EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA CERTOS PROBLEMAS ELITICOS SEMILINEARES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr.

Carlos Cabezas Manríquez

e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 10 de Agosto de 1992.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À Francisca, minha esposa.

A meus filhos, Victor, Andrés e Gonzalo, minhas desculpas por tantos momentos que lhes neguei e por tantos beijos... que não sentiram; pois estavam dormindo.

À eles, a minha mãe e a toda a familia, dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, IMECC - UNICAMP, pelas facilidades dadas para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo, pela sua dedicação na minha formação, e pelos esforços na orientação desta tese.

A minha esposa que vigiou meus estudos noturnos e multiplicou suas horas para presentear-me com seu tempo.

Ao Prof. Dr. Francesco Mercuri pelo seu constante apoio.

Aos meus colegas que fizeram sugestões para a apresentação e redação deste trabalho, cujos nomes não coloco por serem numerosos, mas que sempre estarão presentes nas minhas orações.

As Sras. Fátima Espindola e Margarita Figueroa pelo seu paciente e esforçado trabalho de datilografia.

À FAPESP, ao CNPq, à CAPES e a Universidade de Concepción pelo apoio financeiro.

INDÍCE

Introdução.....i

I. - EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET.

Apresentação do Problema.....01
Resultados Principais.....02
Demonstração dos Resultados Principais.....10

II. - EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE NEUMANN.

§1. Equações Diferenciais Parciais
Apresentação do Problema.....13
Resultados Principais.....14
Demonstração dos Resultados Principais.....26

§2. Equações Diferenciais Ordinárias
Apresentação do Problema.....33
Resultados Principais.....33
Demonstração dos Resultados Principais.....34
Demonstração do Teorema II.2.4.....38
Existencia e Multiplicidade com Condições mais Fracas...40

III.- EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA MISTO.

§1. Equações Diferenciais Parciais
Apresentação do Problema.....44
Resultados Principais.....45
Demonstração dos Resultados Principais.....46

§2. Equações Diferenciais Ordinárias
Apresentação do Problema.....50
Resultados Principais.....50
Simetria das Soluções no Caso E.D.O.....51

BIBLIOGRAFIA.....54

INTRODUÇÃO

O presente trabalho divide-se em três Capítulos.

No primeiro Capítulo estudamos o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um dominio regular e $f:\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que satisfaz a seguinte condição:

(f_1) Existem funções contínuas $h_i, g_i : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,k$ e constantes $C_1,\ldots,C_{k-1}$, tais que :

i) $0 = h_1(x) < g_1(x) < C_1 < h_2(x) < \ldots < g_{k-1}(x) < C_{k-1} < h_k(x) < g_k(x)$ $\forall x \in \bar{\Omega}$.

ii) $f(x,0) \geq \sigma_0 > 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$.

iii) $f(x,u) < 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall u \in (g_i(x), h_{i+1}(x))$ $i=1,\ldots,k$, onde $h_{k+1}(x) = +\infty$.

$f(x,u) > 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall u \in (h_i(x), g_i(x))$ $i=1,\ldots,k$.

iv) $f_u(x, g_i(x)) \leq r_i < 0$ em $\bar{\Omega}$ para certas constantes negativas $r_1,\ldots,r_k$.

O objetivo é estudar a existência de soluções, e como mudanças no sinal da não linearidade f, dão lugar à existência de soluções múltiplas.

O problema (P_1) tem sido amplamente estudado na literatura por autores como Clément e Sweers [C-S], de Figueiredo [d.F], Hess [H], Dancer e Schmitt [D-S], Sweers [S], Brown e Budin [B-B], entre outros. D.G. de Figueiredo, no seu trabalho [d.F1] estuda o problema (P_1) no caso particular em que o domínio Ω satisfaz certas condições de simetría e a não linearidade f não tem dependência em x. Naquele trabalho, de Figueiredo mostra a existência de 2k-1 soluções ordenadas

do problema (P_1), deixando em aberto o problema sobre domínios gerais.

O nosso resultado principal deste Capítulo extende o resultado de de Figueiredo a domínios gerais. Precisamente o nosso resultado é o seguinte:

TEOREMA.- Seja Ω um domínio regular e $f:\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que satisfaz (f_1) e

(f_2) $\exists x_0 \in \Omega$ tal que $F(x_0,g_i(x_0)) < F(x_0,g_{i+1}(x_0))$, $\forall i=1,\ldots,k-1$,

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt.$$

Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_0$ o problema (P_1) tem $2k-1$ soluções ordenadas ou então tem pelo menos $2k$ soluções das quais pelo menos k estão ordenadas.

