Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Estruturas quase Hermitianas Invariantes

e

Ideais Abelianos

por

Edson Carlos Licurgo Santos[†]
Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof$^{\underline{o}}$ Dr$^{\underline{o}}$ Caio José Colletti Negreiros

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Estruturas quase Hermitianas Invariantes e Ideais Abelianos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Edson Carlos Licurgo Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de janeiro de 2003.

Profº Drº Caio José Colletti Negreiros

Banca examinadora:

Profº Drº Caio José Colletti Negreiros.

Profº Drº Luiz A. Barrera San Martin.

Profº Drº Osvaldo Germano do Rocio.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Santos, Edson Carlos Licurgo

Sa59e Estruturas quase hermitianas invariantes e ideais abelianos / Edson Carlos Licurgo Santos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Caio José Coletti Negreiros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Algebra de. 2. Lie, Grupos semi-simples de. 3. Espaços homogeneos. I. Negreiros, Caio José Coletti. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de janeiro de 2003 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Prof (a). Dr (a). OSVALDO GERMANO DO RÓCIO

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus, pela proteção.

À minha esposa Maria, por ter acumulado a função de pai durante a realização deste trabalho.

Aos meus filhos Daniel e Davi, pelo carinho e apoio.

Aos pais Salvino e Lucia.

A Professores San Martin, Caio e Osvaldo pelos ensinamentos, correções e fundamentalmente pela paciência.

Aos amigos Gilmar, Luciano, Marcos Verdi, Bianca, Poling, Paula, Marcelo, Rogério, Fernando Bando, Lucas, Marcela, Amauri, Elder, Sofia, Rita, Adélia, Josemir, Neusa, Karine e a tantos outros que de forma direta ou indireta comigo colaboraram.

Á UNICAMP e aos funcionários da secretaria de pós-graduação.

Resumo

Iniciamos o trabalho tomando uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ complexa semi-simples e considerando sua variedade bandeira maximal $\mathbb{F} = G/P$, onde G é um grupo de Lie complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, P um subgrupo (parabólico minimal) de Borel de G. Se U é um subgrupo compacto maximal de G pode-se escrever $\mathbb{F} = U/T$ onde $T \subset U$ é um toro maximal.

Com o objetivo de estudar as estruturas quase Hermitianas U-invariantes sobre $\mathbb{F}$, isto é, pares (J, Λ) com J uma estrutura quase complexa invariante e Λ uma métrica Riemanniana invariante, no primeiro capítulo provamos que as estruturas quase Hermitiana quase Kähler invariantes são também Kähler.

Para cada alcova A associamos uma estrutura quase complexa invariante $J(A)$, dita afim, e mostramos que esta admite uma métrica Λ, que torna $(1, 2)$-simplético o par (J, Λ). A recíproca, isto é, a prova de que se o par (J, Λ) é $(1, 2)$-simplético, então J é afim, passa pela construção fundamental deste trabalho, a saber a construção dos ideais abelianos.

Desenvolvemos, a seguir uma fórmula que relaciona dois ideais abelianos diferentes representando a mesma classe de equivalência.

Com esta preparação, reduzimos as dezesseis classes de estruturas quase Hermitianas invariantes dadas por Gray e Hervella em [GH] a apenas quatro. Grande parte das demonstrações envolvidas nesta redução são conseqüência direta das condições definidas para as classes. O único caso que requer os resultados sobre as estruturas $(1, 2)$-simpléticas, é a prova de que estruturas "near" Kähler invariantes são Kähler se a álgebra de Lie não é A_2.

Abstract

Let G be a complex semi-simple Lie group and form its maximal flag manifold $\mathbb{F} = G/P = U/T$ where P is a minimal parabolic subgroup, U a compact real form and $T = U \cap P$ a maximal torus of U. We study U-invariant almost Hermitian structures on $\mathbb{F}$. The $(1,2)$-symplectic (or quasi-Kähler) structures are naturally related to the affine Weyl groups. A special form for them, involving abelian ideals of a Borel subalgebra, is derived. From the $(1,2)$-symplectic structures a classification of the whole set of invariant structures is provided, showing, in particular, that near Kähler invariant structures are Kähler, except in the A_2 case.

Sumário

Resumo iv

Abstract v

Introdução vii

1 Conceitos Básicos 1

1.1 Álgebras de Lie 1

1.2 Variedades Bandeira 5

1.3 Métricas Invariantes 6

1.4 Estruturas quase complexas invariantes 9

1.5 Estruturas equivalentes 11

1.6 Forma Kähler 12

2 Estrutura quase complexa invariante afim 18

3 Ideais abelianos 24

4 Estruturas $(1,2)$-admissíveis são afins 40

5 Equivalência de *iacs* $(1,2)$-admissíveis 50

6 Classes de estruturas quase Hermitiana 58

A Raiz Máxima 72

Introdução

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ complexa semi-simples, consideramos a variedade bandeira maximal correspondente $\mathbb{F} = G/P$ onde G é um grupo de Lie complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e P um subgrupo parabólico minimal (de Borel) de G. Se U é um subgrupo compacto maximal de G podemos escrever $\mathbb{F} = U/T$ onde $T \subset U$ é um toro maximal. Este trabalho estuda estruturas quase Hermitianas U-invariantes sobre $\mathbb{F}$. Uma tal estrutura é composta de um par (J, Λ) com J uma estrutura quase complexa invariante e Λ uma métrica Riemanniana invariante.

O entendimento da classe das estruturas quase Hermitianas quasi-Kähler (ou $(1, 2)$-simpléticas) é o ponto central no estudo das estruturas quase Hermitianas.

É utilizada a abreviação *iacs* para estrutura quase complexa invariante. Uma *iacs* J é dita $(1, 2)$-admissível se existe uma métrica Λ tal que o par (J, Λ) é $(1, 2)$-simplético. São dadas diferentes caracterizações para as *iacs* $(1, 2)$-admissível. Utilizamos as combinatórias geométricas dos sistemas de raízes e seus grupos de Weyl para obter os resultados desejados. Assim, tomamos $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan e Π o conjunto de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Uma estrutura quase complexa invariante sobre $\mathbb{F}$ é dada por uma aplicação $\alpha \in \Pi \longmapsto \varepsilon_\alpha \in \{\pm 1\}$, com $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$. Analogamente, uma métrica invariante é dada por $\lambda_\alpha > 0$ com $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha, \alpha \in \Pi$. Logo, uma estrutura quase Hermitiana invariante é dada pelo par $(\{\varepsilon_\alpha\}, \{\lambda_\alpha\})$.

Num primeiro passo mostramos que $(\{\varepsilon_\alpha\}, \{\lambda_\alpha\})$ é quase Kähler (isto é, a forma de Kähler, ou a 2-forma fundamental é simplética) se, e somente se, o conjunto $\{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$ corresponde a uma escolha de raízes positivas em Π. Com isto, estruturas quase Kähler são Kähler. Como a escolha de um conjunto de raízes positivas é equivalente a escolhas de uma câmara de Weyl, temos que o conjunto das *iacs* admitindo uma métrica quase Kähler está em bijeção com o conjunto de câmaras de Weyl em $\mathfrak{h}$, que está por sua vez em bijeção com o grupo de Weyl W.

Consideramos os correspondentes grupos de Weyl afim e o conjunto de alcovas em $\mathfrak{h}$ para encontrar uma interpretação geométrica, semelhante às quase Kähler, para as *iacs* $(1, 2)$-admissível. Fixamos então uma alcova básica A_0 e associamos a uma alcova A uma estrutura quase complexa invariante $J(A) = \{\varepsilon_\alpha(A)\}$. Os sinais $\varepsilon_\alpha(A)$ são obtidos contando módulo 2 o número de hiperplanos $\{\alpha(\cdot) = k \in \mathbb{Z}\}$ separando A e A_0. Chamamos *iacs* afim a uma do tipo $J(A)$, para alguma alcova A.

A descrição geométrica é estabelecida quando finalmente provamos que uma *iacs* é $(1,2)$-admissível se, e somente se, ela é afim. Para isto passamos pela construção, de interesse independente, dos ideais abelianos. De fato, provamos que para qualquer *iacs* $(1,2)$-admissível existe uma escolha de raízes positivas Π^+ tal que o conjunto $\{\alpha > 0; \varepsilon_\alpha = -1\}$ é um ideal abeliano de Π^+.

A bijeção entre as *iacs* $(1,2)$-admissíveis e as afim estabelece a conexão entre as estruturas quase Hermitianas $(1,2)$-simpléticas e o grupo de Weyl afim. A técnica aqui une os resultado de Shi [YS] - caracterizando as coordenadas de uma alcova - com a forma ideal abeliano admitida pelas estruturas $(1,2)$-simpléticas.

Embora algumas classes de equivalências de *iacs* possam ser representadas por mais que uma J, todas as classes são representadas por alguma J afim. No capítulo 5 relacionamos dois ideais abelianos diferentes representando a mesma classe de equivalência de estruturas quase Hermitianas. Até este capítulo as *iacs* afim entram somente como uma descrição adicional das estruturas $(1,2)$-simpléticas. A análise das classes de equivalência é nossa primeira aplicação da descrição afim.

No desenvolvimento do estudo das estruturas quase Hermitianas invariantes sobre $\mathbb{F}$ notamos que a classe das $(1,2)$-simpléticas é a principal entre as dezesseis classes dadas por Gray e Hervella [GH]. Mostramos no capítulo 6 que estas dezesseis classes se reduzem a quatro classes de estruturas quase Hermitianas invariantes com três possibilidades para as *iacs*. Estas são a classe das estruturas Kähler, a classe das $(1,2)$-simpléticas, a classe de todas as estruturas invariantes e uma quarta (a saber $W_1 \oplus W_3$) que inclui toda toda *iacs* mas somente algumas métricas específicas, entre elas a de Cartan-Killing.

Em todo o trabalho a variedade bandeira considerada é maximal, isto é, quando o subgrupo de isotropia é o maximal de U. O desafio a ser vencido no futuro é o de se considerar uma variedade bandeira qualquer, com T não necessariamente sendo um toro maximal.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo vamos introduzir os objetos de nosso estudo. Estaremos ocupados com definições, conceitos e resultados básicos que vão embasar os capítulos vindouros.

1.1 Álgebras de Lie

Aqui transcrevemos de $[SM]$ alguns fatos envolvendo álgebras de Lie, dos quais vamos necessitar.

Definição 1.1 *Seja $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma* ***álgebra de Lie*** *se existe um produto (colchete)*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz:

1. bilinearidade.

2. anti-simetria , isto é, $[X,X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e

3. a identidade de Jacobi, isto é, $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$, para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ se $X,Y \in \mathfrak{h}$ é chamado de *subálgebra* de $\mathfrak{g}$. Já um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que satisfaz $[X,Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$ é dito um *ideal* de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.2 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Uma aplicação linear $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$*

que satisfaz $\rho([X,Y]) = [\rho X, \rho Y]$, isto é, que é um homomorfismo é chamada de ***representação*** *de $\mathfrak{g}$ em V.*

Estaremos particularmente interessados na *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$, que é dada por $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, onde $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$, $X,Y \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.3 *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos, por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} & e & \mathfrak{g}^{1} = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] & & \mathfrak{g}^{2} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} = \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right] & & \mathfrak{g}^{k} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}\right] \end{array}$$

onde $[A,B]$ denota o subespaço gerado por $\{[X,Y]; X \in A, Y \in B\}$, se A e B são subconjuntos de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^{(k)}, \ldots$ é a ***série derivada*** *de $\mathfrak{g}$ e que $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \ldots, \mathfrak{g}^k, \ldots$ é a* ***série central descendente*** *de $\mathfrak{g}$.*

Temos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ e $\mathfrak{g}^{k}$ são ideais de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$, $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^{k}$ e $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

Definição 1.4 *Dada um álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que*
1) $\mathfrak{g}$ é ***solúvel*** *se existir $k_0 \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$ e*
2) $\mathfrak{g}$ é ***nilpotente*** *se existir $k_0 \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$.*

O teorema de Engel diz que $\mathfrak{g}$ é nilpotente se, e somente se, $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Conforme proposição 1.28 dada em $[SM]$, temos que existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel, chamado *radical solúvel*, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.5 *Dada um álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que:*
1) $\mathfrak{g}$ é ***semi-simples*** *se o radical solúvel de $\mathfrak{g}$ é nulo.*
2) $\mathfrak{g}$ é ***simples*** *se $\dim g \neq 1$ e os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$.*

Temos que as álgebras simples são também semi-simples.

A *forma de Cartan-Killing* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a forma bilinear simétrica denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dada por $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$. Envolvendo as definições anteriores temos os critérios de Cartan-Killing, cujas demonstrações são encontradas na seção 3.2 de $[SM]$:

1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}'$ e $Y \in \mathfrak{g}$.

2. A forma de Cartan-Killing é não-degenerada, isto é, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$ implica $X = 0$ se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é semi-simples.

O primeiro passo na direção das definições dos conceitos de peso (posteriormente raízes) e de subálgebra de Cartan é o seguinte teorema.

Teorema 1.6 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, um corpo algebricamente fechado, e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$, uma álgebra de Lie nilpotente, em V. Então existem funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de $\mathfrak{g}$ tais que se*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V; \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

então V_{λ_i} é invariante pela representação ρ, isto é, $\rho(X)(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}, \forall X \in \mathfrak{g}$ $1 \leq i \leq s$ e

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em $[SM]$, pág. 65.

Definição 1.7 *Um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ para o qual*

$$0 \neq V_\lambda = \{v \in V; \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

*é chamado de **peso**. Aqui $\mathfrak{g}$, V e a representação ρ são quaisquer.*

O subespaço V_λ da definição acima é dito *subespaço de pesos associado* a λ. A dimensão de V_λ é chamada de *multiplicidade* de λ.

Proposição 1.8 *Se $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação, isto é, uma aplicação linear que satisfaz $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

é a decomposição primária de $\mathfrak{g}$, conforme $[SM]$, pág. 430, onde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g}; (D - \lambda_i)^n X = 0, \text{ para algum } n \geq 1\},$$

então $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$ e $\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de D.

Como $\mathrm{ad}(X)$ é uma derivação, para cada $X \in \mathfrak{g}$, conforme $[SM]$, seção 1.4, podemos reescrever a proposição acima, cuja demonstração pode ser encontrada em $[SM]$, seção 3.1, em termos de $\mathrm{ad}(X)$. Neste caso, zero é sempre autovalor, pois $X \in \ker \mathrm{ad}(X)$. Denotamos por $\mathfrak{g}_0(X)$ o auto espaço generalizado associado ao autovalor nulo de $\mathrm{ad}(X)$.

Podemos agora definir subálgebras de Cartan.

Definição 1.9 *Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que é nilpotente e cujo normalizador em $\mathfrak{g}$ é o próprio $\mathfrak{h}$, isto é, $\{X \in \mathfrak{g};\ \mathrm{ad}(X)\,\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}$, é dita* ***subálgebra de Cartan****.*

No teorema 1.6, vamos tomar $V = \mathfrak{g}$ e ρ a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. Como a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em si mesma é nilpotente, o funcional nulo é sempre um peso dessa representação. Denotamos por $\mathfrak{g}_0$ o subespaço correspondente. As condições da definição de $\mathfrak{h}$ permitem ver que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Os pesos não-nulos da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ são chamados de *raízes*. Seu conjunto é denotado por Π e este gera o dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, ($[SM]$, lema 6.7). A existência de subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}$ é garantida em $[SM]$, pág. 104. Além disso, existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$. Outro fato relevante é que as subálgebras de Cartan são conjugadas entre si, isto é, uma é imagem da outra por automorfismos de $\mathfrak{g}$, ($[SM]$, teorema 4.10).

Por tudo que vimos até aqui, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre o corpo dos complexos, dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, denotando por Π o conjunto de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, podemos escrever

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ominus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, (ad(H) - \alpha(H))^n X = 0, \text{para algum } n \geq 1\}$. Mas, pela proposição 6.5 e lema 6.8 de $[SM]$, $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H) X\}$ e este é unidimensional.

Temos também que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não-degenerada sobre $\mathfrak{h}$, conforme lema 6.4 de $[SM]$. Assim, a aplicação $\mathfrak{h} \ni H \longmapsto \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle \in \mathfrak{h}^*$ é um isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^*$. Para cada $\alpha \in h^*$, denotamos por H_α sua imagem pela inversa desse isomorfirmo. Segue que $\alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$.

Fixando estas notações, podemos definir a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$ pondo $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle$. Denotamos por

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha H_\alpha ; a_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

o subespaço real gerado por $H_\alpha, \alpha \in \Pi$, e por $(\mathfrak{h}^*)_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha;\ a_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$ o subespaço real do dual $\mathfrak{h}^*$ gerado pelas raízes.

Fixada uma ordem lexicográfica, dada por uma base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$, o conjunto $\Sigma \subset \Pi$, formado pelas raízes simples, isto é, pelos elementos α que são positivos e para os quais não existem raízes positivas β, γ satisfazendo $\alpha = \beta + \gamma$, é um sistema simples de raízes. Isto significa que Σ é uma base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ e toda raíz β é escrita como $\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l$, com $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq l$. Reciprocamente, podemos partir de um sistema de raízes e definir um ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$.

Para uma escolha de raízes positivas $\Pi^+ \subset \Pi$, isto é, uma escolha de ordem lexicográfica, denotemos, como antes, por Σ o correspondente sistema simples de raízes e por $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$, a subálgebra de Borel gerada por Π^+. Para os detalhes destas discussões devemos consultar o capítulo 6 de $[SM]$.

Ao longo do texto estaremos sempre supondo que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples. Esta hipótese não causa perda de generalidade pois, se $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então $\mathfrak{g}$ se decompõe em soma direta de ideais simples, ($[SM]$, teorema 3.11). Os resultados no caso simples se estendem facilmente às semi-simples.

Vamos fixar algumas notações:

- Primeiramente fixamos uma base de Weyl de $\mathfrak{g}$ que é formada por elementos da forma $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, tal que $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$, $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$, $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$ com $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, $m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta}$ e $m_{\alpha,\beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não for uma raiz.

- Tomando $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$, podemos supor que $\mathfrak{u}$ é o subespaço gerado por $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ e A_α, $iS_\alpha, \alpha \in \Pi$, onde $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ e $S_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha}$. Temos que $\mathfrak{u}$ é uma álgebra de Lie real simples, $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$ e a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{u}$ é negativa definida. Para os detalhes sobre formas reais compactas e bases de Weyl devemos consultar $[SM]$, seção 12.2.

1.2 Variedades Bandeira

Sejam G um grupo de Lie complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $P = \{g \in G; \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$ o normalizador de $\mathfrak{p}$ em G. Temos que a álgebra de Lie de P é $\mathfrak{p}$. Como G é complexo, P é conexo e é o único subgrupo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{p}$.

Seja $G_{r_k}(\mathfrak{g})$ o conjunto das grasmannianas dos subespaços de dimensão k, onde $k = \dim \mathfrak{p}$. Temos que $\varphi : G \times G_{r_k}(\mathfrak{g}) \longrightarrow G_{r_k}(\mathfrak{g})$, dada por $\varphi(g, V) = \mathrm{Ad}(g) V$, é uma ação de G sobre $G_{r_k}(\mathfrak{g})$. Também, $\psi : G/P \longrightarrow G_{\mathfrak{p}}$, dada por $\psi(gP) = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}$, é uma bijeção entre G/P e a órbita de $\mathfrak{p}$ da ação φ, ou seja, G/P se identifica com $G_{\mathfrak{p}} = \{\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}; g \in G\}$.

Podemos identificar G/P também com o conjunto dos subgrupos conjugados a P, que é o conjunto dos subgrupos parabólicos minimais. Assim, podemos ver uma variedade bandeira maximal $\mathbb{F}$ de $\mathfrak{g}$ como o conjunto de subálgebras conjugadas a $\mathfrak{p}$. Logo, $\mathbb{F} = G/P$, onde $P = \{g \in G; \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$ é o normalizador de $\mathfrak{p}$ em G. Como a forma real compacta U de G, correspondente a $\mathfrak{u}$, age transitivamente sobre $\mathbb{F}$, por restrição a U da ação anterior, podemos escrever $\mathbb{F} = U/T$ onde $T = P \cap U$ é um toro maximal de U. A álgebra de Lie de T é o subsespaço real $\mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Denotando por b_0 a origem de $\mathbb{F}$, visto como espaço homogêneo de G ou de U, o espaço tangente em b_0 se identifica naturalmente com o subespaço $\mathfrak{q} = \mathfrak{u} \ominus \mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$, gerado por $A_\alpha, iS_\alpha, \alpha \in \Pi$. Também, o espaço tangente complexo de $\mathbb{F}$ é identificado com $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, gerado pelos espaços de raízes. A ação adjunta de T sobre $\mathfrak{g}$ deixa $\mathfrak{q}$ invariante.

Queremos estudar estruturas quase Hermitianas U-invariantes sobre $\mathbb{F}$. Uma estrutura quase Hermitiana U-invariante é composta de um par (J, Λ), onde J é uma estrutura quase complexa invariante e Λ é uma métrica Riemanniana invariante.

1.3 Métricas Invariantes

Uma métrica Riemanniana ds^2 sobre $\mathbb{F}$ que satisfaz para todo $x \in \mathbb{F}$

$$ds^2\left(dg_x X, dg_x Y\right) = ds^2(X, Y), \text{ se } X, Y \in T_x(\mathbb{F}), \ g \in U$$

é dita U-invariante. Aqui estamos vendo g como uma a aplicação de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{F}$.

Lema 1.10 *Se $(\cdot,\cdot)$ é um produto interno em $\mathfrak{q}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0$, $Z \in \mathfrak{t}$, $X, Y \in \mathfrak{q}$.

2) $(X, Y) = (\mathrm{Ad}(h)(X), \mathrm{Ad}(h)(Y))$, $X, Y \in \mathfrak{q}$ *e* $h \in T$.

Demonstração: Supomos (2). Por hipótese

$$(X, Y) = (\mathrm{Ad}(\exp tZ)(X), Ad(\exp tZ)(Y)), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, Z \in \mathfrak{t} \text{ e } X, Y \in \mathfrak{q}.$$

Logo, $(X, Y) = (\exp(t\mathrm{ad}(Z))(X), \exp(t\mathrm{ad}(Z))(Y))$. Derivando esta igualdade em $t = 0$, temos que $(\mathrm{ad}(Z)(X), Y) + (X, \mathrm{ad}(Z)(Y)) = 0$, ou seja, $([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0$, $Z \in \mathfrak{t}$, $X, Y \in \mathfrak{q}$.

Agora supomos (1). Consideremos a curva α dada por

$$\alpha(t) = (\exp(t\mathrm{ad}(Z))(X), \exp(t\mathrm{ad}(Z))(Y)), t \in \mathbb{R}, Z \in \mathfrak{t} \text{ e } X, Y \in \mathfrak{q}.$$

Temos que $\alpha'(t) = ([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0$, por hipótese. Logo, α é constante. Como $\alpha(0) = (X, Y)$, de

$$(\exp(t\mathrm{ad}(Z))(X), \exp(t\mathrm{ad}(Z))(Y)) = (\mathrm{Ad}(\exp tZ)(X), \mathrm{Ad}(\exp tZ)(Y))$$

segue que $(\mathrm{Ad}(\exp Z)(X), \mathrm{Ad}(\exp Z)(Y)) = (X, Y)$, para todo elemento da forma $\exp Z \in T$. Mas, T é conexo, e daí que todo elemento $h \in T$ é da forma $h = \exp Z_1 \cdots \exp Z_n$, $Z_i \in \mathfrak{t}$, $1 \leq i \leq n$. Portanto, dado $(X, Y) = (\mathrm{Ad}(h)(X), \mathrm{Ad}(h)(Y))$, $X, Y \in \mathfrak{q}$, pois Ad é um homomorfismo. □

Proposição 1.11 *Uma métrica Riemanniana U-invariante ds^2 sobre $\mathbb{F}$ é completamente determinada por seu valor na origem isto é, por um produto interno $(\cdot,\cdot)$ em $\mathfrak{q}$, que é invariante sob a ação adjunta de T.*

Demonstração: Se $(\cdot,\cdot)$ é um produto interno em $\mathfrak{q}$, que é invariante sob a ação adjunta de T, isto é, $([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0, Z \in \mathfrak{t}$, $X, Y \in \mathfrak{q}$, dados $x \in \mathbb{F}$ e $g \in U$, tal que $gb_0 = x$, definimos

$$ds^2(X, Y) = \left((dg_{b_0})^{-1} X, (dg_{b_0})^{-1} Y\right) \text{ para } X, Y \in T_x(\mathbb{F}).$$

Temos,

a. A definição de ds^2 independe da escolha de g. De fato, se $gb_0 = \widetilde{g}b_0$, então $g^{-1}\widetilde{g}b_0 = b_0$ e $h = g^{-1}\widetilde{g} \in T$. Notemos que $h : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ é dada por $[g] \longmapsto [hg]$ e $[hg] = [hgh^{-1}]$, pois $(hg)^{-1} hgh^{-1} = h^{-1} \in T$. Logo, $dh_{b_0} = d(C_h)_{b_0} = \mathrm{Ad}(h)$, onde $C_h : G \longrightarrow G$ é dada por $C_h(g) = hgh^{-1}$. Temos que $(X, Y) = (\mathrm{Ad}(h)X, \mathrm{Ad}(h)Y)$, $h \in T$, $X, Y \in \mathfrak{q}$ e $Ad(h) = dh_{b_0}$. Queremos mostrar que

$$\left((dg_{b_0})^{-1} X, (dg_{b_0})^{-1} Y\right) = \left((d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} X, (d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} Y\right), X, Y \in T_x(\mathbb{F}).$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\left((dg_{b_0})^{-1} X, (dg_{b_0})^{-1} Y\right) &= \left(\left(dg^{-1}\right)_{gb_0} X, \left(dg^{-1}\right)_{gb_0} Y\right) \\
&= \left(\left(dh\widetilde{g}^{-1}\right)_{gb_0} X, \left(dh\widetilde{g}^{-1}\right)_{gb_0} Y\right) \\
&= \left(dh_{b_0}\left(\left(d\widetilde{g}^{-1}\right)_{gb_0} X\right), dh_{b_0}\left(\left(d\widetilde{g}^{-1}\right)_{gb_0} Y\right)\right) \\
&= \left(\left(d\widetilde{g}^{-1}\right)_{gb_0} X, \left(d\widetilde{g}^{-1}\right)_{gb_0} Y\right) \\
&= \left((d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} X, (d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} Y\right),
\end{aligned}$$

como queríamos.

b. ds^2 é U-invariante. De fato, se $\widetilde{g} \in U$, $X, Y \in T_x(\mathbb{F})$ e $gb_0 = \widetilde{g}x$, então

$$\begin{aligned} ds^2\left(d\widetilde{g}_x X, d\widetilde{g}_x Y\right) &= \left((d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} d\widetilde{g}_x X, (d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} d\widetilde{g}_x Y\right) \\ &= \left(d\left(g^{-1}\widetilde{g}\right)_x X, d\left(g^{-1}\widetilde{g}\right)_x Y\right) \\ &= ds^2(X, Y), \end{aligned}$$

pois $(g^{-1}\widetilde{g})\, b_0 = x$ e por *(a)* a definição de ds^2 independe da escolha de g.

□

Qualquer produto interno em $\mathfrak{q}$, que é invariante sob a ação adjunta de T, tem a forma $(X, Y)_\Lambda = -\langle \Lambda X, Y \rangle$ com $\Lambda : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}$ positivo-definido com relação à forma de Cartan-Killing, isto é, $\langle \Lambda X, Y \rangle > 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{q}$, ([*SM*], pág. 434). Podemos estender o produto interno $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ para uma forma bilinear simétrica sobre a complexificação $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ de $\mathfrak{q}$, pondo $(X + iY, Z + iW)_\Lambda := (X, Z)_\Lambda + i\,(X, W)_\Lambda + i\,(Y, Z)_\Lambda - (Y, W)_\Lambda$. Usaremos a mesma notação $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ para esta forma bilinear simétrica, bem como para a correspondente aplicação complexificada Λ, que é dada por $\Lambda\,(X + iY) := \Lambda\,(X) + i\Lambda\,(Y)$. A T-invariância de $(X, Y)_\Lambda$ é equivalente aos elementos da base canônica A_α, iS_α, $\alpha \in \Pi$, serem autovetores de Λ, para o mesmo autovalor λ_α. Assim, no espaço tangente complexo temos

$$\begin{aligned} \Lambda(X_\alpha) &= \Lambda\left(\frac{A_\alpha + S_\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_\alpha A_\alpha + \lambda_\alpha S_\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_\alpha (2X_\alpha) \\ &= \lambda_\alpha X_\alpha. \end{aligned}$$

Além disso, $\lambda_\alpha > 0$, pois $0 < \langle \Lambda(X_\alpha), X_{-\alpha} \rangle = \langle \lambda_\alpha X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = \lambda_\alpha \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = \lambda_\alpha$. Também $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$, pois $A_{-\alpha} = X_{-\alpha} - X_{-(-\alpha)} = -X_\alpha - X_{-\alpha} = -A_\alpha$, ou seja, $\lambda_{-\alpha} A_{-\alpha} = \Lambda\,(A_{-\alpha}) = \Lambda\,(-A_\alpha) = -\lambda_\alpha A_\alpha$.

