RELAÇÕES ENTRE OS VALORES SUPERIORES DE DERIVADAS SUCESSIVAS DE UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

Marcello F. Luigi Coda

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

CAMPINAS

1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A meus pais

À minha esposa

A meus filhos

A G R A D E C I M E N T O S

Inicialmente quero expressar os meus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio pela orientação desta dissertação de Mestrado.

Agradeço tambem, a todos os meus professores e em especial aos professores Antonio Carlos do Patrocinio e Dicesar Lass Fernendez pelo apoio constante que nos dispensaram não só durante a elaboração desta dissertação como durante todo o curso e até mesmo antes dêle.

I N D I C E

INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata do estudo das desigualdades entre valores superiores de derivadas sucessivas e de uma aplicação destes resultados a problemas de movimento.

Este estudo teve inicio em 1913 com o seguinte resultado de Landau ([4]): "se f é uma função definida na reta que admite derivada segunda e satisfaz as condições

$$\sup|f(x)| \leq 1 \quad \text{e} \quad \sup|f''(x)| \leq 8$$

então

$$\sup|f'(x)| \leq 4."$$

Posteriormente Šilov extendeu este teorema de Landau obtendo limitações das derivadas de primeira e segunda ordem quando a função e a derivada de terceira ordem fossem limitadas e também limitações das derivadas de primeira, segunda e terceira ordem quando a função e a derivada de quarta ordem fossem limitadas.

Finalmente, em 1937 A. Kolmogorov resolveu o problema no caso geral. Para enunciar o resultado de Kolmogorov, vamos precisar fixar o seguinte: se f é uma função definida na reta que admite derivadas até a ordem n façamos

$$M_o = \|f\| = \sup|f(x)| \;, \quad M_n = \|f^{(n)}\| = \sup|f^{(n)}(x)| \;,$$

$$M_k = \|f^{(k)}\| = \sup|f^{(k)}(x)| \;, \; 0 < k < n.$$

O resultado de Kolmogorov é então a seguinte desigualdade

$$M_k \leq C_{nk}\, M_o^{1-k/n}\, M_n^{k/n}$$

onde C_{nk} é uma constante que depende de n e k mas não da função f.

Apresentamos nesta dissertação, duas formas de se chegar a desigualdade de Kolmogorov.

Em ambas, comparamos (no sentido de comparar as normas) a função com certas funções especiais cujas normas de quaisquer de suas derivadas são conhecidas.

De um modo, usam-se como têrmos de comparação as funções Spline de Euler. Do outro modo usam-se certas funções geradas por séries de Fourier de senos.

Assim, no primeiro capítulo introduzimos as funções spline de Euler. As funções splines são aquelas cujas restrições a intervalos $v \leq x < v + 1$ $(v = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ são polinómios. A função é dita de grau n se os polinomios forem de grau $\leq n$. Por outro lado, as funções splines são univocamente determinadas por seus valores nos inteiros e por serem limitadas. Em especial as funções Euler spline $\xi_n(x)$ se caractirizam como funções splines que tem as propriedades

$$\xi_n(v) = (-1)^v \quad \text{e} \quad \| \xi_n(v) \| = 1 .$$

Atravez das funções Euler spline e de algumas fórmulas de diferenciação provaremos o teorema de Landau, isto é desigualdade de Kolmogorov para n = 2, e o primeiro teorema de Šilov, isto é a desigualdade de Kolmogorov para n = 3.

A demonstração do teorema de Šilov (n=3) apesar de utilizar o mesmo método de demonstração, devido a Schoemberg, do teorema de Landau (n=2) é bastante complicada. Esta complicação aumenta a medida que o número de derivadas envolvidas também aumenta. Por esta razão nos limitamos a usar o método das funções Euler splines somente para derivadas de segunda e terceira ordem. O caso geral, que será tratado no capítulo 3, será demonstrado pelo método original de Kolmogorov.

No 2º capítulo, faremos uma aplicação ao estudo do movimento de uma partícula no plano complexo. Seja $f(t) = u(t) + i\ v(t)$ o movimento de uma partícula, $f'(t)$ sua velocidade e $f''(t)$ sua aceleração. Usando-se o teorema de Landau conclui-se que se $\|f\| \leq 1$ e $\|f''\| \leq 8$ então $\|f'\| \leq 4$. A condição $\|f\| \leq 1$ implica que o movimento ocorre sobre o círculo unitário $|Z| \leq 1$. Em seguida passaremos a considerar sobre o anel $r \leq |Z| \leq 1$ um movimento $f_o(t)$ que percorre um arco de parabola π inscrito neste anel. Veremos que o movimento $f_o(t)$ é tal que se $f(t)$ é outro movimento com $\|f''\| \leq \|f_o''\|$ então tem-se $\|f'\| \leq \|f_o'\|$. Atrávez deste movimento $f_o(t)$ definiremos a "constante de Landau" que permitirá extender os resultados obtidos para o círculo unitário e o anel para conjuntos limitados e conexos do plano. O resultado que obteremos é o seguinte: se D é o diametro de um conjunto limitado e conexo e se $\|f\| \leq D$ e $\|f''\| \leq K$ então teremos $\|f'\| \leq D^{1/2}\ K^{1/2}$.

No 3º Capítulo apresentaremos a demonstração do teorema de Kolmogorov. Na realidade demonstraremos muito mais. Demonstraremos que a condição necessaria e suficiente para que uma têrna de números (M_o, M_k, M_n) corresponda uma função $f(t)$, derivável até a ordem n, tal que $\|f\| = M_o$, $\|f^{(k)}\| = M_k$ e $\|f^{(n)}\| = M_n$ é que

$$M_k \leq C_{nk}\, M_o^{1-k/n}\, M_n^{k/n} \quad .$$

A demonstração é feita por indução sobre a ordem n, da última derivada e sobre a ordem k da derivada que é estimada.

ooo0ooo

CAPÍTULO 1

AS FUNÇÕES EULER SPLINE E OS TEOREMAS DE LANDAU, ŠILOV E KOLMOGOROV

Introdução.

As funções spline, de grau n, são aquelas cuja restrição a um intervalo entre dois inteiros consecutivos, é um polinomio de grau $\leq n$.

As funções Euler Spline $\mathcal{E}_n$, em particular, são funções com a propriedade $\mathcal{E}_n(v) = (-1)^v$ para todo v inteiro. Mais ainda, são funções limitadas na reta com $\sup|\mathcal{E}_n(x)| = 1$.

Por meio destas funções que serão usadas como termo de comparação, demonstra-se uma relação que existe entre as normas (considerando a norma do supremo) da última derivada, de uma derivada anterior e da própria função.

Demonstraremos, neste primeiro capítulo a relação existente, apenas tratando com derivadas de até terceira ordem, ficando o caso geral para ser estudado no 3º capítulo.

Iniciamos o capítulo apresentando uma maneira de se construir em funções Euler Spline pedendo-se obter o polinomio que representa a função em cada intervalo entre dois inteiros consecutivos.

Demonstraremos em seguida algumas formulas simples de diferenciação

Por meio destas formulas e das propriedades das funções Euler Spline serão obtida as relações desejadas.

1.1 - AS FUNÇÕES SPLINE CARDINAL

Seja n um número natural e seja $S_n = \{S(x)\}$ a classe de funções $S(x)$ tendo as seguintes propriedades:

i) $S(x) \varepsilon C^{n-1}(R)$

ii) A restrição de $S(x)$ a todo intervalo $(v,v+1)$ entre inteiros consecutivos é um polimonio de grau $\leq n$.

Tais funções são chamadas funções cardinais spline de grau n. Evidentemente $\pi_n \subset S_n$ onde π_n denota a classe de polimonios de grau $\leq n$.

Consideraremos S_o a classe de funções escada com descontinuidade nos inteiros.

Integração indefinida dos elementos de S_o da os elementos de S_1, também chamados spline lineares cardinais. Integrando os elementos de S_1 obtemos os de S_2 também chamados spline cardinais quadráticas, etc.

O termo cardinal é para lembrarmos que passamos de um polinomio componente de $S(x)$ ao seguinte nos inteiros.

Estes pontos de transição são chamados nós da spline.

É também útil introduzir a classe

$$(1.1.1) \qquad S_n^* = \{S(x): S(x+1/2) \varepsilon S_n\}$$

Os elementos de S_n são ainda definidos pelas propriedades (i) e (ii) desde que se troque em (ii) o intervalo $(v,v+1)$ por $(v-1/2, v+1/2)$. Os nós de $S(x)$ são agora meio caminho entre os inteiros e $S(x)$ pode ser chamada uma spline do meio.

1.2 - O PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO CARDINAL.

Dada a sequência de números

(1.2.1) $$(y_v) = (\ldots.y_{-2}, y_{-1}, y_o, y_1, y_2, \ldots\ldots)$$

o problema da interpolação cardinal consiste em achar uma função $S(x)$ tal que

(1.2.2) $$S(v) = y_v \ , \ V = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Restringimos nossa discussão ao caso quando (y_v) é uma sequência limitada, ou seja quando existe $K > 0$ tal que $|y_v| \leq K$ para todo inteiro v.

1.3 - O TEOREMA DE INTERPOLAÇÃO CARDINAL E AS FUNÇÕES EULER SPLINE

Seja (y_v) uma sequência limitada

1) Se n é ímpar então existe uma única $S(x) \in S_n$ t.q. $S(x)$ é limitada $\forall\ x \in R$ e satisfaz as condições de interpolação (1.2.2).

2) Se n é par, então existe $S(x) \in S_n^*$ tal que $S(x)$ é limitada e satisfaz (1.2.2) .

O teorema foi demonstrado por Subbotin [9].

O teorema é trivial se $n = 1$, não porem se $n > 1$. De fato uma spline linear $S_1(x)$ satisfazendo (1.2.2) é obtida imediatamente por sucessivas interpolações lineares entre ordenadas consecutivas y_v e y_{v+1} . A spline linear $S_1(x)$ é evidentemente única para cada sequência (y_v) .

Notáveis spline cardinais são obtidas do teorema acima para sequências particularmente simples. Aqui estão 2 exemplos

A - As splines fundamentais.

Para a sequência especial

$$y_o = 1, \; y_v = 0 \quad \text{se} \quad v \neq 0 \tag{1.3.1}$$

o teorema fornece uma única solução limitada que nós denotamos $L_n(x)$.

Então

$$L_n(0) = 1 \; L_n(v) = 0 \quad \text{se} \quad v \neq 0 \tag{1.3.2}$$

Certamente

$$L_n(x) \in \begin{cases} S_n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ S_n^* & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \tag{1.3.3}$$

O seguinte é também verdade, a única solução limitada S(x) do problema de interpolação (1.2.2) pode ser representado pela formula

$$S(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} y_v\, L_n(x-v) \tag{1.3.4}$$

B - As spline de Euler.

Muito agradavelmente os mais interessante exemplos de funções spline cardinais se obtem se aplicarmos o teorema à sequência

$$y_v = (-1)^v \ , \ v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ . \tag{1.3.5}$$

Para cada n denotamos a solução por $\mathcal{E}_n(x)$ e denominamo-la spline Euler de grau n.

Então

$$\mathcal{E}_n(v) = (-1)^v \ v = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \tag{1.3.6}$$

e

$$\mathcal{E}_n(x) \, \varepsilon \begin{cases} S_n \text{ se n é ímpar} \\ \\ S_n^* \text{ se n é par} \end{cases}$$

Estas propriedades junto com o fato de $\mathcal{E}_n(x)$ ser limitada definem esta função univocamente com base no teorema de interpola ção Cardinal.

Podemos também aplicar (1.3.4) e definir $\mathcal{E}_n(x)$ por

(1.3.7) $$\mathcal{E}_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^v L_n(x-v)$$

Veremos agora uma forma de se construir as Euler Spline.

1.4 - CONSTRUÇÃO DIRETA DAS EULER SPLINES

Seja $f(x)$ em R integrável em cada intervalo finito.

Definições:

1) Dizemos que $f(x)$ é par perto do ponto $x=a$ desde que satisfaça $f(x) = f(2a-x)$, para todo real x, analogamente $f(x)$ é impar perto de $x=a$ se $f(x) = -f(2a-x)$ para todo real x.
2) Dizemos que $f(x)$ tem a propriedade P_o, ou $f(x) \in P_o$ desde que $f(x)$ seja par perto de $x=0$ e impar perto de $x = 1/2$.
3) Dizemos que $f(x)$ tem a propriedade P_1 ou $f(x) \in P_1$ se $f(x)$ é impar perto de 0 e par perto de $1/2$.

Lema 1 - Se $f(x) \in P_o$ ou $f(x) \in P_1$ então $f(x)$ é uma função de período 2, ou seja $f(x) = f(x+2)$.

Prova: se $f(x) \in P_o$ então $f(x) = f(-x) = -f(1+x) = -f(-x-1) = f(x+2)$

se $f(x) \in P_1$ então $f(x) = f(1-x) = -f(x-1) = -f(2-x) = f(x-2)$

Lema 2 - Se f(x) é par (ímpar) perto de x=a então

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{é ímpar (par) perto de } x=a.$$

Prova: se f(x) é par perto de x=a $f(x) = f(2a-x)$ logo

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(2a-t)\,dt = -\int_a^{2a-x} f(t)\,dt = -g(2a-x)$$

Lema 3 - 1) se $f(x) \varepsilon P_o$ e $g_o(x) = \int_o^x f(t)\,dt$ então $g_o(x)\ \varepsilon\ P_1$

2) se $f(x)\ \varepsilon\ P_1$ e $g_1 = \int_{1/2}^x f(t)\,dt$ então $g_1(x)\ \varepsilon\ P_o$

Prova: 1) seja $f(x)\ \varepsilon\ P_o$ pelo Lema 2 $g_o(x)$ é ímpar perto de $x=0$.

Vamos provar que é par perto de $x = 1/2$. O Lema 2 aplicado com $a = 1/2$ temos:

$$g_o(x) = \int_o^x f(t)\,dt = \int_o^{1/2} f(t)\,dt + \int_{1/2}^x f(t)\,dt = \int_o^{1/2} f(t)\,dt + \int_{1/2}^{1-x} f(t)\,dt$$

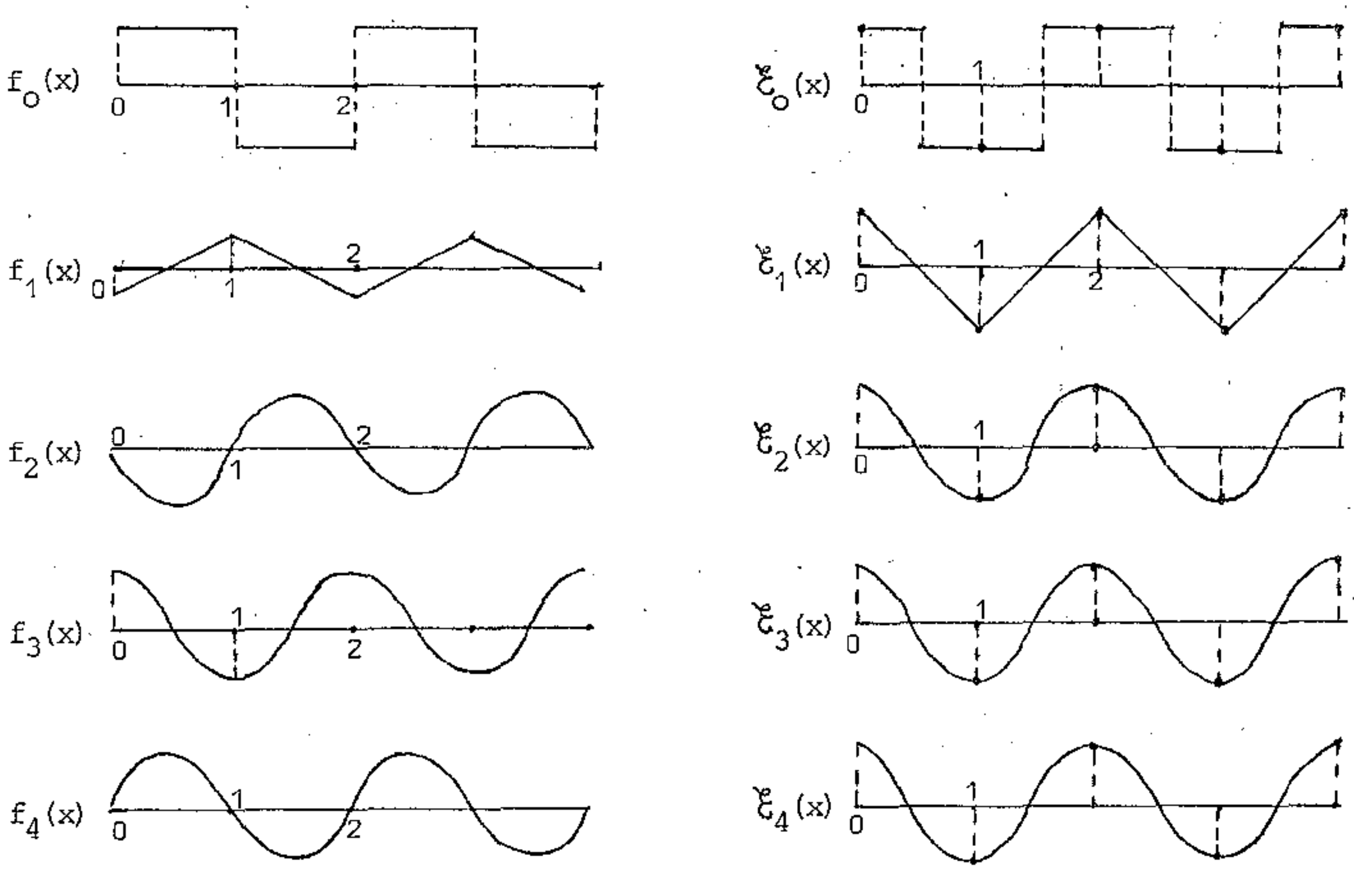
$$\int_o^{1-x} f(t)\,dt = g_o(x) = g_o(1-x)$$

2) Se $f(x) \in P_1$ pelo Lema 2, $g_1(x)$ é ímpar perto de $x = 1/2$. Vamos mostrar que é par perto $x=0$. Ainda pelo Lema 2

$$g_1(x) = \int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = \int_{1/2}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{1/2}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{-x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{1/2}^{-x} f(t)\,dt = g_1(-x)$$

Figura 1



Podemos agora construir as funções Euler Splines.

