obtemos uma cota inferior a priori para $w_0 \equiv w_0(\beta_3) = T_{\phi_1}^2(\beta_3)/(4L^2) > \frac{\pi^2}{L^2\sqrt{1+2A_{\phi_1}}}$. Por outro lado, da observação que segue do Teorema 3.2, $T_{\phi_1}(\beta_3)$ pode assumir qualquer valor do intervalo $(0, \infty)$ para $\beta_3 > 3$. Então, podemos escolher $w_0 = T_{\phi_1}^2/(4L^2)$ arbitrariamente no intervalo $(0, \infty)$. Agora, pelo Lema 3.1 e pelo Teorema 3.3, existe um intervalo $I(w_0)$ em torno de w_0 tal que existe uma curva suave bem definida $w \in I(w_0) \mapsto \phi_w \in H_{per}^n([0, L])$ de ondas cnoidais satisfazendo a equação (3.4.25). Da unicidade da aplicação Π no Lema 3.1, podemos definir a aplicação $w \in (0, \infty) \mapsto \phi_w \in H_{per}^n([0, L])$ como uma curva suave de ondas cnoidais para a equação (3.4.25) com um período fixo L e média zero em $[0, L]$.*

Portanto, do Teorema 3.3 e da observação 3.4, temos o seguinte resultado de existência de soluções periódicas para (3.2.2) com $K_1 = 0$ e $K_2 = A_\phi$.

Teorema 3.4. *Para cada $c \in (-1, 1)$ e $w(c) = 1 - c^2 \in (0, 1)$, a aplicação*

$$c \in (-1, 1) \mapsto \phi_{w(c)} \in H_{per}^n([0, L])$$

é uma curva suave de ondas cnoidais tal que $\int_0^L \phi_{w(c)}(x) dx = 0$, com $\phi_{w(c)}$ satisfazendo (3.4.25) e $A_{\phi_{w(c)}}$ dado por

$$A_{\phi_{w(c)}} = \frac{1}{2L} \int_0^L \phi_{w(c)}^2(\xi) d\xi = -\frac{w(c)^2}{6} \sum_{i < j} \alpha_i(w(c)) \alpha_j(w(c)). \quad (3.4.29)$$

Além disso, $c \in (-1, 1) \mapsto (\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})$ é uma curva suave de ondas cnoidais para o sistema (3.0.1).

A seguir, obtemos a propriedade de que o módulo k como uma função de w é estritamente crescente. Este resultado é essencial na análise da estabilidade. A notação empregada a seguir será a mesma do Lema 3.1.

Teorema 3.5. *Consideremos $w \in (0, \infty)$, $\Pi(w) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e a função módulo*

$$k(w) \equiv k(\Pi(w)) = \frac{\sqrt{\alpha_3(w) - \alpha_2(w)}}{\sqrt{\alpha_3(w) - \alpha_1(w)}}.$$

Então, temos que $\frac{d}{dw}k(w) > 0$.

Demonstração: Denotando por $A(w) = w(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)$ e $B(w) = 2(\alpha_3 - \alpha_1)^{3/2}\sqrt{\alpha_3 - \alpha_2}$, então do Corolário 3.1 e do Lema 3.1 temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw}k(w) &= \frac{1}{B(w)} \left[(\alpha_3 - \alpha_2) \frac{d\alpha_1(w)}{dw} - (\alpha_3 - \alpha_1) \frac{d\alpha_2(w)}{dw} + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{d\alpha_3(w)}{dw} \right] \\ &= -\frac{2}{A(w)B(w)} (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= -\frac{3(\alpha_2 - \alpha_1)}{w(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)} k(w) > 0. \end{aligned}$$

Observemos que de (3.4.26),

$$\frac{d}{dw}k(w) = \frac{w(\alpha_2 - \alpha_1)}{2A_{\phi_w}} k(w).$$

□

Estabeleceremos a seguir o nosso teorema de estabilidade.

Teorema 3.6. *Sejam $c \in (-1, 1)$ e $w(c) = 1 - c^2$. Então, existem $\epsilon > 0$ e $L_0 > 0$ tais que a onda periódica viajante $(\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})$ dada pelo Teorema 3.4 é orbitalmente estável no subspaço fechado*

$$\mathcal{F} = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \cap E,$$

onde $E \equiv \{(u, v) \in H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]); \int_0^L u dx = 0\}$, pelo fluxo da equação de Boussinesq, se $c \in (-1, -1 + \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1)$ e $L > L_0$.

Observação 3.5. *Numericamente, vê-se que $L_0 \sim 4.256151539$.*

O roteiro que seguiremos de agora em diante será o seguinte: Verificaremos que as hipóteses **1-2-3** são válidas no caso em que consideramos as soluções $(\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})$ e em seguida demonstraremos o Teorema 3.6. De fato, a primeira hipótese segue diretamente do Teorema 2.7, enquanto parte da segunda segue do Teorema 3.4. A segunda parte da segunda hipótese, a qual diz respeito a convexidade da função $d(c)$, será tratada na subseção 3.4.5, logo após a análise espectral do operador $\mathcal{L}_c$, definido em (3.3.1), apresentada na subseção 3.4.4 a seguir.

3.4.4 Análise espectral do operador $\mathcal{L}_c$

Verificaremos agora a hipótese 3 para $\mathcal{L}_c$ definido em (3.3.1), com $\phi = \phi_{w(c)}$ dada pelo Teorema 3.4. Para isto, calculemos o operador Hessiano $\mathcal{L}_c$ através de sua forma quadrática associada, $Q_c(g, h) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_c(g, h), (g, h) \rangle$.

$$\begin{aligned} Q_c(g, h) &= \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}(g^2 + (g_x)^2 + h^2) - \frac{1}{2}\phi_{w(c)}g^2 + cgh \right\} dx \\ &= \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}((1 - c^2)g^2 + (g')^2 - \phi_{w(c)}g^2) + \frac{1}{2}(h + cg)^2 \right\} dx \\ &\equiv Q_c^{(1)}(g) + \frac{1}{2} \|h + cg\|^2, \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

onde

$$Q_c^{(1)}(g) = \frac{1}{2} \int_0^L (g')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L V(x) g^2 dx \quad (3.4.31)$$

e

$$V(x) = w(c) - \phi_{w(c)}(x).$$

Do sistema de equações diferenciais ordinárias (3.2.1) para a onda viajante periódica $(\phi_{w(c)}, \psi_{w(c)}) = (\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})$, segue-se que $g = \phi'_{w(c)}$ e $h = \psi'_{w(c)}$ satisfaz $\mathcal{L}_c(g, h) = 0$. Para ver que $\frac{d}{dx}(\phi_{w(c)}, \psi_{w(c)})$ gera o núcleo de $\mathcal{L}_c$, consideremos $(g, h) \in \text{Ker}(\mathcal{L}_c)$. Então, da própria definição de $\mathcal{L}_c$, obtemos

$$\begin{cases} -g'' + (1 - c^2)g - \phi_{w(c)}g &= 0 \\ h &= -cg. \end{cases}$$

Mas então, das propriedades do operador $\mathcal{L}_{cn} = -\partial_x^2 + w - \phi_w$, (*vide* Teorema 6.1 do Apêndice), temos que $g = \lambda \phi'_{w(c)}$ e $h = -cg = -c\lambda \phi'_{w(c)} = \lambda \psi'_{w(c)}$, onde $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Para provar que existe um único autovalor negativo e simples, consideremos Q_c^1 definida como em (3.4.31), a qual é a forma quadrática associada ao operador $\mathcal{L}_{cn}$. Pelo Teorema 6.1 do Apêndice, temos que o operador $\mathcal{L}_{cn}$ possui exatamente um autovalor negativo que é simples, digamos, β , com autofunção associada χ . Como Q_c^1 assume um valor negativo, então de (3.4.30), também Q_c assume um valor negativo e portanto o menor autovalor de $\mathcal{L}_c$ é negativo. De fato, consideremos $\vec{\chi} = (\chi, -c\chi)$, então

$$\mathcal{L}_c(\vec{\chi}) = Q_c^1(\chi) + \frac{1}{2} \|c\chi - c\chi\|^2 = Q_c^1(\chi) = \frac{1}{2}\beta < 0.$$

Suponhamos λ_1 o menor autovalor de $\mathcal{L}_c$. Mostraremos que o próximo autovalor de $\mathcal{L}_c$, digamos λ_2 é 0, o qual já sabemos ser simples, e mostraremos que seu terceiro autovalor, λ_3 , é de fato estritamente positivo. Demonstraremos isto utilizando a caracterização min-max de autovalores

(vide S. Reed and B. Simon em [39]), a saber,

$$\lambda_2 = \max_{(\phi_1, \psi_1) \in X} \min_{\substack{(g, h) \in X \setminus \{0\} \\ (g, \phi_1)_1 + (h, \psi_1)_0 = 0}} \frac{Q_c(g, h)}{\|g\|_1^2 + \|h\|_0^2}. \quad (3.4.32)$$

Escolhamos $\phi_1 = \chi$, $\psi_1 = 0$ para obter uma estimativa por baixo, a saber

$$\lambda_2 \geq \min_{\substack{(g, h) \in X \setminus \{0\} \\ (g, \chi)_1 = 0}} \frac{Q_c(g, h)}{\|g\|_1^2 + \|h\|_0^2}. \quad (3.4.33)$$

O lado direito de (3.4.33) é não negativo já que no subspaço

$$\{(g, h) \in X \setminus \{0\}; (g, \chi)_1 = 0\},$$

$Q_c^1(g) \geq 0$ pelo Teorema 6.1 do Apêndice. Assim, $\lambda_2 \geq 0$ e, de considerações anteriores, $\lambda_2 = 0$. Para estimar λ_3 por baixo por uma quantidade estritamente positiva, usamos o mesmo argumento com respeito ao subspaço de dimensão 2 gerado por $(\chi, 0)$, $(\phi'_{w(c)}, 0)$, pois neste caso $Q_c^1(g) \geq \tilde{\lambda}_2 \|g\|^2$, para $g \perp \chi$, $g \perp \phi'_{w(c)}$, onde $\tilde{\lambda}_2$ é o terceiro autovalor associado a $\mathcal{L}_{cn}$, o qual é estritamente positivo. Isto finaliza a hipótese 3.

3.4.5 Convexidade da função $d(c)$

Vamos agora verificar que $d''(c) > 0$. Assim, de (3.3.3), temos que ver que

$$\begin{aligned} d''(c) &= \frac{d}{dc} I(\phi_{w(c)}, \psi_{w(c)}) = \frac{d}{dc} \left(- \int_0^L c \phi_{w(c)}^2 dx \right) \\ &= - \int_0^L \phi_{w(c)}^2 dx - c \frac{d}{dc} \int_0^L \phi_{w(c)}^2 dx \\ &= - \int_0^L \phi_{w(c)}^2 dx - c \frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w^2 dx \right) \frac{dw}{dc} \\ &= - \int_0^L \phi_w^2 dx + 2c^2 \frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w^2 dx \right) > 0, \end{aligned}$$

em algum subintervalo de $(-1, 1)$.

Iniciamos demonstrando algumas relações associadas as funções $\alpha_i = \alpha_i(w)$, $i = 1, 2, 3$, obtidas no Lema 3.1. Denotando por

$$T_{\phi_1} \equiv T_{\phi_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}} K(k)$$

o período da onda cnoidal onde temos que $T_{\phi_1} = L\sqrt{w}$. Então, $\alpha_3 - \alpha_2 = 48k^2 K^2(k)/T_{\phi_1}^2$ e de (3.4.14), obtemos nossa primeira relação

$$\alpha_2 = -(\alpha_3 - \alpha_2) \frac{E - k'^2 K}{k^2 K} = -\frac{48K}{T_{\phi_1}^2} \left[E - k'^2 K \right] = -\frac{48K}{wL^2} \left[E - k'^2 K \right]. \quad (3.4.34)$$

Assim, de (3.4.34),

$$\alpha_3 = \frac{48k^2K^2}{T_{\phi_1}^2} + \alpha_2 = \frac{48k^2K^2}{T_{\phi_1}^2} \left(\frac{K-E}{k^2K} \right) = \frac{48K}{T_{\phi_1}^2} [K-E] = \frac{48K}{wL^2} [K-E], \quad (3.4.35)$$

onde utilizamos que $k^2 + k'^2 = 1$. Agora, da terceira igualdade em (3.4.14) segue-se que $\alpha_2(E-K) = \alpha_3(E - (1-k^2)K)$ e então $(\alpha_2 - \alpha_3)(E-K) = \alpha_3k^2K$. Assim, da definição de k^2 temos

$$K-E = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1} K \Rightarrow -\frac{\alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{E}{K}. \quad (3.4.36)$$

Portanto, de (3.4.35) e (3.4.36), obtemos

$$\alpha_1 = \frac{E}{E-K} \alpha_3 = \frac{48K}{wL^2} \frac{E}{E-K} [K-E] = -\frac{48K}{wL^2} E. \quad (3.4.37)$$

Finalmente, da segunda igualdade em (3.4.14) e das relações (3.4.34), (3.4.35) e (3.4.37) obtemos a seguinte relação importante para w

$$w = -\frac{16}{L^2} K [3E + K(k^2 - 2)]. \quad (3.4.38)$$

Observemos que esta última igualdade implica que $3E < K(2 - k^2)$. Além disso, a função $h(k) := (1 + k'^2)K(k) - 3E(k) = (2 - k^2)K(k) - 3E(k)$ é estritamente crescente em $(0, 1)$. Para demonstrarmos isto, provaremos inicialmente que a função $f(k) := (1 + k'^2)K(k) - 2E(k) > 0 \forall k \in (0, 1)$. De fato, $f(0) = 0$ e $f'(k) = \frac{k}{k'^2}(E - k'^2K) > 0 \forall k \in (0, 1)$. Visto isto, derivemos agora $h(k)$. Temos

$$\begin{aligned} h'(k) &= (1 + k'^2) \frac{dK}{dk} - 2kK - 3 \frac{dE}{dk} \\ &= \frac{1}{kk'^2} (E + k'^4K - 2k'^2E) > 0 \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

$\forall k \in (0, 1)$, pois como $E > k'^2K$, temos que $E + k'^4K > k'^2(1 + k'^2)K - 2k'^2E + 2k'^2E = k'^2f(k) + 2k'^2E > 0 \forall k \in (0, 1)$.

Agora, de (3.4.29) e (3.4.34)-(3.4.35)-(3.4.37) e das relações no Apêndice para $\frac{dE}{dk}$ e $\frac{dK}{dk}$ em (6.1.5), obtemos que

$$-\frac{3L^3}{48^2} \left(\int_0^L \phi_w^2 dx \right) = K^2 \left[kk'^2 E \frac{dK}{dk} + k^2 k'^2 \frac{dK}{dk} \frac{dE}{dk} + kE \frac{dE}{dk} \right] \equiv K^2 D(k). \quad (3.4.40)$$

Note que $D(k) < 0$.

Portanto, para sabermos o valor de $\frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w^2 dx \right)$, precisamos calcular a derivada $\frac{d}{dw} D(k) = \frac{dk}{dw} \frac{d}{dk} D(k)$. Iniciamos estabelecendo os valores de alguns termos que aparecerão na derivada

$\frac{d}{dk}D(k)$. Para isto, usando que K satisfaz a primeira equação em (6.1.3) e E satisfaz a equação diferencial hipergeométrica (vide Apêndice)

$$kk'^2 \frac{d^2 E}{dk^2} + k'^2 \frac{dE}{dk} + kE = 0, \quad (3.4.41)$$

temos os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \left[(1 - 3k^2) \frac{dK}{dk} + kk'^2 \frac{d^2 K}{dk^2} \right] E &= kKE. \\ \left[2k(1 - 2k^2) \frac{dK}{dk} + k^2 k'^2 \frac{d^2 K}{dk^2} \right] \frac{dE}{dk} &= \left[kk'^2 \frac{dK}{dk} + k^2 K \right] \frac{dE}{dk}. \end{aligned} \quad (3.4.42)$$

$$k^2 k'^2 \frac{dK}{dk} \frac{d^2 E}{dk^2} = -k^2 E \frac{dK}{dk} - kk'^2 \frac{dK}{dk} \frac{dE}{dk}.$$

$$kE \frac{d^2 E}{dk^2} = -E \frac{dK}{dk},$$

onde utilizamos que $\frac{d^2 E}{dk^2} = -\frac{1}{k} \frac{dK}{dk}$ (vide Apêndice) na última igualdade de (3.4.42). Então, segue de (3.4.42) que

$$\frac{d}{dk}D(k) = kKE + kk'^2 \frac{dK}{dk} \frac{dE}{dk} + k^2 K \frac{dE}{dk} - k^2 E \frac{dK}{dk} + E \frac{dE}{dk} + k \left(\frac{dE}{dk} \right)^2 - E \frac{dK}{dk}. \quad (3.4.43)$$

Agora, de (6.1.5), temos $kk'^2 \frac{dK}{dk} \frac{dE}{dk} = (1 - k^2) \frac{dK}{dk} E + (k^2 - 1) K \frac{dK}{dk}$, bem como, as relações

$$\begin{aligned} (k^2 - 1) K \frac{dK}{dk} &= \frac{(1 - k^2)K^2 - KE}{k} \\ k^2 K \frac{dE}{dk} &= kKE - kK^2 \\ E \frac{dE}{dk} + k \left(\frac{dE}{dk} \right)^2 &= \frac{2E^2 - 3EK + K^2}{k}. \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

Portanto, pondo estas relações em (3.4.43) e usando (6.1.5), obtemos finalmente que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk}D(k) &= 2kEK - kK^2 - 2k^2 E \frac{dK}{dk} + (k^2 - 1) K \frac{dK}{dk} + \frac{2E^2 - 3EK + K^2}{k} \\ &= 2kKE - 2kK^2 - 2k^2 E \frac{dK}{dk} + \frac{K^2 - EK}{k} + \frac{2E^2 - 3EK + K^2}{k} \\ &= 2[E - K] \left[\frac{E - k'^2 K}{k} \right] - 2k^2 E \frac{dK}{dk} \\ &= \frac{dK}{dk} \left[2k'^2 (E - K) - 2k^2 E \right]. \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

Agora, mostraremos a seguinte expressão para $D(k)$,

$$D(k) = [E - K][3E - K + k^2 K] + k^2 EK. \quad (3.4.46)$$

Para isto, usando novamente a relação $\frac{d^2 E}{dk^2} = -\frac{1}{k} \frac{dK}{dk}$, (3.4.41) e (6.1.5), obtemos

$$\begin{cases} k k'^2 E \frac{dK}{dk} = k E \left(k'^2 \frac{dE}{dk} + k E \right) = k E \left(\frac{dE}{dk} + k K \right), \\ k^2 k'^2 \frac{dK}{dk} \frac{dE}{dk} = k^2 \frac{dE}{dk} \left((1 - k^2) \frac{dE}{dk} + k E \right) \\ \quad = \frac{dE}{dk} \left[k(E - K) + k^3 K \right], \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{aligned} D(k) &= \frac{dE}{dk} \left[2kE + k(E - K) + k^3 K \right] + k^2 EK \\ &= [E - K][3E - K + k^2 K] + k^2 EK. \end{aligned}$$

Assim, dos resultados acima obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{3L^3}{48^2} \frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w^2 dx \right) &= 2K \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dw} \left[D(k) + k'^2 K(E - K) - k^2 EK \right] \\ &= 2K \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dw} \left[(E - K)(3E - K + k^2 K + k'^2 K) \right] \\ &= 6(E - K)EK \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dw}, \end{aligned}$$

e então obtemos que

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{1}{2} \int_0^L \phi_w^2 dx \right) = \frac{2304}{L^3} (K - E)EK \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dw}. \quad (3.4.47)$$

Observação 3.6. Como em nosso trabalho, estamos considerando $w > 0$, de (3.4.38), temos que

$$k \in \mathcal{K} := \{k \in (0, 1); (1 + k'^2)K(k) - 3E(k) > 0\} \equiv (k_0, 1),$$

onde k_0 é tal que $h(k_0) = 0$ e $h(k) = (1 + k'^2)K(k) - 3E(k)$. (O elemento k_0 existe pois $h(k)$ é uma função contínua e estritamente crescente (v. (3.4.39)), com $h(0) = -\frac{\pi}{2}$ e $h(1) = +\infty$). Além disso, $k_0^2 > \frac{1}{2}$, pois $h(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$. De fato, pela relação de Legendre (vide [11], fórmula 110.10, pag.10), temos que

$$2E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} > 0$$

e portanto, $2E(\frac{\sqrt{2}}{2}) > K(\frac{\sqrt{2}}{2})$. Assim,

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \frac{3}{2}2E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Agora, a partir de experimentos numéricos feitos no Mapple, é possível concluir que $k_0 \sim 0.980383$.

Observação 3.7. De (3.4.38), temos que $c \rightarrow 1 \Leftrightarrow w = w(k) \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow k_0$. Com efeito, se $k \rightarrow k_0$, então $w(k) = \frac{16h(k)K(k)}{L^2} \rightarrow w(k_0) = 0$, já que $h(k_0) = 0$. E reciprocamente, suponhamos que $w(k) \rightarrow 0$ e por absurdo que $k \rightarrow \bar{k}_0 \neq k_0$. Como $k \rightarrow \bar{k}_0$, então $w(k) \rightarrow w(\bar{k}_0) = \frac{16h(\bar{k}_0)}{L^2}$ e como por hipótese, $w(k) \rightarrow 0$, temos que $\frac{16h(\bar{k}_0)}{L^2} = 0$, o que implica que $\bar{k}_0 = k_0$, pois $h(k)$ é estritamente crescente (v. (3.4.39)).

