UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica – IMECC
Departamento de Matemática

Dos Complexos aos Números de Cayley: Uma Abordagem Geométrica

Evangelina Helena Gentili

Orientadora: **Profª Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

Campinas - SP
Dezembro 2002

Dos Complexos aos Números de Cayley:
- Uma Abordagem geométrica

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Evangelina Helena Gentili** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de dezembro de 2002

Profª Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa
Orientadora

Banca Examinadora

Profª Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa – IMECC-UNICAMP
Profª Dra. Rosa Maria dos S. Barreiro Chaves – IME-USP
Profª Dra. Vera Lúcia Xavier Figueiredo - IMECC-UNICAMP
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino - IMECC-UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Gentili, Evangelina Helena

G289d Dos complexos aos números de Cayley: uma abordagem geométrica / Evangelina Helena Gentili -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Sueli Irene Rodrigues Costa

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Quatérnios. 2.Álgebra Linear. 3.Matemática - História. 4.Octônios. 5.Números hipercomplexos. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 18 de dezembro de 2002 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof (a). Dr (a). ROSA MARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES

Prof (a). Dr (a). VÉRA LUCIA XAVIER FIGUEIREDO

Dedicatória

À minha mãe, pela sua coragem de me fazer companheira de suas viagens e poesia.

Ao meu pai, pela filosofia e estética que sempre povoaram minha vida.

Ser rua
e desejar cães vagabundos
que transitam na noite.

Ser parque
e ver que há muito
os pássaros calaram.

Ser árvore
e antecipar a casa
com suas falsas muralhas.

Ser muro
e anunciar aos vindos
a partida inaudita.

Ser praia
e sentir o mar
corroendo cadáveres.

Poesia de Iracy Gentili

Desenho de Franco Gentili

A estes dois companheiros que sempre estiveram no futuro dedico este trabalho.

Agradecimentos

Sempre gostei de histórias passadas na Inglaterra vitoriana, principalmente aquelas de ambiente científico, os velhos corredores das universidades, um crime pra resolver ou alguma teoria fantástica necessitando de provas quase sempre impossíveis de se obter. Difícil não se comover com o elegante duelo acadêmico entre os Profs. Challenger e Sumerlee pelo estabelecimento da correta classificação de antigas espécimes, encontrado em *O Tempo Perdido* de Conan Doyle. Impossível não admirar o raciocínio lógico de Sherlock Holmes em suas deduções. Grandes mestres cheios de saber e de soluções surpreendentes, que nunca teríamos pensado, personagens que a gente imagina existir só nos livros. Por tudo isso, meus agradecimentos especiais são para a Profª Sueli, que através do seu conhecimento me permitiu viver na realidade estas histórias de que tanto gosto. Suas exposições e modo peculiar de ver e explicar representaram para mim o maior aprendizado que tive até então. Agradeço por esta generosidade, pela confiança depositada em mim, pelo incentivo e amizade que me ajudaram a superar os momentos difíceis por que passei.

Aos professores membros da banca examinadora, pela atenção que dispensaram ao trabalho e por suas contribuições.

Ao Prof. Marco Antonio Teixeira, coorrdenador do Curso de Pós-Graduação em Matemática -UNICAMP- meu primeiro contato e que sempre me orientou com atenção no que precisei.

À Universidade Católica do Salvador, na pessoa de seu magnífico reitor, Prof. José Carlos de Almeida, pelo suporte financeiro que me ofereceu, permitindo que este programa fosse cursado.

Aos funcionários da biblioteca e da pós-graduação do IMECC, pela atenção e gentileza com que sempre me atenderam.

Aos meus pais, Iracy e Franco, pelo mundo que me mostraram. Sua arte e inteligência me deram o encantamento pela vida.

À minha grande amiga Samara, pela sua parceria e bom humor, e pela sua incrível capacidade de ressuscitar meu computador no meio da madrugada, horário preferido por ele para lançar a temida mensagem "... disco de sistema inválido... Repetir, Anular ou Falhar ? ...." Ela e sua família me acolheram e me fizeram sentir como se estivesse em casa.

Resumo

A extensão do campo numérico aos chamados números hipercomplexos é apresentada nesta dissertação numa abordagem que buscou integrar diferentes formulações algébricas e aspectos geométricos associados...O objetivo foi a produção de um texto acessível sobre o tema que contemplasse também a evolução histórica.

Abstract

The extension of the numeric field beyond the complexes to the so called hypercomplex numbers is presented here through an approach which integrates the algebraic and geometric aspects of the constructions. The main goal of this dissertation was to produce an accessible text combining this two views and also aspects of the historical development of this subject.

Introdução

O objetivo deste trabalho foi o de produzir um material que fizesse uma interface entre álgebra e geometria para descrever alguns tipos de movimento em espaços vetoriais. A dispersão das informações disponíveis e a escassez de abordagens que conectassem os dois aspectos, incluindo a raridade de textos em português sobre o assunto, foram ao mesmo tempo salto e obstáculo que constantemente se apresentaram.

A identificação dos números complexos com o R^2 traz de imediato uma indagação sobre a possível associação entre as operações de elementos de C com sua respectiva interpretação geométrica. As operações com números complexos podem ser usadas para descrever muitos dos movimentos do plano. Por exemplo, a multiplicação de um complexo por um número real corresponde a uma mudança de escala do plano por expansão ou contração. A multiplicação por números complexos com módulo 1 corresponde a uma rotação. Somar números complexos corresponde a translações.

É claro que é atraente a idéia de continuar com este tipo de raciocínio, associando movimentos geométricos em um certo espaço a uma estrutura algébrica onde o conjunto suporte e a(s) operação(ões) se identifique(m) a este espaço e descreva(m) os movimentos.

Durante algum tempo se desejou saber se isto poderia ser generalizado para o espaço tridimensional e, de uma forma geral, na tentativa de descrever operações geométricas em espaços com uma dimensão maior que o plano bidimensional foram sendo criados os chamados números hipercomplexos, como uma generalização dos números complexos.

O raciocícinio era simples, se para um espaço de dimensão 2 como o plano temos os complexos, números definidos a partir de duas componentes reais, para o espaço tridimensional bastaria a criação de uma estrutura algébrica com números de três componentes, e assim sucessivamente.

O objetivo deste trabalho é mostrar os casos de sucesso desta idéia, que naturalmente caminha lado a lado com uma questão bem mais profunda que é a própria possibilidade de o quanto é possível generalizar e o que perdemos e/ou ganhamos quando estendemos conceitos.

Estabelecer se e porque perdemos quando generalizamos, até onde podemos generalizar sem perder e até quando se pode generalizar, mesmo perdendo, mas ainda mantendo uma estrutura consistente, são questões que se insinuaram e acompanham este trabalho.

A partir do estopim desencadeado pelos complexos, falamos também um pouco da história da trajetória desta idéia, não só para mostrar a seqüência original do processo mas principalmente para reafirmar a velha máxima que a busca de soluções para problemas não resolvidos, sejam eles resolúveis ou não, leva invariavelmente a descobertas importantes pelo caminho.

Hoje sabemos que as únicas dimensões nas quais há números hipercomplexos que permitem uma noção de divisão são as dimensões 4 e 8. Como exemplo de hipercomplexos de dimensão 4 temos os chamados quatérnios e em dimensão 8 os octônios ou números de Cayley.

Mais ainda, sob determinadas exigências para uma norma definida nestas estruturas, em ambos os casos estes sistemas numéricos são únicos nas respectivas dimensões

Também, aumentando-se a dimensão, nós não podemos manter algumas das propriedades que caracterizam os sistemas simples de números. No perde e ganha das generalizações, a multiplicação deixa de ser comutativa nos quatérnios e nos números de Cayley e no caso destes últimos não é nem mesmo associativa.

No capitulo inicial apresentamos os conceitos básicos para o acompanhamento de um resumo de como estas idéias foram se apresentando ao longo do tempo.

Estamos supondo também que a estrutura dos números complexos em sua formulação atual é conhecida mas ainda assim os principais conceitos e propriedades são colocados no início do capítulo 2 a fim de fixar notações, estabelecer referências e comparações. Aqui também são apresentadas as construções e definições básicas para os quatérnios e números de Cayley, bem como a chamada construção de Cayley-Dickson. Os principais resultados teóricos deste estudo estão colocados neste capítulo.

No capítulo 3 apresentamos algumas identificações que podemos fazer para estas estruturas, especialmente com os grupos ortogonal, unitário e simplético de matrizes. Aqui também é mostrado como a geometria de complexos, quatérnios e octônios é interpretada por meio das álgebras subjacentes. Utilizamos os softwares Scientific Work Place e Mathematica para gráficos e cálculos

É importante ressaltar que a construção de Cayley-Dickson feita no capítulo 2 e as identificações com os grupos de matrizes no capítulo 3 são as chaves deste estudo. A primeira porque evidencia de uma maneira geral as propriedades de uma classe de álgebras de dimensão 2^n sobre R e estabelece os limites do perde e ganha das generalizações. A segunda por ser a via principal para a interpretação geométrica nestas álgebras.

No início de cada capítulo são colocados os textos e referências usados para o seu desenvolvimento e listados nas referências bibliográficas.

Dentro das perspectiva futuras consideramos: o aprimoramento deste texto e possível apresentação em formato multimídia, o prosseguimento de trabalho de pesquisa dentro desta temática visando aplicações relacionadas à Teoria de Códigos Corretores de Erros.

Sumário

Capítulo 1

Aqui apresentamos os conceitos básicos para o acompanhamento de como a idéia de hipercomplexos como generalização dos complexos foi se apresentando ao longo do tempo e um resumo histórico. Também relacionamos os principais conceitos e resultados da álgebra linear usados no texto não só com o objetivo de estabeler referências e notações mas também o de poupar o leitor de buscá-los em outras fontes durante a leitura. No entanto, aqueles interessados nas demonstrações destes fatos poderão encontrá-las em [14] e [19].

As referências para este capítulo são [3], [4], [5], [8], [9], [10] e [11] para a parte histórica e [1], [2], [6], [14] e [19] para as definições preliminares.

1.1 Espaços Vetoriais. Norma. Transformações

Definição 1 (Espaço Vetorial)

Seja $(V,+)$ um grupo abeliano e K um corpo. Dizemos que V é um espaço vetorial sobre K se está definida uma operação

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & K \times V & \to & V \\ & (\alpha, v) & \longrightarrow & \alpha \cdot v \end{array}$$

satisfazendo a:

a) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, $\forall\ u,v \in V$, $\forall\ \alpha \in K$

b) $\alpha(\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$, $\forall\ u \in V$, $\forall\ \alpha,\beta \in K$

c) $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$, $\forall\ u \in V$, $\forall\ \alpha,\beta \in K$

d) $1 \cdot v = v$, onde 1 é a identidade de K , $\forall\ v \in V$

Normalmente os elementos de V são chamados de vetores e os de K de escalares. A operação $\cdot$ é chamada de multiplicação escalar e salvo menção explícita em contrário estamos considerando $K = R$ ou $K = C$. Por simplicidade denotamos $\alpha \cdot v$ por $\alpha . v$ ou simplesmente αv.

Exemplo 1 Se K é um corpo , $V = K^n$ é um espaço vetorial sobre K com a multiplicação escalar de $\alpha \in K$ por $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$ definida de maneira óbvia

$$
\begin{array}{rcl}
\bullet : \; K \times K^n & \to & K^n \\
(\alpha, v) & \to & \alpha v = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)
\end{array}
$$

Definição 2 (Norma)

Seja V um espaço vetorial sobre K. Uma norma em V é uma função

$$\| \;\; \| : V \to K$$

satisfazendo a :

a) $\|u\| \geq 0 \;\; e \;\; \|u\| = 0 \iff u = 0 \;, \quad \forall\, u \in V$

b) $\|\alpha u\| = |\alpha| . \|u\| \quad , \quad \forall\, u \in V, \forall\, \alpha \in K \quad (*)$

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad , \quad \forall\, u, v \in V$

(*) onde $| \;\; |$ indica o módulo de um número real ou complexo.

Neste caso dizemos que V é um espaço vetorial normado.

Definição 3 (Transformação Linear)

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K. Uma transformação linear de V em W é uma função

$$
\begin{array}{rcl}
f : \; V & \to & W \\
u & \to & f(u)
\end{array}
$$

satisfazendo a :

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v)\,, \qquad \forall\, u, v \in V \quad e \;\; \forall\, a, b \in K.$$

Se $W = V$, f também é dito um operador em V ou um homomorfismo de V.

Definição 4 (Transformação/Forma Bilinear)

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K. Uma transformação (ou forma) bilinear em V é uma função

$$
\begin{array}{rcl}
f : \; V \times V & \to & W \\
(u, v) & \to & f(u, v)
\end{array}
$$

que é linear nas duas variáveis, isto é , para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\forall a, b \in K$:

1) $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$

2) $f(u,v+w) = f(u,v) + f(u,w)$

3) $f(au,v) = af(u,v)$

4) $f(u,bv) = bf(u,v)$

Definição 5 (Forma Bilinear Simétrica)

A forma bilinear acima é dita simétrica se $f(u,v) = f(v,u)$, $\forall \ u,v \in V$.

Definição 6 (Forma Quadrática)

Uma transformação linear

$Q : V \to W$

é dita uma forma quadrática se $Q(v) = f(v,v) \ \ \forall \ v \in V$, para alguma forma bilinear simétrica em V.

1.2 Base e Dimensão.

Definição 7 (Combinação Linear, Espaço Gerado, Dependência e Independência Linear, Base)

Seja V um espaço vetorial sobre K, $a_1,\ldots,a_n \in K$ e $e_1,\ldots,e_n \in$ V.

1) O elemento

$$u = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n \qquad \in V$$

é chamado de combinação linear de $e_1,\ldots,e_n$.

2) O conjunto formado por todas as combinações lineares de $e_1,\ldots,e_n$ também é um espaço vetorial sobre K, chamado espaço gerado por $e_1,\ldots,e_n$ e denotado por

$$< e_1,\ldots,e_n >.$$

3) $e_1,\ldots,e_n$ são ditos linearmente independentes se e somente se

$0 = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ implica que $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Caso contrário $e_1,\ldots,e_n$ são ditos linearmente dependentes.

4) Se existe um conjunto $\{e_1,\ldots,e_n\}$ finito de elementos de V tais que

a) $V = < e_1, \ldots, e_n >$ e

b) $e_1, \ldots, e_n$ são linearmente independentes

dizemos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V. Com um pouco de trabalho adicional é possível provar que se V tem uma base finita então quaisquer duas bases de V têm o mesmo número de elementos e, portanto, dizemos que a dimensão de V é n. Também não é difícil provar que, fixada uma base, a expressão de um elemento de V como combinação linear dos elementos da base é única. Neste caso, os elementos $a_1, \ldots, a_n$ da expressão $u = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$ que exibe u como combinação linear dos elementos da base são chamados de coeficientes ou componentes de u e podemos escrever u como $(a_1, \ldots, a_n)$. Neste estudo estamos sempre considerando espaços de dimensão finita.

Exemplo 2

Em $V = K^n$, $\{e_1 = (1,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)\}$ é uma base de V, chamada base canônica.

1.3 Transformações Lineares e Matrizes

Representação Matricial de uma Transformação Linear

Seja V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre K , $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V e $f : V \to V$ uma transformação linear.

Dado $u \in V$, como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base, podemos escrever

$u = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n$, com $b_1, \ldots, b_n \in K$.

Como f é linear:

$f(u) = b_1 f(e_1) + \ldots + b_n f(e_n)$

Mas $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ são elementos de V, logo

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$$

Daí.

$$f(u) = b_1 \sum_{j=1}^{n} a_{j1} e_j + \ldots + b_n \sum_{j=1}^{n} a_{jn} e_j = \sum_{j=1}^{n} b_1 a_{j1} e_j + \ldots + \sum_{j=1}^{n} b_n a_{jn} e_j \text{, isto é,}$$

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i a_{ji} e_j$$

Como $f(u) \in V$:

$$f(u) = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \quad , \qquad \text{com } c_1, \ldots, c_n \in K$$

o que implica em

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i a_{ji} e_j \ , \quad \text{logo}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [c_j - \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ji}] e_j = 0$$

Pela independência dos *ei's*

$$c_j - \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ji} = 0 \quad \text{e}$$

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ji}.$$

Assim, se sabemos o efeito da transformação f nos elementos da base (isto é, conhecemos os escalares a_{ji} da expressão $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$) então podemos calcular os componentes c_j da expressão $f(u) = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ a partir dos elementos b_i fornecidos em $u = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$.

Em resumo, o conjunto de escalares a_{ji} caracterizam a transformação f e podem ser convenientemente dispostos numa $n \times n$ matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

onde a i-ésima coluna de A são os componentes de $f(e_i)$ na base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Também, podemos calcular o efeito da transformação f usando a multiplicação de matrizes como segue:

$$f(u) = A.u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Assim, para cada transformação linear f de V em V fica determinada uma matriz que a representa e, na verdade, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todas as transformações lineares de V em V e o conjunto de todas as matrizes de ordem igual à dimensão de V.

Teorema 1 Sejam $f, g : V \to V$ transformações lineares e β uma base de V.

Considere $[f]_\beta = A, \quad [g]_\beta = B$.

Então $f \circ g : V \to V$ é uma transformaçào linear e $[f \circ g]_\beta = A.B$

Para uma demonstração veja [14].

1.4 Subespaços Invariantes

Definição 8 (Subespaços Invariantes)

Seja $f : V \to V$ uma transformação linear. Um subespaço $W \subset V$ é dito invariante por f se $f(W) \subset W$, isto é, se $f(w) \in W$ para todo $w \in W$.

Lema 1 Um subespaço F de dimensão 1 de V é invariante por f se e somente se existe $\lambda \in R$ tal que $f(v) = \lambda v$ para todo $v \in F$.

De fato, fixando $u \neq 0$ em F, todos os demais elementos de F são da forma αu, com $\alpha \in R$.

Como $f(u) \in F$ temos que $f(u) = \lambda u$ para algum $\lambda \in R$.

Para qualquer outro $v \in F$ vale que $v = \beta u$.

Logo, $f(v) = f(\beta u) = \beta f(u) = \beta\lambda u = \lambda\beta u = \lambda v$, isto é, $f(v) = \lambda v$ com o mesmo λ.

Também, se u e v são linearmente independentes em V, o subespaço F gerado por u e v (plano contendo a origem) é invariante por f se e somente se $f(u) \in F$ e $f(v) \in F$, isto é, $f(u) = \alpha u + \beta v$ e $f(v) = \gamma u + \delta v$.

1.5 Autovalores e Autovetores

Definição 9 (Autovalores e Autovetores)

Seja $f: V \to V$ uma transformação linear. Um vetor $v \neq 0 \in V$ é dito um auto-vetor de f se existe $\lambda \in R$ tal que $f(v) = \lambda v$.

O valor $\lambda \in R$ é dito um auto-valor de f se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Dizemos então que o o auto-valor λ corresponde, ou pertence, ao auto-vetor v (e vice-versa).

É importante notar que se $v \neq 0$ é um auto-vetor de f então todo múltiplo $w = mv$ de v também o é pois

$$f(w) = f(mv) = mf(v) = m\lambda v.$$

Assim, encontrar um auto-vetor (equivalentemente, um auto-valor) de f é o mesmo que achar um subespaço de dimensão 1 que é invariante por f.

A igualdade $f(v) = \lambda v$ equivale a $(f - \lambda I)v = 0$. Logo, v é um auto-vetor de f se e somente se é um elemento não-nulo do núcleo de $(f - \lambda I)$. Em outras palavras, a fim de que λ seja um auto-valor de f é necessário e suficiente que o operador $(f - \lambda I)$ não possua inverso,ou seja, que $\det[(f - \lambda I)] = 0$.

O polinômio $p(\lambda)$ em λ obtido da igualdade acima é chamado de polinômio característico de f e tem grau igual à dimensão de V. Vale também que, independente da base escolhida para V, $p(\lambda)$ não muda e suas raízes são os auto-valores de f. A auto-valores distintos de f correspondem auto-vetores linearmente independentes.

Como todo polinômio se fatora em C em fatores lineares e em R em fatores de grau 1 ou 2, toda transformação linear possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2.

Se a dimensão de V é igual a n e f tem n auto-valores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ então existe uma base de V, constituída dos auto-vetores de f, em relação à qual a matriz de f é diagonal:

$$[f] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Se na fatoração de $p(\lambda)$ em R aparecem fatores de grau 2, consequentemente em C estes fatores se decompõe em fatores lineares do tipo $[\lambda - (m + ni)][\lambda - (m - ni)]$ e

$m + ni$ é um auto-valor (com $n \neq 0$) correspondente a um auto-vetor $u + iv$ de f (considerada no espaço complexo) e então $\{u, v\}$ é base para um subspaço invariante (do espaço real) e a matriz de f restrita a este subespaço é (veja [14], pag 275)

$$[f] = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}.$$

1.6 Produto Interno

Definição 10 (Produto Interno)

Seja V um espaço vetorial sobre K. Um produto interno em V é uma função

$$< >: V \times V \to K$$

satisfazendo a :

a) $< u,u > \geq 0$ e $< u,u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$, $\forall\, u \in V$;

b) $< u,v >= \overline{< v,u >}$, $\forall\ u,v \in V$; $(*)$

c) $< u,\alpha v >= \overline{\alpha} < u,v >$, $\forall\ u,v \in V, \forall\ \alpha \in K$; $(*)$

d) $< u,v+w > = < u,v > + < u,w >$, $\forall\ u,v,w \in V.$

$(*)$onde a barra indica a conjugação complexa

Teorema 2 Se V é um espaço vetorial sobre K munido de um produto interno $< >$, então a função :

$$\begin{aligned} f: V &\to K \\ u &\to f(u) = \sqrt{< u,u >} \end{aligned}$$

é uma norma em V, denominada norma proveniente de produto interno ou norma euclidiana.

Para uma demonstração, veja [14]

Exemplo 3 Se $V = K^n, u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$, então a função

$$\begin{aligned} < >: V \times V &\to K \\ (u,v) &\to < u,v > = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \end{aligned}$$

é um produto interno em V, denominado o produto interno canônico.

A norma associada é

$$\begin{aligned} f: \ & V \rightarrow K \\ & u \rightarrow f(u) = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2} \end{aligned}$$

Definição 11 (Vetores Ortogonais, Conjunto Ortogonal, Conjunto Ortonormal)

Seja V um espaço vetorial sobre K munido de um produto interno $< >$, $\| \ \|$ a norma associada a $< \ >$, $u, v \in V$ não nulos . Dizemos que u e v são ortogonais em V se $< u, v >= 0$.

Este conceito é inspirado no que ocorre quando $V = R^2$ e definimos o ângulo θ entre u e v por

$$cos\, \theta = \frac{< u, v >}{\|u\| \, \|v\|}$$

Geometricamente u e v são ortogonais no R^2 se o ângulo θ entre eles é de ± 90 graus (equivalentemente, o cosseno de θ é zero). Pela expressão acima, como u e v são não nulos, u e v são ortogonais se $< u, v >= 0$.

Por extensão, dizemos que um conjunto $A \subset V$ é ortogonal se seus elementos são mutuamente ortogonais, isto é, $< u, v >= 0 \ \forall \ u, v \in A$ com $u \neq v$ e que A é ortonormal se é ortogonal e $< u, u >= 1$, $\forall \ u \in A$.

Definição 12 (Complemento Ortogonal)

Seja V um espaço vetorial sobre K munido de um produto interno $< >$ e $F \subset V$ um subspaço. O complemento orotogonal de F é o conjunto

$$F^{\perp} = \{v \in V \text{ tais que} < u, v > = 0 \ , \forall u \in F\}$$

1.7 Estruturas Algébricas e Álgebras

Definição 12 (Sistema de Números) (informal)

Um sistema de números é uma coleção de objetos para os quais:

- existe uma definição de quais são os objetos e o que significa dizer que dois objetos são iguais

- existe uma regra para somar e multiplicar dois objetos

- estas regras para adição e multiplicação satisfazem propriedades familiares da aritmética como comutatividade, associatividade e distributividade.

Definição 13 (Álgebra)

Uma álgebra sobre um corpo K é um espaço vetorial V de dimensão finita sobre K munido de um produto bilinear

$$.: \ V \times V \to V$$

$$(u,v) \to u.v$$

isto é,

a) $u.(v+w) = u.v + u.w \quad , \qquad \forall\ u,v,w \in V;$

b) $(u+v).w = u.w + v.w \quad , \qquad \forall\ u,v,w \in V;$

c) $(\alpha u).v = u.(\alpha v) = \alpha(u.v) \quad , \qquad \forall\ u,v \in V, \quad \forall\ \alpha \in K.$

Novamente, por simplicidade, denotamos $u.v$ como uv

Definição 14 (Elemento Identidade de uma Álgebra)

Nas condições acima, se existe um elemento $\mu \in V$ tal que

$$\mu v = v\mu = v \qquad , \qquad \forall v \in V,$$

dizemos que μ é um elemento identidade de V. Na verdade, se existe um elemento que satisfaça a definição é fácil mostrar que ele é único.

Definição 15 (Álgebra Associativa)

Nas condições acima, V é dito uma álgebra associativa se

$$u(vw) = (uv)w \qquad , \qquad \forall\ \ u,v,w \in V.$$

Definição 16 (Álgebra Comutativa)

Nas condições acima, V é dito uma álgebra comutativa se

$$uv = vu \qquad , \qquad \forall\ \ u,v \in V.$$

Definição 17 (Álgebra de Divisão)

Uma álgebra de divisão é uma álgebra tal que o produto

$uv = 0$ se e somente se $u = 0$ ou $v = 0$, $\forall\ u, v \in V$,

ou, equivalentemente, se e somente se as aplicações lineares

$$\begin{array}{lcl} V \to V & \qquad & V \to V \\ x \to xb & & x \to ax \end{array}$$

são injetivas quando a e b são não nulos (e portanto bijetivas)

Definição 18 (Álgebra Normada)

Uma álgebra V é dita uma álgebra normada se V está munido de uma norma $\|\ \ \|$ que satisfaz a:

$\|st\| = \|s\|\,\|t\|$, para todo $s, t \in V$.

1.8 Um pouco de História

A concepção dos hipercomplexos e seus desdobramentos faz parte daqueles temas que atravessam os séculos, o que torna o conhecimento de sua história uma ferramenta importante para a apreciação dos resultados obtidos.

No Princípio era o Verbo...

O conceito primitivo de número faz parte da atividade mental humana elementar, como relação de correspondência entre objetos de duas coleções. O número natural nasceu da necessidade de se comparar grandezas discretas e as combinações dessas grandezas deram origem à idéia de operações sobre números. Durante muito tempo os números não passaram de auxiliares práticos nas medidas, nas trocas comerciais e nas combinações do calendário, sempre atrelados a justificar sua existência por representarem relações entre grandezas.

Um marco distinguido é dado pela escola de Pitágoras (sec. VI e V a.C.) onde vemos surgir uma verdadeira ciência do número puro, distinguindo categoricamente os números como auxiliares do cálculo dos números considerados em si mesmo, entidades abstratas e com propriedades.