Começamos com a função $f_o(x)$ definida por

$$f_o(x) = (-1)^v \quad \text{se} \quad v \leq x < v+1$$

Dela derivamos as funções:

$$(1.4.1) \qquad f_1(x) = \int_{1/2}^{x} f_o(t)\,dt, \; f_2(x) = \int_{o}^{x} f_1(t)\,dt \; , \; f_3(x) = \int_{1/2}^{x} f_2(t)\,dt$$

e geralmente

$$(1.4.2) \qquad f_n(x) = \int_{\alpha_n}^{x} f_{n-1}(t)\,dt$$

onde:

$$(1.4.3) \qquad \alpha_n = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ é par} \\ 1/2 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Observemos que f_o é ímpar perto de 0:

$$f_o(x) = (-1)^v \text{ se } \quad v \leq x < v+1$$

e

$$f_o(-x) = (-1)^{-(v+1)}$$

pois

$$-(v+1) \leq -x < -v$$

portanto $f_o(x) = -f_o(-x)$.

por outro lado f_o é par perto de $\frac{1}{2}$:

$$f_o(1-x) = (-1)^{-v}$$

pois $-v \leq 1-x < -v+1$, logo $f_o(x) = f_o(1-x)$ e $f_o(x)$ é par perto de $x = 1/2$, portanto $f_o \in P_1$.

Sabemos também que f_o tem período 2. Basta portanto para estudar a função considerar por exemplo o intervalo $(-1,1)$, $f_o(3/2) = f_o(-1/2)$ e ainda como $f_o(x) = f_o(-x)$ podemos conhecer a função estudando-a no intervalo $(0,1)$.

Da forma que são obtidas as demais funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc., teremos pelo lema 3, $f_1(x) \in P_o$ e $f_2(x) \in P_1$ e assim sucessivamente.

Obtemos então o:

Lema 4 - Temos que:

$$f_n(x) \in S_n \quad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{1.4.4}$$

e

$$f_n(x) \in \begin{cases} P_o & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ P_1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Prova do Lema 4: (1.4.4) é obvio a partir de (1.4.3) e o fato que a primitiva de uma spline é ainda uma spline, (1.4.5) foi provado acima.

Lema 5 - 1) Em $[0,1]$ as funções $f_{2k}(x)$ são alternadamente estritamente convexas ou côncavas e se anulam somente em $x=0$ e $x=1$.

2) Em $[0,1]$ as funções $f_{2k-1}(x)$ são alternadamente estritamente crescentes ou decrescentes e se anulam em $x=1/2$ somente.

Prova: Temos

$$f_{2k}(0) = \int_0^0 f_{2k-1}(t)\,dt = 0$$

Como $f_{2k}(x) \in P_1$, é par perto de $1/2$ e $f_{2k}(x) = f_{2k}(1-x)$ então

$$f_{2k}(1) = f_{2k}(1-1) = f_{2k}(0) = 0.$$

Por outro lado, como $f_{2k-1} \in P_0$, é ímpar perto de $1/2$ e $f_{2k-1}(1/2) = -f_{2k-1}(1-1/2) = -f_{2k-1}(1/2)$ então $f_{2k-1}(1/2) = 0$.

Agora, como $f_0(x) = 1$ em $[0,1]$, temos que $f_1(x) = \int_{1/2}^{x} dt = x-1/2$ é uma função estritamente crescente em $[0,1]$.

A função $f_2(x)$ é estritamente convexa pois sua derivada 2^a, que é f_0, é positiva. Além disso $f_2(0) = f_2(1) = 0$; logo $f_2(x) < 0$ se $0<x<1$ e portanto $f_3(x)$ é estritamente decrescente e $f_4(x)$ será estritamente côncava pelo fato de $f_2(x) < 0$ e assim sucessivamente.

Em particular

$$(-1)^k f_{2k-1}(0) > 0 \quad e \quad (-1)^k f_{2k}(1/2) > 0$$

Estudando as funções $f_n(x)$ em $[0,1]$ sabemos do comportamento da função em toda a reta real já que seu período é 2, $f_{2k} \varepsilon P_1$ e $f_{2k}(x) = -f_{2k}(-x)$. Isto permite, conhecendo f_{2k} em $[0,1]$, conhecê-la em $[-1,0]$ e daí em todo um período; portanto em toda a reta.

Ainda, $f_{2k-1} \varepsilon P_o$. Logo $f_{2k-1}(x) = f_{2k-1}(-x)$. Portanto a função f_{2k-1} assume idênticos valores entre $[-1/2,0]$ e em $[0,1/2]$. Também $f_{2k-1}(x) = -f_{2k-1}(1-x)$ mostra que entre $1/2$ e 1 a função assume valores correspondentes àqueles entre 0 e $1/2$ mas com sinal oposto. Finalmente $f_{2k-1}(3/2) = f_{2k-1}(-1/2) = f_{2k-1}(1/2) = 0$. Fazendo considerações analogas ao intervalo $[1,3/2]$ obtemos um período completo para f_{2k-1} em $[-1/2\ ,\ 3/2]$.

No presente trabalho usaremos sempre p-ra qualquer função limitada a norma do supremo:

$$\|f\| = \sup|f(x)|.$$

Lema 6 - As funções definidas por

$$\mathcal{E}_{2k-1}(x) = f_{2k-1}(x)\ /\ f_{2k-1}(0) \tag{1.4.6}$$

e

$$\mathcal{E}_{2k}(x) = f_{2k}(x+1/2)\ /\ f_{2k}(1/2) \tag{1.4.7}$$

são idênticas às Euler Splines definidas no § 1 B .

Prova: Como

$$\|f_{2k-1}(x)\| = |f_{2k-1}(0)| = |f_{2k-1}(1)| = |f_{2k-1}(v)|$$

para $V = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ teremos

$$\|\mathcal{E}_{2k-1}(x)\| = 1 \quad e \quad \mathcal{E}_{2k-1}(v) = (-1)^v .$$

Da mesma forma

$$\|f_{2k}(x)\| = |f_{2k}(1/2)| = |f_{2k}(1/2+v)| \forall v$$

e portanto

$$\|\mathcal{E}_{2k}(x)\| = 1 \text{ e } \mathcal{E}_{2k}(+v) = (-1)^v$$

Notemos que como as f_n tem período 2 se v é par, então $f_{2k-1}(v) = f_{2k-1}(0)$.

Agora, se v é impar $f_{2k-1}(v) = f_{2k-1}(1) = -f_{2k-1}(1-1) = -f_{2k-1}(0)$ pois $f_{2k-1} \varepsilon P_o$. Conclui-se assim, da definição de $\mathcal{E}_{2k-1}$ que

$$\mathcal{E}_{2k-1}(v) = (-1)^v$$

pois vale 1 para v par e -1 para v ímpar.

Analogamente obtemos que

$$\mathcal{E}_{2k}(v) = (-1)^v$$

Temos então as condições

$$(1.3.6) \qquad \mathcal{E}_n(v) = (-1), \ V = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

e

$$\mathcal{E}_n(x) \in \begin{cases} S_n & \text{se } n \text{ é impar,} \\ S_n^* & \text{se } n \text{ é par .} \end{cases}$$

A unicidade das funções tendo esta propriedade estabelece a identidade com a velha definição.

As relações (1.4.6) e (1.4.7) definem as Euler Splines com que trabalharemos.

Estaremos particularmente interessados na norma de $\mathcal{E}_n(x)$ e de suas derivadas e escrevemos

$$(1.4.8) \qquad \|\mathcal{E}_n^{(v)}\| = \gamma_{n,v} \qquad (v=0,1,2.........n)$$

Lema 7

$$(1.4.9) \qquad \|\mathcal{E}_n^{(v)}\| = \begin{cases} |\mathcal{E}_n^{(v)}(0)| & \text{se } v \text{ é par} \\ |\mathcal{E}_n^{(v)}(1/12)| & \text{se } v \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Prova: A relação (1.4.2) implica que

$$(1.4.10) \qquad f_n^{(v)}(x) = f_{n-v}(x), \qquad (v=0,1,2.......n).$$

Mais ainda, temos facilmente que

$$(1.4.11) \qquad \|f_n\| = \begin{cases} |f_n(1/2)| & \text{se } n \text{ é par} \\ |f_n(0)| & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Seja $n = 2k$ e $c = 1/f_{2k}(1/2)$. Por (1.4.7) e (1.4.10) encontramos que

$$\mathcal{E}_{2k}^{(v)}(x) = c.f_{2k}^{(v)}(x+1/2) = cf_{2k-v}(x+1/2)$$

e por (1.4.11) vemos que isto atinge o seu maior valor em $x = 0$ se v é par e em $x = 1/2$ se v é ímpar.

Semelhantemente usando (1.4.6) estabelecemos (1.4.9) se n é ímpar.

1.5 - A CONEXÃO COM OS POLINÔMIOS DE EULER

Vamos denotar por $P_n(x)$ o polinômio de grau n que representa a função spline $f_n(x)$ no intervalo $[0,1]$:

$$(1.5.1) \qquad f_n(x) = P_n(x) \text{ se } 0 \leq x \leq 1$$

Então, da figura 1 encontramos que $P_o(x) = 1$, $P_1(x) = x-1/2$, $P_2(x) = x^2/2 - x/2$ e assim sucessivamente integrando como foi dito anteriormente.

Certamente (1.4.2) e (1.4.3) implicam que

$$(1.5.2) \qquad P_n(x) = \int_{\alpha_n}^{x} P_{n-1}(t)\,dt, \quad \alpha_n = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ é par} \\ 1/2 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e então:

$$(1.5.3) \qquad P_n'(x) = P_{n-1}(x)$$

Uma sequência de polinômios como $P_n(x)$ que é obtida começando de $P_o(x) = 1$ e integrando sucessivamente obtemos $P_1(x) = x+a1$, $P_2(x) = x^2/2!+a_1/1!\ x/1! + a_2/2!$, o n-ensino polimonio será

$$(1.5.5) \qquad P_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{a_1\ x^{n-1}}{n!(n-1)!} + \frac{a_2\ x^{n-2}}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{a_{n-1}x}{(n-1)!} + \frac{a_n}{n!}$$

aqui $a_1/1!$ $a_2/2!$ ... $a_n/n!$ são as constantes de integração sucessivas.

Appel observou que a sequência infinita de relações (1.5.5) pode ser descrita por uma única relação envolvendo séries de potências de z e c . De fato, multiplicando as séries de potencias

$$(1.5.6) \qquad g(z) = \sum_{o}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \quad \text{e} \quad e^{xz} = \sum_{o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n$$

e usando (1.5.5) nós encontramos que

$$(1.5.7) \qquad g(z)\ e^{xz} = \sum_{o}^{\infty} P_n(x)\ z^n$$

O membro esquerdo é denominado a função geratriz dos polinomios P_n. Vamos determinar g(z) para a sequência particular $P_n(x)$ definida por (1.5.1). Por (1.5.2) sabemos que

$$P_{2k}(0) = 0 \ , \ P_{2k-1}(1/2) = 0 \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

Substituindo em (1.5.7) os dois valores $x = 0$ e $x=1/2$, concluimos que $g(z)-1$ é uma função ímpar de z e que $g(z)\ e^{z/2}$ é uma função par de z. Temos então as identidades

$$g(z)-1 = -g(z) + 1 \quad e \quad g(z)e^{z/2} = g(-z)e^{-z/2} ,$$

Eliminando entre elas g(-z) obtemos que

$$(1.5.8) \qquad g(z) = \frac{2}{e^z+1}$$

Se escrevermos

$$(1.5.9) \qquad E_n(x) = n!P_n(x)$$

então (1.5.7) torna-se

$$(1.5.10) \qquad \frac{2e^{xz}}{e^z+1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{En(x)}{n!} z^n .$$

Este desenvolvimento mostra que $E_n(x)$ são os clássicos polinômios de Euler, combinando (1.5.1) e (1.5.9) obtemos

$$(1.5.11) \qquad f_n(x) = E_n(x) \ / \ n! \quad em \quad 0 \leq x \leq 1$$

e então por (1.4.6) e (1.4.7) que

(1.5.12) $\mathcal{E}_{2k-1}(x) = E_{2k-1}(x)/E_{2k-1}(0)$ em $0 \leq x \leq 1$,

(1.5.13) $\mathcal{E}_{2k}(x) = E_{2k}(x+1/2)/E_{2k}(1/2)$ em $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

1.6 - O TEOREMA DE KOLMOGOROV

Seja $n \geq 2$. Consideramos aqui a classe de funções $f(x)$ de R em R que são limitadas e tem uma derivada-enésima $f^{(n)}(x)$ limitada.

Esta última condição requer algumas explicações como segue:

Em primeiro lugar assumimos que:

(1.6.1) $f(x) \; \varepsilon \; C^{n-1}(R)$

e que

(1.6.2) $f^{(n-1)}(x)$ é continuamente diferenciavel por pedaços.

Intermpretamos (1.6.2) significando que o gráfico de $f^{(n-1)}(x)$ é continuamente tangeciável exceto em bicos com coeficientes finitos para suas tangentes à direita e à esquerda e que cada intervalo finito contém no máximo um número finito de tais bicos. Finalmente com certeza $f^{(n)}(x)$ deve ser limitada para todo x real. Evidentemente, as Euler Splines $\mathcal{E}_n(x)$ satisfazem todas estas condições. De fato já consideramos as normas (1.4.8) e o lema (7) mostra como identificar por (1.4.9) os valores de

$$\gamma_{n,v} = \|\mathcal{E}n^{v}\|, \; (v = 0,1,2...n), \; \gamma_{n,0} = 1.$$

TEOREMA DE KOLMOGOROV.

Seja f(x) uma função nas condições de 1.6.1 e 1.6.2. Suponhamos também que

$$\|f^{(n)}\| \leq \gamma_{n,n} \quad \text{e} \quad \|f\| \leq 1 \quad . \tag{1.6.3}$$

Então

$$\|f^{(v)}\| \leq \gamma_{n,v} \text{ , para } v = 1,2,3,\ldots n-1 \ . \tag{1.6.4}$$

As constantes $\gamma_{n,v}$ em (1.6.4) são melhores constantes porque as Euler Splines $\gamma_n(x)$ satisfazem (1.6.3) e dão sinal de igualdade em (1.6.4) simultâneamente para todos os valores de v.

Veremos os casos n = 2 e n = 3.

A fim de obter estes casos especiais precisamos dos valores numéricos dos correspondentes $\gamma_{n,v}$. De (1.4.6) e (1.4.7) ou determinando $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ diretamente por sucessivas integrações de (1.4.2) obtemos:

$$\mathcal{E}_2(x) = 1 - 4x^2 \text{ em } \left[-\tfrac{1}{2} , \tfrac{1}{2}\right] \tag{1.6.5}$$

$$\mathcal{E}_3(x) = 1 - 6x^2 + 4x^3 \text{ em } [0,1] \tag{1.6.6}$$

$$\mathcal{E}_4(x) = 1 - \frac{24}{5} x^2 + \frac{16}{5} x^4 \text{ em } \left[-\tfrac{1}{2} , \tfrac{1}{2}\right] \tag{1.6.7}$$

Usando (1.4.8) e (1.4.9) encontramos que

(1.6.8) $\gamma_{2,0} = 1,\ \gamma_{2,1} = 4,\ \gamma_{2,2} = 8$;

(1.6.9) $\gamma_{3,0} = 1,\ \gamma_{3,1} = 3,\ \gamma_{3,2} = 12\ ,\ \gamma_{3,3} = 24$;

(1.6.10) $\gamma_{4,0} = 1,\ \gamma_{4,1} = \frac{16}{5},\ \gamma_{4,2} = \frac{48}{5},\ \gamma_{4,3} = \frac{192}{5},\ \gamma_{4,4} = \frac{384}{5}.$

Os tres primeiros casos do Teorema de Kolmogorov podem agora ser destacados como segue

TEOREMA 1 (LANDAU) Se $f(x)$ é tal que

(1.6.11) $\|f\| \leq 1$ e $\|f''\| \leq 8$

então

(1.6.12) $\|f'\| \leq 4.$

TEOREMA 2 (G.E. SILOV) Se $f(x)$ é tal que

(1.6.13) $\|f\| \leq 1$ e $\|f'''\| \leq 24$

então

(1.6.14) $\|f'\| \leq 3$ $\|f''\| \leq 12.$

TEOREMA 3 (G.E. SILOV) Se $f(x)$ é tal que

(1.6.15) $\|f\| \leq 1$ e $\|f^{(4)}\| \leq \frac{384}{5}$

então

(1.6.16) $\|f'\| \leq \frac{16}{5}$, $\|f''\| \leq \frac{48}{5}$ e $\|f'''\| \leq \frac{192}{5}$.

1.7 - UMA INTERPRETAÇÃO CINEMÁTICA

Parece sugestivo pensar x como sendo tempo e $y = f(x)$ descrevendo o movimento de um ponto sobre o eixo y. A primeira desigualdade (1.6.11) significa que o ponto $f(x)$ está sempre se movendo sobre o segmento $-1 \leq y \leq +1$.

A segunda desigualdade (1.6.11) requer que a aceleração em valor absoluto nunca exceda 8 cm/seg^2. A conclusão (1.6.12) diz que a velocidade nunca excederá 4 cm/seg.

Sabemos que este valor é alcançado pelo movimento $f = \mathcal{E}_2(x)$ que é períodica de período 2 cm.

Vamos considerar o movimento harmonico simples

$$f = \text{sen } wx \quad (w, \text{ constante positivo}) \tag{1.7.1}$$

Por diferenciação encontramos que

$$\|f\| = 1, \; \|f''\| = w \; , \; \|f''\| = w^2 \text{ e } \|f'''\| = w^3 \tag{1.7.2}$$

Escolhendo w tal que $w^2 = 8$, teremos $w = 2\sqrt{2}$. Então $\|f''\| = 8$; isto é, o valor máximo permitido por (1.6.11), enquanto $\|f'\| = w = 2{,}83$ é menor que o valor ótimo 4 dado por (1.6.12).