A demonstração deste Teorema é feita pelo método das sub e supersoluções. Transformamos o problema de achar soluções de (P_1), no problema de achar pontos fixos de certo operador $T:C(\bar{\Omega}) \longrightarrow C(\bar{\Omega})$. A existência de subsoluções e supersoluções ordenadas do problema (P_1) (Lema I.5, observação depois do Lema I.8), permite aplicar os resultados de H. Amann, sobre a existência de três pontos fixos para certos operadores (Lema I.2) e de existência de pontos fixos minimais e maximais em certos intervalos ordenados (Lema I.1). Em todo o Capítulo trabalha-se com um *"conceito fraco"* de soluções (Definição I.4), porém na demonstração do Teorema I.3 no final do Capítulo, mostramos que de fato, estas são soluções clássicas.

O segundo Capítulo está dividido em duas seções. Na primeira (EDP) estudamos o problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio regular, e na segunda (EDO) o correspondente problema para equações diferenciais ordinárias:

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -u'' = f(u), & \text{em } (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Em cada caso, o objetivo é achar soluções não constantes, e estudar como mudanças no sinal da não linearidadef, produzem existência de soluções múltiplas.

A não linearidade f neste caso, é uma função oscilante que muda de sinal. Mais precisamente, f tem exatamente r zeros, todos simples, $a_1<a_2<\ldots<a_r$ isto é, $f(a_i)=0$ e $f'(a_i)=0$.

Se definimos o funcional ϕ por:

$\phi: H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u), \qquad \text{no caso EDP,}$$

e por $\phi: H^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \int_0^1 F(u) \qquad \text{no caso EDO,}$$

onde $F(s)=\int_0^s f(t)dt$. Então o problema de achar soluções de (P_2) e (P_3), transforma-se no problema de achar pontos críticos do respectivo funcional ϕ.

Assim o ingrediente fundamental no estudo do nosso problema é o Teorema do Paso da Montanha (Teorema II.1.7), uma versão de H. Hoffer [H] que sob certas condições garante a existência de pontos críticos de ϕ, do tipo passo da montanha (Definição II.1.6).

Observemos que as funções constantes $u_i \equiv a_i$ onde a_i são os zeros de f,são pontos críticos do funcional ϕ. Se i é ímpar, vemos que u_i é um ponto de mínimo local estrito do funcional ϕ e portanto não pode ser do tipo passo da montanha, se i é par damos condições para que u_i não seja do tipo passo da montanha (condição (f_4)).

Na demonstração de nossos resultados de multiplicidade, usamos também elementos da Teoría do Grau.

Para enunciar os resultados principais precisamos das seguintes condições:

(f_1) $|f(s)| \leq a|s|^{\sigma} + b$ com

$1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e

$1 \leq \sigma < \infty$ se $N = 2$,

para certas constantes positivas a, b.

(f_2) $|f'(s)| \leq c|s|^{\sigma} + d$ com

$1 \leq \sigma < \frac{4}{N-2}$ se $N \geq 3$ e

$1 \leq \sigma < \infty$ se $N = 2$

para certas constantes positivas c, d.

(f_3) $f(s) > 0$ $\forall s < a_1$.

(f_4) $f'(a_i) < \lambda_1 = 0$ se i é ímpar

$\lambda_2 < f'(a_j) \neq \lambda_k$ $\forall k \geq 3$ se j é par,

onde os λ_k são os autovalores do problema de Neumann

$-\Delta u = \lambda u$ em Ω, $\partial u/\partial \eta = 0$ em $\partial\Omega$.

(f_5) Se o último zero a_r de f é tal que $f'(a_r) > 0$, isto é se r par, então existe $b > a_r$ tal que

$$\left|\int_{a_{r-1}}^{a_r} f(s)ds\right| \leq \int_{a_r}^{b} f(s)ds$$

(f_6) $\exists s_0 > 0$ e $c > 0$ tal que uma das seguintes alternativas vale:

i) $sf(s) - 2F(s) \leq cs$ $\forall s \geq s_0$

ou

ii) $sf(s) - 2F(s) \geq cs$ $\forall s \geq s_0$.

Os seguintes são os resultados principais do Capítulo II:

TEOREMAS:

II.1.1.- Suponhamos que $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, satisfaz (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4), e que o número de zeros de f é ímpar $r=2\ell+1$.