Denotamos por ds^2_Λ a métrica invariante dada por Λ. No que segue abusaremos da notação e diremos que Λ é a métrica invariante.

Escolhendo H na câmara de Weyl positiva correspondente a Π^+ e pondo

$$\Lambda_H = \{\lambda_\alpha = \alpha(H); \alpha > 0\},$$

temos uma classe de métricas invariantes, chamadas métricas de tipo Borel (ver [AB]). A descrição da bijeção entre as câmaras de Weyl e os conjuntos de raízes positivas em relação a alguma ordem lexicográfica é dada em [SM], seção 9.2.

1.4 Estruturas quase complexas invariantes

Uma estrutura quase complexa U-invariante $\mathcal{J}_*$ sobre $\mathbb{F}$ (abreviada por *iacs*) é a associação, para cada $x \in \mathbb{F}$, de um endomorfismo J_x do espaço tangente $T_x(\mathbb{F})$ tal que $J_x^2 = -1$ e $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$, para todo $g \in U$, onde 1 denota a aplicação identidade.

Podemos mostrar que $[JX, JY] = -[X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{q}$ é equivalente a $J \circ \mathrm{Ad}(h) = \mathrm{Ad}(h) \circ J$, para todo $h \in T$, de modo análogo ao lema 1.10.

Proposição 1.12 *Uma iacs é completamente determinada por um endomorfismo* $J : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}$, *definido no espaço tangente da origem satisfazendo* $J^2 = -1$ *e comutando com com a ação adjunta de* T *sobre* $\mathfrak{g}$, *isto é,* $[X, JY] = J[X, Y]$ *ou, equivalentemente,* $[JX, JY] = -[X, Y]$, *para todo* $X, Y \in \mathfrak{q}$.

Demonstração: Tendo J nas condições da proposição, definimos

$$J_x : T_x(\mathbb{F}) \longrightarrow T_x(\mathbb{F})$$

do seguinte modo: Como a ação adjunta de U sobre $\mathbb{F}$ é transitiva, existe $g \in U$, tal que $x = gb_0$. Consideramos $g : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ e definimos J_x pondo

$$J_x = dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}.$$

Resta mostrar que:

a) a definição de J_x não depende da escolha de $g \in U$.

b) $J_x^2 = -1$.

c) $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$.

Para mostrar *a)* tomamos $g, \widetilde{g} \in U$, tais que $gb_0 = \widetilde{g}b_0 = x$. Assim, $g^{-1}\widetilde{g}b_0 = b_0$ e $h = g^{-1}\widetilde{g} \in T$.

Agora, observemos a seguinte equivalências:

$$\begin{aligned}
dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1} &= d\widetilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} \iff \\
J \circ dg_x^{-1} &= (dg_{b_0})^{-1} \circ d\widetilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} \iff \\
J \circ dg_x^{-1} &= dg_x^{-1} \circ d\widetilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} \iff \\
J \circ dg_x^{-1} \circ d\widetilde{g}_{b_0} &= dg_x^{-1} \circ d\widetilde{g}_{b_0} \circ J \iff \\
J \circ d\left(g^1\widetilde{g}\right)_{b_0} &= d\left(g^{-1}\widetilde{g}\right)_{b_0} \circ J \iff \\
J \circ dh_{b_0} &= dh_{b_0} \circ J \iff \\
J \circ \mathrm{Ad}(h) &= \mathrm{Ad}(h) \circ J.
\end{aligned}$$

Isto implica em *a)*.

Também,

$$J_x^2 = \left(dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}\right) \circ \left(dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}\right) = dg_{b_0} \circ J^2 \circ (dg_{b_0})^{-1} = -1,$$

o que implica em *b)*.

Agora, queremos mostrar que $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$, que é equivalente a provar que $dg_x \circ d\widetilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widetilde{g}_{b_0})^{-1} = d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x$, onde $\widehat{g}b_0 = gx$ e $\widetilde{g}b_0 = x$. Como $g\widehat{g}x_0 = x$, por *a)*, basta provar que

$$dg_x \circ d\left(g^{-1}\widehat{g}\right)_{b_0} \circ J \circ \left(d\left(g^{-1}\widehat{g}\right)_{b_0}\right)^{-1} = d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x,$$

ou ainda, que

$$dg_x \circ dg_{gx}^{-1} \circ d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ \left(dg_{gx}^{-1}\right)^{-1} = d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x.$$

Mas, $dg_x \circ dg_{gx}^{-1} = d\left(gg^1\right)_{gx}$, e daí

$$\begin{aligned}
dg_x \circ dg_{gx}^{-1} \circ d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ \left(dg_{gx}^{-1}\right)^{-1} &= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ \left(dg_{gx}^{-1}\right)^{-1} \\
&= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ d\left(g^{-1}\right)_x^{-1} \\
&= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x,
\end{aligned}$$

como queríamos. Isto completa a demonstração da proposição. □

Vamos denotar também por J sua complexificação a $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$. A invariância de J assegura que $J(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Pi$. De fato, dado $Y \in J(\mathfrak{g}_\alpha)$, então $Y = JX$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$. Pela definição de $\mathfrak{g}_\alpha$, devemos mostrar que $[H, Y] = \alpha(H)Y$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Mas, $[H, Y] = [H, JX] = J[H, X] = J(\alpha(H)X) = \alpha(H)(JX) = \alpha(H)Y$, para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Os autovalores de J são $\pm i$, pois o polinômio característico de J é x^2+1. Os autovetores em $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ são X_α, $\alpha \in \Pi$. Assim, $J(X_\alpha) = i\varepsilon_\alpha X_\alpha$, com $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. Notemos que $A_\alpha - i(iS_\alpha) = X_\alpha - X_{-\alpha} - i(i(X_\alpha + X_{-\alpha})) = 2X_\alpha$. Daí $X_\alpha = \frac{1}{2}(A_\alpha - i(iS_\alpha))$ e

$$\begin{aligned} JX_\alpha &= \frac{1}{2}J(A_\alpha - i(iS_\alpha)) = \frac{1}{2}(JA_\alpha - iJ(iS_\alpha)) = \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha i(A_\alpha - i(iS_\alpha)) \\ &= \frac{1}{2}i\varepsilon_\alpha A_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha iS_\alpha = \frac{1}{2}(i\varepsilon_\alpha A_\alpha + \varepsilon_\alpha iS_\alpha). \end{aligned}$$

Tomando a igualdade das partes real e imaginária temos $JA_\alpha = \varepsilon_\alpha(iS_\alpha)$ e $J(iS_\alpha) = -\varepsilon_\alpha iA_\alpha$. Como $A_\alpha = -A_{-\alpha}$, então $JA_\alpha = J(-A_{-\alpha})$, ou seja, $\varepsilon_\alpha(iS_\alpha) = -JA_{-\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}(iS_{-\alpha})$. Agora, $S_\alpha = S_{-\alpha}$ e portanto $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$.

Usualmente, os autovetores associados a $+i$ são chamados de tipo $(1,0)$, enquanto que os autovetores associados a $-i$ são chamados de tipo $(0,1)$. Daí, os vetores de tipo $(1,0)$ são múltiplos de $X_\alpha, \varepsilon_\alpha = +1$, e os de tipo $(0,1)$ são múltiplos de $X_\alpha, \varepsilon_\alpha = -1$.

Uma *iacs* sobre $\mathbb{F}$ é completamente determinada por um conjunto de sinais $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$, com $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$. No que segue abusaremos da notação e diremos que uma estrutura quase complexa invariante sobre $\mathbb{F}$ é $J = \{\varepsilon_\alpha\}$.

Como $\mathbb{F}$ é um espaço homogêneo de um grupo de Lie complexo, ele tem uma estrutura natural de uma variedade complexa. A estrutura quase complexa integrável J_c é dada por $\varepsilon_\alpha = +1$ se $\alpha < 0$. A estrutura conjugada $-J_c$ é também integrável. Uma estrutura quase complexa J é dita integrável se não tem torsão, ou seja, $[JX, JY] = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY]$. Na seção 1.6, proposição 1.19 provaremos que $-J_c$ é integrável.

1.5 Estruturas equivalentes

Seja W o grupo de Weyl gerado pelas reflexões com relação as raízes $\alpha \in \Pi$. Sabemos que a ação deste grupo sobre $\mathfrak{h}^*$ deixa Π invariante ($[SM]$, págs. 229, 230). Também W é isomorfo a $N_U(\mathfrak{h})/T$, onde $N_U(\mathfrak{h}) = \{u \in U; \mathrm{Ad}(u)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}$ é o normalizador de $\mathfrak{h}$ em U, (ver [HS]).

O grupo $N_U(\mathfrak{h})$ age sobre $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ permutando os espaços de raízes $\overline{w}\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$, onde a imagem de $w \in W$ pelo isomorfismo é denotada por $\overline{w}T$, $\overline{w} \in N_U(\mathfrak{h})$.

Como cada elemento de $N_U(\mathfrak{h})$ pode ser visto como uma aplicação de $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$, podemos fazer a composição $\overline{w}J\overline{w}^{-1}$, se J é uma *iacs* e $\overline{w} \in N_U(\mathfrak{h})$. A aplicação dada por $(w, J) \longmapsto \overline{w}J\overline{w}^{-1}$ é uma ação de W sobre o conjunto $\mathcal{C}$ das *iacs*. Em termos dos sinais ε_α, a ação de W sobre o conjunto das *iacs* é dada por

$$wJ = w\{\varepsilon_\alpha\} = \{\varepsilon_{w^{-1}\alpha}\}.$$

Temos que as *iacs* dadas por J e $\overline{w}J\overline{w}^{-1}$são equivalentes no sentido que uma é obtida da outra por uma aplicação bi-holomorfa.

De modo analogo, o grupo de Weyl age sobre o conjunto das métricas invariantes por

$$w\{\lambda_\alpha\} = \{\lambda_{w^{-1}\alpha}\}.$$

Estas duas ações fornecem uma ação sobre o conjunto das estruturas quase Hermitianas invariantes, a qual é dada por

$$w(J,\Lambda) = (wJ, w\Lambda).$$

No que segue diremos que wJ e $w\Lambda$ são equivalentes a J e Λ, respectivamente. Naturalmente, *iacs* equivalentes, bem como métricas equivalentes, compartilham as mesmas propriedades. Também, as *iacs* tendo a forma $wJ_c, w \in W$ são provenientes de estruturas complexas. Chamamos estas de *iacs* canônicas.

1.6 Forma Kähler

Podemos mostrar que qualquer métrica invariante ds^2_Λ é quase Hermitiana com respeito a cada J, isto é, $ds^2_\Lambda(JX,JY) = ds^2_\Lambda(X,Y)$. De fato, $ds^2_\Lambda(JX_\alpha, JX_\beta) = ds^2_\Lambda(i\varepsilon_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta) = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta ds^2_\Lambda(X_\alpha, X_\beta)$. Agora, se $\alpha = -\beta$, então $-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_{-\alpha} = 1$ e temos a igualdade desejada. Por outro lado, se $\alpha \neq -\beta$, como $ds^2_\Lambda(X_\alpha, X_\beta) = -\langle \Lambda X_\alpha, X_\beta\rangle = -\lambda_\alpha \langle X_\alpha, X_\beta\rangle = 0$, tanto $ds^2_\Lambda(JX_\alpha, JX_\beta)$, quanto $ds^2_\Lambda(X_\alpha, X_\beta)$ são nulos.

Seja $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$ a forma Kähler correspondente a J e Λ, ou seja,

$$\Omega(X,Y) = ds^2_\Lambda(X,JY) = -\langle \Lambda X, JY\rangle. \tag{1.1}$$

Esta forma estende-se naturalmente a uma 2-forma U-invariante na complexificação $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{q}$, isto é, a uma 2-forma que é invariante pelo pull-back de g, para todo $g \in \mathfrak{g}$ visto como aplicação de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{F}$. Esta extensão é também denotada por Ω. Temos que

$$\Omega(X_\alpha, X_\beta) = -\langle \Lambda X_\alpha, JX_\beta\rangle = -\langle \lambda_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta\rangle = -i\lambda_\alpha\varepsilon_\beta \langle X_\alpha, X_\beta\rangle. \tag{1.2}$$

Como $\langle X_\alpha, X_\beta\rangle = 0$ se $\alpha+\beta \neq 0$ e $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = 1$,então $\Omega(X_\alpha, X_\beta) = 0$ sempre que $\alpha+\beta\neq 0$ e $\Omega(X_\alpha, X_{-\alpha}) = -i\lambda_\alpha\varepsilon_{-\alpha} = i\lambda_\alpha\varepsilon_\alpha$.

Utilizando a invariância de Ω, podemos calcular sua diferencial exterior a partir de uma fórmula canônica: Se $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$ são considerados como campos de vetores sobre $\mathbb{F}$, então $d\Omega$ na origem é dado por

$$3d\Omega(X,Y,Z) = \Omega([X,Y], Z) - \Omega([X,Z], Y) + \Omega([Y,Z], X). \tag{1.3}$$

De fato, o próximo lema é a transcrição da proposição 3.11 de [KN], volume 1.

Lema 1.13 *Se ω é uma 2-forma diferencial, então*

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{X(\omega(Y,Z)) + Y(\omega(Z,X)) + Z(\omega(X,Y)) \\ &\quad -\omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y)\}, \end{aligned}$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$.

Como a derivada direcional $X(\Omega(Y,Z))$ é dada por $\frac{d}{dt}\Omega\left(Ad\left(e^{tX}\right)Y, Ad\left(e^{tX}\right)Z\right)_{t=0}$ e esta derivada é $\Omega([X,Y], Z) + \Omega(Y, [X,Z])$, aplicando o lema anterior a 2-forma Ω, temos

$$\begin{aligned} d\Omega(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{\Omega([X,Y],Z) + \Omega(Y,[X,Z]) + \Omega([Y,Z],X) \\ &\quad +\Omega(Z,[Y,X]) + \Omega([Z,X],Y) + \Omega(X,[Z,Y]) \\ &\quad -\Omega([X,Y],Z) - \Omega([Y,Z],X) - \Omega([Z,X],Y)\} \\ &= \frac{1}{3}\{\Omega(Y,[X,Z]) + \Omega(Z,[Y,X]) + \Omega(X,[Z,Y])\} \\ &= \frac{1}{3}\{-\Omega([X,Z],Y) + \Omega([X,Y],Z) + \Omega([Y,Z],X)\}. \end{aligned}$$

Isto implica na equação (1.3).

Proposição 1.14 *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ e $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, então $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$. Caso contrário, se $\alpha+\beta+\gamma = 0$, então*

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -\frac{1}{3} i m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma\right) \tag{1.4}$$

Demonstração: Pelas equações (1.2) e (1.3) temos que

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= \Omega([X_\alpha, X_\beta], X_\gamma) - \Omega([X_\alpha, X_\gamma], X_\beta) + \Omega([X_\beta, X_\gamma], X_\alpha) \\ &= \Omega(m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) - \Omega(m_{\alpha,\gamma}X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) + \Omega(m_{\beta,\gamma}X_{\beta+\gamma}, X_\alpha) \\ &= +m_{\alpha,\beta}\Omega(X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) - m_{\alpha,\gamma}\Omega(X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) + m_{\beta,\gamma}\Omega(X_{\beta+\gamma}, X_\alpha) \\ &= -m_{\alpha,\beta}i\lambda_{\alpha+\beta}\varepsilon_\gamma\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma\rangle + m_{\alpha,\gamma}i\lambda_{\alpha+\gamma}\varepsilon_\beta\langle X_{\alpha+\gamma}, X_\beta\rangle \\ &\quad -m_{\beta,\gamma}i\lambda_{\beta+\gamma}\varepsilon_\alpha\langle X_{\beta+\gamma}, X_\alpha\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle X_\delta, X_\eta \rangle = 0$ se $\delta + \eta \neq 0$, segue que $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ se $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Agora se $\alpha + \beta + \gamma = 0$, por $[SM]$ lema 6.8, $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$. Também $m_{\alpha,\gamma} = -m_{\gamma,\alpha}$, pois $-m_{\gamma,\alpha}X_{\gamma+\alpha} = -[X_\gamma, X_\alpha] = [X_\alpha, X_\gamma] = m_{\alpha,\gamma}X_{\alpha+\gamma}$. Daí,

$$\begin{aligned} 3d\Omega\left(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\right) &= -im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\gamma}\varepsilon_\gamma \left\langle X_{-\gamma}, X_\gamma \right\rangle - im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\beta}\varepsilon_\beta \left\langle X_{-\beta}, X_\beta \right\rangle \\ &\quad -im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\alpha}\varepsilon_\alpha \left\langle X_{-\alpha}, X_\alpha \right\rangle \\ &= -im_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma\right), \end{aligned}$$

o que implica na equação (1.4). □

Considerando a expressão de $d\Omega$, fazemos a seguinte distinção entre as triplas de raízes.

Definição 1.15 *Seja $J = \{\varepsilon_\alpha\}$uma iacs. Uma tripla de raízes α, β, γ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ é chamada de*

*1) Uma$\{0, 3\}$-**tripla** se $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$ e*

*2) Uma $\{1, 2\}$-**tripla** noutros casos.*

Uma variedade quase Hermitiana é chamada de $(1, 2)$-simplética ou quasi-Kähler (respectivamente, $(2, 1)$-simplética) se

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0,$$

quando um dos vetores é do tipo $(1, 0)$ e os outros dois são do tipo $(0, 1)$ (respectivamente, quando um dos vetores é do tipo $(0, 1)$ e os outros dois são do tipo $(1, 0)$).

Se o par (J, Λ) é $(1, 2)$-simplético, o mesmo ocorre com o par $w(J, \Lambda)$.

A próxima proposição diz que, no caso invariante, as variedades quase Hermitianas $(1, 2)$-simpléticas são iguais as $(2, 1)$-simpléticas.

Proposição 1.16 *O par invariante $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, \Lambda = \{\lambda_\alpha\})$ é $(1, 2)$-simplético se, e somente se,*

$$\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0,$$

para toda $\{1, 2\}$-tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Demonstração: Supomos que o par invariante é $(1, 2)$-simplético. Dada uma $\{1, 2\}$-tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, se um dos vetores é do tipo $(1, 0)$ e os outros dois são tipo $(0, 1)$, então, por hipótese e pela equação (1.4),

$$0 = d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -\frac{1}{3}im_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma\right).$$

ou seja,

$$\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0.$$

Se um dos vetores é do tipo $(0,1)$ e os outros dois são tipo $(1,0)$, não podemos usar a hipótese diretamente. Mas, neste caso $\{-\alpha,-\beta,-\gamma\}$ é uma $(1,2)$-tripla com um dos vetores é do tipo $(1,0)$ e os outros dois são tipo $(0,1)$. Daí, por hipótese,

$$0 = d\Omega(X_{-\alpha}, X_{-\beta}, X_{-\gamma}) = -\frac{1}{3}im_{-\alpha,-\beta}\left(\varepsilon_{-\alpha}\lambda_{-\alpha} + \varepsilon_{-\beta}\lambda_{-\beta} + \varepsilon_{-\gamma}\lambda_{-\gamma}\right),$$

o que implica,

$$0 = \varepsilon_{-\alpha}\lambda_{-\alpha} + \varepsilon_{-\beta}\lambda_{-\beta} + \varepsilon_{-\gamma}\lambda_{-\gamma} = -\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha - \varepsilon_\beta\lambda_\beta - \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = -\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma\right).$$

Supomos agora $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$ para toda $\{1,2\}$-tripla $\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Queremos provar que $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ se um dos vetores é do tipo $(1,0)$ e os outros dois são tipo $(0,1)$. Se $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, então $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$, pela proposição 1.4. Se $\alpha+\beta+\gamma = 0$, então $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla, já que um dos vetores é do tipo $(1,0)$ e os outros dois são tipo $(0,1)$. Neste caso, por hipótese e pela equação (1.4),

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -\frac{1}{3}im_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma\right) = 0.$$

Isto completa a demonstração da proposição. □

Definição 1.17 *Dizemos que Λ é $(1,2)$-simplética com respeito a J se o par invariante (J,Λ) é $(1,2)$-simplético. Também, J é dito $(1,2)$-**invariantemente admissível** ou, simplesmente $(1,2)$-**admissível**, se existe Λ tal que o par invariante (J,Λ) é $(1,2)$-simplético.*

Lembremos que uma variedade quase Hermitiana é chamada quase Kähler se Ω é simplética, isto é, $d\Omega = 0$ e é chamada Kähler se, além disso, J é integrável.

Pela igualdade (1.4) não existe $\{0,3\}$-tripla para J se o par (J,Λ) invariante é quase Kähler. De fato, se $d\Omega = 0$ então $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$ quando $\alpha+\beta+\gamma = 0$. Assim, para uma $\{0,3\}$-tripla tem-se $\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma = 0$, contradizendo o fato de que $\lambda_\delta > 0$.

Desta observação podemos encontrar as *iacs* que fazem parte das estruturas quase Kähler. Em outras palavras, se J é uma *iacs* para a qual existem $\{0,3\}$-triplas, então não existe uma métrica invariante tal que (J,Λ) é quase Kähler.

Proposição 1.18 *Se o par invariante (J,Λ) é quase Kähler, então $P=\{\alpha;\varepsilon_\alpha=+1\}$ é uma escolha de raízes positivas com relação a alguma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.*

Demonstração: Se $\alpha,\beta\in P$ e $\alpha+\beta$ é uma raiz, então $\alpha+\beta\in P$. De fato, se $\varepsilon_{\alpha+\beta}=-1$, temos $\alpha+\beta-(\alpha+\beta)=0$, $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\beta$ e $\varepsilon_{-(\alpha+\beta)}=-\varepsilon_{\alpha+\beta}=+1$, implicando que $\{\alpha,\beta,-(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0,3\}$-tripla para J. Isto contradiz a observação feita acima. Além disso $\Pi=P\cup(-P)$, onde $-P=\{\alpha;\varepsilon_\alpha=-1\}$. Estas duas propriedades implicam que P é uma escolha de raízes positivas. □

Proposição 1.19 *Se o par invariante (J,Λ) é quase Kähler, então J é integrável, isto é, J é uma estrutura complexa, ([KN], capítulo 9, teorema 2.5).*

Demonstração: Pela proposição 1.18, $P=\{\alpha;\varepsilon_\alpha=+1\}$ é uma escolha de raízes positivas. Assim, $J=\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$, onde $\varepsilon_\alpha=+1$, se $\alpha>0$. Dados $\alpha,\beta\in\Pi$, temos que

$$[JX_\alpha,JX_\beta]=[i\varepsilon_\alpha X_\alpha,i\varepsilon_\beta X_\beta]=-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\,[X_\alpha,X_\beta]=-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}.$$

Também,

$$\begin{aligned}
[X_\alpha,X_\beta]+J\,[X_\alpha,JX_\beta]+J\,[JX_\alpha,X_\beta] &= m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}+J\,[X_\alpha,i\varepsilon_\beta X_\beta]\\
&\quad +J\,[i\varepsilon_\alpha X_\alpha,X_\beta]\\
&= m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}+i\varepsilon_\beta J\,[X_\alpha,X_\beta]\\
&\quad +i\varepsilon_\alpha J\,[X_\alpha,X_\beta]\\
&= m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}+i\varepsilon_\beta J\,(m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta})\\
&\quad +i\varepsilon_\alpha J\,(m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta})\\
&= m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}+i\varepsilon_\beta m_{\alpha,\beta}i\varepsilon_{\alpha+\beta}X_{\alpha+\beta}\\
&\quad +i\varepsilon_\alpha m_{\alpha,\beta}i\varepsilon_{\alpha+\beta}X_{\alpha+\beta}\\
&= m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}-\varepsilon_\beta m_{\alpha,\beta}\varepsilon_{\alpha+\beta}X_{\alpha+\beta}\\
&\quad -\varepsilon_\alpha m_{\alpha,\beta}\varepsilon_{\alpha+\beta}X_{\alpha+\beta}\\
&= m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}\,(1-\varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta}-\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta})\,.
\end{aligned}$$

Queremos mostrar que $-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}=m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}\,(1-\varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta}-\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta})$, o que é equivalente a mostrar que $-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta=(1-\varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta}-\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta})$. Se $\alpha+\beta$ não é uma raiz, $m_{\alpha,\beta}=0$ e a igualdade é direta. Se $\alpha+\beta$ é uma raiz, como não existem $\{0,3\}$-triplas para J, devemos verificar as seguintes possibilidades de sinais $\left(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta,\varepsilon_{-(\alpha+\beta)}\right)$ para a tripla $\{\alpha,\beta,-(\alpha+\beta)\}$: $(+,+,-)\,,(-,-,+),(+,-,+)=(-,+,+),(+,-,-)=$

$(-,+,-)$. Nos dois primeiros casos temos $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = 1$, $-\varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta} = 2$ e a igualdade desejada é válida. Nos dois últimos casos, $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = -1$, $-\varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta} = 0$ e a igualdade é mais uma vez verificada.

Portanto J é integrável. □

Corolário 1.20 *Uma estrutura quase Hermitiana invariante sobre $\mathbb{F}$ é quase Kähler se, e somente se, ela é Kähler.*

Demonstração: Que estrutura Kähler implica em quase Kähler é direto da definição. Agora, se uma uma estrutura invariante é quase Kähler, então, pela proposição 1.19, ela é integrável e portanto Kähler. □

Capítulo 2

Estrutura quase complexa invariante afim

Sabemos que o conjunto das estruturas invariantes quase Kähler (e Kähler) está em bijeção com o conjunto das câmaras de Weyl em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, conforme $[SM]$, pág. 238 e capítulo 1, proposição 1.20. Com o objetivo de descrever a maior classe formada pelas estruturas $(1,2)$-simpléticas consideramos neste capítulo o conjunto de alcovas, ou equivalentemente, o grupo de Weyl afim associado com o sistema de raízes Π, ($[JH]$).

Consideremos o subespaço $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Em conformidade com a notação usual muitas vezes identificamos $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ com o seu dual $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ e escrevemos $\langle x, \alpha\rangle$ no lugar de $\alpha(x), x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Dados $\alpha \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$ definimos o hiperplano afim

$$H(\alpha, k) = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}; \langle x, \alpha\rangle = k\}.$$

O grupo de Weyl afim W_a é o grupo de transformações afim de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ gerado pelas reflexões ortogonais com relação aos hiperplanos $H(\alpha, k)$, $\alpha \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. O grupo W_a deixa invariante a união dos hiperplanos $H(\alpha, k)$, $\alpha \in \Pi, k \in \mathbb{Z}$. Sabemos que W_a é o produto semi-direto de W pelo grupo de translações por elementos do reticulado $L = \mathbb{Z} \cdot \Pi^\vee$ gerado sobre $\mathbb{Z}$ pelas co-raízes

$$\Pi^\vee = \left\{\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle\alpha, \alpha\rangle}; \alpha \in \Pi\right\}, \qquad \text{([JH], sec.4.2).}$$

Outro grupo relevante de transformações afim é $\widehat{W_a}$, que é o produto semi-direto de W pelo grupo de translações por elementos do reticulado

$$\widehat{L} = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}; \forall\alpha \in \Pi, \langle\alpha, x\rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

O complementar $\mathcal{A}$ do conjunto dos hiperplanos $H(\alpha, k)$, $\alpha \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, é a união de suas componentes conexas. Cada uma delas é um simplexo aberto chamado *alcova*. O grupo de Weyl afim W_a age livre e transitivamente sobre o conjunto das alcovas, ([JH], sec. 4.3). Assim W_a está em bijeção com $\mathcal{A}$. O grupo $\widehat{W_a}$ também age transitivamente sobre o conjunto das alcovas mas, em geral, a ação não é livre, ([JH], sec. 4.5).

Dada uma alcova A e uma raiz α, existe um inteiro $k_\alpha = k_\alpha(A)$ tal que

$$k_\alpha < \langle x, \alpha \rangle < k_\alpha + 1, \text{ para todo } x \in A.$$

Tem-se que $k_\alpha = [\alpha(x)]$, para qualquer $x \in A$, onde $[a]$ denota a parte inteira do número real a, isto é, $[a]$ é o maior inteiro tal que $a - [a] > 0$, ([JH], sec. 4.3). Seguindo a denominação dada por [YS], os inteiros $k_\alpha(A)$ são chamados de *coordenadas* da alcova A. Uma alcova é completamente determinada por suas coordenadas. Mas, não é verdade que um conjunto arbitrário de inteiros $k_\alpha, \alpha \in \Pi$, são as coordenadas de alguma alcova. Em [YS] são determinadas as condições necessárias e suficientes para um conjunto de inteiros $k_\alpha, \alpha \in \Pi$ formar as coordenadas de uma alcova. As condições suficientes serão vistas no capítulo 4. Por enquanto enunciamos as condições necessárias.

Proposição 2.1 *Se os inteiros $k_\alpha, \alpha \in \Pi$, são as coordenadas de uma alcova, então*

1) $k_{-\alpha} = -k_\alpha - 1$ e

2) $k_\gamma = k_\alpha + k_\beta$ ou $k_\gamma = k_\alpha + k_\beta + 1$ se $\gamma = \alpha + \beta$.