Assumindo (1.6.13) e escolhendo $w^3 = 24$ então $w = 2\sqrt[3]{3} = 2{,}88$ achamos usando (1.7.2) que $\|f'\| = w = 2{,}88$, $\|f''\| = w^2 = 8{,}29$, as quais são menores que os valores 3 e 12, respectivamente, como dadas por (1.6.14).

1.8 - UMA FORMULAÇÃO GERAL DO TEOREMA KOLMOGOROV

Seja $F(x)$ uma função limitada tendo uma derivada n-ésima limitada e seja

(1.8.1) $$\|F\| = M_o \quad e \quad \|F^{(n)}\| = M_n .$$

Que limite superior podemos encontrar para

(1.8.2) $$\|F^{(v)}\| = M_v \ , \ (0 < v < n) \ ?$$

O melhor limite de M_v é facilmente encontrado como segue:
Sejam a e b constantes positivas e seja

(1.8.3) $$f(x) = a\ F(bx).$$

Vamos determinar agora a e b tais que $f(x)$ satisfaça as condições

(1.8.4) $$\|f\| = 1 \ e \ \|f^{(n)}\| = \gamma n,n$$

Diferenciando (1.8.3) e usando (1.8.1) e (1.8.2) encontramos que

(1.8.5) $$\|f\| = aM_o \ , \ \|f^{(v)}\| = ab^v M_v \ , \ \|f^{(n)}\| = ab^n M_n$$

Para garantir (1.8.4) determinamos a,b das equações $aM_o = 1$ e $ab^n M_n = \gamma_{n,n}$ e encontramos os valores

(1.8.6) $$a = M_o^{-1} \ , \ b = \gamma_{n,n}^{\frac{1}{n}} \ M_o^{-\frac{1}{n}}$$

Para estes valores

(1.8.7) $$\|f^{(v)}\| = ab^{v} M_v = M_o^{-1} \gamma_{n,n}^{v/n} M_o^{v/n} M_n^{-v/n} M_v$$

As relações (1.8.4) mostram que f(x) satisfaz as hipóteses (1.6.3) do teorema de Kolmogorov. Podemos então concluir que

$$\|f^{(n)}\| \leq \gamma_{n,v} \; .$$

Usando (1.8.7) obtem-se o seguinte resultado.

Teorema Geral de Kolmogorov.

Seja F(x) uma função limitada que admite derivada enésima limitada. Então a derivada v-ésima $F^{(v)}$ é também limitada.

Mais ainda. Fazendo

$$M_o = \|F\| \;, \quad M_v = \|F^{(v)}\| \quad e \quad M_n = \|F^{(n)}\| \;,$$

temos a seguinte desigualdade

(1.8.8) $$M_v \leq C_{n,v} \, M_o^{1-v/n} \, M_n^{v/n} \quad ,$$

onde $C_{n,v} = \check{\gamma}_{n,v} \, \gamma_{nn}^{-v/n}$ e γ_{nv} $\check{\gamma}_{nn}$ são dadas por (1.4.8.) e (1.4.9).

Notemos que $C_{n,v}$ é a melhor constante. Seja F(x) obtida de (1.8.3) escolhendo $f(x) = \xi_n(x)$ e valores a e b, dados por (1.8.6). Deste modo $F(x) = a^{-1} \xi_n(b^{-1}x)$ e ocorre a igualdade em (1.8.8).

Em particular, usando os valores (1.6.8) e (1.6.9), a desigualdade (1.8.8) torna-se para n = 2

$$M_1 \leq 2^{1/2} M_o^{1/2} M_o^{1/2}$$

e para n = 3

$$M_1 \leq (2^{-1}3^{2/3})\ M_o^{2/3}\ M_3^{1/3} \quad e \quad M_2 \leq 3^{1/3} M_o^{1/3}\ M_2^{2/3}.$$

1.9 - ALGUMAS FÓRMULAS APROXIMADAS DE DIFERENCIAÇÃO

Nosso objetivo é de estabelecer os Teoremas 1 e 2. Para este propósito vamos reunir aqui algumas ferramentas simples.

Lema 8 - As seguintes identidades valem para funções f(x) tendo derivadas apropriadas que são integráveis

$$\text{(A)} \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = f(1) - f(0) + \int_o^1 K_1(x)\ f''(x)\,dx$$

onde

$$\text{(A')} \qquad K_1(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x-1 \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad f'\ (\tfrac{1}{2}) = f(1) - f(0) + \int_o^1 K_2(x)\ f'''(x)\,dx$$

onde

$$\text{(B')} \qquad K_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\,(x-1)^2 & \text{se} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{(C)} \qquad f''(0) = f(1) - 2f(0) + f(-1) + \int_{-1}^1 K_3(x)\ f'''(x)\,dx$$

onde

$$(C')\quad K_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Prova: Estas fórmulas pertencem àquelas partes elementares da análise numérica que trata das operações aproximadas de cálculo. A ferramenta principal neste campo é a fórmula de Taylor com resto integral de Cauchy.

$$(1.9.1)\quad f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f(a)^{(n-1)} + \\ + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-)!} f(x)^{(n)} dx$$

que se obtem do seguinte modo: $\int_o^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$

logo

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Para Calcular $\int_a^x f'(t)dt$ fazemos $u = f'(t)$ e $v = t$. Portanto $du = f''(t)dt$ e $dv = dt$. Então, vamos ter

$$\int_a^x f'(t)dt = tf'(t)\Big]_a^x - \int_a^x tf''(t)dt =$$

$$= xf'(x) - af'(a) + \int_a^x (-x+x-t)\, f''(t)\,dt$$

$$= xf'(x) - af'(a) - x\int_a^x f''(t)\,dt + \int_a^x (x-t)\, f''(t)\,dt$$

$$= xf'(x) - af'(a) - xf'(t)\Big]_a^x + \int_a^x (x-t)\, f''(t)\,dt$$

$$= (x-a)\, f'(a) + \int_a^x (x-t)\, f''(t)\,dt$$

Temos portanto que:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \int_a^x (x-t)\, f''(t)\,dt$$

A fórmula esta então demonstrada para n=1 e n=2 .

Admitindo agora a formula válida para n vamos de acordo com o princípio de indução matemática demonstra-la para n+1.

Para tanto calculemos

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dt$$

Fazemos aqui $u = f^{(n)}(t)$, $dy = f^{(n+1)}(t)\,dt$, $dv = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-\ )!}dt$ e $v = \frac{-(x-t)^n}{n!}$

$$\text{logo} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = -\frac{f^{(n)}(t)\,(x-t)^n}{n!}\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n-1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Substituindo este resultado em (7.1) temos a fórmula demonstrada para n+1 e portanto para todo n C.Q.D.

Prova do Lema 8:

A) Aplicamos (7.1) para n=2 a=1/2 e os dois valores t=1 e t=0 obtendo:

$$f(1)=f(1/2)+1/2\ f'(1/2) + \int_{1/2}^{1} (1-x)\ f''(x)\,dx$$

$$f(0)=f(1/2)-1/2\ f'(1/2) + \int_{1/2}^{0} (-x)\ f''(x)\,dx$$

Subtraindo temos:

$$f(1) - f(0) = f'(1/2) - \int_0^{1/2} xf''(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} (x-1)\ f''(x(dx$$

ou seja

$$f'(1/2) = f(1)-f(0) + \int_0^1 K_1(x)\ f''(x)\,dx\ ,$$

onde K_1 é dado por (A').

B) Observe que $K_2(x)$ é contínuo e que $K_2'(x) = -K_1(x)$. Podemos então integrar por partes o resto de A para obter:

$$\int_0^1 K_1(x)f''(x)\,dx = - \int_0^1 f''(x)\,dK_2(x)$$

$$= -\int_0^{1/2} f''(x)\,dK_2(x) + \int_{1/2}^1 f''(x)\,dK_2(x)$$

$$= -\left\{\Big[f''(x)K_2(x)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} K_2(x)f'''(x)\,dx\, +\right.$$

$$\left. + \Big[f''(x)K_2(x)\Big]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 f'''(x)\,dx\right\}$$

$$= -\left\{-1/8f''(x) - \int_0^1 f'''(x)K_2(x)\,dx + 1/8f''(x)\right\}$$

$$= \int_0^1 K_2(x)\; f'''(x)\,dx$$

Isto estabelece B e B' .

Poderíamos também aplicar (7.1) para n=3, a=1/2 e dois valores t=1 e t=0 e subtrair as relações resultantes.

C) Aplicando (7.1) para n=3 a=0 e os dois valores t=1 e t=-1 temos:

$$f(1)=f(0)+f'(0)+1/2f''(0)+1/2\int_0^1 (1-x)^2 f'''(x)\,dx$$

$$f(-1)=f(0)-f'(0)-1/2f''(0)+1/2\int_0^{-1} (-1-x)^2 f'''(x)\,dx$$

somando membro a membro obtemos:

$$f(1)-2f(0)+f(-1)=f''(0)-1/2\int_{-1}^0 (x+1)^2 f'''(x)\,dx+1/2\int_0^1 (x-1)^2 f'''(x)\,dx$$

que é identica com C) e C').

1.10 - PROVA DOS TEOREMAS DE LANDAU E ŠILOV.

Vamos estabelecer o teorema 1. (Já demonstrado por Landau em 1913). Consideremos a função

$$(1.10.1) \qquad f_o(x) = - \xi_2(x)$$

De (1.6.5) e figura 1 vemos que tem as propriedades

$$(1.10.2) \qquad f_o(0) = -1,\ f_o(1) = 1,\ f_o'(1/2) = 4 \ \text{ e } \ f_o''(x) = \begin{cases} 8 & \text{em } (0,1/2) \\ -8 & \text{em } 1/2,1 \end{cases}$$

Aplicando a formula de diferenciação (A) a $f_o(x)$ encontramos por (1.10.2) e pela forma explicita do Kernel $K_1(x)$ (A') que:

$$(1.10.3) \qquad 4 = f_o'(1/2) = 1+1+8 \int_0^1 K_1(x)\,dx$$

Seja $f(x)$ qualquer função satisfazendo $\|f\| \leq 1$ e $\|f''\| \leq 8$ e vamos calcular $f'(1/2)$ pela formula (A).

Podemos ainda assumir que $f'(1/2) \geq 0$, pois se $f'(1/2) \leq 0$ então podemos trocar $f(x)$ por $-f(x)$. Obtemos agora

$$(1.10.4) \qquad (0\leq)\ f'(1/2) = f(1) - f(0) + \int_0^1 K_1(x) f''(x)\,dx \leq 1+1+8 \int_0^1 K_1(x)\,dx = 4$$

então

$$(1.10.5) \qquad |f'(1/2)| \leq 4$$

Isto implica que $|f'(x_o)| \leq 4$, para todo x_o , porque $f(x+x_o-1/2)$ satisfaz todas as hipóteses e aplicando (1.10.5) a ela encontramos $|f'(x_o)| \leq 4$.

Vamos assumir agora que

$$(1.10.6) \qquad f'(1/2) = 4$$

e ver que consequencias traz. Evidentemente obtem-se (1.10.7) se e só se temos o sinal de igualdade em (1.10.4). Tembem em vista das condições (1.6.11) temos igualdade em (1.10.4) se e só se f(x) satisfaz às condições

$$(1.10.7) \qquad f(0) = -1, \; f(1) = 1, \; f''(x) = \begin{cases} 8 \text{ em } (0,1/2), \\ -8 \text{ em } (1/2,1). \end{cases}$$

Mais ainda, $f(0) = -1$ e $\|f\| \leq 1$ implicam que $f'(0) = 0$. Agora $f(1) = 1$ e $\|f\| \leq 1$ implicam que $f'(1) = 0$.

Segue claramente de (1.10.6) que:

$$f(x) = -\xi_2(x) \text{ em } [0,1]$$

com efeito

$$f''(x) = \begin{cases} 8 \text{ em } [0,1/2] \\ -8 \text{ em } [1/2,1] \end{cases} \text{ e } f'(x) = \begin{cases} 8x+e \text{ em } [0,1/2] \\ -8x+d \text{ em } [1/2,1] \end{cases}$$

Porém:

$$f'(0) = 0 \text{ implica } C = 0 \quad \text{e} \quad f'(1) = 0 \text{ implica } d = 8$$

logo

$$f(x) = \frac{8x^2}{2} + a \quad \text{em } [0,1/2]$$

também

$$f(x) = \frac{8x^2}{2} + 8x + b \text{ em } [\tfrac{1}{2},1]$$

$$f(0) - 1 \text{ implica } a = -1 \text{ e } f(1) = 1 \text{ implica } b = -3$$

portanto

$$f(x) = 4x^2 - 1 \text{ em } [0,1/2]$$

$$f(x) = -4x^2 + 8x - 3 \text{ em } [1/2,1]$$

logo

$$f(x) = -\mathscr{C}_2(x) \text{ em } [0,1]$$

Fixemos estes resultados enunciando o seguinte teorema

TEOREMA 4 - Se

(1.10.8) $\|f\| \leq 1$, $\|f''\| \leq 8$ e

(1.10.9) $f'(\frac{1}{2}) = 4$ então

(1.10.10) $f(x) = -\mathscr{C}_2(x)$ no intervalo $[0,1]$

Fora do intervalo $[0,1]$ há pouco o que podemos dizer acerca da função $f(x)$ satisfazendo (1.10.8) e (1.10.9). De fato, note que há muitos modos em que podemos estender a função $f(x) = -\mathscr{C}_2(x)$ para todos os reais e ainda satisfazendo (1.10.8) (certamente com o sinal de igualdade em ambas as desigualdades). Porque, além da extensão óbvia

(1.10.11) $f(x) = -\mathscr{C}_2(x)$ para todo real x podemos também escrever

$$(1.10.12) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1 \\ -\frac{\varphi}{2}(x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e muitas modificações semelhantes da função (1.10.11).

A função f(x) satisfazendo (1.10.8) e (1.10.9) sera chamada extremante do teorema 1 pois f(x) satisfaz (1.6.12) com sinal de igualdade, logo

$$(1.10.13) \qquad \|f'\| = 4 .$$

Denominamos f(x) de função extremante no sentido forte porque o supremo de $|f'(x)|$ (=4) é atingido em x=1/2. Há numerosas funções extremantes f(x) no Teorema 1 também satisfazendo (1.6.13) tais que

$$(1.6.14) \qquad |f'(x)| < 4 \ , \quad \text{para todo real } x \ .$$

Tais funções podem ser chamadas, extremantes no sentido fraco.

Demonstração do Teorema 2 (G.E. SILOV)

Seja f(x) satisfazendo (1.6.13) $\|f\| \leq 1$ e $\|f'''\| \leq 24$ e vamos mostrar que

$$(1.6.14) \qquad \|f'\| \leq 3 \quad e \quad \|f''\| \leq 12$$

Aplicamos a formula (B) do Lema 8, isto é

$$\text{(B)} \quad f'(1/2) = f(1) - f(0) + \int_0^1 K_2(x) f'''(x)\,dx$$

e apliquemos a função

(1.10.15) $$f_o(x) = -\xi_3(x) = -1+6x^2-4x^3 \text{ em } [0,1]$$

Esta função tem neste intervalo as propriedades:

(1.10.16) $$f_o(0) = -1,\ f_o(1) = 1 \text{ e } f'''(x) = -24\ ,$$

Por (B') do lema 8, sabemos que $K_2(x) < 0$ em $(0,1)$ e de (B) obtemos

(1.10.17) $$3 = f_o'(1/2) = 1+1 + 24 \int_0^1 |K_2(x)|\,dx$$

Se f(x) é qualquer função satisfazendo (1.6.13) vamos calcular $f'(1/2)$ por (B) assumindo que $f'(1/2) \geq 0$ (ou então consideramos $-f(x)$). Obtemos:

(1.10.18) $$(0 \leq)\ f'(1/2) =$$

$$= f(1) - f(0) - f(0) + \int_0^1 K_2(x)\ f'''(x)\,dx \leq 1+1+24\int_0^1 |K_2(x)|\,dx=3$$

por (1.10.17). A primeira desigualdade (1.6.14), está portanto , estabelecida.

Neste Ponto interrompemos nossa prova do teorema 2 para ver o que podemos dizer acerca de $f(x)$ se

$$f'(1/2) = 3 \,, \tag{1.10.19}$$

isto é se temos igualdade em (1.10.18). De (1.6.13) vemos que temos igualdade em (1.10.18) se e só se $f(x)$ tem as propriedades

$$f(0) = -1 \quad f(1) = 1 \text{ e } f'''(x) = -24 \text{ em } [0,1] \tag{1.10.20}$$

Entretanto, como antes, tambem temos

$$f'(0) = f'(1) \text{ e ainda } f'(1/2) = 3 \tag{1.10.21}$$

estas condições implicam que

$$f(x) = -\xi_3(x) \text{ em } [0,1] \tag{1.10.22}$$

Vamos sublinhar aqui este resultado como:

Corolario 1: Se $f(x)$ satisfaz (1.6.13) e (1.10.19) então satisfaz tambem a (1.10.22).

Vamos estabelecer agora a segunda desigualdade (1.6.14).

Para isto precisamos da formula

$$f''(0) = f(1) - 2f(0) + f(-1) + \int_{-1}^{1} K_3(x)\ f'''(x)\,dx \tag{C}$$

do lema 8. Por (C') temos

$$K_3(x) > 0 \text{ em } (-1,0),\ K_3(x) < 0 \text{ em } [0,1] \tag{1.10.23}$$

Aplicamos agora (C) à função

$$f_o(x) = -\mathcal{E}_3(x) = \begin{cases} -1+6x^2+4x^3 & \text{em } [-1,0] \\ -1+6x^2-4x^3 & \text{em } [0,1] \end{cases} \tag{1.10.24}$$

Esta função tem as propriedades

$$f_o(-1) = 1,\ f_o(0) = -1,\ f_o(1) = 1, \tag{1.10.25}$$

$$f_o'''(x) = \begin{cases} 24 \text{ em } (-1,0) \\ -24 \text{ em } (0,1) \end{cases}$$

e (C) (1.10.23) e (1.10.25) mostram que:

$$12 = f_o''(0) = 1 + 2 + 1 + 24 \int_{-1}^{1} |K_3(x)|dx \tag{1.10.26}$$

Se f(x) é qualquer função satisfazendo (1.6.13) e assumindo que $f''(0) \geq 0$, uma aplicação da (C) mostra que

$$(0 \leq)\ f''(0) = f(1) - 2f(0) + f(-1) + \int_{-1}^{1} K_3(x)\ f''(x)dx$$

$$\leq 1+2+1+24 \int_{-1}^{1} |K_3(x)|dx = 12 \tag{1.10.27}$$

por (1.10.26). Aplicando este resultado a $f(x+x_o)$ obtemos que $|f''(x_o)| \leq 12$ e o teorema 2 está demonstrado.