Assim, ao longo da história, a origem e a extensão progressiva da noção de número estão associadas às necessidades da prática e só muito mais tarde esta noção adquiriu existência própria e forma lógica.

Os Numeros Negativos

As formulações dos números negativos e dos números complexos apareceram mais ou menos simultaneamente.

A origem histórica da nocão de número negativo se encontra na necessidade de interpretar o resultado de uma subtração do tipo $a - b$ quando a é menor que b.

A concepção dos gregos excluía expressamente este caso mas os matemáticos indianos, que não valorizavam o rigor lógico, já no século VII calculavam com números negativos e no século XII distiguiam os valores positivo e negativo de uma raiz quadrada.

No ocidente, a primeira interpretação dos números negativos aparece com Nicolas Chuquet (1445-1488), no século XV, mas por muito tempo ainda os matemáticos, sobretudo aqueles que conservavam os hábitos de pensamento da tradição grega, hesitavam em aceitá-los.

O número negativo é definitivamente aceito quando os geômetras compreeendem que em certas classes de grandeza, como as distancias sobre uma linha reta ou as durações no tempo, há a considerar dois sentidos opostos, o que é exemplificado por Albert Girard (1595-1632) quando afirma em sua *Invention nouvelle em l'algèbre*, publicada em 1629, que *a solucão negativa se explica em geometria retrocedendo e o – recua onde o + avança.*

Os Números Complexos

Um fato realmente surpreendente que a história da matemática nos apresenta é este: antes dos números negativos serem considerados como verdadeiros números, já eram praticadas e conhecidas quase todas as regras sobre números complexos, coisa que parece simplesmente absurda, uma vez que os números complexos resultam de raízes quadradas de números negativos.

Segundo [4], o primeiro exemplo de raiz quadrada de número negativo foi publicado aproximadamente em 75 DC por Heron de Alexandria (10 -75 dC), num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide onde surge o número $\sqrt{81-144}$, que, não provocando problemas de maior monta, simplesmente foi trocado por $\sqrt{144-81}$.

Em **1545** o matemático italiano Gerônimo Cardano (1465-1526) publicou a *Ars Magna*, um livro que na época era o maior compêndio algébrico existente. Neste livro, entre diversas outras idéias e descobertas que impulsionaram o estudo da Álgebra, foi apresentada a fórmula para resolução da equação de 3° grau, famosa não só por sua conhecida briga e disputa com Tartaglia pela autoria mas principalmente por suas conseqüências no surgimento dos números complexos.

A fórmula em questão afirmava que, dada uma equação do 3° grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

(vale lembrar que qualquer equação na forma geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode ser colocada nesta forma),

uma solução x é dada por :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left[\frac{q}{2}\right]^2 + \left[\frac{p}{3}\right]^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left[\frac{q}{2}\right]^2 + \left[\frac{p}{3}\right]^3}}\,.$$

Mas o fato é que a aplicação desta fórmula em problemas práticos logo começou a apresentar resultados que desafiavam o entendimento dos matemáticos da época.

Por exemplo, para a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

por simples verificação constata-se que $x = 4$ é uma de suas raízes. As outras duas, menos evidentes, são

$$-2 + \sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad -2 - \sqrt{3}\,.$$

Entretanto, se tentarmos resolvê-la pela fórmula de Cardano teremos

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

e caímos não apenas na extração de raízes quadradas de números negativos mas também na extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida.

Aqui estava uma questão realmente séria e que não poderia ser simplesmente ignorada.

Quando nas equações de 2° grau a fórmula de Baskara (1114-1185) levava a raízes quadradas de números negativos, era fácil, e de uso corrente, dizer que aquilo indicava a inexistência de soluções.

Agora, no entanto, estava-se diante de equações do 3° grau com soluções evidentes, mas cuja determinação passava pelo caminho considerado impossível ou inexistente até então .

Os fatos indicavam claramente que os números com que a Matemática vinha trabalhando há séculos já não eram mais suficientes para o estudo da Álgebra.

O que estava havendo em meados do século XVI era algo semelhante ao que ocorrera no tempo de Pitágoras: uma necessidade da extensão do conceito de número e as perplexidades que acompanhavam tal fato.

O homem que conseguiu atravessar a ponte que levava aos novos números foi Rafael Bombelli (1526-1572). Ele procurava conciliar os resultados

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

obtidos pela fórmula da Cardano para a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

com a raiz $x = 4$, constatada pela simples observação.

Em **1572**, conforme ele mesmo revelou em seu livro *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica*, seu método baseou-se no pensamento segundo o qual

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

deveriam ser números da forma

$$a+\sqrt{-b} \quad \text{e} \quad a-\sqrt{-b}.$$

Assim supondo escreveu

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b} \quad \text{e}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b},$$

de onde deduziu que $a = 2$ e $b = 1$ pois

$$\left[2+\sqrt{-1}\right]^3 = 2+\sqrt{-121} \quad \text{e}$$

$$\left[2-\sqrt{-1}\right]^3 = 2-\sqrt{-121}.$$

Assim,

$$x = \left[2+\sqrt{-1}\right] + \left[2-\sqrt{-1}\right] = 4$$

como se desejava obter.

Ao realizar seus cálculos, Bombelli também criou as seguinte regras para se operar com $\sqrt{-1}$:

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$$

$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1$$

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1$$

$$(\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$$

$$(\pm 1)(-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}$$

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $m + n\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}.$$

Estavam assim lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da matemática, a teoria dos números complexos e, mais ainda, para um fértil terreno de desdobramentos, parte do qual é objeto do nosso estudo.

Foram quase 300 anos entre o passo desencadeado por Cardano (em 1545) até a formulação que conhecemos atualmente dos números complexos, percorridos muitas vezes quase que por uma questão de fé e dos quais citamos a seguir os marcos principais.

Em **1629** Albert Girard utiliza, efetivamente, o símbolo $\sqrt{-1}$ quando enuncia as relações entre raízes e coeficientes de uma equação.

Os termos real e imaginário foram empregues pela primeira vez em **1637** por René Descartes (1596-1650).

O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler (1707-1783) num manuscrito datado de 1777 mas só publicado em **1794.**

Para os matemáticos do século XVIII a notação $\sqrt{-1}$ era desprovida de qualquer sentido mas era usada no sentido de uma ficção conveniente, que podia ser utilizado nos cálculos como um intermediário cômodo, para se obter as relações procuradas entre as quantidades reais, adotando-se um ponto de vista que lembra o dos hindus e traduz a tendência do algoritmo algébrico a se tornar um formalismo puro.

O dinamarquês Caspar Wessel (1745-1818), em **1797**, foi o primeiro a representar geometricamente os números complexos, estabelecendo uma correspondência bijectiva entre números complexos e pontos do plano, o que, de certa forma, segue a linha da representação dos números reais numa reta.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em **1799**, usou a interpretação geométrica dos números complexos como pontos do plano.

O símbolo *i* foi tornando-se aceito após o seu uso por Gauss em **1801**.

O trabalho de Wessel foi largado ao esquecimento, por ter sido publicado em dinamarquês, e só anos depois, por volta de **1806**, com outro trabalho, agora publicado em francês por Jean Robert Argand(1768-1822) e que criava a mesma representação, os resultados ficaram conhecidos e a glória, indevida, ligada ao nome de Argand até os nossos tempos.

Em **1828**, George Green (1793-1841) descobriu as Funções de Green que descrevem as bases matemáticas da Física Harmônica. Funções de Green podem ser usadas com respeito a qualquer Álgebra de Divisão. Na ocasião em que Green as descobriu, as únicas Álgebras de Divisão conhecidas eram os Reais e Complexos. Green usuou suas funções para descrever a Teoria Potencial do Eletromagnetismo.

A expressão *número complexo* foi introduzida por Gauss em **1832**.

Finalmente Willian Rowan Hamilton (1805-1865), em **1833**, mostrou que o conjunto dos pares de números reais, juntamente com a definição de uma multiplicação apropriada, formam um sistema numérico e aquele misterioso *i* de Euler pode ser simplesmente interpretado como um desses pares de números. Este é o ponto a partir do qual a moderna formulação dos números complexos pode ser considerada como tendo seu início.

O mesmo Hamilton, anos mais tarde, criaria os números quatérnios, a primeira entre as várias generalizações possíveis que se insinuaram diante desta formulação algébrica e geométrica dos números complexos e que são o objeto de nosso estudo, como citamos na introdução.

Em **1843**, a Álgebra de Divisão dos quatérnios foi descoberta por Hamilton (1805-1865).

Em **1844**, Produtos Geométricos Exteriores e Interiores n-dimensionais foram introduzidos por Hermann Günter Grassmann (1809-1877).

Em **1845**, a Álgebra de Divisão dos octônios foi descoberta por John Graves e Arthur Cayley (1821-1895), que também fundamentou a Álgebra de Matrizes.

Em seu curso de **1863** na Universidade de Berlim, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) demonstrou que uma nova extensão da noção de número é impossível se quisermos que a adição, a multiplicação, a subtração e a divisão conservem as mesmas propriedades que possuem sobre os números reais, isto é, os números complexos são a única extensão de corpo de dimensão finita sobre os reais que preserva todas as leis da aritmética.

Em **1858** Cayley introduziu as matrizes, sua adição, multiplicação, zero e identidade. Mostrou também que os quatérnios podem ser formulados em termos de matrizes.

Em **1864**, James Clerk Maxwell (1831-1901) formulou as equações de Eletromagnetismo que ele escreveu na forma de Números Complexos e Vetores em seu artigo: *" Uma teoria dinâmica do campo eletromagnético "*.

Em **1867**, Peter Guthrie Tait (1831-1901) escreveu seu livro sobre os Quaternions, e Maxwell e Tait discutiram os quatérnios em sua correspondência.

Em novembro de **1870**, Maxwell escreveu um manuscrito sobre a Aplicação dos quatérnios ao Eletromagnetismo onde diz :

"... A invenção do Cálculo dos Quaternions por Hamilton é um passo para o conhecimento de quantidades relacionadas ao espaço que só pode ser comparada, pela sua importância, com a invenção de coordenadas triplas por Descartes.

Nesta época, Maxwell tinha uma idéia clara de que ondas deveriam ter uma parte escalar e uma vetorial e usou isto na sua formulação quaterniônica das equações de Eletromagnetismo.

Em **1870** Benjamim Peirce (1809-1880) publica *Linear Associative Algebras*, um dos primeiros estudos sistemáticos dos números hipercomplexos, trabalhando com tábuas de multiplicação de 162 álgebras. Seu filho, Charles Sanders Peirce (1839-1914), mostrou que dentre todas as álgebras com dimensão menor que 7, existem apenas 3 que são álgebras de divisão, os reais, os complexos e os quatérnios.

Em **1878** Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) provou que as únicas álgebras de divisão associativas sobre R são R, C e H.

Em **1879** William Kingdon Clifford (1845-1879) publica *Applications of Grassmann's Extensive Algebra* propondo uma modificação na álgebra de Grassmann e formulando o que hoje é conhecido como álgebras de Clifford.

Em **1898** Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) redescobre (independentemente) as álgebras de Clifford mas é o primeiro a aplicá-las a rotações em espaços euclidianos.

Em **1898** Adolf Hurwitz (1859-1919) demonstrou que as únicas álgebras normadas sobre R com elemento identidade são R, C, H e K.

Em **1957** Raoul Bott (1923-) e John Willard Milnor (1931-) provaram que a única álgebra de divisão adicional sobre R é a álgebra dos Números de Cayley, que forma um espaço vetorial de dimensão 8 sobre R.

Capítulo 2

Como falamos na introdução, a concepção dos hipercomplexos consiste no prolongamento da noção de número complexo, dando origem a diversos sistemas algébricos.

No que se segue, iremos mostrar algumas construções de dois destes sistemas: os quatérnios H e os octônios K. Primeiro por intemédio do fornecimento de tabelas de multiplicação das unidades básicas, o que se aproxima das idéias de Grassmann. Depois usando a chamada construção de Cayley-Dickson, que produz uma seqüência infinita de álgebras, cada uma delas a partir da anterior, duplicando-se a dimensão em cada etapa. Em particular, esta construção deixa claro porque H é não comutativa e K é não associativa.

É bastante conhecida a história de como Hamilton inventou os quatérnios. Fascinado pela relação entre os números complexos e a geometria do plano R^2, ele tentou por muitos anos propor uma estrutura maior que fizesse um papel similar em dimensão 3. Na linguagem moderna, isto significa que ele estava procurando uma álgebra de divisão normada tridimensional. Um dos resultados mais importantes deste capítulo é mostrar que isto era realmente impossível e não é por acaso que o primeiro caso de hipercomplexos com as propriedades desejadas é de dimensão 4.

As principais referências para este capítulo são [1], [2], [7], [9] e [19].

2.1 A Construção de Grassmann

O raciocínio começa por observar que um número complexo

$$a + bi$$

pode ser considerado como um número generalizado do tipo

$$ae_1 + be_2$$

no qual $e_1 = 1$ e $e_2 = i$ são unidades simbólicas, sujeitas às seguintes regras de multiplicação:

$*$	1	i
1	1	i
i	i	-1

Generalizando está idéia, um hipercomplexo é representado por uma expressão do tipo

$$a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$$

em que $a_1, \ldots, a_n$ são números reais e $e_1, \ldots, e_n$ são n unidades fundamentais da álgebra que se está desejando construir, sujeitas a regras especias de cálculo.

A ideia geral é proceder como para polinômios em $e_1, \ldots, e_n$.

Assim, é fácil definir a igualdade e a adição desses números, de modo que associatividade e comutatividade sejam satisfeitas.

Para fazer com que o produto de dois hipercomplexos seja também um hipercomplexo, é preciso construir a tábua de multiplicação para as unidades $e_1, \ldots, e_n$. O grau de liberdade é considerável e pode-se criar diferentes álgebras construindo-se diferentes tábuas de multiplicação. A escolha é governada pelas propriedades que se deseja preservar.

No que diz respeito à multiplicação, por exemplo, mostra-se que quando $n > 2$ e se deseja que a divisão seja unívoca e o produto de dois elementos do sistema só seja nulo quando pelo menos um deles o for então é necessário definir o produto das unidades $e_1, \ldots, e_n$ obrigatoriamente sacrificando uma ou mais das suas propriedades primitivas.

Embora este tipo de construção aparentemente produza uma fábrica de álgebras com qualquer dimensão que se queira de forma bastante natural, o fato é que à medida em que a dimensão vai aumentando torna-se cada vez mais trabalhoso definir operações e demonstrar propriedades apenas a partir de uma tabela relacionando as operações entre as unidades básicas. Para se ter uma idéia, nos complexos, com duas unidades básicas, o produto entre dois elementos quausquer envolve quatro produtos de dois fatores reais cada. Nos quatérnios, com 4 unidades básicas, o produto de dois deles já é expresso com o auxílio de 16 produtos. Para os octônios já serão 64 produtos e assim sucessivamente.

Assim, embora instrutiva e bastante intuitiva, a forma álgebrica inspirada nas idéias de Grassmann será usada o mínimo possível e só na medida em que representar um caminho mais claro no contexto dos fatos. Alguns destes citamos a seguir.

De uma forma geral, se $X = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ é um hipercomplexo onde $e_1 = 1$ e $a_1, \ldots, a_n$ são números reais , podemos escrever

$X = a_1e_1 + (a_2e_2 \ldots + a_ne_n)$ e definimos:

$a_1e_1 = S(X)$ como sendo a parte escalr de X,

$(a_2e_2 \ldots + a_ne_n) = V(X)$ como sendo a parte vetorial de X, e desta forma X pode ser escrito resumidamente como

$$X = S(X) + V(X).$$

É importante observar que $S(X)$ sempre é um número real e que X é um número real se e somente se $V(X)$ é zero ou, equivalentemente, $X = S(X)$.

À medida em que formos apresentando outros conceitos relacionados aos hipercomplexos, algumas propriedades serão imediatamente verificadas a partir destas simples considerações iniciais.

2.1.1 Números Complexos

Forma Álgebrica

Tradicionalmente, um número complexo é um número das forma $Z = a + bi$ onde a e b são números reais e i é uma unidade simbólica satisfazendo a $i^2 = -1$.

O conjunto dos números complexos pode ser definido então como:

$$C = \{Z = a + bi \,/\, a, b \in R \;\; e \;\; i^2 = -1\}.$$

Representação Geométrica

Na tradição iniciada por Wessel, fazemos a identificação geométrica de ca... número complexo

$Z = a + bi$ com o par ordenado (a, b).

Uma das primeiras vantagens desta identificação é poder ver o número complexo Z também como o vetor com origem em $(0,0)$ e término em (a, b).

Operações

Dados

$Z = a + bi$ e

$W = c + di$

as definições de adição e multiplicação são, respectivamente :

$$Z + W = (a + c) + (b + d)i \;\; ; \qquad (1)$$

$$Z.W = (ac - bd) + (ad + bc)i\,. \qquad (2)$$

Parte Escalar e Parte Vetorial

Dado $Z = a + bi$, denominamos

a como sendo a parte escalar de Z, denotada por $S(Z)$ e

b como sendo a parte vetorial (ou imaginária) de Z, denotada por $V(Z)$.

Conjugado

Dado $Z = a + bi$, definimos o conjugado de Z por

$a - bi = S(Z) - V(Z)$, denotado por $\overline{Z}$.

Norma, Argumento e Forma Polar

Para cada $Z \neq 0$, definindo θ como o ângulo orientado no sentido anti-horário determinado pelo semi-eixo positivo das abcissas e o vetor $\overrightarrow{OZ}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e norma de Z (denotado por $N(Z)$ ou $\|Z\|$) como a medida do segmento $\overline{OZ}$, obtemos :

$$[N(Z)]^2 = a^2 + b^2.$$

Se $N(Z) = 1$ dizemos que Z é um número complexo unitário.

O ângulo θ é denominado de argumento de Z e é fácil ver que

$$cos\,\theta = \frac{a}{N(Z)}, \qquad sen\,\theta = \frac{b}{N(Z)}, \qquad \theta = arctg\,\frac{b}{a} \quad se \quad a \neq 0 \quad \text{e}$$

$$Z = a + bi = N(Z)\cos\theta + i\,N(Z)\,sen\,\theta = N(Z)[\cos\theta + i\,sen\,\theta],$$

conhecida como a forma polar de Z.

Desta forma um número complexo também fica completamente determinado pela sua norma e argumento.

Propriedades

Dados Z e $W \in C$ vale que:

a)$S(ZW) = S(WZ)$

b)$N(Z.W) = N(Z).N(W)$

c) $\overline{Z+W} = \overline{Z} + \overline{W}$

d) $\overline{Z.W} = \overline{Z}.\overline{W}$

e) $[N(Z)]^2 = Z.\overline{Z}$

f) Z pode ser escrito como $Z = N(Z).[cos\theta + i\, sen\theta]$ onde $0 \leq \theta < 2\pi$.

Demonstração de f)

Se $Z = a + bi \neq 0$, basta tomar $Z' = \frac{a}{N(Z)} + \frac{b}{N(Z)}\, i$.

Daí, $Z = N(Z).Z'$.

2.1.2 Números de Hamilton (Quatérnios)

Forma Álgebrica

Um número quatérnio é um número das forma $q = a + bi + cj + dk$ onde a, b, c, d são números reais e i , j , k são unidades simbólicas satisfazendo a

*	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

O conjunto dos Quatérnios é então :

$$H = \{q = a + bi + cj + dk \,/\, a, b, c, d \in R \;\; e \;\; i^2 = j^2 = k^2 = (ijk)^2 = -1\}$$

Representação Geométrica

Existe uma identificação natural de cada número quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ com $(a, b, c, d) \in R^4$ mas, evidentemente, perdemos a visão geométrica intuitiva neste contexto. No entanto, veremos que fazendo a restrição para subspaços de dimensão 3 ganhamos ferramentas para caracterizar movimentos no espaço.

Operações

Dados

$p = a + bi + cj + dk$

$q = m + ni + rj + sk$

Fazendo

$$A = am - bn - cr - ds \qquad B = an + bm + cs - dr$$
$$C = cm + dn + ar - bs \qquad D = dm - cn + br + as$$

As definições de adição e multiplicação são, respectivamente :

$$p + q = (a + m) + (b + n)i + (c + r)j + (d + s)k \quad (3)$$

$$p.q = A + Bi + Cj + Dk \quad (4)$$

Observa-se claramente que a multiplicação de quatérnios não é comutativa, como já era esperado a partir da própria tábua de definição do produto das unidades fundamentais. De fato

$$q.p = A + (an + bm + cs - dr)i + (ar + cm + dn - bs)j + (as + br + dm - cn)k$$

Parte Escalar e Parte Vetorial

Dado $q = a + bi + cj + dk$, denominamos:

a como sendo a parte escalar de q, denotada por $S(q)$ e

$bi + cj + dk$ como sendo a parte vetorial (ou imaginária) de q, denotada por $V(q)$.

Conjugado

Dado $q = a + bi + cj + dk$, definimos o conjugado de q por

$a - bi - cj - dk = S(q) - V(q)$, denotado por $\overline{q}$.

Norma, Argumento e Forma Polar

Podemos associar também a cada número de Hamilton q uma norma

$$N(q) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

e um ângulo sólido não orientado θ dado por

$$cos\, \theta = \frac{a}{N(q)} \quad , \quad sen\, \theta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{N(q)}.$$

Note que θ está bem definido pois

$$-1 \leq cos\, \theta \leq 1 \quad , \quad 0 \leq sen\, \theta \leq 1 \quad , \quad cos^2\theta + sen^2\theta = 1,$$

e existe um único θ, $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisfaz estas condições.

Se $N(q) = 1$ dizemos que q é um número quatérnio unitário.

Propriedades

Dados q e $p \in H$ vale que

a) $S(p.q) = S(q.p)$

b) $N(p.q) = N(p)N(q)$

c) $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$

d) $\overline{p.q} = \overline{q}.\overline{p}$

e) $[N(q)]^2 = q.\overline{q}$

f) q pode ser escrito como

$q = N(q)[cos\,\theta + q'sen\,\theta]$ onde $N(q') = 1$, q' imaginário puro e θ é o ângulo associado a q, que é conhecida como a "forma polar" de q.

Demonstração f)

Considere

$$q = a + bi + cj + dk \ , \ cos\,\theta = \frac{a}{N(q)} \quad , \quad sen\,\theta = \frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{N(q)}$$

Tome

$$q' = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\,i + \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\,j + \frac{d}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\,k = Bi + Cj + Dk,$$

onde $B = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$, $C = \dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$ e $D = \dfrac{d}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$

Assim,

$N(q') = \sqrt{B^2+C^2+D^2} = 1$ e

$q = a + bi + cj + dk = N(q)cos\theta + [\sqrt{b^2+c^2+d^2}\,].[Bi + Cj + Dk] =$

$= N(q)cos\theta +.[\sqrt{b^2+c^2+d^2}\,].q' =$

$= N(q)cos\theta + [N(q)sen\theta].q' = N(q)\ [cos\theta + q'.sen\theta].$

2.1.3 Números de Cayley (Octônios)

Forma Álgebrica

Os octônios formam uma álgebra de dimensão 8 com base $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7,\}$ e multiplicação dada na tábua abaixo, que descreve o resultado de multiplicar o elemento da i-ésima linha pelo elemento da j-ésima coluna.

Um octônio é um número da forma

$$\alpha = a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7$$

onde a, b, c, d, e, f, g, h são números reais e $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$, são unidades simbólicas satisfazendo a tábua a seguir

*	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_4	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Tábua 1 - Multiplicação dos octônios

Infelizmente, esta tabela é quase completamente obscura quanto aos motivos de suas escolhas, diferentemente do que ocorre com C e H, onde os resultados das operações entre os elementos básicos quase que se impõem. Ao exibir esta tabela provavelmente Cayley já estava usando, sem mencionar, a construção que hoje é conhecida como de Cayley-Dickson e a formulação matricial que veremos adiante. No entanto, algumas coisas interessantes que se pode perceber facilmente por seu intermédio são :

- $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ são raízes quadradas de -1.
- e_i e e_j , não comutam quando $i \neq j$ e

$$e_i\, e_j = -e_j\, e_i.$$

- a identidade cíclica dos índices

$$e_i\, e_j = e_k \quad \Rightarrow \quad e_{i+1}\, e_{j+1} = e_{k+1} \quad , \qquad \text{com } i\,,j \in Z_7.$$

- a identidade dos índices duplos

$$e_i\, e_j = e_k \quad \Rightarrow \quad e_{2i}\, e_{2j} = e_{2k} \quad , \qquad \text{com } i\,,j \in Z_7.$$

O conjunto dos octônios é denotado por K

$$K = \{\alpha = a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7 \,/\, a,b,c,d,e,f,g,h \in R\}$$

Representação Geométrica

Novamente somos tentados a fazer a identificação de cada octônio

$$\alpha = a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7 \text{ com } (a,b,c,d,e,f,g,h) \in R^8.$$

Analogamente ao que ocorre com os quatérnios, identificações mais significativas e os fatos mais interessantes necessitam de ferramentas adicionais, descritas mais adiante, a fim de serem apreciados.

Operações

Dados

$$\alpha = a + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7$$

$$\beta = b + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6 + b_7e_7$$

As definições de adição e multiplicação são, respectivamente :

$$\alpha + \beta = (a+b) + (a_1+b_1)e_1 + \ldots.. + (a_7+b_7)e_7 \qquad (5)$$

$$\alpha.\beta == A_0 + A_1e_1 + \ldots.. + A_7e_7 \quad , \qquad (6)$$

onde

$$A_0 = ab - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - a_7b_7,$$

$$A_1 = (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_4b_5 - a_5b_4) + (a_7b_6 - a_6b_7) + (ab_1 + a_1b),$$

$$A_2 = (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_4b_6 - a_6b_4) + (a_5b_7 - a_7b_5) + (ab_2 + a_2b),$$

$$A_3 = (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_6b_5 - a_5b_6) + (a_4b_7 - a_7b_4) + (ab_3 + a_3b),$$

$$A_4 = (a_5b_1 - a_1b_5) + (a_6b_2 - a_2b_6) + (a_7b_3 - a_3b_7) + (ab_4 + a_4b),$$

$$A_5 = (a_1b_4 - a_4b_1) + (a_3b_6 - a_6b_3) + (a_7b_2 - a_2b_7) + (ab_5 + a_5b),$$

$A_6 = (a_2b_4 - a_4b_2) + (a_5b_3 - a_3b_5) + (a_1b_7 - a_7b_1) + (ab_6 + a_6b),$

$A_7 = (a_2b_5 - a_5b_2) + (a_3b_4 - a_4b_3) + (a_6b_1 - a_1b_6) + (ab_7 + a_7b).$

Parte Escalar e Parte Vetorial

Dado $\alpha = a + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7$, denominamos:

a como sendo a parte escalar de α, denotada por $S(\alpha)$ e

$(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7)$ como sendo a parte vetorial de α, denotada por $V(\alpha)$.