Então o problema (P_2) tem pelo menos 2ℓ soluções não triviais, u_1, v_1, u_2, v_2, ...,u_ℓ, v_ℓ que satisfazem

$$a_1 \le u_1,\ v_1 \le a_3 \le u_2,\ v_2 \le a_5 \le \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \le a_{2\ell-1} \le u_\ell,\ v_\ell \le a_{2\ell+1}$$

II.1.2.- Suponhamos que $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, satisfaz as condições (f_1)-(f_6), e que F satisfaz a condição:

$$(F) \quad |F(s)| \le es^2+k \qquad \forall s \ge 0$$

para certas constantes positivas e, k.

Além disso suponhamos que o número de zeros de f é par $r=2\ell$.

Então o problema (P_2) tem pelo menos $2\ell-1$ soluções não triviais, u_1, v_1,.....,$u_{\ell-1}$,$v_{\ell-1}$,u_ℓ que satisfazem

$$a_1 \le u_1,\ v_1 \le a_3 \le u_2,\ v_2 \le a_5 \le \ldots\ldots\ldots \le u_{\ell-1},\ v_{\ell-1} \le a_{\ell-1} \le u_\ell$$

No caso EDO, obtemos resultados semelhantes sob condições menos restritivas. De fato,

II.2.1.- Seja $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ com um número impar de zeros $r=2\ell+1$. Suponhamos que f satisfaz (f_3) e (f_4). Então o problema (P_3) tem pelo menos 2ℓ soluções não triviais u_1, v_1, u_2, v_2, ...,u_ℓ, v_ℓ que satisfazem

$$a_1 \le u_1,\ v_1 \le a_3 \le u_2,\ v_2 \le a_5 \le \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \le a_{2\ell-1} \le u_\ell,\ v_\ell \le a_{2\ell+1},\ \text{em } (0,1)$$

II.2.2.- Seja $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ com um número par de zeros $r=2\ell$. Suponhamos que f satisfaz (f_3), (f_4) e (f_5). Então o problema (P_3) tem pelo menos $2\ell-1$ soluções não triviais u_1, v_1, u_2, v_2, ...,$u_{\ell-1}$, $v_{\ell-1}$, u_ℓ, que satisfazem

$$a_1 \le u_1,\ v_1 \le a_3 \le \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \le a_{2\ell-3} \le u_{\ell-1},\ v_{\ell-1} \le a_{2\ell-1} \le u_\ell \le b \text{ em } (0,1)$$

Graças á possibilidade de aplicar a Teoria de Bifurcação no caso de EDO, na seção 2 deste Capítulo, além dos resultados enunciados acima,

obtemos resultados de existência e multiplicidade no caso em que a função f não satisfaz a condição (f_4). Precisamente o resultado é o seguinte

TEOREMA II.2.17.- Suponhamos que $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tem exatamente r zeros consecutivos, todos simples, que satisfaz (f_3) e $f'(a_i)=k^2\pi^2$ para algum $k\geq 2$ e para algum $i\in\{1,\ldots,r\}$. Então o problema (P_3) tem pelo menos k-1 soluções não triviais.

O terceiro Capítulo tem a mesma estrutura do Capítulo II, isto é consta de duas seções; na primeira (EDP) estudamos o problema

$$(P_4)\qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda\, f(u) & \text{em } \Omega \\ u(x)+\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x)=0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um dominio limitado, com bordo regular.

Na segunda seção (EDO), estudamos o correspondente problema para equações diferenciais ordinarias

$$(P_5)\qquad \begin{cases} -u''= \lambda f(u) & \text{em } (0,1) \\ u(0)-\varepsilon\, u'(0)= 0 \\ u(1)+\varepsilon\, u'(1)= 0 \end{cases}$$

Em ambos os casos, a não linearidade f é como no Capítulo II, isto é, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é de classe C^1, e existem números reais $a_1,\ldots,a_k$; $b_1,\ldots,b_{k-1}$, que são zeros simples de f, tais que

$$a_1< b_1< a_2< b_2<\ldots\ldots< b_{k-1}< a_k,$$

e

(f_1) Existe uma constante $c>0$ tal que

$$f'(a_i)<-c \qquad \forall i=1,\ldots,k.$$

(f_2) f não muda sinal nos intervalos

$(-\infty,a_1)$, $(a_k,+\infty)$

(a_i,b_i) $\quad i=1,\ldots,k.$

(b_i,a_{i+1}) $\quad i=1,\ldots,k-1.$

Supomos também neste caso que $0 < a_1$.