Vamos agora assumir que f(x), satisfazendo (1.6.13) é tal que

(1.10.28) $f''(0) = 12$ e vamos examinar as consequencias destas hipóteses.

Certamente (1.10.28) se e só se temos sinal de igualdade em (1.10.27) e isto por sua vez se e só se

$$f(-1)=1,\ f(0)=-1,\ f(1)=1 \text{ e } f'''(x) = \begin{cases} 24 & \text{em } (-1,0) \\ -24 & \text{em } (0,1) \end{cases}$$

Disso, por integração como foi feito anteriormente concluimos que

(1.10.29) $$f(x) = -\mathcal{E}_3(x) \quad \text{em} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Estabelecemos então que

Corolario 2: Se f(x) satisfaz $\|f\| \leq 1$, $\|f'''\| \leq 24$ e $f''(0) = 12$ então $f(x) = -\mathcal{E}_3(x)$ em $-1 \leq x \leq 1$.

A seguinte generalização se obtem por uma mudança de origem:

Corolario 2': Se f(x) satisfaz (1.6.13) e é tal que

(1.10.30) $$f''(a) = \pm 12$$

então

(1.10.31) $$f(x) = \mp \mathcal{E}_3(x-a) \text{ se } a-1 \leq x \leq a+1$$

Podemos estabelecer agora nosso

TEOREMA 5

Se $\|f\| \leq 1$ e $\|f'''\| \leq 24$ e se em uma das desigualdades (1.6.14) $\|f'\| \leq 3$ e $\|f''\| \leq 12$ temos sinal de igualdade, o correspondente supremo sendo portanto atingido, então

(1.10,32) $$f(x) = \mathcal{E}_3(x-c) \quad \text{para todo real } x$$

para uma constante apropriada c

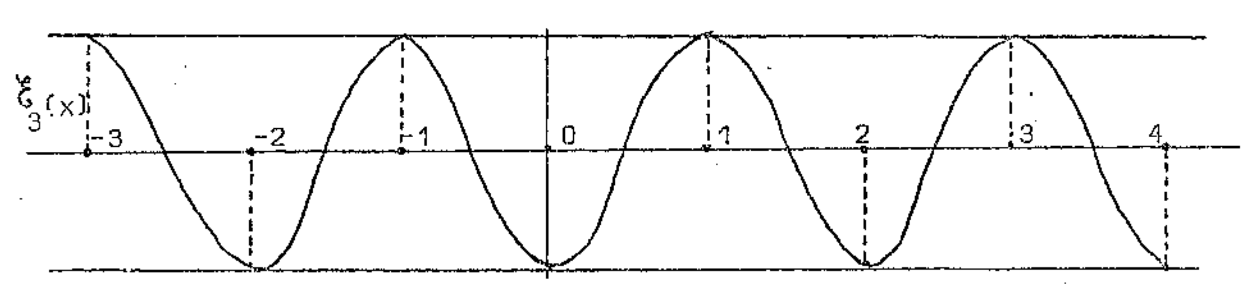
Prova: 1 - Vamos assumir que $\|f'\| = 3$. Este supremo sendo atingido, não perdemos generalidade assumindo que

(1.10.33) $$f'(1/2) = 3$$

Agora, o corolario 1 implica que

(1.10.34) $$f(x) = -\mathcal{E}_3(x) \text{ em } [0,1]$$

Figura 2



Isto por sua vez mostra que $f''(1) = -12$ (ver na figura 2) e agora o corolario 2' mostra que $f(x) = -\mathcal{E}_3(x)$ em $[0,2]$

Mas então seguramente $f''(2) = 12$ e o corolario 2' implica que $f(x) = -\mathcal{E}_3(x)$ em $[1,3]$. Podemos continuar deste modo indefinidamente e concluir que $f(x) = -\mathcal{E}_3(x)$ para $x \geq 0$. Entretanto, o mesmo raciocinio vale tambem ã esquerda!

De (1.10.34), concluimos que $f''(0) = +12$ e então (1.10.34) vale tambem em $[-1,1]$ então $f''(-1) = -12$ e (1.10.34) vale em $[-2,0]$ etc. Então $f(x) = -\mathcal{E}_3(x) = \mathcal{E}_3(x-1)$ vale para todo real x.

2) - Se temos igualdade na segunda desigualdade (1.6.14) obtemos a mesma conclusão aplicando somente o Corolario 2'.

Não nos ocuparemos do teorema 3 neste primeiro capítulo. Pois, no capítulo 3, veremos a demonstração geral, devida a Kolmogorov, e que demonstra a relação (1.8.8) para quaisquer valores de n e v $(0 < v < n)$.

⊖⊖⊖θ⊖⊖⊖

CAPÍTULO 2

O PROBLEMA DE LANDAU PARA MOVIMENTOS NUM ANEL E EM CONTÍNUOS LIMITADOS

Introdução:

Obtivemos no Capítulo I que, se uma função $f(x)$ é tal que $\|f\| \leq 1$ e $\|f''\| \leq 8$ então $\|f'\| \leq 4$.

Veremos que se $f(x)$ representa o movimento de um corpo sobre o plano complexo as condições acima implicam que se o movimento $f(x)$ está restrito ao círculo unitário $\{|z| \leq 1\}$, o fato de sua aceleração ser em módulo inferior a 8 implica que necessariamente a velocidade não poderá em nenhum instante superar o valor máximo 4, (também em módulo).

Procuraremos generalizar este fato para o anel $\{r \leq |z| \leq 1\}$ onde construiremos um movimento f_o que percorre uma parabola, o qual terá a propriedade que, dado um qualquer movimento restrito ao mesmo anel e com $\|f''\| \leq \|f_o''\|$, tem-se $\|f'\| \leq \|f'_o\|$.

A função que representa o movimento f_o, recebe o nome de função extremante, e, através dela definiremos uma constante que será denominada, constante de LANDAU,.

Esta constante nos permitirá generalizar os resultados obtidos, para qualquer conjunto simplesmente conexo e limitado do plano.

2.1 - O PROBLEMA DE LANDAU PARA MOVIMENTOS NUM ANEL

Consideremos no plano complexo, o Movimento:

$$f(t) = u(t) + i\, v(t) \quad t \in R$$

onde u e v são funções reais de classe C^2 .

A derivada primeira

$f'(t) = u'(t) + i\, v'(t)$ representa a velocidade do movimento, e a derivada segunda

$$f''(t) = u''(t) + i\, v''(t)$$

representa a sua aceleração.

Provamos no capítulo 1 que dada uma função real f(x) como as anteriormente estudadas e com

$\|f\| \leq 1$ e $\|f''\| \leq 8$ teríamos necessariamente $\|f'\| \leq 4$.

Tendo demonstrado este fato podemos demonstrar o seguinte:

TEOREMA 1: Seja f(t) um movimento no plano complexo restrito ao círculo unitário $U = \{\|z\| \leq 1\}$ com, $\|f\| \leq 1$ e $\|f''\| \leq 8$; Então $\|f'\| \leq 4$.

De fato: se L é qualquer linha reta no plano complexo e $f^{o}(t)$ é a projeção de f(t) sobre L, então $f^{o}(t)$ descreve o movimento sobre L sujeito a duas restrições:

1) $f^{o}(t)$ está confinado a um intervalo I de comprimento 2. (I é a projeção de U sobre L).

2) $|f^{o''}(t)| \leq 8$ para todo real t.

Pelo teorema 1 do capítulo I concluimos que $|f^{o'}(t)| \leq 4$ para todo real t.

Segue que $|f'(t)| \leq 4$ para todo t pois se $|f'(t_o)| < 4$ obteríamos uma contradição em (2) escolhendo para L a linha na direção do vetor $f'(t_o)$.

Procuraremos agora generalizar para uma função f(t) a valores complexos, com $o < r \leq |f(t)| \leq 1$ para todo real t e

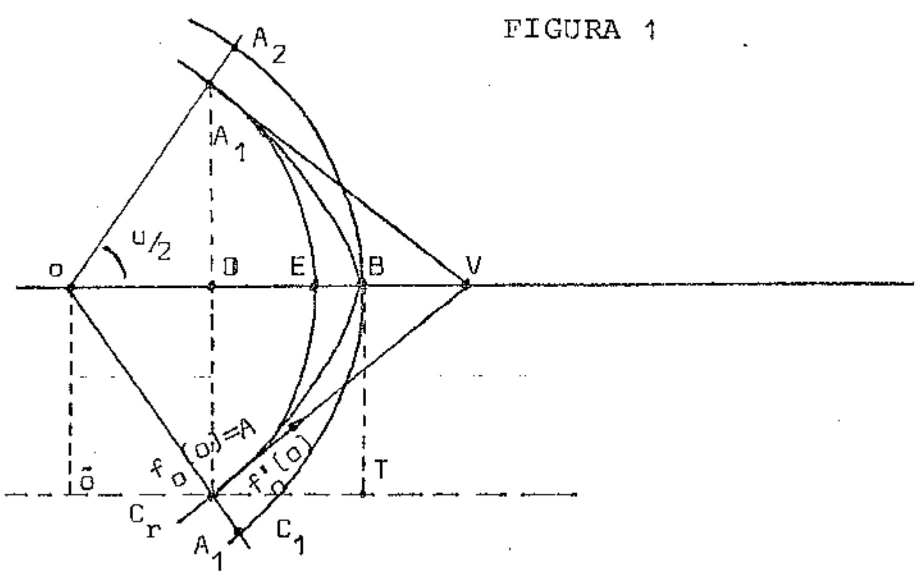
$$\|f''\| \leq \frac{16 \ \mathrm{sen}^2(\frac{u}{2})}{3 + \cos u}$$

veremos que $$\|f'\| \leq \frac{8 \ \mathrm{sen}(\frac{u}{2})}{3 + \cos u}$$

Consideremos duas circunferencias concentricas C_r e C_1 de r < 1 e 1 respectivamente.

De tal modo que seja possivel um arco parabólico π ter vértice sobre C_1 e tangenciar C_r como na figura 1 nos pontos A e A'.

FIGURA 1



Das propriedades da parábola estudadas na geometria elementar, podemos obter que o ponto B da figura (1) é ponto médio de DV e ainda

$$OV = (OE)^2/_{OD}$$

logo
$$OV = \frac{r}{\cos(\frac{u}{2})} \quad \text{pois } OE = r$$

e
$$OD = r\cos(\frac{u}{2})$$

Ainda, como B é ponto médio de DV temos

$$B = \quad = \frac{1}{2}\,[OV + OD] = \frac{1}{2}\,[r\cos(\frac{u}{2}) + \frac{r}{\cos(\frac{u}{2})}]$$

de onde se conclui que:

$$1 = \frac{1}{2}\,[\frac{r\cos^2(\frac{u}{2}) + r}{\cos(\frac{u}{2})}] = \frac{r\,[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos u + 1]}{2\cos(\frac{u}{2})}$$

$$= \frac{r\,(3 + \cos u)}{4\cos(\frac{u}{2})}$$

logo
$$r = \frac{4\cos(\frac{u}{2})}{3 + \cos u} \qquad (0 < u < \pi)$$

Proposição: Existe um único u $(0<u<\pi)$ tal que $r = \dfrac{4\cos(\frac{u}{2})}{3 + \cos u}$

de fato:

sendo $\dfrac{x}{1+x^2}$ função crescente no intervalo $0 \le x \le 1$ fazendo $x = \cos(\frac{u}{2})$, segue que a função

$$g(u) = \frac{4\cos(\frac{u}{2})}{2+2\cos^2(\frac{u}{2})} = \frac{4\cos(\frac{u}{2})}{3+\cos u} \quad (0 \leq u \leq \pi)$$

decresce de $g(0) = 1$ para $g(\pi) = 0$

assim que u cresce de 0 a π.

Portanto para $0<r<1$ existe um único u tal que $r = \dfrac{4\cos(\frac{u}{2})}{3+\cos u}$

2.2 - DEFINIÇÃO DE UM MOVIMENTO $f_1(T)$ QUE DESCREVE O ARCO π

$f_1(T)$ será o movimento de um ponto no intervalo de tempo $-1/2 \leq T \leq 1/2$ t.q. $f_1(T) = X_1(T)+iY_1(1)$ e t.q. $Y_1(T)$ possa ser função linear de T, e o movimento descreva o arco π com $f_1(-1/2)=A$ e $f_1(1/2) = A'$

Devemos ter $Y_1(T) = aT + b$

$y_1(0) = a.\ 0+b = 0 \Longrightarrow b = 0$

$Y_1(1/2) = a\ 1/2 = r\mathrm{sen}(u/2)$ implica $a = 2r\mathrm{sen}(u/2)$,

logo $Y_1(T) = 2\ r\mathrm{sen}(u/2).\ T(-1/2 \leq T \leq 1/2)$

$X_1(T)$ deve ser da forma $X_1(T) =- aT^2 + 0T+c$

Assim eliminando T entre X_1 e Y_1 obtemos a equação de uma parabola que é π tendo como eixo o eixo x e concavidade para esquerda como é o caso da figura 1.

Como por tres pontos passa uma única parabola, impondo condições de que este movimento deve passar por A,A', e B a parabola que descreve o movimento somente pode ser π .

$X_1(0) = 1 = c-a.0$ implica $c = 1$ portanto $X_1(T) = 1-aT^2$

como $X_1(\pm\frac{1}{2}) = D = r\cos(u/2)$

$1-a.1/4 = r\cos u/2$ implica $a = (1-r\cos u/2).\ 4 = 4(1-\dfrac{4\cos^2 u/2}{3+\cos u})$

$$= \frac{4(3+\cos u-4(1/2 + 1/2\cos u))}{3+\cos u} = \frac{4(1-\cos u)}{3+\cos u}$$

Então $$X_1(T) = 1 - \frac{4(1-\cos u)T^2}{3+\cos u}$$

mudando a variável para $T = (t-1/2)$ e pondo

$$X_1(T) = X_o(t) \quad Y_1(T) = Y_o(t)$$

obtemos o movimento $f_o(t) = X_o(t) + iY_o(t) \quad (o \leq t \leq 1)$

Dos resultados precedentes obtemos que:

$$X_o(t) = 1 - \frac{1-\cos u}{3+\cos u}(2t-1)^2 \quad Y_o(t) = \frac{2\operatorname{sen} u}{3+\cos u} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Estendemos agora o movimento para todos os valores reais de t por meio da equação funcional $f_o(t+1) = e^{iu}f_o(t)$ para todo real t.

Observamos que: desde que $f_o(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ descreve o arco π $f_o(t+1)$ $(0 \leq t \leq 1)$ descreve o arco π_1 obtido girando π rigidamente ao redor de 0 por um angulo u.

Segue que o movimento $f_o(t)=f_o(t:r)=X_o(t)+iY_o(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ é uma sucessão infinita de arcos parabólicos obtidos de π girando-o ao redor de 0 por multiplos inteiros do angulo u.

As equações de X_o e Y_o mostram que o movimento é continuo e satisfaz à desigualdade $r \leq |f_o(t)| \leq 1$ para todo t real. Das mesmas equações encontramos que a velocidade $f'_o(t)$ é continua para todo t real, tendo a seguinte expressão:

$$f'_o(t) = -2(2t-1).2\left(\frac{1-\cos u}{3+\cos u}\right) + i\,\frac{4\operatorname{sen} u}{3+\cos u} = (4-8t)\left(\frac{1-\cos u}{3+\cos u}\right) + i\,\frac{4\operatorname{sen} u}{3+\cos u}$$

portanto seu módulo será:

$$|f_o'(t)|^2 = (4-8t)^2 \frac{(1-\cos u)^2}{(3+\cos u)^2} + \frac{16\ \mathrm{sen}^2 u}{(3+\cos u)^2}$$

Para um determinado valor de u $|f_o'(t)|^2$ é máximo quando $(4-8t)^2$ for máximo e isto ocorre para $t = 0$ e $t = 1$

logo teremos $\|f_o'(t)\| = |f_o'(0)| = \sqrt{\frac{16(1-\cos u)^2}{(3+\cos u)^2} + \frac{6\ \mathrm{sun}^2 u}{(3+\cos u)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{16-32\cos u+16}{(3+\cos u)^2}} = \sqrt{\frac{32-32\cos u}{(3+\cos u)^2}} = \sqrt{\frac{16(2-2\cos u)}{(3+\cos u)}}$$

$$= \sqrt{\frac{16(4\mathrm{sen}^2 u/2)}{3+\cos u}} = \frac{8\mathrm{sen} u/2}{3+\cos u}$$

$f_o''(t) = \frac{-8(1-\cos u)}{3+\cos u}$ é constante $f_o''(t) = \frac{-16\mathrm{sen}^2(u/2)}{3+\cos u}$

se $v < t < v+1$ (v inteiro)

Então

$$\|f_o''\| = \frac{16\ \mathrm{sen}^2(u/2}{3+\cos u}$$

No caso em que se faça $r = 0 = \frac{4\cos(u/2}{3+\cos u}$ teremos $\cos U/2 = 0$ logo $u/2 = \pi/2$ que implica $u = \pi$.