Demonstração: Para demonstrar (1) devemos mostrar que $-k_\alpha - 1 < \langle x, -\alpha \rangle < (-k_\alpha - 1) + 1$, para todo $x \in A$, que é equivalente a mostrar que $-k_\alpha - 1 < \langle x, -\alpha \rangle < -k_\alpha$. Mas, estas desigualdades são verdadeiras pois $k_\alpha < \langle x, \alpha \rangle < k_\alpha + 1$, para todo $x \in A$.

Para obter (2) devemos mostrar que $k_\alpha + k_\beta < \langle x, \gamma \rangle = k_\alpha + k_\beta + 1$ ou $k_\alpha + k_\beta + 1 < \langle x, \gamma \rangle = k_\alpha + k_\beta + 2$, para todo $x \in A$, se $\gamma = \alpha + \beta$. Temos que $k_\alpha < \langle x, \alpha \rangle < k_\alpha + 1$ e $k_\beta < \langle x, \beta \rangle < k_\beta + 1$. Assim, $k_\alpha + k_\beta < \langle x, \alpha \rangle + \langle x, \beta \rangle < k_\alpha + k_\beta + 2$ e $k_\alpha + k_\beta < \langle x, \alpha + \beta \rangle < k_\alpha + k_\beta + 2$. Logo, $k_\alpha + k_\beta < \langle x, \gamma \rangle < k_\alpha + k_\beta + 2$. Se $k_\gamma \neq k_\alpha + k_\beta$, então $k_\gamma > k_\alpha + k_\beta$, pois $k_\gamma < k_\alpha + k_\beta$ implica $k_\gamma + 1 \leq k_\alpha + k_\beta$ e daí $\langle x, \gamma \rangle < k_\gamma + 1 \leq k_\alpha + k_\beta$, o que é uma contradição. Também, $k_\gamma < k_\alpha + k_\beta + 2$, pois $k_\gamma \geq k_\alpha + k_\beta + 2$ implica que $k_\alpha + k_\beta + 2 \leq k_\gamma < \langle x, \gamma \rangle$, o que é novamente uma contradição. Portanto se $k_\gamma \neq k_\alpha + k_\beta$, então $k_\gamma = k_\alpha + k_\beta + 1$. $\square$

Podemos agora, com o auxílio das coordenadas das alcovas introduzir a seguinte classe de *iacs*.

Definição 2.2 *Dada uma alcova A com coordenadas k_α, a iacs $J(A) = \{\varepsilon_\alpha(A)\}$ é definida por $\varepsilon_\alpha(A) = (-1)^{k_\alpha}$. Dizemos que J é uma iacs* ***afim*** *se ela é da forma $J = J(A)$ para alguma alcova A.*

Notemos que $J(A)$ é de fato uma *iacs* pois

$$\varepsilon_{-\alpha}(A) = (-1)^{k_{-\alpha}} = (-1)^{-k_\alpha - 1} = -(-1)^{-k_\alpha} = -(-1)^{k_\alpha} = -\varepsilon_\alpha(A),$$

conforme proposição 2.1.

A definição de *iacs* afim permite a seguinte interpretação geométrica. Dada uma escolha de raízes positivas $\Pi^+ \subset \Pi$, temos a alcova básica

$$A_0 = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}; \forall\alpha > 0, 0 < \langle x, \alpha\rangle < 1\}$$

com coordenadas $k_\alpha = 0, \alpha > 0$.

Dado um hiperplano $H(\alpha, k), \alpha \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, cada alcova A está em um dos dois semi-espaços definidos por $H(\alpha, k)$. Dizemos que $H(\alpha, k)$, separa duas alcovas A e B se estas alcovas estão em diferentes semi-espaços relativos a $H(\alpha, k)$.

Se A_0 e A são alcovas e $\alpha \in \Pi^+$, denotamos por $q_\alpha(A)$ o número de hiperplanos da forma $H(\alpha, k)$ separando A de A_0. Como $\alpha > 0$, $q_\alpha(A) = |k_\alpha(A)|$. Logo, $(-1)^{k_\alpha(A)} = (-1)^{q_\alpha(A)}$ e o número de hiperplanos separando A de A_0 determina $J(A)$.

Queremos mostrar que a aplicação $A \longmapsto J(A)$ que define as *iacs* afim é bem comportada mediante a ação do grupo de Weyl.

Lema 2.3 *A aplicação $A \longmapsto J(A)$ é equivariante com relação a ação do grupo de Weyl W, isto é, $J(wA) = wJ(A), w \in W$. Aqui wA é a restrição a W da ação de W_a sobre $\mathcal{A}$ e $w\{\varepsilon_\alpha\} = \{\varepsilon_{w^{-1}\alpha}\}$ é a ação de W sobre o conjunto das iacs, definida anteriormente.*

Demonstração: Notemos que $k_\alpha(wA) = k_{w^{-1}\alpha}(A)$. De fato, $k_\alpha(wA) < \langle y, \alpha\rangle < k_\alpha(wA) + 1$, para todo $y \in wA$. Daí, $k_\alpha(wA) < \langle wx, \alpha\rangle < k_\alpha(wA) + 1$, para todo $x \in A$. Logo, por [JH], pág. 99, $k_\alpha(wA) < \langle x, w^{-1}\alpha\rangle < k_\alpha(wA) + 1$, para todo $x \in A$. Segue que $k_\alpha(wA) = k_{w^{-1}\alpha}(A)$.

Temos que $J(wA) = \{\varepsilon_\alpha(wA)\}$, onde $\varepsilon_\alpha(wA) = (-1)^{k_\alpha(wA)}$ e

$$wJ(A) = w\{\varepsilon_\alpha(A)\} = \{\varepsilon_{w^{-1}\alpha}(A)\}.$$

Agora, $\varepsilon_\alpha(wA) = (-1)^{k_\alpha(wA)} = (-1)^{k_{w^{-1}\alpha}(A)} = \varepsilon_{w^{-1}\alpha}(A)$. Portanto, $J(wA) = wJ(A)$. $\square$

Um de nossos propósitos é mostrar que a classe das *iacs* (1,2)-admissível e das *iacs* afim coincidem.

A parte mais fácil é mostrar que as *iacs* afim são (1,2)-admissível. Veremos a recíproca no capítulo 4 e esta será feita em várias etapas.

Teorema 2.4 *Se $J = J(A)$ é uma iacs afim, então J é (1,2)-admissível.*

Demonstração: Queremos definir uma métrica invariante Λ tal que o par (J,Λ) seja (1,2)-simplético. Sejam $k_\alpha = k_\alpha(A)$ as coordenadas da alcova A. Tomemos $x \in A$ e definamos a métrica invariante $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}$ por

$$\lambda_\alpha = \varepsilon_\alpha(\alpha(x) - k_\alpha) + \frac{1-\varepsilon_\alpha}{2} = \begin{cases} \alpha(x) - k_\alpha, & \text{se } \varepsilon_\alpha = +1 \\ 1 - \alpha(x) + k_\alpha, & \text{se } \varepsilon_\alpha = -1 \end{cases}.$$

Como $k_\alpha = [\alpha(x)]$, ou seja $0 < \alpha(x) - k_\alpha < 1$, então $\lambda_\alpha > 0$, para todo α. Pela proposição 2.1, $k_{-\alpha} = -k_\alpha - 1$. Assim, se $\varepsilon_\alpha = +1$, então $\varepsilon_{-\alpha} = -1$ e $\lambda_{-\alpha} = 1 - (-\alpha)(x) + k_{-\alpha} = 1 + \alpha(x) - k_\alpha - 1 = \alpha(x) - k_\alpha = \lambda_\alpha$. Agora, se $\varepsilon_\alpha = -1$, então $\varepsilon_{-\alpha} = +1$ e $\lambda_{-\alpha} = (-\alpha)(x) - k_{-\alpha} = -\alpha(x) + k_\alpha + 1 = \lambda_\alpha$. Logo $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$ e Λ é uma métrica invariante bem definida. Resta provar que o par (J,Λ) é (1,2)-simplético. Vamos utilizar a proposição 1.16. Dada uma $\{1,2\}$-tripla $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\beta\lambda_\beta &= \varepsilon_\alpha(\varepsilon_\alpha(\alpha(x) - k_\alpha) + \frac{1-\varepsilon_\alpha}{2}) + \varepsilon_\beta(\varepsilon_\beta(\beta(x) - k_\beta) + \frac{1-\varepsilon_\beta}{2}) \\ &\quad + \varepsilon_\gamma(\varepsilon_\gamma(\gamma(x) - k_\gamma) + \frac{1-\varepsilon_\gamma}{2}) \\ &= \alpha(x) - k_\alpha + \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2} + \beta(x) - k_\beta + \frac{\varepsilon_\beta - 1}{2} \\ &\quad + \gamma(x) - k_\gamma + \frac{\varepsilon_\gamma - 1}{2} \\ &= \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} + \alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) - (k_\alpha + k_\beta + k_\gamma) \\ &= \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} - (k_\alpha + k_\beta + k_\gamma), \end{aligned}$$

pois $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e $(\varepsilon_\alpha)^2 = (\varepsilon_\beta)^2 = (\varepsilon_\gamma)^2 = +1$. Agora, pela proposição 2.1, $k_{-\gamma} = k_\alpha + k_\beta$ ou $k_{-\gamma} = (k_\alpha + k_\beta) + 1$. Assim $k_\gamma = -(k_\alpha + k_\beta) - 1$ ou $k_\gamma = -(k_\alpha + k_\beta) - 2$. Isto significa que k_γ é determinado por k_α, k_β e as classes módulo 2 de k_α, k_β e k_γ. Por outro lado, como J é afim, $\varepsilon_\delta = (-1)^{k_\delta}$ para toda raiz δ. Agora,

$k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -1$ ou $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -2$ e podemos nos decidir por um destes valores visto que $(\varepsilon_\gamma, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma)$ são conhecidos. Com estas observações em mente podemos enfim mostrar que $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$. De fato,

1. Se $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (+1, +1, -1)$, então $\frac{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma-3}{2} = -1$ e $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -1$, pois k_α, k_β está na classe do zero módulo 2 e k_γ na classe do 1.

2. Se $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (+1, -1, +1)$, então $\frac{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma-3}{2} = -1$ e $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -1$,

3. Se $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (+1, -1, -1)$, então $\frac{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma-3}{2} = -2$ e $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -2$,

4. Se $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (-1, -1, +1)$, então $\frac{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma-3}{2} = -2$ e $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -2$.

Todos os casos implicam $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$. Os casos $(+1, +1, +1)$ e $(-1, -1, -1)$ não podem ocorrer, já que $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma $\{1, 2\}$-tripla. Também, os casos $(-1, +1, -1)$ e $(-1, -1, +1)$ são semelhantes a 3) e 2). Portanto o par (J, Λ) é $(1, 2)$-simplético. □

Para finalizar este capítulo provaremos uma propriedade de homomorfismo de *iacs* afim.

Como já foi mencionado, o grupo $\widehat{W_a}$ (que contém W_a) age transitivamente sobre o conjunto de alcovas e é o produto semi-direto de W pelo grupo de translações por elementos do reticulado $\widehat{L}$, ($[JH]$, sec.4.3). Assim, para cada alcova A existe $\lambda \in \widehat{L}$ e $w \in W$, tal que $A = t_\lambda w A_0$. Aplicando w^{-1} a esta igualdade, temos

$$w^{-1}A = \left(w^{-1}t_\lambda w\right) A_0.$$

Temos que $\widehat{L}$ é invariante por W. De fato, $t_\lambda : \mathfrak{h}_\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ é a translação dada por $t_\lambda(u) = u + \lambda$, se $u \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ e $w^{-1}t_\lambda w = t_{w^{-1}\lambda}$, ($[JH]$, sec. 4.1). Segue que toda alcova está na W-órbita de alguma alcova obtida transladando a alcova básica A_0 por um elemento de $\widehat{L}$. De fato, dada uma alcova A, $A \in W\left(t_{w^{-1}\lambda}A_0\right)$, pois $A = wt_{w^{-1}\lambda}A_0$, onde w e λ dependem de A e são dados acima.

Como a aplicação $A \mapsto J(A)$ é equivariante, temos que toda *iacs* afim é equivalente a uma *iacs* da forma $J(t_\lambda A_0)$, $\lambda \in \widehat{L}$, pois se $J = J(A)$ para alguma A, então $J = J(A) = J\left(wt_{w^{-1}\lambda}A_0\right) = w\left(J\left(t_{w^{-1}\lambda}A_0\right)\right)$, onde w e λ são obtidos como antes e dependem de A.

Lema 2.5 *Seja $\lambda \in \widehat{L}$. Então as coordenadas de $t_\lambda A_0$ são $k_\alpha = \langle \lambda, \alpha \rangle$, se $\alpha > 0$ e portanto, $k_\alpha = \langle \lambda, \alpha \rangle - 1$, se $\alpha < 0$.*

Demonstração: Dado $x \in A_0$, temos $\langle t_\lambda x, \alpha \rangle = \langle \lambda + x, \alpha \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle + \langle x, \alpha \rangle$. Daí, $\langle \lambda, \alpha \rangle < \langle t_\lambda x, \alpha \rangle < \langle \lambda, \alpha \rangle + 1$, se $\alpha > 0$ pois $0 < \langle x, \alpha \rangle < 1$. Logo $k_\alpha (t_\lambda A_0) = \langle \lambda, \alpha \rangle$. Agora, se $\alpha < 0$, $-\alpha > 0$ e $-k_\alpha - 1 = k_{-\alpha} (t_\lambda A_0) = \langle \lambda, -\alpha \rangle = -\langle \lambda, \alpha \rangle$, ou seja, $k_\alpha = \langle \lambda, \alpha \rangle - 1$. □

Se α, β e $\alpha + \beta$ são raízes positivas, o lema 2.5 implica que $k_{\alpha+\beta} = \langle \lambda, \alpha + \beta \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle + \langle \lambda, \beta \rangle = k_\alpha + k_\beta$. Assim, $J(t_\lambda A)$ torna-se um homomorfismo quando restrito a $\mathfrak{n}^+$, isto é, $\varepsilon_{\alpha+\beta}(t_\lambda A_0) = (-1)^{k_{(\alpha+\beta)}} = (-1)^{k_\alpha + k_\beta} = (-1)^{k_\alpha} (-1)^{k_\beta} = \varepsilon_\alpha (t_\lambda A_0) \varepsilon_\beta (t_\lambda A_0)$, se α, β e $\alpha + \beta \in \Pi^+$. Segue que qualquer *iacs* afim é equivalente a uma satisfazendo esta propriedade multiplicativa sobre as raízes positivas.

Proposição 2.6 *Uma iacs $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ é afim se, e somente se, existe uma escolha de raízes positivas Π^+ tal que $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$, onde α, β e $\alpha + \beta \in \Pi^+$. Em outras palavras, a restrição de J a $\mathfrak{n}^+$ é um homomorfismo.*

Demonstração: Se J é afim, isto é, $J = J(A)$ para alguma alcova A então J é equivalente a uma *iacs* da forma $J(t_\lambda A_0)$, para algum $\lambda \in \widehat{L}$ e, pela observação feita antes da proposição, esta satisfaz a propriedade multiplicativa sobre raízes positivas. Reciprocamente, supomos que exista uma escolha de raízes positivas tal que $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$, se α, β e $\alpha + \beta \in \Pi^+$. Queremos mostrar que $J = J(t_\lambda A_0)$, para algum elemento $\lambda \in \widehat{L}$. Devemos encontrar $\lambda \in \widehat{L}$ tal que $\varepsilon_\alpha = (-1)^{\langle \lambda, \alpha \rangle}$, se $\alpha > 0$. Como $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$ para raízes positivas, é suficiente ter $\varepsilon_{\alpha_i} = (-1)^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle}$ onde $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ é o correspondente conjunto de raízes simples, pois toda raíz positiva é soma de raízes simples. Logo, o λ requerido é dado por $\lambda = a_1 \omega_1 + \cdots + a_n \omega_n$, onde $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$, $a_i = 0$, se $\varepsilon_{\alpha_i} = +1$ e $a_i = 1$, se $\varepsilon_{\alpha_i} = -1$. De fato, $(-1)^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle} = (-1)^{a_1 \langle \omega_1, \alpha_1 \rangle + \cdots + a_n \langle \omega_n, \alpha_n \rangle} = (-1)^{a_i \langle \omega_i, \alpha_i \rangle} = (-1)^{a_i}$. Portanto $\varepsilon_{\alpha_i} = (-1)^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle}$. □

Capítulo 3

Ideais abelianos

Neste capítulo será provado que um par invariante (J,Λ), $(1,2)$-simplético satisfaz uma propriedade particularmente interessante, que a é propriedade de ideal abeliano com relação a Σ.

Tomemos $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ uma *iacs* $(1,2)$-admissível e seja $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}$ a métrica invariante correspondente, chamada as vezes de métrica $(1,2)$-simplética invariante.

Definição 3.1 *Uma raiz α é dita J-**decomponível** (ou simplesmente decomponível) se existem raízes β,γ tais que $\alpha = \beta+\gamma$ com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$. Uma soma $\beta+\gamma$ é uma J-decomposição de α. Uma raiz que não é J-decomponível é dita J-**indecomponível**.*

Uma primeira observação válida é que α é decomponível se, e somente se, $-\alpha$ também o é. De fato, se $\alpha = \beta+\gamma$, com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$, então $-\alpha = -\beta + (-\gamma)$ e $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta = \varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_{-\gamma}$. Denotamos por $\mathcal{I}(J)$ ou simplesmente por $\mathcal{I}$ o conjunto das raízes J-indecomponíveis. Em geral, raízes J-indecomponíveis podem não existir. No entanto, a presença da métrica $(1,2)$-simplética Λ permite um tratamento para $\mathcal{I}$ análogo ao da construção de um sistema simples de raízes. Para ver isto, iniciemos com o seguinte lema.

Lema 3.2 *Se o par invariante (J,Λ) é $(1,2)$-simplético, então $\mathcal{I}(J) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Dada uma J-decomposição $\alpha = \beta+\gamma$, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$. Daí, $\{-\alpha,\beta,\gamma\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla. Como o par (J,Λ) é $(1,2)$-simplético, pela proposição 1.16, temos que $\varepsilon_{-\alpha}\lambda_{-\alpha} + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$. Assim, $-\varepsilon_\alpha\lambda_{-\alpha} + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$, ou ainda, $-\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma = 0$. Isto implica que $\lambda_\alpha = \lambda_\beta + \lambda_\gamma$. Logo $\lambda_\alpha > \lambda_\beta$ e $\lambda_\alpha > \lambda_\gamma$. Portanto, as raízes $\delta \in \Pi$ tais que $\lambda_\delta = \min\{\lambda_\gamma; \gamma \in \Pi\}$ são J-indecomponíveis. $\square$

Mostraremos agora que $\mathcal{I}$ gera $\mathfrak{h}^*$.

Lema 3.3 *Se o par invariante* (J, Λ) *é* $(1, 2)$*-simplético, então toda raiz* α *pode ser escrita como*

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s,$$

com $\alpha_i \in \mathcal{I}$ *e* $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$. *Esta maneira de escrever* α *pode não ser única.*

Demonstração: Dada $\alpha \in \Pi$, se α é indecomponível, nada temos a provar. Se α é J-decomponível, então $\alpha = \beta + \gamma$, com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$. Se β e γ são ambas indecomponíveis o resultado está provado. Caso contrário, decompomos β ou γ, e possivelmente ambas. A cada passo, como na demonstração do lema 3.2, $\lambda_\alpha > \lambda_\beta$ e $\lambda_\alpha > \lambda_\gamma$. Assim os valores de λ são estritamente decrescentes e a decomposição sucessiva finalmente acaba. Também, a cada decomposição $\alpha = \beta + \gamma$ e $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$, implicando a última afirmação. □

Escrevendo

$$\mathcal{I}^+ = \{\alpha \in \mathcal{I}; \varepsilon_\alpha = +1\},$$

temos que $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$, se $\mathcal{I}^- = -\mathcal{I}^+ = \{\alpha \in \mathcal{I}; \varepsilon_\alpha = -1\}$. Além disso, pelo lema 3.3, $\mathcal{I}^+$ também gera $\mathfrak{h}^*$ e, para uma raíz arbitrária α, temos

$$\alpha = \varepsilon_\alpha (\alpha_1 + \cdots + \alpha_s),$$

com $\alpha_i \in \mathcal{I}^+$. De fato, dada uma raíz α, escrevemos $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_s$, com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\beta_i}$, $i = 1, \ldots, s$ e $\beta_i \in \mathcal{I}$. Se $\varepsilon_\alpha = +1$ a afirmação já é verdadeira. Se $\varepsilon_\alpha = -1$, escrevemos $\alpha = \varepsilon_\alpha (\alpha_1 + \cdots + \alpha_s)$, onde $\alpha_i = -\beta_i$.

Veremos que em geral $\mathcal{I}^+$ não é uma base de $\mathfrak{h}^*$. No entanto, quando isto acontecer, isto é, quando $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h}$, $\mathcal{I}^+$ será, pelas observações feitas acima, um sistema simples de raízes. Além disso, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.4 *Se o par invariante* (J, Λ) *é* $(1, 2)$*-simplético e* $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h}$, *então* J *é equivalente a iacs canônica* J_c *e portanto,* (J, Λ) *é Kähler.*

Demonstração: As hipóteses garantem que $\mathcal{I}^+$ é um sistema simples de raízes ([SM], definição 6.22). Associado a $\mathcal{I}^+$ temos o conjunto de raízes positivas que é dado por $\Pi_1^+ = \{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$. De fato, se α é uma raíz tal que $\varepsilon_\alpha = +1$, então $\alpha > 0$, pois $\alpha = \varepsilon_\alpha (\alpha_1 + \cdots + \alpha_s)$, com $\alpha_i \in \mathcal{I}^+$, ou seja, α é soma de raízes simples. Não podemos nos esquecer que um sistema simples de raízes é sempre um subconjunto do conjunto das raízes positivas. Agora, se $\beta > 0$ e $\varepsilon_\beta = -1$, então $-\beta < 0$ e $\varepsilon_{-\beta} = +1$. Daí $-\beta \in \{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$. Mas, pelo que acabamos de ver, $\{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$

está contido no subconjunto das raízes positivas, e isto implica que $-\beta > 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\Pi_1^+ = \{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$ é de fato uma escolha de raízes positivas.

Como Π_1^+ é uma escolha de raízes positivas, pela demonstração da proposição 1.19, J é integrável. Visto que o par (J, Λ) é $(1,2)$-simplético, pelas proposições 1.14 e 1.16, basta verificar que $d\Omega = 0$ para $\{0,3\}$-triplas $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Mas, não existem $\{0,3\}$-triplas com relação a Π_1^+, pois se $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$, então as três raízes são positivas ou as três raízes são negativas com a soma sendo zero. Isto é uma contradição. Portanto (J, Λ) é Kähler. □

Consideremos as hipóteses do corolário anterior. Se $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\beta, \gamma \in \Pi_1^+$, então $\{-\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla e $-\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma = 0$, isto é, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta + \lambda_\gamma$. Isto significa que a métrica é a de Borel.

Mesmo quando $\mathcal{I}^+$ não é um sistema simples de raízes, este compartilha com o sistema simples de raízes a seguinte propriedade, que é bastante útil.

Lema 3.5 *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{I}^+$, então $\alpha - \beta$ não é uma raiz. Assim, $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$, se $\alpha, \beta \in \mathcal{I}^+, \alpha \neq \beta$.*

Demonstração: Se $\alpha - \beta = \gamma \in \Pi$ e $\varepsilon_\gamma = +1$, temos que $\alpha = \beta + \gamma$ é uma J-decomposição, o que é uma contradição, já que $\alpha \in \mathcal{I}^+$. Por outro lado, se $\varepsilon_\gamma = -1$, então $-\beta = \gamma + -(\alpha)$ é uma J-decomposição, levando a uma nova contradição. Agora, a α-seqüência iniciada em β é $\beta - p\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha$. Como $\alpha - \beta$ não é uma raiz, $p = 0$ e $\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = -q \leq 0$. Portanto $\langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$, se $\alpha, \beta \in \mathcal{I}^+, \alpha \neq \beta$. □

Para um entendimento melhor do conjunto $\mathcal{I}^+$ tomemos a seguinte construção. Escrevemos

$$\mathcal{I}^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\},$$

onde $m = |\mathcal{I}^+|$. Seja V um espaço vetorial m-dimensional com base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Através da bijeção $v_i \in \mathcal{B} \leftrightarrow \alpha_i \in \mathcal{I}^+$, obtemos uma aplicação linear sobrejetiva $P : V \to \mathfrak{h}^*$. Consideramos a forma bilinear simétrica em V definida por $(x, y) = \langle Px, Py \rangle$, $x, y \in V$.

Lema 3.6 *Mantendo a notação anterior,*

$$\ker P = \{x \in V; \forall\, y \in V, (x, y) = 0\}.$$

Demonstração: De fato, se $x \in \ker P$, isto é, $Px = 0$, dado $y \in V$, $(x, y) = \langle Px, Py \rangle = \langle 0, Py \rangle = 0$. Por outro lado, se $(x, y) = 0$, para todo $y \in V$, então $\langle Px, Py \rangle = 0$, para todo $Py \in \mathfrak{h}^*$. Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada sobre $\mathfrak{h}$ e P é sobrejetiva, então $Px = 0$ e $x \in \ker P$. $\square$

Também, para $x \in V$, $(x, x) = \langle Px, Px \rangle \geq 0$ e daí $(\cdot, \cdot)$ é positiva semi-definida, pois podemos ter $x \neq 0$ e $Px = 0$. No entanto, $(u, u) > 0$ para $u \in \mathcal{B}$. Notemos que a forma de Cartan-Killing é positiva definida sobre $\mathfrak{h}^*$, ($[SM]$, lema 6.8).

Agora, seja W_V o grupo gerado pelas reflexões

$$s_i(x) = x - \frac{2(x, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i, \ x \in V,$$

definidas pelos elementos da base $\mathcal{B}$. Por $[JH]$, seção 5.3, W_V é a representação geométrica do grupo de Coxeter. Isso se deve aos inteiros de Cartan-Killing

$$\frac{2(v_i, v_j)}{(v_i, v_i)} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}.$$

Notemos que, pelo lema anterior, estes inteiros formam uma matriz de Cartan generalizada, e então eles definem verdadeiramente um grupo de Coxeter. Como a forma $(\cdot, \cdot)$ é positiva semi-definida, W_V é um grupo de Coxeter de tipo afim, ($[JH]$, sec.6.5). Recordemos que o sistema de raízes de W_V é definido como sendo o conjunto

$$\widehat{\Pi} = \{\widehat{w}(u); u \in \mathcal{B}, \widehat{w} \in W_V\}, \qquad ([JH], \text{ sec. } 5.4).$$

Mais ainda, dado $\alpha_i \in \mathcal{I}^+$, $P(s_i(s_i(v_i))) = P(s_i(-v_i)) = P(v_i) = \alpha_i$, ou seja, $\mathcal{I}^+ \subset P\left(\widehat{\Pi}\right)$, onde $P\left(\widehat{\Pi}\right)$ é a projeção de $\widehat{\Pi}$ por P.

Lema 3.7 *Mantendo as mesmas notações, $P\left(\widehat{\Pi}\right)$ é o sistema de raízes em $\mathfrak{h}^*$ gerado por $\mathcal{I}^+$.*

Demonstração: Temos que:

i) $P\left(\widehat{\Pi}\right)$ gera $\mathfrak{h}^*$, pois $\mathcal{I}^+$ gera $\mathfrak{h}^*$. Também, $P(\widehat{w}(u)) = 0$ implica $(\widehat{w}(u), y) = 0$, para todo $y \in V$. Mas, se $y \in \mathcal{B}$, como $\widehat{w}(u) \in \mathcal{B}$, $(\widehat{w}(u), y) > 0$. Logo, $0 \notin P\left(\widehat{\Pi}\right)$.

ii) Para todo $\alpha = P(\widehat{w}(u))$ definimos a reflexão r_α por $r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$.

Assim, se $\beta = P(\widehat{z}(v))$, então

$$\begin{aligned} r_\alpha(\beta) &= (\widehat{z}(v)) - \frac{2\langle P(\widehat{z}(v)), P(\widehat{w}(u))\rangle}{\langle P(\widehat{w}(u)), P(\widehat{w}(u))\rangle} P(\widehat{w}(u)) \\ &= P(\widehat{z}(v)) - \frac{2(\widehat{z}(v), \widehat{w}(u))}{(\widehat{w}(u), \widehat{w}(u))} P(\widehat{w}(u)) \\ &= P\left(\widehat{z}(v) - \frac{2(\widehat{z}(v), \widehat{w}(u))}{(\widehat{w}(u), \widehat{w}(u))}\widehat{w}(u)\right) \in P\left(\widehat{\Pi}\right), \end{aligned}$$

pois $\widehat{\Pi}$ é o sistema de raízes de W_V.

iii) Dados $\alpha, \beta \in P\left(\widehat{\Pi}\right)$, $r_\alpha(\beta) - \beta = P(\widehat{z}(v)) - \frac{2(\widehat{z}(v), \widehat{w}(u))}{(\widehat{w}(u), \widehat{w}(u))} P(\widehat{w}(u)) - P(\widehat{z}(v)) = \frac{2(\widehat{z}(v), \widehat{w}(u))}{(\widehat{w}(u), \widehat{w}(u))} P(\widehat{w}(u))$ que é um múltiplo de α.