Teorema 3.7. (Convexidade de $d(c)$) *Seja $L > 0$. Então, existem $\epsilon > 0$ e $L_0 > 0$ tais que $d''(c) > 0$ se $c \in (-1, -1 + \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1)$ e $L > L_0$.*

Observação 3.8. *Estabelecemos usando o Maple que numericamente $L_0 \sim 4.2561$.*

Demonstração: Utilizando as relações (3.4.40), (3.4.46) e (3.4.47), temos que

$$\begin{aligned} d''(c) &= - \int_0^L \phi_w^2(x) dx + 2c^2 \frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w^2(x) dx \right) \\ &= \frac{48^2}{3L^3} K^2 [(E - K)(3E - K + k^2 K) + k^2 EK] \\ &\quad + 4c^2 \frac{48^2}{L^3} (K - E) EK \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dw} \\ &= \frac{48^2}{3L^3} K^2 D(k) + 4c^2 \frac{48^2}{L^3} (K - E) EK \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dw} \end{aligned} \quad (3.4.48)$$

Do Teorema 3.5 e do Apêndice desta tese, temos as relações

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2}, \quad (3.4.49)$$

$$\frac{dk}{dw} = \frac{w(\alpha_2 - \alpha_1)}{2A_{\phi_w}} k(w) \quad (3.4.50)$$

e das relações (3.4.34) e (3.4.37) obtemos

$$\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{48K}{wL^2} [E - k'^2 K] + \frac{48EK}{wL^2} = \frac{48k'^2 K^2}{wL^2}. \quad (3.4.51)$$

Assim, substituindo (3.4.51) em (3.4.50), obtemos

$$\frac{48K^2}{L^2} = \frac{2A_{\phi_w}}{kk'^2} \frac{dk}{dw}. \quad (3.4.52)$$

Agora, das relações (3.4.29) e (3.4.48) temos

$$\begin{aligned} A_{\phi_w} &= \frac{1}{2L} \int_0^L \phi_w^2(x) dx \\ &= \frac{1}{L} \left\{ -\frac{48^2}{6L^3} K^2 D(k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.53)$$

De onde concluímos, juntando (3.4.50) com (3.4.53)

$$\frac{dk}{dw} = kk'^2 \frac{L^2}{16} \frac{1}{(-D(k))}. \quad (3.4.54)$$

Substituindo (3.4.52) na primeira parcela de (3.4.48) e utilizando a expressão (3.4.53), obtemos

$$\begin{aligned} d''(c) &= \frac{16}{L} \left(\frac{2A_{\phi_w}}{kk'^2} \frac{dk}{dw} \right) D(k) + 4c^2 \frac{48^2}{L^3} (K - E) EK \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dw} \\ &= \frac{16}{L} \frac{1}{kk'^2} \frac{dk}{dw} \left\{ \frac{-48^2}{3L^4} K^2 D(k)^2 \right\} + 4c^2 \frac{48^2}{L^3} (K - E) EK \frac{(E - k'^2 K)}{kk'^2} \frac{dk}{dw} \\ &= 4 \cdot \frac{48^2}{L^3} \frac{1}{kk'^2} \frac{dk}{dw} \left\{ -\frac{4}{3L^2} K^2 D(k)^2 + c^2 (K - E) EK (E - k'^2 K) \right\}. \end{aligned}$$

Usando que

$$w = -\frac{16}{L^2} K [3E + K(k^2 - 2)] > 0,$$

e portanto $(2 - k^2)K - 3E > 0$, obtemos,

$$\begin{aligned} d''(c) &= 4 \cdot \frac{48^2}{L^3} \frac{1}{kk'^2} \frac{dk}{dw} \left\{ \frac{1}{12} K \left[\frac{w}{3E + K(k^2 - 2)} \right] D(k)^2 \right. \\ &\quad \left. + c^2 (K - E) EK (E - k'^2 K) \right\} \\ &= 4 \cdot \frac{48^2}{L^3} \frac{1}{kk'^2} \frac{dk}{dw} \left\{ \frac{1}{12} K \left[\frac{c^2 - 1}{(2 - k^2)K - 3E} \right] D(k)^2 \right. \\ &\quad \left. + c^2 (K - E) EK (E - k'^2 K) \right\} \\ &= q(c). \end{aligned} \quad (3.4.55)$$

Passaremos então ao limite na expressão entre chaves em (3.4.55), fazendo $c \rightarrow 1$. Da observação 3.7, segue-se que

$$\lim_{c \rightarrow 1} c^2 (K - E) EK (E - k'^2 K) = (K(k_0) - E(k_0)) E(k_0) K(k_0) (E(k_0) - k_0'^2 K(k_0)) > 0$$

onde $k_0'^2 = 1 - k_0^2$. Além disso, utilizando a regra de L'Hospital, (3.4.39) e (3.4.54), temos ainda que $\lim_{c \rightarrow 1} \frac{c^2 - 1}{(2 - k^2)K - 3E}$ existe e é negativo. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 1} \frac{c^2 - 1}{(2 - k^2)K - 3E} &= \lim_{c \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dc}(c^2 - 1)}{\frac{d}{dc}[(2 - k^2)K - 3E]} = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dc}(c^2 - 1)}{\frac{d}{dk}[(2 - k^2)K - 3E] \frac{dk}{dw} \frac{dw}{dc}} \\ &= \frac{(-1)}{h'(k_0)k_0 k_0'^2 \frac{L^2}{16(-D(k_0))}} = \frac{16D(k_0)}{L^2(E(k_0) + k_0'^4 K(k_0) - 2k_0'^2 E(k_0))} < 0. \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\lim_{c \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{12} K \left[\frac{c^2 - 1}{(2 - k^2)K - 3E} \right] D(k)^2 + c^2 (K - E) EK (E - k'^2 K) \right\} > 0$$

se

$$L^2 > -\frac{4}{3} \frac{D(k_0)^3}{(E(k_0) + k_0'^4 K(k_0) - 2k_0'^2 E(k_0))(K(k_0) - E(k_0))E(k_0)(E(k_0) - k_0'^2 K(k_0))} \equiv L_0^2. \quad (3.4.56)$$

Portanto, na vizinhança de 1 e -1 , $d''(c) > 0$ se L satisfaz (3.4.56). Agora, como $q(c)$ é par, segue-se que $\exists \epsilon > 0$ tal que $d''(c) > 0 \forall c \in (-1, -1 + \epsilon)$ e $d''(c) > 0 \forall c \in (1 - \epsilon, 1)$ se $L > L_0$. $\square$

Observação 3.9. Usando o programa Mapple, fizemos um experimento para obter valores aproximados de k_0 e L_0 . Obtivemos $k_0 \sim 0.980383$, logo o lado direito da desigualdade (3.4.56) vale aproximadamente $L_0^2 \sim 18.11482592$. Portanto, concluímos que $d''(c) > 0$ se c está na vizinhança de 1 e -1 e $L > L_0$.

Demonstração do Teorema 3.6

Para demonstrar o Teorema 3.6, seguiremos as idéias estabelecidas em [21], demonstrando três Lemas preliminares. Tais lemas sofrerão modificações necessárias em suas demonstrações, pois em [21] a constante $A_\phi = 0$ e aqui estamos considerando $A_\phi \neq 0$. O primeiro deles é puramente técnico, o segundo mostra que o hiperplano $I'(\vec{\phi})^\perp$ não intersecta o cone $\{\vec{y} \in X; \langle H(\vec{y}), \vec{y} \rangle < 0\}$ e o terceiro que $H(\vec{u})$ atinge seu mínimo em $\vec{u} = \vec{\phi}$ desde que $\vec{u}$ pertença ao conjunto das funções admissíveis satisfazendo a restrição $I(\vec{u}) = I(\vec{\phi})$ e $\int_0^L u dx = 0$.

Observação 3.10. Derivando o sistema (3.2.2) com respeito a c , obtemos para $\phi = \phi_{w(c)}$, $\psi = \psi_{w(c)}$

$$d''(c) = -\langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\phi_w, \frac{d}{dc}\psi_w), (\frac{d}{dc}\phi_w, \frac{d}{dc}\psi_w) \rangle. \quad (3.4.57)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\phi, \frac{d}{dc}\psi) &= \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx} - \phi & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dc}\phi \\ \frac{d}{dc}\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\psi - \frac{d}{dc}A_\phi \\ -\phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4.58)$$

Portanto de (3.3.3) e $\int_0^L \phi dx = 0$, temos de (3.4.58)

$$\begin{aligned} d''(c) &= \frac{d}{dc} \int_0^L \phi \psi(x) dx = \int_0^L \psi \frac{d}{dc} \phi + \phi \frac{d}{dc} \psi dx \\ &= \langle (\psi, \phi), (\frac{d}{dc} \phi, \frac{d}{dc} \psi) \rangle \\ &= \langle (\psi + \frac{d}{dc} A_\phi, \phi), (\frac{d}{dc} \phi, \frac{d}{dc} \psi) \rangle \\ &= -\langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc} \phi, \frac{d}{dc} \psi), (\frac{d}{dc} \phi, \frac{d}{dc} \psi) \rangle. \end{aligned}$$

Lema 3.2. *Existe $\epsilon > 0$ e uma única aplicação de classe C^1 , $\alpha : U_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}/L$, tal que para todo $\vec{u} \in U_\epsilon$ e $r \in \mathbb{R}$,*

- (1) $\langle \vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})), \frac{d}{dx} \vec{\phi} \rangle = 0$,
- (2) $\alpha(\vec{u}(\cdot + r)) = \alpha(\vec{u}) - r$, módulo o período.

Demonstração: Consideremos o funcional definido em $X \times \mathbb{R}$, para $\vec{u} = (u, v)$ por

$$G(\vec{u}, r) \equiv \langle \tau_r \vec{u}, \frac{d}{dx} \vec{\phi} \rangle = \int_0^L u(x+r) \phi'(x) dx + \int_0^L v(x+r) \psi'(x) dx.$$

Como $G(\vec{\phi}, 0) = 0$ e $\partial_2 G(\vec{\phi}, 0) = \int_0^L |\phi'(x)|^2 dx + \int_0^L |\psi'(x)|^2 dx \neq 0$, o Teorema da Função Implícita mostra que existe uma bola aberta em torno de $\vec{\phi}$, digamos, $B \equiv B_\epsilon(\vec{\phi})$, e um único funcional $\beta(\vec{u})$, de classe C^1 tal que para cada $\vec{u} \in B$, $G(\vec{u}, \beta(\vec{u})) = 0$.

Agora considerando aqueles $r \in \mathbb{R}$ tais que para $\vec{u} \in B$, $\tau_r \vec{u} \in B$, temos que

$$\beta(\tau_r \vec{u}) = \beta(\vec{u}) - r. \quad (3.4.59)$$

De fato, como $G(\tau_r \vec{u}, \beta(\vec{u}) - r) = G(\vec{u}, \beta(\vec{u})) = 0$, a unicidade de β implica que $\beta(\tau_r \vec{u}) = \beta(\vec{u}) - r$.

Agora definamos o tubo

$$U_\epsilon = \{\tau_s \vec{v}; s \in \mathbb{R}, \vec{v} \in B_\epsilon(\vec{\phi})\}$$

e seja α definida em U_ϵ dada por

$$\alpha(\tau_s \vec{v}) \equiv \beta(\vec{v}) - s.$$

De (3.4.59), α está bem definida e satisfaz (1) e (2). Isto finaliza a demonstração. $\square$

Lema 3.3. *Seja $d''(c) > 0$. Definamos por $A = \{\vec{y} = (y_1, y_2) \in H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]); \int_0^L y_1 dx = 0, \langle \vec{y}, G^{-1}I'(\vec{\phi}) \rangle_X = 0, \langle \vec{y}, \frac{d}{dx}\vec{\phi} \rangle = 0, \|\vec{y}\| = 1\}$. Então,*

$$\zeta = \inf\{\langle \mathcal{L}_c \vec{y}, \vec{y} \rangle; \vec{y} \in \mathcal{A}\} > 0. \quad (3.4.60)$$

Além disso, existe uma constante positiva D tal que $\langle \mathcal{L}_c \vec{y}, \vec{y} \rangle \geq D\|\vec{y}\|_X^2$ para todo $\vec{y} \in \mathcal{A}$.

Demonstração: Sejam $\phi = \phi_w, \psi = \psi_w$. Mostraremos inicialmente que $\zeta \geq 0$. De (3.4.57), obtemos que $0 < d''(c) = -\langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\phi, \frac{d}{dc}\psi), (\frac{d}{dc}\phi, \frac{d}{dc}\psi) \rangle$. Agora, fazendo uma decomposição espectral de $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) = [\vec{\chi}] \oplus [\frac{d}{dx}\vec{\phi}] \oplus P$, onde $\langle \mathcal{L}_c P, P \rangle > 0$, podemos escrever

$$\frac{d}{dc}(\phi, \psi) = a_0 \vec{\chi} + b_0 \frac{d}{dx}\vec{\phi} + \vec{p}, \quad \vec{p} \in P.$$

Lembramos que $\mathcal{L}_c \vec{\chi} = \lambda_1 \vec{\chi}$ com $\lambda_1 < 0$ e $\mathcal{L}_c(\frac{d}{dx}\vec{\phi}) = 0$. De onde segue que $\langle \mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p} \rangle < -a_0^2 \lambda_1$. De fato, como $G^{-1}\mathcal{L}_c$ é auto-adjunto temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p} \rangle &= \langle \mathcal{L}_c \vec{p}, \frac{d}{dc}\vec{\phi} \rangle = \langle G^{-1}\mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), \frac{d}{dc}\vec{\phi} \rangle_X \\ &\quad - \langle G^{-1}\mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), a_0 \vec{\chi} \rangle_X \\ &= \langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), \frac{d}{dc}\vec{\phi} \rangle - \langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), a_0 \vec{\chi} \rangle \\ &< -a_0^2 \lambda_1 \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), a_0 \vec{\chi} \rangle &= \langle \frac{d}{dc}\vec{\phi}, \mathcal{L}_c(a_0 \vec{\chi}) \rangle \\ &= \langle a_0 \vec{\chi} + b_0 \frac{d}{dx}\vec{\phi} + \vec{p}, a_0 \lambda_1 \vec{\chi} \rangle = a_0^2 \lambda_1 \end{aligned}$$

onde na última igualdade acima usamos o fato que as autofunções de $\mathcal{L}_c$ são ortogonais.

Seja $\vec{y} \in \mathcal{A}$. Da própria definição de $\mathcal{A}$ temos que $\langle \vec{y}, G^{-1}I'(\vec{\phi}) \rangle_X = \langle \vec{y}, \frac{d}{dx}\vec{\phi} \rangle = 0$ e além disso, podemos escrever $\vec{y} = a \vec{\chi} + \vec{p}_0$, com $\vec{p}_0 \in P$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), \vec{y} \rangle &= \langle G^{-1}\mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), \vec{y} \rangle_X \\ &= \langle G^{-1}\mathcal{L}_c(a_0 \vec{\chi} + b_0 \frac{d}{dx}\vec{\phi} + \vec{p}), a \vec{\chi} + \vec{p}_0 \rangle_X \\ &= a_0 a \lambda_1 + \langle G^{-1}\mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p}_0 \rangle_X. \end{aligned} \quad (3.4.61)$$

De (3.4.58) e do fato de $\vec{y} = (y_1, y_2)$ ter primeira coordenada com média zero,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_c(\frac{d}{dc}\vec{\phi}), \vec{y} \rangle &= \langle (-\psi_w - \frac{d}{dc}A_\phi, -\phi), \vec{y} \rangle \\ &= -\langle I'(\vec{\phi}), \vec{y} \rangle = -\langle G^{-1}I'(\vec{\phi}), \vec{y} \rangle_X = 0, \end{aligned} \quad (3.4.62)$$

e portanto,

$$\langle \mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p}_0 \rangle = -a_0 a \lambda_1$$

em vista de (3.4.61) e (3.4.62). Assim, usando que $|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle$, se A é um operador positivo, obtemos imediatamente que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_c \vec{y}, \vec{y} \rangle &= a^2 \lambda_1 + \langle G^{-1} \mathcal{L}_c \vec{p}_0, \vec{p}_0 \rangle_X \geq a^2 \lambda_1 + \frac{\langle G^{-1} \mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p}_0 \rangle_X^2}{\langle G^{-1} \mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p} \rangle_X} \\ &= a^2 \lambda_1 + \frac{\langle \mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p}_0 \rangle^2}{\langle \mathcal{L}_c \vec{p}, \vec{p} \rangle} > a^2 \lambda_1 - \frac{a_0^2 a^2 \lambda_1^2}{a_0^2 \lambda_1} = 0. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que $\zeta > 0$. Suponhamos por absurdo que $\zeta = 0$.

Mostraremos que existe $(g^*, h^*) \in \mathcal{A}$ tal $0 = \zeta = \langle \mathcal{L}_c(g^*, h^*), (g^*, h^*) \rangle$. Com efeito, seja $\{(g_j, h_j)\} \in \mathcal{A}$ com

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{L}_c(g_j, h_j), (g_j, h_j) \rangle = \zeta = 0. \quad (3.4.63)$$

Como $\|(g_j, h_j)\|$ é uniformemente limitada em X , temos que existe uma subsequência de $\{(g_j, h_j)\}$ que também denotaremos por $\{(g_j, h_j)\}$, e $(g, h) \in X$ tal que $(g_j, h_j) \rightharpoonup (g, h)$ fracamente em $X \subset L_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Mas então, existe uma subsequência de (g_j) , a qual também denotaremos por (g_j) , tal que

$$g_j \rightarrow g \text{ em } L_{per}^2([0, L])$$

pois a inclusão $H_{per}^1([0, L]) \subset L_{per}^2([0, L])$ é compacta.

Agora, de (3.4.63), temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_c(g_j, h_j), (g_j, h_j) \rangle &= \langle (g_j - g_j'' - \phi g_j + c h_j, c g_j + h_j), (g_j, h_j) \rangle \\ &= \int_0^L g_j^2 dx + \int_0^L (g_j')^2 dx + \int_0^L h_j^2 dx - \int_0^L \phi g_j^2 dx \\ &\quad + 2c \int_0^L g_j h_j dx \rightarrow \zeta = 0 \end{aligned}$$

quando $j \rightarrow \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$, $\exists J$ tal que $\forall j > J$,

$$\left| \int_0^L g_j^2 dx + \int_0^L (g_j')^2 dx + \int_0^L h_j^2 dx - \int_0^L \phi g_j^2 dx + 2c \int_0^L g_j h_j dx \right| < \epsilon$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} 1 \leq \|(g_j, h_j)\|_X^2 &= \int_0^L g_j^2 dx + \int_0^L (g_j)_x^2 dx + \int_0^L h_j^2 dx \\ &< \int_0^L \phi g_j^2 dx - 2c \int_0^L g_j h_j dx + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $g_j \rightarrow g$ em $L^2_{per}([0, L])$ e $h_j \rightarrow h$ em $L^2_{per}([0, L])$, então $\int_0^L g_j h_j \rightarrow \int_0^L gh$. Daí,

$$1 \leq \int_0^L \phi g^2 - 2c \int_0^L gh + \epsilon.$$

De onde concluímos que $(g, h) \neq \vec{0}$, pois se assim não o fosse, teríamos $1 \leq \epsilon$. Um absurdo.

Definimos então $(g^*, h^*) = \frac{(g, h)}{\|(g, h)\|}$. Então, $(g^*, h^*) \in \mathcal{A}$. De fato, $\|(g^*, h^*)\| = 1$, $\langle (g^*, h^*), G^{-1}I'(\phi, \psi) \rangle_X = 0$ e $\int_0^L g^* dx = 0$, pois $g_j(x) \rightarrow g(x)$ q.t.p. e além disso, $|g_j(x)| \leq h(x) \forall j$, com $h \in L^2_{per}([0, L])$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, $\int_0^L g_j dx \rightarrow \int_0^L g dx$. Isto finaliza o Lema. $\square$

Lema 3.4. *Seja $d''(c) > 0$. Então, existem $C > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$H(\vec{u}) - H(\vec{\phi}) \geq \|\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}\|_X^2 \quad (3.4.64)$$

para $\vec{u} = (u, v) \in U_\epsilon$, satisfazendo $I(\vec{u}) = I(\vec{\phi})$ e $\int_0^L u(x) dx = 0$.

Demonstração: Seja $\vec{q} = G^{-1}I'(\vec{\phi}) = G^{-1}(\psi, \phi)$. Como $G : X \rightarrow X'$ e portanto $G^{-1}(\psi, \phi) \in X$, podemos escrever

$$\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi} = a\vec{q} + \vec{y}$$

onde $\langle \vec{q}, \vec{y} \rangle_X = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Pela invariância de I mediante translações e do Teorema de Taylor, temos

$$\begin{aligned} I(\vec{\phi}) &= I(\vec{u}) = I(\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u}))) \\ &= I(\vec{\phi}) + \langle I'(\vec{\phi}), \vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi} \rangle_X + R_1(\vec{\phi}, \vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}), \end{aligned}$$

com

$$\frac{|R_1(\vec{\phi}, \vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi})|}{\|\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}\|_X} \rightarrow 0$$

quando $\vec{h} \rightarrow 0$ em X , onde $\vec{h} = \vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}$. Isto é, $|R_1(\vec{\phi}, \vec{h})| = o(\|\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}\|_X)$.

Mas então,

$$\begin{aligned} I(\vec{\phi}) &= I(\vec{\phi}) + \langle \vec{q}, a\vec{q} + \vec{y} \rangle_X + o(\|\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}\|_X) \\ &= I(\vec{\phi}) + a\|\vec{q}\|_X^2 + o(\|\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}\|_X), \end{aligned}$$

logo $a = o(\|\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi}\|_X)$.