Geometricamente o arco π ficaria reduzido ao intervalo $[0,1]$

Teriamos para $u = \pi$;

$$x_o(t) = 1- \frac{2}{2}(2t-2)^2 = 4t-4t^2$$

e

$$Y_o(t) = 0 \quad \text{portanto}$$

$$f_o(t) = 4t-4t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Podemos estender aqui $f_o(t)$ para t real por:

$$f_o(t+1) = e^{i\pi} f_o(t) = -f_o(t)$$

e teremos o movimento de um ponto que se desloca num incessante vai e vem entre os pontos 1 e -1. Percorrendo este segmento $[-1,1]$ teremos

$$f_o(0) = 0 \; f_o'(0) = 4 \text{ e } f_o(1/2) = 1 \qquad (3)$$

O movimento que se obtem fazendo $u = \pi$ satisfaz a todas as hipoteses do Teorema 1

$$|f_o| \leq 1 \; \|f_o'\| = 4 \quad \text{e} \; \|f_o''\| = 8$$

Estes valores encontrados para a velocidade e a aceleração correspondem aos valores máximos possíveis de:

$$\|f'\| = |f'(0)| = \frac{8 \operatorname{sen}(\frac{u}{2})}{3+\cos u} \text{ e } \|f''\| = \frac{16\operatorname{sen}^2(\frac{u}{2})}{3+\cos u}$$

que justamente ocorrem para $u = \pi$.

Encontraremos agora o:

TEOREMA 2

Se $f(t)$ é a valores complexos e tal que $r \leq |f(t)| \leq 1$ para todo real t e $\|f''(t)\| \leq \frac{16\operatorname{sen}^2(u/2)}{3+\cos u}$ então

$$\|f'(t)\| \leq \frac{8\text{sen}(u/2)}{3+\cos u} \tag{2.2.1}$$

e a constante sobre o lado direito de (2.2.1) é a melhor.

Obs: aqui temos $r = \dfrac{4\cos(\frac{u}{2})}{3+\cos u}$, portanto quando $r = 0$ tem-se $u = \pi$ logo o teorema 2 se reduz ao teorema de Landau para funções reais $f(t)$. Portanto o teorema 2 é uma generalização do teorema de Landau para funções complexas.

2.3 - REFORMULAÇÃO DO TEOREMA 2 EM TERMOS DE MOVIMENTOS

De acordo com o que foi visto, se consideramos o movimento $f_o(t)$ que percorre o arco parabólico π da figura 1 com $r \leq f_o \leq 1$ com

$$\|f_o'\| = \frac{8\text{sen }u/2}{3+\cos u} \quad \text{e} \quad \|f_o''\| = \frac{16\ \text{sen}^2(u/2)}{3+\cos u}$$

podemos reformular o teorema 2 como segue:

TEOREMA 2'

Se $f(t)$ é um movimento satisfazendo as condições:

$r \leq |f(t)| \leq$ para todo t e $\|f''\| \leq \|f_o''\|$ então

$$\|f'\| \leq \|f_o'\| \tag{2.3.1}$$

Nesta reformulação $\|f_o'\|$ é a melhor constante em (2.3.1) pois o movimento $f_o(t)$ também satisfaz às condições do teorema 2'.

Dividiremos a demonstração deste teorema em dois casos

A) $\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$ B) $o < u < \frac{\pi}{2}$.

Caso A. Na figura 1, se OA intercepta o círculo unitário em A_1, e se nos giramos o segmento OAA_1 de um angulo $\pi/2$ no sentido positivo para obter OA_3A_2 , então nenhum ponto no quadrilatero curvilineo fechado $Q = AA_1A_2A_3$ esta à esquerda da linha vertical infinita AA'.

Façamos $f_o(t) = f_o(t:r)$ denotar o especial movimento que percorre o arco π. (lembramos que π e portanto f_o dependem de r). Evidentemente $\|f_o'\| = |f_o'(0)|$.

Vamos mostrar que $|f'(t)| \leq |f_o'(0)|$ para todo t, as hipoteses não se alteram por translação, basta mostrar que $|f'(0)| \leq |f_o'(0)|$.

Vamos assumir que

$$|f'(0)| > |f_o'(0)|$$

e tentar obter uma contradição.

Nós primeiramente giramos o movimento f(t) isto é trocamos f(t) por $e^{i\alpha}$ f(t) (α real) de modo a tornar o vetor velocidade f'(0) paralelo a $f_o'(0)$.

Podemos também assumir que (depois de girar) o ponto f(0) esta abaixo ou sobre a linha infinita OA_2 Pois se este não for o caso nós trocamos f(t) por -f(t).

Finalmente podemos assumir que (depois de girar) o ponto f(0) esta no quadrilatero fechado $Q = AA_1A_2A_3$.

Pois se este não é ainda o caso nós podemos obte-lo refletindo o movimento na linha OA.

Certamente desde que o vetor $f'(0)$ é ainda perpendicular a OA continuará assim depois da reflexão em OA.

Os vetores $f'(0)$ e $f_o'(0)$ são agora paralelos. Entretanto podemos até assumir que estes vetores apontam na mesma direção. Pois se este não é ainda o caso podemos obte-lo trocando $f(t)$ por $f(-t)$ pois isto troca $f'(0)$ em $-f'(0)$.

Depois destas trocas preliminares temos a situação mostrada na figura 1.

O ponto $f(0)$ pertence ao quadrilatero Q e o vetor $f'(0)$ é paralelo e tem o mesmo sentido que $f_o'(0)$. A fim de obter uma contradição desenhamos por A a linha horizontal AT e projetamos ortogonalmente ambos os movimentos $f(t)$ e $f_o(t)$ nesta linha. Obtemos os movimentos $\tilde{f}(t)$ e $\tilde{f}_o(t)$ respectivamente.

Vemos que:

1) $\tilde{f}_o(t)$ é no intervalo $0 \leq t \leq 1$ um movimento uniformemente desacelerado com aceleração

$$\|f_o''\| = \frac{16\ \mathrm{sen}^2(u/2)}{3+\cos u}$$

O movimento começa de $\tilde{f}_o(0) = A$ com velocidade inicial

$$|f_o'(0)|\cos\delta$$

onde δ é o angulo de $f_o'(0)$ com AT.

Termina que $\tilde{f}_o(t)$ alcança T para $t = 1/2$ com velocidade zero.

2) $\tilde{f}(t)$ parte da posição inicial $\tilde{f}(0)$ nalgum ponto en

tre A e T com a velocidade inicial positiva

$$\tilde{f}'(0) = |f'(0)| \cos\delta > |f_o'(0)|\cos = \tilde{f}_o'(0)$$

pois assumimos

$$|f'(0)| > |f_o'(0)| = \frac{8\operatorname{sen}(u/2)}{3+\cos u}$$

temos ainda

$$|\tilde{f}''(t)| \leq |f''(t)| \leq \|f_o''(t)\|$$

Ocorre portanto que $\tilde{f}(t)$ partindo adiante de $\tilde{f}_o(0)$ com maior velocidade e não maior desaceleração para $t = 1/2$ deve estar adiante de $\tilde{f}_o(1/2) = T$ e isto leva-nos a um absurdo pois equivaleria a $|f(t)| > 1$ contra a hipotese.

Demonstração do Teorema 2' para o Caso B quando $0 < u < \pi/2$

A figura 2 mostra os dois círculos C_r e C_1 como na figura 1 Entretanto no caso presente o 1/4 de anel $Q = AA_1A_2A_3$ contem o ponto A' sobre sua fronteira em algum lugar entre A e A_3.

Para estabelecer o Teorema 2' por absurdo assumimos ainda que

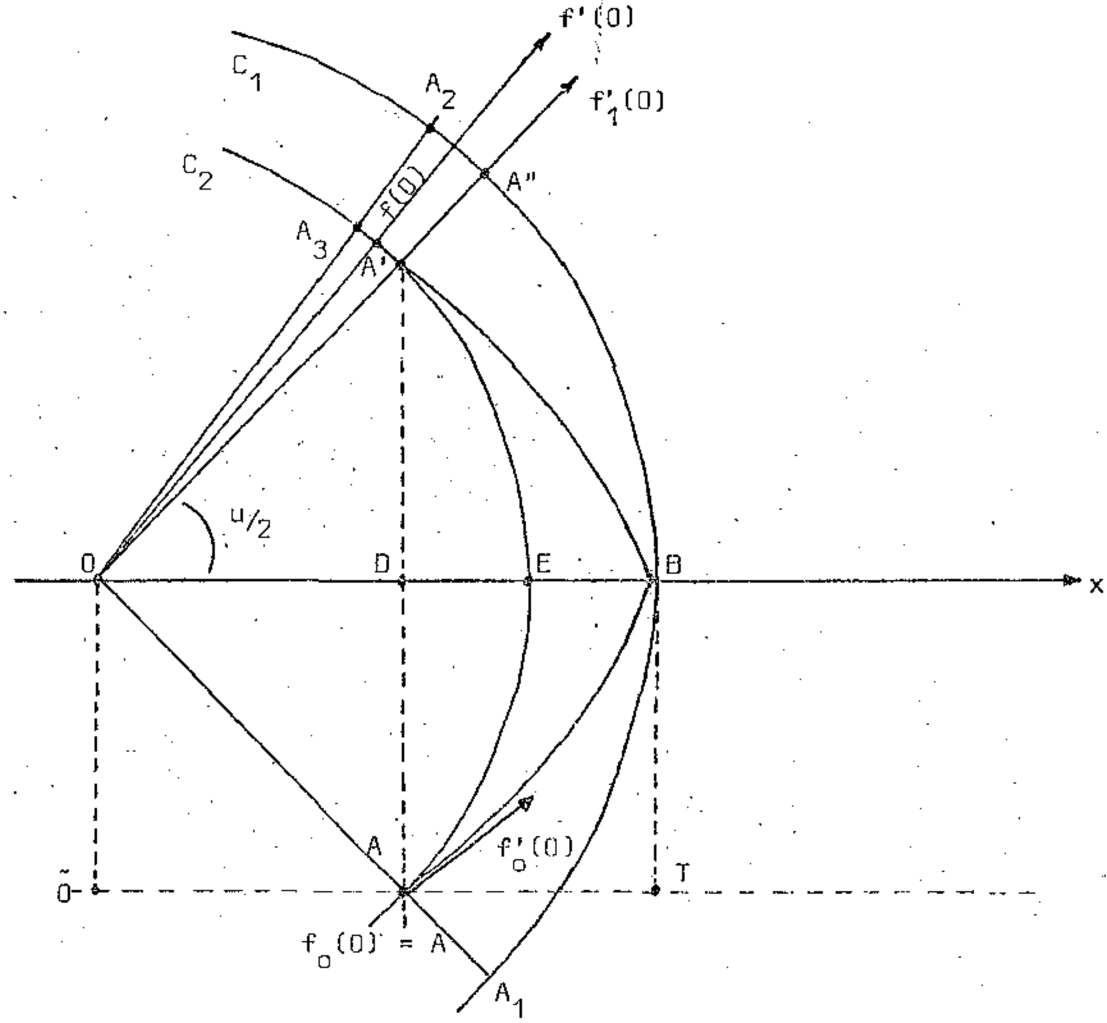
$$|f'(0)| > |f_o'(0)|$$

Fazemos identicas rotações e reflexões em f(t) de modo a obter $f(0) \in Q$, enquanto $f'(0)$ é paralelo e tem a mesma orientação de $f_o'(0)$.

Seja A" a intersecção de OA' com C_1 e considere o quadrilâte

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

FIGURA 2



ro curvilíneo $Q' = AA_1A"A'$.

Se $\tilde{f}(0) \in Q'$ então projetando os movimentos $f(t)$ e $f_o(t)$ sobre a linha AT completamos a prova por absurdo como no caso anterior.

Entretanto se o ponto $f(0)$ esta à esquerda da linha vertical AA' então não podemos obter as contradições desejadas. De fato, o ponto $\tilde{f}(0)$ agora jaz sobre AT à esquerda de A. Isto poderia dar ao movimento $f(t)$ a chance de retardar suficientemente o movimento de forma a não ultrapassar o ponto T.

Esta dificuldade é sobrepujada por meio de uma ultima rotação como segue. Com centro 0 e raio igual a $|\tilde{f}(0)|$ traçamos um arco circular $f(0)\ f_1(0)$ tal que seu ponto extremo $f_1(0)$ jaz sobre o segmento fechado A'A". Seja $F_1(0) = e^{-i\delta} f(0)$.

Substituimos o movimento $f(t)$ pelo movimento $f_1(t) = e^{-i\delta} f(t)$

Afirmamos que o movimento $f_1(t)$ dará a contradição desejada. De fato, projetando $f_1(t)$ sobre a linha AT nós obtemos o movimento $\tilde{f}_1(t)$, $\tilde{f}_1(0)$ é A ou está entre A e T.

Ainda mais, observe que o vetor $f'(0)$ vem de $f'(0)$ por uma rotação δ no sentido horário. $0 < \delta \leq \sphericalangle\, A'OA_3$

segue que $\tilde{f}_1'(0) > \tilde{f}'(0) > \tilde{f}_o'(0)$ e nossos previos argumentos se aplicam e mostram que $\tilde{f}_1(1/2)$ alcançou o ponto T.

2.4 - A NATUREZA DOS MOVIMENTOS EXTREMANTES

Assumimos agora que nós temos a desigualdade $\|f'\| \leq \|f_o'\|$ e que o extremo $\|f_o'\|$ é agora atingido.

Isto significa que $|f'(t_o)| = \|f_o'\|$ para algum t.

Podemos assumir que $t_o = 0$. Por rotações e reflexões apropriadas podemos então assumir que temos a seguinte situação:

a) O ponto $f(0)$ está no quadrilatero $Q = AA_1A_2A_3$ da figura 1 no caso A) $\pi/2 \leq u < \pi$ ou no quadrilatero $Q' = AA_1A''A'$ no caso B) $0 < u < \pi/2$.

b) Os vetores da velocidade inicial dos movimentos f e f_o concordam em módulo e direção assim que $f'(0) = f_o'(0)$.

Por conveniencia pensamos AT como sendo o eixo real, com origem em $\tilde{O}$, assim que $\tilde{f}(t)$ e $\tilde{f}_o(t)$ são agora funções reais.

Conforme seja u $\geq \pi/2$ ou então u $< \pi/2$ ou então u $< \pi/2$ temos que:

$$\tilde{f}_o(0) \leq \tilde{f}(0) \quad e \quad \tilde{f}'_o(0) \leq \tilde{f}'(0)$$

Observe que podemos ter o sinal de desigualdade $\tilde{f}'_o(0) < \tilde{f}'(0)$ devido à última rotação δ como na figura 2.

Tambem sabemos que $f''_o(t)$ é constante e $f''_o(t) = -\|f''_o\|$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$.

Pela formula de Taylor com resto integral para $t = 1/2$ obtemos:

$$\tilde{f}_o(1/2) = \tilde{f}_o(0) + \tilde{f}'_o(0) \, . \, 1/2 - \int_0^{1/2} (1/2-v) \, \|f''_o\| \, dv = 1 \qquad (A)$$

Sendo $\|f\| \leq 1$

tambem concluimos que:

$$\tilde{f}(1/2) = \tilde{f}(0) + \tilde{f}'(0) \, . \, 1/2 + \int_0^{1/2} ((1/2)-v) \, \tilde{f}''(v)\,dv < 1 \qquad (B)$$

Se nós subtrairmos (A) de (B) vemos que:

$$(\tilde{f}(0) - \tilde{f}_o(0)) + 1/2(\tilde{f}'(0) - \tilde{f}'_o(0)) + \int_0^{1/2} (1/2-v)\,(\tilde{f}''(v) + \|\tilde{f}''_o\|)\,dv < 0$$

Entretanto, os dois primeiros termos assim como o integrando são não negativos pois $\tilde{f}_o(0) \leq \tilde{f}(0)$ e ainda

$$\tilde{f}'_o(0) \leq \tilde{f}'(0) \quad e \quad f''(t) \leq \|f''_o\|$$

Devemos então concluir que:

$\tilde{f}(0) = \tilde{f}_o(0)$ $\tilde{f}'(0) = \tilde{f}_o'(0)$ e $\tilde{f}''(v) = -\|f_o''\|$ se $0 \leq v \leq 1/2$

Pelos motivos expostos devemos ter $\tilde{f}(1/2) = 1$ e daí $f(1/2) = B$
Esta última equação implica que $\operatorname{Re} f'(1/2) = 0$.

Notemos que se $f(0) = \tilde{f}_o(0)$ segue que $f(0) = A$ no caso da figura 1 ou então A' no caso da figura 2.
Ainda como $\tilde{f}'' = -\|f_o''\|$ e $\|f''\| \leq \|f_o''\|$ concluimos que $\operatorname{Im} f''(v) = 0$ se $0 \leq v \leq 1/2$ e portanto temos $f''(v) = -\|f_o''\|$ se $0 < v < 1/2$.