Logo, pela definição dada em [SM], pág. 229, $P\left(\widehat{\Pi}\right)$ é o sistema de raízes em $\mathfrak{h}^*$ gerado por $\mathcal{I}^+$. □

Denotaremos este sistema de raízes por $\Pi(\mathcal{I}^+)$.

Lema 3.8 *Mantendo a notação anterior,* $\Pi(\mathcal{I}^+) \subset \Pi$.

Demonstração: Definimos as reflexões $r_i(\alpha) = \alpha - \frac{2\langle \alpha, \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\alpha_i$ com relação as raízes em $\mathcal{I}^+$. Temos que $P \circ s_i = r_i \circ P$. De fato,

$$\begin{aligned} P \circ s_i(x) &= P\left(x - \frac{2(x, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i\right) = P(x) - \frac{2(x, v_i)}{(v_i, v_i)} P(v_i) \\ &= P(x) - \frac{2\langle P(x), P(v_i)\rangle}{\langle P(v_i), P(v_i)\rangle} P(v_i) = P(x) - \frac{2\langle P(x), \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\alpha_i \\ &= r_i(P(x)) = r_i \circ P(x), \quad x \in V. \end{aligned}$$

Assim, para todo $\widehat{w} \in W_V$ existe $w \in W$ tal que $P \circ \widehat{w} = w \circ P$. Logo, para todo $\widehat{w}(u) \in \widehat{\Pi}$, $P(\widehat{w}(u)) = w(P(u))$, para algum $w \in W$, $u \in \mathcal{B}$ e $Pu \in \mathcal{I}^+$. Como W deixa Π invariante, $P(\widehat{w}(u)) \in \Pi$. Segue que $\Pi(\mathcal{I}^+) \subset \Pi$. □

Para mostrar que $\Pi \subset \Pi(\mathcal{I}^+)$, consideremos o caso G_2 separadamente, com o objetivo de simplificar os argumentos envolvendo diagramas com ligações múltiplas. Em G_2, conforme [SM], sec. 8.4, seus subsistemas próprios são:

1. O conjunto das raízes curtas, cujas raízes positivas são $\{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}$.

2. O conjunto das raízes longas, cujas raízes positivas são $\{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$.

3. Os redutíveis, composto de duas raízes ortogonais.

Os subsistemas (1) e (2) são ambos isomorfos a A_2. Os conjuntos $\{\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$, $\{\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ e $\{\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1\}$ formam as raízes positivas para os possíveis subsistemas redutíveis. Verifiquemos agora que os subsistemas (1), (2) e (3) não podem ser $\Pi(\mathcal{I}^+)$. As raízes longas não geram G_2 sobre $\mathbb{Z}$. De fato, se $a\alpha_1 + b(\alpha_1 + 3\alpha_2) + c(2\alpha_1 + 3\alpha_2) = \alpha_2$, então $a + b + 2c = 0$ e $3b + 3c = 1$. Esta última igualdade é impossível com $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mas, pelo lema 3.3 e observação feita na seqüência, $\Pi(\mathcal{I}^+)$ gera G_2 sobre $\mathbb{Z}$. Por outro lado, o conjunto de raízes curtas não possui um conjunto gerador satisfazendo o lema 3.5, pois isto viola a propriedade que a diferença de duas raízes não é uma raiz. Notemos que $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$ e $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, ou seja, qualquer que seja o conjunto gerador, a diferença entre as raízes do conjunto gerador continua sendo uma raiz. Além disso, um par de raízes ortogonais não gera G_2 sobre $\mathbb{Z}$. De fato, não é possível escrever $\alpha_1 = a\alpha_2 + b\,(2\alpha_1 + 3\alpha_2)$ com $a, b \in \mathbb{Z}$. O mesmo ocorre com $\alpha_2 = a\,(\alpha_1 + 3\alpha_2) + b\,(\alpha_1 + \alpha_2)$ e com $\alpha_2 = a\,(\alpha_1 + 2\alpha_2) + b\alpha_1$. Como $\Pi\,(\mathcal{I}^+)$ é um sistema de raízes em Π e não é um subsistema próprio, demonstramos a seguinte proposição:

Proposição 3.9 $\Pi(\mathcal{I}^+) = \Pi$, *no caso* G_2.

Para o caso geral, consideramos as raízes $\alpha, \beta \in \Pi(\mathcal{I}^+)$ e comparamos as seqüências de raízes

$$\beta - p_{\mathcal{I}}\alpha, \ldots, \beta + q_{\mathcal{I}}\alpha \in \Pi(\mathcal{I}^+) \qquad \text{e} \qquad \beta - p\alpha, \ldots, \beta + q\alpha \in \Pi,$$

formadas em cada sistema $\Pi\,(\mathcal{I}^+)$ e Π. As seqüências são dadas pela conhecida fórmula de Cartan-killing ($[SM]$, pág.154)

$$p - q = \frac{2\,\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}.$$

O segundo membro desta fórmula é independente do sistema de raízes. Mas, os p's e q's podem ser diferentes em dois sistemas de raízes. Descartando G_2, existem as seguintes possibilidades:

1. $\langle\alpha, \beta\rangle \neq 0$ e as raízes possuem o mesmo comprimento. Neste caso os números de Killing são $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = \pm 1$. Como as raízes não são ortogonais e estamos descartando G_2, então o subespaço gerado por α e β intercepta $\Pi\,(\mathcal{I}^+)$ e Π em

um A_2-subsistema. Ambas as seqüências dependem somente do subsistema, e então elas são as mesmas, independentemente do sistema de raízes. (Ver o segundo diagrama da figura 3.1).

2. $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ e as raízes α e β possuem comprimentos diferentes, $\langle \beta, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ ou $\langle \beta, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{2}$, pois o sistema não é G_2. Como as raízes não são ortogonais e estamos descartando G_2, então o subespaço gerado por α e β intercepta $\Pi(\mathcal{I}^+)$ e Π em um B_2-subsistema. Logo, as seqüências são as mesmas. (Ver o terceiro diagrama da figura 3.1).

3. $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, isto é, $p = q$. Se as duas raízes são longas, então o subespaço gerado por α e β intercepta $\Pi(\mathcal{I}^+)$ e Π em um B_2-subsistema, pois em A_2 não existem duas raízes ortogonais e num sistema onde $\alpha \pm \beta$ não é raiz, as duas raízes são curtas. Também, não pode ocorrer de uma raiz ser curta e outra ser longa pois, neste caso, α e β não são ortogonais, já que estamos descartando G_2. Se as duas raízes são curtas o subespaço gerado por α e β pode interceptar $\Pi(\mathcal{I}^+)$ em um subsistema onde $\alpha \pm \beta$ não é uma raiz. Neste caso pode aparecer ou o primeiro diagrama ou as raízes α e $\alpha + \beta$ do terceiro diagrama. Como a interseção do subespaço gerado por α e β com Π é um B_2-subsistema, esta é a única possibilidade para as seqüências serem diferentes. As figuras abaixo mostram as possíveis raízes da α-seqüência iniciada em β.

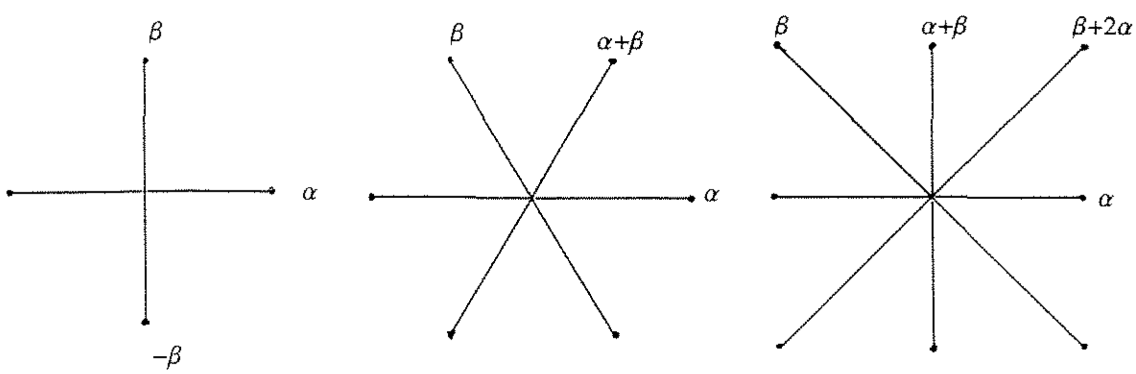


Figura 3.1: subsistemas $A_1 \oplus A_1$, A_2 e B_2, respectivamente.

Com esta preparação podemos provar o resultado desejado.

Lema 3.10 $\Pi(\mathcal{I}^+) = \Pi$.

Demonstração: Falta provar que $\Pi \subset \Pi(\mathcal{I}^+)$. Esta inclusão é provada por indução. Escrevemos $\{\alpha \in \Pi; \varepsilon_\alpha = +1\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$, ordenado de modo que

$$\lambda_{\alpha_1} \leq \ldots \leq \lambda_{\alpha_N}.$$

Queremos mostrar que $\alpha_i \in \Pi(\mathcal{I}^+)$ por indução sobre i. Se $i = 1, \alpha_1$ é indecomponível, pois $\lambda_{\alpha_1} = \min\{\lambda_\gamma; \gamma \in \Pi\}$. Assim, $\alpha_1 \in \mathcal{I}^+ \subset \Pi(\mathcal{I}^+)$. Nossa hipótese de indução diz que dado $i = 1, \ldots, N$, então $\alpha_j \in \Pi(\mathcal{I}^+)$, para todo $j < i$. Podemos supor que α_i é J-decomponível, pois do contrário α_i já está em $\Pi(\mathcal{I}^+)$. Então $\alpha_i = \beta + \gamma$, com $\varepsilon_{\alpha_i} = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = +1$ e existem índices j, k tais que $\beta = \alpha_j$ e $\gamma = \alpha_k$. Agora, $\lambda_{\alpha_i} = \lambda_\beta + \lambda_\gamma = \lambda_{\alpha_j} + \lambda_{\alpha_k}$, pois o par (J, Λ) é tomado $(1,2)$-simplético. Daí $j, k < i$. Da hipótese de indução tanto β como γ estão e $\Pi(\mathcal{I}^+)$. Para provar que $\alpha_i \in \Pi(\mathcal{I}^+)$ devemos verificar que as seqüências de raízes determinadas por β e γ em Π e $\Pi(\mathcal{I}^+)$ são as mesmas. Pelas observações feitas anteriormente, somente o caso quando $\beta \pm \gamma \in \Pi$ e $\langle \beta, \gamma \rangle = 0$, isto é, β e γ são raízes curtas no B_2-subsistema dado pelo interseção de Π com o subespaço gerado por β e γ, merece cuidado. Existem duas possibilidades:

1. Se $\varepsilon_{\beta-\gamma} = +1$, então $\beta = (\beta - \gamma) + \gamma$ é uma J-decomposição e, pela demonstração do lema 3.2, $\lambda_\beta = \lambda_{\beta-\gamma} + \lambda_\gamma$. Assim, $\lambda_{\beta-\gamma} < \lambda_\beta < \lambda_{\alpha_i}$ e a hipótese de indução implica que $\beta - \gamma \in \Pi(\mathcal{I}^+)$. Agora, $\beta - \gamma$ e γ possuem comprimentos diferentes, e daí a fórmula de Killing implica que $\alpha_i = \beta + \gamma$ é também uma raíz de $\Pi(\mathcal{I}^+)$.

2. Se $\varepsilon_{\beta-\gamma} = -1$, isto é, $\varepsilon_{\gamma-\beta} = +1$, então $\gamma = (\gamma - \beta) + \beta$ é uma J-decomposição e podemos repetir todos os argumentos de (1) para concluir que $\gamma + \beta \in \Pi(\mathcal{I}^+)$.

Como as seqüências são as mesmas, segue que $\alpha_i \in \Pi(\mathcal{I}^+)$, mostrando que $\{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\} \subset \Pi(\mathcal{I}^+)$. Visto que $\Pi(\mathcal{I}^+)$ é sistema de raízes, segue que $\Pi \subset \Pi(\mathcal{I}^+)$. □

Mostremos que o grafo de Coxeter de W_V é conexo.

Lema 3.11 *Supomos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ com $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ e $(u, v) = 0$, para todo $u \in \mathcal{B}_1$ e $v \in \mathcal{B}_2$. Então $\mathcal{B}_1$ ou $\mathcal{B}_2$ é vazio.*

Demonstração: Seja V_i o subespaço linear gerado por $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$. Temos que $V = V_1 \oplus V_2$ e estes espaços são mutuamente ortogonais com relação a $(\cdot, \cdot)$. Como W_V é gerado por reflexões com relação aos elementos de $\mathcal{B}$, segue que

$$\widehat{\Pi} = \left(V_1 \cap \widehat{\Pi}\right) \cup \left(V_2 \cap \widehat{\Pi}\right).$$

pois $\widehat{w}(v_i) \in V_j$, se $v_i \in V_j$, $1 \le i \le m$, $j = 1, 2$, $\widehat{w} \in W_V$. Por outro lado, $\mathcal{I}^+ = P\mathcal{B}_1 \cup P\mathcal{B}_2$ é a união disjunta de subconjuntos ortogonais com relação a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$. Também $\mathfrak{h}^* = PV_1 + PV_2$, pois $\mathcal{I}^+$ gera $\mathfrak{h}^*$ e $P\mathcal{B}_i$ gera PV_i, $i = 1, 2$. Logo, PV_1 é ortogonal a PV_2 e daí $\mathfrak{h}^* = PV_1 \oplus PV_2$. Agora, usando o fato que $\Pi(\mathcal{I}^+) = \Pi$, temos que

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi(\mathcal{I}^+) = P\left(\widehat{\Pi}\right) = P\left(\left(V_1 \cap \widehat{\Pi}\right) \cup \left(V_2 \cap \widehat{\Pi}\right)\right) \\ &= P\left(V_1 \cap \widehat{\Pi}\right) \cup P\left(V_2 \cap \widehat{\Pi}\right) \subset (PV_1 \cap \Pi) \cup (PV_2 \cap \Pi).\end{aligned}$$

Logo, $\Pi = (PV_1 \cap \Pi) \cup (PV_2 \cap \Pi)$.

Como $\mathfrak{g}$ é simples, temos que Π é irredutível ($[SM]$, sec. 8.3). Assim $PV_1 = \emptyset$ ou $PV_2 = \emptyset$, implicando que $\mathcal{B}_1$ ou $\mathcal{B}_2$ é vazio. □

A classificação de grupos de Coxeter afins irredutíveis é feita em $[JH]$. Em qualquer um destes o radical da forma bilinear correspondente $(\cdot, \cdot)$ possui dimensão no máximo igual a 1. ($[JH]$, sec.6.3 e 6.5):

$$\dim(\{x \in V;\ \forall\, y \in V, (x, y) = 0\}) \le 1.$$

Logo dim ker $P \le 1$ e daí $\dim V = \dim \mathfrak{h}$ ou $\dim V = \dim \mathfrak{h} + 1$. Isto prova a seguinte proposição:

Proposição 3.12 $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h}$ *ou* $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h} + 1$.

Como já visto no corolário 3.4 e na observação que lhe antecede, se $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h}$, então $\mathcal{I}^+$ é um sistema simples de raízes e J é equivalente a *iacs* canônica. Por outro lado, se $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h} + 1$, W_V é verdadeiramente um grupo de Coxeter afim.

A seguinte descrição de um grupo de afim, proveniente de um grupo de Weyl finito, é encontrada em [VK], capítulo 6.

Proposição 3.13 *No espaço V de realização geométrica do sistema de raízes afim existem*

1. *Um subespaço $U \subset V$ de codimensão 1 ($U \approx \mathfrak{h}^*$),*
2. *Um sistema de raízes finito sobre U, denotado por $\Pi(V)$,*
3. *Um sistema simples de raízes $\Sigma(V) \subset \Pi(V)$ e*

4. *Um gerador δ de* $\ker P$ *(subespaço 1-dimensional complementar de U), tal que a base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é dada por*

$$\mathcal{B} = \Sigma(V) \cup \{\delta - \mu_1\},$$

onde μ_1 é a raíz de altura máxima ou peso máximo com relação a $\Sigma(V)$.

Vamos agora juntar todas as partes das discussões anteriores para chegar a seguinte caracterização do conjunto J-indecomponível de raízes.

Teorema 3.14 *Mantendo as notações de antes, existe um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$ tal que $\mathcal{I}^+ = \Sigma$ ou $\mathcal{I}^+ = \Sigma \cup \{-\mu\}$, onde μ é a raiz de altura máxima com relação a Σ.*

Demonstração: Temos que $\mathcal{I}^+ = P\mathcal{B}$. Se $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h}$, então e $\mathcal{I}^+$ é o sistema simples de raízes contido em Π. Se $|\mathcal{I}^+| = \dim \mathfrak{h} + 1$, pela proposição 3.13,

$$\mathcal{I}^+ = P\mathcal{B} = P(\Sigma(V) \cup \{\delta - \mu_1\}) = P(\Sigma(V)) \cup P(-\mu_1) = \Sigma \cup \{-\mu\},$$

onde μ é a raiz de altura máxima com relação a Σ. Notemos que $\delta \in \ker P$, isto é, $P(\delta) = 0$. □

Observação: Através do lema 3.5 podemos ver que se existe um sistema simples de raízes Σ contido em $\mathcal{I}^+$, então $\mathcal{I}^+ = \Sigma$ ou $\mathcal{I}^+ = \Sigma \cup \{-\mu\}$. De fato, se $\alpha \in \mathcal{I}^+$ e $\alpha \notin \Sigma$, então $\alpha - \beta$ não é uma raíz para todo $\beta \in \mathcal{I}^+$. Logo, $\alpha - \beta$ não é uma raíz para todo $\beta \in \Sigma$. Isto implica, pelo que acabamos de ver que $\alpha = -\mu$. Não provamos diretamente, sem a ajuda dos grupos de Weyl afim, que I^+ contém um sistema simples de raízes. Notemos que a condição do lema 3.5 sozinha não é o bastante para garantir que um conjunto contém um sistema simples de raízes, mesmo que o conjunto gere h^*. Por exemplo, em B_2 o conjunto $L = \{\alpha_1, -(\alpha_1 + \alpha_2)\}$ gera h^* e satisfaz $\langle \alpha_1, -(\alpha_1 + \alpha_2) \rangle = -\langle \alpha_1 + \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -2 + 1 = -1 < 0$. Mas, não contém um sistema simples de raízes. Generalizando, em um sistema de raízes B_l, o conjunto L que é dado pela união do conjunto das raízes simples longas com as raízes mais curtas (não simples) geram h^* e satisfazem $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ para todo $\alpha, \beta \in L$. Mas não existe sistema simples de raízes de B_l contido em L.

Para definir ideal abeliano necessitamos do próximo lema.

Lema 3.15 *Seja $M \subset \Pi^+$. Então são equivalentes:*

a. $\alpha + \gamma \in M$, *se* $\alpha \in M$ *e* $\gamma \in \Sigma$ *são tais que* $\alpha + \gamma$ *é uma raiz.*

b. $\alpha + \gamma \in M$, *se* $\alpha \in M$ *e* $\gamma \in \Pi^+$ *são tais que* $\alpha + \gamma$ *é uma raiz.*

c. Supondo que existem raízes simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *e* $\alpha \in M$, *tais que* $\beta_k = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ *é uma raíz para todo* $k = 1, \ldots, s$, *então* $\beta_k \in M$.

d. Denotando por μ *a raiz positiva mais alta e supondo que existem raízes simples* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, *tais que* $\alpha = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s \in M$, *e* $\beta_k = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_k$ *é uma raíz para todo* $k = 1, \ldots, s$, *então* $\beta_k \in M$.

Demonstração: Supomos (a). Dados $\alpha \in M$ e $\gamma \in \Pi^+$ tais que $\alpha + \gamma$ é uma raiz, se $\gamma \in \Sigma$, por (a), $\alpha + \gamma \in M$. Se $\gamma \in \Pi^+ \backslash \Sigma$, então, pelo lema A.5, existem raízes simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tais que $\gamma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ e todas as somas intermediárias $\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, $1 \leq k \leq s$ são raízes. Assim, por (a), $\alpha + \alpha_1 \in M$. Agora, $\alpha + \alpha_1 \in M$, $\alpha_2 \in \Sigma$ e $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2$ é uma raiz. Daí, também por (a), $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \in M$. Repetimos o argumento até que $\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = \alpha + \gamma$ esteja em M. Portanto (a) implica (b).

Como $\Sigma \subset \Pi^+$, segue que (b) implica (a).

Tendo (b) como hipótese, dadas as raízes simples $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ e $\alpha \in M$, tais que $\beta_k = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ é uma raiz para todo $k = 1, \ldots, s$, queremos mostrar que $\beta_k \in M$. Temos que $\beta_1 = \alpha + \alpha_1$, $\alpha \in M$ e $\alpha_1 \in \Sigma$. Logo, por (b), $\beta_1 \in M$. Como $\beta_1 \in M$, $\alpha_2 \in \Sigma$ e $\beta_1 + \alpha_2 = \beta_2$ é uma raiz, então novamente por (b), $\beta_2 = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \in M$. Repetimos o argumento até que β_k, $k = 1, \ldots, s$, esteja em M. Portanto, (b) implica (c).

Queremos agora provar que (c) implica (d). Dadas as raízes simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, tais que $\alpha = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s \in M$, e $\beta_k = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_k$ é uma raiz para todo $k = 1, \ldots, s$, queremos mostrar que $\beta_k \in M$. Temos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \Sigma$, $\alpha \in M$ e $\eta_1 = \alpha + \alpha_s = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{s-1} = \beta_{s-1}$, $\eta_2 = \alpha + \alpha_{s-1} + \alpha_s = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{s-2} = \beta_{s-2}, \ldots, \eta_{k-1} = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1} = \mu - \alpha_1 = \beta_1$, $\eta_k = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = \mu$ são raízes. Por (c) $\eta_k \in M$. Portanto $\beta_k \in M$, $1 \leq k \leq s$. Notemos que $\beta_s = \alpha \in M$ por hipótese. Portanto (c) implica (d).

Resta provar que (d) implica (a). Dadas as raízes $\alpha \in M$ e $\gamma \in \Sigma$ tais que $\alpha + \gamma$ é uma raiz, pelo lema A.5, existem raízes simples $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ tais que $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_s$ e todas as somas intermediárias $\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$, $1 \leq k \leq s$ são raízes. Escrevemos $\alpha + \gamma + \beta_1 + \cdots + \beta_t = \mu$ de modo que $\alpha + \gamma + \beta_1 + \cdots + \beta_i$ é uma raiz para todo $i = 1, \ldots, t$, conforme comentário que sucede a proposição A.4. Logo, $\alpha =$

$\mu - \beta_t - \cdots - \beta_1 - \gamma_s - \cdots - \gamma_1 \in M$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \mu - \beta_t = \alpha + \gamma + \beta_1 + \cdots + \beta_{t-1}, \\
\xi_2 &= \mu - \beta_t - \beta_{t-1} = \alpha + \gamma + \beta_1 + \cdots + \beta_{t-2}, \ldots, \\
\xi_t &= \mu - \beta_t - \cdots - \beta_1 = \alpha + \gamma, \\
\xi_{t+1} &= \mu - \beta_t - \cdots - \beta_1 - \gamma_s = \alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{s-1}, \ldots, \\
\xi_{t+s} &= \mu - \beta_t - \cdots - \beta_1 - \gamma_s - \cdots - \gamma_1 = \alpha
\end{aligned}$$

são raízes. Por (d), $\xi_j \in M, 1 \leq j \leq t+s$. Em particular $\xi_t = \alpha + \gamma \in M$. □

A definição anunciada é a seguinte.

Definição 3.16 *Fixemos um sistema simples de raízes Σ com Π^+ o correspondente conjunto de raízes positivas. Um subconjunto $M \subset \Pi^+$ é chamado de* ***ideal abeliano*** *se:*

1) M é abeliano, isto é, $\alpha + \beta$ não é uma raíz se $\alpha, \beta \in M$.

2) Uma das quatro condições equivalentes do lema 3.15 é satisfeita.

Estamos agora preparados para expor o principal resultado deste capítulo, estabelecendo uma forma especial para as estruturas quase Hermitianas $(1,2)$-simpléticas invariantes.

Teorema 3.17 *Sejam $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, \Lambda = \{\lambda_\alpha\})$ um par $(1,2)$-simplético invariante e Σ um sistema simples de raízes J-indecomponível contido em $\mathcal{I}^+$, conforme teorema 3.14. Denotemos por Π^+ o conjunto de raízes positivas e por μ a raiz de altura máxima com relação a Σ. Seja*

$$M(J, \Sigma) = \left\{\alpha \in \Pi^+ ; \varepsilon_\alpha = -1\right\}.$$

Então,

1. *$M(J,\Sigma)$ é um ideal abeliano.*

2. *$M(J,\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$.*

3. *Para $\alpha \in M(J,\Sigma)$ supomos que $\alpha = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s$ com $\alpha_k \in \Sigma$ e $\mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_k$ raiz, para todo $k = 1, \ldots, s$. Então $\lambda_\alpha = \lambda_\mu + \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_s}$.*

4. *Seja* $\alpha \in \Pi^+ \backslash M(J,\Sigma)$, *tal que* $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ *com* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ *raiz, para todo* $k = 1, \ldots, s$. *Então* $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_s}$.

5. *Se* $\alpha \in M(J,\Sigma)$ *e* $\beta \in \Pi^+$ *são tais que* $\alpha+\beta$ *é uma raiz, então* $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha - \lambda_\beta$.

Demonstração: Sejam $\alpha \in M(J,\Sigma)$ e $\gamma \in \Sigma$ tais que $\alpha+\gamma$ é uma raiz. Queremos provar que $\alpha+\gamma \in M(J,\Sigma)$. Se $\varepsilon_{\alpha+\gamma} = +1$, então $\gamma = (\alpha+\gamma)+(-\alpha)$ é uma J-decomposição de γ, contradizendo o fato de que γ é J-indecomponível. Logo, $\alpha+\gamma \in M(J,\Sigma)$ e é verdadeira a segunda condição da definição 3.16.

A afirmação (2) é verdadeira por construção. Temos que $M(J,\Sigma) = \{\alpha \in \Pi^+; \varepsilon_\alpha = -1\}$ e $\Sigma \subset \mathcal{I}^+ = \{\alpha \in \mathcal{I}; \varepsilon_\alpha = +1\}$.

Provemos a afirmação (3). Supomos que $\alpha \in M(J,\Sigma)$, $\alpha = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s$ com $\alpha_k \in \Sigma$ e $\beta_k = \mu - \alpha_1 - \cdots - \alpha_k$ raiz, para todo $k = 1, \ldots, s$. Pela quarta condição das quatro equivalentes da definição 3.16, $\beta_k \in M(J,\Sigma)$, $k = 1, \ldots, s$. Temos que $\alpha = \beta_{s-1} - \alpha_s$, $\varepsilon_\alpha = -1$, $\varepsilon_{\beta_{s-1}} = -1$, $\varepsilon_{\alpha_s} = +1$. Logo $\{\alpha, -\beta_{s-1}, \alpha_s\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla. Como o par invariante é $(1,2)$-simplético, pela proposição 1.16, $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_{-\beta_{s-1}}\lambda_{\beta_{s-1}} + \varepsilon_{\alpha_s}\lambda_{\alpha_s} = 0$, ou seja, $-\lambda_\alpha + \lambda_{\beta_{s-1}} + \lambda_{\alpha_s} = 0$. Isto implica que $\lambda_\alpha = \lambda_{\beta_{s-1}} + \lambda_{\alpha_s}$. Agora, $\beta_{s-1} = \beta_{s-2} - \alpha_{s-1}$, $\varepsilon_{\beta_{s-1}} = -1$, $\varepsilon_{\alpha_{s-1}} = +1$ e $\varepsilon_{\beta_{s-2}} = -1$. Daí, $\{\beta_{s-1}, -\beta_{s-2}, \alpha_{s-1}\}$ é $\{1,2\}$-tripla e $\lambda_{\beta_{s-1}} = \lambda_{\beta_{s-2}} + \lambda_{\alpha_{s-1}}$. Repetindo o argumento com $\beta_{s-2}, \beta_{s-3}, \ldots, \beta_1 = \mu - \alpha_1$, obtemos $\lambda_\alpha = \lambda_{\mu-\alpha_1} + \lambda_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_{\alpha_s}$. No último passo temos $\mu - \alpha_1 \in M(J,\Sigma)$, $\varepsilon_{\mu-\alpha_1} = -1$, $\varepsilon_{\alpha_1} = +1$ e $\varepsilon_\mu = -1$ pois, pelo teorema 3.14, $-\mu \in \mathcal{I}^+$. (Note que $\mathcal{I}^+ = \Sigma$ implica, pela demonstração do corolário 3.4, $M(J,\Sigma) = \emptyset$). Segue que $\{\mu - \alpha_1, \alpha_1, -\mu\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla e $\lambda_{\mu-\alpha_1} = \lambda_\mu + \lambda_{\alpha_1}$. Isto conclui a prova de (3).