Conjugado

Dado $\alpha = a + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7$, o conjugado de α é

$a - (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7) = S(a) - V(a)$, denotado por $\overline{\alpha}$.

Norma, Argumento e Forma Polar

Podemos associar também a cada octônio

$\alpha = a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7$

uma norma $N(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}$

e um ângulo sólido não orientado θ dado por

$$cos\,\theta = \frac{a}{N(\alpha)} \quad , \quad sen\,\theta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}}{N(\alpha)}.$$

Note que θ está bem definido pois

$-1 \leq cos\,\theta \leq 1 \quad , \quad 0 \leq sen\,\theta \leq 1 \quad , \quad cos^2\theta + sen^2\theta = 1,$

e existe um único $\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi$ que satisfaz estas condições.

Se $N(\alpha) = 1$ dizemos que α é um octônio unitário.

Propriedades

Dados α e $\beta \in K$ vale que

a) $S(\alpha.\beta) = S(\beta.\alpha)$

b) $N(\alpha.\beta) = N(\alpha).N(\beta)$

c) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

d) $\overline{\alpha.\beta} = \overline{\beta}.\overline{\alpha}$

e) $[N(\alpha)]^2 = \alpha.\overline{\alpha}$

f) α pode ser escrito como

$\alpha = N(\alpha)[cos\,\theta + \alpha' sen\,\theta]$ onde $N(\alpha') = 1$ e θ é o ângulo associado a α,

que é conhecida como a "forma polar" de α.

2.2 A Construção de Cayley-Dickson

2.2.1 Uma Visão Intuitiva

Como Hamilton observou, o número complexo $Z = a + bi$ pode ser visto como um par (a,b) de números reais. Neste contexto, a adição e a multiplicação ficam definidas por :

$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$

$(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

E o conjugado de Z fica :

$\overline{Z} = (a, -b)$

Podemos então definir os quatérnios de forma similar. Um quatérnio pode ser visto como um par de números complexos:

$q = (a,b) \quad a,b \in C,$

e seu conjugado fica

$q^* = (a,b)^* = (\overline{a}, -b) \qquad a,b \in C.$

A adição é feita componente a componente, como habitualmente, e a multiplicação é definida por:

$(a,b) \otimes (c,d) = (ac - db^*, a^*d + cb).$

Note que esta fórmula é análoga àquela definida para multiplicação de números complexos,

$$(a,b).(c,d) = (ac - db, ad + cb),$$

onde o par (a,b) é constituído de números reais.

O símbolo $*$ de conjugação também poderia ter sido incluído neste caso e na definição de conjugado de um número complexo uma vez que o conjugado de um número real coincide com o próprio número.

O jogo continua ! Agora podemos definir um octônio como um par de quatérnios. Conjugado, adição e multiplicação são definidos usando as mesmas fórmulas que usamos para os quatérnios.

$$\alpha = (a,b) \quad a,b \in H,$$

$$\alpha^* = (a,b)^* = (a^*,-b),$$

$$(a,b) \otimes (c,d) = (ac - db^*, a^*d + cb).$$

Esta maneira de construir novas álgebras a partir de outra precedente é chamada de construção de Cayley-Dickson e representa uma forma de chegar a novas estruturas além de poupar um considerável trabalho na prova de muitas propriedades.

Continuando com este raciocínio intuitivo, com estas construções será que complexos, quatérnios e octônios têm inverso multiplicativo ?

Para os complexos, pode-se verificar facilmente que

$$(a,b) \otimes (a,b)^* = (a,b)^* \otimes (a,b) = k\,(1,0) \ ,$$

onde k é um número real, o quadrado da norma de (a,b).

Isto significa que quando (a,b) é não nulo, seu inverso é dado por

$$(a,b)^{-1} = \frac{(a,b)^*}{k} \ .$$

Prova-se que o mesmo ocorre para quatérnios e octônios.

Mas isso naturalmente nos leva à questão mais intrigante : este é um processo de construir uma seqüência infinita de álgebras de divisão, cada uma obtida da precedente pela construção de Cayley-Dickson ?

Como veremos, a resposta passa pelo fato que, a cada vez que é aplicada, esta construção impele nossa álgebra a ganhar um pequeno defeito. Primeiro, dos reais para os complexos, perdemos a propriedade que cada elemento é seu próprio conjugado, depois perdemos a comutatividade, depois perdemos a associatividade e por fim a própria característica de álgebra de divisão é perdida.

Para entender isso mais claramente, é necessário um pouco mais de formalidade, que começamos a desenvolver a seguir.

Definição 19 (Conjugação)

Dada uma álgebra A , uma conjugação em A é uma transformação linear

$$*: A \to A$$

satisfazendo a

$$a^{**} = a \quad \text{e} \quad (ab)^* = b^* a^* \quad , \quad \forall \ a, b \in A.$$

Definição 20 (*- Álgebra)

Uma *- álgebra é uma álgebra A munida de uma conjugação.

Definição 21 (*- Álgebra real)

Uma *- álgebra é real se $a = a^*$, $\forall$ a $\in$ A.

Teorema 3 Começando com qualquer *-álgebra A sobre um corpo K,

a construção de Cayley-Dickson dá uma nova $*'$ – álgebra A' sobre K onde :

1) Os elementos de A' são pares $(a,b) \in A^2$.

2) A adição e a multiplicação por escalar são definidas de maneira óbvia:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \qquad (7)$$

$$k.(c,d) = (kc, kd) \qquad k \in K \qquad (8)$$

3) A multiplicação $\otimes$ entre elementos de A' é dada por

$$(a,b) \otimes (c,d) = (ac - db^*, a^*d + cb) \qquad (9)$$

4) e a conjugação $*'$ definida por

$$(a,b)^{*'} = (a^*, -b) \qquad (10)$$

Demonstração

Claro que A' é espaço vetorial sobre K.

Mostremos que $\otimes$ é bilinear.

$[(a,b)+(c,d)] \otimes (m,n) = (a+c,b+d) \otimes (m,n) =$

$= [(a+c)m - n(b+d)^*, (a+c)^*n + m(b+d)] =$

$= [am + cm - nb^* - nd^*, a^*n + c^*n + mb + md] =$

$= [am - nb^* + cm - nd^*, a^*n + mb + c^*n + md] =$

$= [am - nb^*, a^*n + mb] + [cm - nd^*, c^*n + md] =$

$= (a,b) \otimes (m,n) + (c,d) \otimes (m,n).$

Analogamente,

$(a,b) \otimes [(c,d)] + (m,n)] = (a,b) \otimes (c,d) + (a,b) \otimes (m,n).$

$[k(a,b)] \otimes (c,d) = (ka,kb) \otimes (c,d) = (kac - d(kb)^*, (ka)^*d + ckb) =$

$= (kac - db^*k^*, a^*k^*d + ckb) =$ (como $k \in R$)

$= k(ac - db *, a * d + cb) = k[(a,b) \otimes (c,d)].$

Analogamente,

$(a,b) \otimes [k(c,d)] = k[(a,b) \otimes (c,d)].$

Agora, vamos provar que $*'$ é conjugação

$*'$ é linear pois

$[(a,b)+(c,d)]^{*'} = (a+c,b+d)^{*'} = [(a+c)^*, -(b+d)] = (a^* + c^*, -b-d) =$

$= (a^*, -b) + (c^*, -d) = (a,b)^{*'} + (c,d)^{*'}$

Analogamente prova-se que

$[k(a,b)]^{*'} = k[(a,b)]^{*'}$

Por outro lado,

$[(a,b)^{*'}]^{*'} = (a^*, -b)^{*'} = ((a^*)^*, -(-b)) = (a,b)$

Finalmente,

$[(a,b) \otimes (c,d)]^{*'} = [ac - db^*, a^*d + cb]^{*'} = [(ac - db^*)^*, -(a^*d + cb)] =$

$$= [c^*a^* - bd^*, -a^*d - cb] = [c^*a^* - bd^*, -cb - a^*d] =$$

$$= [c^*a^* - (-b)(-d)^*, (c^*)^*(-b) + a^*(-d)] =$$

$$= [(c^*, -d)\ddot{A}(a^*, -b)]^* = (c,d)^{*'} \otimes (a,b)^{*'}$$

Lema 2 Seja A uma álgebra e $X = S(X) + V(X) \in A$. A função

$$\begin{aligned} * : \ & A \longrightarrow A \\ & X \longrightarrow X^* = S(X) - V(X) \end{aligned}$$

é uma conjugação em A

Propriedades

Se A é uma álgebra munida de uma conjugação *

1) $S(X) = \frac{1}{2}(X + X^*)$.

Demonstração

$$\frac{1}{2}(X + X^*) = \frac{1}{2}[(S(X) + V(X) + S(X) - V(X)] = S(X).$$

2) $V(X) = \frac{1}{2}(X - X^*)$.

Demonstração

$$\frac{1}{2}(X - X^*) = \frac{1}{2}[(S(X) + V(X) - S(X) + V(X)] = V(X).$$

3) $V(X)^* = -V(X)$.

Demonstração

$$0 = S(V(X)) = \frac{1}{2}(V(X) + V(X)^*) \Rightarrow 0 = V(X) + V(X)^*.$$

4) $S(X + Y) = S(X) + S(Y)$.

Demonstração

$$S(X + Y) = \tfrac{1}{2}[(X + Y) - (X + Y)^*] = \tfrac{1}{2}[X + Y - X^* - Y^*] =$$

$$= \tfrac{1}{2}[X - X^*] + \tfrac{1}{2}[Y - Y^*] = S(X) + S(Y).$$

5) $[S(X)]^* = S(X) = S(X^*)$.

Demonstração

$$[S(X)]^* = \tfrac{1}{2}(X+X^*)^* = \tfrac{1}{2}(X^*+X) = \tfrac{1}{2}(X+X^*) = S(X).$$

$$S(X^*) = \tfrac{1}{2}(X^*+(X^*)^*) = \tfrac{1}{2}(X^*+X) = \tfrac{1}{2}(X+X^*) = S(X).$$

6) $S(S(X)) \ = S(X).$

Demonstração

$$[S(X)]^* = \tfrac{1}{2}(S(X)+S(X)^*)^* = \tfrac{1}{2}(S(X)^*+S(X)) \ = \tfrac{1}{2}(S(X)+S(X)^*) =$$

$$S(S(X)) \ = \tfrac{1}{2}(S(X)+S(X)^*) = \tfrac{1}{2}(S(X)+S(X)) \ = S(X)$$

7) $S(aX) = aS(X)$, $\forall\, a \in R.$

Demonstração

$$S(aX) = \frac{1}{2}(aX-(aX)^*) = \frac{1}{2}(aX-a^*X^*) = \frac{1}{2}(aX-aX^*) = a\frac{1}{2}(X-X^*) = aS$$

8) $XX^* = S(X)S(X)^* + V(X)V(X)^*.$

Demonstração

$$XX^* = (S(X)+V(X))(S(X)+V(X))^* = (S(X)+V(X))(S(X)^*+V(X)^*) =$$

$$= S(X)S(X)^* + S(X)V(X)^* + V(X)S(X)^* + V(X)V(X)^* =$$

$$S(X)S(X)^* + S(X)(-V(X)) \ + V(X)S(X) + V(X)V(X)^*] =$$

$$S(X)S(X)^* - S(X)V(X) + V(X)S(X) + V(X)V(X)^* = S(X)S(X)^* + V(X)V(X)^*$$

9) $S(XX^*) = XX^*$ (em particular, $XX^* \in R$).

Demonstração

$$S(XX^*) = \tfrac{1}{2}(XX^*+(XX^*)^*) = \tfrac{1}{2}(XX^*+XX^*) = XX^*.$$

10) $XX^* = X^*X.$

Demonstração

$$XX^* = S(X)S(X)^* + V(X)V(X)^* =$$

$$= S(X)S(X) + V(X)(-V(X)) \ = S(X)S(X) - V(X)V(X).$$

$$X^*X = S(X)^*S(X) + V(X)^*V(X) =$$

$= S(X)S(X) + (-V(X))V(X) = S(X)S(X) - V(X)V(X).$

11) $S(XX^*) = S(S(X)S(X)^*) + S(V(X)V(X)^*).$

Demonstração

$S(XX^*) = S[(S(X) + V(X))(S(X) + V(X))^*] =$

$S[(S(X) + V(X))(S(X)^* + V(X)^*)] =$

$S[S(X)S(X)^* + S(X)V(X)^* + V(X)S(X)^* + V(X)V(X)^*] =$

$S[S(X)S(X)^* + S(X)(-V(X)) + V(X)S(X) + V(X)V(X)^*] =$

$S[S(X)S(X)^* - S(X)V(X) + V(X)S(X) + V(X)V(X)^*] =$

$S[S(X)S(X)^* + V(X)V(X)^*] = S(S(X)S(X)^*) + S(V(X)V(X)^*).$

2.2.2 As Questões Hereditárias

Lema 3 Seja A uma álgebra. Se 1 é a unidade de A então:

a) 1 é seu próprio inverso multiplicativo.

b) 1 não é um divisor de zero.

Demonstração

a) óbvio pois $1.1 = 1.1 = 1$.

b) Suponha que $a.1 = 0$ em A. Então, para todo $b \in A$ temos

$b = b.1 = b.1 + 0 = b.1 + a.1 = (b + a).1 \quad \Rightarrow \; b.1 = (b + a).1.$

Multiplicando pelo inverso de 1 ambos os lados da igualdade acima:

$b = b + a \Rightarrow \; a = o$

De uma maneira geral, prova-se que se $a \in A$ tem inverso multiplicativo então a não é um divisor de zero.

Lema 4 Sejam A, $A', *$ e $*'$ como na construção de Cayley-Dickson e 1 a unidade de A. Então:

1) $1' = (1,0)$ é a identidade de A.

2) $X = \{\alpha.1 \,/\, \alpha \in R\}$ é isomorfo a R.

3) $B = \{(a,0) / a \in A\}$ é isomorfo a A.

4) $X' = \{(x,0) / x \in X\}$ é isomorfo a X.

Demonstração

1) $(a,b) \otimes (1,0) = (a.1 - 0.b^*, a^*.0 + 1.b) = (a,b)$.

Analogamente , $(1,0) \otimes (a,b) = (a,b)$.

2) Claro que X é um espaço vetorial sobre R (uma vez que A é) e o produto em X continua sendo bilinear pois $X \subset A \Rightarrow X$ é uma álgebra.

Considere

$$\begin{aligned} f: \quad X &\rightarrow R \\ \alpha.1 &\rightarrow \alpha \end{aligned}$$

$f(\alpha.1 + \beta.1) = f((\alpha + \beta).1) = \alpha + \beta = f(\alpha) + f(\beta)$.

$f(\beta(\alpha.1)) = f((\beta\alpha).1) = \beta\alpha = \beta f(\alpha)$.

$f((\alpha.1).(\beta.1)) = f((\alpha.\beta).1.1)) = f((\alpha.\beta).1)) = \alpha\beta = f(\alpha).f(\beta)$.

Para ver que f é injetiva, observe que se $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha.1 = \beta.1$.

A sobrejetividade de f é óbvia.

3) Claro que B é um espaço vetorial sobre R (uma vez que A' é) e o produto em B continua sendo bilinear pois $B \subset A' \Rightarrow B$ é uma álgebra.

Considere $f : B \rightarrow A$

$$(a,o) \rightarrow a$$

$f[(a,0) + (b,0)] = f[a + b, 0] = a + b = f(a,0) + f(b,0)$.

$f[\alpha(a,0)] = f[(\alpha.a, \alpha 0)] = f[(\alpha.a,0)] = \alpha.a = \alpha.f[(a,0)]$.

$f[(a,0) \otimes (b,0)] = f[ab - 0.0*, a*.0 + b.0] =$

$= f[ab,0] = ab = f(a,0).f(b,0)$.

A bijetividade de f é óbvia.

4) Pelos mesmos argumentos anteriores prova-se que

$$f : X' \to X$$

$$(x, o) \to x$$

é um isomorfismo entre álgebras.

Definição 22 (Elementos Reais e Elementos Positivos)

Sejam A, $A', *$ e $*'$ como na construção de Cayley-Dickson, X e X' os mesmos do teorema acima. Dizemos que:

1) $a \in A$ é real se $a \in X$.

2) $a \in A$ é positivo se $a \in X$ e $a = \alpha.1$ para algum $\alpha > 0$.

3) $a \in A'$ é real se $a \in X'$.

4) $a \in A'$ é positivo se $a \in X'$ e $a = (\alpha.1, 0)$ para algum $\alpha > 0$.

Lema 5 Seja A uma álgebra e $a \in A$ real. Então a comuta com todo elemento de A.

Demonstração

Como a é real, $\exists\ \alpha \in R$ tal que $a = \alpha.1$. Dado $b \in A$ temos

$b \otimes a = b \otimes (\alpha.1) = \alpha.(b \otimes 1) = \alpha.(1 \otimes b) = (\alpha.1) \otimes b = a \otimes b$

Definição 23 (Álgebra Bem Normada)

Seja A uma álgebra . Dizemos que A é bem normada se:

a) $a + a^*$ é real , $\forall\ a \in A$ e

b) $aa^* = a^*a$ é positivo , $\forall a \in A$ não nulo.

Definição 24 (Álgebra Alternativa)

Seja A uma álgebra. Dizemos que A é alternativa se a subálgebra gerada por quaisquer 2 elementos é associativa.

Teorema 4 (Emil Artin) A é alternativa se e somente se

$a(ab) = (aa)b$ (1) $(ab)a = a(ba)$ (2) e $(ab)b = a(bb)$ (3) $\forall\ a, b.c \in A$

Além disso, quaisquer duas das equações acima implicam na terceira.

Usualmente toma-se a primeira e a última como a definição de álgebra alternativa (veja [2]).

Os resultados seguintes mostram o efeito de repetidas aplicações da construção de Cayley-Dickson:

Teorema 5 Sejam A, A', $_*$ e $_{*'}$ como na construção de Cayley-Dickson. Então:

1) A' nunca é real.

2) A é real (e, portanto, comutativa) $\Leftrightarrow A'$ é comutativa.

3) A é comutativa e associativa $\Leftrightarrow A'$ é associativa.

4) A é associativa e bem normada $\Leftrightarrow A'$ é alternativa e bem normada.

5) A é bem normada $\Leftrightarrow A'$ é bem normada.

Demonstração

1) Suponha que A' é real $\Rightarrow (a,b)^* = (a,b) \Rightarrow (a^*,-b) = (a,b) \Rightarrow b = 0$.

2) Observe em primeiro lugar que, se A é real $\Rightarrow a^* = a$. Logo,

$ab = a^*b^* = (ba)^* = ba \Rightarrow A$ é comutativa.

$(\Rightarrow)$

$$(a,b) \otimes (c,d) = (ac - db^*, a^*d + cb) = (ac - db, ad + cb) =$$

$$= (ca - bd, cb + ad) = (ca - bd^*, c^*b + ad) = (c,d) \otimes (a,b).$$

$(\Leftarrow)$

Inicialmente observe que se 1 é a unidade de A temos:

$1.1^* = 1^*$.

Conjugando membro a membro :

$(1.1^*)^* = 1$.

Logo,

$1.1^* = 1$,

isto é , $1^* = 1$

Dados $a,b \in A$, como A' é comutativa:

$(a^*,1) \otimes (1,a) = (1,a) \otimes (a^*,1) \quad \Rightarrow$

$(a^* - a,\ aa+1) = (a^* - a^*,\ 1 + a^*a) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a^* - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a^* = a.$

3) Sejam $(a,b),(c,d)$ e $(f,g) \in A'$.

$(\Rightarrow)$

Observe que como A é comutativa, $(ab)^* = a^*b^*$.

$(a,b) \otimes [(c,d) \otimes (f,g)] = (a,b) \otimes [cf - gd^*, c^*g + fd] =$

$= [a(cf - gd^*) - (c^*g + fd)b^*,\ a^*(c^*g + fd) + (cf - gd^*)b)] = \quad (*)$

$= [acf - agd^* - c^*gb^* - fdb^*,\ a^*c^*g + a^*fd + cfb - gd^*b] \quad (11)$

$[(a,b) \otimes (c,d)] \otimes (f,g) = [ac - db^*, a^*d + cb] \otimes (f,g) =$

$= [(ac - db^*)f - g(a^*d + cb)^*,\ (ac - db^*)^*g + f(a^*d + cb)] =$

$= [(ac - db^*)f - g(ad^* + c^*b^*),\ (a^*c^* - d^*b)g + f(a^*d + cb)] \quad (**)$

$= [acf - db^*f - gad^* - gc^*b^*,\ a^*c^*g - d^*bg + fa^*d + fcb] \quad (12)$

Comparando (11) e (12) e tendo em vista a comutatividade de A, chega-se ao pretendido.

$(\Leftarrow)$

Como A' é associativa, de $(*)$ e $(**)$ acima:

$[a(cf - gd^*) - (c^*g + fd)b^*,\ a^*(c^*g + fd) + (cf - gd^*)b)] =$

$[(ac - db^*)f - g(ad^* + c^*b^*),\ (a^*c^* - d^*b)g + f(a^*d + cb)]$,

$\forall\ a,b,c,d,f,g \in A$

Em particular, para $b = d = g = 0$ temos

$[a(cf),\ 0] = [(ac)f,\ 0] \quad \Rightarrow \quad A$ é associativa.

Analogamente, da igualdade entre $(*)$ e $(**)$ acima, fazendo $a = d = g = 0$ e $b = 1$, temos

$[0, cf] = [0, fc] \quad \Rightarrow \quad cf = fc \quad \Rightarrow \quad A$ é comutativa.

4)

($\Rightarrow$) Que A' é bem normada segue do item 5).

Dados $(a,b),(c,d) \in A'$:

$(a,b) \otimes [(c,d) \otimes (f,g)] = (a,b) \otimes [cf - gd^*, c^*g + fd] =$

$= [a(cf - gd^*) - (c^*g + fd)b^*,\ a^*(c^*g + fd) + (cf - gd^*)b)] =$

$= [acf - agd^* - c^*gb^* - fdb^*,\ a^*c^*g + a^*fd + cfb - gd^*b] =$

(Fazendo $f = c$ e $g = d$)

$= [acc - add^* - c^*db^* - cdb^*,\ a^*c^*d + a^*cd + ccb - dd^*b] =$

$=[acc - a\underbrace{dd^*}_{\in R} - \underbrace{(c^* + c)}_{\in R}db^*, a^*\underbrace{(c^* + c)}_{\in R}d + ccb - \underbrace{dd^*}_{\in R}b] =$ (A é bem normada)

$= [acc - dd^*a - db^*\underbrace{(c^* + c)},\ \underbrace{(c^* + c)}a^*d + ccb - bdd^*] =$

$= [acc - dd^*a - db^*c^* - db^*c\ ,\ c^*a^*d + ca^*d + ccb - bd^*d] =$ $\quad$ *(13)*

Por outro lado,

$[(a,b) \otimes (c,d)] \otimes (f,g) = [ac - db^*, a^*d + cb] \otimes (f,g) =$

$=[(ac - db^*)f - g(a^*d + cb)^*,\ (ac - db^*)^*g + f(a^*d + cb)] =$

$=[(ac - db^*)f - g(d^*a + b^*c^*), (c^*a^* - bd^*)g + f(a^*d + cb)] =$ (A é associativa)

$=[acf - db^*f - gd^*a - gb^*c^*,\ c^*a^*g - bd^*g + fa^*d + fcb] =$

(Fazendo $f = c$ e $g = d$)

$=[acc - db^*c - dd^*a - db^*c^*,\ c^*a^*d - bd^*d + ca^*d + ccb] =$

$=[acc - db^*c - dd^*a - db^*c^*,\ c^*a^*d + ca^*d - bd^*d + ccb]$ $\quad$ *(14)*

Tendo em vista que A é bem normada, temos que *(13)* = *(14)*, logo,

$(a,b) \otimes [(c,d) \otimes (c,d)] = [(a,b) \otimes (c,d)] \otimes (c,d)$

Analogamente prova-se que

$(a,b) \otimes [(a,b) \otimes (c,d)] = [(a,b) \otimes (a,b)] \otimes (c,d)$

e chegamos que A'é alternativa.

5) Seja 1 a unidade de A e $1' = (1,0)$ a unidade de A'.

$(\Rightarrow)$

$(a,b) + (a,b)^* = (a,b) + (a^*,-b) = (a + a^*,0)$.

Como A é bem normada, $a + a^*$ é real $\Rightarrow$

$\exists\ \alpha \in R$ tal que $a + a^* = \alpha.1 \Rightarrow$

$(a + a^*,0) = (\alpha.1,0) = \alpha(1,0) \Rightarrow (a,b) + (a,b)^*$ é real.

$(a,b) \otimes (a,b)^* = (a,b) \otimes (a^*,-b) =$

$= (aa^* - (-b)b^*, a^*(-b) + a^*b) = (aa^* + bb^*,0)$.

Como A é bem normada, aa^* e bb^* são positivos $\Rightarrow$

$\exists\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \in R$ tais que

$aa^* = \alpha.1\ \ e\ \ bb^* = \beta.1 \Rightarrow (aa* + bb*,0) = (\alpha.1 + \beta.1,0) =$

$= ((\alpha + \beta).1,0) = (\alpha + \beta)(1,0)$

$\Rightarrow (a,b) \otimes (a,b)^*$ é positivo pois $\alpha + \beta$ é positivo.

Analogamente, $(a,b)^* \otimes (a,b)$ é positivo.

$(\Leftarrow)$

Como A' é bem normada, temos que $(a,b) + (a,b)^* = (a + a^*,0)$ é real.

$\Rightarrow \exists\ \alpha \in R$ tal que $(a + a^*,0) = \alpha(1,0) \Rightarrow (a + a^*,0) = (\alpha.1,0)$

$\Rightarrow\ a + a^* = \alpha.1$

$\Rightarrow\ a + a^*$ é real.

Como A' é bem normada, temos que $(a,0) \otimes (a,0)^* = (aa^*,0)$ é positivo.

$\Rightarrow \exists\ \alpha > 0 \in R\ tal\ que\ (aa^*,0) = \alpha\,(1,0)$

$\Rightarrow (aa^*,0) = (\alpha.1,0) \Rightarrow aa^* = \alpha.1$

$\Rightarrow\ aa^*$ é positivo.

Analogamente, a^*a é positivo.

2.2.3 Mais Propriedades

1) Toda álgebra associativa é uma algebra alternativa.

2) Se X é uma álgebra de divisão alternativa então X tem um elemento identidade e cada $a \in X$ não nulo tem inverso.

3) Uma álgebra normada não possui divisores de zero, isto é, é uma álgebra de divisão.

Demonstração de 1

A propriedade 1 é imediata.

Demonstração de 2

Se X tem um único elemento, óbvio. Se X tem mais de um elemento, então existe $a \in X$ com $a \neq 0$.

Como a função $x \to xa$ é bijetiva, existe um único elemento $e \in$ X tal que $ea = a$. Logo,

$e^2a = e(ea) = ea = a$. Pela injetividade de $x \to xa$, $e^2 = e$. Daí, para todo x $\in$ X,

$e(ex) = e^2x = ex$. Pela injetividade de $x \to ex$, $ex = x$.