No caso em que $\varepsilon = 0$ (problema de Dirichlet), é bem conhecido que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ os problemas (P_4) e (P_5) tem uma solução positiva u, com $b_i <$ máx u $< a_{i+1}$, desde que f satisfaça a condição de área:

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)dt > 0 \qquad \forall j=1,\ldots,i$$

e que esta condição de área é necesaria e suficiente para obter tal resultado de existência. Por outro lado, os resultados do Capítulo II, mostram que no caso do problema de Neumann, uma tal condição de área não é necesaria. Isto motiva o estudo dos problemas (P_4) e (P_5), com o objetivo de descobrir para que valores de ε é necesaria alguma condição de área. Nossos resultados neste caso são os seguintes:

TEOREMA III.1.2.- Seja f a função definida na apresentação do problema, satisfazendo (f_1) e (f_2). Suponhamos que Ω satisfaz a condição da esfera interior uniforme.

Sejam $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$a_i + \beta < b_i < a_{i+1} - \alpha, \qquad \forall i=1,\ldots,k-1.$$

Então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ o problema (P_4) tem, para cada $i=1,\ldots,k-1$ pelo menos três soluções positivas u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, tais que:

$$a_i - \alpha \leq u_{1i} \leq a_i + \beta$$

$$a_{i+1} - \alpha \leq u_{3i} \leq a_{i+1} + \beta$$

$$u_{1i} \leq u_{2i} \leq u_{3i} \qquad \forall i=1,\ldots,k-1.$$

TEOREMA III.2.2.- Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (f_1) e (f_2).

Sejam $\alpha, \beta > 0$ tais que $a_i + \beta < b_i < a_{i+1} - \alpha$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, o problema (P_5) tem, para cada

i=1,...,k-1, pelo menos três soluções positivas u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} tais que

$$a_i - \alpha \leq u_{1i} \leq a_i + \beta \; ; \; a_{i+1} - \alpha \leq u_{3i} \leq a_{i+1} + \beta$$

$$u_{1i} \leq u_{2i} \leq u_{3i}$$

Na demonstração destes resultados utilizamos novamente os Teoremas de H. Amann já usados no Capítulo I. Desta vez construímos subsoluções e supersoluções clássicas dos problemas (P_4), (P_5) (Definição III.1.1) e a regularidade das soluções se segue da Teoría de Schauder.

Observamos que no caso de se ter a não linearidade f com dependência em x e definida como no Capítulo I, ainda são válidos nossos resultados de existência e multiplicidade. É suficiente considerar as funções g_i de classe C^2 (Observação III.1.3).

Também é conhecido que sobre domínios simétricos as soluções positivas do problema de Dirichlet, são simétricas, mais precisamente as curvas de nivel das soluções positivas tem a mesma geometría que o bordo do domínio Ω.

Por outro lado, vemos que para o problema de Neumann as soluções não são necesariamente simétricas (Exemplo III.2.5). Graças à obtenção de estimativas na fronteira para as soluções de (P_5), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, conseguimos, no caso EDO, com as mesmas técnicas usadas por Gidas, Ni e Nirenberg [G-N-N], provar que as soluções do problema (P_5) são simétricas, no intervalo [0,1] com relação a $\frac{1}{2}$. Neste sentido podemos afirmar que as soluções de (P_5) são simétricas, numa vizinhanza do problema de Dirichlet.

O nosso resultado é o seguinte:

TEOREMA III.2.3.- Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ toda solução do problema (P_5) é simétrica em (0,1) com relação a $\frac{1}{2}$.

CAPITULO I

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA:

Neste capítulo estudamos o problema de autovalores

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio regular, limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) Existem funções contínuas $h_i, g_i : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,k$ e constantes $C_1,\ldots C_{k-1}$ tais que:

i) $0 \equiv h_1(x) < g_1(x) < C_1 < h_2(x) < \ldots\ldots < g_{k-1}(x) < c_{k-1} < h_k(x) < g_k(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$

ii) $f(x,0) \geq r_o > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$

iii) $f(x,u) < 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall s \in (g_i(x), h_{i+1}(x)), \quad i=1,\ldots,k,$

onde $h_{k+1}(x) \equiv +\infty$.