Seja agora, $\mathcal{L}(\vec{u}) = H(\vec{u}) + cI(\vec{u})$. Utilizando novamente o Teorema de Taylor, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{u}) &= \mathcal{L}(\vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u}))) = \mathcal{L}(\vec{\phi}) + \langle \mathcal{L}'(\vec{\phi}), \vec{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}''(\vec{\phi}) \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &+ R_2(\vec{\phi}, \vec{v})\end{aligned}$$

onde

$$\frac{|R_2(\vec{\phi}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|_X^2} \rightarrow 0,$$

quando $\vec{v} \rightarrow 0$ em X , i.e., $|R_2(\vec{\phi}, \vec{v})| = o(\|\vec{v}\|_X^2)$. Seja $\vec{v} \equiv \vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi} = a\vec{q} + \vec{y}$. Como $I(\vec{u}) = I(\vec{\phi})$,

$$\langle \mathcal{L}'(\vec{\phi}), \vec{v} \rangle = \langle H'(\vec{\phi}) + cI'(\vec{\phi}), \vec{v} \rangle = \langle (-A_\phi, 0), \vec{v} \rangle = 0$$

pois $\vec{v}$ tem primeira coordenada com média zero. Notemos que $\mathcal{L}''(\vec{\phi}) = \mathcal{L}_c$, logo

$$\begin{aligned}H(\vec{u}) - H(\vec{\phi}) &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_c(a\vec{q} + \vec{y}), a\vec{q} + \vec{y} \rangle + o(\|\vec{v}\|_X^2) \\ &= \frac{a^2}{2} \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{q} \rangle + a \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{y} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_c \vec{y}, \vec{y} \rangle + o(\|\vec{v}\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_c \vec{y}, \vec{y} \rangle + O(a^2) + O(|a| \|\vec{v}\|_X) + o(\|\vec{v}\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_c \vec{y}, \vec{y} \rangle + o(\|\vec{v}\|_X^2),\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade utilizamos que

$$a \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{y} \rangle = a \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{v} \rangle - a^2 \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{q} \rangle,$$

e portanto como $|a \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{q} \rangle| \leq |a| \|\mathcal{L}_c \vec{q}\| \|\vec{v}\|_X$ segue-se que $a \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{q} \rangle = O(|a| \|\vec{v}\|_X)$. De modo similar, vê-se que $a^2 \langle \mathcal{L}_c \vec{q}, \vec{q} \rangle = O(a^2)$. Na quarta igualdade usamos que sendo $a = o(\|\vec{v}\|_X)$,

$$\frac{|a| \|\vec{v}\|_X}{\|\vec{v}\|_X^2} = \frac{|a|}{\|\vec{v}\|_X} \rightarrow 0,$$

temos que $O(|a| \|\vec{v}\|_X) = o(\|\vec{v}\|_X^2)$. Analogamente, $O(a^2) = o(\|\vec{v}\|_X^2)$.

Agora, de (1) do Lema 3.2 e do fato que $\langle G^{-1}I'(\vec{\phi}), \frac{d}{dx} \vec{\phi} \rangle_X = 0$, temos

$$\langle \vec{y}, \frac{d}{dx} \vec{\phi} \rangle = \langle \vec{u}(\cdot + \alpha(\vec{u})) - \vec{\phi} - a\vec{q}, \frac{d}{dx} \vec{\phi} \rangle_X = 0.$$

Portanto do Lema 3.3,

$$H(\vec{u}) - H(\vec{\phi}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_c(\vec{y}), \vec{y} \rangle + o(\|\vec{v}\|_X^2) \geq C\|\vec{y}\|_X^2 + o(\|\vec{v}\|_X^2),$$

pois $\vec{y} \neq 0$, $\langle \vec{y}, \frac{d}{dx} \vec{\phi} \rangle = 0$ e $\langle \vec{y}, \vec{q} \rangle = \langle \vec{y}, G^{-1}I'(\vec{\phi}) \rangle_X = 0$.

Finalmente, como

$$\|\vec{y}\|_X = \|\vec{v} - a\vec{q}\|_X \geq \|\vec{v}\|_X - |a|\|\vec{q}\|_X \geq \|\vec{v}\|_X - o(\|\vec{v}\|_X),$$

temos para $\|\vec{v}\|_X$ suficientemente pequeno (*vide* Lema 3.2),

$$H(\vec{u}) - H(\vec{\phi}) \geq C\|\vec{v}\|_X^2,$$

obtendo portanto (3.4.64).

Prova da Estabilidade

Mostraremos agora a estabilidade da órbita $\Omega_{\vec{\phi}} = \{(\phi(\cdot + s), \psi(\cdot + s)); s \in \mathbb{R}\}$ no subspaço fechado de $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, dado por

$$E \equiv \{(f, g) \in H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]); \int_0^L f dx = 0\}. \quad (3.4.65)$$

Com efeito, suponhamos que $\Omega_{\vec{\phi}}$ é $\mathcal{F}$ -instável e seja $\vec{u}_k(0) = (u_k(0), v_k(0)) \in U_{\frac{1}{k}} \cap E$ uma sequência de dados iniciais tais que $\vec{u}_k(t) = (u_k(t), v_k(t)) \notin U_\epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ e algum $t \in (0, T]$, T dado na teoria de existência de solução local em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, onde $\vec{u}_k(t)$ é a solução do sistema (3.0.1) com dado inicial $\vec{u}_k(0)$ (veja Teorema 2.7). Como $C_0(u, v) = \int_0^L u dx$ é uma quantidade conservada para a equação de Boussinesq, temos que $C_0(u_k(t), v_k(t)) = C_0(u_k(0), v_k(0)) = 0$, $\forall t \in (0, T]$. Agora, por continuidade do fluxo $t \rightarrow \vec{u}_k(t)$, encontramos t_k , com k suficientemente grande tal que

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \|\vec{u}_k(t_k) - \vec{\phi}(\cdot + y)\|_X = \epsilon. \quad (3.4.66)$$

Como H e I definidos em (3.1.1) e (3.1.6) são funcionais contínuos em X , invariantes pelo fluxo em questão e invariantes por translações temos

$$H(\vec{u}_k(t_k)) = H(\vec{u}_k(0)) \rightarrow H(\vec{\phi}) \text{ e } I(\vec{u}_k(t_k)) \rightarrow I(\vec{\phi}),$$

quando $k \rightarrow \infty$. Seja agora $\vec{w}_k \in U_\epsilon \cap E$ tal que $I(\vec{w}_k) = I(\vec{\phi}_w)$ e $\|\vec{w}_k - \vec{u}_k(t_k)\|_X \rightarrow 0$. Então, pela continuidade de H e o Lema 3.4, temos

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow H(\vec{w}_k) - H(\vec{\phi}) &\geq C\|\vec{w}_k(\cdot + \alpha(\vec{w}_k)) - \vec{\phi}\|_X^2 \\ &= C\|\vec{w}_k - \vec{\phi}(\cdot - \alpha(\vec{w}_k))\|_X^2, \end{aligned}$$

e assim,

$$\|\vec{u}_k(t_k) - \vec{\phi}(\cdot - \alpha(\vec{w}_k))\|_X \rightarrow 0,$$

o que contradiz (3.4.66).

□

3.4.6 Um teorema de existência global

Notemos que a definição 3.1 requer que as soluções em (3.0.1) sejam globais. Assim, nesta subseção demonstraremos que se o dado inicial $\vec{u}_0 = (u_0, v_0)$ está suficientemente próximo da onda viajante periódica $\vec{\phi}_{w(c)} = (\phi_{w(c)}, \psi_{w(c)})$, com $w(c) = 1 - c^2$, a solução local de (3.0.1), dada pelo Teorema 2.7 é global.

Teorema 3.8. *Sejam $L > L_0$, ϵ dado pelo Teorema 3.7 e $c \in (-1, -1+\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1)$. Consideremos $\vec{\phi}_{w(c)} = (\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})$, a solução onda viajante periódica de (3.0.1) dada pelo Teorema 3.3, com $w(c) = 1 - c^2$. Então, existe um $\delta = \delta(c) > 0$ tal que se $(u_0, v_0) \in E$, com E definido em (3.4.65) e existe um número θ tal que*

$$\|u_0 - \phi_{w(c)}(\cdot + \theta)\|_1 + \|v_0 + c\phi_{w(c)}(\cdot + \theta)\| \leq \delta, \quad (3.4.67)$$

então a solução (u, v) de (3.0.1), correspondente ao dado inicial (u_0, v_0) é global e pertence a E para todo tempo $T > 0$.

Demonstração: Seja T' o tempo maximal de existência da solução $\vec{u} = (u, v)$ dada pelo Teorema 2.7. Nosso objetivo é demonstrar que $T' = \infty$. Suponhamos por absurdo que $T' < \infty$ e sejam $\delta > 0$ associado a $\epsilon = 1$ dado pelo Teorema 3.6 e θ tal que $\|(u_0(\cdot), v_0(\cdot)) - (\phi_{w(c)}(\cdot + \theta), -c\phi_{w(c)}(\cdot + \theta))\|_X \leq \delta$. Então da propriedade de estabilidade, temos que $\inf_{s \in \mathbb{R}} \|(u(t), v(t)) - \tau_s(\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})\|_X < 1$ para cada $t \in [0, T')$. Então, temos que

$$\|(u(t), v(t))\|_X \leq 1 + \|(\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})\|_X. \quad (3.4.68)$$

Mas então, $\vec{u}(t)$ é limitada em $[0, T')$, o que implica que $\vec{u}(t)$ pode ser estendida um pouco mais, contradizendo o fato de que T' é o tempo maximal de existência. De fato, de (3.4.68) segue-se que existe uma sequência $t_n \rightarrow T'$ tal que $\|\vec{u}(t_n)\| \leq C$ para todo t_n suficientemente próximo de T' . Agora, $\vec{u}$ definida em $[0, t_n]$ pode ser estendida a um intervalo $[0, t_n + \delta]$, com $\delta > 0$, pois podemos definir em $[t_n, t_n + \delta]$, $\vec{u}(t) = \vec{w}(t)$ onde $\vec{w}(t)$ é a solução fraca do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{z}(t) = F(t, \vec{z}(t)) - A(\vec{z}(t)) \\ \vec{z}(0) = \vec{u}(t_n) \end{cases}$$

com A definida em (2.1.23) e F em (2.1.24). Além disso, δ depende somente de C (δ independe de t_n) e portanto $\overrightarrow{u}$ pode ser estendida além de T' , contrariando a própria definição de T' .

□

CAPÍTULO 4

Estabilidade de ondas viajantes periódicas para a equação de Boussinesq modificada - Caso $A_\phi = 0$

Neste capítulo, estudaremos a estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas da forma $\vec{\phi}(x, t) = (\phi(x - ct), \psi(x - ct))$ associadas ao sistema de equações de evolução,

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = (u - u_{xx} - (u^3))_x \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ v(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (4.0.1)$$

com base nos trabalhos [6] e [21].

Demonstraremos a estabilidade não-linear no sentido da definição 3.1 estabelecida no Capítulo 3 desta tese, verificando as hipóteses **1-2-3** do início deste mesmo capítulo.

Como no capítulo anterior, faremos uso das quantidades conservadas H_1 e I para o sistema (4.0.1), definidas em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, por

$$H_1(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 + v^2 + u_x^2 - \frac{1}{2} u^4 dx \quad (4.0.2)$$

e

$$I(u, v) = \int_0^L uv dx. \quad (4.0.3)$$

4.1 Estrutura hamiltoniana do sistema (4.0.1)

O sistema (4.0.1) é formalmente equivalente ao sistema Hamiltoniano

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{J} \delta H_1(u, v) \quad (4.1.1)$$

onde $\mathcal{J}$ é o operador antisimétrico

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

e δH_1 denota o gradiente do funcional H_1 , definido em (4.0.2), calculado com respeito ao produto interno de $L^2_{per}([0, L])$. Em nosso caso, é fácil verificar que

$$H_{1u}(u, v) = u - u_{xx} - u^3, \quad H_{1v}(u, v) = v. \quad (4.1.3)$$

Observemos que, como anteriormente para o sistema (3.0.1), para o sistema (4.0.1) os funcionais H_1 e I são invariantes por translações. Além disso, H_1 e I são funcionais contínuos e suaves em $H^1_{per}([0, L]) \times L^2_{per}([0, L])$.

4.2 Ondas periódicas viajantes do sistema (4.0.1)

Como no capítulo 3, uma onda viajante L -periódica do sistema (4.0.1) é uma solução da forma

$$\vec{\phi}(x, t) = (\phi(x - ct), \psi(x - ct))$$

com $\phi^{(j)}(\xi + L) = \phi^{(j)}(\xi)$ e $\psi^{(j)}(\xi + L) = \psi^{(j)}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $j \in \mathbb{N}$, a qual representa um onda que viaja com velocidade c .

Substituindo uma solução como esta em (4.0.1), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{aligned} -c\phi' &= \psi' \\ -c\psi' &= (\phi - \phi'' - \phi^3)', \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

onde $''' = \frac{d}{d\xi}$ e $\xi = x - ct$. Integrando (4.2.1) com respeito a ξ , obtemos

$$\begin{aligned} -c\phi &= \psi + K_1 \\ -c\psi &= \phi - \phi'' - \phi^3 + K_2, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

onde K_1 e K_2 são constantes de integração. Consideraremos aqui, por questão de simplicidade, $K_1 = K_2 = 0$. Substituindo a primeira equação acima na segunda, chegamos à equação diferencial

$$\phi'' - w\phi + \phi^3 = 0, \quad (4.2.3)$$

onde $w = w(c) = 1 - c^2$ vai ser considerado positivo. Logo $c \in (-1, 1)$. De (4.2.3), ϕ satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$\begin{aligned} (\phi')^2 &= \frac{1}{2} [-\phi^4 + 2w\phi^2 + 4B_\phi] \\ &= \frac{1}{2}(\eta_1^2 - \phi^2)(\phi^2 - \eta_2^2), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

onde B_ϕ é uma constante de integração e $-\eta_1, \eta_1, -\eta_2, \eta_2$ são os zeros reais do polinômio

$$p_\phi(t) = -t^4 + 2wt^2 + 4B_\phi, \quad (4.2.5)$$

os quais suporemos sem perda de generalidade, satisfazendo $\eta_1 > \eta_2 > 0$. Portanto, $\eta_2 \leq \phi \leq \eta_1$ e os zeros η_i 's satisfazem as relações

$$\begin{cases} 2w &= \eta_1^2 + \eta_2^2 \\ 4B_\phi &= -\eta_1^2\eta_2^2. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Definamos $\varphi = \frac{\phi}{\eta_1}$ e $k^2 = \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2)}{\eta_1^2}$. Então podemos reescrever (4.2.4) da seguinte forma

$$(\varphi')^2 = \frac{\eta_1^2}{2}(1 - \varphi^2)(\varphi^2 - 1 + k^2).$$

Definamos também a variável ψ através da relação $\varphi^2 = 1 - k^2 \text{sen}^2 \psi$ para obter

$$(\psi')^2 = \frac{\eta_1^2}{2}(1 - k^2 \text{sen}^2 \psi).$$

Então para $l = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}$ e supondo que $\varphi(0) = 1$, obtemos

$$\int_0^{\psi(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 t}} = l\xi.$$

Segue-se da definição da função Jacobiana elíptica $y = \text{sn}(u; k)$ (v. Apêndice), que $\text{sen} \psi = \text{sn}(l\xi; k)$ e portanto

$$\varphi(\xi) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(l\xi; k)} = \text{dn}(l\xi; k).$$

Observação 4.1. Notemos que sendo φ uma solução então também o é $-\varphi$. Logo, consideraremos apenas o caso de solução positiva. Uma análise de estabilidade para $-\varphi$ é completamente similar àquela desenvolvida para φ .

Retornando à variável inicial, obtemos a chamada solução **onda dnoidal**,

$$\phi(\xi) \equiv \phi_w(\xi; \eta_1, \eta_2) = \eta_1 \operatorname{dn}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\xi; k\right) \quad (4.2.7)$$

com

$$k^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = 2w, \quad 0 < \eta_2 < \eta_1. \quad (4.2.8)$$

Observemos que como dn tem período fundamental $2K$, $\operatorname{dn}(u + 2K; k) = \operatorname{dn}(u; k)$, onde $K = K(k)$ representa a integral elíptica completa do primeiro tipo, segue-se que a onda dnoidal ϕ_w em (4.2.7) tem período fundamental, T_{ϕ_w} , dado por,

$$T_{\phi_w} \equiv \frac{2\sqrt{2}}{\eta_1} K(k). \quad (4.2.9)$$

Notemos que a expressão (4.2.9) pode ser manipulada de modo a obtermos, usando (4.2.8), alguma informação a respeito do comportamento do período fundamental T_{ϕ_w} . Com efeito, de (4.2.8), dado $w > 0$ fixo, então $0 < \eta_2 < \sqrt{w} < \eta_1 < \sqrt{2w}$ e podemos escrever (4.2.9) como uma função de uma única variável, digamos η_2 , a saber,

$$T_{\phi_w}(\eta_2) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2w - \eta_2^2}} K(k(\eta_2)) \quad \text{com} \quad k^2(\eta_2) = \frac{2w - 2\eta_2^2}{2w - \eta_2^2}. \quad (4.2.10)$$

Assim, quando $\eta_2 \rightarrow 0$ então $T_{\phi_w} \rightarrow +\infty$ uma vez que neste caso, $K(k(\eta_2)) \rightarrow +\infty$. Também, $T_{\phi_w}(\eta_2) \rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{w}}$ quando $\eta_2 \rightarrow \sqrt{w}$. Além disso, $\eta_2 \mapsto T_{\phi_w}(\eta_2)$ é uma função estritamente decrescente (*vide* demonstração do Teorema 4.2 da subseção 4.3.3). De onde concluímos,

$$T_{\phi_w} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{w}}\pi. \quad (4.2.11)$$

Observação 4.2. (4.2.7) representa soluções de (4.2.3) que são positivas. Além disso, $-\phi$ também representa uma solução de (4.2.3).

Também aqui, convém considerar o operador auto-adjunto $\mathcal{L}_c : H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \rightarrow H^{-1} \times L_{per}^2([0, L])$ definido por

$$\mathcal{L}_c \equiv \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx} - 3\phi^2 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.12)$$

onde $\phi = \phi_w$ é a solução onda dnoidal (4.2.7), pois como sabemos seu espectro nos trará informações fundamentais para nossa teoria de estabilidade não-linear.

De (4.2.1), temos que

$$\mathcal{L}_c\left(\frac{d}{dx}\vec{\phi}\right) = 0. \quad (4.2.13)$$

4.3 Estabilidade

Iniciamos nossa teoria de estabilidade investigando estabilidade para as soluções constantes da equação de Boussinesq modificada.

4.3.1 Soluções constantes e estabilidade

Seja (ϕ, ψ) uma solução onda periódica viajante de (4.0.1). Então $\psi = -c\phi$ e ϕ satisfaz (4.2.3). Neste caso, temos duas soluções constantes não triviais, a saber, $\phi_0 = \pm\sqrt{w}$. Mas então, $(\phi_0, \psi_0) = (\sqrt{w}, -c\sqrt{w}) = (\sqrt{1-c^2}, -c\sqrt{1-c^2})$ e $(\phi_1, \psi_1) = (-\sqrt{w}, c\sqrt{w}) = (-\sqrt{1-c^2}, c\sqrt{1-c^2})$ são soluções constantes para o sistema (4.0.1).

Teorema 4.1. *Sejam $L > 0$ e $c \in (-1, 1)$. As soluções constantes $(\phi_0, \psi_0) = (\sqrt{1-c^2}, -c\sqrt{1-c^2})$ e $(\phi_1, \psi_1) = (-\sqrt{1-c^2}, c\sqrt{1-c^2})$ são orbitalmente estáveis em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ com respeito ao fluxo da equação de Boussinesq desde que $\frac{1}{3} < c^2 < 1$ e $1 - c^2 < \frac{2\pi^2}{L^2}$.*

Verificaremos a seguir as condições exigidas no início do Capítulo 3, a saber, as hipóteses 1-2-3.

a) Análise espectral do operador $\mathcal{L}_0$

Consideremos $\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx} - 3\phi_0^2 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$, onde $\phi_0 = \sqrt{1-c^2}$. Demonstraremos que para $c \in (-1, 1)$, tal que $1 - c^2 < \frac{2\pi^2}{L^2}$, o operador $\mathcal{L}_0$ possui um único autovalor negativo, o qual é simples, e o resto de seu espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores positivos. Para isto, consideremos inicialmente $c \neq 0$ e sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(f, g) \in D(\mathcal{L}_0)$ tais que $\mathcal{L}_0(f, g) = \lambda(f, g)$. Então,

$$\begin{cases} f - f'' - 3\phi_0^2 f + cg = \lambda f \\ cf + g = \lambda g \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L) \\ g(0) = g(L), \quad g'(0) = g'(L). \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Como no capítulo anterior, $\lambda \neq 1$. Mas então, da segunda equação de (4.3.1), temos que $g = \frac{c}{\lambda-1}f$. Substituindo esta igualdade na primeira equação de (4.3.1), obtemos que f satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} f - f'' - 3\phi_0^2 f + \frac{c^2}{\lambda-1}f = \lambda f \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L), \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} -f'' = kf, \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L) \end{cases} \quad (4.3.2)$$

onde $k = \frac{1}{\lambda-1} [(\lambda-1)^2 + 3\phi_0^2(\lambda-1) - c^2]$.

As autofunções associadas ao problema (4.3.2) são $f_n^-(x) = \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ e $f_n^+(x) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ para $n \geq 1$, com autovalor $k = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2$. Observemos que o zero é autovalor com autofunção associada $f \equiv 1$. Assim, resolvendo a equação do segundo grau, para $n \geq 0$,

$$\frac{1}{\lambda_n - 1} [(\lambda_n - 1)^2 + 3\phi_0^2(\lambda_n - 1) - c^2] = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2,$$

obtemos que os autovalores associados a (4.3.1) são dados por

$$\lambda_n^\pm = \frac{2 - 3w + \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \pm \sqrt{\left[3w - \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2\right]^2 - 4w + 4}}{2}.$$

Observemos inicialmente que $p_n(w) := \left[3w - \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2\right]^2 - 4w + 4 > 0 \quad \forall w \in (0, 1)$ e $\forall n \geq 0$.

Observemos ainda que o primeiro autovalor $\lambda_0^- < 0 \quad \forall w \in (0, 1)$. Com efeito, $\lambda_0^- < 0 \Leftrightarrow 2 - 3w - \sqrt{9w^2 - 4w + 4} < 0$. Para verificarmos isto, notemos que se $2 - 3w < 0$, nada temos a fazer, caso contrário, isto é, $2 - 3w > 0$, então, $\lambda_0^- < 0 \Leftrightarrow (2 - 3w)^2 < 9w^2 - 4w + 4 \Leftrightarrow -12w < -4w \Leftrightarrow 12 > 4$. Finalmente, $\lambda_1^- > 0 \Leftrightarrow 2 - 3w + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 > \sqrt{\left[3w - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\right]^2 - 4w + 4} \Leftrightarrow -8w + 4\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow w < \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{L^2}$.

Observemos também que com esta restrição, todos os demais autovalores são positivos.