Queremos agora provar a afirmação (4). Temos que $\alpha \in \Pi^+ \backslash M(J,\Sigma)$, tal que $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ raiz, para todo $k = 1, \ldots, s$. Daí, $\alpha = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1}) + \alpha_s$, $\varepsilon_\alpha = +1$, $\varepsilon_{\alpha_s} = +1$. Além disso, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1} \notin M(J,\Sigma)$, pois do contrário, pelo que já foi provado, $\alpha = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1}) + \alpha_s$ estaria em $M(J,\Sigma)$, o que é uma contradição. Logo $\{-\alpha, (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1}), \alpha_s\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla e $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}} + \lambda_{\alpha_s}$. Analogamente, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-2}) + \alpha_{s-1}$, $\varepsilon_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}} = +1$, $\varepsilon_{\alpha_{s-1}} = +1$ e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-2} \notin M(J,\Sigma)$ pois $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-2} + \alpha_{s-1} \notin M(J,\Sigma)$. Isto nos dá a

$$\{1,2\}\text{-tripla } \{-(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1}), (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-2}), \alpha_{s-1}\}$$

e a igualdade $\lambda_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}} = \lambda_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-2}} + \lambda_{\alpha_{s-1}}$. Repetindo o argumento com as raízes $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-2}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-3}, \cdots, \alpha_1$, obtemos a expressão desejada para λ_α.

Falta provar a afirmação (5) e a propriedade abeliana da definição 3.16. No entanto, podemos observar que as duas são equivalentes: de fato, se $\alpha \in M(J,\Sigma)$ e $\beta \in M(J,\Sigma)$, supondo (5), se $\alpha+\beta$ é raiz, então $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha - \lambda_\beta$. Por outro lado, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$, donde $\{(\alpha+\beta), -\alpha, -\beta\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla. Isto implica que $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$, o que é uma contradição. Reciprocamente, se $\alpha \in M(J,\Sigma)$ e $\beta \in \Pi^+$, são tais que $\alpha+\beta$ é uma raiz, então $\varepsilon_\beta = +1$, pois a condição abeliana implica que $\beta \notin M(J,\Sigma)$. Além disso, a segunda das quatro condições equivalentes da definição 3.16 implica que $\alpha+\beta \in M(J,\Sigma)$. Segue que $\{\alpha+\beta, -\alpha, -\beta\}$ é uma $\{1,2\}$ −tripla e $-\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\alpha - \lambda_\beta = 0$, isto é, $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha - \lambda_\beta$. Portanto, a condição abeliana implica (5).

Provemos a afirmação (5). Sejam $\alpha \in M(J,\Sigma)$ e $\beta \in \Pi^+$ são tais que $\alpha+\beta$ é uma raiz, pela segunda das quatro condições equivalentes da definição 3.16, $\alpha+\beta \in M(J,\Sigma)$. Se $\varepsilon_\beta = +1$, então temos $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ uma $\{1,2\}$-tripla e $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}\lambda_{\alpha+\beta} = 0$, ou seja, $\lambda_\alpha - \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$. Logo, a afirmação 5) é verdadeira se $\varepsilon_\beta = +1$. Se $\varepsilon_\beta = -1$, isto é, $\beta \in M(J,\Sigma)$, então escrevendo $\alpha+\beta+\gamma_1+\cdots+\gamma_s = \mu$, com $\gamma_i \in \Sigma$ e $\alpha+\beta+\gamma_1+\cdots+\gamma_k$ raiz para todo $1 \le k \le s$, temos por 3), $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\mu + \lambda_{\gamma_1} + \cdots + \lambda_{\gamma_s}$. Também, pelo lema A.5, podemos escrever $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_l$, com $\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_j$ raiz para todo $1 \le j \le l$. Assim, novamente por (3), $\lambda_\alpha = \lambda_\mu + \lambda_{\gamma_1} + \cdots + \lambda_{\gamma_s} + \lambda_{\beta_1} + \cdots + \lambda_{\beta_l}$. Segue que $\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\alpha = -\lambda_{\beta_1} - \cdots - \lambda_{\beta_l} < 0$. Por outro lado, $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = -1, \varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$ e $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ uma $\{1,2\}$-tripla. Daí, $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}\lambda_{\alpha+\beta} = 0$, ou seja, $-\lambda_\alpha - \lambda_\beta + \lambda_{\alpha+\beta} = 0$. Assim $\lambda_{\alpha+\beta} - \lambda_\alpha = \lambda_\beta > 0$ o que é uma contradição. Logo, não pode ocorrer $\varepsilon_\beta = -1$. Portanto a afirmação (5) é verdadeira. □

Definição 3.18 *Dizemos que uma iacs J satisfaz a propriedade de ideal abeliano com relação a Σ se $M(J,\Sigma)$ é um ideal abeliano tal que $M(J,\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$. Neste caso, J tem a forma ideal abeliano com relação a Σ.*

Podemos ver que se $M(J,\Sigma)$ é um ideal abeliano, então as expressões dadas no teorema 3.17 para Λ de fato definem uma métrica $(1,2)$-simplética com relação a J, mostrando que J é $(1,2)$-admissível. De fato, consideremos as expressões dadas no teorema. Queremos provar que para toda $\{1,2\}$-tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$. Vamos supor que $\alpha, \beta \in \Pi^+$. Se $\varepsilon_\alpha = -1$ e $\varepsilon_\beta = +1$, então $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$, pois $\alpha+\beta$ é raiz e $\alpha \in M(J,\Sigma)$. Neste caso a igualdade desejada passa a ser $-\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma = 0$. Mas, pela expressão dada na afirmação (5) do teorema, esta igualdade é verdadeira. Se $\varepsilon_\alpha = +1$ e $\varepsilon_\beta = -1$ a verificação da igualdade é feita da mesma forma. O caso $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$, pela propriedade abeliana, não ocorre. Resta verificar o caso $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$ e $\varepsilon_\gamma = -1$.

Podemos escrever $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$, $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_k$, onde todas somas intermediárias são raízes ($[SM]$, pág. 165). Pela afirmação (4) do teorema, $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_s}$, $\lambda_\beta = \lambda_{\beta_1} + \cdots + \lambda_{\beta_k}$ e $\lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_s} + \lambda_{\beta_1} + \cdots + \lambda_{\beta_k}$. Também, $-\gamma > 0$, $-\gamma \notin M(J, \Sigma)$ e $-\gamma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \cdots + \beta_k$. Pelo lema A.5, todas as somas intermediárias $\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_l$ são raízes. Logo, pela afirmação (4), $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_s} + \lambda_{\beta_1} + \cdots + \lambda_{\beta_k}$, como queríamos.

No próximo capítulo a presença da métrica $(1,2)$-simplética será garantida mostrando que J é afim se $M(J, \Sigma)$ é um ideal abeliano.

É natural perguntar neste momento se as formas ideal abeliano do teorema 3.17 determinam as classes de equivalência das estruturas $(1,2)$-simpléticas sob a ação de W. Claramente, estruturas equivalentes podem ser colocadas na mesma forma ideal abeliana. Mas, não é verdade que duas estruturas $J_1 \neq J_2$ satisfazendo a propriedade de ideal abeliano com relação a mesma Σ são equivalentes. Assim, a forma ideal abeliana não é uma forma verdadeiramente canônica, no sentido que classes de equivalência não são determinadas pelas forma ideal abeliano. Voltaremos neste assunto no capítulo 5 quando estabelecermos a correspondência entre *iacs* $(1,2)$-simplética com as *iacs* afim.

Finalizaremos este capítulo explicitando o seguinte fato.

Proposição 3.19 *Se J satisfaz a propriedade de ideal abeliano com relação a Σ, então $\mathcal{I}^+(J) = \Sigma$ se $M(J,\Sigma) = \emptyset$ e $\mathcal{I}^+(J) = \Sigma \cup \{-\mu\}$ se $M(J,\Sigma) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Supomos que $M(J,\Sigma) = \emptyset$. Dado $\alpha \in \mathcal{I}^+(J) = \{\alpha \in \mathcal{I}; \varepsilon_\alpha = +1\}$, se $\alpha \in \Pi^-$, então $-\alpha \in \Pi^+$ e $\varepsilon_{-\alpha} = -1$, implicando que $-\alpha \in M(J,\Sigma)$, o que é uma contradição. Logo $\alpha \in \Pi^+ \backslash M(J, \Sigma)$. Se $\alpha \notin \Sigma$, então $\alpha = \beta + \gamma$, com $\beta, \gamma > 0$. Como $M(J,\Sigma) = \emptyset$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = +1$ e $\alpha = \beta + \gamma$ é uma J-decomposição para α, o que contradiz a hipótese sobre α. Segue que $\alpha \in \Sigma$.

Reciprocamente, dado $\alpha \in \Sigma$, $\varepsilon_\alpha = +1$, pois $M(J,\Sigma) = \emptyset$. Se $\alpha \notin \mathcal{I}^+(J)$, então existem raízes β, γ tais que $\alpha = \beta + \gamma$ com $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha = +1$. Daí, $-\beta, -\gamma$ são ambas raízes negativas pois, do contrário, estariam em $M(J, \Sigma)$. Segue que β e γ são positivas e isto contradiz a definição para α simples.

Agora supomos $M(J,\Sigma) \neq \emptyset$. Se $\alpha \in \Sigma$, $\varepsilon_\alpha = +1$, pois $M(J,\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$. Se $\alpha \notin \mathcal{I}^+(J)$, então $\alpha = \beta + \gamma$ com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = +1$. Como $\alpha \in \Sigma$, então α ou β é uma raiz negativa. Digamos $\beta < 0$. Daí, $-\beta > 0$, $\varepsilon_{-\beta} = -1$ e $-\beta \in M(J, \Sigma)$. Segue que $\alpha - \beta = \gamma \in M(J, \Sigma)$ e $\varepsilon_\gamma = -1$, o que é uma contradição. $\alpha \in \mathcal{I}^+(J)$.

Queremos provar $-\mu \in \mathcal{I}^+(J)$. Temos que $\varepsilon_{-\mu} = +1$. De fato, como $M(J,\Sigma) \neq \emptyset$, existe $\alpha \in M(J,\Sigma)$ e podemos escrever $\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \mu$, com $\alpha_i \in \Sigma$ e $\beta_k = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ raíz para todo $1 \leq k \leq n$. Segue que $\alpha + \alpha_1 \in M(J,\Sigma)$. Repetindo o argumento obtemos que $\mu \in M(J,\Sigma)$, ou seja, $\varepsilon_{-\mu} = +1$. Também, se $-\mu$ é decomponível, então μ também o é. Neste caso, $\mu = \alpha+\beta$ e $\varepsilon_\mu = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$. Além disso $\alpha, \beta \in \Pi^+$ pois, μ é a raiz de altura máxima. Logo $\alpha, \beta \in M(J,\Sigma)$ e $\alpha+\beta = \mu$ é uma raiz. Isto é uma contradição. Logo μ é J-indecomponível. Portanto $-\mu \in \mathcal{I}^+(J)$.

Agora, Σ é um sistema simples de raízes contido em $\mathcal{I}^+(J)$ e, pela observação que sucede o teorema 3.14, $\mathcal{I}^+(J) = \Sigma \cup \{-\mu\}$. $\square$

Capítulo 4

Estruturas $(1, 2)$-admissíveis são afins

No capítulo 2 associamos a uma alcova A uma *iacs* afim denotada por $J(A)$. Também, no teorema 2.4 foi exibida uma métrica invariante que é $(1, 2)$-simplética com relação a $J(A)$. A proposta deste capítulo é provar que esta construção cobre todas as *iacs* $(1, 2)$-invariantemente admissível. Começando com J, uma *iacs* $(1, 2)$-admissível, vamos procurar uma alcova A, tal que $J = J(A)$. A maneira de A não exige a métrica, mas somente o fato de que J pode ser colocada na forma ideal abeliano descrita no teorema 3.17. Logo, nosso objetivo é provar a seguinte afirmação.

Teorema 4.1 *Seja $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ uma estrutura quase complexa invariante. Fixamos um sistema simples de raízes Σ e supomos que*

$$M(J, \Sigma) = \{\alpha > 0;\ \varepsilon_\alpha = -1\}$$

é um ideal abeliano. Então existe uma alcova A tal que $J = J(A)$.

No teorema 3.17 obtemos que $M(J, \Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$. Contudo, a prova de que J é afim se este possui a forma ideal abeliano permite que exista raiz simples α com $\varepsilon_\alpha = -1$.

A demonstração do teorema 4.1 é baseada nos resultados de $[YS]$ sobre as coordenadas de uma alcova. Estes resultados foram estabelecidos com uma normalização específica de nosso sistema de raízes Π, que é visto como o conjunto de co-raízes de outro sistema de raízes, $([JH]$, sec. 2.9).

Assim sendo, começamos com um sistema de raízes $\widetilde{\Pi}$, normalizado de tal modo que $\langle\alpha,\alpha\rangle = 1$, para todo $\alpha \in \widetilde{\Pi}$, se este só tem ligações simples e $\langle\alpha,\alpha\rangle = 1$ para as raízes curtas noutros casos. Dada $\alpha \in \widetilde{\Pi}$, seja $\alpha^{\vee} = \frac{2\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ a correspondente co-raiz. Sabemos que o conjunto $\widetilde{\Pi}^{\vee}$ de co-raízes de $\widetilde{\Pi}$ é também um sistema de raízes, e vice-versa, todo sistema de raízes é o conjunto de co-raízes de outro sistema.

Vemos nosso sistema de raízes Π original como um conjunto de co-raízes:

$$\Pi = \widetilde{\Pi}^{\vee} = \left\{\alpha^{\vee} = \frac{2\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}; \alpha \in \widetilde{\Pi}\right\}.$$

(por exemplo, se $\Pi = B_l$, então $\widetilde{\Pi} = C_l$ e vice-versa ([JH], pág. 40)). Se $\widetilde{\Pi}$ só tem ligações simples, então $\Pi = 2\widetilde{\Pi}$, pois este caso $\langle\alpha,\alpha\rangle = 1$, para todo α e ambos os sistemas são isomorfos (pela aplicação $2\alpha \longmapsto \alpha$). Mas, se o diagrama de Dynkin de $\widetilde{\Pi}$ possui ligações múltiplas, então as raízes longas de Π são as co-raízes $\alpha^{\vee}$ com α percorrendo as raízes curtas de $\widetilde{\Pi}$ e reciprocamente.

Agora, consideremos o sistema afim associado a Π. Os hiperplanos afins são definidos por

$$H(\alpha^{\vee}, k) = \{x;\ \langle x, \alpha^{\vee}\rangle = k\}, \qquad \alpha \in \widetilde{\Pi},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dada uma alcova A e uma raiz $\alpha \in \widetilde{\Pi}$, existem inteiros $k_\alpha = k_\alpha(A)$ tais que $k_\alpha < \langle x, \alpha^{\vee}\rangle < k_\alpha + 1$. Estes inteiros definem a alcova A, mas existem redundâncias nas desigualdades. Isto é, nem todo conjunto de inteiros k_α é o conjunto das coordenadas de uma alcova. As condições necessárias e suficientes para que um conjunto de inteiros k_α forme as coordenadas de uma alcova são dadas por [YS], lema 1.2 e proposição 5.1. Explicitemos estas condições.

Proposição 4.2 *Um conjunto de inteiros k_α, $\alpha \in \widetilde{\Pi}^{+}$, forma as coordenadas de uma alcova se, e somente se, para todo par de raízes $\alpha, \beta \in \widetilde{\Pi}$ tal que $\alpha + \beta \in \widetilde{\Pi}$, as seguintes desigualdades são válidas:*

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + 1 &\leq |\alpha+\beta|^2 (k_{\alpha+\beta} + 1) \\ &\leq |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha+\beta|^2 - 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Recordemos que na construção da *iacs* $J(A) = \{\varepsilon_\alpha(A)\}$ associada a alcova A, temos $\varepsilon_\alpha = (-1)^{k_\alpha(A)}$.

Dessa forma, para provar o teorema 4.1 é suficiente encontrar, para uma *iacs* $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ dada, um conjunto de inteiros k_α satisfazendo as desigualdades (4.1) e tal que $\varepsilon_\alpha = (-1)^{k_\alpha}$ Logo, o teorema 4.1 é uma conseqüência da seguinte construção.

Proposição 4.3 *Sejam $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ uma iacs, Σ um sistema simples de raízes fixo e $M(J, \Sigma) = \{\alpha \in \Pi^+; \varepsilon_\alpha = -1\}$ um ideal abeliano. Para $\alpha > 0$, sejam*

$$k_\alpha = \begin{cases} 0, \ \alpha \notin M(J, \Sigma), \ \textit{isto é}, \ \varepsilon_\alpha = +1 \\ 1, \ \alpha \in M(J, \Sigma), \ \textit{isto é}, \ \varepsilon_\alpha = -1 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Então as desigualdades (4.1) são satisfeitas pelos inteiros k_α, que estamos convencionando ser igual a $k_{\alpha^\vee}$, $\alpha \in \widetilde{\Pi}$.

Notemos que as desigualdades (4.1) são dadas em termos de triplas de raízes em $\widetilde{\Pi}$. Contudo, a definição de k_α, na proposição 4.3, consiste em escrever as desigualdades em termos das raízes em Π.

A demonstração da proposição 4.3 é feita em várias etapas. Na primeira delas vamos considerar o caso onde o diagrama de $\widetilde{\Pi}$ só tem ligações simples. Neste caso $\Pi = 2\widetilde{\Pi}$ e ambos os sistemas são isomorfos. Isto implica que para $\alpha, \beta \in \widetilde{\Pi}$, $\alpha+\beta \in \widetilde{\Pi}$ se, e somente se, $\alpha^\vee + \beta^\vee \in \Pi$. Além disso, para qualquer tal tripla as desigualdades (4.1) reduzem-se a

$$k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+\beta} + 1 \leq k_\alpha + k_\beta + 2.$$

Consideremos as possibilidades para $k_\alpha, \alpha > 0$, que estão definidas em (4.2) por meio dos sinais ε_α. Escrevendo $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha+\beta}) = (\pm, \pm, \pm)$, temos

1. Se os sinais são $(+, +, +)$, então $k_\alpha = k_\beta = k_{\alpha+\beta} = 0$, e daí as desigualdades são $1 \leq 1 \leq 2$.

2. Se os sinais são $(+, +, -)$, então $k_\alpha = k_\beta = 0, k_{\alpha+\beta} = 1$, e daí as desigualdades são $1 \leq 2 \leq 2$.

3. Se os sinais são $(+, -, -)$, então $k_\alpha = 0, k_\beta = k_{\alpha+\beta} = 1$, e daí as desigualdades são $2 \leq 2 \leq 3$.

Os sinais $(+, -, +)$ não são considerados pois, por hipótese, $M(J, \Sigma)$ é um ideal e o sinais $(+, -, +)$ contradizem a segunda das quatro condições equivalentes da definição 3.16. Analogamente, os sinais $(-, -, -)$ e $(-, -, +)$ não são considerados pois estes contradizem a condição abeliana da definição 3.16. Já os sinais $(-, +, -)$ e $(-, +, +)$ se comportam como os sinais $(+, -, -)$ e $(+, -, +)$, respectivamente. Isto conclui a demonstração da proposição no caso de ligação simples.

Para os casos de ligações múltiplas adiamos a análise de G_2 para simplificar alguns dos argumentos. Assim, na discussão que segue vamos supor que $|\alpha|^2 = 1$ ou $|\alpha|^2 = 2$, se $\alpha \in \widetilde{\Pi}$.

Cada par de desigualdades é dado por uma tripla $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ de raízes em $\widetilde{\Pi}$. Escrevendo l para raiz longa e s para raiz curta, temos quatro possibilidades: (s, s, s), (l, l, l), (s, l, s) e (s, s, l). O caso (l, l, s) não ocorre. De fato, em um sistema de raízes a soma de duas raízes longas nunca é uma raiz curta (observemos B_2 ou G_2). O caso (l, s, s) é igual ao caso (s, l, s).

Vamos verificar por que o caso (l, s, l), que é igual a (s, l, l), não ocorre.

Fora G_2, a única possibilidade para combinar raízes do tipo l e do tipo s é em um B_2-subsistema.

Escrevendo sempre o conjunto de raízes simples por $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, em B_l, $l \geq 2$, o B_2-subsistema é formado por $\{\alpha_{l-1}, \alpha_l\}$. O mesmo ocorre com C_l, $l \geq 2$. Já em F_4 o B_2-subsistema é formado por $\{\alpha_2, \alpha_3\}$.

Calculemos as raízes positivas de um sistema B_2, com α_1, α_2 as raízes simples, longa e curta, respectivamente e $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ a matriz de Cartan. A α_1-sequência iniciada em α_2 tem $p = 0$ e $q = 1$, enquanto que a α_2-sequência iniciada em α_1 tem $p = 0$ e $q = 2$ na fórmula de Killing. Logo $\alpha_1 + \alpha_2$ é a única raiz de altura 2. Também $\alpha_1 + 2\alpha_2$ é única raiz de altura 3. Não temos raiz de altura 4, pois $2\alpha_1 + 2\alpha_2$ é múltipla de $\alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1 + 3\alpha_2$, pelo que já dito, não é raiz. Logo, as raízes positivas são $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}$, onde α_1e $\alpha_1 + 2\alpha_2$, α_2 e $\alpha_1 + \alpha_2$ são as raízes longas e curtas, respectivamente. Quando combinamos um raiz curta e uma raiz longa, o resultado é uma raiz curta $(\alpha_1 + \alpha_2)$. Isto exclui o caso $(l, s.l)$.

Voltemos às possibilidades dadas anteriormente. Traduzimos as possibilidades (s, s, s), (l, l, l), (s, l, s) e (s, s, l) para triplas em Π. Tomando co-raízes chegamos aos casos (l, l, l), (s, s, s), (l, s, l) e (l, l, s). Nos dois primeiros casos $\alpha^\vee + \beta^\vee = (\alpha + \beta)^\vee$. De fato, $\alpha^\vee = 2\alpha$, $\beta^\vee = 2\beta$ e $(\alpha + \beta)^\vee = 2(\alpha + \beta)$, pois $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ são do tipo s. Também $\alpha^\vee = \alpha$, $\beta^\vee = \beta$ e $(\alpha + \beta)^\vee = \alpha + \beta$, pois α, β e $\alpha + \beta$ são do tipo l. Logo, $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ corresponde a tripla de raízes $(u, v, u + v)$ em Π. Os outros dois casos não correspondem a tais triplas em Π, mas a triplas obtidas do seguinte modo: Dada uma tripla $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ do tipo (s, l, s) em $\widetilde{\Pi}$, temos $\alpha^\vee + 2\beta^\vee = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^\vee$ e reciprocamente, a tripla (u, v, w) do tipo (l, s, l) em Π vem de uma do tipo (s, l, s) em $\widetilde{\Pi}$, se $u + 2v = w$. Analogamente, para triplas do tipo (s, s, l) em $\widetilde{\Pi}$, temos $\frac{\alpha^\vee}{2} + \frac{\beta^\vee}{2} = \frac{2\alpha}{2} + \frac{2\beta}{2} = \alpha + \beta = (\alpha + \beta)^\vee$ e reciprocamente, a tripla (u, v, w) de tipo (l, l, s) em Π vem de uma do tipo (s, s, l) em $\widetilde{\Pi}$, se $w = \frac{u+v}{2}$.

Tendo estabelecido esta correspondência, reescrevemos a proposição 4.2 para sistemas de ligações duplas.

Proposição 4.4 *Seja* Π *um sistema de raízes de ligações duplas. Um conjunto de inteiros* $k_\alpha, \alpha \in \Pi^+$, *forma as coordenadas de uma alcova se as seguintes desigualdades são satisfeitas para as correspondentes triplas de raízes em* Π^+:

1) $(\alpha, \beta, \alpha+\beta) = (l, l, l)$: $k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+\beta} + 1 \leq k_\alpha + k_\beta + 2$,

2) $(\alpha, \beta, \alpha+\beta) = (s, s, s)$: $2k_\alpha + 2k_\beta + 1 \leq 2k_{\alpha+\beta} + 2 \leq 2k_\alpha + 2k_\beta + 5$,

3) $(\alpha, \beta, \alpha+2\beta) = (l, s, l)$: $k_\alpha + 2k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+2\beta} + 1 \leq k_\alpha + 2k_\beta + 3$,

4) $\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = (l, l, s)$: $k_\alpha + k_\beta + 1 \leq 2k_{\frac{\alpha+\beta}{2}} + 2 \leq k_\alpha + k_\beta + 3$.

Os valores de k_α, definidos na proposição 4.3, devem agora satisfazer estas desigualdades. Como k_α é dado por ε_α, escrevemos as possibilidades em termos de sinais. Nos dois primeiros casos somente os sinais $(+,+,+)$, $(+,+,-)$ e $(-,+,-) = (+,-,-)$ aparecem. De fato, $(-,-,+)$ e $(-,-,-)$ contradizem o fato de $M(J,\Sigma)$ ser abeliano e $(-,+,+) = (+,-,+)$ contradiz a segunda das condições equivalentes a definição 3.18. Para os sinais possíveis temos,

	$(+,+,+)$	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$
(l,l,l)	$1 \leq 1 \leq 2$	$1 \leq 2 \leq 2$	$2 \leq 2 \leq 3$
(s,s,s)	$1 \leq 2 \leq 5$	$1 \leq 4 \leq 5$	$3 \leq 4 \leq 7$

Os outros casos são descritos abaixo.

· O caso $(\alpha, \beta, \alpha+2\beta) = (l, s, l)$. Tomemos $\alpha, \beta \in \Pi^+$ tal que $\alpha + 2\beta \in \Pi^+$. Então $\varepsilon_\beta = +1$. De fato , $\varepsilon_\beta = -1$ implica que $\alpha + \beta \in M(J,\Sigma)$. Logo, pela propriedade abeliana , $(\alpha+\beta) + \beta = \alpha + 2\beta$ não é raiz, o que é uma contradição. Também, se $\varepsilon_\alpha = -1$, como $\varepsilon_\beta = +1$, a segunda das condições equivalentes da definição 3.16 implica que $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$. Os mesmos argumentos aplicados a β e $\alpha+\beta$, nos dá $\varepsilon_{\alpha+2\beta} = -1$. Isto exclui os casos $(-,+,+)$, $(-,-,+)$, $(-,-,-)$, $(+,-,+)$ e $(+,-,-)$. Restam somente três casos, com as correspondentes desigualdades:

(a) $(+,+,+)$; $1 \leq 1 \leq 3$.

(b) $(+,+,-)$; $1 \leq 2 \leq 3$.

(c) $(-,+,-)$; $2 \leq 2 \leq 4$.

- O caso $\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=(l,l,s)$. Tomemos α e β raízes positivas tal que $\frac{\alpha+\beta}{2}\in\Pi^{+}$. Podemos identificar a interseção de Π com o subespaço gerado por α e β com o sistema de raízes B_2, cujas raízes positivas, conforme computação feita anteriormente, são
$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2\}.$$
A identificação é feita de modo que $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\alpha_1+2\alpha_2$. Assim, $\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha_1+\alpha_2$. Se $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\beta=-1$, então $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=-1$. De fato, usando a identificação com B_2 vemos que $\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha+\alpha_2$ e $\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha_1+\alpha_2=\beta-\alpha_2$. Assim, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ é maior que α ou β dependendo se α_2 é positiva ou negativa em Π. Em ambos os casos $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=+1$ contradiz o fato de que $M(J,\Sigma)$ é um ideal. Notemos que $\varepsilon_\alpha=-1$ e $\alpha_2>0$ implica que $\alpha+\alpha_2=\frac{\alpha+\beta}{2}\in M(J,\Sigma)$. Já $\varepsilon_\beta=-1$ e $\alpha_2<0$ implica, do mesmo modo, que $\beta-\alpha_2=\frac{\alpha+\beta}{2}\in M(J,\Sigma)$. Assim, os sinais $(-,-,+)$ não ocorrem. Por outro lado, se $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\beta=+1$, então $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=+1$. De fato, se α_2 é negativa em Π, como $\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha+\alpha_2$, isto é, $\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha_2=\alpha$, então $\frac{\alpha+\beta}{2}\in M(J,\Sigma)$ implica $\alpha\in M(J,\Sigma)$, o que é uma contradição. Se α_2 é positiva em Π, como $\frac{\alpha+\beta}{2}=\beta-\alpha_2$, isto é, $\frac{\alpha+\beta}{2}+\alpha_2=\beta$, então $\frac{\alpha+\beta}{2}\in M(J,\Sigma)$ implica $\beta\in M(J,\Sigma)$, uma nova contradição. Assim, os sinais $(+,+,-)$ não ocorrem. Os outros sinais, mesmo que possivelmente não ocorram, não invalidam as desigualdades. Vejamos os sinais e suas respectivas desigualdades.