Agora, como $\tilde{f}''(v) = -\|f_o''\|$, $\tilde{f}(0) = \tilde{f}_o(0)$ $\tilde{f}_o'(0) = \tilde{f}'(0)$ devemos ter sinal de igualdade em (B) como se vê se comparamos (A) com (B) logo $\tilde{f}(1/2) = 1$ e então $f(1/2) = B = 1$.
Esta última equação implica que $\operatorname{Re} f'(1/2) = 0$
Seja $D(t) = f(t) - f_o(t)$ pelas condições acima teremos que:

$$\operatorname{Re} D(t) = \operatorname{Re} D(1/2) + \operatorname{Re} D'(1/2)(t-1/2) + \frac{\operatorname{Re} D''(1/2)(t-1/2)^2}{2} = 0$$

pois $\operatorname{Re} f(1/2) = \operatorname{Re} f_o(1/2) = 1$ $\operatorname{Re} f'(1/2) = \operatorname{Re} f_o'(1/2) = 0$ e

$\operatorname{Re} f''(1/2) = \operatorname{Re} f_o''(1/2) = -\|f_o''\|$ logo $\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re} f_o(t)$
Por outro lado $\operatorname{Im} f''(v) = 0$ e $\operatorname{Im} f_o''(v) = 0$ implicam

$$\operatorname{Im} f'(v) = K \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f_o'(v) = K'$$

Como $f'(0) = f_o'(0)$ tem-se $\operatorname{Im} f'(0) = \operatorname{Im} f_o(0)$ logo $K = K'$
tem-se portanto:

$$\operatorname{Im} f(v) = Kt+c \quad \operatorname{Im} f_o(v) = Kt+c'$$

para $t = 1/2$ $\operatorname{Im} f(1/2) = \operatorname{Im} f_o(1/2) = 0$

logo:

$$\mathrm{Im}f(v) = \mathrm{Im}f_o(v) = K(t-1/2)$$

Como $\mathrm{Re}f(t) = \mathrm{Re}f_o(t)$ e $\mathrm{Im}f(t) = \mathrm{Im}f_o(t)$ teremos

$$f(t) = f_o(t) \quad 0 \leq t \leq 1/2 \text{ ou } f(t) = \overline{f_o(t)} \quad 0 \leq t \leq 1/2$$

Substituindo $f(t)$ por $f(-t)$ chegamos ao mesmo resultado para $-1/2 \leq t \leq 0$

podemos enunciar agora o:

TEOREMA 3: Seja $f(t)$ satisfazendo às condições $r \leq |f(t)| \leq 1$ e $\|f''\| \leq \|f_o''\|$ se para algum $t = t_o$ nos temos $|f'(t_o)| = \|f_o'\|$ então:

$$f(t) = e^{i\alpha} f_o(\mathcal{E}(t-t_o)) \text{ se } t_o-1/2 \leq t \leq t_o + 1/2$$

para um apropriado α real e $\mathcal{E} = \pm 1$

Fora do intervalo $(t_o-1/2;\ t_o+1/2)$ há muitas possibilidades de estender

$$f(t) = e^{i\alpha} f_o(\mathcal{E}(t-t_o)),$$

uma das quais é usar esta mesma expressão para todo t real.
Para ver isso, vamos estender o movimento $f_o(t)$ $(-1/2 \leq t \leq 1/2)$ de forma diferente da maneira obvia.
Lembramos que $f_o(t) = X_o(t) + iY_o(t)$
onde

$$X_o(t) = 1 - \frac{1-\cos u}{3+\cos u}(2t-1)^2 \quad Y_o(t) = \frac{2\operatorname{sen} u}{3+\cos u}(2t-1)$$

$$f_o'(1/2) = i\, Y_o'(1/2) = i\,\frac{4\ \text{senu}}{3+\cos u} = i\, w$$

$$f_o(1/2) = 1,\ f_o(-1/2) = e^{-iu} \quad e$$

$$f(t) = \begin{cases} f_o(t) & \text{se } -1/2 \le t \le 1/2 \\ e^{iw(t-\frac{1}{2})} & \text{se } t > 1/2 \\ e^{iw(t+\frac{1}{2})}\ e^{-iu} & \text{se } t < -1/2 \end{cases}$$

Achamos a extensão razoavel, a razão é que $w^2 < \|f_o''\|$ é consequencia de $0 < u < \pi$

de fato $\dfrac{16\ \text{sen}^2 u}{(3+\cos u)^2} < \dfrac{16\ \text{sen}^2 u}{3+\cos u}$ e garantimos assim que

$$\|f''\| \le \|f_o''\| \quad \text{pois} \quad \|f''\| = \begin{cases} \|f_o''\| & \text{se } -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ w^2 & \text{se } t > \frac{1}{2} \\ w^2 & \text{se } t < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

de fato

$$f''(t) = -w^2\, e^{iw(t-1/2)} \quad \text{logo } \|f''(t)\| = w^2 \text{ se } t > 1/2$$

$$f''(t) = -w^2\, e^{iw(t+1/2)}\, e^{-iu} \quad \text{logo } \|f''(t)\| = w^2 \text{ se } t < -1/2$$

como sempre $\|f''(t)\| \le \|f_o''\|$

em consequencia devemos ter,

$$\|f'\| \le \|f_o'\|$$

Em contraste com o Teorema 3 existem movimentos $f(t)$ satisfazendo às condições do teorema 2' assim como $\|f'\| = \|f_o'\|$ enquanto $|f'(t)| < \|f_o'\|$ $\forall$ $t \in R$.

2.5 - TEOREMA DE LANDAU EM CONTINUOS LIMITADOS

DEFINIÇÃO 1 - Consideramos a movimento $f(t)$ $(t \in R)$ no plano complexo C satisfazendo às seguintes condições:

1) $f(t)$ é limitado e continuamente diferenciavel em R.

2) $f'(t)$ satisfaz às condições de Lipshitz com a menor constante A $(A > 0)$.

i.é . a desigualdade $|f'(t_1)-f'(t_2)| \leq A \ |t_1-t_2|$ ocorre para todo real t_1 e t_2 e nenhuma constante $A' < A$ pode servir.
Segue que $f''(t)$ existe quase sempre e que sua norma $\|f''\| = \sup|f''|$ tem o valor $\|f''\| = A$, Denotamos a classe de tais movimentos pelo simbolo $\mathcal{A}$,
e denominamos os seus elementos "admissiveis".

DEFINIÇÃO 2 - Seja K um "continuo limitado" em C, isto é, um conjunto limitado, fechado e conexo.
Assumimos que existe um movimento $f(t) \in \mathcal{A}$ tal que, $f(t) \in K$ para todo real t, (&), dizemos então que K é um contínuo admissivel.
Denotamos a classe dos movimentos $f(t)$ satisfazendo (&) pelo símbolo $\mathcal{A}(K)$, e dizemos que $f(t)$ é admissivel em K.
Um exemplo de um admissivel continuo é o anel:

$$K_r = \left\{ Z;\ r \leq |z| \leq 1 \right\} \text{ do teorema 2'}$$

porque $f_o(t)$ claramente pertence a $\mathcal{A}(K)$

Tambem o movimento circular $f(t) = R\, e^{iwt}$ $(R > o, \quad w \in R \neq 0)$ é admissivel e mostra que sua trajetoria $|z| = R$ é um continuo admissível.

DEFINIÇÃO 3 - Para todo admissivel $f(t)$ definimos o funcional $\mathcal{F}(f) = \|f'\| / \|\sqrt{\|f''\|}$, duas obvias mas relevantes propriedades deste funcional são as seguintes:

i) Se c e d são reais $c \neq 0$. Então $\mathcal{F}(f(ct+d)) = \mathcal{F} f(t)$

Que significa que $\mathcal{F}(f(t)$ é invariante se nos mudamos escala e origem em t.

De fato observe que $\|D_t f(ct+d)\| = |c| \|f'\|$ e $\|D_t^2\, f(ct+d)\| = c^2\, \|f''\|$ e portanto:

$$\mathcal{F}(f(ct+d) = \frac{|c| \ \ \|f'\|}{|c| \sqrt{\|f''\|}} = \mathcal{F}(f)$$

ii) $\|D_t cf(t)\| = |c| \ \ \|f'\|$ e $\|D_t^2 cf(t)\| = |c| \ \ \|f''\|$

portanto $$\mathcal{F}c(f(t)) = \frac{|c| \ \ \|f''\|}{\sqrt{|c|} \ \ \sqrt{\|f''\|}} = \frac{\sqrt{c}\ \|f'\|}{\sqrt{\|f''\|}} = \sqrt{c}\, \mathcal{F}(f(t))$$

DEFINIÇÃO 4

Se K é um continuo admissivel definimos a constante de Landau

$$\mathcal{L}(K) \text{ por } \mathcal{L}(K) = \sup \mathcal{F}(f) \quad \text{para } f \in \mathcal{A}(K)$$

Teoricamente podemos ter $\mathcal{L}(K) = \infty$, mas veremos que é sempre finito. Da definição de $\mathcal{L}(K)$ como um supremo nós imediatamente obtemos a seguinte propriedade de monotonicidade:

Se K' e K" são continuos admissiveis então $K' \subset K''$ implica que $\alpha(K') \leq \mathcal{L}(K'')$.

Propomo-nos determinar o valor de $\mathcal{L}(K)$ para um preestabelecido continuo admissivel K.

Vamos primeiramente demonstrar a equivalencia entre 2 propriedades que damos a seguir.

Seja K um continuo admissivel e suponha que nós temos um especial movimento:

$f_o(t) \in \mathcal{A}(K)$ gozando da propriedade A:

A) Se $f(t) \in \mathcal{A}(K)$ e $\|f''\| \leq \|f_o''\|$ então $\|f'\| \leq \|f_o'\|$

Vamos comparar isto com a propriedade B

B) O mesmo movimento $f_o(t) \in \mathcal{A}(K)$ é tal que $\mathcal{L}(K) = \mathcal{F}(f_o)$

TEOREMA 4: As propriedades A e B de $f_o(t)$ são equivalentes

Prova: (B $\Longrightarrow$ A) $\mathcal{L}(K) = \sup \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_o)$

$$\Longrightarrow \frac{\|f'\|}{\sqrt{\|f''\|}} \leq \frac{\|f_o'\|}{\sqrt{\|f_o''\|}} \quad \text{portanto } \|f''\| \leq \|f_o''\| \text{ implica } \|f'\| \leq \|f_o'\|$$

$(A \Longrightarrow B)$ $f(t) \in \mathcal{A}(K)$ e $\|f''\| \leq \|f_o'\|$ implica $\|f'\| \leq \|f_o'\|$

em consequencia devemos ter

$$\frac{\|f'\|}{\sqrt{\|f''\|}} \leq \frac{\|f_o'\|}{\sqrt{\|f_o''\|}}$$

pois se fosse possível o contrário

$$\frac{\|f_o'\|}{\sqrt{\|f_o''\|}} \leq \frac{\|f'\|}{\sqrt{\|f''\|}}$$

o fato de $\|f''\| \leq \|f_o''\|$ não implicaria que necessariamente devemos ter $\|f'\| \leq \|f_o'\|$

Vamos aplicar o teorema 4 ao Anel

$K_r = \left\{z;\ r \leq |z| \leq 1\right\}$ $(0 \leq r < 1)$ que é o continuo que aparece no teorema 2'.

O teorema 2' mostra que K_r e o movimento $f_o(t)$ que percorre o arco de parabola π tem a propriedade A

como $\|f_o'\| = \dfrac{8\ \text{sen}\ u/2}{3+\cos u}$ e $\|f_o''\| = \dfrac{16\ \text{sen}^2\ u/2}{3+\cos u}$

$$\mathcal{F}(f_o) = \frac{\dfrac{8\ \text{sen}u/2}{3+\cos u}}{\dfrac{4\ \text{sen}u/2}{\sqrt{3+\cos u}}} = \frac{2}{\sqrt{3+\cos u}} \qquad (0 < u \leq \pi)$$

Pelo teorema 4 concluimos que nosso teorema 2' é equivalente ao:

Corolario 1 - Para o anel $K_r = \left\{z:\ r \leq |z| \leq 1\right\}$ $(0 \leq r < 1)$

temos

$$\mathcal{L}(Kr) = \mathcal{F}(f_o) = \frac{2}{\sqrt{3+\cos u}} \qquad (0 < u \leq \pi)$$

aqui r e u são ligados pela relação

$$r = \frac{4\cos(u/2)}{3+\cos u} \qquad (0 < u \leq \pi\ ,\quad 0 \leq r < 1)$$

Seja $K(R) = \left\{z:\ |z| \leq R\right\}$ o disco circular de raio R.

Em nossa notação nós também podemos escrever $K(1) = K_o$

Agora

$$\mathcal{F}(f_o) = \frac{2}{\sqrt{3+\cos u}} \qquad \text{vale}$$

tambem para $r = 0$ e portanto $u = \pi$. Obtemos então que $\mathcal{L}(K(1)) = \sqrt{2}$

Vemos que $f(t) \in \mathcal{A}(K(R))$ se e só se $f(t)/R \in \mathcal{A}(K(1))$ de $\mathcal{F}(cf(t)) = \sqrt{c}\ \mathcal{F}f(t)$ temos $\mathcal{F}f(t)/R = R^{-1/2}\mathcal{F}(f)$ e tomando supremo em ambos os membros e igualando temos $\sqrt{2} = R^{-1/2}\mathcal{L}(K(R))$ donde $\mathcal{L}(K(R)) = \sqrt{2R}$

Podemos dizer em palavras: A constante de Landau de um disco circular é igual à raiz quadrada de seu diametro.

Generalizaremos isto pra arbitrarios conjuntos K conexos e limitados.

Uma consequencia imediata de $\mathcal{L}(K(R)) = \sqrt{2R}$ é:

Corolario 2: Para todo admissivel continuo K a constante de Landau $\mathcal{L}(K)$ é bem definida e finita.

Pois se K é admissivel e R é suficientemente grande então $K \subset K(R)$.

A propriedade de monotonicidade mostra então que $\mathcal{L}(K) \leq \sqrt{2R}$ e en tão $\mathcal{L}(K)$ é finita.

Observamos agora que no corolario 1 assumimos $r < 1$ logo $u > 0$. Vamos mostrar que vale tambem para $r = 1$ portanto para $u = 0$. Afirmamos isto no

Corolario 3: Para a circunferência unitária

$$K_1 = \left\{ z : |z| = 1 \right\} \text{ nós temos}$$

$$\mathcal{L}(K_1) >= \mathcal{F}(e^{it}) = 1$$

Prova: Se $0 < r < 1$ então a propriedade de monotonicidade da constante de Landau mostra que:

$$\mathcal{L}(K_1) \leq \mathcal{L}(K_r) = \frac{2}{\sqrt{3+\cos u}}$$

Como

$$\lim_{u \to 0} \frac{2}{\sqrt{3+\cos u}} = 1$$

Então $\mathcal{L}(k_1) \leq 1$. Entretanto, o movimento $f(t) = e^{it}$ pertence a $\mathcal{A}(K_1)$, enquanto nós encontramos facilmente que $\mathcal{F}(e^{it}) = 1$ Isto da a desigualdade oposta

$$\mathcal{L}(k_1) \geq 1$$

e estabelece o corolario 3.

Para um disco circular de raio R nós encontramos a relação

$$\mathcal{L}(K(R)) = \sqrt{2R}$$

Enunciamos para concluir um teorema que não será demonstrado.

TEOREMA 5: Se K é compacto e convexo então $\mathcal{L}(K) = \sqrt{D}$ onde D é o diametro conjunto K.

ooo0ooo

CAPÍTULO 3

O TEOREMA DE KOLMOGOROV

Introdução:

Obtivemos no capítulo 1, relações entre os valores superiores de derivadas sucessivas de uma função real de variável real quando tratamos com derivadas de até $4^{\underline{a}}$ ordem. Estas relações foram dadas atravez dos teoremas de Landau e Šilov.

Em 1934, Kolmogorov demonstrou um teorema que relaciona os citados valores para derivadas de quaisquer ordens, e que contém como caso particular os teoremas de Landau e Šilov.

Nêste 3º capítulo apresentaremos o teorema de Kolmogorov bem como sua demonstração que é extremamente simples. Para a demonstração serão utilizados tão somente alguns resultados elementares da Análise.

Embora a demonstração seja simples nos argumentos usados, ela é bastante trabalhosa.

Procede-se por indução sobre n (ordem da última derivada, e sobre K (ordem da derivada que lhe é comparada). $(1<K<n)$.

Observamos que certas funções periódicas são sinal de igualdade na desigualdade de Kolmogorov.

Destas são obtidas funções com mesmas características de periodicidade que poderão ser comparadas a uma função genérica não necessariamente periódica, mas derivavel até ordem n e limitada. Atravéz desta comparação será possível obtermos a relação desejada.

3.1 - ENUNCIADO DO PROBLEMA

Consideramos uma função f(x) cujas primeiras n derivadas são limitadas em todo eixo real. Pela limitação da n-ésima derivada vamos significar que a derivada (n-1)-ésima tem números derivados limitados. Admitimos portanto que o gráfico de n-1-ésima derivada seja continuamente tangenciavel exeto, em bicos; que entretanto serão em número finito em cada intervalo e admitirão inclinação finita à esquerda e a direita.

Façamos:

$$M_k(f) = \|f^{(k)}\| = \sup|f^{(k)}|(x) \quad , \quad K=0,1,2,3,\ldots,n$$

Notamos que $M_n(f)$ denota o limite superior do valor absoluto dos números derivados da (n-1)-ésima derivada.

TEOREMA 1 (de Kolmogorov).

Para que a terna de números positivos M_o, M_k, M_n $(0<k<n)$ possa corresponder uma função f(x) para a qual

$$M_o = M_o(f)\,, \quad M_k = M_k(f) \quad M_n = M_n(f)$$

é necessário e suficiente que as seguintes condições possam ser satisfeitas:

$$(3.1.1) \qquad M_k \leq C_{nk}\, M_o^{\frac{n-K}{n}}\, M_n^{\frac{K}{n}}$$

onde

$$(3.1.2) \qquad C_{nk} = K_{n-k} : K_n^{\frac{n-k}{n}}$$

$$K_i = 4/\pi \left(1 - \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{5^{i+1}} - \frac{1}{7^{i+1}} + \ldots\right) \text{ para } i \text{ par}$$

$$K_i = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{5^{i+1}} + \frac{1}{7^{i+1}} + \ldots\right) \text{ para } i \text{ ímpar}$$

A desigualdade (3.1.1) pode ser escrita na forma

$$(3.1.1^*) \qquad M_k^n \leq C_{nk}^n \, M_o^{n-k} \, M_n^k$$

Esta forma tem a vantagem que, todos os coeficientes C_{nk}^n são racionais. Daremos os valores de C_{nk}^n para $n \leq 5$.

C_{nk}^n				
n^k	1	2	3	4
2	2			
3	$\frac{9}{8}$	3		
4	$\frac{512}{375}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{24}{5}$	
5	$\frac{1953125}{1572864}$	$\frac{125}{72}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{5}{2}$

Damos também os valores aproximados das constantes C_{nk} para $n \leq 7$.

C_{nk}						
n^{k}	1	2	3	4	5	6
2	1,41421					
3	1,10293	1,4425				
4	1,08096	1,4425	1,48017			
5	1,04426	1,11665	1,11942	1,49631		
6	1,04298	1,08001	1,14520	1,14280	1,50892	
7	1,03451	1,07289	1,10472	1,16471	1,5137	1,517748

Fazemos também algumas observações sobre o comportamento das constantes C_{nk} .

Desde que evidentemente $K_i \to 4/\pi$ para $i \to \infty$, temos:

1) Para $n \to \infty$ e $n-k$ limitado,

$$C_{nk} = K_{n-k} + \varepsilon_{nk} \ , \ \varepsilon_{nk} \to 0$$

2) Para $n \to \infty$ e $n-k \to \infty$

$$C_{nk} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{k}{n}} + \varepsilon_{nk} \ ; \ \varepsilon_{nk} \to 0$$

Em particular,

$$C_{n,n-1} \to K_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{para } n \to \infty$$

$$C_{n,1} \to 1 \quad \text{para } n \to \infty$$

O interesse das duas últimas relações é acrescido pelo fato que para todo n e $k(0<k<n)$ temos as desigualdades

$$(3.1.3) \qquad 1 < C_{nk} < \pi/2$$

Provaremos aqui que $K_1 = \frac{\pi}{2}$.