Suponhamos agora $c = 0$. Então o problema (4.3.1) se reduz ao problema

$$\begin{cases} -f'' = (\lambda + 2)f \\ g = \lambda g \\ f(0) = f(L), \quad f'(0) = f'(L) \\ g(0) = g(L), \quad g'(0) = g'(L). \end{cases} \quad (4.3.3)$$

As autofunções associadas ao problema (4.3.3) são $(f_n^-, 0) = (\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), 0)$ e $(f_n^+, 0) = (\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), 0)$ para $n \geq 1$, com autovalor $\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 - 2$. De onde concluímos que $\lambda_0 = -2$ e $\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 > 2 \Leftrightarrow \frac{2\pi^2}{L^2} > 1 > 1 - c^2$.

b) Convexidade de $d(c)$

De (3.0.3), temos que $d''(c) = \frac{d}{dc}I(\phi_0, \psi_0)$, para I definido em (4.0.3) e $(\phi_0, \psi_0) = (\sqrt{1-c^2}, -c\sqrt{1-c^2})$. Assim,

$$\begin{aligned} d''(c) &= -\frac{d}{dc}\left(c \int_0^L \phi_0^2 dx\right) = -\int_0^L \phi_0^2 dx - c \frac{d}{dc} \int_0^L \phi_0^2 dx \\ &= [-1 + 3c^2]L. \end{aligned}$$

De onde concluímos que $d''(c) > 0$ se, e somente se, $c^2 > 1/3$.

Observação 4.3. O Teorema 4.1 segue da teoria clássica de Grillakis, Shatah e Strauss [21].

Observação 4.4. *Também aqui salientamos que temos um resultado de existência global em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ de soluções para (4.0.1), com dado inicial perto de (ϕ_0, ψ_0) , similar ao Teorema 4.6 abaixo.*

4.3.2 Estabilidade de soluções não triviais para o sistema 4.0.1

Demonstraremos aqui somente a estabilidade da solução onda dnoidal (4.2.7) positiva já que o caso da solução negativa é similar. Para isto, faremos uso do trabalho de J. Angulo a respeito da estabilidade de soluções dnoidais para a equação de Korteweg - de Vries modificada [6]. Iniciamos esta seção construindo uma curva suave de soluções dnoidais com um período fixo L para a equação (4.2.3). Para isto, mostraremos inicialmente a existência de uma família de ondas dnoidais com um período fixo.

4.3.3 Existência de uma curva suave de soluções dnoidais com um período fixo

Consideremos $L > 0$ arbitrário mas fixado e $w > 0$ tal que $\sqrt{w} > \frac{\pi\sqrt{2}}{L}$. Da análise feita na seção anterior, temos que a aplicação $\eta_2 \in (0, \sqrt{w}) \mapsto T_{\phi_w}(\eta_2)$, dada em 4.2.10, é estritamente decrescente (vide demonstração do Teorema 4.2) e por (4.2.11) existe um único $\eta_2 \equiv \eta_2(w) \in (0, \sqrt{w})$ tal que o período fundamental da onda dnoidal, $\phi_w(\cdot; \eta_1(w), \eta_2(w))$, será L . Observemos que neste caso, por (4.2.6) o módulo k pode ser visto como uma função de w ,

$$k^2(w) = \frac{2w - 2\eta_2^2}{2w - \eta_2^2} \quad (4.3.4)$$

com $\eta_2 = \eta_2(w)$. Mostraremos agora, que pelo menos localmente, esta escolha de $\eta_2(w)$ depende suavemente de w .

Teorema 4.2. *Seja $L > 0$ fixo mas arbitrário. Consideremos $w_0 > \frac{2\pi^2}{L^2}$ e o único $\eta_{2,0} = \eta_2(w_0) \in (0, \sqrt{w_0})$ tal que $T_{\phi_{w_0}} = L$. Então,*

- (1) *Existe um intervalo $I(w_0)$ em torno de w_0 , um intervalo $J(\eta_{2,0})$ em torno de $\eta_{2,0}$ e uma única função suave $\Lambda : I(w_0) \rightarrow J(\eta_{2,0})$ tal que $\Lambda(w_0) = \eta_{2,0}$ e*

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2w - \eta_2^2}} K(k) = L, \quad (4.3.5)$$

onde $w \in I(w_0)$, $\eta_2 = \Lambda(w)$ e $k^2 = k^2(w) \in (0, 1)$ é dado por (4.3.4),

- (2) *a solução onda dnoidal em (4.2.7), $\phi_w(\cdot; \eta_1, \eta_2)$, determinada por $\eta_1 \equiv \eta_1(w) = \sqrt{2w - \eta_2^2}$, $\eta_2 \equiv \eta_2(w)$, tem período fundamental L e satisfaz (4.2.3). Além disso, a aplicação*

$$w \in I(w_0) \rightarrow \phi_w \in H_{per}^1([0, L]) \quad (4.3.6)$$

é uma função de classe C^1 .

- (3) *$I(w_0)$ pode ser escolhido como sendo $(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty)$.*

Demonstração: Aplicaremos o Teorema da Função Implícita. Para isto, consideremos o conjunto aberto $\Omega = \{(\eta, w); w > \frac{2\pi^2}{L^2}, \eta \in (0, \sqrt{w})\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e definamos $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Psi(\eta, w) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2w - \eta^2}} K(k(\eta, w)) \quad (4.3.7)$$

onde $k^2(\eta, w) = \frac{2w - 2\eta^2}{2w - \eta^2}$. Por hipótese, $\Psi(\eta_{2,0}, w_0) = L$. Verificaremos agora que $\partial_\eta \Psi(\eta, w) < 0$. De fato, é fácil ver que

$$\partial_\eta \Psi(\eta, w) = \frac{2\sqrt{2}\eta}{(2w - \eta^2)^{\frac{3}{2}}} K(k) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2w - \eta^2}} \frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\eta}. \quad (4.3.8)$$

Agora, como $k^2(\eta, w) = \frac{2w - 2\eta^2}{2w - \eta^2}$, temos

$$\frac{dk}{d\eta} = -\frac{2\eta w}{k(2w - \eta^2)^2},$$

e então usando as relações

$$\begin{cases} \frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k} \\ \frac{d^2E}{dk^2} = -\frac{1}{k} \frac{dK}{dk} \\ k(k')^2 \frac{d^2E}{dk^2} + (k')^2 \frac{dE}{dk} + kE = 0, \end{cases} \quad (4.3.9)$$

onde E é a integral elíptica completa do segundo tipo e $(k')^2 = 1 - k^2$, temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned}
 \partial_\eta \Psi(\eta, w) < 0 &\Leftrightarrow (2w - \eta^2)K < \frac{2w}{k} \frac{dK}{dk} \\
 &\Leftrightarrow k(2w - \eta^2) \left(E - k \frac{dE}{dk} \right) < -2kw \frac{d^2 E}{dk^2} \\
 &\Leftrightarrow k(2w - \eta^2) \left(E - k \frac{dE}{dk} \right) < \left(\frac{dE}{dk} + \frac{k}{(k')^2} E \right) (2w - \eta^2) (2 - k^2) \\
 &\Leftrightarrow 2(k')^2 \frac{dE}{dk} + kE > 0 \Leftrightarrow \frac{dE}{dk} - k \frac{d^2 E}{dk^2} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{dE}{dk} + \frac{dK}{dk} > 0.
 \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Mas, como $E + K$ é uma função estritamente crescente, segue-se o que desejamos. Logo, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função suave, Λ , definida em uma vizinhança $I(w_0)$, de w_0 , tal que

$$\Psi(\Lambda(w), w) = L$$

para todo $w \in I(w_0)$. E daí, obtemos (4.3.5).

Como w_0 foi escolhido arbitrariamente em $\mathcal{I} = (\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty)$, segue-se da unicidade da função Λ , que podemos estender seu domínio de definição a todo o intervalo $\mathcal{I}$. E isto finaliza a demonstração. $\square$

Corolário 4.1. *Consideremos a aplicação $\Lambda : I(w_0) \rightarrow J(\eta_{2,0})$ determinada pelo Teorema 4.2. Então, Λ é uma função estritamente decrescente em $I(w_0)$.*

Demonstração: Da demonstração do Teorema 4.2, temos que $\Psi(\Lambda(w), w) = L$ para todo $w \in I(w_0)$. Derivando esta igualdade com respeito a w obtemos

$$\frac{d}{dw} \Lambda(w) = - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial w}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}}. \tag{4.3.11}$$

Portanto, resta-nos mostrar que $\frac{\partial \Psi}{\partial w} < 0$. Para isto, fazemos uso da relação $\eta^2 = (2w - \eta^2)(1 - k^2) \equiv (2w - \eta^2)(k')^2$ para obtermos as equivalências

$$\frac{d\Psi}{dw} < 0 \Leftrightarrow (2w - \eta^2)K > \frac{\eta^2}{k} \frac{dK}{dk} \Leftrightarrow K > \frac{(k')^2}{k} \frac{dK}{dk}. \tag{4.3.12}$$

Então, da relação $\frac{dK}{dk} = \frac{(E - (k')^2 K)}{k(k')^2}$ e de (4.3.12), segue-se que

$$\frac{d\Psi}{dw} < 0 \Leftrightarrow k^2 K > E - (k')^2 K \Leftrightarrow K > E.$$

Isto finaliza a demonstração. □

Temos então o seguinte Teorema de existência.

Teorema 4.3. *Seja $L > \pi\sqrt{2}$. Então existe uma curva suave de soluções ondas viajantes periódicas para o sistema (4.0.1) em $H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^m([0, L])$, dada para $w(c) = 1 - c^2$, por*

$$c \in \left(-\sqrt{1 - \frac{2\pi^2}{L^2}}, \sqrt{1 - \frac{2\pi^2}{L^2}} \right) \rightarrow (\phi_{w(c)}, \psi_{w(c)}), \quad (4.3.13)$$

e que satisfaz o sistema (4.2.2) com constantes de integração $K_1 = K_2 = 0$. Além disso,

$$\phi_{w(c)}(\xi) = \sqrt{2w - \eta_2^2} \operatorname{dn} \left[\frac{\sqrt{2w - \eta_2^2}}{\sqrt{2}} \xi; k \right], \quad \psi_{w(c)} = -c\phi_{w(c)} \quad (4.3.14)$$

onde a função suave $\eta_2 \equiv \eta_2(w(c))$ é dada pelo Teorema 4.2 e $k = k(w(c))$ por (4.3.4).

Observação 4.5. Existem outras soluções de tipo cnoidal de (4.2.3), quando consideramos duas raízes de p_ϕ , definido em (4.2.5), de tipo imaginário puro. Com efeito, de (4.2.3) e (4.2.4), temos que

$$[\phi']^2 = \frac{1}{2}(a^2 + \phi^2)(b^2 - \phi^2). \quad (4.3.15)$$

Supondo $b > 0$, temos necessariamente que $-b \leq \phi \leq b$ e

$$\begin{cases} 2w = b^2 - a^2 \\ 4B_\phi = a^2b^2 > 0. \end{cases}$$

Definindo $\chi = \phi/b$ (supondo que $\chi(0) = 0$) e $k^2 = b^2/(a^2 + b^2)$, então de (4.3.15), obtemos

$$(\chi')^2 = \frac{b^2}{2}(1 - \chi^2)\left(\frac{a^2}{b^2} + \chi^2\right).$$

Agora, definindo ψ como $\chi^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 \psi$, obtemos

$$(\psi')^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi).$$

Então, para $\beta = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, obtemos via integração e da definição da função elíptica Jacobiana sn , que $\operatorname{sen} \psi = \operatorname{sn}(\beta\xi; k)$. Além disso, $\chi^2 = 1 - \operatorname{sn}^2(\beta\xi; k) = \operatorname{cn}^2(\beta\xi; k)$. De onde obtemos que

$$\phi_w(\xi) = b \operatorname{cn}(\beta\xi; k) \quad (4.3.16)$$

é uma solução de (4.2.3) com

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \text{ e } \beta = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Como $\text{cn}(\cdot; k)$ tem período fundamental $4K(k)$, segue-se que a solução onda cnoidal (4.3.16) tem período fundamental, T_ϕ , dado por

$$T_\phi \equiv \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} K(k).$$

Observamos por fim que (4.3.16) representa uma solução periódica não positiva de (4.2.3). Além disso, uma teoria de estabilidade não é conhecida para estas ondas.

Estabeleceremos a seguir nosso teorema de estabilidade.

Teorema 4.4. *Sejam $c \in (-1, 1)$ e $L > 2\pi$. Então existe um $0 < w_0 < \frac{1}{2}$, tal que a onda periódica viajante $\vec{\phi}_{w(c)}$, dada pelo Teorema 4.3, é orbitalmente estável em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ pelo fluxo da equação de Boussinesq, desde que $c^2 > 1 - w_0$ e $1 - c^2 > \frac{2\pi^2}{L^2}$.*

Observemos que a hipótese **1** decorre do Teorema 2.7. Quanto a hipótese **2**, resta-nos apenas verificar a convexidade de $d(c)$. Além disso, a análise espectral necessária à verificação da hipótese **3** será feita na seção a seguir.

4.3.4 Análise espectral do operador $\mathcal{L}_c$

Iniciamos calculando a forma quadrática associada ao operador $\mathcal{L}_c$, que denotaremos por Q_c , a qual é dada por

$$\begin{aligned} Q_c(g, h) &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_c(g, h), (g, h) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \{ (g')^2 + g^2 + h^2 - 3\phi_w^2 g^2 + 2cgh \} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \{ (g')^2 + (1 - c^2)g^2 + c^2 g^2 + h^2 - 3\phi_w^2 g^2 + 2cgh \} dx \\ &= Q_c^1(g) + \frac{1}{2} \|cg + h\|^2, \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

onde para $w(c) = 1 - c^2$,

$$Q_c^1(g) \equiv \frac{1}{2} \int_0^L (g')^2 + w(c)g^2 - 3\phi_w^2 g^2 dx \tag{4.3.18}$$

é a forma quadrática associada ao operador $\mathcal{L}_{dn} = -\partial_x^2 + w - 3\phi_w^2$, onde ϕ_w representa a solução onda dnoidal de (4.2.3) dada pelo Teorema 4.3.

Do sistema de equações diferenciais ordinárias (4.2.1) para a onda viajante $(\phi, \psi) = (\phi_{w(c)}, \psi_{w(c)})$, dada pelo Teorema 4.3, segue-se que $\frac{d}{dx}(\phi, \psi)$ gera o núcleo de $\mathcal{L}_c$. Com efeito, consideremos $(g, h) \in \text{Kernel}(\mathcal{L}_c)$. Então,

$$\begin{cases} -g'' + g - 3\phi^2 g + ch = 0 \\ cg + h = 0. \end{cases} \quad (4.3.19)$$

De onde concluímos, substituindo a segunda equação de (4.3.19) na primeira, que $\mathcal{L}_{dn}g = 0$. Das propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}_{dn}$ (v. Teorema 6.2 do Apêndice), segue-se que $g = \lambda\phi'$, onde $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, e portanto de (4.3.19), $h = -cg = -c\lambda\phi' = \lambda\psi'$.

As demonstrações de que existe um único autovalor negativo simples e de que o resto do espectro de $\mathcal{L}_c$, em (4.2.12), é limitado inferiormente por uma constante positiva seguem idênticas àquelas apresentadas na seção 3.4.2 do Capítulo 3 com relação à análise espectral do operador $\mathcal{L}_c = \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx} - \phi & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$, onde ϕ é dada pelo Teorema 3.4, fazendo uso das propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}_{dn}$ dadas pelo Teorema 6.2 do Apêndice e da caracterização min-max de autovalores.

4.3.5 Convexidade de $d(c)$

Para demonstrarmos o Teorema 3.6, no caso em que $\vec{\phi}$ é a solução obtida no Teorema 4.3, resta-nos verificar que $d''(c) > 0$, onde $d(c) = H_1(\vec{\phi}) + cI(\vec{\phi})$, H_1 e I definidos em (4.0.2) e (4.0.3), respectivamente. Assim, temos que verificar que $\frac{d}{dc}I(\phi_w, \psi_w) > 0$, para c em um subintervalo de $(-1, 1)$.

Teorema 4.5. (Convexidade de $d(c)$). *Seja $L > 2\pi$ e $c \in (-1, 1)$. Então, existe $0 < w_0 < \frac{1}{2}$, tal que $d''(c) > 0$ se $c^2 > 1 - w_0$ e $\frac{2\pi^2}{L^2} < 1 - c^2$.*

Demonstração: Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc}I(\phi_w, \psi_w) &= \frac{d}{dc} \int_0^L \phi_w \psi_w = -\frac{d}{dc} \int_0^L c \phi_w^2 \\ &= -\int_0^L \phi_w^2 dx - c \frac{d}{dc} \left[\int_0^L \phi_w^2 dx \right] \\ &= -\int_0^L \phi_w^2 dx - c \frac{d}{dw} \left[\int_0^L \phi_w^2 dx \right] \frac{dw}{dc} \\ &= -\int_0^L \phi_w^2 dx + 2c^2 \frac{d}{dw} \left[\int_0^L \phi_w^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Mostraremos agora que

$$\frac{d}{dw} \frac{1}{2} \int_0^L \phi_w^2 dx = \frac{4}{L} \frac{d}{dk} [K(k)E(k)] \frac{dk}{dw} > 0. \quad (4.3.21)$$

Para isto, observemos que de (4.2.7), (4.2.8) e (4.3.5) temos que

$$\begin{aligned} \|\phi_w\|^2 &= \sqrt{2}\eta_1 \int_0^{\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}L} dn^2(x; k) dx \\ &= \sqrt{2}\eta_1 \int_0^{2K} dn^2(x; k) dx \\ &= \frac{8K(k)}{L} \int_0^K dn^2(x; k) dx, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

onde utilizamos que a função elíptica jacobiana dn tem período fundamental $2K$ e é uma função par. Agora usando que (*vide* [11])

$$\int_0^K cn^2(x; k) dx = \frac{1}{k^2} [E(k) - (k')^2 K(k)]$$

e $dn^2(x; k) = 1 - k^2 + k^2 cn^2(x; k)$, segue-se de (4.3.22) que

$$\frac{1}{2} \int_0^L \phi_w^2 dx = \frac{4}{L} K(k)E(k). \quad (4.3.23)$$

Agora, do Teorema 4.2 e do Corolário 4.1, temos que aplicação $w \rightarrow \Lambda(w) \equiv \eta_2(w)$ é uma função estritamente decrescente, e de (4.3.4), para $\eta_2 = \eta_2(w)$, temos que

$$\frac{dk}{dw} = \frac{1}{2k} \left[\frac{2\eta_2^2 - 4w\eta_2\eta_2'}{(2w - \eta_2^2)^2} \right] > 0. \quad (4.3.24)$$

Portanto, como a aplicação $k \in (0, 1) \rightarrow K(k)E(k)$ é uma função estritamente crescente, a afirmação (4.3.21) segue de (4.3.23) e de (4.3.24).

Mas então, substituindo (4.3.23) e (4.3.21) em (4.3.20), obtemos

$$\frac{d}{dc} I(\phi_w, \psi_w) = -\frac{8}{L} K(k)E(k) + \frac{16c^2}{L} \frac{d}{dk} [K(k)E(k)] \frac{dk}{dw}. \quad (4.3.25)$$

Agora,

$$\frac{dk}{dw} = \frac{1}{2k(2w - \eta_2^2)^2} \left\{ 2\eta_2^2 - 4w \left[\frac{k(2w - \eta_2^2)K - \eta_2^2 \frac{dK}{dk}}{k(2w - \eta_2^2)K - 2w \frac{dK}{dk}} \right] \right\} > 0, \quad (4.3.26)$$

onde utilizamos (4.3.8), (4.3.24) e o fato de que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial w} &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2w - \eta_2^2} \frac{dK}{dw}(k(\eta_2, w)) - 2\sqrt{2}K(k(\eta_2, w))(2w - \eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2w - \eta_2^2)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2w - \eta_2^2} \frac{dK}{dk}(k(\eta_2, w)) \frac{\eta_2^2}{k(2w - \eta_2^2)^2} - 2\sqrt{2}K(k(\eta_2, w))(2w - \eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2w - \eta_2^2)} \end{aligned}$$

com Ψ dada por (4.3.7).

Substituindo (4.3.26) em (4.3.25) e utilizando que $2w - \eta_2^2 = \frac{\eta_2^2}{(k')^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{8} \frac{dI(\phi_w, \psi_w)}{dc} &= -EK + 2c^2 \frac{E^2 - k'^2 K^2}{kk'^2} \frac{dk}{dw} \\
 &= -EK + 2c^2 \frac{E^2 - k'^2 K^2}{kk'^2} \frac{k'^4 k K (\eta_2^2 - 2w)}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \\
 &= -EK + 2c^2 \frac{(E^2 - k'^2 K^2) K (\eta_2^2 - 2w) (k')^2}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \\
 &= K \left(\frac{-\eta_2^2 E (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K) + 2c^2 (E^2 - k'^2 K^2) (k')^2 (\eta_2^2 - 2w)}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \right)
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{8K} \frac{dI(\phi_w, \psi_w)}{dc} &= \frac{-\eta_2^2 E (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K) + 2c^2 (k')^2 (E^2 - k'^2 K^2) (\eta_2^2 - 2w)}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \\
 &= \frac{\eta_2^2 (-2wk'^2 - \eta_2^2 k^2) EK + (2w\eta_2^2 - 2c^2 (k')^2 (2w - \eta_2^2)) E^2}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \\
 &\quad + \frac{2c^2 k'^4 (2w - \eta_2^2) K^2}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \\
 &= \frac{\eta_2^2 (-2wk'^2 - \eta_2^2 k^2) EK + (2c^2 (k')^2 \eta_2^2 - 4c^2 w (k')^2 + 2w\eta_2^2) E^2}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \\
 &\quad + \frac{2c^2 (k')^2 \eta_2^2 K^2}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)}.
 \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Note que $k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K < 0$.

Desenvolveremos agora o coeficiente de E^2 em (4.3.27) utilizando que $(k')^2 = \frac{\eta_2^2}{2w - \eta_2^2}$.

$$\begin{aligned}
 2c^2 (k')^2 \eta_2^2 - 4c^2 w (k')^2 + 2w\eta_2^2 &= 2c^2 \frac{\eta_2^4}{2w - \eta_2^2} - 4c^2 w \frac{\eta_2^2}{2w - \eta_2^2} + 2w\eta_2^2 \\
 &= \frac{2c^2 \eta_2^4 - 4c^2 w \eta_2^2 + 4w^2 \eta_2^2 - 2w\eta_2^4}{2w - \eta_2^2} \\
 &= \frac{\eta_2^2 (2w - \eta_2^2) (2w - 2c^2)}{2w - \eta_2^2} = \eta_2^2 (2w - 2c^2).
 \end{aligned}$$

Também o coeficiente de EK pode ser reescrito equivalentemente por $\eta_2^2 (-2wk'^2 - \eta_2^2 k^2) = 2\eta_2^4$.