  (a) $(+,+,+)$: $1\leq 2\leq 3$.

  (b) $(+,-,+)$: $2\leq 2\leq 4$, que se comporta como $(-,+,+)$.

  (c) $(+,-,-)$: $2\leq 4\leq 4$, que se comporta como $(-,+,-)$.

  (d) $(-,-,-)$: $3\leq 4\leq 5$.

Isto conclui a prova da proposição 4.3 (e daí do teorema 4.1), para os diagramas de ligação dupla.

Agora consideramos G_2, isto é $\widetilde{\Pi}=G_2$. Escrevemos suas raízes positivas como

$$\begin{array}{cccccc}\alpha_1 & & & & & \\ & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+2\alpha_2 & \alpha_1+3\alpha_2 & 2\alpha_1+3\alpha_2 & \\ \alpha_2 & & & & & \end{array}$$ ([SM], pág. 168).

Então as possíveis J tal que $M(J,\Sigma)$ é um ideal abeliano são

$$J_1=\begin{array}{c}+\\ \\+\end{array}\;++++,\; J_2=\begin{array}{c}+\\ \\+\end{array}\;+++-,\; J_3=\begin{array}{c}+\\ \\+\end{array}\;++--,\; J_4=\begin{array}{c}+\\ \\+\end{array}\;+---.$$

De fato, $\varepsilon_{\alpha_1} = -1$ e $\varepsilon_{\alpha_2} = -1$ não ocorrem pois, $\alpha_1 + \alpha_2$ é uma raiz e o ideal não seria abeliano. Isto elimina as possibilidades $\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}\ \pm \pm \pm \pm$.

Se $\varepsilon_{\alpha_1} = -1$ e $\varepsilon_{\alpha_2} = +1$, então $\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = -1$, $\varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1$. Mas, $\alpha_1 + (\alpha_1 + 3\alpha_2) = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ não seria uma raiz. Isto elimina as possibilidades $\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}\ \pm \pm \pm \pm$.

Analogamente, $\varepsilon_{\alpha_1} = +1$ e $\varepsilon_{\alpha_2} = -1$ impediria $\alpha_1 + 2\alpha_2$ de ser raiz, eliminando os casos $\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\ \pm \pm \pm \pm$.

Consideremos agora $\varepsilon_{\alpha_1} = +1$ e $\varepsilon_{\alpha_2} = +1$ e $\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = -1$. Assim $\varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = -1$ e $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ não seria uma raiz. Logo, as possibilidades $\begin{matrix} + \\ + \end{matrix}\ - \pm \pm \pm$ estão descartadas.

Se $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = +1$ e $\varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = -1$, então $\varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ e $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$. Isto exclui as possibilidades $\begin{matrix} + \\ + \end{matrix}\ + - + \pm$.

Se $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = +1$ e $\varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1$, então $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$, eliminando o caso $\begin{matrix} + \\ + \end{matrix}\ + + - +$.

Finalmente, se $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = +1$ e $\varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1$, então $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$, o que elimina $\begin{matrix} + \\ + \end{matrix}\ + - - +$. Portanto, J_i, $i = 1, 2, 3, 4$, apresentadas acima são as únicas *iacs* possíveis tal que $M(J, \Sigma)$ é abeliano.

Queremos agora provar a proposição 4.3 quando $\widetilde{\Pi} = G_2$. Vamos verificar as desigualdades (4.1) para cada uma das possíveis *iacs* dadas acima. Consideremos α_1 raiz longa e α_2 raiz curta, onde $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é o sistema simples de raízes. As possíveis triplas de raízes (α, β, γ) em $\widetilde{\Pi}$, para as quais $\alpha + \beta = \gamma$ são:

1. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (l, s, s)$, levada a uma tripla do tipo (s, l, l) em Π.

2. $(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (s, s, s)$, levada a uma tripla do tipo (l, l, l) em Π.

3. $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (s, s, l)$, levada a uma tripla do tipo (l, l, s) em Π.

4. $(\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2) = (s, s, l)$, levada a uma tripla do tipo (l, l, s) em Π.

5. $(\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (l, l, l)$, levada a uma tripla do tipo (s, s, s) em Π.

Em $\widetilde{\Pi}$, $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ se α é raiz curta. Já que o ângulo entre α_1 e α_2 é $\frac{5\pi}{6}$([*SM*], pág. 210), obtemos que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -\frac{3}{2}$. Notemos que $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 1$ e $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 3$ ([*SM*], pág. 255).

Daí $\alpha_1^\vee = \frac{2}{3}\alpha_1$, $\alpha_2^\vee = 2\alpha_2$, $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$, $(\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2)$, $(\alpha_1 + 3\alpha_2)^\vee = \frac{2}{3}(\alpha_1 + 3\alpha_2)$ e $(2\alpha_1 + 3\alpha_2)^\vee = \frac{2}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2)$. Logo, podemos traduzir as possibilidades de triplas em G_2 para triplas em Π pela seguinte tabela:

$G_2 = \widetilde{\Pi}$	Π	comprimento em $\widetilde{\Pi}$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$	$(u, v, 3u + v)$	(l, s, s)
$(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$	$(u, v, u + v)$	(s, s, s)
$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$	$\left(u, v, \frac{u+v}{3}\right)$	(s, s, l)
$(\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2)$	$\left(u, v, \frac{u+v}{3}\right)$	(s, s, l)
$(\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$	$(u, v, u + v)$	(l, l, l)

A proposição 4.4, para $\widetilde{\Pi} = G_2$, tem o seguinte enunciado:

Um conjunto de inteiros k_α, $\alpha \in \Pi^+$, forma as coordenadas de uma alcova se as seguintes desigualdades são satisfeitas para:

1) $(\alpha, \beta, 3\alpha + \beta) = (s, l, l) : 3k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{3\alpha+\beta} + 1 \leq 3k_\alpha + k_\beta + 4$,
2) $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (l, l, l) : k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+\beta} + 1 \leq k_\alpha + k_\beta + 2$,
3) $\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{3}\right) = (l, l, s) : k_\alpha + k_\beta + 1 \leq 3\left(k_{\frac{\alpha+\beta}{3}} + 1\right) \leq k_\alpha + k_\beta + 4$,
4) $\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{3}\right) = (l, l, s) : k_\alpha + k_\beta + 1 \leq 3\left(k_{\frac{\alpha+\beta}{3}} + 1\right) \leq k_\alpha + k_\beta + 4$,
5) $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (s, s, s) : 3k_\alpha + 3k_\beta + 1 \leq 3(k_{\alpha+\beta} + 1) \leq 3k_\alpha + 3k_\beta + 8$.

Computemos para a tripla $(\alpha, \beta, 3\alpha + \beta)$, as possibilidades de sinais $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{3\alpha+\beta})$. Se $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = -1$, então $\alpha + \beta$ e $3\alpha + \beta$ não são raízes. Isto exclui os sinais $(-, -, \pm)$. Se $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = +1$, então $\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$ e $2\alpha + \beta$ e $3\alpha + \beta$ não são raízes. Isto exclui os sinais $(-, +, \pm)$. Também, se $\varepsilon_\alpha = +1, \varepsilon_\beta = -1$, então $\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$ e $3\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$. Logo temos três possibilidades de sinais com as respectivas desigualdades:

a. $(+, +, +) : 1 \leq 1 \leq 4$,

b. $(+, +, -) : 1 \leq 2 \leq 4$,

c. $(+, -, -) : 2 \leq 2 \leq 5$.

Para as triplas $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$, apresentadas na segunda e na quinta linha da tabela acima, temos as seguintes possibilidades de sinais para $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha+\beta})$: Se $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$, então $\alpha + \beta$ não é raiz. Se $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = +1$ ($\varepsilon_\alpha = +1, \varepsilon_\beta = -1$), então $\varepsilon_{\alpha+\beta} =$

-1. Logo, podemos excluir os sinais $(-,-,-)$, $(-,-,+)$, $(+,-,+)$ e $(-,+,+)$. Assim, os possíveis sinais com suas respectivas desigualdades são:

a. $(+,+,+): 1 \leq 1 \leq 2$, se a tripla for do tipo (l,l,l), $1 \leq 3 \leq 8$, se for do tipo (s,s,s),

b. $(+,+,-): 1 \leq 2 \leq 2$, se a tripla for do tipo (l,l,l), $1 \leq 6 \leq 8$, se for do tipo (s,s,s),

c. $(+,-,-): 2 \leq 2 \leq 3$, se a tripla for do tipo (l,l,l), $4 \leq 6 \leq 11$, se for do tipo (s,s,s),

d. $(-,+,-): 2 \leq 2 \leq 3$, se a tripla for do tipo (l,l,l), $4 \leq 6 \leq 11$, se for do tipo (s,s,s).

Tratemos o caso$\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta}{3}\right)$. Podemos identificar a interseção de Π com o subespaço gerado por α e β com sistema de raízes G_2. A identificação é feita de modo que $\alpha = \alpha_1$, $\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ e $\frac{\alpha+\beta}{3} = \alpha_1 + \alpha_2$. Mas, com esta identificação, necessariamente $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_\alpha = +1$ e $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{3}} = \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = +1$, conforme verificação das possíveis J, feita anteriormente.

Logo temos as seguintes possibilidades de sinais acompanhados de suas respectivas desigualdades:

a. $(+,+,+): 1 \leq 3 \leq 4$.

b. $(+,-,+): 2 \leq 3 \leq 5$.

Já que as desigualdades relativas as linhas 3 e 4 da tabela acima são as mesmas, concluímos a demonstração da proposição 4.3, também para o caso G_2.

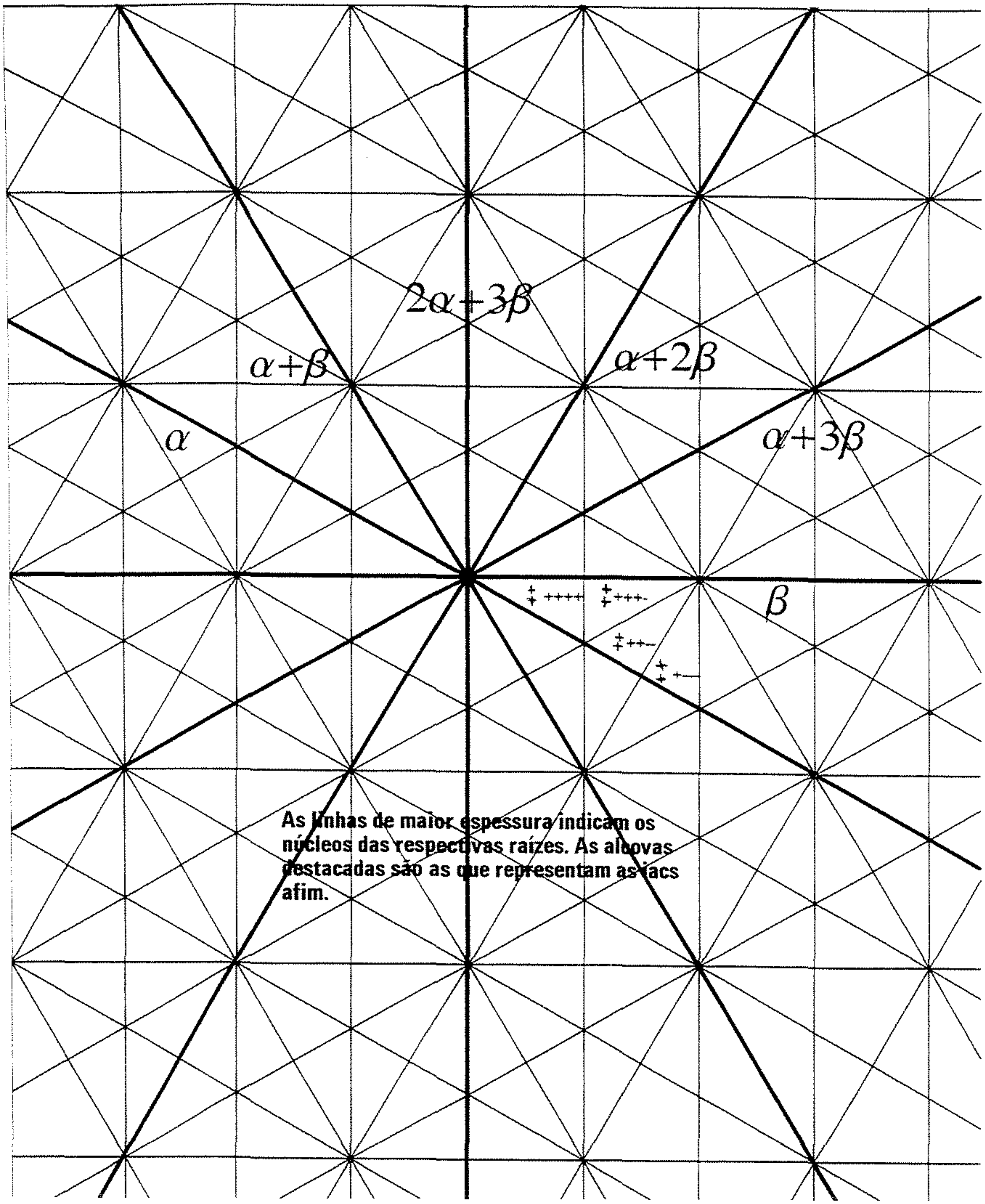
Em resumo:

1. Toda *iacs* afim é $(1,2)$-admissível, conforme teorema 2.4;

2. Toda *iacs* $(1,2)$-admissível está na forma ideal abeliano com relação a algum sistema simples de raízes Σ, conforme teorema 3.17;

3. Toda *iacs* na forma ideal abeliano com relação a Σ é afim, conforme teorema 4.1.

Uma outra forma de ver que as estruturas J_1, J_2, J_3 e J_4 são afins é desenhando o conjunto de alcovas. Neste desenho α é a raiz longa e β a raiz curta.



Capítulo 5

Equivalência de *iacs* $(1,2)$-admissíveis

Neste capítulo buscaremos as classes de equivalência das estruturas invariantes $(1,2)$-admissíveis, sob a ação do grupo de Weyl. Já vimos que qualquer tal estrutura pode ser colocada na forma ideal abeliano. Resta determinar quando dois pares (J_1, Λ_1) e (J_2, Λ_2) satisfazendo a propriedade de ideal abeliano com relação ao mesmo Σ são equivalentes. Vamos então fixar um sistema simples de raízes Σ e verificar se existe $w \in W$ tal que $J_2 = w \cdot J_1$. Tendo isto em mente desenvolveremos aqui uma fórmula para $M(w \cdot J, \Sigma)$ quando tanto J quanto $w \cdot J$ satisfazem a propriedade de ideal abeliano com relação a Σ.

Temos que se $J = \{\varepsilon_\alpha\}$, então $wJ = \{\varepsilon_{w^{-1}\alpha}\}$. Assim, toda raiz α é J-decomponível se, e somente se, $w\alpha$ é (wJ)-decomponível. De fato, se α é J-decomponível, então $\alpha = \beta + \gamma$, com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$. Queremos provar que $w\alpha = \beta_1 + \gamma_1$, onde $\delta_{w\alpha} = \delta_{\beta_1} = \delta_{\gamma_1}$, isto é, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}\beta_1} = \varepsilon_{w^{-1}\gamma_1}$. Mas, $w\alpha = w\beta + w\gamma$ e $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}(w\alpha)} = \varepsilon_{w^{-1}(w\beta)} = \varepsilon_{w^{-1}(w\gamma)}$. Logo $w\alpha$ é wJ-decomponível. Reciprocamente, se $w\alpha$ é wJ-decomponível, então $w\alpha = \beta + \gamma$ e $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}(w\alpha)} = \varepsilon_{w^{-1}\beta} = \varepsilon_{w^{-1}\gamma}$. Daí $\alpha = w^{-1}\beta + w^{-1}\gamma$ e α é J-decomponível. Logo $\mathcal{I}(wJ) = w\mathcal{I}(J)$.

A próxima proposição caracteriza estes $w \in W$ que não destroem a propriedade de ideal abeliano.

Proposição 5.1 *Fixado um sistema simples de raízes Σ, seja $\widetilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{-\mu\}$. Se os pares invariantes (J_1, Λ_1) e (J_2, Λ_2) são equivalentes e possuem a forma ideal abeliano com relação a Σ, então existe $w \in W$ satisfazendo $w\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}$. Por outro lado, se (J_1, Λ_1) é $(1,2)$-simplético, satisfaz a propriedade de ideal abelino com relação a Σ e $w \in W$ satisfaz $w\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}$, então $(J_2, \Lambda_2) = w(J_1, \Lambda_1)$ satisfaz a propriedade de* *ideal abeliano com relação ao mesmo Σ.*

Demonstração: Vamos supor que os pares invariantes (J_1, Λ_1) e (J_2, Λ_2) possuem a forma ideal abeliano com relação a Σ e são equivalentes. Segue que existe $w \in W$, tal que $w(J_1, \Lambda_1) = (J_2, \Lambda_2)$. Pomos $J_1 = \{\varepsilon_\alpha\}$ e $J_2 = \{\delta_\alpha\}$. Pela proposição 3.19

$$\mathcal{I}(J_1) = \mathcal{I}(J_2) = (\pm\Sigma) \cup \{\pm\mu\}.$$

Além disso, $\mathcal{I}(J_2) = \mathcal{I}(wJ_1) = w\mathcal{I}(J_1)$ e $w^{-1}\mathcal{I}(J_2) = \mathcal{I}(J_1)$. Daí w e w^{-1} aplicam o subconjunto $(\pm\Sigma) \cup \{\pm\mu\}$ sobre si mesmo. Queremos mostrar que $\mathcal{I}^+(J_1) = \mathcal{I}^+(J_2) = \Sigma \cup \{-\mu\}$ é também invariante por $w^{\pm 1}$. Se $\alpha \in \Sigma$, então $\varepsilon_\alpha = \delta_\alpha = +1$ pois $M(J_1, \Sigma)$ e $M(J_2, \Sigma)$ não interceptam Σ. Mas $\delta_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}\alpha}$ e $\varepsilon_\alpha = \delta_{w\alpha}$. Logo, $w\Sigma \subset \Sigma \cup \{-\mu\}$ e $w^{-1}\Sigma \subset \Sigma \cup \{-\mu\}$. Notemos que $\varepsilon_{-\mu} = +1$, pois $-\mu \in \mathcal{I}^+(J_1)$, conforme proposição 3.19. Se $w^{-1}\Sigma \subset \Sigma$, então $w = 1$ e $w\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}$. Caso contrário, existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $w^{-1}\alpha = -\mu$, isto é, $w(-\mu) = \alpha$. Isto significa que $w\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}$ e $w^{-1}\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}$, ou seja, $\widetilde{\Sigma}$ é invariante por w e por w^{-1}.

Agora, supomos que $\Sigma \cup \{-\mu\}$ é invariante por $w^{\pm 1} \in W$. Então $\Sigma_1 = w^{-1}\Sigma$ é uma outra escolha de um sistema simples de raízes dentro de $\Sigma \cup \{-\mu\}$. Logo, pelo teorema 3.17, J_1 e wJ_1 estão na forma ideal abeliano com respeito tanto a Σ quanto a Σ_1. □

Denotamos por $W_{\widetilde{\Sigma}}$ o subconjunto de W que deixa $\widetilde{\Sigma}$ invariante. Devido a bijeção de W com o conjunto dos sistemas simples de raízes, ([SM], pág.240), temos que $W_{\widetilde{\Sigma}}$ está em bijeção com o conjunto dos sistemas simples de raízes contidos em $\widetilde{\Sigma}$. Estes sistemas podem ser determinados com a ajuda dos grafos de Coxeter dos grupos de Weyl afim (diagramas de Dynkin estendidos), ([JH], sec.4.7).

Lema 5.2 *Um subconjunto $\Sigma_1 \subset \widetilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{-\mu\}$ é um sistema simples de raízes se, e somente se, Σ_1 é um subgrafo do diagrama estendido, igual ao diagrama de Dynkin de Σ.*

Demonstração: Supomos que $\Sigma_1 \subset \widetilde{\Sigma}$ é um sistema simples de raízes. Como $\widetilde{\Sigma}$ é o diagrama de Dynkin estendido, então Σ_1 é um subgrafo do diagrama estendido, igual ao diagrama de Dynkin.

Para a recíproca devemos olhar os diagramas estendidos ([JH], pág. 96). Os subgrafos Σ_1 que são isomorfos a Σ são obtidos retirando de $\widetilde{\Sigma}$ a raiz $-\mu$ ou uma raiz simples em um subconjunto $\mathbf{\Delta} \subset \Sigma$. Verificando os coeficientes de μ com relação a Σ ([JH], pág. 99), vemos que os coeficientes de cada $\alpha \in \mathbf{\Delta}$ é 1. Tomemos uma raiz positiva $\beta = \sum_{\gamma\in\Sigma} n_\gamma\gamma$, $n_\gamma \geq 0$. Se $\alpha \in \mathbf{\Delta}$, $n_\gamma = 0$ ou $n_\gamma = 1$, pois n_α é menor ou igual que o coeficiente de μ com relação a α. Agora, β é uma combinação linear de $(\Sigma\setminus\{\alpha\})\cup\{-\mu\}$ com coeficientes inteiros m_i, que são todos maiores ou iguais a zero se $n_\alpha = 0$ e menores ou iguais a zero se $n_\alpha = 1$. De fato, se $n_\alpha = 0$, β é combinação linear de $\Sigma\setminus\{\alpha\} \subset (\Sigma\setminus\{\alpha\})\cup\{-\mu\}\cup$ e os coeficientes são todos não negativos. Se $n_\alpha = 1$, escrevemos

$$\mu = \alpha + \sum_{\delta\in\mathbf{\Delta}\setminus\{\alpha\}}\delta + \sum_{\gamma\in\Sigma\setminus\mathbf{\Delta}} n_\gamma\gamma \ e \ \beta = \alpha + \sum_{\xi\in\Sigma\setminus\{\alpha\}} n_\xi\xi.$$

Daí, $\beta = -(-\mu) - \sum_{\delta\in\mathbf{\Delta}\setminus\{\alpha\}}\delta - \sum_{\gamma\in\Sigma\setminus\mathbf{\Delta}} n_\gamma\gamma + \sum_{\xi\in\Sigma\setminus\{\alpha\}} n_\xi\xi = -(-\mu) - \sum_{\delta\in\mathbf{\Delta}\setminus\{\alpha\}}\delta + \sum_{\gamma\in\Sigma\setminus\mathbf{\Delta}} m_\gamma\gamma$, onde $m_\gamma \leq 0$ pois os coeficientes de μ são maiores ou iguais que os coeficientes de β. Isto implica que $(\Sigma\setminus\{\alpha\})\cup\{-\mu\}, \alpha \in \mathbf{\Delta}$ é uma sistema simples de raízes, $([SM]$, pág. 162). □

Examinando a tabela dos diagramas estendidos encontramos os seguintes sistemas simples de raízes $\Sigma_1 \subset \widetilde{\Sigma}$:

$\widetilde{\Sigma}$	$\lvert W_{\widetilde{\Sigma}}\rvert$	{raízes simples}	$\mathbf{\Delta}$
$\widetilde{A}_l$	$l+1$	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$
$\widetilde{B}_l$	2	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$	$\{\alpha_1\}$
$\widetilde{C}_l$	2	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$	$\{\alpha_l\}$
$\widetilde{D}_l$	4	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$	$\{\alpha_1,\alpha_{l-1},\alpha_l\}$
$\widetilde{E}_6$	3	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_6\}$	$\{\alpha_1,\alpha_6\}$
$\widetilde{E}_7$	2	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_7\}$	$\{\alpha_7\}$
$\widetilde{E}_8$	1	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_8\}$	$\emptyset$
$\widetilde{G}_2$	1	$\{\alpha_1,\alpha_2\}$	$\emptyset$
$\widetilde{F}_4$	1	$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_4\}$	$\emptyset$

, $([JH]$, pág. 98).

Os números desta tabela são precisamente os índices de conectividade dos grupos afim W_a. Este índice é a ordem de $\widehat{W}_a/W_a$ ou, de forma equivalente, a ordem do subgrupo de $\widehat{W}_a$ que deixa invariante a alcova básica A_0.

Isto sugere uma relação entre o subgrupo $\widehat{W}_a$ que deixa invariante a alcova básica A_0 e $W_{\widetilde{\Sigma}}$. De fato, temos a seguinte construção: Seja P o paralelepípedo aberto

$$P = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}; \forall\ \alpha \in \Sigma,\ 0 < \langle x,\alpha\rangle < 1\}.$$

Dado $w \in W$, existe exatamente um $\rho_w \in \widehat{L}$ tal que $t\rho_w w(A_0) \subset P$, $([JH]$,pág. 99), onde t_λ é a translação afim por λ, $(t_\lambda(u) = u + \lambda)$.

Pomos $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ e seja $\{w_1, \ldots, w_l\}$ definido por $\langle w_i, \alpha_j\rangle = \delta_{ij}$. Por $[JH]$, pág. 99, $\rho_w = \sum a_i w_i$ com $a_i = 0$, se $w^{-1}\alpha_i > 0$ e $a_i = 1$, se $w^{-1}\alpha_i < 0$. Dado $w \in W_{\widetilde{E}}$, existe justamente uma raiz simples, digamos α_w, tal que $w^{-1}\alpha_w = -\mu$. Para as outras raízes $\alpha \in \Sigma$, $w^{-1}\alpha \in \Sigma$, e então $w^{-1}\alpha > 0$. Logo, $\rho_w = w_i$, se $\alpha_w = \alpha_i$. Isto vem da definição de $W_{\widetilde{\Sigma}}$.

Lema 5.3 *Sejam $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$ e $\alpha > 0$. Então $w^{-1}\alpha > 0$ se, e somente se, $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 0$ e $w^{-1}\alpha < 0$ se, e somente se, $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 1$.*

Demonstração: Sejam $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$ e $\alpha > 0$. Temos que o coeficiente b_{α_w} de α_w em $\alpha = \sum\limits_{\beta\in\Sigma} b_\beta \beta$ é $\langle \rho_w, \alpha\rangle$. De fato, se $\alpha_w = \alpha_i$, $\rho_w = w_i$ e $\langle \rho_w, \alpha\rangle = \left\langle w_i, \sum\limits_{\beta\in\Sigma} b_\beta\beta\right\rangle = b_{\alpha_w}\langle w_i, \alpha_w\rangle = b_{\alpha_w}$. Além disso, o coeficiente da raiz de altura máxima μ na direção de α_w é 1 (observemos a demonstração do lema 5.2. No sistema simples $\Sigma_1 = \{w\alpha_1, \ldots, w\alpha_l\}$, a raiz retirada é α_w, ou seja, $\alpha_w \in \Delta$). Como $\langle \rho_w, \alpha\rangle$, o coeficiente de α na direção de α_w, é menor ou igual que o coeficiente de μ na direção de α_w, então $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 0$ ou $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 1$. Se $w^{-1}\alpha > 0$, significa que α é uma combinação linear de $\Sigma\backslash\{\alpha_w\}$, isto é, $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 0$. Se $w^{-1}\alpha < 0$, significa que α_w contribui na expressão de α como combinação linear de Σ, ou seja, $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 1$.

Reciprocamente, se $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 0$, então $w^{-1}\alpha$ é uma combinação linear, com inteiros positivos, de $w^{-1}(\Sigma\backslash\{\alpha_w\}) \subset \Sigma$, ou seja, $w^{-1}\alpha > 0$. Notemos que $w^{-1}\beta \in \Sigma$ se $\beta \neq \alpha_w$, $\beta \in \Sigma$. Por outro lado, se $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 1$, então $w^{-1}\alpha = -\mu + \gamma$ com γ uma combinação linear de $w^{-1}(\Sigma\backslash\{\alpha_w\})$, com coeficientes necessariamente menores que os coeficientes de μ. Logo, ao menos um dos coeficientes de $w^{-1}\alpha$ é negativo, implicando que $w^{-1}\alpha < 0$. □

O próximo lema estabelece uma conexão entre $W_{\widetilde{\Sigma}}$ e o subgrupo de $\widehat{W}_a$ que deixa A_0 invariante.

Lema 5.4 *Se $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$, então $t_{\rho_w} w(A_0) = A_0$.*

Demonstração: Dado $x \in A_0$ e uma raiz positiva α, temos que $\langle t_{\rho_w} wx, \alpha\rangle = \langle wx + \rho_w, \alpha\rangle = \langle \rho_w, \alpha\rangle + \langle x, w^{-1}\alpha\rangle$, ($[JH]$, pág.99). Se $w^{-1}\alpha > 0$, então $0 < \langle x, w^{-1}\alpha\rangle < 1$ e, pelo lema 5.3, $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 0$. Assim, $0 < \langle t_{\rho_w} wx, \alpha\rangle < 1$ e daí $t_{\rho_w} wx \in A_0$. Analogamente, se $w^{-1}\alpha < 0$, então $\langle \rho_w, \alpha\rangle = 1$ e $-1 < \langle x, w^{-1}\alpha\rangle < 0$. Logo, $0 < \langle t_{\rho_w} wx, \alpha\rangle < 1$ e podemos concluir que $t_{\rho_w} wA_0 \subset A_0$. A igualdade vem do fato de que alcovas são abertos disjuntos, separados pelos hiperplanos

$H(\alpha, k), \alpha \in \Pi, k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Retornemos à questão da equivalência. Seja $J = J(A)$ uma *iacs* afim e suponhamos que esta satisfaz a propriedade de ideal abeliano do teorema 3.17, com $M(J, \Sigma)$ o correspondente ideal abeliano. Pelo teorema 4.1 e proposição 4.3, podemos supor que as coordenadas $k_\alpha = k_\alpha(A)$, $\alpha > 0$, de A são $k_\alpha = 0$, se $\alpha \notin M(J, \Sigma)$ e $k_\alpha = 1$, se $\alpha \in M(J, \Sigma)$.