Analogamente, $(xe)e = xe^2 = xe$. Pela injetividade de $x \to xe, xe = x$.

Assim, $ex = x$ e $xe = x$, isto é , e é o elemento identidade, necessariamente único.

Considere novamente $a \in X$ com $a \neq 0$ e b tal que $ab = e$ (pela bijetividade de $x \to ax$).

Então:

$a(ba) = (ab)a = ea = a$. Logo, $ba = e$, isto é, b é o inverso de a.

Demonstração de 3

$0 = a.b \Rightarrow \quad 0 = \|a.b\| = \|a\| \; \|b\| \Rightarrow \|a\| = 0$ ou $\|b\| = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Seguem destas proposições que :

R é uma *- álgebra real comutativa associativa e bem normada.

C é uma *- álgebra comutativa associativa e bem normada.

H é uma *- álgebra associativa e bem normada.

K é uma *- álgebra alternativa e bem normada.

e daí segue que R, C, H e K são álgebras de divisão normadas pois, como veremos adiante, se uma álgebra é alternativa e bem normada então ela é normada e de divisão. Segue também que a álgebra dos octônios não é real, nem comutativa nem associativa.

Se continuamos a aplicar o processo de Cayley-Dickson aos octônios obtemos uma seqüência de *- álgebras de dimensões 16, 32, ... etc. A primeira delas é chamada de Sedenions, provavelmente em alusão ao fato que é de dimensão 16.

Segue dos resultados precedentes que todas as *- álgebras desta seqüência são bem normadas mas nenhuma real, nem comutativa nem associativa. Todas tem inversos, uma vez que todas são bem normadas. Mas não são álgebras de divisão, uma vez que cálculos explícitos mostram que os Sedenios, e todas as outras álgebras, têm divisores de zero. De fato, os divisores de zero de norma 1 nos Sedenios formam um subspaço que é homeomorfo ao grupo de Lie excepcional $G2$. (veja [2]).

A construção de Cayley-Dickson proporciona uma boa maneira de obter a seqüência R, C, H, K, e as propriedades básicas destas álgebras, mas qual o significado desta construção ?

Para responder a isto, é melhor definir A' como a álgebra formada por acrescentar a A um elemento i satisfazendo a $i^2 = -1$, junto com as seguintes relações :

$$a(ib) = i(a^*b)\ ,\ \ (ai)b = (ab^*)i\ ,\ (ia)(bi^{-1}) = (ab)^* \quad \forall\ a,b \in A \qquad (15)$$

Transformamos A' em uma *- álgebra usando a conjugação original dos elementos de A e colocando $i^* = -i$.

É fácil verificar que cada elemento de A' pode ser escrito univocamente como

$a + ib$ para algum $a,b \in A$

e que esta descrição da construção de Cayley-Dickson torna-se equivalente àquela feita anteriormente, se fizermos

$(a,b) = a + ib$

Qual é o significado das relações em *(15)* ?

Simplesmente que elas expressam conjugação em termos de conjugação !

Existe um jogo de palavras no duplo significado da expressão "conjugação".

O que realmente queremos dizer é que *(15)* expressa a operação $*$ em A como uma conjugação por i.

Em particular, temos:

$$a^* = (ia)i^{-1} = i(ai^{-1}) \quad , \quad \forall\ a \in A$$

Note que quando A' é associativa, qualquer uma das relações em *(15)* implica nas outras duas. É quando A' não é associativa que realmente precisamos das 3 relações. Esta interpretação da construção de Cayley-Dickson torna mais fácil ver o que acontece quando repetidamente aplicamos a construção começando em R.

Em R a operação $*$ nada faz, assim, quando fazemos a construção de Cayley-Dickson, a conjugação por i não faz efeito em elementos de R.

Como R é comutativo, isto significa que $C = R'$ é comutativo. Mas C não real uma vez que $i^* = -i$.

Vamos aplicar a a construção de Cayley-Dickson a C.

Como C é comutativo, a operação * em C é um automorfismo.

Assim temos uma álgebra associativa A equipada com um automorfismo f e podemos estender A a uma álgebra associativa maior por (ad)junção de um elemento inversível x com

$$f(a) = xax^{-1} \quad , \quad \text{para todo } a \in A$$

Como C é associativa, isto significa que $C' = H$ é associativa. Mas como C não é real, H não pode ser comutativa, uma vez que a conjugação pelo novo elemento incorporado i deve ter um efeito não trivial.

Finalmente, aplicando a construção a H , como H não é comutativo, a operação $*$ em H não é um automorfismo, mas sim um antiautomorfismo. Isto significa que não podemos expressar $*$ como uma conjugação por algum elemento de uma álgebra associativa maior. Assim, $H' = K$ deve ser não-associativa.

Exemplo 4 Nesta perspectiva da construção de Cayley-Dickson, o número quatérnio $p = a + bi + cj + dk$ pode ser visto como um par de complexos (Z, W) (detalhes adiante, na seção 3.3.2) ou ainda como o elemento $(a + bi) + (c + di)j$ onde o novo elemento j satisfaz a $j^2 = -1,\ j^* = -j$ e às condições colocadas em (*15*).

Teorema 6 (Frobenius)

Se A é uma álgebra de divisão associativa sobre o corpo dos reais, então A é isomorfa a R, C ou H.

Demonstração

Suponha que A tem ordem (dimensão) n sobre R e elemento identidade μ.

Segue que quaisquer $(n + 1)$ elementos de A são linearmente dependentes.

Em particular, se $x \in A$, então

$\mu,\ x,\ x^2, \ldots\ldots, x^n$ são linearmente dependentes.

Então, existem escalares $\alpha_j \in R$ não todos nulos tais que :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_n x^n = 0 \qquad (16)$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, (*16*) pode ser fatorizada como

$$F_1(x)F_2(x)\ldots = 0$$

onde $F_1(x),\ F_2(x),$ ..... são fatores lineares ou quadráticos com coeficientes reais.

Como uma álgebra de divisão não contem divisores de zero, podemos concluir que pelo menos um dos fatores $F_1(x),\ F_2(x)$ ..... é zero.

Se ocorre de o fator nulo ser linear, então sua raiz é quadrática.

Deduzimos que cada $x \in A$ é a raiz de uma equação quadrática com coeficientes reais.

Em particular, se $e_1 = \mu,\ e_2, \ldots, e_n$ são os elementos de uma base de A, então podemos concluir que

$$e_j^2 + 2\beta_j e_j + \gamma_j \mu = 0 \qquad , \qquad \forall\ \beta_j, \gamma_j \in R$$

Mas, completando os quadrados,

$(e_j + \beta_j \mu)^2 = (\beta_j^2 - \gamma_j)^2 \mu \qquad , \qquad \beta_j^2 - \gamma_j \in R$

Definimos agora um novo conjunto de elementos de base de A por:

$\{e_1 = \mu \, , \, e_2', \ldots, en'\} \equiv \{e_1 = \mu \, , \, e_2 + \beta_2, \ldots, e_n + \beta_n\}.$

Então :

$(ej')^2 = (\beta_j^2 - \gamma_j)\mu \qquad , \qquad \beta_j^2 - \gamma_j \in R.$

Agora, $\beta_j^2 - \gamma_j > 0$ ou $\beta_j^2 - \gamma_j < 0.$

Se β_j^2 - $\gamma_j > 0$ isto implica que $e_j\,'$ e $e_1 = \mu$ são dependentes e podemos concluir que

$(ej')^2 = -\alpha_j^2 \mu$ para algum $\alpha_j \in R.$

Agora introduzimos uma outra base ainda :

$\{e_1 = \mu, E_2, \ldots, E_n\} \equiv \{e_1 = \mu \, , \, \frac{e_2'}{\alpha_2}, \ldots, \frac{e_n'}{\alpha_n}\},$

e então

$E_j^2 = -\mu$ para cada $j = 2, 3, \ldots\ldots, n.$

A parte restante da prova é mostrar que chegamos a contradições para n diferente de 1,2 e 4.

Estas contradições acontecem primariamente por conta da condição que cada x $\in$ A é a raiz de uma equação quadrática real.

Caso 1 : $n = 1.$

Esta é a álgebra gerada pelo único elemento da base e claramente coincide com $R.$

Caso 2 : $n = 2.$

Esta é a álgebra que é gerada por 2 elementos $\{e_1 = \mu \, , \, E_2\}$ onde $E_2^2 = -\mu$ e é claramente o corpo dos números complexos.

Caso 3 : Suponha agora que $n > 2$.

Considere então a álgebra gerada por $\{e_1 = \mu \, , \, E_2, \, E_3, \ldots\ldots\}.$

Uma vez que todos os elementos da álgebra são raízes de uma equação quadrática real, em particular, também $E_2 \pm E_3$ são . Assim,

$$(E_2 \pm E_3)^2 = E_2^2 + E_2E_3 + E_3E_2 + E_3^2 = -2\mu + E_2E_3 + E_3E_2.$$

Mas

$$(E_2 + E_3)^2 - \alpha(E_2 + E_3) - \beta\mu = 0 \quad \text{para algum } \alpha,\ \beta \in R.$$

isto é,

$$-2\mu - E_2E_3 - E_3E_2 = \alpha(E_2 + E_3) + \beta\mu \qquad , \qquad \alpha,\ \beta \in R.$$

Fazendo o mesmo raciocínio para $E_2 - E_3$,

$$-2\mu + E_2E_3 + E_3E_2 = \gamma(E_2 - E_3) + \delta\mu \qquad , \qquad \gamma,\ \delta \in R.$$

Somando, obtemos :

$$(\alpha + \gamma)E_2 + (\alpha - \gamma)E_3 + (\beta + \delta + 4)\mu = 0.$$

Uma vez que μ , E_2 e E_3 são linearmente independentes, então :

$$\alpha = \gamma = 0 \quad \text{e} \quad \beta + \delta + 4 = 0.$$

Daí,

$$E_2E_3 + E_3E_2 = 2\varepsilon\mu \quad \text{, digamos, onde } \varepsilon \in \mathrm{R}.$$

Então

$$(E_2 + E_3)^2 = (2\varepsilon - 2)\mu \qquad \text{e}$$

$$(E_2 - E_3)^2 = (-2\varepsilon - 2)\mu.$$

Agora, seguindo o mesmo argumento como acima, ambos, $(E_2 + E_3)^2$ e $(E_2 - E_3)^2$ devem ser um múltiplo positivo de $-\mu$, isto é :

$$\varepsilon - 1 < 0 \qquad \text{e} \qquad -\varepsilon - 1 < 0.$$

Logo, $(\varepsilon - 1)(-\varepsilon - 1) > 0$, isto é, $1 - \varepsilon^2 > 0$.

Introduzimos novos vetores base :

$$I \equiv E_2 \quad , \quad J = \frac{E_3 + \varepsilon E_2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Então

$I^2 = -\mu \quad J^2 = -\mu \quad$ e $\quad IJ + JI = 0.$

Por outro lado, é fácil mostrar que IJ é linearmente independente de μ , I e J uma vez que :

$$IJ = \alpha\mu + \beta J + \gamma J \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

Multiplicando por I:

$$I(IJ) = -J = \alpha I - \beta + \gamma IJ = \alpha I - \beta + \gamma(\alpha\mu + \beta J + \gamma J).$$

De onde segue que $\gamma^2 = -1$, o que implica que $\gamma \notin R$, contradição.

Isto mostra que uma álgebra de divisão consistindo de 3 elementos base, μ, I, J é impossível, uma vez que isto obriga sempre ao surgimento de um quarto elemento, $K = IJ$, e então esta álgebra é gerada por μ , I , J e K satisfazendo a :

$$IK = I(IJ) = -J \quad , \quad KI = (IJ)I = -(JI)I = J,$$

$$KJ = (IJ)J = -I \quad , \quad JK = J(IJ) = J(-JI) = I \quad \text{e}$$

$$K^2 = (IJ)(IJ) = -(IJ)(JI) = -I^2J^2 = -\mu,$$

que é a familiar álgebra (sobre R) dos Quatérnios .

Se agora consideramos $n > 4$, então existe um quinto elemento base E_5 tal que $E_5^2 = -\mu$.

Procedendo como acima, deduzimos :

$$IE_5 + E_5I = \alpha\mu \quad , \quad JE_5 + E_5J = \beta\mu \quad , \quad KE_5 + E_5K = \gamma \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

Então,

$$E_5K = E_5(IJ) = (E_5I)J = (\alpha\mu - IE_5)J = \alpha J - I(\beta\mu - JE_5) = \alpha J - I\beta + KE_5.$$

Daí, adicionando E_5K:

$$2E_5K = \alpha J - I\beta + KE_5 + E_5K = \alpha J - \beta I + \gamma\mu.$$

Logo,

$$2(E_5K)K = \alpha(JK) - \beta(IK) + \gamma K.$$

Isto é,

$$-2E_5 = \alpha I - \beta J + \gamma K,$$

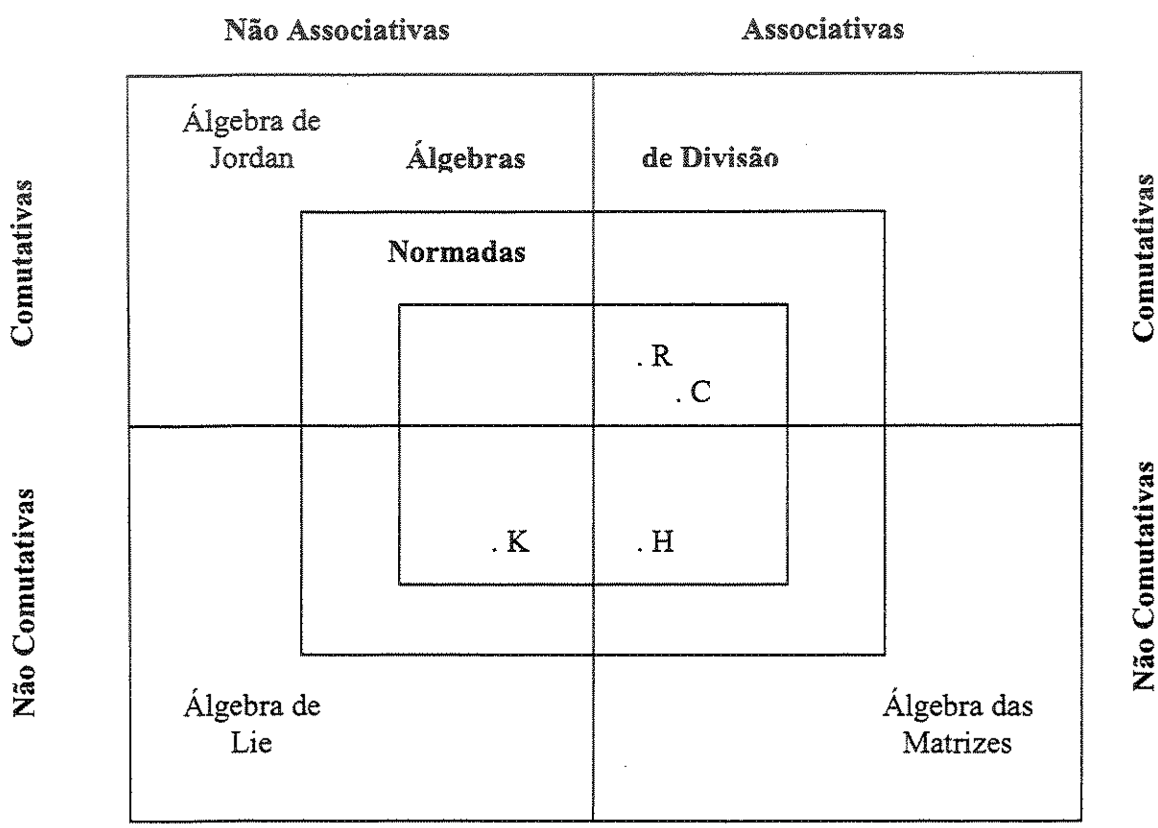
o que contradiz a independência de I, J, K e E_5.

Daqui, uma álgebra de divisão associativa só existe se $n = 1, 2, 4$.

Se a restrição de que a álgebra seja associativa é relaxada então obtemos os números de Cayley de dimensão 8.

No esquema a seguir podemos ver um diagrama mostrando as relações entre as álgebras mencionadas.

Álgebras sobre R



2.2.4 Propriedades sob a Perspectiva da Construção

Seja $X = (\alpha, \beta) \in A'$ com $\alpha, \beta \in A$, A bem normada. As propriedades anteriores e outras adicionais podem ser vistas sob a perspectiva da construção de Cayley-Dickson, a maioria delas de verificação imediata. Como exemplo citamos:

1) $S(X) = (S(\alpha), 0)$, que identificamos a $S(\alpha)$.

Demonstração

$\frac{1}{2}(X + X^*) = \frac{1}{2}[(\alpha, \beta) + (\alpha^*, -\beta)] = \frac{1}{2}[(\alpha + \alpha^*, 0)] = \frac{1}{2}[(2S(\alpha), 0)] = (S(\alpha), 0)$.

2) $V(X) = (V(\alpha), \beta)$.

Demonstração

$V(X) = X - S(X) = (\alpha, \beta) - (S(\alpha), 0) = (\alpha - S(\alpha), \beta) = (V(\alpha), \beta)$.

2.2.5 Produto Interno

Teorema 7 Se A é uma álgebra bem normada , podemos colocar uma estrutura de produto interno em A definindo

$$\langle X, Y \rangle = S(XY^*).$$

De fato:

1) Como A é bem normada, se X é não nulo então $XX^* > 0$. Assim,

$\langle X, X \rangle = S(XX^*) = XX^* > 0$.

Se $X = 0 \Rightarrow XX^* = 0 \Rightarrow 0 = S(XX^*) = \langle X, X \rangle$.

Reciprocamente,

Se $\langle X, X \rangle = S(XX^*) = 0 \Rightarrow XX^* = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S(X)S(X)^* + V(X)V(X)^* = 0 \Rightarrow S(X)^2 = -V(X)V(X)^*$.

Podemos dividir a análise em dois casos

Caso 1 : Se $V(X) = 0$.

De $S(X)^2 = -V(X)V(X)^* \Rightarrow S(X)^2 = 0$.

Como $S(X) \in R \Rightarrow S(X) = 0 \Rightarrow X = 0.$

Caso 2 : Se $V(X) \neq 0.$

Como A é bem normada e $V(X) \neq 0$ temos

$V(X)V(X)^* > 0 \Rightarrow -V(X)V(X)^* < 0.$

$\Rightarrow \underbrace{S(X)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-V(X)V(X)^*}_{<0}$ é uma contradição.

Logo, só é possível $V(X) = 0$, o que acarreta $X = 0$.

2) $\langle X,Y \rangle = S(XY^*) = \frac{1}{2}[XY^* + (XY^*)^*] = \frac{1}{2}[XY^* + YX^*] =$

$= \frac{1}{2}[YX^* + (YX^*)^*]^* = [S(YX^*)]^* = \langle Y,X \rangle^*.$

3) Dado $a \in R$,

$\langle X,aY \rangle = S(X(aY)^*) = S(X(Y^*a^*)) = S(X(Y^*a)) = aS(XY^*) = a^*\langle X,Y \rangle.$

4) $\langle X,Y+Z \rangle = S(X(Y+Z)^*) = S(X(Y^*+Z^*)) =$

$= S(XY^* + XZ^*) = S(XY^*) + S(XZ^*) =$

$= \langle X,Y \rangle + \langle X,Z \rangle.$

Observação Note que em $A = C$ e $A = H$ o produto interno assim definido coincide com o produto interno euclidiano usual.

Desigualdade de Schwarz

Se em A está definido o produto interno $\langle X,Y \rangle = S(XY^*)$ então vale que

$$| \langle X,Y \rangle | \leq \sqrt{\langle X,X \rangle \langle Y,Y \rangle} \quad , \quad \forall\ X,\ Y \in A.$$

Teorema 8 Se em A está definido o produto interno $\langle X,Y \rangle = S(XY^*)$, a função abaixo é uma norma em A.

$$\begin{aligned} \|\ \| : A &\rightarrow R \\ X &\rightarrow \|X\| = \sqrt{\langle X,X \rangle} \end{aligned}$$

Ficamos então com as seguintes relações: $\|X\|^2 = \langle X,X \rangle = S(XX^*) = XX^*$.

Teorema 9 Se A é bem normada e alternativa, A é uma álgebra de divisão normada.

Demonstração

Basta provar que se A é bem normada e alternativa então A é normada (pois esta última condição implica que A será de divisão, como já foi visto).

De fato, se A é bem normada a função

$$\begin{aligned} \| \ \| : A &\longrightarrow R \\ X &\longrightarrow \|X\| = \sqrt{\langle X,X \rangle} \end{aligned}$$

é uma norma em A . Sendo A alternativa isto faz de A uma álgebra normada pois

$$\|XY\|^2 = XY(XY)^* = XY(Y^*X^*) = X \underbrace{(YY^*)}_{\in R} X^* = XX^*(YY^*) = \|X\|^2 \|Y\|^2$$

$$\Rightarrow \|XY\| = \|X\| \, \|Y\|.$$

Propriedades

Se A é bem normada, vale que:

1) $\|S(X)\|^2 = S(X)^2$.

Demonstração

$$\|S(X)\|^2 = S(X)S(X)^* = S(X)S(X) = S(X)^2.$$

2) $X^{-1} = \dfrac{1}{\|X\|^2} X^*$, para $X \neq 0$.

Demonstração

$$X \frac{1}{\|X\|^2} X^* = \frac{XX^*}{\|X\|^2} = 1.$$

3) $XX^{-1} = X^{-1}X$ para $X \neq 0$.

Demonstração

$$XX^{-1} = X \frac{1}{\|X\|^2} X^* = \frac{XX^*}{\|X\|^2} = \frac{X^*X}{\|X\|^2} = \frac{1}{\|X\|^2} X^*X = X^{-1}X.$$

4) $(XY)X^{-1} = X(YX^{-1})$.

5) $(YX^{-1})X = Y(XX^{-1}) = Y$.

6) $X^{-1}(XY) = (XX^{-1})Y = Y$.

2.2.6 Ângulos e Forma Polar

Dado $X \in A$ e $X \neq 0$, podemos associar um ângulo a X da seguinte forma:

Considere $X = S(X) + V(X)$ com $V(X) \neq 0$ e $x = \dfrac{1}{\|V(X)\|} V(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ é um número puro e $\|x\| = 1 \Rightarrow V(X) = \|V(X)\| x \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = S(X) + V(X) = \|X\| \left[\frac{S(X)}{\|X\|} + \frac{V(X)}{\|X\|} \right] = \|X\| \left[\frac{S(X)}{\|X\|} + x \frac{\|V(X)\|}{\|X\|} \right].$$

Observe agora que

$$\frac{S(X)}{\|X\|} \in R, \ \frac{\|V(X)\|}{\|X\|} \in R, \ -1 \leq \frac{S(X)}{\|X\|} \leq 1 \ \text{e} \ 0 \leq \frac{\|V(X)\|}{\|X\|} \leq 1 \ \text{pois}$$

$$\|X\|^2 = \|S(X) + V(X)\|^2 = S[(S(X) + V(X))(S(X) + V(X))^*] =$$

$$= S(S(X)S(X)^*) + S(V(X)V(X)^*) = \|S(X)\|^2 + \|V(X)\|^2.$$

$$\Rightarrow \|X\|^2 = \|S(X)\|^2 + \|V(X)\|^2 \geq \|V(X)\|^2.$$

$\Rightarrow \|X\| \geq \|V(X)\|$ pois $\|X\|$ e $\|V(X)\|$ são não negativos.

$$\Rightarrow \frac{\|V(X)\|}{\|X\|} \leq 1.$$

Analogamente,

$$\Rightarrow \|X\|^2 \geq \|S(X)\|^2 \Rightarrow \frac{\|S(X)\|^2}{\|X\|^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{S(X)^2}{\|X\|^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{S(X)}{\|X\|} \leq 1.$$

Finalmente,

$$\left[\frac{S(X)}{\|X\|} \right]^2 + \left[\frac{\|V(X)\|}{\|X\|} \right]^2 = \frac{S(X)^2}{\|X\|^2} + \frac{\|V(X)\|^2}{\|X\|^2} =$$

$$= \frac{S(X)^2 + \|V(X)\|^2}{\|X\|^2} = \frac{\|S(X)\|^2 + \|V(X)\|^2}{\|X\|^2} = \frac{\|X\|^2}{\|X\|^2} = 1.$$

Forma Polar

Reunindo os fatos acima temos que na expressão

$$X = \|X\|\left[\frac{S(X)}{\|X\|} + x\frac{\| V(X) \|}{\|X\|} \right],$$

podemos dizer que existe θ tal que

$$cos\theta = \frac{S(X)}{\|X\|} \ , \ sen\theta = \frac{\| V(X) \|}{\|X\|} \ , \quad 0 \leq \theta < \pi \qquad (* * *)$$

e X pode ser escrito como

$X = \|X\|\left[cos\theta + x\, sen\theta\right]$, a chamada forma polar de X.

Isto nos permite associar um "ângulo" sólido θ a X, dado por $(* * *)$.

Observação Note que se $X = (\alpha, \beta) \in C$ com $\alpha, \beta \in R$, a parte vetorial $V(X)$ de X é da forma

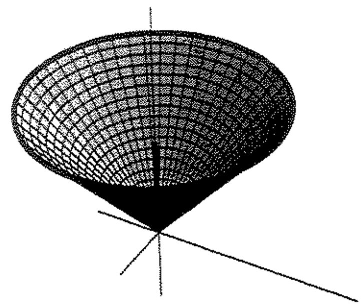
$V(X) = bi, \ b \in R$ e podemos escrever:

$X = S(X) + V(X) = \|X\|\left[\frac{S(X)}{\|X\|} + \frac{bi}{\|X\|} \right] = \|X\|\left[\frac{S(X)}{\|X\|} + i\frac{b}{\|X\|} \right]$, isto é, o vetor unitário x que aparece na demonstração acima é a própria unidade básica i.

Desse modo, continuamos a ter

$-1 \leq \frac{S(X)}{\|X\|} \leq 1$ e $\left[\frac{S(X)}{\|X\|} \right]^2 + \left[\frac{b}{\|X\|} \right]^2 = 1$ mas o fator que multiplica o vetor unitário x agora ganha a possibilidade de assumir valores negativos, o que permite ao ângulo θ variar no intervalo $[0, 2\pi)$, ou seja, o ângulo α dado pela forma polar de um número complexo é *orientado* e se olharmos este mesmo número como um quatérnio especial o seu ângulo θ, definido como em $(*)$, será dado por $\theta = \alpha$ ou $\theta = 2\pi - \alpha$.

Outra conseqüência importante quando $X = (\alpha, \beta) \in C$ é que, nesse caso, θ e $\|X\|$ determinam completamente o elemento X, o que já não ocorre se $X \in H$ ou $X \in K$. Por exemplo, se X é um quatérnio puro unitário e temos a informação de que o "ângulo" associado a X é $\frac{\pi}{4}$, ainda que soubéssemos em relação a que referencial (um plano, uma reta) X faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$, isto não é suficiente para determinar X. Para uma idéia desta situação, veja o gráfico a seguir, onde estamos vizualizando X no R^3.