Assim,

$$\frac{L}{8K} \frac{dI(\phi_w, \psi_w)}{dc} = \frac{-2\eta_2^4 EK + 2\eta_2^2 (w - c^2) E^2 + 2c^2 (k')^2 \eta_2^2 K^2}{\eta_2^2 (k^2 \eta_2^2 K - 2wE + 2wk'^2 K)} \tag{4.3.28}$$

Observamos agora que como no capítulo anterior podemos escrever w em função das integrais elípticas completas. Com efeito, integrando a equação (4.2.3) de 0 a L obtemos

$$w = w(c) = \frac{\int_0^L \phi_w^3(\xi) d\xi}{\int_0^L \phi_w(\xi) d\xi} \quad (4.3.29)$$

e a fração acima em (4.3.29) está bem definida, uma vez que a solução ϕ_w é positiva e portanto sua média é não nula.

Agora, utilizando (4.2.7) e a fórmula 314.01 em [11] e o fato de que $F(\frac{\pi}{2}; k) = K(k)$ (vide Apêndice), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_w(\xi) d\xi &= \int_0^L \eta_1 \operatorname{dn}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\xi; k\right) d\xi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\eta_1 L}{\sqrt{2}}} \operatorname{dn}(y; k) dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2K} \operatorname{dn}(y; k) dy \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^K \operatorname{dn}(y; k) dy \\ &= \pi\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Também, utilizando (4.2.7), a fórmula 314.03 juntamente com os valores especiais $\operatorname{sn}0 = 0$, $\operatorname{sn}K = 1$, $\operatorname{cn}K = 0$ encontrados em [11], obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_w^3(\xi) d\xi &= \int_0^L \eta_1^3 \operatorname{dn}^3\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\xi; k\right) d\xi \\ &= \sqrt{2}\eta_1^2 \int_0^{2K} \operatorname{dn}^3(y; k) dy \\ &= 2\sqrt{2}\eta_1^2 \int_0^K \operatorname{dn}^3(y; k) dy \\ &= 16\sqrt{2} \frac{K^2}{L^2} \frac{1}{2} [(1 + (k')^2) \frac{\pi}{2} + k^2 \operatorname{sn}K \operatorname{cn}K] \\ &= 4\pi\sqrt{2}(1 + (k')^2) \frac{K^2}{L^2}. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Substituindo (4.3.30) e (4.3.31) em (4.3.29), obtemos

$$w(c) = 1 - c^2 = 4(1 + (k')^2) \frac{K^2}{L^2}. \quad (4.3.32)$$

Voltando ao numerador de (4.3.28), utilizando (4.3.32) e que $\eta_2^2 = \frac{2w(k')^2}{1+(k')^2}$, temos que o numerador de (4.3.28) será negativo se e somente se

$$\begin{aligned}
 c^2(k')^2 K^2 &< (c^2 - w)E^2 + \eta_2^2 EK \\
 &\Downarrow \\
 (1 - w)(k')^2 K^2 &< (1 - 2w)E^2 + \frac{2w(k')^2}{1 + (k')^2} EK \\
 &\Downarrow \\
 w \left[E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1 + k'^2} EK \right] &< E^2 - (k')^2 K^2 \\
 &\Downarrow \\
 w &< \frac{E^2 - (k')^2 K^2}{E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1 + k'^2} EK}.
 \end{aligned}$$

Observação 4.6. $E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK > 0$, já que as funções EK e $E + K$ são estritamente crescentes.

Observação 4.7. De (4.3.32), temos que k está na vizinhança do zero se, e somente se, w está na vizinhança de $\frac{2\pi^2}{L^2}$. Para ver isto, observemos que de (4.3.32), quando $k \rightarrow 0$ temos que $w \rightarrow \frac{2\pi^2}{L^2}$ e reciprocamente suponhamos que $w(k_n) = 4(1 + (k'_n)^2) \frac{K^2(k_n)}{L^2} \rightarrow \frac{2\pi^2}{L^2}$, ou equivalentemente, que $(1 + (k'_n)^2) K^2 \rightarrow \frac{\pi^2}{2}$ e suponhamos por absurdo que $k_n \rightarrow k_0 \neq 0$. Mas então, $(1 + (k'_0)^2) K^2(k_0) = \frac{\pi^2}{2}$. Agora, do fato de $K(0) = \frac{\pi}{2}$ e a função $(1 + k'^2)K(k)$ ser estritamente crescente, concluímos que $k_0 = 0$.

Verificaremos agora que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{E^2 - (k')^2 K^2}{E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK} = \frac{2}{5}. \quad (4.3.33)$$

Para demonstrarmos (4.3.33), denotemos por $f(k) := E^2 - (k')^2 K^2$ e por $g(k) := E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK$, as funções que aparecem no numerador e denominador de (4.3.33), respectivamente.

Utilizaremos a regra de L'Hospital para encontrarmos este limite, demonstrando que

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{E^2 - (k')^2 K^2}{E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK} &= \frac{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^4}{dk^4} [E^2 - (k')^2 K^2]}{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^4}{dk^4} [E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK]} \\
 &= \frac{\frac{3\pi^2}{4}}{\frac{3\pi^2}{4} + \frac{9\pi^2}{8}} = \frac{2}{5},
 \end{aligned}$$

uma vez que, $\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \lim_{k \rightarrow 0} f''(k) = \lim_{k \rightarrow 0} f'''(k) = 0$ e $\lim_{k \rightarrow 0} g(k) = \lim_{k \rightarrow 0} g'(k) = \lim_{k \rightarrow 0} g''(k) = \lim_{k \rightarrow 0} g'''(k) = 0$.

Como é imediato ver que $\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{k \rightarrow 0} g(k) = 0$, passemos então ao cálculo dos limites das derivadas de f e g quando $k \rightarrow 0$. Para isto, utilizaremos que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{E - k'^2 K}{k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{K - E}{k^2} = \frac{\pi}{4}$. (Vide [11], fórmula 112.02, pag.11). Com efeito,

$$f'(k) = 2E \frac{dE}{dk} - 2k'^2 K \frac{dK}{dk} + 2kK^2 \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0,$$

pois $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{dE}{dk} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(E - K)}{k^2} k = 0$ e analogamente $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{dK}{dk} = 0$.

Também,

$$f''(k) = 2\left(\frac{dE}{dk}\right)^2 + 2E \frac{d^2 E}{dk^2} - 2k'^2 K \frac{d^2 K}{dk^2} - 2k'^2 \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 + 8kK \frac{dK}{dk} + 2K^2 \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow 0$, uma vez que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^2 E}{dk^2} = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \frac{dK}{dk} = -\frac{\pi}{4}$ e $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^2 K}{dk^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{1}{k'^2} K + \frac{(3k^2 - 1)}{kk'^2} \frac{dK}{dk} \right] = \frac{\pi}{4}$, onde utilizamos no cálculo deste último limite a primeira equação diferencial hipergeométrica em (6.1.3).

Temos ainda que

$$\begin{aligned} f'''(k) &= -\frac{2}{k} \frac{dE}{dk} \frac{dK}{dk} - \frac{2}{k} E \frac{d^2 K}{dk^2} - \frac{2}{k} \frac{(E - K)}{k} \frac{dK}{dk} + \frac{2}{k^2} E \frac{dK}{dk} + \frac{(2 + 2k^2)}{k} K \frac{d^2 K}{dk^2} \\ &+ \frac{(2 + 2k^2)}{k} \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 + \frac{(2k^2 - 2)}{k^2} K \frac{dK}{dk} - 4k'^2 \frac{dK}{dk} \frac{d^2 K}{dk^2} + 4k \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 \\ &= -\frac{2}{k} \frac{dE}{dk} \frac{dK}{dk} + \left[2 \frac{(K - E)}{k} + 2kK\right] \frac{d^2 K}{dk^2} + \frac{(2 + 2k^2)}{k} \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 + 2K \frac{dK}{dk} \\ &- 4k'^2 \frac{dK}{dk} \frac{d^2 K}{dk^2} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

em virtude dos limites acima calculados e também porque

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k'^4} \frac{(E - k'^2 K)}{k^2} \frac{dK}{dk} = 0.$$

Passemos então ao cálculo de $f^4(k)$. Temos

$$\begin{aligned} f^4(k) &= -\frac{2}{k} \left[\frac{dE}{dk} \frac{d^2 K}{dk^2} - \frac{1}{k} \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 \right] + \left[2 \frac{(K - E)}{k} + 2kK \right] \frac{d^3 K}{dk^3} \\ &+ \left[\frac{2}{k} \frac{dK}{dk} + 2K + 2k \frac{dK}{dk} \right] \frac{d^2 K}{dk^2} + \frac{(4 + 4k^2)}{k} \frac{dK}{dk} \frac{d^2 K}{dk^2} + 8 \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 \\ &- \frac{2}{k^2} \left(\frac{dK}{dk}\right)^2 + 2K \frac{d^2 K}{dk^2} - 4k'^2 \left[\left(\frac{d^2 K}{dk^2}\right)^2 + \frac{dK}{dk} \frac{d^3 K}{dk^3} \right] \\ &+ 16k \frac{dK}{dk} \frac{d^2 K}{dk^2} \rightarrow \frac{3\pi^2}{4} \text{ quando } k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^3 K}{dk^3} = 0$. Para ver que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^3 K}{dk^3} = 0$, escrevemos

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!(2r)!}{2^{4r}(r!)^4} k^{2r} \right\}$$

(vide [1], pag.110), de onde obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^3 K}{dk^3} &= \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{r \geq 2} \frac{(2r)!(2r)!}{2^{4r}(r!)^4} 2r(2r-1)(2r-2)k^{2r-3} \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} k \left\{ \sum_{r \geq 2} \frac{(2r)!(2r)!}{2^{4r}(r!)^4} 2r(2r-1)(2r-2)k^{2r-2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

onde a série entre chaves na segunda igualdade acima é absolutamente convergente. Verificaremos isto utilizando o critério da razão. De fato, denotando

$$a_r := \frac{(2r)!(2r)!}{2^{4r}(r!)^4} 2r(2r-1)(2r-2)k^{2r-2},$$

temos

$$\frac{|a_{r+1}|}{|a_r|} = \frac{(2r+2)^2(2r+1)^3}{2^3(r+1)^3(2r-1)(2r-2)} k,$$

de onde obtemos que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|a_{r+1}|}{|a_r|} < 1$. E portanto $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^3 K}{dk^3} = 0$.

Passemos agora ao cálculo dos limites das derivadas de $g(k)$. Temos

$$g'(k) = 2E \frac{dE}{dk} - \frac{2k'^2}{1+k'^2} \left[E \frac{dK}{dk} + K \frac{dE}{dk} \right] + \frac{4k}{(1+k'^2)^2} EK \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0,$$

em virtude dos limites acima calculados. Também,

$$\begin{aligned} g''(k) &= 2E \frac{d^2 E}{dk^2} + 2 \left(\frac{dE}{dk} \right)^2 - \frac{2k'^2}{1+k'^2} \left[E \frac{d^2 E}{dk^2} + 2 \frac{dE}{dk} \frac{dK}{dk} + K \frac{d^2 K}{dk^2} \right] \\ &+ \frac{8k}{(1+k'^2)^2} \left[E \frac{dK}{dk} + K \frac{dE}{dk} \right] + \frac{[4(1+k'^2) + 16k^2]}{(1+k'^2)^3} EK \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pela mesma razão supracitada. Derivando mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} g'''(k) &= 2E \frac{d^3 E}{dk^3} + 6 \frac{dE}{dk} \frac{d^2 E}{dk^2} - \frac{2k'^2}{1+k'^2} \left[E \frac{d^3 K}{dk^3} + 3 \frac{dE}{dk} \frac{d^2 K}{dk^2} + 3 \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dK}{dk} + K \frac{d^3 E}{dk^3} \right] \\ &+ \frac{12k}{(1+k'^2)^2} \left[E \frac{d^2 K}{dk^2} + 2 \frac{dE}{dk} \frac{dK}{dk} + K \frac{d^2 E}{dk^2} \right] + \frac{[12(1+k'^2) + 48k^2]}{(1+k'^2)^3} \left[E \frac{dK}{dk} + K \frac{dE}{dk} \right] \\ &+ \frac{[48k(1+k'^2) + 6 \times 16k^3]}{(1+k'^2)^4} EK \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^3 E}{dk^3} = 0$. Para ver que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^3 E}{dk^3} = 0$, escrevemos

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r-2)!(2r)!}{2^{4r-1}(r-1)!(r!)^3} k^{2r} \right\}$$

(vide [1], pag.110), de onde obtemos que

$$\frac{d^3 E}{dk^3} = -\frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{r \geq 2} \frac{(2r-2)!(2r)!}{2^{4r-1}(r-1)!(r!)^3} 2r(2r-1)(2r-2)k^{2r-3} \right\}. \quad (4.3.35)$$

Procedendo como antes, obtêm-se o desejado.

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} g^4(k) &= 2E \frac{d^4 E}{dk^4} + 8 \frac{dE}{dk} \frac{d^3 E}{dk^3} + 6 \left(\frac{d^2 E}{dk^2} \right)^2 - \frac{2k'^2}{1+k'^2} \left[E \frac{d^4 K}{dk^4} + 4 \frac{dE}{dk} \frac{d^3 K}{dk^3} \right. \\ &+ 6 \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{d^2 K}{dk^2} + 4 \frac{dK}{dk} \frac{d^3 E}{dk^3} + K \frac{d^4 E}{dk^4} \left. \right] + \frac{16k}{(1+k'^2)^2} \left[E \frac{d^3 K}{dk^3} + 3 \frac{dE}{dk} \frac{d^2 K}{dk^2} + 3 \frac{dK}{dk} \frac{d^2 E}{dk^2} \right. \\ &+ K \frac{d^3 E}{dk^3} \left. \right] + \frac{[24(1+k'^2) + 96k]}{(1+k'^2)^3} \left[E \frac{d^2 K}{dk^2} + 2 \frac{dE}{dk} \frac{dK}{dk} + K \frac{d^2 E}{dk^2} \right] \\ &+ \frac{120k(1+k'^2) + 6k[12(1+k'^2) + 48k^2] + 24(1+k'^2) + 6 \times 16k^3}{(1+k'^2)^4} \left[E \frac{dK}{dk} + K \frac{dE}{dk} \right] \\ &+ \frac{(1+k'^2)[48(1+k'^2) + 180k^2] + 8k[48k(1+k'^2) + 6 \times 16k^3]}{(1+k'^2)^5} EK \rightarrow \frac{9\pi^2}{8} \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow 0$, pois $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^4 K}{dk^4} = \frac{27\pi}{16}$ e $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^4 E}{dk^4} = -\frac{9\pi}{16}$. Para ver que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^4 K}{dk^4} = \frac{27\pi}{16}$ e $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^4 E}{dk^4} = -\frac{9\pi}{16}$, derivamos mais uma vez as séries em (4.3.34) e (4.3.35), para obter,

$$\frac{d^4 K}{dk^4} = \frac{\pi}{2} \sum_{r=2}^{\infty} b_r 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)k^{2r-4}$$

e

$$\frac{d^4 E}{dk^4} = -\frac{\pi}{2} \sum_{r=2}^{\infty} c_r 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)k^{2r-4},$$

onde $b_r := \frac{(2r)!(2r)!}{2^{4r}(r!)^4} 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)k^{2r-4}$ e $c_r := \frac{(2r-2)!(2r)!}{2^{4r-1}(r-1)!(r!)^3} 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)k^{2r-4}$. É fácil ver que quando $k \rightarrow 0$, $\frac{d^4 K}{dk^4} \rightarrow \frac{\pi}{2} b_2 4! = \frac{27\pi}{16}$ e que $\frac{d^4 E}{dk^4} \rightarrow -\frac{\pi}{2} c_2 4! = -\frac{9\pi}{16}$. E daí, segue-se (4.3.33).

Observemos ainda que como $\lim_{k \rightarrow 1} k'^2 K^2 = 0$, segue-se que

$$\lim_{k \rightarrow 1} \frac{E^2 - (k')^2 K^2}{E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK} = \frac{1}{2}. \quad (4.3.36)$$

Além disso, $0 < \frac{E^2 - (k')^2 K^2}{E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK} < \frac{1}{2} \forall k \in (0, 1)$, pois $E^2 - \frac{2k'^2}{1+k'^2} K^2 > E^2 - k'^2 K^2$ $\forall k \in (0, 1)$. De fato, $E^2 - \frac{2k'^2}{1+k'^2} K^2 > E^2 - k'^2 K^2 \Leftrightarrow (1 + k'^2)K > 2E$, o que é verdade já que a função $m(k) := (1 + k'^2)K - 2E$ tem as seguintes propriedades: $m(0) = 0$ e $m'(k) > 0 \forall k \in (0, 1)$.

De (4.3.33) e (4.3.36), concluímos que a função $\frac{f(k)}{g(k)} = \frac{E^2 - (k')^2 K^2}{E^2 - (k')^2 K^2 + E^2 - \frac{2(k')^2}{1+k'^2} EK}$ é estritamente positiva no compacto $[0, 1]$, o que implica que ela possui um ponto de mínimo $k_0 \in [0, 1]$, ou seja, $0 < \frac{f(k_0)}{g(k_0)} \leq \frac{f(k)}{g(k)} < \frac{1}{2} \forall k \in [0, 1]$. Mas então, existe um $w_0 := \frac{f(k_0)}{g(k_0)} < \frac{1}{2}$, tal que $\forall w < w_0$, $w < \frac{f(k)}{g(k)}$, como queríamos. □

A demonstração do Teorema 4.4 segue diretamente de [21].

4.3.6 Um teorema de existência global

Nesta subseção, observamos que se o dado inicial $\overrightarrow{u_0} = (u_0, v_0)$ está suficientemente próximo da onda viajante periódica $\overrightarrow{\phi_{w(c)}} = (\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})$, com $w(c) = 1 - c^2$, a solução local de (2.1.2), dada pelo Teorema 2.7 é global.

Teorema 4.6. *Seja $L^2 > 4\pi^2$ tal que $\frac{2\pi^2}{L^2} < 1 - c^2$ e $c \in (-1, -\sqrt{1 - w_0}) \cup (\sqrt{1 - w_0}, 1)$, com w_0 dado pelo Teorema 4.5. Seja $\overrightarrow{\phi_{w(c)}} = (\phi_{w(c)}, -c\phi_{w(c)})$, a solução onda viajante periódica de (4.0.1), com $w(c) = 1 - c^2$. Então, existe um $\delta = \delta(c) > 0$ tal que se $(u_0, v_0) \in H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, e existe um número θ tal que*

$$\|u_0(\cdot) - \phi_{w(c)}(\cdot + \theta)\|_1 + \|v_0(\cdot) - \psi_{w(c)}(\cdot + \theta)\| \leq \delta, \quad (4.3.37)$$

então a solução (u, v) de (4.0.1), correspondente ao dado inicial (u_0, v_0) é global e pertence a $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ para todo tempo $T' > 0$.

Demonstração: Demonstração idêntica àquela do Teorema 3.8. □

CAPÍTULO 5

Estabilidade de ondas viajantes periódicas para as equações de Korteweg - de Vries e de Boussinesq - Caso $A_\phi = 0$

Neste capítulo, demonstraremos um resultado de estabilidade orbital, no sentido da definição 3.1, para soluções ondas viajantes L -periódicas da forma $\phi(x, t) = \phi(x - ct)$ associadas a equação de evolução,

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (5.0.1)$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$ e $u = u(x, t)$ toma valores em $\mathbb{R}$.

Tratamos aqui do caso não considerado em [5], a saber, o caso em que a constante de integração associada a equação das ondas viajantes é nula. No Capítulo 3 usamos as idéias de [5], onde a teoria desenvolvida cobriu o caso $A_\phi \neq 0$. Como dito anteriormente, para estudar o caso da estabilidade para a equação de Boussinesq com $A_\phi = 0$, obtivemos inicialmente a estabilidade orbital para a KdV com $A_\phi = 0$. Na verdade, tendo em vista este último resultado, segue-se um resultado para a Boussinesq imediatamente.

Em nossa teoria de estabilidade para a KdV, X denotará o espaço $H_{per}^1([0, L])$ e a órbita gerada pela onda viajante ϕ , será denotada por $\Omega_\phi = \{\phi(\cdot + y); y \in \mathbb{R}\}$.

A equação (5.0.1) possui duas quantidades conservadas básicas E e F , definidas respectiva-

mente por,

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L [u_x^2 - \frac{1}{3}u^3] dx \text{ e } F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx. \quad (5.0.2)$$

Tais invariantes de movimento nos serão úteis para aplicarmos a teoria de Grillakis, Shatah & Strauss [21].

Como antes, temos de verificar as seguintes condições suficientes para a obtenção de estabilidade.

Hipótese 1. (Existência de solução) Para cada $u_0 \in X$ existe $T > 0$, T dependendo de $\|u_0\|_X$, tal que a equação (5.0.1) possui uma solução, $u \in C([0, T]; X)$ com $u(0) = u_0$ e $E(u(t)) = E(u_0)$, $F(u(t)) = F(u_0)$ para todo $t \in [0, T]$.

Hipótese 2. (Existência de ondas periódicas viajantes) A equação (5.0.1) possui uma família de soluções ondas periódicas viajantes e além disso, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que, para cada $c \in (c_1, c_2)$, a aplicação $c \rightarrow \phi_c$ é de classe C^1 e a função

$$d(c) = E(\phi) + cF(\phi) \quad (5.0.3)$$

é uma função convexa de c , onde E e F são os invariantes de movimento mencionados acima.

Hipótese 3. (Espectro do Hessiano) Para $c \in (c_1, c_2)$, $\mathcal{L}_c \equiv (E'' + cF'')(\phi) = -\partial_{xx} + c - \phi$ possui exatamente um autovalor negativo, o qual é simples, o zero é um autovalor simples com autofunção associada $\frac{d}{dx}\phi$ e o resto do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.

A primeira hipótese segue diretamente do trabalho de Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka & Tao em [17] (*Vide* também [30]). Também, a análise espectral associada ao operador $\mathcal{L}_{cn}$ necessária para a verificação da hipótese 3 está feita no Apêndice desta tese. Logo, resta-nos apenas a verificação da segunda hipótese.