Fixemos estas notações. Vamos usar os lemas acima para calcular as coordenadas das alcovas $\rho_w wA$, para $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$. Com este objetivo, observamos que os hiperplanos separando A_0 e A são $H(\alpha, 1), \alpha \in M(J, \Sigma)$, pois as coordenadas da alcova básica são $k_\alpha(A_0) = 0$, se $\alpha > 0$. Recorrendo a aplicação afim $t_{\rho_w} w$, vemos que os hiperplanos separando $t_{\rho_w} wA$ e $t_{\rho_w} wA_0 = A_0$ são

$$t_{\rho_w} wH(\alpha, 1) = t_{\rho_w} H(w\alpha, 1) = H(w\alpha, 1 + \langle \rho_w, w\alpha \rangle), \ \alpha \in M(J, \Sigma), w \in W_{\widetilde{E}}, \tag{5.1}$$

conforme [JH], pág. 88.

Lema 5.5 *Dados $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$ e $\alpha > 0$, então*

$$\langle \rho_w, w\alpha \rangle = \begin{cases} 0, & se\ w\alpha > 0 \\ -1, & se\ w\alpha < 0 \end{cases}.$$

Demonstração: Queremos calcular o coeficiente de $w\alpha$ na direção de α_w Seja $\alpha_j \in \Sigma$ tal que $w\alpha_j = -\mu$. Temos $\alpha_j = w^{-1}(-\mu)$ e, como $w^{-1} \in W_{\widetilde{\Sigma}}$, concluímos que o coeficiente de μ na direção de α_j é 1. De fato, no sistema simples de raízes $\{w^{-1}\alpha_1, \ldots, w^{-1}\alpha_l\}$, α_j é a raiz retirada, ou seja, $\alpha_j \in \Delta$. Notemos que $w\alpha_k \in \Sigma$, se $k \neq j$. Pelo lema 5.3, $w\alpha > 0$ se, e somente se, $\langle w_j, \alpha \rangle = 0$, pois $w_j = \rho_{w^{-1}}$.

Agora, $w^{-1}\alpha_w = -\mu$, o que implica que não existe raiz simples α_k, tal que $w\alpha_k = \alpha_w$. Isto significa que a única possibilidade para $w\alpha$ ter coeficiente não nulo na direção de α_w, isto é, ter $\langle \rho_w, w\alpha \rangle \neq 0$ é quando $\langle w_j, \alpha \rangle \neq 0$. Logo, $\langle \rho_w, w\alpha \rangle = 0$ se $\langle w_j, \alpha \rangle = 0$, isto é, se $w\alpha > 0$. Por outro lado, se $\langle w_j, \alpha \rangle \neq 0$, o coeficiente de $w\alpha$ na direção de α_w é o coeficiente de $-\mu$ na direção de α_w, que é -1. $\square$

Por este lema os hiperplanos dados em (5.1), separando $t_{\rho_w} wA$ e $A_0 = t_{\rho_w} wA_0, w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$, são reescritos, para $\alpha \in M(J, \Sigma)$, como

$$\begin{array}{l} H(w\alpha, 1), \text{ se } w\alpha > 0 \\ H(w\alpha, 0), \text{ se } w\alpha < 0 \end{array}. \tag{5.2}$$

Isto implica nas seguinte expressões para as coordenadas de $t_{\rho_w}wA$:

Lema 5.6 *Se $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$ e $\beta > 0$, então*

$$k_\beta(t_{\rho_w}wA) = \begin{cases} 0, & se\ \beta \notin \pm wM(J,\Sigma) \\ 1, & se\ \beta \in wM(J,\Sigma) \\ -1, & se\ \beta \in -wM(J,\Sigma) \end{cases}.$$

Demonstração: Os hiperplanos separando $t_{\rho_w}wA$ e A_0 possuem a forma $H(w\alpha,k)$, $\alpha \in M(J,\Sigma)$, $k = 0,1$. Logo, se $\beta \notin \pm wM(J,\Sigma)$, nenhum hiperplano da forma $H(\beta,k)$ separa $t_{\rho_w}wA$ e A_0, implicando que $k_\beta(t_{\rho_w}wA) = 0$. Agora, se $\beta = w\alpha > 0$, $\alpha \in M(J,\Sigma)$, então $H(\beta,1)$ é, por (5.2), o único hiperplano ortogonal a β separando $t_{\rho_w}wA$ e A_0. Daí $k_\beta(t_{\rho_w}wA) = 1$. Por fim, se $\beta = -w\alpha > 0$, o hiperplano separando $t_{\rho_w}wA$ e A_0 é $H(\beta,0) = H(w\alpha,0)$. Logo $k_\beta(t_{\rho_w}wA) = -1$. □

Vamos obter agora as coordenadas da alcova wA, $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$.

Lema 5.7 *Se $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$ e $\beta > 0$, então*

$$k_\beta(wA) = \begin{cases} 0, & se\ \beta \notin \pm wM(J,\Sigma)\ e\ \langle \rho_w, \beta\rangle = 0 \\ -1, & se\ \beta \notin \pm wM(J,\Sigma)\ e\ \langle \rho_w, \beta\rangle = 1 \\ 1, & se\ \beta \in wM(J,\Sigma) \\ -2, & se\ \beta \in -wM(J,\Sigma) \end{cases}$$

Demonstração: Primeiramente notemos que, se $x \in A$, $\beta > 0$ e $\lambda \in \widehat{L}$, então

$$k_\beta(A) < \langle x, \beta\rangle < k_\beta(A) + 1.$$

Logo,

$$k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta\rangle < \langle x, \beta\rangle + \langle \lambda, \beta\rangle < k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta\rangle + 1,$$

ou ainda,

$$k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta\rangle < \langle t_\lambda x, \beta\rangle < k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta\rangle + 1,$$

pois $t_\lambda x = \lambda + x$. Isto implica que

$$k_\beta(t_\lambda A) = k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta\rangle.$$

Agora, se $\beta \notin \pm wM(J,\Sigma)$ e $\langle \rho_w, \beta\rangle = 0$, pelo lema 5.6 e pela observação feita, $0 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle \rho_w, \beta\rangle = k_\beta(wA)$. Se $\beta \notin \pm wM(J,\Sigma)$ e $\langle \rho_w, \beta\rangle = 1$, então $0 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle \rho_w, \beta\rangle = k_\beta(wA) + 1$, isto é, $k_\beta(wA) = -1$. Se $\beta \in wM(J,\Sigma)$, isto é, $\beta = w\alpha > 0$, $\alpha \in M(J,\Sigma)$, então pelos lemas 5.5 e 5.6, $1 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle\rho_w,\beta\rangle = k_\beta(wA)$. Finalmente, $\beta \in -wM(J,\Sigma)$, isto é, se $\beta = -w\alpha > 0, \alpha \in M(J,\Sigma)$, então $-1 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle\rho_w,-w\alpha\rangle = k_\beta(wA) + 1$, ou seja, $k_\beta(wA) = -2$. Isto conclui a demonstração do lema. □

Podemos enfim descrever os ideais abelianos correspondentes a wJ, se $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$ e J tendo a forma ideal abeliano com relação a Σ.

Proposição 5.8 *Seja $J = J(A)$ uma iacs afim satisfazendo a propriedade de ideal abeliano com relação a Σ, com $M(J,\Sigma)$ o correspondente ideal abeliano. Dado $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$, então wJ tem a propriedade de ideal abeliano com relação a Σ e*

$$M(wJ,\Sigma) = \left(wM(J,\Sigma)\cap\Pi^+\right)\cup\left\{\beta\in\Pi^+;\ w^{-1}\beta\notin M(J,\Sigma)\ \text{ e }\ \langle\rho_w,\beta\rangle = 1\right\}.$$

Demonstração: A primeira afirmação é conseqüência da proposição 5.1, pois $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$, então $w\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}$.

Vamos agora provar a igualdade dos conjuntos. Se $\beta \in wM(J,\Sigma)\cap\Pi^+$, $\beta = w\alpha > 0, \alpha \in M(J,\Sigma)$. Daí $-1 = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}\beta}$ e $\beta \in M(wJ,\Sigma) = \{\alpha > 0; \varepsilon_{w^{-1}\alpha} = -1\}$. Se $\beta \in \{\beta\in\Pi^+;\ w^{-1}\beta\notin M(J,\Sigma)\ \text{ e }\ \langle\beta,\rho_w\rangle = 1\}$, então $\beta \notin wM(J,\Sigma)$ e $\langle\rho_w,\beta\rangle = 1$. Pelo lema 5.7 e demonstração do lema 2.3, $-1 = k_\beta(wA) = k_{w^{-1}\beta}(A)$. Como $\varepsilon_{w^{-1}\beta} = (-1)^{k_{w^{-1}\beta}}$, então $\varepsilon_{w^{-1}\beta} = -1$ e daí $\beta \in M(wJ,\Sigma)$.

Por outro lado, dado $\beta \in M(wJ,\Sigma)$, então $\beta > 0$ e $\varepsilon_{w^{-1}\beta} = -1$. Como $-1 = \varepsilon_{w^{-1}\beta} = (-1)^{k_\beta(wA)}$, então $k_\beta(wA)$ é ímpar. Logo, pelo lema 5.7, $k_\beta(wA) = -1$, $\beta \notin \pm wM(J,\Sigma)$ e $\langle\rho_w,\beta\rangle = 1$ ou $k_\beta(wA) = 1$ e $\beta \in wM(J,\Sigma)$. Como $\beta \notin \pm wM(J,\Sigma)$ implica que $w^{-1}\beta \notin M(J,\Sigma)$, segue que $\beta \in \left(wM(J,\Sigma)\cap\Pi^+\right)\cup\{\beta\in\Pi^+;\ w^{-1}\beta\notin M(J,\Sigma)\ \text{ e }\ \langle\rho_w,\beta\rangle = 1\}$. □

Desta expressão para $M(wJ,\Sigma)$ podemos ser capazes de olhar os ideais abelianos que representam a mesma classe de equivalência, e eventualmente encontrar formas canônicas para estruturas quase Hermitianas invariantes $(1,2)$-simpléticas. Olhemos o caso das *iacs* canônicas $J_c = \{\varepsilon_\alpha\}$, $\varepsilon_\alpha = +1$ se $\alpha > 0$, quando $M(J,\Sigma) = \emptyset$. Pela proposição 5.8, $M(wJ,\Sigma) = \{\beta\in\Pi^+; \langle\rho_w,\beta\rangle = 1\}$, isto é, $M(wJ,\Sigma)$ é o conjunto das raízes positivas que possuem coeficiente não nulo na direção de α_w, se $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$. Por exemplo, na série A_l com raízes α_{ij}, $1 \le i \ne j \le n = l+1$, ([$SM$], pág. 168), qualquer raiz simples $\alpha_{i,i+1}$ é α_w para algum $w \in W_{\widetilde{\Sigma}}$.(pois, neste caso, $\Delta = \Sigma$). Também, o conjunto de raízes positivas tendo coeficiente em $\alpha_w = \alpha_{i,i+1}$ é o "retângulo" $\{\alpha_{rs};\ r \leq i,\ s \geq i+1\}$. Qualquer tal retângulo é um representante das estruturas Kähler invariante. Notemos que os retângulos interceptam o conjunto das raízes simples, e daí a *iacs* canônica não pode ser colocada na forma ideal abeliano do teorema 3.17.

Capítulo 6

Classes de estruturas quase Hermitiana

As estruturas quase Hermitianas são classificadas, por Grey e Hervella ([GH]), em dezesseis classes, cada uma correspondendo a um subespaço invariante de uma representação de $U(n)$, digamos sobre o espaço W. Esta representação decompõe W em quatro componentes irredutíveis, $W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. As possíveis dezesseis combinações destas componentes (junto com $\{0\}$) fornece as diferentes classes de estruturas quase Hermitiana. Esta correspondência respeita a inclusão, pois uma classe associada a um subespaço invariante V_1 está contida na classe associada a V_2, se $V_1 \subset V_2$, ([GH], tabela I). Não explicitaremos aqui a representação W nem suas componentes irredutíveis. Vamos seguir a numeração em [GH] para as componentes e suas correspondentes classes de estruturas quase Hermitiana. Para algumas das classes usaremos suas propriedades de definição. Quando isto ocorre será explicitado. Por exemplo, $\{0\}$ corresponde às métricas Kähler, $W_1 \oplus W_2$ às $(1,2)$-simpléticas, e a classe co-simplética é dada por $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$. Como veremos, dentre as estruturas quase Hermitiana invariantes as dezesseis classes são reduzidas a essas três, juntamente com outra classe, que inclui toda *iacs* mas com apenas algumas métricas específicas, entre elas a de Cartan-Killing.

Comecemos lembrando que, de acordo com o corolário 1.20, estruturas quase Kähler são Kähler. Na notação de [GH] a estrutura quase Kähler corresponde a W_2. Daí , $W_2 \approx \{0\}$. Os outros casos requerem o tensor N de Nijenhuis, que é definido por

$$\frac{1}{2}N(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]. \qquad (6.1)$$

No contexto invariante com $J = \{\varepsilon_\alpha\}$, tomando raízes α e β, pela demonstração da proposição 1.19, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N\left(X_\alpha, X_\beta\right) &= -\left[JX_\alpha, JX_\beta\right] + \left[X_\alpha, X_\beta\right] + J\left[X_\alpha, JX_\beta\right] + J\left[JX_\alpha, X_\beta\right] \\ &= \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}\left(1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right) \\ &= m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)X_{\alpha+\beta}. \qquad (6.2) \end{aligned}$$

Lema 6.1 *Dadas três raízes α, β e γ, temos $\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), JX_\gamma\right)_\Lambda = 0$ a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Neste caso,*

$$\frac{1}{2}\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), JX_\gamma\right)_\Lambda = i\lambda_\gamma m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma\right).$$

Demonstração: Pela equação (6.2), temos que

$$\begin{aligned} \left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), JX_\gamma\right)_\Lambda &= \left(-2m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)X_{\alpha+\beta}, i\varepsilon_\gamma X_\gamma\right)_\Lambda \\ &= -\left\langle\Lambda\left(-2m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)X_{\alpha+\beta}\right), i\varepsilon_\gamma X_\gamma\right\rangle \\ &= \left\langle 2m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)\lambda_{\alpha+\beta}X_{\alpha+\beta}, i\varepsilon_\gamma X_\gamma\right\rangle \\ &= 2m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)\lambda_{\alpha+\beta}i\varepsilon_\gamma\left\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma\right\rangle \\ &= 2i\lambda_{\alpha+\beta}m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)\varepsilon_\gamma\left\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma\right\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle X_\delta, X_\xi\rangle = 0$ a menos que $\delta + \xi = 0$ e $\langle X_\delta, X_\xi\rangle = 1$ no caso $\delta + \xi = 0$, então $\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), JX_\gamma\right)_\Lambda = 0$ a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Se $\alpha + \beta + \gamma = 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), JX_\gamma\right)_\Lambda &= i\lambda_\gamma m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma\right)\varepsilon_\gamma \\ &= i\lambda_\gamma m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta\right), \end{aligned}$$

pois $\varepsilon_\gamma = -\varepsilon_{\alpha+\beta}$. Isto conclui a demonstração. □

Com este lema o caso Hermitiano, isto é, quando J é integrável, que significa $N = 0$, conforme definição dada na seção 1.4, pode ser descrito. É o que faz a próxima proposição. Este caso corresponde a $W_3 \oplus W_4$.

Proposição 6.2 *Seja J uma iacs com $N = 0$. Então o conjunto $P = \{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$ é uma escolha de raízes positivas com relação a alguma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.*

Demonstração: Dados $\alpha, \beta \in P$ tal que $\gamma = -(\alpha + \beta)$ é uma raiz, como $N = 0$, então $\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), JX_\gamma\right)_\Lambda = 0$. Daí, pelo lema 6.1, $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = 0$. Isto implica que $\varepsilon_\gamma = -1$ se $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$ e daí $\varepsilon_{\alpha+\beta} = +1$. Logo, P é fechado para adição. Além disso, $\Pi = P \cup (-P)$, onde $-P = \{\alpha; \varepsilon_\alpha = -1\}$. Portanto P é uma escolha de raízes positivas. □

Corolário 6.3 *Dada J uma iacs com $N = 0$, que significa J integrável, então, para alguma métrica Λ, o par (J, Λ) é Kähler.*

Demonstração: Pelo proposição 6.2, $P = \{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$ é um conjunto de raízes positivas. Seja $\Sigma_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ o correspondente sistema simples de raízes. Sejam $\lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_l}$ números positivos. Se α é uma raiz positiva, escrevemos $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l$ e definimos $\lambda_\alpha = a_1\lambda_{\alpha_1} + \cdots + a_l\lambda_{\alpha_l}$. Vamos escrever $\Lambda = \{\lambda_\alpha; \alpha \in P\}$

Assim como na demonstração do corolário 1.13, não existem $\{0, 3\}$-triplas para J. Seja $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ uma $\{1, 2\}$-tripla para J. Digamos que γ é a raíz tal que o sinal ε_γ é diferente dos outros dois. Assim, pela expressão dada para para $d\Omega$ na proposição 1.14, temos que

$$\begin{aligned} d\Omega\left(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\right) &= -\frac{1}{3} i m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma\right) \\ &= -\frac{1}{3} i m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\alpha\lambda_\beta - \varepsilon_\alpha\left(\lambda_\gamma\right)\right). \end{aligned}$$

Mas, escrevendo $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l$, $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_l\alpha_l$, temos que $-\gamma = (a_1 + b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_l + b_l)\alpha_l$. Daí

$$\begin{aligned} \lambda_{-\gamma} &= \lambda_\gamma = (a_1 + b_1)\lambda_{\alpha_1} + \cdots + (a_l + b_l)\lambda_{\alpha_l} \\ &= (a_1\lambda_{\alpha_1} + \cdots + a_l\lambda_{\alpha_l}) + (b_1\lambda_{\alpha_1} + \cdots + b_l\lambda_{\alpha_l}) \\ &= \lambda_\alpha + \lambda_\beta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\Omega\left(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\right) &= -\frac{1}{3} i m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\left(\lambda_\alpha + \lambda_\beta - \lambda_\gamma\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3} i m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\left(\lambda_\alpha + \lambda_\beta - \lambda_\alpha - \lambda_\beta\right)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o par (J, Λ) é quase Kähler e, como J é integrável, (J, Λ) é Kähler. □

O corolário acima mostra que $W_3 \oplus W_4 \approx \{0\}$.

Segue da relação de inclusão entre as classes que aquelas correspondentes a W_3 e W_4 são também Kähler.

Vamos tratar agora das estruturas co-simpléticas $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, que vão ajudar a resolver muitos outros casos.

Proposição 6.4 *Todo par (J, Λ) invariante é co-simplético.*

Demonstração: Por [G.H], sec.8, uma estrutura quase Hermitiana é co-simplética se, e somente se, a forma

$$\theta(X) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_i d\Omega(X, X_i, Y_i) \tag{6.3}$$

é nula. Aqui $\{X_i\}$ é uma base do espaço tangente e $\{Y_i\}$ é a base dual com relação a forma não-degenerada Ω. No nosso caso tomamos a base $\{A_\alpha, iS_\alpha; \alpha \in \Pi^+\}$. Seu dual é um múltiplo de $\{iS_\alpha, A_\alpha; \alpha \in \Pi^+\}$. Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha>0} d\Omega(X, A_\alpha, iS_\alpha) &= \sum_{\alpha>0} d\Omega(X, X_\alpha - X_{-\alpha}, iX_\alpha + iX_{-\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha>0} \left(d\Omega(X, X_\alpha, iX_\alpha) + d\Omega(X, X_\alpha, iX_{-\alpha})\right) \\
&\quad + \sum_{\alpha>0} \left(d\Omega(X, -X_{-\alpha}, iX_\alpha) + d\Omega(X, -X_{-\alpha}, iX_{-\alpha})\right) \\
&= \sum_{\alpha>0} 2i d\Omega(X, X_\alpha, X_{-\alpha}).
\end{aligned}$$

Logo, levando nossas bases em (6.3), obtemos que $\theta(X) = 0$ é equivalente a

$$\sum_{\alpha>0} d\Omega(X, X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0,$$

já que $d\Omega(X, Y, Y) = 0$ e $d\Omega(X, Y, Z) = -d\Omega(X, Z, Y)$. Mas, pela proposição 1.14, $d\Omega(X_\beta, X_\gamma, X_\delta) = 0$ a menos que $\beta + \gamma + \delta = 0$. Logo, escrevendo $X = \sum_\beta a_\beta X_\beta$, temos $d\Omega(X, X_\alpha, X_{-\alpha}) = \sum_\beta a_\beta d\Omega(X_\beta, X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0$. Portanto, para toda raiz α, $d\Omega(X, X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0$ e $\theta(X) = 0$. □

Proposição 6.5 *Em uma variedade quase Hermitiana co-simplética existem as seguintes equivalências:*

1) $W_1 \oplus W_3 \approx W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$,

2) $W_1 \approx W_1 \oplus W_4$,

3) $W_1 \oplus W_2 \approx W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$,

4) $W_2 \oplus W_3 \approx W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$,

5) $W_3 \approx W_3 \oplus W_4$,

6) $W_2 \approx W_2 \oplus W_4$.

Demonstração: As classes associadas aos subespaços invariantes colocados, no enunciado da proposição, a esquerda, pela observação feita no início do capítulo, são também classes associadas aos respectivos subespaços colocados a direita. Resta provar a inclusão oposta em cada caso.

1. A condição de definição da classe $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ é

$$\nabla_X(\Omega)(X,Y) - \nabla_{JX}(\Omega)(JX,Y) = 0 (\text{ou } \ (N(X,Y), X)_\Lambda = 0).$$

   Esta condição junto à condição de definição da classe co-simplética $(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3)$, que é $\delta\Omega = 0$ definem a classe $W_1 \oplus W_3$. Lembremos que δ denota a coderivada.

2. A condição de definição da classe $W_1 \oplus W_4$ é

$$\nabla_X(\Omega)(X,Y) = -\frac{1}{2(n-1)}\left\{\|X\|^2 \delta\Omega(Y) - (X,Y)_\Lambda \delta\Omega(X) - (JX,Z)_\Lambda \delta\Omega(JX)\right\}.$$

   Como $\delta\Omega = 0$, então $\nabla_X(\Omega)(X,Y) = 0$. Mas, esta é justamente a condição de definição da classe W_1.

3. A condição de definição da classe $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ é

$$\begin{aligned}\nabla_X(\Omega)(Y,Z) + \nabla_{JX}(\Omega)(JY,Z) &= -\frac{1}{n-1}((X,Y)_\Lambda \delta\Omega(Z) - (X,Z)_\Lambda \delta\Omega(Y) \\ &\quad - (X,JY)_\Lambda \delta\Omega(JZ) + (X,JZ)_\Lambda \delta\Omega(JY)).\end{aligned}$$

   Como $\delta\Omega = 0$, então $\nabla_X(\Omega)(Y,Z) + \nabla_{JX}(\Omega)(JY,Z) = 0$. Já que esta é a condição de definição da classe $W_1 \oplus W_2$, temos a inclusão desejada.

4. Para $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ a condição de definição é

$$\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}\left\{\nabla_X(\Omega)(Y,Z) - \nabla_{JX}(\Omega)(JY,Z)\right\} = 0 (\text{ou } \underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}(N(X,Y), JZ)_\Lambda = 0),$$

   onde $\mathfrak{S}$ é a soma cíclica de $(N(X,Y), JZ)_\Lambda)$. Esta condição, junto com a condição de definição da classe co-simplética, definem a classe $W_2 \oplus W_3$.

5. Para $W_3 \oplus W_4$ a condição de definição é $N = 0$. Mas, a condição $N = 0$ com $\delta\Omega = 0$ define a classe W_3.

6. Por fim, a classe $W_2 \oplus W_4$ está definida pela condição $d\Omega = \Omega \wedge \theta$, onde $\theta = \frac{-1}{n-1}\delta\Omega(JX)$. Como $\delta\Omega = 0$, $\theta = 0$ e $d\Omega = 0$. Mas, $d\Omega = 0$ é define a classe W_2.

As condições de definições das classes são encontradas em $[GH]$, tabela I. Já a definição da derivada covariante $\nabla_X(\Omega)$ é encontrada em $[KN]$, volume I, capítulo III. $\square$

Logo, no nosso conjunto de classes invariantes $W_3 \oplus W_4$ e $W_2 \oplus W_4$ são Kähler, pois W_3 e W_2 o são, pelo corolário 6.3 e pela observação que antecede ao lema 6.1, respectivamente. Também, a classe $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ é a mesma que a classe $W_1 \oplus W_2$ das $(1,2)$-simpléticas.

Tratemos agora da classe $W_2 \oplus W_3 \approx W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. Consideremos o tensor $T(X,Y,Z) = (N(X,Y), JZ)_\Lambda$. A classe correspondente ao subespaço $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ é formada pelas estruturas quase Hermitianas para as quais a soma cíclica $(\mathfrak{S}T)(X,Y,Z)$ de $T(X,Y,Z)$ é zero.

Proposição 6.6 *As estruturas invariantes em $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \approx W_2 \oplus W_3$ são Kähler.*

Demonstração: Pelo lema 6.1, $T(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Já se $\alpha + \beta + \gamma = 0$, temos

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{S}T)(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= T(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) + T(X_\gamma, X_\alpha, X_\beta) + T(X_\beta, X_\gamma, X_\alpha) \\
&= (N(X_\alpha, X_\beta), JX_\gamma)_\Lambda + (N(X_\gamma, X_\alpha), JX_\beta)_\Lambda \\
&\quad + (N(X_\beta, X_\gamma), JX_\alpha)_\Lambda \\
&= 2i\lambda_\gamma m_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma) \\
&\quad + 2i\lambda_\beta m_{\gamma,\alpha}(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma) \\
&\quad + 2i\lambda_\alpha m_{\beta,\gamma}(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma) \\
&= 2i(\lambda_\gamma m_{\alpha,\beta} + \lambda_\alpha m_{\beta,\gamma} + \lambda_\beta m_{\gamma,\alpha})(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma).
\end{aligned}$$

Como $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$, ($[SM]$, pág.194), então

$$(\mathfrak{S}T)(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 2im_{\alpha,\beta}(\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma)(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma).$$

Isto implica que $(\mathfrak{S}T)(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ se, e somente se, $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = 0$. Logo, $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + 1 = 0$ e $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} + 1 = 0$. Portanto, pela equação (6.2), $N = 0$, isto é, J é intregrável e, pelo corolário 6.3, podemos escolher uma métrica Λ, tal que as estruturas sejam Kähler. $\square$

A condição da definição para a classe $W_1 \oplus W_3 \approx W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ é a anulação do tensor $(N(X,Y), X)_\Lambda$. Notemos que que $(N(X_\alpha, X_\beta), X_\gamma)_\Lambda = 0$ a menos que

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ e, neste caso,

$$\frac{1}{2}\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), X_\gamma\right)_\Lambda = \lambda_\gamma m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + 1\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), X_\gamma\right)_\Lambda &= \left(-2m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)X_{\alpha+\beta}, X_\gamma\right)_\Lambda \\
&= -\left\langle \Lambda\left(-2m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)X_{\alpha+\beta}\right), X_\gamma\right\rangle \\
&= 2\lambda_{\alpha+\beta} m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta}\right)\left\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma\right\rangle \\
&= 2\lambda_\gamma m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma\right).
\end{aligned}$$

Em particular, $\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), X_\alpha\right)_\Lambda = 0$ para toda raiz α. Observemos que se $\alpha+\beta+\alpha = 0$, então $\beta = -2\alpha$ não seria uma raiz, pois $\pm\alpha$ são as únicas raízes múltiplas de α. Assim, escrevendo $X = \sum_\alpha X_\alpha$, temos que

$$\left(N\left(X, X_\beta\right), X\right)_\Lambda = \sum_{\alpha\neq\gamma}\left(\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), X_\gamma\right)_\Lambda + \left(N\left(X_\gamma, X_\beta\right), X_\alpha\right)_\Lambda\right). \tag{6.4}$$

Supomos $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\left(N\left(X_\alpha, X_\beta\right), X_\gamma\right)_\Lambda + \left(N\left(X_\gamma, X_\beta\right), X_\alpha\right)_\Lambda &= 2\lambda_\gamma m_{\alpha,\beta}\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma\right) \\
&\quad + 2\lambda_\alpha m_{\gamma,\beta}\left(\varepsilon_\gamma\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\gamma\varepsilon_\alpha\right) \\
&= c\left(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha\right)\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma\right),
\end{aligned}$$

onde $c = 2m_{\alpha,\beta}$, pois $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$ e $m_{\gamma,\beta} = -m_{\beta,\gamma}$

Lema 6.7 *O par invariante (J, Λ) está na classe $W_1 \oplus W_3 \approx W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ se, e somente se, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$ para toda $\{0,3\}$-tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.*

Demonstração: Supomos que o par (J, Λ) esta na classe $W_1 \oplus W_3$. Dada uma $\{0,3\}$-tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, então $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$. Seja $X = X_\alpha + X_\beta$. Pela definição da classe $W_1 \oplus W_3$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(N\left(X, X_\gamma\right), X\right)_\Lambda = \left(N\left(X_\alpha, X_\gamma\right), X_\beta\right)_\Lambda + \left(N\left(X_\beta, X_\gamma\right), X_\alpha\right)_\Lambda \\
&= 2m_{\alpha,\gamma}\left(\lambda_\beta - \lambda_\alpha\right)\left(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma\right) = 8m_{\alpha,\gamma}\left(\lambda_\beta - \lambda_\alpha\right).
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda_\beta = \lambda_\alpha$. Do mesmo modo, $Y = X_\alpha + X_\gamma$ e $\left(N\left(Y, X_\beta\right), Y\right)_\Lambda = 0$ implicam $\lambda_\gamma = \lambda_\alpha$. Portanto, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$.