Para isso consideramos a função $f(x) = x - \pi/2$, $0<x<\pi$, e estendemos esta função para todo x real, de forma que seja par e tenha peíodo 2π.

Consideramos o desenvolvimento desta função em série de fourier

$$f(x) = a_o/2 + \sum_1^\infty a_n \quad \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Como a nossa função foi estendida de forma que fosse par assim teremos

$$b_n = 0 \quad e \quad an = 2/\pi \int_0^\pi (x - \pi/2) \cos nx dx$$

$$= 2/\pi \left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right)$$

Resulta que:

$$x - \pi/2 = \sum_1^\infty 2/\pi \left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right) \quad \cos nx$$

$$= 2/\pi \sum_1^\infty - \frac{2\cos nx}{(2n-1)^2}$$

donde fazendo $x = 0$ resulta

$$- \pi/2 = 2/\pi \sum_1^\infty \frac{-2}{(2n-1)^2}$$

e portanto

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

temos:

$$K_1 = 4/\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 4/\pi \cdot \pi^2/8 = \pi/2$$

ficando assim provado o valor de $K_1 = \frac{\pi}{2}$.

Na prova do teorema 1 usaremos o fato de que a equação extremante:

$$(3.1.4) \qquad M_k(f) = C_{nk} M_0^{\frac{n-k}{n}}(f)\, M_n^{\frac{k}{n}}(f)$$

é atingida em particular para dados valores de n e k $(0 < k < n)$, pelas funções

$$(3.1.5) \qquad f_n(x) = 4/\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2m+1)x - \frac{\pi}{2}n)}{(2m+1)^{n+1}}$$

De fato: para estas funções temos

$$M_o(f_n) = K_n, M_k(f_n) = \sup |f_{n-k}(x)| = K_{n-k}$$

e

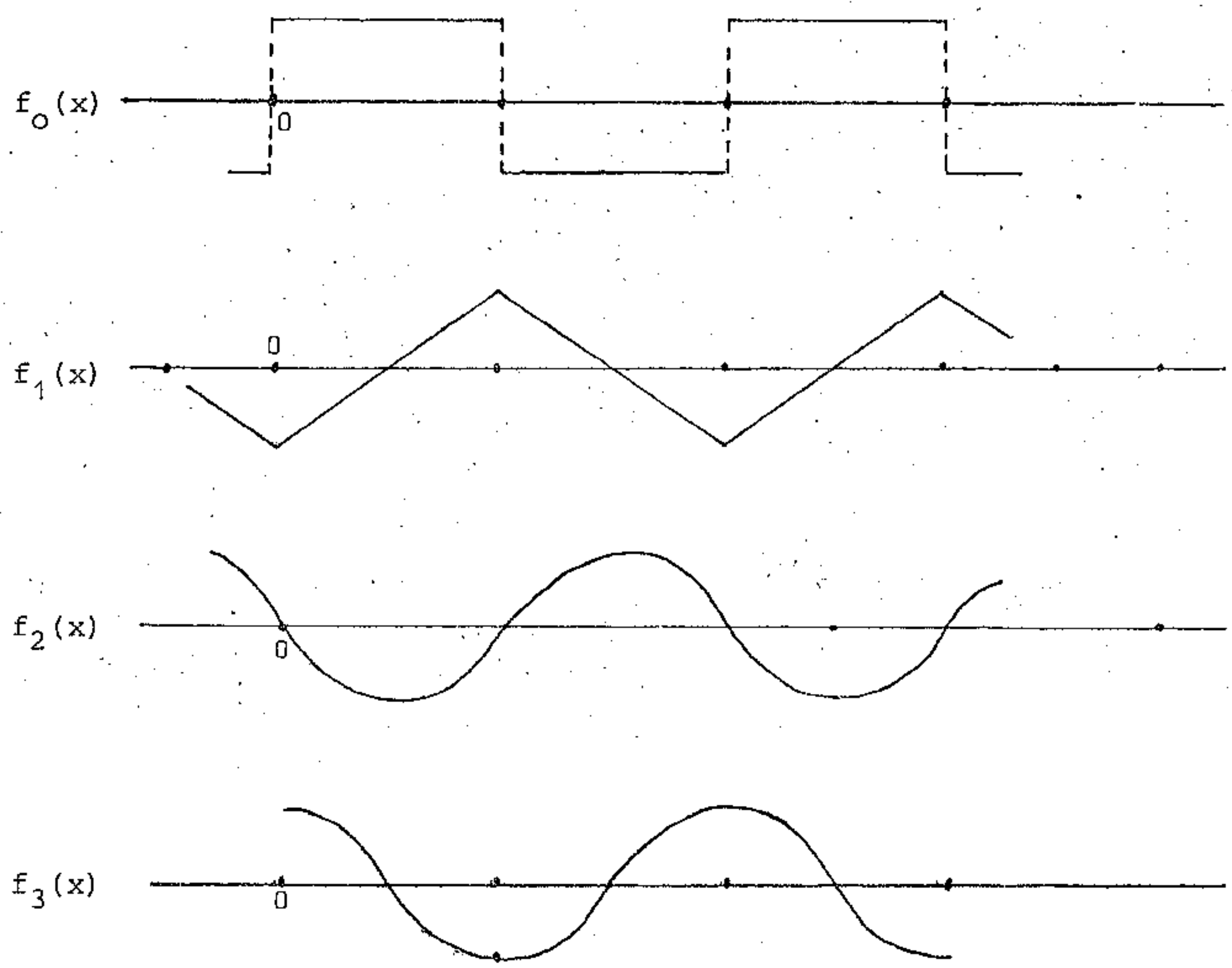
$$M_n(f_n) = \sup |f_o(x)| = 1$$

pois f_o representa em série de fourier a função $f(x)$, de período 2, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi<x<0 \\ 1 & \text{se } 0<x<\pi \end{cases}$$

Assim

$$M_k(f_n) = K_{n-k} = (K_{n-k} : K_n \frac{n-k}{n}) \cdot (K_n \frac{n-k}{n} \cdot 1) = K_{n-k}$$



É fácil verificar que se a igualdade (3.1.4) é satisfeita pelas funções $f_n(x)$ é também satisfeita por qualquer função da forma:

(3.1.6) $$\phi_n(x) = a\, f_n(bx+c)$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e c é uma constante qualquer.

Basta ver que:

$$\text{(A)}\quad M_o(\phi_n) = a\, M_o(f_n),\ M_k(\phi_n) = a\, b^k\, M_k(f_n) \quad \text{e}$$

$$M_n(\phi_n) = a\, b^n\, M_n(f_n)$$

temos em (3.1.1) a igualdade

$M_k(f_n) = C_{nk}\, M_o^{\frac{n-k}{n}}(f_n) M_n^{\frac{k}{n}}(f_n)$ valida para as funções f_n. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $a\, b^k$ temos

$$a\, b^k\, M_k(f_n) = C_{nk}\, a^{\frac{n-k}{n}}\, M_o^{\frac{n-k}{n}}(f_n)\, a^{\frac{k}{n}}\, b^{\frac{nk}{n}}\, M_n^{\frac{k}{n}}(f_n)$$

que, levando em conta as igualdades (A) equivale a (3.1.1) para a função ϕ_n com sinal de igualdade.

As constantes a e b podem ser escolhidas tais que $M_o(\phi_n)$ e $M_n(\phi_n)$ assumam valores positivos arbitrários.

As funções $f_n(x)$ são periódicas de período 2π. Além disso satisfazem à equação:

$$f_n(m\,\tfrac{\pi}{2} + x) = (-1)\ m + n = 1\ f_n(m\,\tfrac{1}{2} - x)$$

isto é prontamente verificado notando que esta igualdade equivale a dizer que:

$$f_n(m\,\tfrac{\pi}{2} + x) = -\,f_n(m\,\tfrac{\pi}{2} - x) \text{ se m e n são}$$

ambos pares ou ambos ímpares, pois neste caso, m+n+1 é ímpar e

$f_n(m\,\frac{\pi}{2} + x) = f_n(m\,\frac{\pi}{2} - x)$ se m é par e n é ímpar ou vice-versa, pois neste caso, m+n+1 é par.

Reportando-nos as nossas funções f_n basta examinar agora

$$\operatorname{sen}(2i+1)\left(\left(m\frac{\pi}{2}+x\right)-\frac{\pi}{2}n\right) \quad e \quad \operatorname{sen}(2i+1)\left(\left(m\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{\pi}{2}n\right)$$

que são respectivamente iguais a:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left[(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}+(2i+1)x\right] & e \\ \operatorname{sen}\left[(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}-(2i+1)x\right] \end{cases}$$

aplicando agora as propriedades da soma de arcos tem-se respectivamente:

$$(B)\begin{cases} \operatorname{sen}\left[(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[(2i+1)x\right]+\cos\left[(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}\right]\operatorname{sen}\left[(2i+1)x\right] \\ e \\ \operatorname{sen}\left[(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[(2i+1)x\right]-\cos\left[(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}\right]\operatorname{sen}\left[(2i+1)x\right] \end{cases}$$

então se m,n são pares ou m,n são ímpares $(2i+1)(m-n)$ é par $\operatorname{sen}(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}$ vale zero e $\cos(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}$ vale 1 ou -1 se m é ímpar e n é par ou vice-versa, $(2i+1)(n-m)$ é ímpar $\operatorname{sen}(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}$ vale 1 ou -1 e $\cos(2i+1)(m-n)\frac{\pi}{2}$ vale zero.

Basta agora observar as expressões (B) para ter o resultado que procuramos.

Em virtude desta equação o comportamento da função $f_n(x)$ em todo o eixo real é univocamente determinado por seus valores num intervalo arbitrário da forma $m\,\pi/2 \leq x \leq (m+1)\pi/2$.

Para $n>0$, $f_n(x)$ varia em cada um destes intervalos monotona e contínuamente desde zero numa extremidade até $\pm K_n$ na outra. As funções da forma (3.1.6) tem propriedades semelhantes de periodicidade e simetria.

Destas propriedades de periodicidade e simetria das funções $\phi_n(x)$ é facil deduzir o seguinte: se, além dos valores de $M_o(\phi_n)$ e $M_n(\phi_n)$ damos o valor ξ da função $\phi_n(x)$ no ponto x_o, satisfazendo a condição $|\xi| \leq M_o(\phi_n)$, então estes tres dados determinam univocamente, quase todas as funções da forma (3.1.6) com efeito

$$M_o(\phi_n) = a\, M_o(f_n) \text{ implica } a = M_o(\phi_n) \cdot M_o^{-1}(f_n)$$

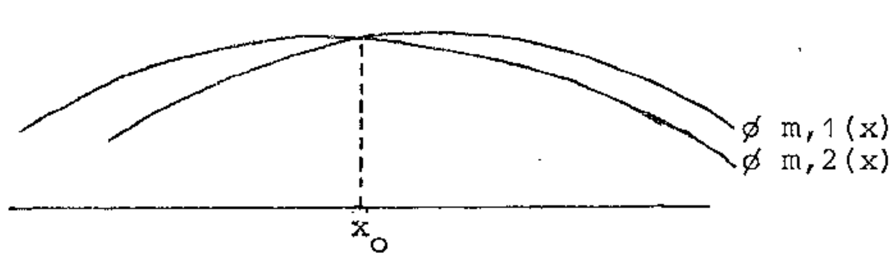
e

$$M_n(\phi_n) = a\, b^n M_n(f_n) = M_o(\phi_n) M_o^{-1}(f_n) b^n M_n(f_n) \text{ implica } b = \frac{M_n^{\frac{1}{n}}(\phi_n) M_o^{\frac{1}{n}}(f_n)}{M_o^{\frac{1}{n}}(\phi_n)\ M_n^{\frac{1}{n}}(f_n)}$$

(lembramos que $\phi_n(x) = a\, f_n(bx+c)$).

Finalmente dado o valor da função no ponto x_o é possível determinar c. Temos exatamente duas funções no caso $|\xi| < M_o(\phi_n)$ e uma no caso $|\xi| = M_o(\phi_n)$.

Se nós denotamos estas duas funções (coincidindo no caso $|\xi| = M_o(\phi_n)$) por $\phi_{n,1}(x)$ e $\phi_{n,2}(x)$, então $\phi'_{n,1}(x_o) = -\phi'_{n,2}(x_o)$ e consequentemente $|\phi'_{n,1}(x_o)| = |\phi'_{n,2}(x_o)|$.



Seja agora f(x) uma função derivavel até a ordem n, não necessariamente periódica, e tal que $\|f^{(K)}\| < \infty$, $K = 0,1,2,\ldots$ (os $M_i(f)$ são finitos).

Denominamos, uma função da forma (3.1.6), para a qual

$$M_o(\phi_n) = M_o(f)$$

$$M_n(\phi_n) = M_n(f)$$

$$\phi_n(x_o) = f(x_o)$$

uma função de comparação de ordem n para f(x) no ponto x_o .

Com esta definição provaremos o seguinte teorema:

TEOREMA 2

Se a função $\phi_n(x)$ é uma função de comparação de ordem n para a função f(x) no ponto x_o, então

$$(3.1.7) \qquad |f'(x_o)| \leq |\phi_n'(x_o)|.$$

Notamos que no caso n=1 as derivadas podem não existir para f(x) e $\phi_n(x)$, pois $f_1(x)$ apresenta bicos no seu gráfico (fig.1) e consequentemente $\phi_1(x)$ também os terá.

Entretanto a desigualdade (3.1.7) é valida neste caso para os números derivados. O teorema 2 afirma uma desigualdade mais forte que (3.1.1) para o caso k=1.

De fato, segue da desigualdade (3.1.7) que em cada ponto x_o:

$$|f'(x_o)| \leq M_1(\phi_n) = C_{n,1}M_o^{\frac{n-1}{n}}(\phi_n)\, M_n^{\frac{1}{n}}(\phi_n) = C_{n,1}M_o^{\frac{n-1}{n}}(f)\, M_n^{\frac{1}{n}}(f)$$

tem-se portanto

$$M_1(f) \leq C_{n,1}M_o^{\frac{n-1}{n}}(f)\, M_n^{\frac{1}{n}}(f)$$

que é a mesma desigualdade (3.1.1) para k=1.

As provas dos teoremas 1 e 2 serão efetuadas como segue: no ítem 3.2 a suficiencia das condições (3.1.1) do Teorema 1 é provada considerando funções da forma $X_n(x) = af_n(bx) + d$. No ítem 3.3 a necessidade da condição (3.1.1) do Teorema 1 e o Teorema 2 são provadas simultaneamente para o caso k=1 por indução em n. No ítem 3.4 a necessidade da condição (3.1.1) é provada no caso geral por indução em k.

3.2 - SUFICIÊNCIA DA CONDIÇÃO (3.1.1)

Para números positivos arbitrários M_o, M_k e M_n a equação

$$M_k^n = \gamma_{nk}^n M_o^{n-k} M_n^k$$

determina univocamente, para $0 < k < n$, o multiplicador

$$\gamma_{nk} = \gamma_{nk} (M_o, M_k, M_n) > 0$$

Para uma função arbitrária $f(x)$ com $M_i(f)$ finitos para $i \leq n$, tal como a descrita anteriormente.

Denotamos

$$\gamma_{nk}(f) = \gamma_{nk}(M_o(f), M_k(f), M_n(f)).$$

Diremos que uma terna de números positivos (M_o, M_k, M_n) é "possível" se existe uma função f com

$$M_o(f) = M_o, \quad M_k(f) = M_k, \quad M_n(f) = M_n .$$

Provamos o lema seguinte.

Lema: Se a terna (M_o, M_k, M_n) é "possível", também o serão todas as ternas (M_o', M_k', M_n') para as quais

$$\gamma_{nk}(M_o', M_k', M_n') \leq \gamma_{nk}(M_o, M_k, M_n) .$$

Prova: Pela hipótese do lema existe uma função f(x) para qual

$$M_o(f) = M_o \quad M_k(f) = M_k, \quad M_n(f) = M_n$$

é fácil ver que para a , b positivos e arbitrários a função

$$\phi(x) = af(bx)$$

satisfaz a equação $\gamma_{nk}(\phi) = \gamma_{nk}(f)$.

As constantes positivas a , b podem ser escolhidas tais que tenhamos

$$M_k(\phi) = M_k', \quad M_n(\phi) = M_n'$$

destas igualdades e da desigualdade

$$\gamma_{nk}(M_o',M_k',M_n') \leq \gamma_{nk}(M_o,M_k,M_n) = \gamma_{nk}(f) = \gamma_{nk}(\phi)$$

ou seja

$$\frac{M_k'^{\,n}}{M_o'^{\,n-k}\; M_n'^{\,k}} \leq \frac{M_k^n}{M_o^{n-k}\; M_n^k} = \gamma_{nk}(f) = \gamma_{nk}(f)$$

resulta que $M_o' \geq M_o(\phi)$. Pomos agora $\chi(x) = \phi(x)+d$, onde d é certa constante.

Evidentemente

$$M_k(\chi) = M_k(\phi) = M_k' ,$$
$$M_n(\chi) = M_n(\phi) = M_n'$$

Pela escolha da constante d podemos aumentar $M_o(\chi)$ arbitrariamente em relação a $M_o(\emptyset)$ e em particular podemos fazer $M_o(\chi) = M_o'$. Vemos então que a terna (M_o', M_k', M_n') é realmente "possível".

Em virtude do lema apenas provado fica claro que a suficiência da condição (3.1.1) ficará estabelecida se para cada n e k dados $(0 < k < n)$ puder ser encontrada pelo menos uma função $f(x)$ para a qual $\gamma_{nk}(f) = C_{nk}$. Precisamente esta condição é satisfeita pelas funções $f_n(x)$ definidas pela fórmula (3.1.5).