No entanto, para o mesmo $X = \|X\| \left[cos\theta + x\, sen\theta\right] \neq 0 \in A$ e $Y = 1$ o elemento unidade de A temos que

$$\frac{< X, Y >}{\|X\|\,\|Y\|} = \frac{< X, 1 >}{\|X\|\,\|1\|} = \frac{S(X.1^*)}{\|X\|} = \frac{S(X)}{\|X\|} = cos\theta,$$

que é análoga à expressão conhecida para o cosseno do ângulo entre dois elementos do R^2

2.2.7 Ângulo entre dois Elementos

Motivados pelos fatos anteriores, podemos definir um ângulo não orientado λ entre X e Y por:

$$cos\lambda = \frac{< X, Y >}{\|X\|\,\|Y\|} = \frac{S(X, Y^*)}{\|X\|\,\|Y\|},$$

que é uma definição significativa de ângulo pois decorre da desgualdade de Schwarz que

$$| S(X, Y^*) | =$$

$$| \langle X, Y \rangle | \leq \sqrt{\langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle} = \sqrt{\langle X, X\rangle}\sqrt{\langle Y, Y\rangle} = \|X\|\,\|Y\|,$$

$$\Rightarrow \frac{| S(X, Y^*) |}{\|X\|\,\|Y\|} \leq 1 \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{S(X, Y^*)}{\|X\|\,\|Y\|} \leq 1 \quad \Rightarrow -1 \leq cos\lambda \leq 1.$$

Isto é, podemos interpretar que o ângulo θ associado a X neste contexto mais geral nada mais é do que o ângulo entre X e a unidade básica 1.

Suponha então $X, Y \in A$ não nulos e escritos na forma polar :

$X = \|X\|\left[cos\theta + x\, sen\theta\right]$ com $x = \dfrac{1}{\|V(X)\|}V(X)$ unitário puro.

$Y = \|Y\|\left[\cos\Phi + y\, sen\Phi\right]$ com $y = \dfrac{1}{\|V(Y)\|}V(Y)$ unitário puro.

Considere λ o ângulo entre X e Y, δ o ângulo entre x e y.

Temos então:

$$cos\lambda = \frac{< X,Y >}{\|X\|\,\|Y\|} = \frac{S(XY^*)}{\|X\|\,\|Y\|} =$$

$$= \frac{S\left[\|X\|\left[cos\theta + x\, sen\theta\right]\left[\|Y\|\left[\cos\Phi + y\, sen\Phi\right]\right]^*\right]}{\|X\|\,\|Y\|} =$$

$$\frac{S\left[\|X\|\left[cos\theta + x\, sen\theta\right]\|Y\|\left[\cos\Phi + y^*\, sen\Phi\right]\right]}{\|X\|\,\|Y\|} =$$

$$= \frac{S\left[\|X\|\,\|Y\|\left[cos\theta + x\, sen\theta\right]\left[\cos\Phi - y\, sen\Phi\right]\right]}{\|X\|\,\|Y\|} =$$

$$= \|X\|\,\|Y\|\frac{S\left[\left[cos\theta + x\, sen\theta\right]\left[\cos\Phi - y\, sen\Phi\right]\right]}{\|X\|\,\|Y\|} =$$

$$= S\left[\left[cos\theta + x\, sen\theta\right]\left[\cos\Phi - y\, sen\Phi\right]\right] =$$

$$= S\left[\; cos\theta\cos\Phi \;\underbrace{-y\, cos\theta sen\Phi + x sen\theta\cos\Phi}_{\in V(XY^*)}\; -xy\, sen\theta sen\Phi \;\right] =$$

$$= S[\cos\theta\cos\Phi] - S[xy\, sen\theta sen\Phi] = S[\cos\theta\cos\Phi] - sen\theta sen\Phi S(xy) =$$

$$= \cos\theta\cos\Phi - sen\theta sen\Phi S[xy].$$

Logo, $\cos\lambda = \cos\theta\cos\Phi - sen\theta sen\Phi S[xy]$. *(17)*

Como δ é o angulo entre x e y :

$$cos\delta = \frac{< x,y >}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Mas x e y são números unitários puros, isto é,

$y = V(y)$, $y^* = -y$, $\|y\| = 1$, $x = V(x)$, $x^* = -x$, $\|x\| = 1$.

Assim:

$$cos\delta = \frac{< x,y >}{\|x\| \, \|y\|} = < x,y > \quad \text{e}$$

$$2S(xy) = -2S(x(-y)) = -2S(xy^*) = -2\langle x ,y \rangle.$$

$$\Rightarrow S(xy) = -\langle x ,y \rangle = - cos\delta.$$

Substituindo em *(17)* :

$$cos\lambda = \frac{< X,Y >}{\|X\| \, \|Y\|} = \cos\theta\cos\Phi - sen\theta sen\Phi S[xy] = \cos\theta\cos\Phi + sen\theta sen\Phi cos\delta$$

que é a lei dos cossenos para triângulos esféricos.

Terminologia Geométrica

Definição 25 (Perpendicularismo e Paralelismo)

Dados $X, Y \in A$, A bem normada dizemos que

1) X *e* Y são perpendiculares se $S(XY^*) = 0$, isto é, se $< X,Y >= 0$, o que denotamos por $X \perp Y$.

2) X *e* Y são paralelos se $V(XY^*) = 0$

Lema 6 Dado $X \in A$, A bem normada, então $S(X) \perp V(X)$

Demonstração

$< S(X), V(X) >= S(S(X)V(X)^*)$

Mas $V(X)$ (e $V(X)^*$) são números puros.

Como $S(X) \in R \Rightarrow S(X)V(X)^*$ também é puro $\Rightarrow$

$\Rightarrow S(X)V(X)^*$ não tem parte escalar $\Rightarrow S(S(X)V(X)^*) = 0$

Capítulo3

As transformações ortogonais e respectivas matrizes ortogonais ocuparão papel de destaque na interpretação geométrica da descrição de certos movimentos em C, H e K como resultado das operações e transformações lineares definidas nestas álgebras. As referências para este capítulo são [2], [3], [7], [9], [12], [13], [14], [15], [18] e especialmente [19].

3.1 Transformações e Matrizes Ortogonais

Definição 26 (Matriz Ortogonal)

Dizemos que uma matriz A $n \times n$ com coeficientes em K é ortogonal se suas colunas (ou linhas) formam um conjunto ortonormal (com respeito a uma base ortonormal de K^n), ou seja, $AA^t = A^tA = I$.

Definição 27 (Transformação Ortogonal)

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $<\ >$ e $f : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Dizemos que f é ortogonal se f preserva o produto interno, isto é, se

$$< f(u)\ , f(v) > = < u,v > \quad , \qquad \forall\ u,v \in V.$$

É fácil provar que f é ortogonal se e somente se f preserva a norma associada a $<\ \ >$, isto é, se e somente se $\|f(u)\| = \|u\|$, $\qquad \forall\ u \in V.$

Teorema 10 Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno, $f : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Então f é ortogonal se e somente se o conjunto $\{f(e_1),\ldots,f(en)\}$ é ortonormal para qualquer base ortonormal $B = \{e_1,\ldots,e_n\}$ de V.

Observe portanto que a representação matricial de uma transformação ortogonal é uma matriz ortogonal.

O próximo resultado faz uma caracterização das transformações ortogonais quanto às suas propriedades algébricas.

3.1.1. Caracterização Algébrica das Transformações Ortogonais

Teorema 11 Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno, $f : V \rightarrow V$ uma transformação ortogonal, $B = \{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal de V e A a representação matricial de f em relação a B. Então:

$A^tA. = I$ ou , equivalentemente, $A^t = A^{-1}$.

Observação : Se A é ortogonal então $detA = \pm 1$.

De fato, como $A^tA. \doteq I$ e $detA = detA^t$, temos que:

$1 = \det I = \det[A^tA] = \det A^t . \det A = detA^2 1$

Os próximos resultados buscam uma caracterização das transformações ortogonais quanto à sua representação matricial e efeito geométrico nos casos específicos de R^2 e R^3.

3.1.2. Representação Matricial e Geometria das Transformações Ortogonais em R^2 e R^3.

No $\mathbf{R}^2$

Teorema 12 Se R^2 está munido do produto interno canônico e $f : R^2 \to R^2$ é uma transformação ortogonal, em relação à base canônica então a representação matricial de f tem uma das seguintes formas:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta. \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta. \\ sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$.

Demonstração

Considere $[f] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Como f é ortogonal, o vetor (a,b) é unitário $\Rightarrow \exists\, \theta, 0 \leq \theta < 2\pi$, tal que

$a = cos\theta$ e $b = sen\theta \Rightarrow (a,b) = (cos\theta, sen\theta)$.

Como (c,d) é unitário e deve ser ortogonal a $(a,b) \Rightarrow (c,d) = \pm(-sen\theta, cos\theta)$.

Assim, há duas possibilidades para a matriz $[f]$:

$$[f] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta. \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = A \quad \text{ou} \quad [f] = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta. \\ sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = B.$$

No primeiro caso temos $det[f] = 1$ e no segundo $det[f] = -1$.

Note que A e B são protótipos das chamadas matrizes ortogonais e são essencialmente distinguidas pelos seus determinantes:

$$detA = 1 \quad , \quad detB = -1$$

A interpretação geométrica do efeito destes dois diferentes tipos de transformações ortogonais nos interessa pois estes estão associados a certos tipos de movimento no R^2 que estamos querendo caracterizar.

Teorema 13 Seja $f: R^2 \to R^2$ uma transformação ortogonal cuja representação matricial em relação à base canônica seja $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta. \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Então f representa uma rotação do plano em torno da origem de ângulo θ.

Demonstração

Podemos escrever

$$\begin{array}{rcl} f: \; R^2 & \to & R^2 \\ (x,y) & \to & \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta. \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

Considerando a forma polar do vetor (x,y), digamos,

$(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\alpha, sen\alpha)$,

temos que

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta. \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \left(\sqrt{x^2+y^2}\,. \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} \right) =$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2}) \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta. \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2}) \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\alpha - sen\theta sen\alpha \\ sen\theta\cos\alpha + \cos\theta sen\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2}) \begin{bmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ sen(\theta+\alpha) \end{bmatrix}$$

Observe que neste caso o polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\theta + 1,$$

que não tem raízes reais salvo se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, isto é, um vetor do R^2 ao ser rotacionado só recai sobre a mesma direção original se a rotação for de 0 ou π.

Teorema 14 Seja $f : R^2 \rightarrow R^2$ uma transformação ortogonal cuja representação matricial em relação à base canônica seja $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta. \\ sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$. Então f é a reflexão através de uma reta que passa pela origem e faz um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com o eixo dos x.

Demonstração

Observe que a reflexão em relação ao eixo dos x produz o seguinte efeito nos elementos da base canônica:

$$(1,0) \rightarrow (1,0)$$

$$(0,1) \rightarrow (0,-1)$$

e a matriz desta transformação é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Também,

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} & 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = B$$

$\Rightarrow B = [R_{\frac{\theta}{2}}][reflexão\ no\ eixo\ x][R_{-\frac{\theta}{2}}].$

Isto significa que o efeito geométrico da transformação linear associada a B é o de uma reflexão em relação a uma reta que passa pela origem e faz um ângulo $\frac{\theta}{2}$ com o eixo dos x.

Observação Veja que tomando a forma polar do vetor (x,y),

$(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\alpha, sen\alpha)$,

temos que

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\left(\sqrt{x^2+y^2}\,.\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2})\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2})\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha \\ \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= (\sqrt{x^2+y^2})\begin{bmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{bmatrix}$$

Neste caso o polinômio característico de B é

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1$,

que tem raízes reais $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e os auto-vetores serão múltiplos de $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ e $(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$.

A característica importante de uma transformação que envolve uma reflexão é que ela não preserva orientação. Em termo de matrizes, a característica de uma matriz ortogonal que corresponde a uma rotação é que $detA = 1$ enquanto para uma matriz ortogonal que inclui uma reflexão é que $detB = -1$.

Dizemos então que uma matriz ortogonal A tal que $detA = 1$ corresponde a uma rotação e quando $detA = -1$ a matriz A corresponde a uma reflexão

No $\mathbf{R}^3$

Lembremos inicialmente que se $f : V \to V$ é uma transformação linear ortogonal e F é um subespaço invariante por f então $F^{\perp}$ também é.

Obeserve agora que se $f : R^3 \to R^3$ é uma transformação linear então o polinômio característico de f é de grau 3 e tem pelo menos uma raiz real $\Rightarrow \exists\, \lambda \in R$ e $v \in R^3$ tal que $f(v) = \lambda v$ com $\|v\| = 1$ isto é, v é um autovetor de f correspondente ao autovalor λ .

Por outro lado, se f é ortogonal, f preserva norma $\Rightarrow \|f(v)\| = \|v\|$.

Ficamos então com $1 = \|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

caso 1 Se $\lambda = 1 \Rightarrow f(v) = \lambda v = v$

e v gera um subespaço $W = \{mv \,/\, m \in R\}$ de dimensão 1 que é invariante por f.

Logo, o complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W tem dimensão 2 e também é invariante por f.

Claro que f restrito a $W^{\perp}$ continua sendo ortogonal (pois continua preservando as normas dos elementos de $W^{\perp} \subset R^3$).

Considerando $\{v_1, v_2\}$ uma base ortogonal de $W^{\perp} \Rightarrow \{v, v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de R^3 e em relação a esta base temos

$$f(v) = v = 1.v + 0v_1 + 0v_2$$

e a representação matricial de f é do tipo

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{bmatrix} \text{ onde}$$

$X = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ é a representação matricial de f restrita ao subespaço invariante $W^{\perp}$.

Assim,

$$X = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta. \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad X = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta. \\ sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

caso 2 Se $\lambda = -1 \Rightarrow f(v) = \lambda v = -v$ e por um raciocínio análogo chegamos a

$$[f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Reunindo estas conclusões, enunciamos o

Teorema 15 Se $f : R^3 \to R^3$ é uma transformação ortogonal então existe uma base ortonormal em relação a qual a representação matricial de f tem uma das seguintes formas:

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = A \quad \text{ou} \quad [f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = B$$

$$[f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = C \quad \text{ou} \quad [f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\,\theta. \\ 0 & sen\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = D$$

No caso $[f] = A$, temos $det[f] = 1$ e f é uma rotação de θ ao redor de v.

No caso $[f] = B$, temos $det[f] = -1$ e f é uma reflexão através do plano cujo vetor normal é

$$\vec{N} = -sen\frac{\theta}{2}v_1 + cos\frac{\theta}{2}v_2$$

No caso $[f] = C$, temos $det[f] = -1$ e C pode ser escrita como

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\,\theta. \\ 0 & \sin\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta. \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

e representa uma reflexão através do plano cujo vetor normal é $\vec{N} = v$, composta com uma rotação de θ.

No caso $[f] = D$, temos $det[f] = 1$ e D pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta. & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta. & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

e representa uma reflexão através do plano cujo vetor normal é $\vec{N} = v$, composta com uma reflexão através do plano cujo vetor normal é

$$\vec{N} = -sen\frac{\theta}{2}v_1 + cos\frac{\theta}{2}v_2$$

Esta discussão se estende ao R^n e, lembrando os fatos discutidos em 1.5, como quando f é ortogonal os auto-valores reais de f só podem ser 1 e -1, se f é ortogonal então existe uma base ortonormal de V relativamente à qual a matriz de f tem a forma (forma racional de Jordan)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_1 & -sen\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sen\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_k & -sen\alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sen\alpha_k & \cos\alpha_k \end{bmatrix}.$$

Sempre reduziremos as estes casos as análises e interpretações do efeito de transformações ortogonais em subespaços invariantes

3.2 Grupo Ortogonal

O conjunto de todas as matrizes ortogonais munido do produto de matrizes (equivalentemente, o conjunto das transformações ortogonais $f: R^n \to R^n$ com a operação de composição de funções) forma um grupo, chamado grupo ortogonal e denotado por $O(n)$.

Como vimos, uma transformação ortogonal não necessariamente preserva orientação mas aquelas que a preservam são chamadas de rotação ou transformação ortogonal especial e o conjunto destas transformações também é um grupo, chamado grupo ortogonal especial, denotado por $SO(n)$.

3. 3. As Identificações

Nosso objetivo agora é mostrar que os produtos definidos nas álgebras de C, H e K estão relacionados a rotações e simetrias. Para tal iremos buscar identificar os elementos destas álgebras com elementos de outros espaços, especialmente com $O(n)$ e $SO(n)$.

Definição 28 (Homomorfismo / Isomorfismo de Álgebras)

Um homomorfismo entre duas álgebras, V_1 e V_2 sobre um mesmo corpo K é uma função

$$f: V_1 \to V_2$$

satisfazendo a

$a)\ f(s+t) = f(s) + f(t) \quad , \quad \forall\ s, t \in V_1;$

$b)\ f(as) = af(s) \quad , \quad \forall\ s \in V_1,\ \forall\ a \in K;$

$c)\ f(st) = f(s)f(t) \quad , \quad \forall\ s, t \in V_1.$

Se f for bijetora diremos que f é um isomorfismo e que V_1 e V_2 são isomorfas. Claro que se f é injetora então f é um isomorfismo sobre sua imagem.

Numa prévia, a idéia é identificar por meio de homomorfismos (isomorfismo sobre a imagem) as seguintes estruturas :

$$\begin{array}{ccccc} C & \longrightarrow & R^2 & \longrightarrow & M_{(2,R)} \\ Z = a + bi & \longrightarrow & (a,b) & \longrightarrow & \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} R^4\ (a,b,c,d) & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ Q & \longmapsto & CxC & \longmapsto & M_{(2,C)} & \longmapsto & M_{(4,R)} \\ q = a + b\hat{\imath} + cj + dk & & (Z = a + di,\ W = c + bi) & & \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R^8 & \longmapsto & K \\ (a,b,c,d,e,f,g,h) & & a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7 \\ & & \downarrow \\ & & Q\,x\,Q \\ & & (p = a + bi + cj + dk,\ q = e - fi - gj - hk) \end{array}$$

3.3.1. Para os Números Complexos

Teorema 16 Sejam R^2 , C e $M_{(2,R)}$ = {matrizes reais 2x2} vistos como espaços vetoriais sobre R. Considere:

a) em C as operações de soma e multiplicação usuais como definidas em *(1)* e

(2)

b) em $M_{(2,R)}$ as operações de soma e multiplicação usuais

c) em R^2 a soma usual e uma multiplicação definida por

$$(a,b).(c,d) = (ac - db, ad + cb)$$

Então, as funções f e g abaixo são homomorfismos (isomorfismos sobre a imagem).

$$R^2 \overset{f}{\mapsto} C \overset{g}{\mapsto} M_{(2,R)}$$

$$(a,b) \rightarrow a + bi \rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Demonstração:

A prova de que f e g são bijeções é imediata. A condição de homomorfismo de álgebras também é de verificação direta.

Para a função f

$1) f[(a,b) + (c,d)] = f(a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i =$

$= (a + bi) + (c + di) = f(a,b) + f(c,d).$

$2) f[(a,b).(c,d)] = f(ac - db, ad + cb) = (ac - db) + (ad + cb)i =$

$= (a + bi).(c + di) = f(a,b).f(c,d)$.

$3) f[m(a,b)] = f(ma, mb) = ma + mbi = m(a + bi) = mf(a,b).$

Para a função g

$1)\ g[(a + bi) + (c + di)] = g[(a + c) + (b + d)i] =$

$$= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} =$$

$= g(a+bi) + g(c+di).$

$2)\ g[(a+bi).(c+di)] = g[(ac-db)+(ad+cb)i] =$

$$= \begin{bmatrix} ac-db & -(ad+cb) \\ ad+cb & ac-db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} =$$

$= g(a+bi)\ .g(c+di).$

$$3)\ g[m(a+bi)] = g(ma+mbi) = \begin{bmatrix} ma & -mb \\ mb & ma \end{bmatrix} =$$

$$= m\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = mg(a+bi).$$

Em particular, temos as identificações de 1 e $i \in C$ com as matrizes reais abaixo

$$\begin{array}{ccccc} R^2 & \overset{f}{\mapsto} & C & \overset{g}{\mapsto} & M_{(2,R)} \\ (a,b) & \longrightarrow & a+bi & \longrightarrow & \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ & & 1 = 1+0i & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & & i = 0+1i & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

e a inclusão dos números reais

$$R \overset{i}{\longrightarrow} R^2 \overset{f}{\mapsto} C \overset{g}{\mapsto} M_{(2,R)}$$

3.3.2. Para os Quatérnios

Teorema 17 Sejam R^4, H, $C \times C$, $M_{(2,C)}$ = {matrizes complexas $2x2$} e $M_{(4,R)}$ ={matrizes reais $4x4$} vistos como espaços vetoriais sobre R.

Considere

a) em $M_{(2,C)}$ e em $M_{(4,R)}$ as operações de soma e multiplicações usuais,

b) em H as operações de soma e multiplicações como definidas em (*3*) e (*4*),

c) para (a,b,c,d) , $(e,f,g,h) \in R^4$ e

$$A = ae - bf - cg - dh \qquad B = ch - dg + af + be$$
$$C = df - bh + ag + ce \qquad D = bg - cf + ah + de$$

a soma usual e uma multiplicação definida por

$(a,b,c,d).(e,f,g,h) = (A,B,C,D)$,

d) em $C \times C$ a soma usual

e uma multiplicação como definida na construção de Cayley-Dickson, isto é, para

(Z,W) , $(T,V) \in C \times C$, A,B,C,D como em c) acima,

$Z = a + di,\; W = c + bi,\; T = e + hi,\; V = g + fi$,

$(Z,W).(T,V) = (ZT - V\overline{W}, \overline{Z}V + TW) = (A + Di, C + Bi)$

Então, as funções f, g , h e φ abaixo são homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccccc} R^4 & \overset{f}{\mapsto} & H & \overset{g}{\mapsto} & CxC & \overset{h}{\mapsto} & M_{(2,C)} & \overset{\varphi}{\mapsto} & M_{(4,R)} \\ (a,b,c,d) & & a + b\hat{\imath} + cj + dk & & (Z = a + di, W = c + bi) & & \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} \end{array}.$$

Demonstração:

Para a função f :

1) $f[(a,b,c,d) + (e,f,g,h)] = f(a + e, b + f, c + g, d + h) =$

$$= (a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k$$

$$= (a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk) = f((a,b,c,d)) + f(e,f,g,h)$$

$$2)\ f[(a,b,c,d).(e,f,g,h)] =$$

$$= f(A,B,C,D) = A+Bi+Cj+Dk =$$

$$= (a+bi+cj+dk).(e+fi+gj+hk) = f(a,b,c,d).f(e,f,g,h)$$

$$3)\ f[m(a,b,c,d)] = f(ma,mb,mc.md) = ma+mbi+mcj+mdk =$$

$$= m(a+bi+cj+dk) = mf(a,b,c,d)$$

Para a função g :

$$1)\ g[\ (a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk)\ ] =$$

$$= g[(a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k] =$$

$$= ((a+e)+(d+h)i,(c+g)+(b+f)i) =$$

$$= (a+di,c+bi)+(e+hi,g+fi) =$$

$$= g\ (a+bi+cj+dk)+g(\ e+fi+gj+hk).$$

$$2)\ g[\ (a+bi+cj+dk).(\ e+fi+gj+hk)\ ] =$$

$$= g[A+Bi+Cj+Dk] = (A+Di,C+Bi) =$$

$$= g\ (a+bi+cj+dk).g(\ e+fi+gj+hk).$$

$$3)\ g[m(a+bi+cj+dk)] = g(ma+mbi+mcj+mdk) =$$

$$= (ma+mdi,mc+mbi) = m(a+di,c+bi) = mg\ (a+bi+cj+dk).$$

Para a função h :

$$1)\ h[(Z,W)+(T,V)] = h[(Z+T,W+V)] = \begin{bmatrix} Z+T & -\overline{(W+V)} \\ W+V & \overline{(Z+T)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & -\overline{V} \\ V & \overline{T} \end{bmatrix} = h(Z,W) + h(T,V).$$

2) $h[\,(Z,W).(T,V) = h[(ZT - V\overline{W}, \overline{Z}V + TW)] \ =$

$$= \begin{bmatrix} ZT - V\overline{W} & -\overline{(\overline{Z}V + TW)} \\ \overline{Z}V + TW & \overline{(ZT - V\overline{W})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZT - V\overline{W} & -(Z\overline{V} + \overline{T}\overline{W}) \\ \overline{Z}V + TW & \overline{Z}\,\overline{T} - \overline{V}W \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ZT - \overline{W}V & -(Z\overline{V} + \overline{W}\overline{T}) \\ WT + \overline{Z}V & \overline{Z}\,\overline{T} - \overline{V}W \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T & -\overline{V} \\ V & \overline{T} \end{bmatrix} = h(Z,W).\,h(T,V),$$

tendo em vista a comutatividade da soma e da multiplicação de números complexos.