5.1 Ondas periódicas viajantes da equação (5.0.1)

Uma onda viajante L -periódica da equação (5.0.1) é uma solução da forma

$$\phi(x, t) = \phi(x - ct)$$

com $\phi^{(j)}(\xi + L) = \phi^{(j)}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ e $c > 0$, a qual representa um onda que viaja com velocidade c . Nesta seção, mostraremos inicialmente a existência de soluções periódicas com um período fundamental dado naturalmente pelas funções elípticas Jacobianas.

Substituindo uma solução como esta em (5.0.1), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária para ϕ ,

$$\phi'' - c\phi + \frac{\phi^2}{2} = A_\phi, \quad (5.1.1)$$

onde A_ϕ é uma constante de integração, a qual será considerada aqui identicamente nula.

Multiplicando a equação (5.1.1) por ϕ' e integrando o resultado, obtemos a seguinte equação de primeira ordem

$$\begin{aligned} [\phi'(\xi)]^2 &= \frac{1}{3}[-\phi^3(\xi) + 3c\phi^2(\xi) + 6B_\phi] \equiv \frac{1}{3}p_\phi(\phi(\xi)) \\ &= \frac{1}{3}(\phi - \beta_1)(\phi - \beta_2)(\beta_3 - \phi) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

onde B_ϕ é uma constante de integração e $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os zeros reais do polinômio $p_\phi(t) = -t^3 + 3ct^2 + 6B_\phi$, os quais satisfazem as seguintes relações

$$\begin{cases} 3c = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 0 = (\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1) \\ B_\phi = \frac{1}{6} \beta_1\beta_2\beta_3. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Além disso, suponhamos que estes estão ordenados de modo que $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ e $\beta_3 > 0$. Observemos que $p_\phi(t) = 0$ implica

$$6B_\phi = m(t)n(t) \equiv t^2(t - 3c),$$

onde $m(t) = t^2$ e $n(t) = t - 3c$. Se $B_\phi > 0$ então necessariamente $m(t)$ e $n(t)$ teriam sinais iguais, o que implicaria $t > 3c > 0$ e portanto $\beta_1 > 3c$, $\beta_2 > 3c$ e $\beta_3 > 3c$, daí obteríamos $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > 3c$, contradizendo a primeira identidade em (5.1.3). Mas então teremos $B_\phi = 0$ ou $B_\phi < 0$.

Se $B_\phi = 0$ então $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e $\beta_3 = 3c$ e neste caso substituindo tais valores de β_i , $i = 1, 2, 3$ em (5.1.6), pelas propriedades de K (v. Apêndice), $T_\phi = +\infty$, de onde obteríamos a clássica onda solitária

$$\phi = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right)$$

da equação (5.0.1).

Portanto, $B_\phi < 0$ e então $t < 3c$. Assim, da primeira identidade em (5.1.3), $\beta_3 > 0$ e da última identidade em (5.1.3), $\beta_2 > 0$. Além disso, procedendo como na Seção 3.2, obteremos como solução de (5.1.1) uma onda cnoidal que neste caso será positiva e que vai satisfazer $0 < \beta_2 < 2w < \beta_3 < 3w$.

Com efeito, neste caso obteremos

$$\phi(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)cn^2\left[\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k\right], \quad (5.1.4)$$

uma solução de (5.1.1) com

$$k^2 = k_\phi^2 = \frac{\beta_3^2 - \beta_2^2}{\beta_3^2 + 2\beta_2\beta_3}, \quad -\beta_1 = \beta_2 + \beta_3 - 3c = \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_2 + \beta_3} \text{ e } 0 < \beta_2 < \beta_3. \quad (5.1.5)$$

Também, a onda cnoidal (5.1.4) possui período fundamental T_ϕ , dado por

$$T_\phi \equiv \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}} K(k_\phi), \quad (5.1.6)$$

com k_ϕ dado em (5.1.5). Além disso, podemos manipular a expressão em (5.1.6) de modo a obtermos informação sobre o comportamento do período fundamental T_ϕ . Mostraremos a seguir que

$$T_\phi > \frac{2\pi}{\sqrt{c}}. \quad (5.1.7)$$

De fato, de (5.1.5), dado $c > 0$ fixo e a relação $0 < \beta_2 < \beta_3 < 3c$, podemos escrever (5.1.6) como uma função de uma única variável, digamos β_3 . Para isto, resolvemos a equação do segundo grau na variável β_2 obtida de (5.1.5)

$$\beta_2^2 + (\beta_3 - 3c)\beta_2 + (\beta_3^2 - 3c\beta_3) = 0$$

cujo valor de Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta_3^2 - 6c\beta_3 + 9c^2 - 4(\beta_3^2 - 3c\beta_3) \\ &= 6c\beta_3 + 9c^2 - 3\beta_3^2 > 0 \end{aligned}$$

pois $\beta_3 < 3c \Rightarrow \beta_3^2 = \beta_3 \cdot \beta_3 < 3c\beta_3 \Rightarrow 2\beta_3^2 < 6c\beta_3$ e também $\beta_3 < 3c \Rightarrow \beta_3^2 < 9c^2$. Assim,

$$\Delta = 6c\beta_3 + 9c^2 - 3\beta_3^2 > 2\beta_3^2 + \beta_3^2 - 3\beta_3^2 = 0.$$

Novamente do fato de $\beta_3 < 3c$, concluímos que

$$\beta_2 = \frac{3c - \beta_3 + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}{2}. \quad (5.1.8)$$

Assim, de (5.1.8) e (5.1.3), obtemos

$$\begin{aligned}\beta_3 - \beta_1 &= \beta_2 + 2\beta_3 - 3c \\ &= \frac{3c - \beta_3 + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}{2} + 2\beta_3 - 3c \\ &= \frac{3\beta_3 - 3c + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}{2}\end{aligned}\quad (5.1.9)$$

e

$$\begin{aligned}\beta_3 - \beta_2 &= \beta_3 - \frac{3c - \beta_3 + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}{2} \\ &= \frac{3\beta_3 - 3c - \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}{2}\end{aligned}\quad (5.1.10)$$

e portanto, (5.1.9) juntamente com (5.1.10) nos dá

$$k_\phi^2 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1} = \frac{3\beta_3 - 3c - \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}{3\beta_3 - 3c + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}. \quad (5.1.11)$$

Neste momento, observamos que a relação $\beta_2 < 2c < \beta_3$, pode ser facilmente verificada maximizando-se a função $F(\beta_2, \beta_3) := \beta_2 + \beta_3$, restrita ao vínculo $G(\beta_2, \beta_3) := \beta_2^2 + (\beta_3 - 3c)\beta_2 + (\beta_3^2 - 3c\beta_3) = 0$, de onde obtêm-se que $\beta_2 + \beta_3 \leq 4c$, o que nos permite concluir que $\beta_2 < 2c$, pois caso contrário, $\beta_2 + \beta_3 > 2\beta_2 > 4c$, contradizendo o fato de que $\beta_2 + \beta_3 \leq 4c$. Além disso, de (5.1.10), observamos que $2c < \beta_3 \Leftrightarrow \beta_3 - \beta_2 > 0$.

De (5.1.11), segue-se que $k_\phi \rightarrow 1$ quando $\beta_3 \rightarrow 3c$ e $k_\phi \rightarrow 0$ quando $\beta_3 \rightarrow 2c$ e daí obtemos que $T_\phi(\beta_3) \rightarrow \infty$ quando $\beta_3 \rightarrow 3c$ e $T_\phi(\beta_3) \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{c}}$ quando $\beta_3 \rightarrow 2c$. Portanto, como a aplicação $\beta_3 \rightarrow T_\phi(\beta_3)$ é uma função estritamente crescente em $(2c, 3c)$, (v. Teorema 5.1), segue-se que $T_\phi > \frac{2\pi}{\sqrt{c}}$.

5.2 Estabilidade para a equação de Korteweg - de Vries

Iniciamos com a seguinte observação a respeito da existência e estabilidade de soluções constantes para a equação KdV.

Observação 5.1. *Diferentemente do caso de ondas solitárias, temos aqui a existência de uma solução constante não trivial para a equação (5.1.1), a saber, a constante $\phi_0 = 2c$, a qual é orbitalmente estável em $H_{per}^1([0, L])$ com relação ao fluxo da KdV desde que $c < \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ (Vide [5]).*

5.2.1 Estabilidade de ondas cnoidais para a KdV

Nesta subseção desenvolveremos uma teoria de estabilidade de ondas cnoidais para a KdV. Iniciamos construindo para um período fixado L , uma curva suave de soluções ondas cnoidais para a equação (5.1.1). Lembramos que na seção 5.1, achamos uma solução ϕ de (5.1.1), definida em (5.1.4), com condições (5.1.5) e período (5.1.6).

5.2.2 Existência de uma curva suave de soluções cnoidais com um período fixo

Sejam então $L > 0$ arbitrário mas fixo e $c > 0$ tais que $\sqrt{c} > \frac{2\pi}{L}$. Da demonstração do Teorema 5.1 abaixo, concluiremos que a aplicação $\beta_3 \in (2c, 3c) \rightarrow T_\phi(\beta_3)$ é estritamente crescente e então por (5.1.7) existe um único $\beta_3 \equiv \beta_3(c) \in (2c, 3c)$ tal que o período fundamental da onda cnoidal $\phi_c(\cdot; \beta_1(c), \beta_2(c), \beta_3(c))$ definida em (5.1.4), será $T_\phi(\beta_3(c)) = L$. Notemos que neste caso, o módulo pode ser escrito como uma função de c , já que por (5.1.3) temos (v. (5.1.11))

$$k^2(c) = \frac{3\beta_3 - 3c - \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}{3\beta_3 - 3c + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}} \quad (5.2.1)$$

com $\beta_3 = \beta_3(c)$. Mostraremos agora que pelo menos localmente esta escolha de $\beta_3(c)$ depende suavemente de c .

Teorema 5.1. *Seja $L > 0$ arbitrário mas fixo. Consideremos $c_0 > \frac{4\pi^2}{L^2}$ e seja $\beta_{3,0} = \beta_3(c_0) \in (2c_0, 3c_0)$ tal que $T_{\phi_{c_0}} = L$. Então,*

- (1) *existe um intervalo $I(c_0)$ em torno de c_0 , um intervalo $J(\beta_{3,0})$ em torno de $\beta_{3,0}(c_0)$, e uma única função suave $\Lambda : I(c_0) \rightarrow J(\beta_{3,0})$ tal que $\Lambda(c_0) = \beta_{3,0}$ e*

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3\beta_3 - 3c + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2}}} K(k) = L, \quad (5.2.2)$$

onde $c \in I(c_0)$, $\beta_3 = \Lambda(c)$, e $k^2 \equiv k^2(c) \in (0, 1)$ é definido em (5.2.1),

- (2) *a solução onda cnoidal em (5.1.4), $\phi_c(\cdot; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, determinada por $\beta_1 \equiv \beta_1(c)$, $\beta_2 \equiv \beta_2(c)$ e $\beta_3 \equiv \beta_3(c)$ possui período fundamental L e satisfaz (5.1.1). Além disso, a aplicação*

$$c \in I(c_0) \rightarrow \phi_c \in H_{per}^1([0, L]) \quad (5.2.3)$$

é uma função de classe C^1 .

(3) $I(c_0)$ pode ser escolhido como $(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty)$.

Demonstração: Utilizaremos o Teorema da Função Implícita. Para isto, consideremos o conjunto aberto $\Omega = \{(\beta, c); c > \frac{4\pi^2}{L^2}, \beta \in (2c, 3c)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e definamos $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Psi(\beta, c) = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3\beta - 3c + \sqrt{9c^2 + 6c\beta - 3\beta^2}}} K(k(\beta, c)) \quad (5.2.4)$$

onde $k(\beta, c)$ é definido como em (5.2.1), com $\beta_3 = \beta$. Por hipótese, $\Psi(\beta_{3,0}, c_0) = L$.

Calculemos agora $\partial_\beta \Psi(\beta, c)$. Denotando $a \equiv a(\beta) = 3\beta - 3c$ e $b \equiv b(\beta) = 9c^2 + 6c\beta - 3\beta^2$, temos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} \left[4\sqrt{6} \frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\beta} \right] - 4\sqrt{6} K \frac{1}{2} [a + \sqrt{b}]^{-\frac{1}{2}} \left[3 + \frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}} (6c - 6\beta) \right]}{a + \sqrt{b}}.$$

Agora, de (5.2.1), temos que

$$\frac{dk^2}{d\beta} = \frac{2a^2 + 6b}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^2}.$$

Como $\frac{dk^2}{d\beta} = 2k \frac{dk}{d\beta}$, segue-se que

$$\frac{dk}{d\beta} = \frac{1}{2k} \frac{2a^2 + 6b}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^2} > 0.$$

Assim, $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} > 0$. De fato

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} &= 4\sqrt{6} \frac{dK}{dk} \frac{1}{2k} \frac{(2a^2 + 6b)}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^{\frac{5}{2}}} - 4\sqrt{6} \frac{1}{2} \frac{(3\sqrt{b} - a)}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^{\frac{3}{2}}} K > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dK}{dk} \frac{1}{k} \frac{(2a^2 + 6b)}{(a + \sqrt{b})} > (3\sqrt{b} - a) K \\ &\Leftrightarrow (2a^2 + 6b)(E - k'^2 K) > (3\sqrt{b} - a)(a + \sqrt{b}) k^2 k'^2 K \\ &\Leftrightarrow (2a^2 + 6b)E > (3\sqrt{b} - a)(a + \sqrt{b}) k^2 k'^2 K + (2a^2 + 6b) k'^2 K \\ &\Leftrightarrow (2a^2 + 6b)E > (2a\sqrt{b} + 3b - a^2) k^2 k'^2 K + (2a^2 + 6b) k'^2 K \\ &\Leftrightarrow (2a^2 + 6b)E > (2a\sqrt{b} + 3b) k^2 k'^2 K + a^2 k'^2 K + a^2 k'^4 K + 6b k'^2 K. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} (2a^2 + 6b)E &= (1 + k'^2) a^2 E + k^2 a^2 E + 6bE \\ &= k^2 (1 + k'^2) a^2 E + k'^2 (1 + k'^2) a^2 E + k^2 a^2 E + 6bE. \end{aligned}$$

Como $a > \sqrt{b}$ e $(1 + k'^2)E > 2k'^2K$, pois $k \rightarrow E(k) + K(k)$ é estritamente crescente, temos que

$$k^2(1 + k'^2)a^2E > 2k^2k'^2a^2K > 2a\sqrt{b}k^2k'^2K.$$

Também, $6bE = 6k^2bE + 6k'^2bE$ e $3k^2bE > 3bk^2k'^2K$, pois $E - k'^2K > 0$. Temos ainda, utilizando novamente que $(1 + k'^2)E > 2k'^2K$, que,

$$3k^2bE + 6k'^2bE = 3bE + 3k'^2bE = 3(1 + k'^2)bE > 6bk'^2K.$$

Finalmente, resta-nos verificar que $k^2a^2E + k'^2(1 + k'^2)a^2E - a^2k'^2K - a^2k'^4K > 0$. Para isto, observemos que $k'^2(1 + k'^2)a^2E > 2k'^4a^2K$ e

$$k^2a^2E + k'^4a^2K - a^2k'^2K = k^2a^2E - k^2k'^2a^2K = k^2a^2(E - k'^2K) > 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função suave, Λ , definida em uma vizinhança $I(c_0)$, de c_0 , tal que $\Psi(\Lambda(c), c) = L$ para todo $c \in I(c_0)$. Então, obtemos (5.2.2).

Como c_0 foi escolhido arbitrariamente no intervalo $\mathcal{I} = (\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty)$, segue-se da unicidade da função Λ , que podemos estender seu domínio de definição a todo o intervalo $\mathcal{I}$. Isto completa a prova. $\square$

Corolário 5.1. *Consideremos a aplicação $\Lambda : I(c_0) \rightarrow J(\beta_{3,0})$ determinada pelo Teorema 5.1. Então, Λ é uma função estritamente crescente em $I(c_0)$.*

Demonstração: Da demonstração do Teorema 5.1, temos que $\Psi(\Lambda(c), c) = L$ para todo $c \in I(c_0)$. Então,

$$\frac{d}{dc}\Lambda(c) = -\frac{\partial\Psi/\partial c}{\partial\Psi/\partial\beta}. \quad (5.2.5)$$

Mostraremos que $\partial\Psi/\partial c < 0$. Para isto, denotando outra vez por $a(c) = 3\beta - 3c$ e $b(c) = 9c^2 + 6c\beta - 3\beta^2$, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial c} &= \frac{4\sqrt{6}\sqrt{a(c) + \sqrt{b(c)}}\frac{dK}{dk}\frac{dk}{dc}}{a(c) + \sqrt{b(c)}} \\ &+ \frac{-4\sqrt{6}K\frac{1}{2}(a(c) + \sqrt{b(c)})^{-\frac{1}{2}}(-3 + \frac{1}{2}b(c)^{-\frac{1}{2}}(18c + 6\beta))}{a(c) + \sqrt{b(c)}} \end{aligned}$$

onde $k(\beta, c)$ é definido por (5.2.1), com $\beta_3 = \beta$. Agora,

$$\frac{dk}{dc} = \frac{1}{2k} \frac{(3c - 3\beta)b(c)^{-\frac{1}{2}}(18c + 6\beta) - 6\sqrt{b(c)}}{[a(c) + \sqrt{b(c)}]^2} < 0$$

e

$$-3 + \frac{1}{2}b(c)^{-\frac{1}{2}}(18c + 6\beta) = \frac{-6\sqrt{b(c)} + 18c + 6\beta}{2\sqrt{b(c)}} > 0$$

pois $-6\sqrt{b(c)} + 18c + 6\beta > 0 \Leftrightarrow 3c + \beta > \sqrt{b(c)} \Leftrightarrow 9c^2 + 6c\beta + \beta^2 > 9c^2 + 6c\beta - 3\beta^2 \Leftrightarrow 4\beta^2 > 0$.

De onde concluímos que $\frac{d\Psi}{dc} < 0$. E isto completa o corolário. $\square$

A seguir, obtemos a propriedade de que o módulo k como uma função de c é estritamente crescente.

Teorema 5.2. Consideremos $c \in (\frac{4\pi^2}{L^2}, \infty)$, $\beta_3 = \Lambda(c)$ e a função módulo

$$k(c) \equiv k(\Lambda(c)) = \sqrt{\frac{3\beta_3(c) - 3c - \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3(c) - 3\beta_3(c)^2}}{3\beta_3(c) - 3c + \sqrt{9c^2 + 6c\beta_3(c) - 3\beta_3(c)^2}}}.$$

Então, $\frac{d}{dc}k(c) > 0$.

Demonstração: Denotando por $a(c) = 3\beta_3(c) - 3c$ e $b(c) = 9c^2 + 6c\beta_3(c) - 3\beta_3(c)^2$, temos que

$$\frac{dk}{dc}(c) = \frac{1}{2k} \left[\frac{2a^2 + 6b}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^2} \right] \beta'_3(c) + \frac{1}{2k} \left[\frac{-ab^{-\frac{1}{2}}(18c + 6\beta_3) - 6\sqrt{b}}{(a + \sqrt{b})^2} \right].$$

Substituindo o valor de $\beta'_3(c) = \frac{d}{dc}\Lambda(c)$ dado em (5.2.5), na expressão anterior, obtemos que $\frac{dk}{dc}(c) > 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2k} \left\{ \frac{2a^2 + 6b}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^2} \right\} \left\{ \frac{\frac{dK}{dk} \left[\frac{1}{2k} \frac{(ab^{-1/2}(18c + 6\beta_3) + 6\sqrt{b})}{(a + \sqrt{b})^{3/2}} \right] + \frac{K(a + \sqrt{b})^{-1/2}(-3 + \frac{1}{2}b^{-1/2}(18c + 6\beta_3))}{2}}{\frac{dK}{dk} \left[\frac{1}{2k} \frac{2a^2 + 6b}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^{3/2}} \right] + \frac{K(a + \sqrt{b})^{-1/2}(-3 + \frac{1}{2}b^{-1/2}(6\beta_3 - 6c))}{2}} \right\} + \frac{1}{2k} \left[\frac{-ab^{-\frac{1}{2}}(18c + 6\beta_3) - 6\sqrt{b}}{(a + \sqrt{b})^2} \right] > 0.$$

Agora, esta última expressão é positiva se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k} \left\{ \frac{2a^2 + 6b}{\sqrt{b}(a + \sqrt{b})^2} \right\} \frac{K}{2} (a + \sqrt{b})^{-1/2} (-3 + \frac{1}{2}b^{-1/2}(18c + 6\beta_3)) \\ & > \frac{1}{2k} \left[\frac{ab^{-\frac{1}{2}}(18c + 6\beta_3) + 6\sqrt{b}}{(a + \sqrt{b})^2} \right] \frac{K}{2} (a + \sqrt{b})^{-1/2} (-3 + \frac{1}{2}b^{-1/2}(6\beta_3 - 6c)) \end{aligned}$$

ou ainda, se e somente se,

$$(2a^2 + 6b)[-3 + \frac{1}{2}b^{-1/2}(18c + 6\beta_3)] > [a(18c + 6\beta_3) + 6b][-3 + \frac{1}{2}b^{-1/2}(6\beta_3 - 6c)]. \quad (5.2.6)$$

Agora, (5.2.6) equivale a demonstrar que

$$-6a^2 + 4 \times 18c\sqrt{b} + 3a(18c + 6\beta_3) > 0,$$

o que é evidentemente verdade já que

$$3a(3c + \beta_3) - a^2 = a(9c + 3\beta_3 - 3\beta_3 + 3c) = 12ac > 0.$$

E isto completa o Teorema. □

Estabeleceremos a seguir o nosso teorema de estabilidade.

Teorema 5.3. *Seja $c \in (\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty)$. Então a onda periódica viajante ϕ_c dada pelo Teorema 5.1 é estável pelo fluxo da equação de Korteweg - de Vries.*

Observamos neste ponto que parte da segunda hipótese segue do Teorema 5.1. A segunda parte da segunda hipótese, a qual diz respeito a convexidade da função $d(c)$, será tratada na subseção seguinte.

Passemos então a convexidade de $d(c)$.