Reciprocamente, supomos que para toda $\{0,3\}$-tripla $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$. Para mostrar que $(N(X,Y),X)_\Lambda = 0$, basta mostrar que vale a igualdade para $X = \sum_\alpha X_\alpha$ e $Y = X_\beta$. Neste caso

$$(N(X,Y),X)_\Lambda = \sum_{\alpha\neq\gamma} \left(\left((N(X_\alpha, X_\beta), X_\gamma)_\Lambda + (N(X_\gamma, X_\beta), X_\alpha)_\Lambda \right) \right).$$

Mas, a parcela deste somatório para a qual $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ é nula. Por outro lado, se $\alpha+\beta+\gamma = 0$ e parcela é escrita como

$$(N(X_\alpha, X_\beta), X_\gamma)_\Lambda + (N(X_\gamma, X_\beta), X_\alpha)_\Lambda = c(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha)(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma).$$

Se $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla, então $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 + \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma = 0$ e a parcela é nula. Se $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ é uma $\{0,3\}$-tripla, por hipótese, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$ e mais uma vez a parcela é nula. Portanto, $(N(X,Y),X)_\Lambda = 0$ e (J,Λ) está na classe $W_1 \oplus W_3$. □

A condição deste lema implica a seguinte existência de métricas.

Proposição 6.8 *Seja $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ uma iacs e denotemos por $C(J)$ o subconjunto de raízes α tal que existe uma $\{0,3\}$-tripla $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ contendo α. Seja $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}$ uma métrica invariante tal que λ_α é constante sobre $C(J)$, isto é, $\lambda_\beta = k$, para alguma constante $k > 0$ e para todo $\beta \in C(J)$. Então o par (J,Λ) está na classe $W_1 \oplus W_3 \approx W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$.*

Demonstração: Se $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ é uma $\{0,3\}$-tripla, então $\alpha,\beta,\gamma \in C(J)$. Logo, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma = k$ e pelo lema 6.7, (J,Λ) está na classe $W_1 \oplus W_3 \approx W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$. □

Notemos que a métrica de Cartan-Killing é um caso particular de Λ nesta proposição.

Para completar nossa análise das estruturas quase Hermitiana invariantes resta somente estudar o caso "near" Kähler W_1 ($\approx W_1 \oplus W_4$). A classe das estruturas "near" Kähler é a interseção de $W_1 \oplus W_2$ ($(1,2)$-simplética) com $W_1 \oplus W_3$, pois $W_1 = (W_1 \oplus W_2) \cap (W_1 \oplus W_3)$ como subespaços. Sobre esta última comentamos após a proposição 6.6. Assim, se o par é (J,Λ) "near" Kähler, pelo lema 6.7, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$ para toda $\{0,3\}$-tripla $\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Usaremos esta condição juntamente com a forma ideal abeliano para estruturas $(1,2)$-simpléticas para mostrar que toda estrutura "near" Kähler é, na maior parte das variedades bandeira maximal, Kähler.

Comecemos dando uma equivalência da condição do lema 6.7.

Lema 6.9 *Para o par invariante (J, Λ), são equivalentes:*

1. $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$ *para toda* $\{0,3\}$*-tripla* $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

2. *Se* α *e* β *são raízes tais que* $\alpha + \beta$ *é uma raíz,* $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$, $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$, *então* $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$.

Demonstração: Supomos (1). Sejam α e β são raízes tais que $\alpha + \beta$ é uma raiz, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$, $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$. Seja $\gamma = \alpha + \beta$. Assim, $\alpha + \beta + (-\gamma) = 0, \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$ e $\varepsilon_{-\gamma} = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)} = -\varepsilon_{\alpha+\beta} = +1$. Segue que $\{\alpha, \beta, -\gamma\}$ é uma $\{0,3\}$-tripla. Por hipótese, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_{-\gamma}$. Portanto $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma = \lambda_{\alpha+\beta}$.

Agora supomos (2). Dada uma $\{0,3\}$-tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, então $\alpha + \beta = -\gamma$ é uma raiz. Além disso $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$ e $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_{-\gamma} = -\varepsilon_\gamma$. Se $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$, então $-\varepsilon_\gamma = -1$ e podemos aplicar a hipótese a α, β e $\alpha + \beta$ para concluir que $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_{-\gamma} = \lambda_\gamma$. Se $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$, aplicamos a hipótese a $-\alpha, -\beta$ e $-(\alpha + \beta) = \gamma$ e obtemos $\lambda_{-\alpha} = \lambda_{-\beta} = \lambda_{-(\alpha+\beta)}$. Portanto, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$. □

Seja (J, Λ) um par invariante "near" Kähler. Então ele é $(1,2)$-simplético e, deste modo, existem Σ e Π^+ um sistema simples de raízes e o conjunto de raízes positivas respectivo, onde se tem a propriedade ideal abeliano com $M(J, \Sigma) = \{\alpha > 0; \varepsilon_\alpha = -1\}$, conforme teorema 3.17.

Lema 6.10 *Se existem raízes* $\alpha, \beta \in \Pi^+ \backslash M(J, \Sigma)$ *tal que* $\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$ *e* $\beta = \beta_1 + \beta_2$ *com* β_i, $i = 1, 2$, *raízes positivas, então* (J, Λ) *não é "near" Kähler.*

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que (J, Λ) é "near" Kähler. Assim, (J, Λ) é $(1,2)$-simplético e também está na classe $W_1 \oplus W_3$. Por hipótese, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$ e $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$. Logo, pela equivalência dada no lema 6.9, temos que $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$.

Também, pela demonstração do lema A.5, $\alpha + \beta_1$ ou $\alpha + \beta_2$ é uma raiz. Digamos que $\alpha + \beta_1$ é uma raiz. Temos que $\alpha + \beta = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 \in M(J, \Sigma)$. Notemos que β_1 e β_2 não estão em $M(J, \Sigma)$. De fato, se $\beta_1, \beta_2 \in M(J, \Sigma)$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$ não é raiz. Se apenas β_1, por exemplo, está em $M(J, \Sigma)$, então $\beta = \beta_1 + \beta_2 \in M(J, \Sigma)$. Em ambos os casos temos uma contradição e portanto β_1 e β_2 não estão em $M(J, \Sigma)$. Segue que $\varepsilon_{\beta_1} = \varepsilon_{\beta_2} = +1$, $\varepsilon_{-\beta} = -1$ e $\{\beta_1, \beta_2, -\beta\}$ é uma $\{1,2\}$-tripla. Pela proposição 1.16, $\varepsilon_{\beta_1}\lambda_{\beta_1} + \varepsilon_{\beta_2}\lambda_{\beta_2} + \varepsilon_{-\beta}\lambda_{-\beta} = 0$, ou seja, $\lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2} = \lambda_\beta$. Isto implica que $\lambda_\beta > \lambda_{\beta_1}$ e $\lambda_\beta > \lambda_{\beta_2}$.

Agora, $\varepsilon_{\beta_1} = \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\beta_2} = +1$ e $\varepsilon_{(\alpha+\beta_1)+\beta_2} = \varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$. Se $\varepsilon_{(\alpha+\beta_1)} = -1$, então $\{\alpha, \beta_1, -(\alpha+\beta_1)\}$ é uma $\{0,3\}$-tripla e, pelo lema 6.7, $\lambda_{\alpha} = \lambda_{\beta_1} = \lambda_{-(\alpha+\beta_1)}$. Neste caso $\lambda_{\alpha} = \lambda_{\beta_1} < \lambda_{\beta}$, contradizendo o fato de $\lambda_{\alpha} = \lambda_{\beta}$. Se $\varepsilon_{(\alpha+\beta_1)} = +1$, então $\{\alpha+\beta_1, \beta_2, -(\alpha+\beta)\}$ e uma $\{0,3\}$-tripla e, novamente pelo lema 6.7, $\lambda_{\alpha+\beta_1} = \lambda_{\beta_2} = \lambda_{-(\alpha+\beta)}$. Neste caso $\lambda_{\beta} > \lambda_{\beta_2} = \lambda_{\alpha+\beta}$, contradizendo o fato de $\lambda_{\beta} = \lambda_{\alpha+\beta}$. Portanto, (J,Λ) não é "near" Kähler. □

Corolário 6.11 *Seja*

$$M(J,\Sigma)_{\min} = \left\{\gamma \in M(J,\Sigma) : \exists\ \alpha \in \Sigma; \gamma - \alpha \in \Pi^{+} \backslash M(J,\Sigma)\right\}.$$

Se existe $\gamma \in M(J,\Sigma)_{\min}$ tendo altura $h(\gamma) > 2$, então (J,Λ) não é "near" Kähler.

Demonstração: Se existe $\gamma \in M(J,\Sigma)_{\min}$ com $h(\gamma) > 2$, então existe $\alpha \in \Sigma$ tal $\beta = \gamma - \alpha \in \Pi^{+} \backslash M(J,\Sigma)$. Segue que $h(\beta) \geq 2$ e $\beta = \beta_1 + \beta_2$, com $h(\beta_1) \geq 1$ e $\beta_2 \in \Sigma$. Assim, α e β estão nas condições do lema 6.10, pois $\Sigma \cap M(J,\Sigma) = \emptyset$, $\alpha \in \Sigma, \beta \in \Pi^{+} \backslash M(J,\Sigma)$ e $\gamma \in M(J,\Sigma)$. Portanto (J,Λ) não é "near" Kähler. □

Corolário 6.12 *Se o par (J,Λ) é "near" Kähler e $M(J,\Sigma) \neq \emptyset$, então $M(J,\Sigma)$ contém toda raiz α com $h(\alpha) = 2$.*

Demonstração: Como $M(J,\Sigma) \neq \emptyset$, pela proposição 3.19, $\mathcal{I}^{+} = \Sigma \cup \{-\mu\}$. Logo, $\varepsilon_{-\mu} = +1$ e $\mu \in M(J,\Sigma)$. Dada uma raiz β de altura 2, podemos escrever $\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \mu$, onde $\beta_j = \beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$, $1 \leq j \leq k$ é uma raiz e $\alpha_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq k$, conforme lema A.4. Seja j o menor índice tal que $\beta_j = \beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_j \in M(J,\Sigma)$. No máximo $j = k$. Como β_{j-1} é uma raiz que não está em $M(J,\Sigma)$, então $\beta_j \in M(J,\Sigma)_{\min}$, pela definição de $M(J,\Sigma)_{\min}$. Pelo corolário 6.11, $h(\beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_j) = 2$. Isto implica que $\beta \in M(J,\Sigma)$, pois a altura de β já é 2. □

O corolário 6.12 está dizendo que $M(J,\Sigma)_{\min} = \{\alpha > 0; h(\alpha) = 2\}$, se o par (J,Λ) é "near" Kähler e $M(J,\Sigma) \neq \emptyset$. De fato, como toda raíz β de altura 2 está em $M(J,\Sigma)$, escrevendo $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$, vemos que $\beta - \alpha_1 = \alpha_2 \in \Pi^{+} \backslash M(J,\Sigma)$, isto é, $\beta \in M(J,\Sigma)_{\min}$. Por outro lado, o fato de (J,Λ) ser "near" Kähler, implica pelo corolário 6.11, que $M(J,\Sigma)_{\min}$ só tem raízes de altura 2. Notemos que $M(J,\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$ é utilizado a todo momento.

Corolário 6.13 *Se o par (J, Λ) é "near" Kähler e $M(J,\Sigma) \neq \emptyset$, então $M(J,\Sigma) = \{\alpha > 0; h(\alpha) \geq 2\}$.*

Demonstração: Como $M(J,\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$, toda raiz em $M(J,\Sigma)$ tem altura maior ou igual a dois.

Reciprocamente, se α é uma raiz positiva com altura 2, pelo corolário 6.12, $\alpha \in M(J,\Sigma)$. Se $h(\alpha) > 2$, escrevemos $\alpha = \gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$, com todas somas intermediárias $\gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$, $1 \leq j \leq l$ sendo raízes, $h(\gamma) = 2$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Sigma$. Como $M(J,\Sigma)$ é ideal e $\gamma \in M(J,\Sigma)$, então $\gamma + \alpha_1 \in M(J,\Sigma)$. O mesmo argumento, aplicado sucessivas vezes, nos dá $\alpha = \gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_l \in M(J,\Sigma)$. □

Lema 6.14 *O conjunto $I_2 = \{\alpha > 0; h(\alpha) \geq 2\}$ não é um ideal abeliano nos sistemas de raízes A_4, B_3, C_3, D_4 e G_2.*

Demonstração: Sejam $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq j.\}$, $j = 2,3$ ou 4, os conjuntos de raízes simples dos sistemas de raízes G_2, B_3, C_3, A_4 e D_4. A terceira coluna da tabela abaixo apresenta duas raízes no conjunto I_2 cuja soma é também um elemento de I_2.

Sistema	Matríz de Cartan	Raízes em I_2 com soma em I_2
G_2	$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	$\alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1 + 2\alpha_2$
B_3	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$	$\alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_2 + 2\alpha_3$
C_3	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	$\alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_2 + \alpha_3$
A_4	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	$\alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_3 + \alpha_4$
D_4	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\alpha_2 + \alpha_4$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

A coluna três é obtida por computação direta, utilizando a fórmula de Killing e observando as respectivas matrizes de Cartan. □

O lema 6.14 diz que a condição do corolário 6.13 não é satisfeita para os sistemas de raízes A_4, B_3, C_3, D_4 e G_2. O próximo lema diz em que sistemas de raízes a condição do coroláro 6.13 é satisfeita.

Lema 6.15 *O conjunto $I_2 = \{\alpha > 0; h(2) \geq 2\}$ é um ideal abeliano somente nos sistemas de raízes $A_l, l \leq 3$ e B_2.*

Demonstração: Fora $A_l, l \leq 3$ e B_2, todo diagrama de Dynkin contém um sistema de raízes A_4, B_3, C_3, D_4 ou G_2 como um subdiagrama (observemos diagramas apresentados em $[SM]$, pág. 185). Pelo lema 6.14, podemos encontrar nestes sistemas pares de raízes em I_2 cuja soma é também uma raiz. Assim, nestes sistemas de raízes, I_2 não é abeliano. Se um sistema de raízes Π contém um subsistema tal que o correspondente I_2 não é abeliano, então o mesmo ocorre com Π. Resta verificar que I_2 é um ideal abeliano em $A_l, l \leq 3$ e B_2.

Em B_2, as raízes positivas são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2$ e $I_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}$. A condição abeliana é facilmente verificada, pois $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2)$ de fato não é uma raiz. Agora, se $\alpha \in \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}$ e $\beta \in \Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, então a única possibilidade da soma $\alpha + \beta$ ser uma raiz é quando $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)$ e $\beta = \alpha_2$. Como neste caso $\alpha + \beta \in I_2$, segue que I_2 é um ideal abeliano.

Verifiquemos agora que $A_l, l \leq 3$ é um ideal abeliano. Em A_1 temos que $I_2 = \emptyset$. Em A_2, onde as raízes positivas são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2$, temos $I_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2\}$. A condição abeliana é diretamente satisfeita. Além disso, como não existe raiz simples que somada a uma raiz de I_2 seja ainda uma raiz, temos que I_2 é um ideal abeliano. Já em A_3, as raízes positivas são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3$ e $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $([SM]$, pág.168$)$, $I_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$. Vê-se que a soma de dois elementos de I_2 não é uma raiz. A única possibilidade de se combinar uma raízes simples com uma raíz de I_2, de modo que a soma seja uma raiz é com $\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$. Como esta soma ainda é raiz de I_2, segue que este é ideal abeliano. □

Agora estamos aptos a provar que, para a maioria dos sistemas de raízes, toda estrutura "near" Kähler é Kähler.

Teorema 6.16 *Toda estrutura "near" Kähler é Kähler se $\mathfrak{g}$ não é A_2. Em A_2 existe uma classe de equivalência de iacs admitindo uma família 1-parâmetro de métricas "near" Kähler.*

Demonstração: Seja (J, Λ) um par "near" Kähler. Então (J, Λ) é $(1,2)$-simplético e podemos colocá-lo na forma ideal abeliano do teorema 3.17. Temos que (J, Λ) é Kähler se, e somente se, $M(J, \Sigma) = \emptyset$. De fato, se J é integrável, então o tensor N é nulo e, pelo teorema 6.2, $P = \{\alpha; \varepsilon_\alpha = +1\}$ é uma escolha de raízes positivas. Logo, $M(J, \Sigma) = \emptyset$. Agora, se $M(J, \Sigma) = \emptyset$, pelo corolário 3.4 e proposição 3.19, (J, Λ) é Kähler. Assim, pelo corolário 6.13 e pelo lema 6.15, podemos supor $M(J, \Sigma) \neq \emptyset$ e olhar somente para $A_l, l \leq 3$ e B_2, pois estes são os únicos que não contém quaisquer dos subdiagramas da tabela dada no lema 6.14.

No caso trivial A_1, $d\Omega = 0$, pois não existe um tripla de raízes α, β, γ tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Logo, toda estrutura é quase Kähler, e daí Kähler.

Em A_3 as raízes positivas são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, conforme $[SM]$, pág. 168. Pelo corolário 6.13, $\varepsilon_\alpha = +1$ se, e somente se, α é uma raiz simples. Agora, pelo lema 6.7 e 6.9, a condição de "near" Kähler implica que $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $\lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\alpha_3} = \lambda_{\alpha_2+\alpha_3}$. Mas, pela propriedade $(1,2)$-simplética, $\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2}\lambda_{\alpha_1+\alpha_2} + \varepsilon_{\alpha_3}\lambda_{\alpha_3} + \varepsilon_{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = 0$, ou seja, $\lambda_{\alpha_1+\alpha_2} = \lambda_{\alpha_3} + \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$. Combinando estas igualdades temos $\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = 0$, o que é uma contradição. Assim, não existem estruturas "near" Kähler sobre A_3.

Em B_2 as raízes positivas são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2$. Pelo corolário 6.13, $\varepsilon_\alpha = +1$ se, e somente se, α é uma raiz simples. Agora, pelo lema 6.7 e 6.9, a condição de "near" Kähler implica que $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\alpha_1+\alpha_2}$. Mas, pela propriedade $(1,2)$-simplética, $\varepsilon_{\alpha_2}\lambda_{\alpha_2} + \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2}\lambda_{\alpha_1+\alpha_2} + \varepsilon_{-(\alpha_1+2\alpha_2)}\lambda_{\alpha_1+2\alpha_2} = 0$, ou seja, $\lambda_{\alpha_1+\alpha_2} = \lambda_{\alpha_2} + \lambda_{\alpha_1+2\alpha_2}$. Combinando estas igualdades temos $\lambda_{\alpha_1+2\alpha_2} = 0$, o que é uma contradição. Assim, não existem estruturas "near" Kähler sobre B_2.

Finalmente, em A_2 temos $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ com $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = +1$ e $\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = -1$, onde α_1 e α_2 são as raízes simples. Este J, juntamente com a família 1-parâmetro de métricas $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\alpha_1+\alpha_2}$, da origem a estruturas "near" Kähler que não são Kähler. De fato, como não existe $\{1,2\}$-tripla possível para J, a condição da proposição 1.16 está satisfeita. Além disso, a definição das métricas permite, pelo lema 6.7, concluir que J com a família de métricas definidas está na classe $W_1 \ominus W_3$. Mas, J não é integrável. Temos que $-\varepsilon_{\alpha_1}\varepsilon_{\alpha_2} = -1, 1 - \varepsilon_{\alpha_1}\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - \varepsilon_{\alpha_2}\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = 3$ e pela demonstração da proposição 1.19, J é integrável se, e somente se, $-\varepsilon_{\alpha_1}\varepsilon_{\alpha_2} = 1 - \varepsilon_{\alpha_1}\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - \varepsilon_{\alpha_2}\varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2}$.
□

Em resumo temos as seguinte classes de estruturas quase Hermitianas invariantes sobre $\mathbb{F}$:

1. **Kähler:** W_1("near" Kähler); W_2 (quase Kähler); W_3; W_4; $W_3 \oplus W_4$ (integrável); $W_2 \oplus W_4$ e $W_1 \oplus W_4$; $W_2 \oplus W_3$; $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$.

2. (1, 2)**-simplética (quasi-Kähler):** $W_1 \oplus W_2$; $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$.

3. **Invariante:** $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ (co-simpletica); $W_1 \oplus W_3$; $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$. (As últimas duas para métricas específicas e toda *iacs*.).

Apêndice A

Raiz Máxima

O que segue é uma prova alternativa da existência e unicidade de raiz máxima no caso que em $\mathfrak{g}$ é simples. Em $[SM]$, capítulos 10 e 11, pode-se verificar a demonstração geral para representações irredutíveis, como uma conseqüência do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Definição A.1 *Uma raiz positiva μ é dita **máxima** se para todo $\alpha \in \Sigma$, $\mu + \alpha$ não é uma raiz.*

Como Π^+ é finito podemos tomar μ uma raiz positiva de altura máxima. Temos que μ satisfaz a condição da definição anterior.

Definição A.2 *O **suporte** de uma raiz positiva β, denotado por* $\mathrm{Supp}\beta$, *é o conjunto das raízes simples que aparecem (com coeficiente não-nulo) na combinação linear de β.*

Lema A.3 *Se μ é uma raiz máxima, então* $\mathrm{Supp}\mu$ *é uma componente conexa do diagrama de Dynkin.*

Demonstração: Seja $\mathrm{Supp}\mu = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$, ou seja, $\mu = a_1\gamma_1 + \cdots a_k\gamma_k$. Temos que $\mathrm{Supp}\mu$ é um subconjunto conexo do diagrama de Dynkin ([SM], pág. 173). Se $\mathrm{Supp}\mu$ não é uma componente conexa do diagrama de Dynkin, então existe uma raiz $\alpha \in \Sigma \backslash \mathrm{Supp}\mu$ que é ligada a uma única raiz $\gamma_i \in \mathrm{Supp}\mu$, pois um diagrama de Dynkin não contém ciclos ([SM], lema 7.3). Logo, $\langle \mu, \alpha \rangle = a_i \langle \gamma_i, \alpha \rangle < 0$. Mas, $\langle \mu, \alpha \rangle < 0$ implica, pela fórmula de Killing, que $\mu + \alpha$ é uma raiz. Isto contradiz o fato de μ ser máxima. Segue que $\mathrm{Supp}\mu$ é uma componente conexa do diagrama de Dynkin. $\square$

Como a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples, o lema anterior implica que $\mathrm{Supp}\mu = \Sigma$.

Proposição A.4 *A raiz máxima é única.*

Demonstração: Se μ_1 e μ_2 são raízes máximas, pelo lema anterior, $\mathrm{Supp}\mu_1 = \mathrm{Supp}\mu_2 = \Sigma$. Segue que existe $\beta \in \mathrm{Supp}\mu_1$ tal que $\langle \beta, \mu_2 \rangle \neq 0$, ou seja, $\langle \beta, \mu_2 \rangle > 0$. De fato, μ_2 raiz máxima implica, pela fórmula de Killing, que $\langle \beta, \mu_2 \rangle \geq 0$. Segue que $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle > 0$. Assim, tomando o subespaço gerado por $\{\mu_1, \mu_2\}$ temos que a interseção deste subespaço com Π é um A_2-subsistema ou um B_2-subsistema. Em ambos os casos, como mostra a figura 3.1, uma raiz é obtida da outra por adição de uma raiz do subsistema, ou seja, $\mu_1 = \mu_2 + \gamma$ ou $\mu_2 = \mu_1 + \gamma$, com $\gamma \in A_2$ ou $\gamma \in B_2$. Isto contradiz o fato de μ_1 ou μ_2 serem máximas. Portanto, a raiz máxima é única. $\square$

Em resumo, podemos escrever $\gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_l = \mu$, com $\gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ raiz para todo $1 \leq k \leq l$, se $\gamma \in \Pi$, onde μ denota a raiz máxima.

Lema A.5 *Sejam α, β raízes positivas tais que $\alpha + \beta$ é uma raiz. Então existem raízes simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tais que $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ e todas as somas intermediárias $\eta_k = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, 1 \leq k \leq s$ são raízes.*

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre a altura de β, que é denotada por $h(\beta)$. Se β tem altura 1, então β é raiz simples e $\alpha + \beta$ é raiz por hipótese.

Antes de prosseguirmos, façamos a seguinte observação. Se $\beta = \beta_1 + \beta_2$, com β_1, β_2 raízes, então $\alpha + \beta_1$ ou $\alpha + \beta_2$ é uma raiz. De fato, temos que

$$0 \neq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}]] = [[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta_1}], \mathfrak{g}_{\beta_2}] + [\mathfrak{g}_{\beta_1}, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta_2}]].$$

Assim um dos dois termos do último membro da igualdade é necessariamente não nulo, implicando que $\alpha + \beta_1$ ou $\alpha + \beta_2$ é uma raiz. Notemos que $0 \neq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$ pois $\alpha + \beta$ é uma raiz e a última igualdade é devida a identidade de Jacobi.

Nossa hipótese de indução diz que se δ e γ são raízes positivas tais que $\delta + \gamma$ é uma raiz e $h(\gamma) = n < h(\beta)$, existem raízes simples $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ tais que $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_s$ e $\delta_k = \delta + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k, 1 \leq k \leq s$ são raízes.

Escrevendo $\beta = \beta_1 + \beta_2$, onde $h(\beta_1) = h(\beta) - 1$ e β_2 é uma raiz simples ([SM], pág. 165), pela observação feita anteriormente, $\alpha + \beta_1$ ou $\alpha + \beta_2$ é uma raiz. Se $\alpha + \beta_1$ é uma raiz, como $h(\beta_1) < h(\beta)$, por hipótese de indução, existem raízes simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tais que $\beta_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ e $\delta_k = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, 1 \leq k \leq s$ são raízes. Daí, $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s + \beta_2$ e como $\alpha + \beta = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s + \beta_2$ é raiz, pondo $\eta_k = \delta_k$, $k = 1, \ldots, s$, $\eta_{k+1} = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_s + \beta_2$ o resultado segue. Se

$\alpha + \beta_2$ é uma raiz, como $h(\beta_1) < h(\beta)$ e $(\alpha + \beta_2) + \beta_1 = \alpha + \beta$ é uma raiz, aplicamos a hipótese de indução ao par $(\alpha + \beta_2, \beta_1)$. Assim, existem raízes simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tais que $\beta_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ e $\delta_k = \alpha + \beta_2 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, $1 \leq k \leq s$ são raízes. Logo, $\beta = \beta_2 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ e $\eta_1 = \alpha + \beta_2$, $\eta_2 = \alpha + \beta_2 + \alpha_1, \ldots, \eta_{l+1} = \alpha + \beta_2 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$, $1 \leq l \leq k$ são raízes. Isto conclui a demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

[AB] Borel, A.- *Kahlerian coset of semi-simple Lie groups*, *Proc. Nat. Acad. of Sci.* **40:1147-1151**, 1954.

[GH] Gray, Alfred and Hervella, Luis M.- *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, *Ann. Mat. Pura Appl.* **123:35-58**, 1980.

[MG] Guest, Martin A. - *Harmonic maps, loop groups, and integrable systems*, Cambridge University Press, 1997.

[HS] Helgason, S.-*Differential geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[JH] Humphreys, James - *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1990.

[VK] Kac, Victor - *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1985.

[SM] San Martin, Luiz A.B. - *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, 1999.

[SC] San Martin, Luiz A.B. and Negreiros, Caio J. C.- *Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds*, 2001.

[YS] Shi, Jian-Yi - *Alcoves corresponding to an affine Weyl Group*, *Math. Soc.* **35**: 42-5,1987.

[KN] Shoshichi, Kobayashi and Katsumi, Nomizu - *Foundations of Diferential Geometry*, Interscience Publishers, 1969.