3) $h[m(Z,W)] \ = h[(mZ, mW)] \ =$

$$= \begin{bmatrix} mZ & -\overline{m(W)} \\ mW & \overline{(mZ)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mZ & -m\overline{W} \\ mW & m\overline{Z} \end{bmatrix} =$$

$$= m \begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} = mh(Z,W).$$

Para a função φ

Dados $Z = a + di,\ W = c + bi\,,\ T = e + hi,\ V = g + fi$,

1) $\varphi\left[\begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & -\overline{V} \\ V & \overline{T} \end{bmatrix}\right] =$

$$= \varphi\left[\begin{bmatrix} Z + T & -(\overline{W} + \overline{V}) \\ W + V & \overline{Z} + \overline{T} \end{bmatrix}\right] =$$

$$= \varphi\left[\begin{bmatrix} (a+e)+(d+h)i & -[(c+g)+(-b-f)i] \\ (c+g)+(b+f)i & (a+e)+(-d-h)i \end{bmatrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & -d-h & -c-g & -b-f \\ d+h & a+e & b+f & -c-g \\ c+g & -b-f & a+e & d+h \\ b+f & c+g & -d-h & a+e \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -h & -g & -f \\ h & e & f & -g \\ g & -f & e & h \\ f & g & -h & e \end{bmatrix} =$$

$$= \varphi\begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} + \varphi\begin{bmatrix} T & -\overline{V} \\ V & \overline{T} \end{bmatrix}.$$

2)

$$\varphi\left[\begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T & -\overline{V} \\ V & \overline{T} \end{bmatrix}\right] = \varphi\begin{bmatrix} ZT-\overline{W}V & -(Z\overline{V}+\overline{W}\overline{T}) \\ WT+\overline{Z}V & -W\overline{V}+\overline{Z}\overline{T} \end{bmatrix} =$$

$$= \varphi\begin{bmatrix} A+Di & -[C-Bi] \\ C+Bi & A-Di \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -D & -C & -B \\ D & A & B & -C \\ C & -B & A & D \\ B & C & -D & A \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -h & -g & -f \\ h & e & f & -g \\ g & -f & e & h \\ f & g & -h & e \end{bmatrix} =$$

$$= \varphi\begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} \cdot \varphi\begin{bmatrix} T & -\overline{V} \\ V & \overline{T} \end{bmatrix}.$$

$$3)\ \varphi\left[\left[m \begin{matrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{matrix} \right]\right] = \varphi\left[\left[\begin{matrix} mZ & -m\overline{W} \\ mW & m\overline{Z} \end{matrix} \right]\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} ma & -md & -mc & -mb \\ md & ma & mb & -mc \\ mc & -mb & ma & md \\ mb & mc & -md & ma \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} =$$

$$= m\varphi\begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix}.$$

Em particular, temos as identificações de 1 , i , j e k $\in H$ como as matrizes abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc} R^4 & \overset{f}{\longmapsto} & H & \overset{g}{\longmapsto} & CxC & \overset{h}{\longmapsto} & M_{(2,C)} & \overset{\varphi}{\longmapsto} & M_{(4,R)} \\ (a,b,c,d) & & a+bi+cj+dk & & (Z=a+di, W=c+bi) & & \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} \end{array}$$

$$1 = 1 + 0\hat{\imath} + 0j + 0k \rightarrow \quad (Z = 1 + 0i,\ W = 0 + 0i) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = 0 + 1\hat{\imath} + 0j + 0k \rightarrow \quad (Z = 0 + 0i, W = 0 + 1i) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$j = 0 + 0\hat{\imath} + 1j + 0k \rightarrow \quad (Z = 0 + 0i, W = 1 + 0i) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 0 + 0\hat{\imath} + 0j + 1k \rightarrow \quad (Z = 0 + 1i, W = 0 + 0i) \rightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5 Pelas identificações feitas, podemos ver o produto de 2 quatérnios como produto de matrizes reais

$$p.q = \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -h & -g & -f \\ h & e & f & -g \\ g & -f & e & h \\ f & g & -h & e \end{bmatrix}$$

3.3.3. Para os Números de Cayley

Teorema 18 Sejam $R^8, K\ e\ H\,x\,H$, vistos como espaços vetoriais sobre R. Considere

a) em R^8 a soma usual e uma multiplicação definida por

$(a,b,c,d,e,f,g,h).(u,v,x,y,m,n,o,t) = (A,B,C,D,E,F,G,H)$ onde

$$
\begin{aligned}
A &= au - bv - cx - dy - em - fn - go - ht,\\
B &= cy - dx + en - fm + ho - gt + av + bu,\\
C &= dv - by + eo - gm + ft - hn + ax + cu,\\
D &= bx - cv + gn - fo + et - hm + ay + du,\\
E &= fv - bn + gx - co + hy - dt + am + eu,\\
F &= bm - ev + do - gy + hx - ct + an + fu,\\
G &= cm - ex + fy - dn + bt - hv + ao + gu,\\
H &= cn - fx + dm - ey + gv - bo + at + hu.
\end{aligned}
$$

b) em K a adição e multiplicação como definidas em *(5)* e *(6)* no capitulo 2,

c) em $H \times H$ a adição usual e uma multiplicação como definida na construção de Cayley-Dickson, isto é, para $(p,q),\ (r,s) \in H \times H$:

$$(p,q).(r,s) = (pr - s\overline{q}, \overline{p}s + rq).$$

Então, as funções f e g ,abaixo são homomorfismos

$$
\begin{array}{ccc}
R^8 & \overset{f}{\mapsto} & K \\
(a,b,c,d,e,f,g,h) & \rightarrow & a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
K & \overset{g}{\mapsto} & H \times H \\
a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7 & \rightarrow & (p = a + bi + cj + dk,\ Q = e - fi - gj - hk)
\end{array}
$$

Demonstração.

Por construção, f é homomorfismo.

Para a função g

Dados

$$\alpha = a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7$$

$$\beta = u + ve_1 + xe_2 + ye_3 + me_4 + ne_5 + oe_6 + te_7$$

$$\alpha \ . \beta = A + Be_1 + Ce_2 + De_3 + Ee_4 + Fe_5 + Ge_6 + He_7$$

Considere

$$p = a + bi + cj + dk,$$

$$q = e - fi - gj - hk,$$

$$r = u + vi + xj + yk,$$

$$s = m - ni - oj - tk.$$

1) $g(\alpha + \beta) =$

$$= ((a+u) + (b+v)i + (c+x)j + (d+y)k, (e+m) - (f+n)i - (g+o)j - (h+t)k)$$

$$= (p,q) + (r,s) = g(\alpha) + g(\beta).$$

2) $g(\alpha . \beta) = g(A + Be_1 + Ce_2 + De_3 + Ee_4 + Fe_5 + Ge_6 + He_7) =$

$$= (A + Bi + Cj + Dk,\ E - Fi - Gj - Hk).$$

$$g(\alpha).g(\beta) = (p,q).(r,s) = (pr - s\overline{q},\ \overline{p}s + rq) =$$

$$= (L_1 + L_2 i + L_3 j + L_4 k, L_5 + L_6 i + L_7 j + L_8 k)\ ,$$

onde

$$
\begin{aligned}
L_1 &= au - bv - cx - dy - me - nf - og - th,\\
L_2 &= cy - dx + av + bu + oh - tg - mf + ne,\\
L_3 &= dv - by + ax + cu + tf - nh - mg + oe,\\
L_4 &= bx - cv + ay + du + ng - of - mh + te,\\
L_5 &= an - bn - co - dt + ue + vf + xg + yh,\\
L_6 &= ct - do - an - bm - xh + yg - uf + ve,\\
L_7 &= dn - bt - ao - cm - yf + vh - ug + xe,\\
L_8 &= bo - cn - at - dm - vg + xf - uh + ye.
\end{aligned}
$$

e comparando com

$$
\begin{aligned}
A &= au - bv - cx - dy - em - fn - go - ht,\\
B &= cy - dx + en - fm + ho - gt + av + bu,\\
C &= dv - by + eo - gm + ft - hn + ax + cu,\\
D &= bx - cv + gn - fo + et - hm + ay + du,\\
E &= fv - bn + gx - co + hy - dt + am + eu,\\
F &= bm - ev + do - gy + hx - ct + an + fu,\\
G &= cm - ex + fy - dn + bt - hv + ao + gu,\\
H &= cn - fx + dm - ey + gv - bo + at + hu,
\end{aligned}
$$

temos que

$$g(\alpha)\,.\,g(\beta) = (p,q).(r,s) = (A + Bi + Cj + Dk, E - Fi - Gj - Hk) = g(\alpha\ .\beta).$$

3) $g(m\alpha) =$

$= g[(ma) + (mb)e_1 + (mc)e_2 + (md)e_3 + (me)e_4 + (mf)e_5 + (mg)e_6 + (mh)e_7] =$

$= ((ma) + (mb)i + (mc)j + (md)k\,, (me) - (mf)i - (mg)j - (mh)k) =$

$= m(a + bi + cj + dk\,, e - fi - gj - hk) = mg(\alpha).$

Em particular, temos as identificações em $H \times H$ de 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 e $e_7 \in K$ abaixo

$$
\begin{array}{rcl}
K & \overset{g}{\mapsto} & H \times H \\
a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7 & \mapsto & (p = a + bi + cj + dk,\ q = e - fi - gj - hk)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
1 = 1 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 + 0e_6 + 0e_7 & \mapsto & (p = 1 + 0i + 0j + 0k, q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (1,0) \\
e_1 = 0 + 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 + 0e_6 + 0e_7 & \mapsto & (p = 0 + 1i + 0j + 0k, q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (i,0) \\
e_2 = 0 + 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 + 0e_6 + 0e_7 & \mapsto & (p = 0 + 0i + 1j + 0k, q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (j,0) \\
e_3 = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4 + 0e_5 + 0e_6 + 0e_7 & \mapsto & (p = 0 + 0i + 0j + 1k, q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (k,0) \\
e_4 = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4 + 0e_5 + 0e_6 + 0e_7 & \mapsto & (p = 0 + 0i + 0j + 0k, q = 1 - 0i - 0j - 0k) = (0,1) \\
e_5 = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 1e_5 + 0e_6 + 0e_7 & \mapsto & (p = 0 + 0i + 0j + 0k, q = 0 - 1i - 0j - 0k) = (0,-i) \\
e_6 = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 + 1e_6 + 0e_7 & \mapsto & (p = 0 + 0i + 0j + 0k, q = 0 - 0i - 1j - 0k) = (0,-j) \\
e_7 = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 + 0e_6 + 1e_7 & \mapsto & (p = 0 + 0i + 0j + 0k, q = 0 - 0i - 0j - 1k) = (0,-k).
\end{array}
$$

3.4. Os Fatos Geométricos

As identificações acima, especialmente aquelas feitas com matrizes, permitem uma visão geométrica das álgebras de C, H e K através das ferramentas da álgebra linear.

3.4.1. Para os Complexos

Tendo em vista as identificações feitas no teorema 16:

1) Considere a função

$$
\begin{array}{rccc}
f: & C & \to & C \\
 & W & \to & ZW
\end{array}
$$

onde $Z = a + bi$ é um complexo unitário fixo e $W = c + di$.

f é linear e podemos escrever

$$
\begin{array}{rccc}
f: & R^2 & \to & R^2 \\
 & W = (c,d) & \to & ZW = (a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)
\end{array}
$$

Ainda pelas identificações feitas, podemos ver f como

$$
\begin{array}{rccc}
f: & M_{(2,R)} & \to & M_{(2,R)} \\
 & W = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}
\end{array}
$$

e o valor de f nos elementos da base do R^2 é

$$f(1,0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \rightarrow (a,b)$$

$$f(0,1) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -a \\ a & -b \end{bmatrix} \rightarrow (-b,a)$$

Logo, a matriz que representa f em relação à base canônica do R^2 é

$$[f] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Como Z é unitário temos que $[f]$ é ortogonal e tem determinante igual a 1. Pelo exposto no capítulo 2, o produto de Z por W representa uma rotação de W segundo o ângulo argumento de Z.

Portanto, a transformação linear f caracterizada pela multiplicação pelo número complexo fixo $Z = a + bi$ é uma rotação do R^2 e a matriz que representa f coincide com o representante de Z na identificação de C (ou R^2) com $M_{(2,R)}$. Este é um fato interessante a ser notado pois não se repetirá em dimensões maiores.

Observe que os autovalores de $[f] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ são $\{a - bi, a + bi\}$, com autovetores $\{\{-i,1\},\{i,1\}\}$ respectivamente, o que significa que $[f]$ não tem autovalores reais a menos que $b = 0$. Isto confirma o que já era esperado: nenhum vetor do R^2 recai sobre a mesma direção quando é rotacionado de um angulo θ em torno da origem, exceto se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, isto é, se Z é real.

2) Considere a função

$$\begin{aligned} f:\ & C \longrightarrow C \\ & Z \longrightarrow Z^2 \end{aligned}$$

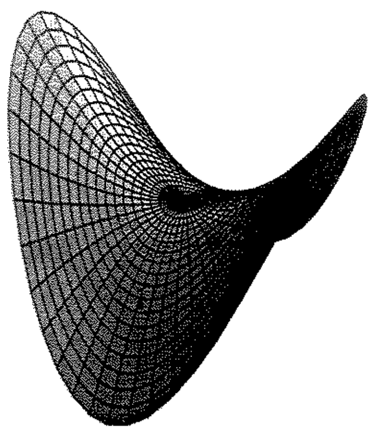
onde $Z = a + bi$ se identifica a $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

e Z^2 se identifica a $\begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$

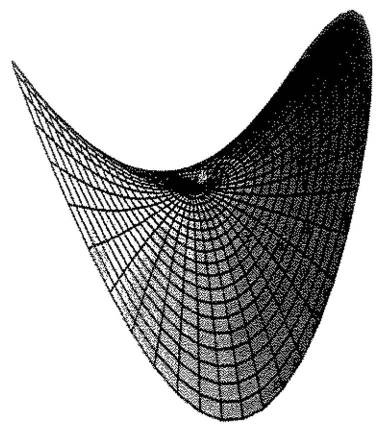
Podemos analisar o efeito produzido por f em Z quanto às partes real e imaginária de Z^2 por meio das funções

$$\begin{array}{rccc} f_1: & R^2 & \to & R \\ & (a,b) & \to & a^2-b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2: & R^2 & \to & R \\ & (a,b) & \to & 2ab \end{array}$$

cujos gráficos são:



$$\begin{array}{rccc} f_1: & R^2 & \to & R \\ & (a,b) & \to & a^2-b^2 \end{array}$$



$$\begin{array}{rccc} f_2: & R^2 & \to & R \\ & (a,b) & \to & 2ab \end{array}$$

Por outro lado, observamos que o gráfico de f_2 é o rotacionado do gráfico de f_1 por $\frac{3\pi}{4}$.

De fato, considere a forma polar de Z

$Z = \|Z\|\left[cos\theta + i\,sen\theta\right]$. Assim

$Z^2 = \|Z\|^2\left[\cos 2\theta + i\,sen 2\theta\right] = \|Z\|^2\cos 2\theta + i\,\|Z\|^2 sen 2\theta$

e as partes real e imaginária de Z^2 são

$$Re(Z^2) = \|Z\|^2 \cos 2\theta \quad \text{e} \quad Im(Z^2) = \|Z\|^2 sen2\theta.$$

Para efetuar a rotação desejada pelo ângulo $\frac{3\pi}{4}$ devemos fazer a multiplicação pelo complexo unitário

$$W = \left[cos\frac{3\pi}{4} + i\, sen\frac{3\pi}{4}\right],$$

o que produz

$$(WZ)^2 = \left[\left[cos\frac{3\pi}{4} + i\, sen\frac{3\pi}{4}\right]\|Z\|\left[cos\theta + i\, sen\theta\right]\right]^2 =$$

$$= \left[\|Z\|\left[cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) + i\, sen(\frac{3\pi}{4} + \theta)\right]\right]^2 =$$

$$= \|Z\|^2\left[cos(\frac{3\pi}{2} + 2\theta) + i\, sen(\frac{3\pi}{2} + 2\theta)\right] =$$

$$= \|Z\|^2 cos(\frac{3\pi}{2} + 2\theta) + i\, \|Z\|^2 sen(\frac{3\pi}{2} + 2\theta).$$

Assim,

$$Re[(WZ)^2] = \|Z\|^2 cos(\frac{3\pi}{2} + 2\theta) = \|Z\|^2 sen2\theta = \mathrm{Im}(Z^2).$$

3) Para a função

$$\begin{aligned} f:\ & C \rightarrow C \\ & Z \rightarrow Z^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i \end{aligned}$$

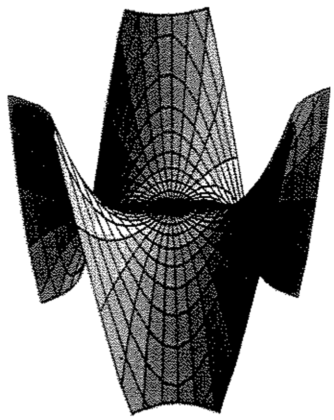
temos

$$Re(Z^3) = a^3 - 3ab^2 \quad \text{e} \quad Im(Z^3) = 3a^2b - b^3$$

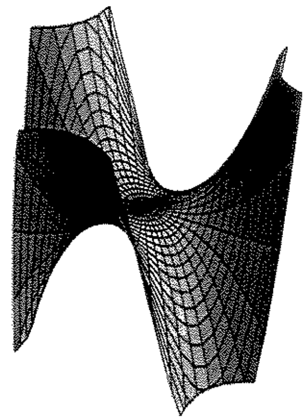
Considerando as funções da parte real e parte imaginária

$$\begin{aligned} f_1:\ & R^2 \rightarrow R \\ & (a,b) \rightarrow a^3 - 3ab^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2:\ & R^2 \rightarrow R \\ & (a,b) \rightarrow 3a^2b - b^3 \end{aligned}$$

cujos gráficos são

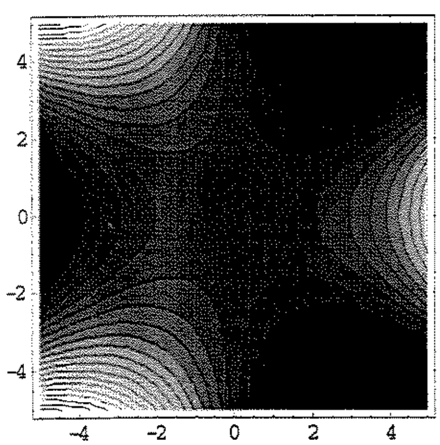


$$\begin{array}{rccc} f_1 : & R^2 & \to & R \\ & (a,b) & \to & a^3 - 3ab^2 \end{array}$$

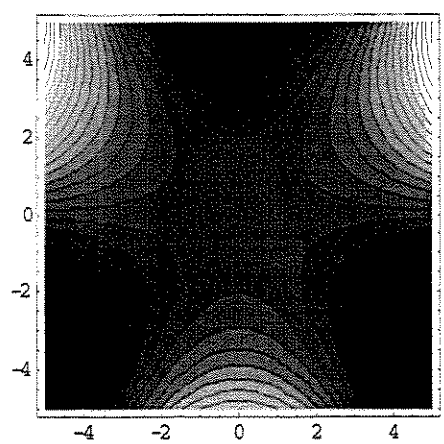


$$\begin{array}{rccc} f_2 : & R^2 & \to & R \\ & (a,b) & \to & 3a^2b - b^3 \end{array}$$

As curvas de nível abaixo também ilustram o efeito da rotação na parte real de Z^3 por $\frac{\pi}{2}$.



$$\begin{array}{rccc} f_1 : & R^3 & \to & R \\ & (a,b) & \to & a^3 - 3ab^2 \end{array}$$



$$\begin{array}{rccc} f_2 : & R^3 & \to & R \\ & (a,b) & \to & 3a^2b - b^3 \end{array}$$

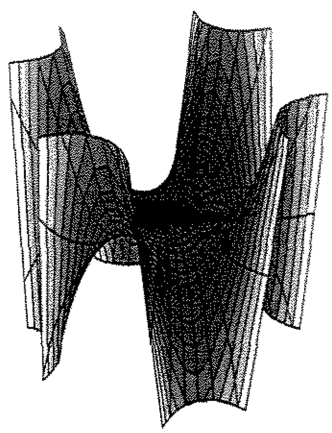
4) Para

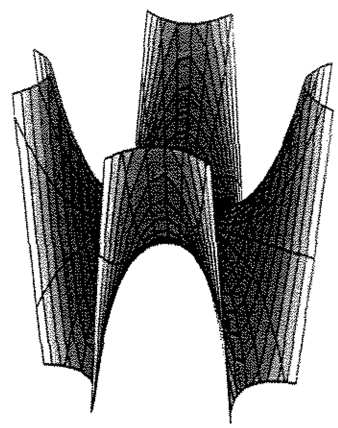
$$f: C \to C$$
$$Z \to Z^4$$

temos as funções da parte real e parte imaginária

$$f_1: R^2 \to R \qquad f_2: R^2 \to R$$
$$(a,b) \to a^4 - 6a^2b^2 + b^4 \qquad (a,b) \to 4a^2b - 4ab^2$$

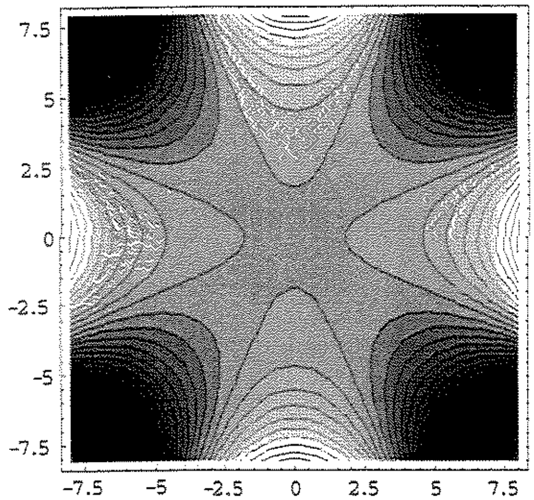
cujos gráficos são

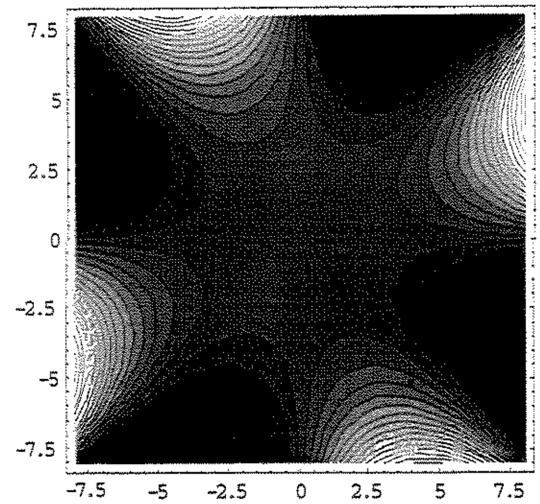




$$f_1: R^2 \to R \qquad f_2: R^2 \to R$$
$$(a,b) \to a^4 - 6a^2b^2 + b^4 \qquad (a,b) \to 4a^2b - 4ab^2$$

As curvas de nível abaixo também ilustram o efeito da rotação na parte real de Z^4 por $\frac{3\pi}{8}$.





$$\begin{array}{rcl} f_1 : \quad R^2 & \to & R \\ (a,b) & \to & a^4 - 6a^2b^2 + b^4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2 : \quad R^2 & \to & R \\ (a,b) & \to & 4a^2b - 4ab^2 \end{array}$$

5) Generalizando para a função

$$f : C \to C$$
$$Z \to Z^n$$

temos que, se $Z = \|Z\|\left[cos\theta + i\, sen\theta\right]$:

$$Z^n = \|Z\|^n\left[\cos n\theta + i\, senn\theta\right] = \|Z\|^n \cos n\theta + i\ \|Z\|^n sen\ n\theta$$

e as partes real e imaginária de Z^n são

$$Re(Z^n) = \|Z\|^n \cos n\theta \qquad Im(Z^n) = \|Z\|^n sen\ n\theta.$$

Efetuando a rotação pelo ângulo $\frac{3\pi}{2n}$ tomamos

$$W = \left[cos\frac{3\pi}{2n} + i\, sen\frac{3\pi}{2n}\right],$$

o que produz

$$(WZ)^n = \left[\left[cos\frac{3\pi}{2n} + i\, sen\frac{3\pi}{2n}\right]\|Z\|\left[cos\theta + i\, sen\theta\right]\right]^n =$$

$$= \left[\ \|Z\|\left[cos(\frac{3\pi}{2n} + \theta) + i\, sen(\frac{3\pi}{2n} + \theta)\right]\right]^n =$$

$$= \|Z\|^n\left[cos(\tfrac{3\pi}{2} + n\theta) + i\, sen(\tfrac{3\pi}{2} + n\theta)\right] =$$

$$= \|Z\|^n cos(\tfrac{3\pi}{2} + n\theta) + i\, \|Z\|^n sen(\tfrac{3\pi}{2} + n\theta).$$

Assim,

$$Re[(WZ)^n] = \|Z\|^n cos(\tfrac{3\pi}{2} + n\theta) = \|Z\|^n sen\, n\theta = \mathrm{Im}(Z^n)$$

Note também que a superfície do gráfico de $Re(Z^n)$ tem simetria de rotação de $\frac{2\pi}{n}$ pois

$$Z^n = \left[Z\left[\cos\tfrac{2\pi}{n} + i\, sen\tfrac{2\pi}{n}\right]\right]^n = Z^n\left[\cos 2\pi + i\, sen 2\pi\right] = Z^n.$$

6) Considere a função

$$\begin{aligned} f:\ & C \to C \\ & Z \to AZ + B \qquad A \text{ e } B \text{ fixos}, A \neq 0 \end{aligned}$$

Pela forma polar, podemos escrever

$$Z = \|Z\|\left[\cos\theta + i\, sen\theta\right]$$

$$A = \|A\|\left[\cos\theta_a + i\, sen\theta_a\right]$$

$$B = \|B\|\left[\cos\theta_b + i\, sen\theta_b\right]$$

$$AZ + B =$$

$$= \|A\|\left[\cos\theta_a + i\, sen\theta_a\right]\|Z\|\left[\cos\theta + i\, sen\theta\right] + \|B\|\left[\cos\theta_b + i\, sen\theta_b\right] =$$

$$= \|A\|\,\|Z\|\left[\cos(\theta + \theta_a) + i\, sen(\theta + \theta_a)\right] + \|B\|\left[\cos\theta_b + i\, sen\theta_b\right].$$

Assim, $f(Z) = AZ + B$ representa uma rotação de Z pelo ângulo argumento de A, acompanhado de uma expansão (ou contração) pelo fator $\|A\|$ e seguido de uma translação pelo vetor B.

3.4.2. Para os Quatérnios

1) Considere a função

$$\begin{aligned} f_p:\ & H \to H \\ & q \to p.q \end{aligned}$$

onde $p = a + bi + cj + dk$ é um quatérnio unitário fixo .

Observamos inicialmente que f_p é linear e

$\|pq - pw\| = \|p(q - w)\| = \|p\| \|q - w\| = \|q - w\|,$

isto é, f_p é ortogonal.

Podemos calcular

$f_p(1) = p.1 = p$

$f_p(i) = p.i = (a + bi + cj + dk)i = ai - b - ck + dj = -b + ai + dj - ck,$

$f_p(j) = p.j = (a + bi + cj + dk)j = aj + bk - c - di = -c - di + aj + bk,$

$f_p(k) = p.k = (a + bi + cj + dk)k = ak - bj + ci - d = -d + ci - bj + ak.$

Pelas identificações feitas no teorema 17 podemos escrever

$$\begin{array}{rccc} f_p: & R^4 & \rightarrow & R^4 \\ & q = (e,f,g,h) & \rightarrow & p.q = (A,B,C,D) \end{array}.$$

Neste caso, o valor de f_p nos elementos da base do R^4 fica

$f_p(1,0,0,0) = (a,b,c,d)(1,0,0,0) = (a,b,c,d),$

$f_p(0,1,0,0) = (a,b,c,d)(0,1,0,0) = (-b,a,d,-c),$

$f_p(0,0,1,0) = (a,b,c,d)(0,0,1,0) = (-c,-d,a,b),$

$f_p(0,0,0,1) = (a,b,c,d)(0,0,0,1) = (-d,c,-b,a)$

e a matriz de f_p em relação à base canônica é :

$$[f_p] = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

Note que $[\,f_p]$ é diferente de $\begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix}$ que é a matriz que se identifica a p.

A geometria da multiplicação nos Quatérnios - Rotações no $\mathbf{R}^4$

Suponha agora $p, q \in H$ não nulos e escritos na forma polar :

$p = \left[cos\theta + \hat{p}\ \ sen\theta\right]$ com $\hat{p} = \frac{1}{\| V(p) \|} V(p)$ unitário puro e

$q = \|q\| \left[\cos\Phi + \hat{q}\ \ sen\Phi\right]$ com $\hat{q} = \frac{1}{\| V(q) \|} V(q)$ unitário puro.