5.2.3 Convexidade de $d(c)$

Observemos inicialmente que como a aplicação $c \in (\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty) \rightarrow \phi_c \in H_{per}^n([0, L]) \forall n$ é de classe C^1 , segue-se que

$$d'(c) = \langle E'(\phi_c) + F'(\phi_c), \frac{d}{dc}\phi_c \rangle_1 + F(\phi_c) = F'(\phi_c) = \frac{1}{2} \int_0^L \phi_c^2(x) dx. \quad (5.2.7)$$

De onde obtemos o seguinte teorema.

Teorema 5.4. *Se $c \in (\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty)$ então $d(c)$ é estritamente convexa.*

Demonstração: De fato, de (5.2.2), temos que $a + \sqrt{b} = \frac{48 \times 2K^2}{L^2}$. Também, de (5.2.1), segue-se que $a - \sqrt{b} = \frac{48 \times 2k^2 K^2}{L^2}$. De onde concluímos que

$$a = \frac{48(1+k^2)K^2}{L^2} \text{ e } \sqrt{b} = \frac{48(1-k^2)K^2}{L^2}. \quad (5.2.8)$$

Mas então,

$$\begin{cases} 3\beta_3 - 3c = \frac{48(1+k^2)K^2}{L^2} \\ 9c^2 + 6c\beta_3 - 3\beta_3^2 = \frac{48^2(1-k^2)^2 K^4}{L^4} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos c e β_3 como função das integrais elípticas completas, a saber,

$$c = \frac{8K^2 \sqrt{3k'^4 + (1+k^2)^2}}{L^2} \text{ e } \beta_3 = \frac{8K^2[2(1+k^2) + \sqrt{3k'^4 + (1+k^2)^2}]}{L^2}. \quad (5.2.9)$$

Agora, de (5.1.1), temos que $\int_0^L \phi_c^2 d\xi = 2c \int_0^L \phi_c d\xi$. De onde obtêm-se juntamente com (5.2.7)

$$d'(c) = c \int_0^L \phi_c dx. \quad (5.2.10)$$

Utilizando que

$$\int_0^L cn^2 \left[\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k \right] d\xi = \frac{L}{K} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2} \right],$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 d\xi \right) &= 2 \int_0^L \phi_c(x) d\xi + 2c \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c d\xi \right) \\ &= 2\beta_2 L + 2(\beta_3 - \beta_2) \frac{L}{K} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2} \right] \\ &\quad + 2cL \frac{d}{dk} \left\{ \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \frac{1}{K} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2} \right] \right\} \frac{dk}{dc}. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

(5.1.8) juntamente com (5.1.10), (5.2.8) e (5.2.9) nos dá

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{16K^2 \sqrt{3k'^4 + (1+k^2)^2}}{L^2} - \frac{16K^2[(1+k^2)]}{L^2} + \frac{48(1-k^2)K^2}{L^2} \right] \\ &= \frac{8K^2}{L^2} \left[\sqrt{3k'^4 + (1+k^2)^2} - (1+k^2) + 3(1-k^2) \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \beta_2(k) &= \frac{16K}{L^2} \frac{dK}{dk} [\sqrt{3k'^4 + (1+k^2)^2} - (1+k^2) + 3k'^2] \\ &\quad + \frac{8K^2}{L^2} \left\{ \frac{1}{2} [3k'^4 + (1+k^2)^2]^{-\frac{1}{2}} [-8k + 16k^3] - 8k \right\}. \end{aligned}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} (\beta_3 - \beta_2) \frac{1}{K} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2} \right] &= \frac{48k^2 K^2}{L^2} \frac{1}{K} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2} \right] \\ &= \frac{48K}{L^2} [E(k) - k'^2 K(k)], \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{d}{dk} \left\{ (\beta_3 - \beta_2) \frac{1}{K} \left[\frac{E(k) - k'^2 K(k)}{k^2} \right] \right\} = \frac{48}{L^2} k K(k)^2 > 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 d\xi \right) &= \frac{16K^2}{L} \left[\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2} - (1 + k^2) + 3k'^2 \right] + \frac{96K}{L} [E(k) - k'^2 K(k)] \\ &+ 2c \left\{ \frac{16K}{L} \frac{dK}{dk} [\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2} - (1 + k^2) + 3k'^2] \right. \\ &+ \left. \frac{8K^2}{L} \left[\frac{(-4k + 8k^3)}{\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2}} - 8k \right] + \frac{48}{L} k K^2 \right\} \frac{dk}{dc}. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} f(k) : &= \frac{16K}{L} \frac{dK}{dk} [\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2} - (1 + k^2) + 3k'^2] + \frac{8K^2}{L} \frac{(-4k + 8k^3)}{\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2}} - \frac{16}{L} k K^2 \\ &= \frac{16K}{L} \left\{ \frac{dK}{dk} [\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2} - (1 + k^2) + 3k'^2] + K \frac{(-2k + 4k^3)}{\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2}} - kK \right\}. \end{aligned}$$

Como $E^2 > k'^2 K^2$, então $E > k' K$ e daí $\frac{E - k'^2 K}{kk'^2} > \frac{k'(1 - k')K}{kk'^2} = \frac{(1 - k')K}{kk'}$. Agora, $f(k)$ é positiva se, e somente se,

$$(1 - k')[\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2} - (1 + k^2) + 3k'^2] > kk' \left[\frac{(2k - 4k^3)}{\sqrt{3k'^4 + (1 + k^2)^2}} + k \right],$$

pois denotando por $D := 3k'^4 + (1 + k^2)^2 = 4k'^4 + 4 - 4k'^2$ e utilizando que $k = \sqrt{1 - k'^2}$, vemos que o polinômio em k' ,

$$p(k') = (1 - k')[\sqrt{D} - (1 + k^2) + 3k'^2]\sqrt{D} - kk'(2k - 4k^3) - k^2 k' \sqrt{D} > 0. \quad (5.2.13)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} p(k') &= (1 - k') \{ [\sqrt{D} - 2 + 4k'^2] \sqrt{D} - 2k'(1 + k') + 4k(1 - k')(1 + k')^2 - (1 + k')k' \sqrt{D} \} \\ &= (1 - k')(k' - 1) \{ 4k'^3 + 4k'^2 - 2k' - 4 - 4k(1 + k')^2 + (3k' + 2)\sqrt{D} \} \\ &= -(1 - k')^2 \{ -4k'^2 - 6k' - 4 + (3k' + 2)\sqrt{D} \} \end{aligned}$$

com $-4k'^2 - 6k' - 4 + (3k' + 2)\sqrt{D} < 0$, pois $-4k'^2 - 6k' - 4 + (3k' + 2)\sqrt{D} < 0 \Leftrightarrow (3k' + 2)\sqrt{D} < 4k'^2 + 6k' + 4 \Leftrightarrow (9k'^2 + 12k' + 4)(4k'^4 + 4 - 4k'^2) < (4k'^2 + 6k' + 4)^2 \Leftrightarrow 36k'^4(k'^2 - 1) + 48k'^3(k'^2 - 1) - 48k'^2 < 0$. O que implica que $p(k') > 0 \forall k' \in (0, 1)$.

E com isto, demonstramos que $\frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c dx \right) > 0$. E então concluímos a partir de (5.2.10) que

$$d''(c) = c \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c dx \right) + \int_0^L \phi_c dx > 0.$$

□

A demonstração do Teorema 5.3 segue diretamente da Teoria de Grillakis, Shatah & Strauss em [21].

5.3 Estabilidade para a equação de Boussinesq

Verificaremos as condições suficientes para a obtenção de estabilidade dadas pelas hipóteses **1,2** e **3** no início do Capítulo 3. De fato, observemos que o Teorema 2.7 verifica a hipótese **1**. Além disso, a análise espectral necessária à verificação da hipótese **3** é exatamente aquela desenvolvida na seção 3.4.2 do Capítulo 3. Passemos então a verificação da hipótese **2**.

Observemos inicialmente que como uma consequência imediata do Teorema 5.1, temos o seguinte teorema a respeito da existência de uma curva suave de soluções.

Teorema 5.5. *Seja $L > 2\pi$. Então existe uma curva suave de soluções ondas viajantes periódicas para o sistema (3.0.1) em $H_{per}^n([0, L]) \times H_{per}^m([0, L])$, $n, m \geq 0$, dada para $w(c) = 1 - c^2$, por*

$$c \in \left(-\sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{L^2}}, \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{L^2}} \right) \rightarrow (\phi_{w(c)}, \psi_{w(c)}), \quad (5.3.1)$$

e que satisfaz o sistema (3.2.2), com constantes de integração $K_1 = K_2 = 0$. Além disso,

$$\phi_{w(c)}(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)cn^2 \left[\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi; k \right] \quad (5.3.2)$$

onde a função suave $\beta_3 \equiv \beta_3(w(c))$ é dada pelo Teorema 5.1, $k = k(w(c))$ por (5.2.1), $\beta_2 = \frac{3w - \beta_3 + \sqrt{9w^2 + 6w\beta_3 - 3\beta_3^2}}{2}$ e $\beta_1 = 3w - \beta_2 - \beta_3$.

Agora, quanto a convexidade de $d(c) = H + cI$, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.6. (Convexidade de $d(c)$). *Seja $L > 2\pi$ e $c \in (-1, 1)$. Então $d''(c) > 0$ se $c^2 > \frac{1}{3}$ e $1 - c^2 > \frac{4\pi^2}{L^2}$.*

Demonstração: De fato, sabemos que

$$\begin{aligned}
 d''(c) &= - \int_0^L \phi_w^2 dx + 2c^2 \frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w^2 dx \right) \\
 &= 2 \left[-w \int_0^L \phi_w dx + 2c^2 \frac{d}{dw} \left(w \int_0^L \phi_w dx \right) \right] \\
 &= 2 \left[-w \int_0^L \phi_w dx + 2c^2 \left(\int_0^L \phi_w dx + w \frac{d}{dw} \int_0^L \phi_w dx \right) \right] \\
 &= 2 \left[(3c^2 - 1) \int_0^L \phi_w dx + 2c^2 w \frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w dx \right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Como $\frac{d}{dw} \left(\int_0^L \phi_w dx \right) > 0$, vemos que $d''(c) > 0$ desde que $c^2 > \frac{1}{3}$.

□

De onde concluímos o seguinte teorema de estabilidade.

Teorema 5.7. *Sejam $c \in (-1, 1)$ e $L > 2\pi$. Então a onda periódica viajante $\vec{\phi}_{w(c)}$, dada pelo Teorema 5.5, é orbitalmente estável em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ pelo fluxo da equação de Boussinesq, desde que $c^2 > \frac{1}{3}$ e $1 - c^2 > \frac{4\pi^2}{L^2}$.*

A prova do Teorema 5.7 segue-se exatamente como em [21], pois neste caso não temos o termo problemático A_ϕ .

Observação 5.2. *É importante notar que o resultado que obtivemos acima (Teorema 5.7) não é ótimo, uma vez que desprezamos a segunda parcela em (5.3.3) para a obtenção da convexidade de $d(c)$. No entanto, é de nosso interesse em trabalho futuro obtermos um refinamento.*

Considerações Finais

Alguns problemas que ficaram sem resposta nesta tese e que representam naturais direções de pesquisa são os seguintes:

- A possibilidade de obter um resultado de instabilidade linearizada, para soluções ondas viajantes periódicas da equação de Boussinesq, seguindo a técnica desenvolvida pelo professor Orlando Lopes em [34].
- Melhorar os resultados de estabilidade não linear para as equações de Boussinesq clássica e modificada obtidos nesta tese de doutorado.
- Obter um resultado de instabilidade não linear para a equação de Boussinesq a partir de [34] e de um resultado auxiliar que pode ser obtido utilizando-se a técnica de J. Bougain [14], para a boa postura em um espaço conveniente desta mesma equação, ou de outro modo, seguindo a técnica utilizada por Y. Liu em [33].
- Obter um resultado de estabilidade ou instabilidade não linear de ondas viajantes periódicas para a equação de Boussinesq generalizada, $p \geq 4$.

CAPÍTULO 6

Apêndice

6.1 Integrais elípticas Jacobianas

Nesta seção, estabeleceremos algumas propriedades das integrais elípticas Jacobianas retiradas do livro de Byrd & Friedman (*vide* [11]).

Inicialmente, definiremos as *integrais normais elípticas do primeiro tipo*:

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \equiv F(\varphi, k),$$

onde $y = \sin \varphi$, e as *integrais normais elípticas do segundo tipo*,

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \equiv E(\varphi, k).$$

Estas integrais possuem as seguintes propriedades: A primeira é finita para todo valor real (ou complexo) de y , incluindo o infinito; a segunda possui um pólo simples de ordem 1 para $y = \infty$. O número k é chamado de *módulo*. Este número pode assumir qualquer valor real ou imaginário. Neste trabalho, $0 < k < 1$. O número k' é chamado de *módulo complementar* e está relacionado com k através da relação $k' = \sqrt{1-k^2}$. φ é o *argumento* da integral normal elíptica.

Quando $y = 1$, as integrais acima são ditas *completas*. Neste caso, escrevemos:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = F(\pi/2, k) \equiv K(k) \equiv K, \quad (6.1.1)$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = E(\pi/2, k) \equiv E(k) \equiv E. \quad (6.1.2)$$

Então, alguns valores especiais de K e E são: $K(0) = E(0) = \pi/2$, $E(1) = 1$ e $K(1) = +\infty$. Para $k \in (0, 1)$, $K'(k) > 0$, $K''(k) > 0$, $E'(k) < 0$, $E''(k) < 0$ e $E(k) < K(k)$.

Uma propriedade importante das integrais completas elípticas K e E é que elas satisfazem, respectivamente, os seguintes casos especiais de *equações diferenciais hipergeométricas*

$$\begin{cases} k k'^2 \frac{d^2 K}{dk^2} + (1 - 3k^2) \frac{dK}{dk} - kK = 0, \\ k k'^2 \frac{d^2 E}{dk^2} + k'^2 \frac{dE}{dk} + kE = 0. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

De fato, considerando a expansão binomial do integrando $(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}$, a saber,

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} k^{2n} \sin^{2n} \theta$$

onde $(a)_n$ denota the “shifted factorial” definido por $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ for $n > 0$, $(a)_0 = 1$ (note que como $|k| < 1$ esta série converge absolutamente) e usando a fórmula integral $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = (\frac{1}{2})_n \frac{\pi}{2} / (1)_n$, obtemos que

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{2})_n}{(1)_n} \frac{k^{2n}}{n!} = \frac{\pi}{2} F(1/2, 1/2; 1; k^2). \quad (6.1.4)$$

Portanto, como a função hipergeométrica $F(1/2, 1/2; 1; x)$ satisfaz a equação diferencial hipergeométrica de Euler

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} y = 0,$$

obtemos imediatamente que $K(k)$ satisfaz a primeira equação em (6.1.3). Analogamente, obtemos a seguinte relação associada a E ,

$$E(k) = \frac{\pi}{2} F(-1/2, 1/2; 1; k^2),$$

e então, conseguimos a segunda equação em (6.1.3).

Agora, apresentamos algumas derivadas das integrais completas elípticas K e E , as quais serão utilizadas neste trabalho:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dk} = \frac{E-k'^2 K}{k k'^2}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k} \\ \frac{d^2 E}{dk^2} = -\frac{1}{k} \frac{dK}{dk} = -\frac{E-k'^2 K}{k^2 k'^2} \end{cases} \quad (6.1.5)$$

Definiremos agora as *funções elípticas Jacobianas*. Inicialmente, consideremos a integral elíptica

$$u(y_1; k) \equiv u = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = F(\varphi, k) \quad (6.1.6)$$

a qual é uma função estritamente crescente na variável y_1 (real). Portanto podemos definir sua função inversa por $y_1 = \sin \varphi \equiv sn(u; k)$, ou mais simplesmente por $y_1 = snu$ quando não houver necessidade de enfatizar o módulo. A função snu é uma função ímpar. Outras duas funções básicas são as seguintes, definidas por

$$\begin{aligned} cn(u; k) &= \sqrt{1 - y_1^2} = \sqrt{1 - sn^2(u; k)} && \text{(função cnoidal)} \\ dn(u; k) &= \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u; k)} && \text{(função dnoidal),} \end{aligned}$$

as quais requerem que $sn(0, k) = 0$, $cn(0, k) = 1$ e $dn(0, k) = 1$. As funções cnu e dnu são funções pares. As funções snu , cnu , e dnu são chamadas *funções elípticas Jacobianas* e são funções reais de argumento u . Estas funções possuem como período real, $4K$, $4K$ and $2K$, respectivamente. As propriedades mais importantes das funções Jacobianas elípticas, as quais foram utilizadas nesta tese, são dadas pelas fórmulas abaixo.

1- Relações Fundamentais

$$\begin{cases} sn^2 u + cn^2 u = 1, \\ k^2 sn^2 u + dn^2 u = 1 \\ k'^2 sn^2 u + cn^2 u = dn^2 u \\ -1 \leq sn u \leq 1, \quad -1 \leq cnu \leq 1, \quad k'^2 \leq dn u \leq 1. \end{cases} \quad (6.1.7)$$

2- Valores Especiais

$$\begin{cases} sn(-u) = -sn u, \quad cn(-u) = cn u, \quad dn(-u) = dn u, \quad sn 0 = 0, \quad cn 0 = 1, \\ sn K = 1, \quad cn K = 0. \\ sn(u + 4K) = sn u, \quad cn(u + 4K) = cn u, \quad dn(u + 2K) = dn u \\ sn(u + 2K) = -sn u, \quad cn(u + 2K) = -cn u. \end{cases} \quad (6.1.8)$$

Finalmente, temos

$$\begin{cases} sn(u, 0) = \sin u, \quad cn(u, 0) = \cos u, \\ sn(u, 1) = \tanh u, \quad cn(u, 1) = \operatorname{sech} u. \end{cases}$$

3- Diferenciação das Funções Jacobianas Elípticas

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} sn(u) = cn \, u \, dn \, u, & \frac{\partial}{\partial u} cn(u) = -sn \, u \, dn \, u, \\ \frac{\partial}{\partial u} dn(u) = -k^2 sn \, u \, cn \, u. \end{cases} \quad (6.1.9)$$

6.2 Teoria de Floquet para $\mathcal{L}_{cn}$ e $\mathcal{L}_{dn}$

Nesta seção, estudaremos as propriedades espectrais associadas aos operadores lineares

$$\mathcal{L}_{cn} = -\frac{d^2}{dx^2} + w - \phi_w,$$

onde ϕ_w é a solução onda cnoidal (3.4.4) para a equação (3.4.25) com período fundamental L e $w > 0$ (*vide* Teorema 2.4 em [5]) e

$$\mathcal{L}_{dn} = -\frac{d^2}{dx^2} + w - 3\phi_w^2,$$

onde ϕ_w é a solução onda dnoidal (4.2.7) para a equação (4.2.3) com período fundamental L e $w \in (\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty)$ (*vide* Teorema 2.1 em [6]). Esta análise tem por base os problemas periódicos de autovalores considerados em $[0, L]$,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{cn}\chi = \beta\chi \\ \chi(0) = \chi(L) \\ \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases} \quad (6.2.1)$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{dn}\chi = \beta\chi \\ \chi(0) = \chi(L) \\ \chi'(0) = \chi'(L). \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Mostraremos, utilizando a teoria de Floquet (*vide* [18, 24, 35]), que os problemas (6.2.1) e (6.2.2) determinam respectivamente para $\mathcal{L}_{cn}$ e $\mathcal{L}_{dn}$ a existência de um autovalor negativo simples, o qual denotaremos por simplicidade para ambos com a mesma notação, digamos β_0 e que $\beta_1 = 0$ é um autovalor simples com autofunção associada ϕ'_w . Também estamos utilizando a mesma notação, ϕ'_w , para a autofunção associada ao zero dos operadores $\mathcal{L}_{cn}$ e $\mathcal{L}_{dn}$.

Da teoria clássica de operadores simétricos, temos que os problemas (6.2.1) e (6.2.2) determinam que os espectros de $\mathcal{L}_{cn}$ e $\mathcal{L}_{dn}$ são conjuntos enumeráveis infinitos constituídos de autovalores, respectivamente, $\{\beta_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ e $\{\beta'_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$, com

$$\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4 \leq \dots \quad (6.2.3)$$

e

$$\beta'_0 \leq \beta'_1 \leq \beta'_2 \leq \beta'_3 \leq \beta'_4 \leq \dots \quad (6.2.4)$$

onde os autovalores duplos são contados duas vezes e $\beta_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\beta'_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Por conveniência, denotaremos as sequências de autovalores $\{\beta_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ e $\{\beta'_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ associadas aos operadores $\mathcal{L}_{cn}$ e $\mathcal{L}_{dn}$, simplesmente por $\{\beta_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$, deixando claro no entanto que tais sequências são diferentes pois estão associadas a problemas diferentes. Denotaremos por χ_n a autofunção associada ao autovalor β_n . Das condições $\chi(0) = \chi(L)$, $\chi'(0) = \chi'(L)$, χ_n pode ser estendida a $(-\infty, \infty)$ como uma função continuamente diferenciável com período L . Além disso, os autovalores duplos (se existe algum) são os valores de β para os quais as soluções de (6.2.1) tem período L , e portanto, cujo autoespaço associado é gerado por duas soluções periódicas de período L linearmente independentes. Neste caso, dizemos haver *coexistência* de soluções para o problema (6.2.1) com o valor β .

Da teoria de Floquet, a análise de (6.2.1) e de (6.2.2) está relacionada com a análise dos seguintes problemas semi-periódicos de autovalores em $[0, L]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{cn}\xi = \mu\xi \\ \xi(0) = -\xi(L) \\ \xi'(0) = -\xi'(L), \end{cases} \quad (6.2.5)$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{dn}\xi = \mu\xi \\ \xi(0) = -\xi(L) \\ \xi'(0) = -\xi'(L), \end{cases} \quad (6.2.6)$$

os quais são também problemas auto-adjuntos e que determinam a existência de uma sequência de autovalores $\{\mu_n | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$, com

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4 \leq \dots \quad (6.2.7)$$

onde os autovalores duplos são contados duas vezes e $\mu_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Denotaremos por ξ_n as autofunções associadas ao autovalor μ_n . Uma função $f(x)$ tal que $f(x+L) = -f(x) \forall x$ é dita *semi-periódica* com semi-período L . Evidentemente, uma função como esta tem período $2L$. Então, temos que as equações

$$\mathcal{L}_{cn}f = \gamma f \text{ e } \mathcal{L}_{dn}f = \gamma f \quad (6.2.8)$$

possuem uma solução de período L se, e somente se $\gamma = \beta_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, bem como possuem uma solução de período $2L$ se, e somente se, $\gamma = \mu_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Se todas as soluções de (6.2.8) são limitadas dizemos que elas são *estáveis*; caso contrário, dizemos que são *instáveis*.