De fato, vê-se facilmente que para $k=1,2,\ldots,n$ as equações

$$f_n^{(k)}(x) = f_{n-k}(x) \quad , \tag{3.2.1}$$

$$M_k(f_n) = \sup|f_{n-k}(x)| = k_{n-k} \tag{3.2.2}$$

são verdadeiras. De (3.2.1), (3.2.2) e (3.1.2) segue que $\gamma_{nk}(f_n) = C_{nk}$

3.3 - NECESSIDADE DA CONDIÇÃO (3.1.1) PARA k = 1.

Nesta secção provaremos o Teorema 2 e a necessidade da condição (1) do Teorema 1 no caso k=1. Para obter ambas as proposições é suficiente estabelecer o seguinte:

(A) O teorema 2 vale para n=1.

(B) Se o teorema 2 vale para n=m, então a condição (3.1.1) do teorema 1 é necessária para n=m+1.

(C) Se o teorema 2 vale para n=m e a condição (3.1.1) é necessária para n=m+1, então o teorema 2 vale para n=m+1.

Para nós convencermos que vale A, é suficiente notar que pa ra um x arbitrário $|f_1'(x)| = 1$, e consequentemente no caso $n=1$ o valor absoluto da derivada da função de comparação

$$\phi_1(x) = af_1(bx)+c$$

do teorema 2 é constante:

$|\phi_1'(x)| = M_1(\phi_1) = M_1(f)$ conforme as hipóteses do teorema 2. Portanto para $n=1$ o teorema 2 se reduz à desigualdade trivial

$$|f'(x_o)| \leq M_1(f)$$

Veremos agora a prova de B. Denominamos uma função da forma

$$\bar{\phi}_n(x) = a\, f_n(bx+c) \quad \text{para a qual:}$$

$$M_o(\bar{\phi}_n) > M_o(f)$$

$$M_n(\bar{\phi}_n) = M_n(f)$$

$$\bar{\phi}_n(x_o) = f(x_o) \quad ,$$

uma função de comparação superior de ordem n para a função f(x) no ponto x_o. É fácil mostrar que para uma função de comparação superior $|\bar{\phi}_n'(x_o)|$ é sempre maior que $|\phi_n'(x_o)|$ para uma correspondente função de comparação $\phi_n(x)$ no senso estrito do termo. É também claro que uma função de comparação superior $\bar{\phi}n(x)$ pode ser sempre escolhida de modo que num intervalo finito contendo x_o dado arbitrariamente, a mesma função $\bar{\phi}_n(x)$ difere arbitrariamente pouco de $\phi_n(x)$

e sua derivada difere arbitramente pouco da derivada $\phi_n'(x)$.

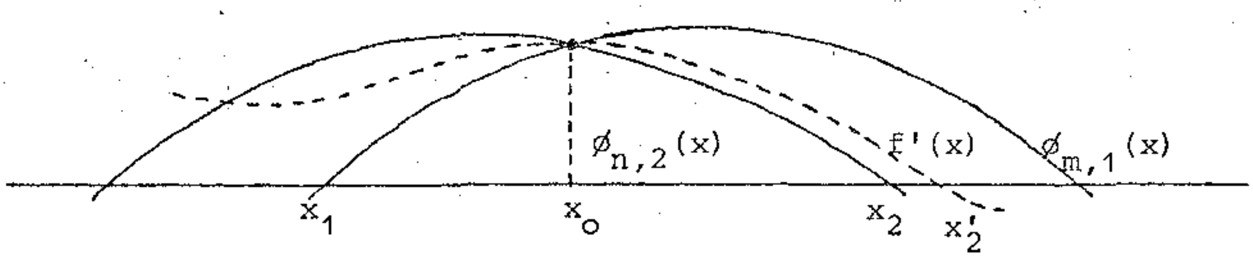
Então para todo n o teorema 2 é equivalente ao seguinte:

TEOREMA 2*. Se $\bar{\phi}_n(x)$ é uma função de comparação superior de ordem n para a função f(x) no ponto x_o, então

$$|f'(x_o)| < |\bar{\phi}_n'(x_o)| \qquad (3.3.1)$$

Supomos agora que os teoremas 2 e 2* tenham sido estabelecidos para n=m e consideramos a função f(x) com $M_i(f)$ finitos até i=m+1.

Figura 2



Para um ε arbitrariamente pequeno, podemos encontrar um ponto x_o t.q.

$$|f'(x_o)| > M_1(f) - \varepsilon$$

Podemos assumir sem perda de generalidade $f'(x_o) > 0$, caso contrário as considerações que seguem podem ser aplicadas a -f(x) ao invés de f(x).

Construimos 2 funções de comparação $\phi_{m,1}(x)$ e $\phi_{m,2}(x)$ para a função f'(x) no ponto x_o , satisfazendo às condições

$$\phi_{m,1}'(x_o) \geq 0 \quad \text{e} \quad \phi_{m,2}'(x) \leq 0$$

Denotamos por x_1 aquele zero da função $\phi_{m,1}(x)$ que está mais perto de x_o à esquerda, e por x_2 aquele zero da função $\phi_{m,2}(x)$ que está mais perto de x_o à direita (ver figura 2).

Provaremos agora que a desigualdade

$$f'(x) \geq \phi_{m,1}(x)$$

é valida no intervalo $[x_1,x_o]$, e a desigualdade

$$f'(x) \geq \phi_{m,2}(x)$$

é valida no intervalo $[x_o,x_2]$.

Estabelecemos a 1ª destas desigualdades.

Para isso consideramos em vez da função $\phi_{m,1}(x)$ uma função arbitrária de comparação superior $\bar{\phi}_{m,1}(x)$ de ordem m para $f'(x)$ no mesmo ponto x_o.

Denotamos por $\bar{x}_1$ o zero da função $\bar{\phi}_{m,1}$ que está mais perto de x_o à esquerda e provamos que, a desigualdade:

$$(3.3.3a) \qquad f'(x) > \bar{\phi}_{m,1}(x)$$

é satisfeita no intervalo $(\bar{x}_1,x_o)$. De fato, se esta desigualdade falha em qualquer lugar no intervalo $(\bar{x}_1,x_o)$ existe um ponto ξ do intervalo $(\bar{x}_1,x_o)$ o mais próximo à esquerda de x_o no qual ela falha. Neste ponto ξ, evidente são satisfeitas as seguintes relações:

$$(3.3.4) \qquad f'(\xi) = \bar{\phi}_{m,1}(\xi)$$

$$f''(\xi) \geq \bar{\phi}'_{m,1}(\xi) > 0 \tag{3.3.5}$$

A equação (3.3.4) mostra que $\bar{\phi}_{m,1}(x)$ pode ser considerado como uma função de comparação superior de ordem m para $f'(x)$ no ponto (ξ). Consequentemente pelo teorema 2 (que consideramos provado para n=m).

$$|f''(\xi)| < |\bar{\phi}'_{m,1}(\xi)| \tag{3.3.6}$$

A contradição entre (3.3.5) e (3.3.6) mostra que a desigualdade (3.3.3a) não falha no intervalo $(\bar{x}_1, x_o)$.

Se $\bar{\phi}_{m,1}(x)$ é escolhida suficientemente próxima de $\phi_{m,1}(x)$ o ponto $\bar{x}_1$ estará arbitrariamente próximo de x_1 .

Então obtemos a desigualdade (3.3.2a) no intervalo $[x_1, x_o]$ tomando limite em (3.3.3a).

A desigualdade (3.3.2b) se prova analogamente.

Das desigualdades (3.3.3a) e (3.3.2b) segue que

$$f(x_2)-f(x_1) \geq \int_{x_1}^{x_o} \phi_{m,1}(x)\,dx + \int_{x_o}^{x_2} \phi_{m,2}(x)\,dx \tag{3.3.7}$$

Se ε é escolhido suficientemente pequeno, $\phi_{m,2}(x)$ difere arbitrariamente pouco de $\phi_{m,1}(x)$ em $[x_o, x_2]$ e o ponto x_2 é arbitra-próximo do zero x_2' da função $\phi_{m,1}(x)$ mais próximo de x_o à direita. (ver figura 2). Consequentemente o lado esquerdo da desigualdade (3.3.7) pode-se fazer arbitrariamente próximo de

$$\int_{x_1}^{x_2'} \phi_{m,1}(x)\,dx \tag{3.3.8}$$

Notamos agora que: $\phi_{m,1}(x) = af_m(bx+c)$ é a derivada da função

$$\phi_{m+1}(x) = \frac{a}{b} f_{m+1}(bx+c)$$

Vê-se facilmente que a integral (3.3.8) estendida sobre um intervalo entre dois zeros consecutivos de $\phi_{m,1}(x)$ no qual esta função é positiva, é exatamente igual a $2M_o(\phi_{m+1})$.

Desde que no outro membro $f(x_2) - f(x_1) \leq 2M_o(f)$ obtemos $M_o(f) \geq M_o(\phi_{m+1})$ em virtude de (3.3.7) e da aproximação arbitraria do membro esquerdo de (3.3.7) com a integral (3.3.8).

Desta última desigualdade combinada com as equações

$$M_1(\phi_{m+1}) = C_{m+1,1} M_o^{\frac{m}{m+1}}(\phi_{m+1})\ M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(\phi_{m+1})$$

$$M_1(\phi_{m+1}) = M_o(\phi_{m,1}) = M_o(f') = M_1(f)$$

$$M_m(\phi_{m+1}) = M_m(\phi_{m,1}) = M_m(f') = M_{m+1}(f)$$

finalmente obtemos:

$$M_1(f) \leq C_{m+1,1}\ M_o^{\frac{m}{m+1}}(f)\ M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(f)$$

que prova B por completo

Provaremos agora a afirmação C.

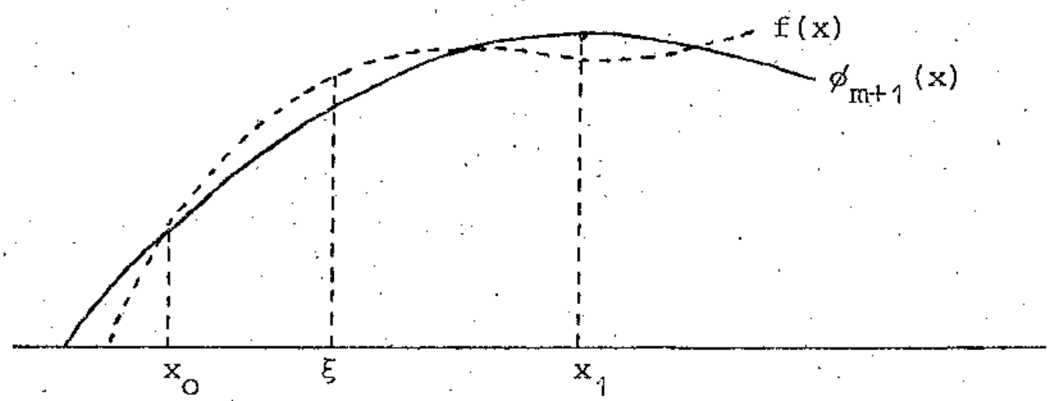
Assumimos que a necessidade da condição (3.3.1) para $n=m+1$ e $k=1$ já foi estabelecida e que os teoremas 2 e 2* já foram provados para $n=m$. Suponhamos que, contrariamente à afirmação C, o teorema 2* não é verdade para $n=m+1$.

Suponha que a desigualdade

$$|f'(x_o)| \geq |\bar{\phi}'_{m+1}(x_o)|$$

Seja verdadeira para alguma função f(x) e alguma função de comparação superior de ordem m+1 no ponto x_o .

Figura 3



Como $M_o(\bar{\phi}_{m+1}) > M_o(f)$, o ponto x_o não pode ser um máximo para $\bar{\phi}_{m+1}$ pois neste ponto tem-se $\bar{\phi}_{m+1}(x_o) = f(x_o)$, consequentemente $\bar{\phi}'_{m+1}(x_o) \neq 0$ e $f'(x_o) \neq 0$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $f(x_o) \geq 0$ e $f'(x_o) > 0$ Caso contrário podemos se necessário trocar f(x) por -f(x) e x por (-x). Podemos também escolher a função de comparação tal que $\bar{\phi}'_{m+1}(x_o) \geq 0$ (ver figura 3).

Seja agora x_1 o máximo de $\bar{\phi}_{m+1}(x)$ que está mais próximo de x_o à direita, nós temos:

$$f(x_o) = \bar{\phi}_{m+1}(x_o)$$

$$f(x_1) \leq M_o(f) < M_o(\bar{\phi}_{m+1}) = \bar{\phi}_{m+1}(x_1)$$

Consequentemente, a diferença $f(x) - \bar{\phi}_{m+1}(x)$ atinge o seu máximo nalgum ponto à esquerda de x_1. Neste ponto ξ temos

$$(3.3.9) \qquad f'(\xi) - \bar{\phi}'_{m+1}(\xi) = 0 \text{ implica } f'(\xi) = \bar{\phi}'_{m+1}(\xi)$$

$$f''(\xi) - \phi''_{m+1}(\xi) \leq 0 \text{ implica } f''(\xi) \leq \bar{\phi}''_{m+1}(\xi)$$

Diferenciando a função $\bar{\phi}_{m+1}(x) = af_{m+1}(bx+c)$ obtemos a função $\bar{\phi}_m(x) = \bar{\phi}'_{m+1}(x) = abf_m(bx+c)$

Notamos que em virtude da definição de função de comparação superior $\bar{\phi}_{m+1}(x)$.

$$(3.3.10) \qquad M_o(f) < M_o(\bar{\phi}_{m+1})$$

$$(3.3.11) \qquad M_m(f') = M_{m+1}(f) = M_{m+1}(\bar{\phi}_{m+1}) = M_m(\bar{\phi}_m)$$

Agora, a desigualdade (3.1.1), que assumimos provada até o caso $n=m+1$ e $k=1$ nos dá junto com (3.3.10).

$$(3.3.12) \qquad M_o(f') = M_1(f) \leq C_{m+1,1} M_o^{\frac{m}{m+1}}(f) M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(f) < C_{m+1,1} M_o^{\frac{m}{m+1}}(\bar{\phi}_{m+1}) M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(\bar{\phi}_{m+1})$$

$$= M_1(\bar{\phi}_{m+1}) = M_o(\bar{\phi}_m).$$

De (3.3.11),(3.3.12) e a equação $\bar{\phi}_m(\xi) = \bar{\phi}'_{m+1}(\xi) = f'(\xi)$.

Concluimos que $\bar{\phi}_m(x)$ é uma função de comparação superior de ordem m para $f'(x)$ no ponto (ξ).

Pelo teorema 2*, que foi assumido provado até, $n=m$ segue que

$$|f''(\xi)| < |\bar{\phi}'_m(\xi)| = |\bar{\phi}''_{m+1}(\xi)|$$

ou desde que $\bar{\phi}''_{m+1}(\xi) \leq 0$

$$(3.3.13) \qquad f''(\xi) > \bar{\varnothing}''_{m+1}(\xi)$$

A contradição entre as desigualdades (3.3.9) e (3.3.13) estabelece C.

3.4 - NECESSIDADE DA CONDIÇÃO (3.1.1) PARA K ARBITRÁRIO

Assumimos a necessidade da condição (3.1.1) já provada para todo n e $k \leq m$ ($m \geq 1$).

Provamos que, neste caso, é também verdade para k=m+1.

Para isso consideramos uma função f(x) com, $M_o(f)$, $M_{m+1}(f)$ e $M_n(f)$ finitos ($m+1<n$). Evidentemente

$$M_o(f') = M_1(f),\ M_m(f') = M_{m+1}(f),\ M_{n-1}(f') = M_n(f)$$

Desde que a necessidade da condição (3.1.1) já foi provada para k=m.

$$M_m(f') \leq C_{n-1,m}\, M_o^{\frac{n-1-m}{n-1}}(f')\, M_{n-1}^{\frac{m}{n-1}}(f')$$

ou, equivalentemente,

$$(3.4.1) \qquad M_{m+1}(f) \leq C_{n-1,m}\, M_1^{\frac{n-1-m}{n-1}}(f)\, M_n^{\frac{m}{n-1}}(f)$$

Ainda, desde que a necessidade da condição (3.1.1) já foi provada no caso k=1 para n arbitrário, temos

$$(3.4.2) \qquad M_1(f) \leq C_{n,1}\, M_o^{\frac{n-1}{n}}(f)\, M_n^{\frac{1}{n}}(f)$$

substituindo (3.4.2) em (3.4.1) temos

$$M_{m+1}(f) \leq C_{n-1,m} C_{n,1}^{\frac{n-1}{n}} M_o^{\frac{n-1-m}{n}}(f)\, M_n^{\frac{m+1}{n}}(f)$$

e desde que

$$C_{n-1,m}\, C_{n,1}^{\frac{n-1}{n}} = C_{n,m+1}$$

finalmente

$$M_{m+1}(f) \leq C_{n,m+1} M_o^{\frac{n-m-1}{n}}(f)\, M_n^{\frac{m+1}{n}}(f)$$

que prova nossa afirmação.

ooo0ooo

B I B L I O G R A F I A

[1] Abramovitz M. - Handbook of matematical functions with formulas, graphs and methematical tables National Bureau of Standards, Washington D.C., 1964.

[2] Bagg T. - Une inégalité de Kolmogorof et les fonctions presque-periodiques, Danske Vid. Selsk. Math. Fys. Medd. 19(1941) Nº4, 28 pages.

[3] Coppel W.A. - Stability and asymptotic behavior of differential equations, Healt, Boston 1965.

[4] Landau E. - Einige Ungleichungen fur zweimal differentzierbare Funktionen, Proc. London Math. Soc. (2) 13 (1913) 43-49.

[5] Kolmogorov A. - On inegualities B etween the upper bounds of the sucessives derivatives of an arbitrary function on an infinite interval, Amer. Math. Soc. Translations, series 1,2 (1962) 233-243.

[6] Matorin A.P. - On inegualities between the maxima-of the absolute value of a function and its derivatives on a half-line, Amer. Math. Soc. Translations, Series 2,8(1958) 13-17.

[7] Norlund N.E. - Vorlesungen uber Differenzenrechung, Springer verlag, Berlin, 1924.

[8] Schoenberg I. - The elementary cases of Landau's problem of inequalities between derivatives, MONTHLY, 80(1973) 121-158.

[9] Subbotin J.N. - On the relation between finite differences and the corresponding derivatives Proc. Steklov. Inst. Math., 78(1965) 24-42.