Observe que se w é unitário puro,

$$w = V(w) \quad \text{e} \quad 1 = \|w\| = \|V(w)\| \Rightarrow$$

$$ww = V(w)V(w) = -V(w)(-V(w)) =$$

$$= -\frac{V(w)(V(w)^*}{\|V(w)\|^2} = -\frac{S[V(w)(V(w)^*]}{\|V(w)\|^2} = -\frac{\|V(w)\|^2}{\|V(w)\|^2} = -1$$

Logo, $\hat{p}\hat{p} = \hat{q}\hat{q} = -1$.

Afirmação: Para qualquer $Z \in H$ o subespaço $V = [Z, \hat{p}\ Z]$ é invariante por f_p.

De fato,

$$f_p(Z) = pZ = \left[cos\theta + \hat{p}\ sen\theta\right]Z = cos\theta\, Z + sen\theta\, \hat{p}\ Z \in V \text{ e}$$

$$f_p(\hat{p}\ Z) = p(\hat{p}\ Z) = \left[cos\theta + \hat{p}\ sen\theta\right]\hat{p}\ Z =$$

$$= cos\theta(\hat{p}\ Z) + sen\theta \underbrace{\hat{p}\hat{p}}_{-1}\ Z =$$

$$= cos\theta(\hat{p}\ Z) - sen\theta\, Z \in V$$

Assim, dado $X = aZ + b\,\hat{p}\ Z \in V$ temos

$$f_p(X) = f_p(aZ + b\,\hat{p}\ Z) = a\,f_p(Z) + b\,f_p(\hat{p}\ Z) \in V.$$

Em particular, para $Z = 1$ temos que $V = [1, \hat{p}]$ é um subespaço de dimensão 2 invariante por f_p e

$\beta_1 = \{1, \hat{p}\}$ é uma base ortonormal para V pois

$$\| 1 \| = \left\| \hat{p} \right\| = 1 \text{ e } \left\langle 1, \hat{p} \right\rangle = \frac{S(1\ \hat{p})}{\| 1 \|^2 \left\| \hat{p} \right\|^2} = S(\hat{p}) = 0.$$

Fazendo $h = f_p \mid_V$, como

$$h(1) = p1 = \left[cos\theta + \hat{p}\ sen\theta \right] 1 = cos\theta.1 + sen\theta.\hat{p} \quad \text{e}$$

$$h(\hat{p}) = p\,\hat{p} = \left[cos\theta + \hat{p}\ sen\theta \right] \hat{p} =$$

$$= cos\theta\,\hat{p} + \hat{p}\hat{p}\ sen\theta = -sen\theta.1 + cos\theta.\,\hat{p},$$

a matriz de h em relação a β_1 é da forma

$$[h] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta. \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Compare com a expressão obtida no teorema 13.

Como f_p é ortogonal, $V^{\perp}$ também é invariante por f_p e tem dimensão 2.

Considere $g = f_p \mid_{V^{\perp}}$ e $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$ uma base ortormal de $V^{\perp}$.

Assim, identificando R^2 com $V^{\perp}$ pela simetria

$$\begin{array}{lcl} V^{\perp} & \rightarrow & R^2 \\ \{v_1, v_2\} & \rightarrow & \{e_1, e_2\} \end{array} ,$$

a matriz de g em relação a β_2 é da forma:

$$[g]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -sen\,\gamma. \\ sen\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$[g]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & sen\,\gamma \\ sen\,\gamma & -\cos\gamma \end{bmatrix} \text{ para algum } 0 \leq \gamma < 2\pi.$$

Temos ainda que o ângulo entre v_1 e sua imagem é:

$\langle pv_1, v_1 \rangle = \langle p, 1 \rangle$ (pois a multiplicação à direita por v_1 também é ortogonal) .

De onde concluímos que:

$\langle pv_1, v_1 \rangle = \langle p, 1 \rangle = \cos\theta$ (ângulo associado a p).

Analogamente, o ângulo entre v_2 e sua imagem é

$\langle pv_2, v_2 \rangle = \langle p, 1 \rangle = \cos\theta.$

Logo, g é uma rotação de θ no plano $V^{\perp}$

Assim , $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $V^{\perp}$ em relação à qual a matriz de g é da forma

$$[g] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta. \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e $\beta = \{1, \hat{p}, v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de H em relaçào à qual a matriz de f_p é da forma:

$$[f_p] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta. & 0 & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -sen\theta. \\ 0 & 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Em resumo, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

A função multiplicação à esquerda por um número quatérnio unitário fixo p

$$\begin{aligned} f_p \;\; H &\rightarrow H \\ q &\rightarrow pq \end{aligned}$$

é invariante no plano gerado por $\{1, \hat{p}\}$ e em seu complememto ortogonal, sendo que em ambos é uma rotação do ângulo θ associado a p.

OBS: Outra maneira de chegar à mesma conclusão é verificar que para a matriz $[f_p]$ de f_p em relação à base canônica obtida inicialmente:

$$[f_p] = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} ,$$

os autovalores de $[f_p]$ são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a - \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2} \ , \ \lambda_3 = \lambda_4 = a + \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2} ,$$

que são números complexos e podem ser escritos como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a - i\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \ , \ \lambda_3 = \lambda_4 = a + i\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} .$$

De acordo com o exposto em 1.5, se $m + ni$ é auto-valor de f_p correspondente ao auto-vetor $u + iv$, a matriz de $[f_p]$ restrita ao subespaço gerado por $\{u, v\}$ em relação à base $\{u, v\}$ de vetores reais relacionados é:

$$[f_p] = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \\ \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} & a \end{bmatrix}$$

Mas como $p = a + bi + cj + dk$ é unitário, na forma polar de p,

$$p = \|p\| \left[cos\theta + \hat{p} \ sen\theta \right] \quad , \quad 0 \leq \theta < \pi,$$

temos que $cos\theta = \dfrac{S(p)}{\|p\|} = a$ e $sen\theta = \dfrac{\|V(p)\|}{\|p\|} = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$.

Assim,

$$[f_p] = \begin{bmatrix} a & -\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \\ \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix},$$

o que coincide com o que já havíamos concluído.

2) Considere $Im(H)$ o subconjunto de H formado pelos imaginários puros e a função

$$\begin{aligned} f_p : \ H &\rightarrow \quad H \\ q &\rightarrow p.q.p^{-1} \end{aligned}$$

onde $p = a + bi + cj + dk$ é um quatérnio unitário fixo.

Observamos inicialmente que f_p é linear e

$$\|pqp^{-1} - pwp^{-1}\| = \|p(q-w)p^{-1}\| =$$

$$= \|p\|\,\|q-w\|\,\|p^{-1}\| = \|q-w\|,$$ isto é, f_p é ortogonal.

Por outro lado, se $w \in R$, como $f_p(w) = w$, f_p deixa invariante o subspaço R dos reais, logo, deixa também invariante seu complemento ortogonal $Im(H)$, formado pelos imaginários puros.

Em outras palavras, se q é imaginário puro então $p.q.p^{-1}$ também é e portanto a transformação linear ortogonal f_p restrita a $Im(H)$ está bem definida:

$$\begin{array}{rccc} f_p: & Im(H) & \rightarrow & Im(H) \\ & q & \rightarrow & p.q.p^{-1} \end{array}$$

Podemos calcular

$$f_p(i) = p.i.p^{-1} = (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) =$$

$$= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + (2bc + 2ad)j + (2bd - 2ac)k,$$

$$f_p(j) = p.j.p^{-1} = (a + bi + cj + dk)j(a - bi - cj - dk) =$$

$$= (2bc - 2ad)i + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)j + (2ab + 2cd)k,$$

$$f_p(k) = p.k.p^{-1} = (a + bi + cj + dk)k(a - bi - cj - dk) =$$

$$= (2ac + 2bd)i + (2cd - 2ab)j + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)k.$$

Considerando

$$X = c(-ce + bg + ah) - d(de + ag - bh) + a(ae - dg + ch) - b(-be - cg - dh),$$

$$Y = -b(-ce + bg + ah) + a(de + ag - bh) + d(ae - dg + ch) - c(-be - cg - dh),$$

$$M = a(-ce + bg + ah) + b(de + ag - bh) - c(ae - dg + ch) - d(-be - cg - dh),$$

pelas identificações feitas podemos escrever

$$
\begin{array}{llll}
f_p : & R^3 & \to & R^3 \\
& q = (f,g,h) & \to & p.q.p^{-1} = (X,Y,M)
\end{array}
$$

Neste caso, o valor de f_p nos elementos da base do R^3 fica

$$f_p(0,1,0,0) = (a,b,c,d)(0,1,0,0)(a,-b,-c,-d) =$$

$$= (a^2+b^2-c^2-d^2, 2bc+2ad, 2bd-2ac),$$

$$f_p(0,0,1,0) = (a,b,c,d)(0,0,1,0)(a,-b,-c,-d) =$$

$$= (2bc-2ad,\ a^2-b^2+c^2-d^2, 2ab+2cd),$$

$$f_p(0,0,0,1) = (a,b,c,d)(0,0,0,1)(a,-b,-c,-d) =$$

$$= (2ac+2bd,\ 2cd-2ab,\ a^2-b^2-c^2+d^2),$$

e a matriz de f_p em relação à base canônica é :

$$[f_p] = \begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2bc+2ad & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

A geometria da multiplicação nos Quatérnios - Rotações no $\mathbf{R}^3$

Suponha agora $p \in H$, $q \in \mathrm{Im}(H)$ não nulos e escritos na forma polar :

$p = \left[cos\theta + \hat{p}\ \ sen\theta\right]$ com $\hat{p} = \dfrac{1}{\|V(p)\|}V(p)$ unitário puro e

$q = \|q\|\left[\cos\Phi + \hat{q}\ \ sen\Phi\right] = \|V(q)\|\left[\hat{q}\ \ sen\Phi\right]$,

com $\hat{q} = \dfrac{1}{\|V(q)\|}V(q)$ unitário puro

Observe que $\hat{p}$ é auto-vetor de f_p pois (lembrando que $\hat{p}\,\hat{p} = -1$)

$$f_p(\hat{p}) = p\ \hat{p}\ p^{-1} = \left[cos\theta + \hat{p}\ \ sen\theta\right]\hat{p}\left[cos\theta - \hat{p}\ \ sen\theta\right] =$$

$$= \left[cos\theta\ \hat{p} - sen\theta\right]\left[cos\theta - \hat{p}\ \ sen\theta\right] =$$

$$= \left[cos^2\theta\ \hat{p} + \cos\theta sen\theta - \cos\theta sen\theta + sen^2\theta\ \hat{p}\right] = \hat{p}.$$

Logo, para qualquer $Z \in H$ o subespaço $V = [\hat{p}\ Z]$ é invariante por f_p.

Em particular, para $Z = 1$ temos que $V = [\hat{p}]$ é um subespaço de dimensão 1 invariante por f_p e $\beta_1 = \{\hat{p}\}$ é uma base ortonormal para V.

Fazendo $h = f_p \mid_V$, como $h(\hat{p}) = p\,\hat{p}\,p^{-1} = \hat{p} = 1\,\hat{p}$, temos que a matriz de h em relação a β_1 é da forma:

$[h] = [1]$.

Como f_p é ortogonal, $V^{\perp}$ também é invariante por f_p e tem dimensão 2.

Considere $g = f_p \mid_{V^{\perp}}$ e $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$ uma base ortonormal de $V^{\perp}$.

Assim, identificando R^2 com $V^{\perp}$ pela simetria

$$\begin{array}{ccc} V^{\perp}. & \longrightarrow & R^2 \\ \{v_1, v_2\} & \longrightarrow & \{e_1, e_2\} \end{array},$$

a matriz de g em relação a β_2 é da forma

$$[g]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -sen\,\gamma. \\ sen\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$[g]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & sen\,\gamma \\ sen\,\gamma & -\cos\gamma \end{bmatrix} \text{, para algum } 0 \leq \gamma < 2\pi,$$

isto é, g é uma rotação ou uma reflexão em $V^{\perp}$.

Mas o ângulo entre v_1 e sua imagem é

$$\frac{\langle v_1, pv_1\,p^{-1}\rangle}{\|pv_1\,p^{-1}\|\,\|\,v_1\|} = \langle v_1, pv_1\,p^{-1}\rangle = \cos 2\theta \text{ pois}$$

$$\langle v_1, pv_1\,p^{-1}\rangle = \left\langle v_1, \left[cos\theta + \hat{p}\ \ sen\theta\right] v_1 \left[cos\theta - \hat{p}\ \ sen\theta\right]\right\rangle =$$

$$= \left\langle v_1, \left[cos\theta v_1 + \hat{p}\ v_1 sen\theta\right]\left[cos\theta - \hat{p}\ \ sen\theta\right]\right\rangle =$$

$$= \left\langle v_1,\ cos^2\theta v_1 - \ v_1\,\hat{p}\ cos\theta sen\theta\ +\ \hat{p}\ v_1 sen\theta cos\theta - \hat{p}\ v_1\,\hat{p}\ sen^2\theta\right\rangle =$$

$$= cos^2\theta\langle v_1, v_1\rangle - \left\langle v_1, v_1\,\hat{p}\right\rangle cos\theta sen\theta + \left\langle v_1, \hat{p}\ v_1\right\rangle sen\theta cos\theta - \left\langle v_1,\ \hat{p}\ v_1\,\hat{p}\right\rangle sen^2\theta$$

Como

$\left\langle v_1, v_1 \hat{p} \right\rangle = \left\langle 1, \hat{p} \right\rangle = 0$ (pois a multiplicação à esquerda por v_1 é ortogonal),

$\left\langle v_1, \hat{p}\, v_1 \right\rangle = \left\langle 1, \hat{p} \right\rangle = 0$ (pois a multiplicação à direita por v_1 é ortogonal),

$$\left\langle v_1,\ \hat{p}\, v_1\, \hat{p} \right\rangle = \left\langle v_1\, \hat{p},\ \left(\hat{p}\, v_1\, \hat{p}\right) \hat{p} \right\rangle = \left\langle v_1\, \hat{p},\ \hat{p}\ (v_1\, \hat{p}\hat{p}) \right\rangle =$$

$$= \left\langle v_1\, \hat{p},\ \hat{p}\, v_1 \right\rangle = \left\langle v_1\, \hat{p},\ -v_1\, \hat{p} \right\rangle = -\left\langle v_1\, \hat{p},\ v_1\, \hat{p} \right\rangle = 1,$$

(onde a penúltima igualdade decorre do fato que se X e Y são imaginários puros e perpendiculares então XY é imaginário puro e $XY = -YX$)

temos que

$$\left\langle v_1,\ p v_1\, p^{-1} \right\rangle =$$

$$= cos^2\theta \langle v_1, v_1 \rangle - \left\langle v_1, v_1\, \hat{p} \right\rangle cos\theta sen\theta + \left\langle v_1, \hat{p}\, v_1 \right\rangle sen\theta cos\theta - \left\langle v_1,\ \hat{p}\, v_1\, \hat{p} \right\rangle sen^2\theta$$

$$= \cos 2\theta.$$

Analogamente, o angulo entre v_2 e sua imagem é

$$\frac{\left\langle p v_2\, p^{-1}, v_2 \right\rangle}{\| p v_2\, p^{-1} \| \, \| v_2 \|} = \left\langle p v_2\, p^{-1}, v_2 \right\rangle = \cos 2\theta,$$

o que significa que g é uma rotação de 2θ no plano $V^{\perp}$.

Assim , $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $V^{\perp}$ em relação à qual a matriz de g é da forma

$$[g] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -sen 2\theta. \\ sen 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix},$$

e $\beta = \{\hat{p}, v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $Im(H)$ em relação à qual a matriz de f_p é da forma:

$$[f_p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -sen 2\theta. \\ 0 & sen 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Em resumo, temos a seguinte proposição

Proposição 2

A função

$$f_p : Im(H) \longrightarrow Im(H)$$
$$q \longrightarrow pqp^{-1}$$

é invariante no plano gerado por $\{\hat{p}\}$ e em seu complemento ortogonal, sendo que representa uma rotação do ângulo 2θ em torno de $\hat{p}$.

Exemplo 6 A rotação em R^3 ao redor do vetor $(1,2,3)$ e com ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ pode ser dada pela função

$$f_p : Im(H) \longrightarrow Im(H)$$
$$q \longrightarrow pqp^{-1}$$

onde $p = \left[cos\theta + \hat{p}\ sen\theta\right] = \left[cos\frac{\pi}{6} + \frac{(i+2j+3k)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\ sen\frac{\pi}{6}\right] =$

$$= \left[cos\frac{\pi}{6} + \frac{(i+2j+3k)}{\sqrt{14}}\ sen\frac{\pi}{6}\right] =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(i+2j+3k)}{\sqrt{14}}\ \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2\sqrt{14}} + \frac{j}{\sqrt{14}} + \frac{3k}{2\sqrt{14}}.$$

Podemos apreciar agora uma nova visão sobre este caso com o próximo resultado.

A Bijeção entre P^3 e SO(3)

Como vimos, as rotações no R^3 também podem ser caracterizadas através da álgebra dos quatérnios.A construção a seguir estabelece uma bijeção entre as matrizes de rotação $3x3$ e pares de quatérnios antípodas $\{q,-q\}$ da esfera unitária no R^3. Temos então um isomorfismo entre $SO(3)$ e o espaço projetivo P^3 (na verdade esta bijeção é um homeomorfismo entre estes conjuntos como espaços topológicos).

Identificamos cada quatérnio $q = t + xi + yj + zk$ como o elemento (t,x,y,z) *de* R^4.

Destacamos então em R^4 dois subespaços especiais : R e R^3.De acordo com nossas identicações, R é o conjunto dos quatérnios reais $t + 0i + 0j + 0k$ enquanto que R^3 é o conjunto dos quatérnios imáginários puros $xi + yj + zk$. Dentro da tradiçào do cálculo vetorial de Hamilton, diremos também que R é o conjunto dos escalares e R^3 dos vetores.

Assim, em relação ao produto interno canônico de R^4 (que adotaremos sempre), R^3 é o complemento ortogonal de R.

Já vimos que dados os quatérnios p e q com q não nulo , o inverso multiplicativo de q é dado por

$$q^{-1} = \frac{q *}{\|q\|^2} \quad \text{e}$$

$$\|p.q\| = \|p\|\|q\|.$$

Observe também que quando $\|q\| = 1$ temos que $q^{-1} = q^*$ e $\|q^{-1}\| = 1$. Segue daí que a esfera $S^3 \subset R^4$ pode ser vista como o conjunto dos quatérnios de norma 1 e é um grupo relativamente à multiplicação de quatérnios.

Lema 7 Se o quatérnio q comuta com todo imaginário puro então q é real. Além disso, se $q \in S^3$ então $q = \pm 1$.

Demonstração

Se $q = a + bi + cj + dk$ então

$iq = -b + ai - dj + ck$ e $qi = -b + ai + dj - ck.$

Como devemos ter $iq = qi$, concluímos que $c = d = 0$, isto é, $q = a + bi.$

Logo, $qj = aj + bk$ e $jq = aj - bk.$

Pelo mesmo raciocínio anterior, devemos ter $b = 0$, o que implica que q é real.

Teorema 19 Existe um homomorfismo contínuo sobrejetivo $\varphi : S^3 \to SO(3)$ cujo núcleo é $\{1,-1\}$.

Demonstração

Considere a função

$$\begin{array}{llllll} \varphi : & S^3 & \to & M_{(4)} & & \\ & u & \to & \varphi_u : & R^4 & \to & R^4 \\ & & & & w & \to & u.w.u^{-1} \end{array}$$

que a cada $u \in S^3$ associa a transformação linear φ_u.

Considerada inicialmente em R^4 , φ_u é evidentemente linear e, como $\|u.w.u^{-1}\| = \|w\|$,

$\varphi_u : R^4 \to R^4$ é ortogonal.

Também, para $w \in R$, como $\varphi_u(w) = w$, φ_u deixa invariante o subspaço R dos reais, logo, deixa também invariante seu complemento ortogonal R^3 , formado pelos imaginários puros.

Em outras palavras, se $q = xi + yj + zk$ é imaginário puro então $u.w.u^{-1}$ também é e portanto a transformação linear ortogonal $\varphi_u : R^3 \to R^3$ restrita ao R^3 está bem definida.

Em outras palavras, $\varphi_u \in O(3)$.

A matriz $[\varphi_u]$ de φ_u :

$$[\varphi_u] = \begin{bmatrix} u.i.u^{-1} & u.j.u^{-1} & u.k.u^{-1} \end{bmatrix}$$

tem como colunas os vetores $u.i.u^{-1}$, $u.j.u^{-1}$ e $u.k.u^{-1}$, que dependem continuamente de u $\in S^3$.

Temos $det[\varphi_u] = \pm 1$ para todo $u \in S^3$.

Como S^3 é conexa e, para $u = 1$, temos

$$[\varphi_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $det[\varphi_1] = 1$, segue que $det[\varphi_u] = 1$ para todo $u \in S^3$.

Logo, $\varphi_u \in SO(3)$ qualquer que seja $u \in S^3$, o que nos dá uma função contínua

$$\begin{array}{llllll} \varphi : & S^3 & \to & SO(3) & & \\ & u & \to & \varphi_u : R^3 & \to & R^3 \\ & & & w & \to & u.w.u^{-1} \end{array}$$

Claro que $\varphi_{u.v} = \varphi_u \circ \varphi_v$, de modo que φ é um homomorfismo de grupos.

O núcleo de φ é formado pelos quatérnios $u \in S^3$ tais que $u.w.u^{-1} = w$, ou seja,

$u.w = w.u$ para todo $w \in R^3$. Pelo lema acima, concluímos que $Ker(\varphi) = \{1,-1\}$.

Em outras palavras, $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow y = \pm x$.

Em particular, φ é localmente injetiva. Resta provar que φ é sobrejetiva.

Como S^3 é compacto e $SO(3)$ é conexo, basta mostrar que φ é uma aplicação aberta.

(assim $\varphi(S^3)$ será um subconjunto fechado e aberto de $SO(3)$, implicando em $\varphi(S^3) = SO(3)$).

Observe que φ é uma aplicação de classe C^∞ pois para cada $u \in S^3$os elementos da matriz de φ_u são funções infinitamente diferenciáveis de u.

Como φ é homomorfismo de grupos, seu posto é constante e pelo teorema do Posto (veja [13]), como φ é localmente injetiva, seu posto é máximo, isto é, é igual a 3. Em particular, φ é uma submersão e portanto uma aplicação aberta.

Como o núcleo de φ é $\{1,-1\}$, por passagem ao quociente obtemos uma bijeção contínua

$$\overline{\varphi} : P^3 \to SO(3)$$

Assim concluímos que cada quatérnio unitário u (e seu inverso) determina uma rotação no R^3

$$\begin{array}{rccc} \varphi_u : & R^3 & \to & R^3 \\ & w & \to & u.w.u^{-1} \end{array}$$

3) Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f : & H & \to & H \\ & p & \to & p^2 \end{array}$$

onde $p = a + bi + cj + dk$

Pelas identificações feitas no teorema 17, podemos ver f como

$$f: \quad M_{(4,R)} \to M_{(4,R)}$$

$$p = \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix} \to p^2 = \begin{bmatrix} a & -d & -c & -b \\ d & a & b & -c \\ c & -b & a & d \\ b & c & -d & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2-b^2-c^2-d^2 & \\ 2ad & * \\ 2ac & \\ 2ab & \end{bmatrix}$$

(só nos interessa a primeira coluna desta matriz).

Logo

$$p^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2abi + 2acj + 2adk.$$

Podemos analisar o efeito produzido por f em p quanto às partes real e imaginária de p^2 por meio das funções auxiliares :

$$f_1: \begin{array}{ccc} R^4 & \to & R \\ (a,b) & \to & a^2-b^2-c^2-d^2 \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{ccc} R^4 & \to & R \\ (a,b) & \to & 2ab+2ac+2ad \end{array}$$

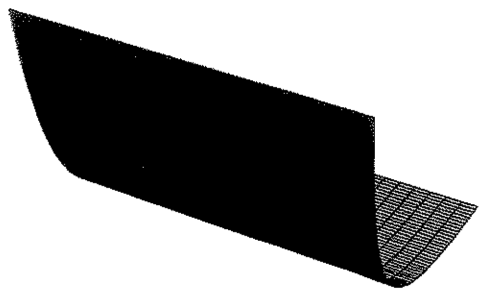
$$f_3: \begin{array}{ccc} R^4 & \to & R \\ (a,b) & \to & 2ab \end{array} \qquad f_4: \begin{array}{ccc} R^4 & \to & R \\ (a,b) & \to & 2ac \end{array} \qquad f_5: \begin{array}{ccc} R^4 & \to & R \\ (a,b) & \to & 2ad \end{array}$$

e de imediato verificamos que se p é um quatérnio onde $c = d = 0$, obtemos exatamente os mesmos resultados que encontramos na análise da função $f(Z) = Z^2$ onde Z é um número complexo. No entanto, as semelhanças param por aqui pois, ao contrário do que lá ocorria, não existe relação de rotação ou simetria entre os gráficos das partes real e imaginária de p^2 ou da parte real com "parte" da parte imaginária. Por outro lado, é evidente que as componentes da parte imaginária, relativa às funções f_3, f_4, e f_5 são de mesma natureza.

Vejamos as principais diferenças.

Nas formas quadráticas de f_1 e f_3 observamos que f_3 tem auto-valor zero e f_1 não.