Agora, do Teorema de Oscilação associado às equações diferenciais (6.2.8) (*vide* [35]) as sequências em (6.2.3) e (6.2.7) estão interlaçadas, a saber,

$$\beta_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \beta_1 \leq \beta_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \beta_3 \leq \beta_4 \cdots, \quad (6.2.9)$$

e então temos os intervalos $(-\infty, \beta_0]$, (β_0, μ_0) , $[\mu_0, \mu_1]$, (μ_1, β_1) , $[\beta_1, \beta_2]$, Têm-se que as soluções de (6.2.8) são estáveis nos intervalos

$$(\beta_0, \mu_0), (\mu_1, \beta_1), (\beta_2, \mu_2), (\mu_3, \beta_3), \dots,$$

os quais são chamados de *intervalos de estabilidade*. Nos extremos destes intervalos as soluções de (6.2.8) são, em geral instáveis. Isto é sempre verdade para $\gamma = \beta_0$ (β_0 é sempre simples). As soluções de (6.2.8) são estáveis para $\gamma = \beta_{2n+1}$ ou $\gamma = \beta_{2n+2}$ se, e somente se, $\beta_{2n+1} = \beta_{2n+2}$ (autovalores duplos), e são estáveis para $\gamma = \mu_{2n}$ ou $\gamma = \mu_{2n+1}$ se, e somente se, $\mu_{2n} = \mu_{2n+1}$. Então, um extremo de um intervalo como este pode pertencer a ele se, e somente se, (6.2.8) tem soluções estáveis para o valor correspondente de γ . O resto dos intervalos, $(-\infty, \beta_0)$, (μ_0, μ_1) , (β_1, β_2) , (μ_2, μ_3) , ..., são chamados *intervalos de instabilidade*. O intervalo de instabilidade $(-\infty, \beta_0)$ sempre está presente. Ele antecede o intervalo (μ_0, μ_1) , o qual chamamos de primeiro intervalo de instabilidade. O intervalo de estabilidade jamais desaparece, mas dois deles podem eventualmente transformar-se em um único se $\beta_{2n+1} = \beta_{2n+2}$ ou $\mu_{2n} = \mu_{2n+1}$. No entanto, os intervalos de instabilidade (exceto o intervalo $(-\infty, \beta_0)$) podem desaparecer totalmente. Observamos que a ausência de um intervalo de instabilidade significa a existência de um valor de γ para o qual todas as soluções de (6.2.8) têm ou período L ou semi-período L - ou seja, há coexistência de soluções de (6.2.8) com período L ou período $2L$ para o valor γ .

Observamos finalmente que o número de zeros de χ_n e ξ_n , as respectivas autofunções associadas aos autovalores β_n e μ_n , ocorrem da seguinte forma:

- (i) χ_0 não tem zeros em $[0, L]$.
- (ii) χ_{2n+1} e χ_{2n+2} tem exatamente $2n+2$ zeros em $[0, L]$.
- (iii) ξ_{2n} e ξ_{2n+1} tem exatamente $2n+1$ zeros em $[0, L]$.

Temos então os seguintes Teoremas.

Teorema 6.1. *Seja ϕ_w a onda cnoidal dada pelo Teorema 2.4 (*vide* [5]) e $w \in (0, \infty)$. Então, o operador linear $\mathcal{L}_{cn} = -\frac{d^2}{dx^2} + w - \phi_w$ definido em $H_{per}^2([0, L])$ tem um único autovalor negativo, o qual é simples, o zero é um autovalor simples com autofunção associada ϕ'_w e o resto do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores duplos.*

Demonstração: De (6.2.9) e (6.2.10), segue-se que $0 = \beta_1 < \beta_2$. De fato, como $\mathcal{L}_{cn}\phi'_w = 0$ e ϕ'_w tem 2 zeros em $[0, L)$ então de (6.2.10) temos que o autovalor 0 é igual a β_1 ou a β_2 . Afirmamos que $0 = \beta_1$. Com efeito, usando a transformação $T_\eta\chi(x) \equiv \chi(\eta x)$ para $\eta^2 = 12/(\alpha_3 - \alpha_1)$ e a forma explícita (3.2.5) para ϕ_w (substituindo os β_i 's pelos α_i 's, onde $\beta_i = c\alpha_i$ e $\sum_i \beta_i = 3c$) temos para $\Lambda \equiv T_\eta\chi$ que o problema (6.2.1) é equivalente ao problema de autovalores

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\Lambda + [\rho - 12k^2sn^2(x)]\Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K), \quad \Lambda'(0) = \Lambda'(2K), \end{cases} \quad (6.2.11)$$

onde a relação entre ρ e β é dada por

$$\rho = -12[w - \alpha_3 - \beta]/(\alpha_3 - \alpha_1). \quad (6.2.12)$$

A equação diferencial de segunda ordem em (6.2.11) é chamada a *forma Jacobiana da equação de Lamé*. Agora, da teoria de Floquet (*vide* Magnus&Winkler em [35], Teorema 7.8) segue-se que a equação de Lamé (6.2.11) tem exatamente 4 intervalos de instabilidade, a saber, $(-\infty, \rho_0)$, (μ'_0, μ'_1) , (ρ_1, ρ_2) , (μ'_2, μ'_3) (onde μ'_i , $i \geq 0$, são os autovalores associados ao problema semi-periódico determinado pela equação de Lamé). De onde concluímos que os três primeiros autovalores ρ_0, ρ_1, ρ_2 , associados a (6.2.11) são simples. Portanto, como $\rho_1 = 4 + 4k^2$ é um autovalor para (6.2.11) com autofunção $\Lambda_1(x) = \text{cn}(x)\text{sn}(x)\text{dn}(x) = \text{cons.}T_\eta\phi'$ segue-se de (6.2.12) que $\beta = 0$ é um autovalor simples para (6.2.1) com autofunção associada ϕ' . Agora, de [24], temos que as funções (polinômios de Lamé)

$$\begin{aligned} \Lambda_0(x) &= \text{dn}(x)[1 - (1 + 2k^2 - \sqrt{1 - k^2 + 4k^4})\text{sn}^2(x)] \\ \Lambda_2(x) &= \text{dn}(x)[1 - (1 + 2k^2 + \sqrt{1 - k^2 + 4k^4})\text{sn}^2(x)] \end{aligned}$$

com período $2K$, são as autofunções associadas aos outros dois autovalores, os quais satisfazem a equação

$$\rho = k^2 + \frac{5k^2}{1 + \frac{9}{4}k^2 - \frac{1}{4}\rho}. \quad (6.2.13)$$

Notemos que Λ_0 não possui zeros em $[0, 2K]$ e Λ_2 possui exatamente 2 zeros em $[0, 2K)$. Como (6.2.13) possui duas raízes diferentes $\rho_0 = 2 + 5k^2 - 2\sqrt{1 - k^2 + 4k^4}$ e $\rho_2 = 2 + 5k^2 + 2\sqrt{1 - k^2 + 4k^4}$, segue-se que Λ_0 é uma autofunção associada a ρ_0 , o qual será o primeiro autovalor de (6.2.11). Como $\rho_0 < \rho_1$ para todo $k^2 \in (0, 1)$, obtemos de (6.2.12) e da relação $-\alpha_1(1 + k^2) = (2 - k^2)\alpha_3 - 3c$, que

$$12\beta_0 = 3\frac{\alpha_3 - c}{k^2 + 1}\rho_0 + 12(c - \alpha_3) < 0$$

e então β_0 é o primeiro autovalor negativo para $\mathcal{L}_{cn}$ com autofunção $\chi_0(x) = \Lambda_0(\frac{1}{\eta}x)$. Agora, como $\rho_1 < \rho_2$ para todo $k \in (0, 1)$, obtemos de (6.2.12) que

$$12\beta_2 = 3\frac{\alpha_3 - c}{k^2 + 1}\rho_2 + 12(c - \alpha_3) > 0$$

e então β_2 é o terceiro autovalor para $\mathcal{L}_{cn}$ com autofunção associada $\chi_3(x) = \Lambda_2(\frac{1}{\eta}x)$.

Para finalizar, veremos que $\mu'_0 = 5 + 2k^2 - 2\sqrt{4 - k^2 + k^4}$ e $\mu'_1 = 5 + 5k^2 - 2\sqrt{4 - 7k^2 + 4k^4}$ são os dois primeiros autovalores para a equação de Lamé no caso semi-periódico, com autofunções associadas $\xi_{0,sm}(x) = cn(x)[1 - (2 + k^2 - \sqrt{4 - k^2 + k^4})sn^2(x)]$ e $\xi_{1,sm}(x) = 3sn(x) - (2 + 2k^2 - \sqrt{4 - 7k^2 + 4k^4})sn^3(x)$, respectivamente. Como $\mu'_0 < \mu'_1 < 4k^2 + 4$, segue-se da relação

$$\mu'_i = -12[c - \alpha_3 - \mu_i]/(\alpha_3 - \alpha_1) \quad (6.2.14)$$

que os três primeiros intervalos de instabilidade associados a $\mathcal{L}_{cn}$ são $(-\infty, \lambda_0)$, (μ_0, μ_1) , (λ_1, λ_2) . Finalmente, como as funções $\xi_{2,sm}(x) = cn(x)[1 - (2 + k^2 + \sqrt{4 - k^2 + k^4})sn^2(x)]$ e $\xi_{3,sm}(x) = 3sn(x) - (2 + 2k^2 + \sqrt{4 - 7k^2 + 4k^4})sn^3(x)$ possuem três zeros em $[0, 2K]$ e são autofunções da equação de Lamé com autovalores $\mu'_2 = 5 + 2k^2 + 2\sqrt{4 - k^2 + k^4}$ e $\mu'_3 = 5 + 5k^2 + 2\sqrt{4 - 7k^2 + 4k^4}$, segue-se de (6.2.14) que o último intervalo de instabilidade de $\mathcal{L}_{cn}$ é (μ_2, μ_3) . Isto encerra a prova do Teorema. □

Teorema 6.2. *Seja ϕ_w a onda dnoidal dada pelo Teorema 2.1 (vide [6]) e $w \in (\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty)$. Então, o operador linear $\mathcal{L}_{dn} = -\frac{d^2}{dx^2} + w - 3\phi_w^2$ definido em $H_{per}^2([0, L])$ tem seus três primeiros autovalores simples, sendo o zero o segundo deles com autofunção associada ϕ'_w . Além disso, o resto de seu espectro é constituído de um conjunto discreto de autovalores duplos.*

Demonstração: De (6.2.9) e (6.2.10), segue-se que $0 = \beta_1 < \beta_2$. Com efeito, como $\mathcal{L}_{dn}\phi'_w = 0$ e ϕ'_w tem dois zeros em $[0, L]$ então (6.2.10) implica que o autovalor zero é igual a β_1 ou β_2 . Além disso, usando a transformação $T_\gamma\chi(x) = \chi(\gamma x)$ com $\gamma^2 = \frac{2}{\eta_1^2}$, a forma explícita (4.2.7) para ϕ_w e a relação $k^2 sn^2 x + dn^2 x = 1$, temos para $\Phi \equiv T_\gamma\chi$ que o problema (6.2.2) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\Phi + [\rho - 6k^2 sn^2(x)]\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2K), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2K), \end{cases} \quad (6.2.15)$$

onde a relação entre ρ e β é dada por

$$\rho = \frac{2}{\eta_1^2}[\beta + 3\eta_1^2 - w]. \quad (6.2.16)$$

Agora, da teoria de Floquet (*vide* [35], Teorema 7.8) segue-se que a equação de Lamé tem exatamente 3 intervalos de instabilidade, a saber, $(-\infty, \rho_0)$, (μ'_0, μ'_1) , (ρ_1, ρ_2) , (onde para $i \geq 0$, ρ_i são os autovalores associados ao problema periódico e μ'_i são os autovalores associados ao problema semiperiódico determinado pela equação de Lamé em (6.2.15)). Portanto, segue-se que os três primeiros autovalores ρ_0 , ρ_1 e ρ_2 são simples e que o resto dos autovalores $\rho_3 \leq \rho_4 < \rho_5 \leq \rho_6 \dots$, satisfaz $\rho_3 = \rho_4$, $\rho_5 = \rho_6$, ..., ou seja, eles são autovalores duplos.

Estabeleceremos agora fórmulas explícitas para os três primeiros autovalores ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 e suas autofunções correspondentes Φ_0 , Φ_1 e Φ_2 . Para isto, observemos inicialmente que $\rho_1 = 4 + k^2$ satisfaz $\mathcal{L}_{dn}\Phi_1 = \rho_1\Phi_1$ com $\Phi_1(x) = \text{sn}(x)\text{cn}(x) = \text{const.}T_\gamma\phi'$. Além disso, temos de (6.2.16), que $\beta = 0$ é um autovalor simples para (6.2.2) com autofunção associada ϕ' . Agora, de [24], temos que as funções

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) &= 1 - (1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4})\text{sn}^2(x) \\ \Phi_2(x) &= 1 - (1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})\text{sn}^2(x),\end{aligned}$$

com período $2K$ satisfazem que $\mathcal{L}_{dn}\Phi_0 = \rho_0\Phi_0$ e $\mathcal{L}_{dn}\Phi_1 = \rho_2\Phi_1$, com

$$\rho_0 = 2[1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}] \text{ e } \rho_2 = 2[1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}].$$

Notemos que Φ_0 não possui zeros em $[0, 2K]$ e Φ_2 tem exatamente 2 zeros em $[0, 2K)$. Então ρ_0 é o primeiro autovalor de (6.2.15). Como $\rho_0 < \rho_1$ para todo $k^2 \in (0, 1)$, obtemos de (6.2.16) que

$$2\beta_0 = -2w - 2\eta_1^2\sqrt{1 - k^2 + k^4} < 0 \Leftrightarrow \rho_0 < \rho_1.$$

Além disso, β_0 dado por

$$\beta_0 = -w - \frac{2w}{2 - k^2}\sqrt{1 - k^2 + k^4}$$

será o primeiro autovalor negativo para $\mathcal{L}_{dn}$ com autofunção associada $\chi_0 = \Phi_0(\frac{1}{\gamma}x)$. Agora, como $\rho_1 < \rho_2$ para todo $k^2 \in (0, 1)$, obtemos de (6.2.16) que

$$2\beta_2 = -2w + 2\eta_1^2\sqrt{1 - k^2 + k^4} > 0 \Leftrightarrow \rho_1 < \rho_2,$$

e então β_2 é o terceiro autovalor para $\mathcal{L}_{dn}$ com autofunção $\chi_2(x) = \Phi_2(\frac{1}{\gamma}x)$.

Para finalizar a prova, estabeleceremos os dois primeiros autovalores associados ao problema semiperiódico (6.2.6), μ_0 , μ_1 , os quais foram utilizados em nossa teoria de estabilidade. Então, usando a equação de Lamé em (6.2.15) com as condições $\Phi(0) = -\Phi(2K)$ e $\Phi'(0) = -\Phi'(2K)$,

encontramos que os autovalores μ'_i associados ao problema semiperiódico estão relacionados com os μ_i através da relação

$$\mu'_i = \frac{2}{\eta_1^2} [\mu_i + 3\eta_1^2 - w].$$

Agora, vemos que $\mu'_0 = 1 + k^2$ e $\mu'_1 = 1 + 4k^2$ são os dois primeiros autovalores para a equação de Lamé em (6.2.15) no caso semi-periódico. Além disso, as autofunções associadas são

$$\Phi_{0,sm}(x) = \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x) \text{ e } \Phi_{1,sm}(x) = \operatorname{sn}(x)\operatorname{dn}(x),$$

respectivamente. Portanto, $\xi_0(x) = \Phi_{0,sm}(\frac{1}{\gamma}x)$ e $\xi_1(x) = \Phi_{1,sm}(\frac{1}{\gamma}x)$ são as duas primeiras autofunções de (6.2.6) associadas aos autovalores $\mu_0 = -3w/(2-k^2)$ e $\mu_1 = 3w(k^2-1)/(2-k^2)$.

□

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] N.I. Akhiezer, *Elements of the theory of Elliptic Functions*, Volume 79, Tranlations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society (1990).
- [2] B. Alvarez and J. Angulo, *Existence and stability of periodic travelling waves solutions of the Benjamin equation*, Communications on Pure and Applied Analysis, **4**, Number 2 (2005), 367- 388.
- [3] J. Angulo, *Existence and Stability of Solitary Wave Solutions to Nonlinear Dispersive Evolution Equations*, 24 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (2003).
- [4] J. Angulo, *O Problema de Cauchy para um Sistema Dispersivo de Ondas Longas*, Tese de Doutorado, IMPA (1994).
- [5] J. Angulo and J. Bona, *Non-linear Stability of Periodic Travelling Waves Solutions to the Korteweg-de Vries Equation*, preprint/2003.
- [6] J. Angulo, *Non-linear Stability of Periodic Travelling Waves Solutions to the Schrödinger and the Modified Korteweg-de Vries Equations*, preprint/2004.
- [7] T. B. Benjamin, *The stability of solitary waves*, Proc. Royal Soc. London, **A338**, (1972), 153-183.
- [8] T. B. Benjamin, *Lectures on nonlinear wave motion*, Nonlinear wave motion, A. C. Newell, ed., AMS, Providence, R. I., **15** (1974), 3-47.
- [9] T. B. Benjamin, *A new kind of solitary wave*, J. fluid Mech. **245** (1992), 401-411.

- [10] T. B. Benjamin, *Solitary and periodic waves of a new kind*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, **354** (1996), 1775-1806.
- [11] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, sec. ed., Springer-Verlag, New York (1971).
- [12] J. L. Bona, *On the stability theory of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London A, **344** (1975), 363-374.
- [13] J. L. Bona and R. L. Sachs, *Global Existence of Smooth Solutions and Stability of Solitary Waves for a Generalized Boussinesq Equation*, Commun. Math. Phys., **118**, (1988), 15-29.
- [14] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, Part II-The KdV equation*, Geometric and Functional Analysis **3** (1993), 209-262.
- [15] J. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire*, Comptes Rendus., **72**, (1871), 755-759.
- [16] J. Boussinesq, *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J.Math. Pures Appl. (2), **17**, (1872), 55-108.
- [17] J. Colliander, M. Kell, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, *Sharp global well-posedness for KDV and modified KDV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$* , J. Amer. Math. Soc., **16** (2003), no. 3, 705-749.
- [18] A. Erdélyi, *On Lamé functions*, Philos. Mag., **7**, 31, (1941), 123-130.
- [19] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, **19**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1998).
- [20] E. Fermi, J. R. Pasta and S. M. Ulam, *Studies of nonlinear problems*, Los Alamos Sci. Lab. Rep., L.A-1940, (1955).
- [21] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry I*, J. Funct. Anal., **74** (1987), 160-197.
- [22] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Funct. Anal. **94** (1990), 308-348.

- [23] P. Hartman, *Ordinal Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1964).
- [24] E. L. Ince, *The periodic Lamé functions*, Proc. Roy. Soc. Edin., **60** (1940), 47-63.
- [25] V. K. Kalantarov & O. A. Ladyzhenskaya, *The occurrence of collapse for quasilinear equation of parabolic and hyperbolic types*, J. Sov. Math., **10** (1978), 53-70.
- [26] T. Kato, *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, Spectral Theory and Differential Equations **448** (1974), 25-70.
- [27] T. Kato, *On the Cauchy problem for the generalized Korteweg - de Vries equation*, Studies in Applied Mathematics. Ad. Math. Suppl. Stud., **8** (1983), 93-128.
- [28] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, Philosophical Magazine, **39** (1895), 422-443.
- [29] E. Kuznetsov, A. Rubenchik and V. Zakharov, *Soliton stability in plasma and hydrodynamics*, Phys. **142** (1986), 103-165.
- [30] E. C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc, **9** (1996), 573-603.
- [31] S. P. Levandosky, *Stability and instability of fourth-order solitary waves*, J. Dynam. Differential Equations no. 1 **10** (1998), 151-188.
- [32] H. A. Levine, *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$* , Trans. A. M. S., **192**, (1974), 1-21.
- [33] Y. Liu, *Instability of Solitary Waves for Generalized Boussinesq Equations*, Journal of Dynamics and Differential Equations, **5**, No. 3, (1993), 537-558.
- [34] O. Lopes, *A Linearized Instability Result for Solitary Waves*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **8**, No 1, (2002), 115-119.
- [35] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation*, Interscience, Tracts in Pure and Appl. Math. Wiley, NY., **20**, (1976).
- [36] Marcelo Martins dos Santos, *A versão de Kato - Lai do método de Galerkin e a equação de Korteweg - de Vries*, Dissertação de Mestrado/IMPA, Série E-029 (1988).

- [37] Y. Martel and F. Merlé, *Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., **157**, (2001), 219-254.
- [38] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New-York (1983).
- [39] S. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Analysis of Operators*, **AP. V.iv** (1975).
- [40] R. L. Sachs, *On the Blow-up of Certain Solutions of the "Good" Boussinesq Equation*, Applicable Analysis, **36**, (1990), 145-152.
- [41] J. Shatah and W. Strauss, *Instability of nonlinear bound states*, Comm. Math. Phys. **100** (1985), 173-190.
- [42] J. Shatah and W. Strauss, *Spectral condition for instability*, Nonlinear PDE's, dynamics and continuum physics (South Hadley, MA) (1998), Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI. **255**, (2000), 189-198.
- [43] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.
- [44] W. A. Strauss, *Nonlinear wave equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI. **73** (1989).
- [45] M. I. Weinstein, *Liapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), 51-68.
- [46] M. I. Weinstein, *Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAM. MATH. ANAL., **16**, No.3, (1985), 472-491.
- [47] M. I. Weinstein, *Solitary waves of nonlinear dispersive evolution equations with critical power nonlinearities*, J. Diff. Eq., **69**, (1987), 192-203.
- [48] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett., **15** (1965), 240-243.
- [49] V. E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Sov. Phys. JETP., **35**, (1972), 908-912.