$f(x,u) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall s \in (h_i(x), g_i(x)) \quad i=1,\ldots\ldots,k.$

iv) $f_u(x, g_i(x)) \leq r_i < 0$ em $\bar{\Omega}$ para certas constantes negativas $r_1,..,r_k$

(f_2) $\exists x_o \in \Omega$ tal que $F(x_o, g_1(x_o)) < F(x_o, g_{i+1}(x_o)) \quad \forall i=1,\ldots,k-1,$

onde $$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt.$$

No estudo deste problema usamos o método de sub e supersoluções. Aplicamos um Teorema de existência de três pontos fixos de H.Amann [A] e um Teorema do mesmo autor sobre a existência de pontos fixos minimais

e maximais em certos intervalos de funções.

A seguir damos os resultados de H. Amann que usaremos na nossa demonstração.

I.1.- LEMA.([A] Corolário 6.2)

Seja $(\mathbb{E},P)$ um espaço de Banach ordenado e seja $[x,y]$ um intervalo ordenado não vazío em $\mathbb{E}$, suponha que $f:[x,y] \longrightarrow \mathbb{E}$ é uma função compacta crescente tal que $x \leq f(x)$ e $f(y) \leq y$. Então f têm um ponto fixo minimal e um ponto fixo maximal

1.2.-LEMA.([A] Lema 14.1)

Seja X um retrato de um espaço de Banach e seja $f:X \longrightarrow X$ uma função compacta. Suponha que X_1 e X_2 são retratos disjuntos de X , e sejam U_j $j=1,2$, subconjuntos abertos de X tais que $U_j \subset X_j$, $j=1,2$. Mais ainda suponha que $f(X_j) \subset X_j$ e que f não tem pontos fixos em $X_j \setminus U_j$, $j=1,2$.

Então f tem pelo menos três pontos fixos distintos x, x_1, x_2 com $x_j \in X_j$, $j = 1,2$ e $x \in X \setminus (X_1 \cup X_2)$.

ESTABELECIMENTO DE RESULTADOS

O resultado principal deste Capítulo, Teorema I.1, dá uma resposta parcial a um problema deixado em aberto por D.G. de Figueiredo em [de F.1] sobre a existência de soluções ordenadas do problema (P_1) para domínios gerais. O resultado principal e o seguinte:

1.3.-TEOREMA

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$,$0 < \alpha < 1$, e $f:\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que satisfaz (f_1) e (f_2). Então, existe λ_0 positivo tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ o problema (P_1) tem 2k-1 soluções ordenadas ou então tem pelo menos 2k-1 soluções das cuais pelo menos k estão ordenadas.

A demonstração deste Teorema será dada no final do capítulo após algumas definições e Lemas.

A seguir damos a definição de subsolução, supersolução e solução

para o problema (P_1).

1.4.- DEFINIÇÃO

1) Uma função $u \in C(\bar{\Omega})$ é uma sub(super) solução de (P_1) se $u \leq (\geq) 0$ em $\partial\Omega$, e

$$\int_\Omega (u(-\Delta\varphi) - \lambda f(x,u)\varphi) \leq (\geq)\ 0,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$$

onde $$\mathcal{D}^+(\Omega) = \left\{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ /\ \varphi(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega\right\}$$

2) Uma função $u \in C(\bar{\Omega})$ é uma solução de (P_1), se $u = 0$ em $\partial\Omega$ e

$$\int_\Omega (u(-\Delta\varphi) - \lambda f(x,u)\varphi) = 0, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$$

OBSERVAÇÃO:

Da hipótese (f_2) vemos que para todo $i=1,\ldots,k$, existe $\sigma_i>0$ e $\beta_i(x_o)$ tal que $h_i(x_o) < \beta_i(x_o) < g_i(x_o)$ e

$$\int_w^{\beta_i(x_o)} (f(x_o,s)-\sigma_i)ds > 0\ , \qquad \forall w \in [0,\beta_i(x_o))$$

Seja $$0 < \sigma < \min\left\{\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\ \frac{1}{3} f(x_o,0)\right\}$$

então, para qualquer $i=1,\ldots,k$

$$\int_w^{\beta_i(x_o)} (f(x_o,s)-\sigma)ds > 0\ , \qquad \forall w \in [0,\beta_i(x_o))$$

No restante do Capítulo, quando não colocarmos o domínio de integração nas integrais, entenderemos que se trata de Ω.

I.5.-LEMA

Para todo $i=1,..,k$, $\forall \varepsilon > 0$, existe $\lambda_i > 0$ tal que $\forall \lambda > \lambda_i$, existe uma função $v_{\lambda i} \in C^2(\mathbb{R})$, tal que

$$h_i(x_o) < v_{\lambda i}(0) < \beta_i(x_o) + \varepsilon \; ; \qquad v'_{\lambda i}(r) < 0, \qquad \forall r > 0$$

e tal que a função

$$w_{\lambda i}(x) = v^+_{\lambda i}(\lambda \, \|x-x_o\|)$$

é uma subsolução de (P_λ).