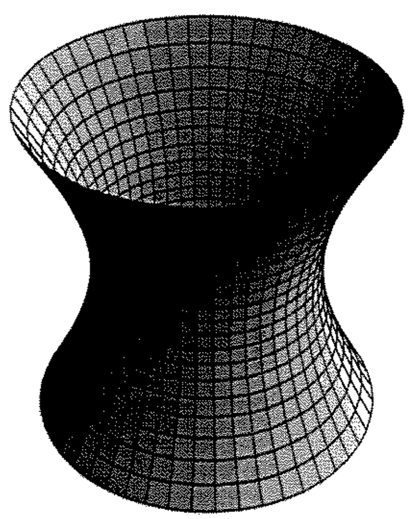
Para f_3 as superfícies de nível $2ab = k$ no R^3 são do tipo cilíndrico hiperbólico para $k \neq 0$ ou o par de planos perpendiculares ($a = 0$ ou $b = 0$) para $k = 0$



$2ab = k \neq 0$

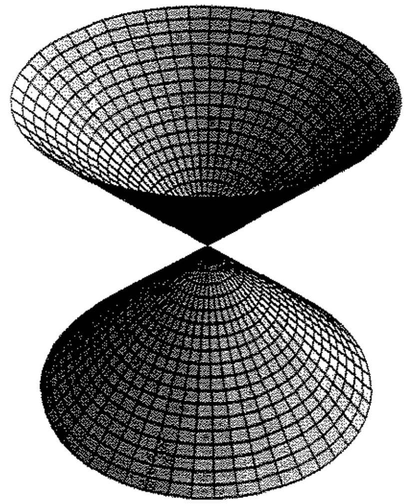
Para f_1(restringindo ao caso $d = 0$) as superfícies de nível $a^2 - b^2 - c^2 = k$ são do tipo:

a) Se $k < o$



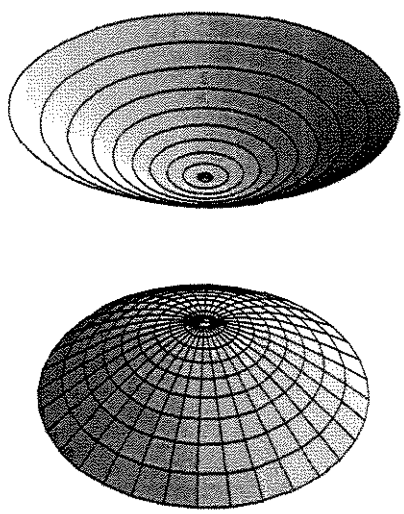
$a^2 - b^2 - c^2 = k < 0$

b) Se $k = 0$



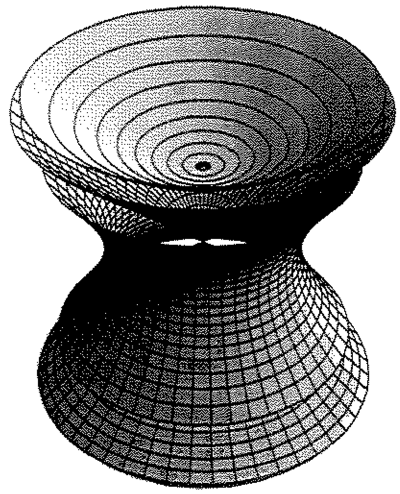
$a^2 - b^2 - c^2 = k = 0$

c) Se $k > 0$



$a^2 - b^2 - c^2 = k > 0$

que reunidas produzem



$a^2 - b^2 - c^2 = k$

3.4.3. Para os Números de Cayley

Considere

$p = a + bi + cj + dk$, $Q = e - fi - gj - hk$

$E_0 = (1,0)$, $E_1 = (i,0)$, $E_2 = (j,0)$, $E_3 = (k,0)$

$E_4 = (0,1)$, $E_5 = (0,-i)$, $E_6 = (0,-j)$, $E_7 = (0,-k)$

Tendo em vista a operação em $H X H$ como na construção de Cayley Dickson e as identificações feitas no teoema 18, podemos reunir os dois resultados como

$$a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_4 + fe_5 + ge_6 + he_7 \longrightarrow (p, Q) \rightarrow (a,b,c,d,e,f,g,h),$$
$$1 \longrightarrow (p = 1 + 0i + 0j + 0k, Q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (1,0) \rightarrow (1,0,0,0,0,0,0,0),$$
$$e_1 \longrightarrow (p = 0 + 1i + 0j + 0k, Q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (i,0) \rightarrow (0,1,0,0,0,0,0,0),$$
$$e_2 \longrightarrow (p = 0 + 0i + 1j + 0k, Q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (j,0) \rightarrow (0,0,1,0,0,0,0,0),$$
$$e_3 \longrightarrow (p = 0 + 0i + 0j + 1k, Q = 0 - 0i - 0j - 0k) = (k,0) \rightarrow (0,0,0,1,0,0,0,0),$$
$$e_4 \longrightarrow (p = 0 + 0i + 0j + 0k, Q = 1 - 0i - 0j - 0k) = (0,1) \rightarrow (0,0,0,0,1,0,0,0),$$
$$e_5 \longrightarrow (p = 0 + 0i + 0j + 0k, Q = 0 - 1i - 0j - 0k) = (0,-i) \rightarrow (0,0,0,0,0,1,0,0),$$
$$e_6 \longrightarrow (p = 0 + 0i + 0j + 0k, Q = 0 - 0i - 1j - 0k) = (0,-j) \rightarrow (0,0,0,0,0,0,1,0),$$
$$e_7 \longrightarrow (p = 0 + 0i + 0j + 0k, Q = 0 - 0i - 0j - 1k) = (0,-k) \rightarrow (0,0,0,0,0,0,0,1).$$

Assim temos que $B = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$ é uma base para $H \times H$ que se idenfica à base canônica do R^8.

1) Considere então a função

$$\begin{aligned} f_\alpha : \quad HXH &\longrightarrow HXH \\ \beta = (r,s) &\longrightarrow f_\alpha(\beta) = \alpha\beta \end{aligned}$$

onde

$\alpha = (p,q)$, $p = a + bi + cj + dk$, $q = e + fi + gj + hk,$ α unitário fixo.

Calculando a matriz de f_α em relação a B

$$\begin{aligned} f_\alpha((1,0)) &= (p,q).(1,0) = (p.1 - 0.\overline{q}, \ \overline{p}.0 + 1.q) = (p,q) = \\ &= (a + bi + cj + dk \ , \ e + fi + gj + hk) = \\ &= a(1,0) + b(i,0) + c(j,0) + d(k,0) + \\ &\quad + e(0,1) - f(0,-i) - g(0,-j) - h(0,-k) = \\ &= aE_0 + bE_1 + cE_2 + dE_3 + eE_4 - fE_5 - gE_6 - hE_7. \end{aligned}$$

Pelo mesmo tipo de cálculo encontramos

$$\begin{aligned} f_\alpha((i,0)) &= (pi,iq) = \ (ia - b - ck + dj, \ \ ie - f + gk - hj) \ = \\ &= -bE_0 + aE_1 + dE_2 - cE_3 - fE_4 - eE_5 + hE_6 - gE_7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha((j,0)) &= (pj,jq) = \ (-c - id + aj + bk, \ \ -g + ih + ej - fk) \ = \\ &= -cE_0 - dE_1 + aE_2 + bE_3 - gE_4 - hE_5 - eE_6 + fE_7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha((k,0)) &= (pk,kq) = \ (ic - d + ak - bj, \ \ -ig - h + ek + fj) \ = \\ &= -dE_0 + cE_1 - bE_2 + aE_3 - hE_4 + gE_5 - fE_6 - eE_7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha((0,1)) &= (-\overline{q},\overline{p}) = \ (if + gj + hk - e, \ \ a - ib - cj - dk) \ = \\ &= -eE_0 + fE_1 + gE_2 + hE_3 + aE_4 + bE_5 + cE_6 + dE_7. \end{aligned}$$

$$f_\alpha((0,-i)) = (i\overline{q},-\overline{p}i) = \ (ie + f - gk + hj, \ \ -ia - b - ck + dj) \ =$$

$$= fE_0 + eE_1 + hE_2 - gE_3 - bE_4 + aE_5 - dE_6 + cE_7.$$

$$f_\alpha((0,-j)) = (j\overline{q}, -\overline{p}j) = (g - ih + ej + fk, \quad -c - id - aj + bk) =$$

$$= gE_0 - hE_1 + eE_2 + fE_3 - cE_4 + dE_5 + aE_6 - bE_7.$$

$$f_\alpha((0,-k)) = (k\overline{q}, -\overline{p}k) = (ig + h + ek - fj, \quad ic - d - ak - bj) =$$

$$= hE_0 + gE_1 - fE_2 + eE_3 - dE_4 - cE_5 + bE_6 + aE_7.$$

e a matriz de f_α em relação a B fica:

$$[f_\alpha] = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d & -e & f & g & h \\ b & a & -d & c & f & e & -h & g \\ c & d & a & -b & g & h & e & -f \\ d & -c & b & a & h & -g & f & e \\ e & -f & -g & -h & a & -b & -c & -d \\ -f & -e & -h & g & b & a & d & -c \\ -g & h & -e & -f & c & -d & a & b \\ -h & -g & f & -e & d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

Observe que, como α é unitário, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 1.$

Logo,

$$[f_\alpha][f_\alpha]^t = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}[f_\alpha][f_\alpha]^t = Id.,$$

isto é, $[f_\alpha]$ é ortogonal.

Mais ainda, $det[f_\alpha] = 1$, isto é, $[f_\alpha]$ é uma rotação em R^8 como veremos a seguir.

Os autovalores de $[f_\alpha]$ são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = a - \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2 - g^2 - h^2},$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = a + \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2 - g^2 - h^2}$$

e representam números complexos, o que significa que f_α não possui auto-vetores reais, ou seja, f_α não tem subespaços invariantes de dimensão 1.

Também, fazendo

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -e & f & g & h \\ f & e & -h & g \\ g & h & e & -f \\ h & -g & f & e \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} e & -f & -g & -h \\ -f & -e & -h & g \\ -g & h & -e & -f \\ -h & -g & f & -e \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

vemos que $C = -B^t$ e a matriz de f_α pode ser escrita como

$$[f_\alpha] = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{bmatrix}.$$

Sob outra formulação, considere então a função anterior como

$$f_\alpha : K \to K$$
$$\beta \to \alpha.\beta$$

onde α é um Cayley unitário fixo.

Observamos inicialmente que f_α é linear e

$\|pq - pw\| = \|p(q-w)\| = \|p\|\,\|q-w\| = \|q-w\|$,

isto é, f_α é ortogonal.

A geometria da multiplicação nos números de Cayley - Rotações no $\mathbf{R}^8$

Suponha agora que $\alpha, \beta \in K$ são não nulos e escritos na forma polar :

$\alpha = \left[cos\theta + \hat{\alpha}\ sen\theta\right]$ com $\hat{\alpha} = \dfrac{1}{\|V(\alpha)\|} V(\alpha)$ unitário puro e

$\beta = \|\beta\|\left[\cos\Phi + \hat{\beta}\ sen\Phi\right]$ com $\hat{\beta} = \dfrac{1}{\|V(\beta)\|} V(\beta)$ unitário puro

Já sabemos que $\hat{\alpha}\,\hat{\alpha} = \hat{\beta}\,\hat{\beta} = -1$

Afirmação: Para qualquer $Z \in K$ o subespaço $V = [Z, \hat{\alpha} Z]$ é invariante por f_α.

De fato,

$$f_\alpha(Z) = \alpha Z = \left[\cos\theta + \hat{\alpha}\ \operatorname{sen}\theta\right] Z = \cos\theta\, Z + \operatorname{sen}\theta\ \hat{\alpha}\ Z \in V.$$

$$f_\alpha(\hat{\alpha}\ Z) = \alpha(\hat{\alpha}\ Z) = \left[\cos\theta + \hat{\alpha}\ \operatorname{sen}\theta\right](\hat{\alpha}\ Z) =$$

$$= \cos\theta(\hat{\alpha}\ Z) + \operatorname{sen}\theta\, \hat{\alpha}\ (\hat{\alpha}\ Z) =$$

$$= \cos\theta(\hat{\alpha}\ Z) + \operatorname{sen}\theta\ \underbrace{(\hat{\alpha}\hat{\alpha})}_{-1}\ Z = \cos\theta(\hat{\alpha}\ Z) - \operatorname{sen}\theta\, Z \in V.$$

Em particular, para $Z = 1$ temos que $V = [1, \hat{\alpha}]$ é um subespaço de dimensão 2 invariante por f_α e

$\beta_1 = \{1, \hat{\alpha}\}$ é uma base ortonormal para V pois

$$\|1\| = \left\|\hat{\alpha}\right\| = 1 \text{ e } \left\langle 1, \hat{\alpha}\right\rangle = \frac{S(1\ \hat{\alpha})}{\|1\|^2 \left\|\hat{\alpha}\right\|^2} = S(\hat{\alpha}) = 0.$$

Fazendo $h = f_\alpha \mid_V$, como

$$h(1) = \alpha 1 = \left[\cos\theta + \hat{\alpha}\ \operatorname{sen}\theta\right]1 = \cos\theta.1 + \operatorname{sen}\theta.\hat{\alpha} \quad \text{e}$$

$$h(\hat{\alpha}) = \alpha\,\hat{\alpha} = \left[\cos\theta + \hat{\alpha}\ \operatorname{sen}\theta\right]\hat{\alpha} =$$

$$= \cos\theta\,\hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{\alpha}\ \operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta.1 + \cos\theta.\,\hat{\alpha},$$

a matriz de h em relação a β_1 é da forma

$$[h] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta. \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Isto é, no plano gerado por $[1, \hat{\alpha}]$ f_α é uma rotação de θ.

Como f_α é ortogonal, $V^\perp$ também é invariante por f_α e tem dimensão 6.

Para concluirmos sobre a caracterização geométrica completa desta transformação, observemos inicialmente que para qualquer $\beta \in V^\perp$ (veja que β é imaginário puro) o ângulo entre $f_\alpha(\beta)$ e β é fixo e igual a θ.

De fato

$$\frac{\langle \alpha\beta, \beta\rangle}{\|\alpha\beta\|\,\|\beta\|} = \frac{\left\langle \left[cos\theta + \hat{\alpha}\ \ sen\theta\right]\beta, \beta\right\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|\|\beta\|} = \frac{\cos\theta\langle\beta,\beta\rangle + sen\theta\left\langle\hat{\alpha}\ \beta,\beta\right\rangle}{\|\beta\|^2} =$$

$$\frac{\cos\theta\langle\beta,\beta\rangle}{\|\beta\|^2} + \frac{sen\theta\left\langle\hat{\alpha}\ \beta,\beta\right\rangle}{\|\beta\|^2} = \cos\theta, \text{ pois}$$

$$\left\langle\hat{\alpha}\ \beta,\beta\right\rangle = \left\langle\hat{\alpha},1\right\rangle = 0.$$

Fazendo $g = f_\alpha \mid_{V^\perp}$, (como f_α não tem subespaços invariantes de dimensao 1), sabemos que existe uma base ortonormal β_2 em $V^\perp$ tal que em relação a β_2 a matriz de g é

$$[g] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -sen\theta. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -sen\theta. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e $\beta = \{1, \hat{\alpha}\} \cup \beta_2$ é uma base ortonormal de K em relaçào à qual a matriz de f_α é da forma:

$$[f_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -sen\theta. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -sen\theta. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -sen\theta. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Em resumo, temos a seguinte proposição:

Proposição 3

A função multiplicação à esquerda por um número de Cayley unitário fixo α

$$\begin{aligned} f_\alpha : K &\rightarrow K \\ \beta &\rightarrow \alpha\beta \end{aligned}$$

é invariante no plano gerado por $\{1, \hat{\alpha}\}$ e em seu complememto ortogonal, sendo que em ambos é uma rotação do ângulo θ associado a α.

OBS: Outra maneira de chegar à mesma conclusão é verificar a matriz $[f_\alpha]$ de f_α em relação à base canônica obtida inicialmente:

$$[f_\alpha] = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d & -e & f & g & h \\ b & a & -d & c & f & e & -h & g \\ c & d & a & -b & g & h & e & -f \\ d & -c & b & a & h & -g & f & e \\ e & -f & -g & -h & a & -b & -c & -d \\ -f & -e & -h & g & b & a & d & -c \\ -g & h & -e & -f & c & -d & a & b \\ -h & -g & f & -e & d & c & -b & a \end{bmatrix},$$

com os autovalores

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = a - \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2 - g^2 - h^2}\ ,$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = a + \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2 - g^2 - h^2}$$

que são números complexos e podem ser escritos como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = a - i\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}\ ,$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = a + i\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}$$

De acordo com o exposto em 1.5, se $m + ni$ é auto-valor de f_α correspondente ao auto-vetor $u + iv$, a matriz de $[f_\alpha]$ restrita ao subespaço gerado por $\{u, v\}$ em relação à base $\{u, v\}$ de vetores reais relacionados é:

$$[f_\alpha] = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & \sqrt{b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2} \\ \sqrt{b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2} & a \end{bmatrix}$$

Mas como $\alpha = a + bi + cj + dk,\ e + fi + gj + hk$ é unitário, na forma polar de α

$$\alpha = \|\alpha\| \left[cos\theta + \hat{\alpha}\ sen\theta \right] \quad , \quad 0 \leq \theta < \pi \ ,$$

temos que $cos\theta = \dfrac{S(\alpha)}{\|\alpha\|} = a$ e $sen\theta = \dfrac{\|V(\alpha)\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2}$.

Assim, restrita ao subespaço gerado por $\{u, v\}$ a matriz de $[f_\alpha]$ é

$$[f_\alpha] = \begin{bmatrix} a & -\sqrt{b^2+c^2+d^2} \\ \sqrt{b^2+c^2+d^2} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

o que coincide com o que já havíamos concluído.

A geometria da multiplicação nos Octônios Puros - Rotações no $\mathbf{R}^7$

2) Considere $Im(K)$ o subconjunto de K formado pelos imaginários puros e a função

$$\begin{aligned} f_\alpha : K) &\longrightarrow ImK \\ \beta &\longrightarrow \alpha.(\beta.\alpha^{-1}) \end{aligned}$$

onde α é um Cayley unitário fixo.

Observamos inicialmente que f_α é linear e

$$\|\alpha(q\alpha^{-1}) - \alpha(w\alpha^{-1})\| = \|\alpha(q\alpha^{-1} - w\alpha^{-1})\| =$$

$$= \|\alpha(q-w)\alpha^{-1}\| = \|\alpha\|\,\|q-w\|\,\|\alpha^{-1}\| = \|q-w\|,$$

isto é, f_α é ortogonal.

Por outro lado, se $w \in R$, como $f_\alpha(w) = w$, f_α deixa invariante o subspaço R dos reais, logo, deixa também invariante seu complemento ortogonal $Im(K)$, formado pelos imaginários puros.

Em outras palavras, se β é imaginário puro então $\alpha.(\beta.\alpha^{-1})$ também é e portanto a transformação linear ortogonal f_α restrita aos octônios puros está bem definida:

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : & Im(K) & \longrightarrow & Im(K) \\ & \beta & \longrightarrow & \alpha.(\beta.\alpha^{-1}) \end{array}$$

O raciocínio segue análogo ao que foi feito para os números quatérnios e só difere quanto aos recursos usados em determinadas passagens pelo fato de que K não é uma álgebra associativa mas sim alternativa, quando então recorremos às propriedades pertinentes, especialmente à identidade de Moufang.

Propriedades

Se X, Y e Z são números de Cayley vale que

1)$X(YY) = (XY)Y$,

2$(XX)Y = X(XY)$,

3)$(X^*X)Y = X^*(XY)$,

4)$(XY)Y^* = X(YY^*)$,

5)$(XY)X = X(YX)$,

6)$(XY)(ZX) = X(YZ)X$ (identidade de Moufang).

Para uma demonstração destas propriedades veja [19].

Assim chegamos que

se $\alpha \in K$, $\beta \in \mathrm{Im}(K)$ são não nulos e considerando α escrito na forma polar :

$$\alpha = \left[cos\theta + \hat{\alpha}\ \ sen\theta\right] \text{ com } \hat{\alpha} = \frac{1}{\| V(\alpha) \|} V(\alpha) \text{ unitário puro,}$$

então $\hat{\alpha}$ é auto-vetor de f_α e para qualquer $Z \in K$ o subespaço $V = [\ \hat{\alpha}\ Z]$ é invariante por f_α.

Em particular, para $Z = 1$ temos que $V = [\ \hat{\alpha}]$ é um subespaço de dimensão 1 invariante por f_α e $\beta_1 = \{\hat{\alpha}\}$ é uma base ortonormal para V.

Fazendo $h = f_\alpha\ |_V$, temos que a matriz de h em relação a β_1 é da forma

$[h] = [1]$,

e como f_α é ortogonal, $V^\perp$ também é invariante por f_α e tem dimensão 6. Logo, existe uma base β_2 ortogonal em $V^\perp$ de forma que $\Psi = \beta_1 \cup \beta_2$ é uma base ortogonal de K em relação à qual a matriz de $[f_\alpha]$ é da forma

$$[f_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -sen2\theta. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sen2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta & -sen2\theta. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta & -sen2\theta. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sen2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Em resumo, temos a seguinte proposição:

Proposição 4

A função

$$\begin{array}{rccl} f_\alpha : & K & \longrightarrow & K \\ & \beta & \longrightarrow & \alpha\beta\alpha^{-1} \end{array}$$

é invariante no plano gerado por $\{\hat{\alpha}\}$ e em seu complememto ortogonal, sendo que representa uma rotação do ângulo 2θ em torno de $\hat{\alpha}$.

3) Já para a função multiplicação à direita por um unitário fixo α

$$\begin{array}{rccl} \Phi_R : & HXH & \longrightarrow & HXH \\ & \beta = (r,s) & \longrightarrow & \Phi_R(\beta) = \beta\alpha \end{array}$$

de forma análoga a que fizemos para a multiplicaçào à esquerda

$$\Phi_R((1,0)) = (p.q) = (a + bi + cj + dk\,,\ e + fi + gj + hk) =$$

$$= E_0 + bE_1 + cE_2 + dE_3 + eE_4 - fE_5 - gE_6 - hE_7.$$

$$\Phi_R((i,0)) = (ip, -iq) = \ ia - b + ck - dj \ \ -ie + f - gk + hj \ =$$

$$= -bE_0 + aE_1 - dE_2 + cE_3 + fE_4 + eE_5 - hE_6 + gE_7.$$

$$\Phi_R((j,0)) = (jp, -jq) = \ -c + id + aj - bk \ \ g - ih - ej + fk \ =$$

$$= -cE_0 + dE_1 + aE_2 - bE_3 + gE_4 + hE_5 + eE_6 - fE_7.$$

$$\Phi_R((k,0)) = (kp,-kq) = \quad -ic - d + ak + bj \quad ig + h - ek - fj \quad =$$

$$= -dE_0 - cE_1 + bE_2 + aE_3 + hE_4 - gE_5 + fE_6 + eE_7.$$

$$\Phi_R((0,1)) = (-q,p) = \quad -if - gj - hk - e \quad a + ib + cj + dk \quad =$$

$$= -eE_0 - fE_1 - gE_2 - hE_3 + aE_4 - bE_5 - cE_6 - dE_7.$$

$$\Phi_R((0,-i)) = (qi,pi) = \quad ie - f - gk + hj \quad ia - b - ck + dj \quad =$$

$$= fE_0 - eE_1 - hE_2 + gE_3 + bE_4 + aE_5 + dE_6 - cE_7.$$

$$\Phi_R((0,-j)) = (qj,pj) = \quad -g - ih + ej + fk \quad -c - id + aj + bk \quad =$$

$$= gE_0 + hE_1 - eE_2 + fE_3 + cE_4 - dE_5 + aE_6 + bE_7.$$

$$\Phi_R((0,-k)) = (qk,pk) = \quad ig - h + ek - fj \quad ic - d + ak - bj \quad =$$

$$= hE_0 - gE_1 + fE_2 - eE_3 + dE_4 + cE_5 - bE_6 + aE_7,$$

e a matriz de Φ_R fica:

$$[\Phi_R] = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d & -e & -f & -g & -h \\ b & a & d & -c & -f & e & -h & g \\ c & -d & a & b & -g & h & e & -f \\ d & c & -b & a & -h & -g & f & e \\ e & f & g & h & a & -b & -c & -d \\ -f & e & h & -g & -b & -a & d & -c \\ -g & -h & e & f & -c & -d & -a & b \\ -h & g & -f & e & -d & c & -b & -a \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, $[\Phi_R][\Phi_R]^t = Id$ e $[\Phi_R]$ é ortogonal.

Porém , $det\,[\Phi_R] = -1$, o que significa que $[\Phi_R]$ é uma reflexão em R^8.

Os autovalores de $[\Phi_R]$ são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = a - \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2 - g^2 - h^2} \ ,$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = a + \sqrt{-b^2 - c^2 - d^2 - e^2 - f^2 - g^2 - h^2}\,.$$

Também, fazendo

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -e & f & g & h \\ -f & -e & h & -g \\ -g & -h & -e & f \\ -h & g & -f & -e \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ -f & e & h & -g \\ -g & -h & e & f \\ -h & g & -f & e \end{bmatrix} \qquad D' = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

vemos que $C = -B^t$ e $D' = D^t$ onde D é a mesma matriz que aparece em $[f_\alpha]$ do caso 1) de 3.4.3,

e a matriz de Φ_R pode ser escrita como

$$[\Phi_R] = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^t & D^t \end{bmatrix}$$

Cometário Final

Concluímos esta discussão enfatizando que as perspectivas de aprofundamento sobre o tema são um incentivo para o prosseguimento da pesquisa, seja para a produção de um texto mais completo para divulgação, seja em possíveis aplicações à teoria dos Códigos Corretores de Erros.

Referências Bibliográficas

[01] Artmann, B. – *The Concept of Number: from Quaternios to Monads and Topological Fields* - Ellis Horwood Series in Mathematics and its Aplications – Ellis Horwood Limited Publishers – 1988.

[02] Baez, John C. - *The Octonions* - University of California - Department of Mathematics. http://math.ucr.edu/home/baez/Octonions/node1.html

[03] Boldrini, Costa, Figueiredo, Wetzler - *Álgebra Linear* - Editora Harbra - 1984.

[04] Boyer, C. B. – *A History of Mathematics* – Princeton University Press - 1985.

[05] Caraça, Bento de Jesus - *Conceitos Fundamentais da Matemática* –Sa da Costa - 1989.

[06] Churchill, R. V. – *Variáveis Complexas e suas Aplicações* – McGraw-Hill do Brasil - 1975.

[07] Curtis, Morton. L. - *Matrix Groups* – Springer Verlag – 1984.

[08] Costa, M. Amoroso – *As Idéias Fundamentais da Matemática e Outros Ensaios* - Biblioteca do Pensamento Brasileiro – EDUSP – 1981.

[09] Dickson, L. Eugene - *The Collected Mathematical Papers of Leonard Eugene Dickson* - Chelsea-1975.

[10] Eves, Howard – *Introdução à História da Matemática* – Editora da Unicamp - 1997.

[11] Garbi, Gilberto G. – *O Romance das Equações Algébricas* – MAKRON Books do Brasil – 1997.

[12] Ian R. Porteous - *Clifford Algebras and the Classical Groups* – Cambridge University Preess - 1995.

[13] Lima, Elon L. - *Curso de Análise* - vol2. - Projeto Euclides - IMPA - 1985.

[14] Lima, Elon L. - *Álgebra Linear*- Coleção Matemática Universitária- IMPA- 1995.

[15] Lima, Elon L. - *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento* -IMPA - 1977.

[16] Philip Spencer (Mathematical Content Developer) - University of Toronto – Mathematics Network - Answers and Explanations - *How can one show that imaginary numbers really do exist.* http://www.math.toronto.edu/mathnet/answers/imaginary.html

[17] Philip Spencer (Mathematical Content Developer) - University of Toronto – Mathematics Network - Question Corner and Discussion Area – *The Origin of Complex Numbers and the Notation "i".* http://www.math.toronto.edu/mathnet/questionCorner/qc.html

[18] Tony Smith's Home Page - *Quaternions, Octonions, and Physics.* http://www.innerx.net/personal/tsmith/QOphys.html

[19] Ward, J. P. – *Quaternions and Cayley Numbers* – Kluber Academic Publishers – 1997.

Índice Remissivo