DEMONSTRAÇÃO:

Fixemos $i \in \{1,...,k\}$ e $\varepsilon > 0$.

Suponhamos que $\beta_i(x_o) + \varepsilon < g_i(x_o)$. Seja $f_i \in C^1(\mathbb{R})$ limitada, tal que

$$f_i(s) = f(x_o,s) - \frac{1}{3}\sigma \quad \forall s \in [0,\beta_i(x_o)] \, ,$$

$$f_i(s) \le f(x_o,s) - \frac{1}{3}\sigma, \quad \forall s \ge 0 \, ,$$

$$f_i(s) < 0, \qquad \forall s \ge \beta_i(x_o) + \varepsilon \, ,$$

$$f_i(s) > \frac{1}{3} f(x_o,0), \qquad \forall s \le 0.$$

Suponhamos também que f_i tem um único zero b_i, no intervalo $[\beta_i(x_o), \beta_i(x_o) + \varepsilon]$. Então existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que $\forall \lambda > \bar{\lambda}$ o problema

$$(P_{\lambda i}) \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda \, f_i(v) & \text{em} \quad B(0,1) \\ v = 0 & \text{em} \quad \partial B(0,1) \end{cases}$$

tem uma solução $\bar{v}_{\lambda i}$ satisfazendo

1) $\bar{v}_{\lambda i}(x) > 0 \qquad \forall x \in B(0,1)$,

2) $\bar{v}_{\lambda i}(x) = \bar{v}_{\lambda i}(\|x\|)$,

3) $\bar{v}'_{\lambda i}(r) < 0 \qquad \forall r \in (0,1]$,

4) $h_i(x_o) < \bar{v}_{\lambda i}(0) < \beta_i(x_o) + \varepsilon$.

A existência da solução $\bar{v}_{\lambda i}(x)$ com as propriedades acima, é garantida pelos resultados em [H], [C-S]. [de F.1], [G-N-N].
Consideremos agora o problema de valor inicial

$$(Q_\lambda) \quad \begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{r} u' = \lambda f_i(u) \\ u(1) = \bar{v}_{\lambda i}(1) = 0 \\ u'(1) = \bar{v}'_{\lambda i}(1) < 0 \end{cases} .$$

Pela unicidade da solução u_λ de (Q_λ) vemos que $v_{\lambda i}(x) = u_\lambda(\|x\|)$ $\forall x \in \bar{B}(0,1)$. Definindo

$$v_{\lambda i}(x) = \begin{cases} \bar{v}_\lambda(x) & \forall x \in \bar{B}(0,1) \\ u_\lambda(\|x\|) & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1) \end{cases}$$

temos que $v_{\lambda i}$ satisfaz:

$$(\S) \quad \begin{cases} -\Delta v_{\lambda i} = \lambda f_i(v_{\lambda i}) & \text{em } \mathbb{R}^n \\ v_{\lambda i}(x) = v_{\lambda i}(\|x\|), & x \in \mathbb{R}^n \\ h_i(x_o) < v_{\lambda i}(0) < b_i & \\ v_{\lambda i}(1) = 0 & \\ v'_{\lambda i}(r) < 0 & \forall r > 0 . \end{cases}$$

Com efeito, só falta verificar a última desigualdade para $r > 1$. Se $r > 1$ é tal que $v'_{\lambda i}(r) = 0$,
então

$$-u''_\lambda(r) = \lambda f_i(u_\lambda(r)).$$

Como $u_\lambda(r) < 0$ então

$$f_i(u_\lambda(r)) > 0$$

logo $u''_\lambda(r) < 0$. Assim r deve ser um ponto de máximo para u_λ. Tomando r como o ínfimo do conjunto $\{s > 1 \ / \ u'_\lambda(s) = 0\}$, vemos que isso é um absurdo.

Seja $\delta_1 > 0$ tal que

(*) $f_1(s) < f(x,s) \qquad \forall s \in [0,\beta_1(x) + \varepsilon]\ , \quad \forall x \text{ com } \|x-x_0\| < \delta_1$

Seja $\lambda_1 > \overline{\lambda}$ suficientemente grande tal que $\lambda_1 > \delta_1^{-1}$,

então

$$v_{\lambda_1}(\lambda_1\delta_1) < v_{\lambda_1}(1) = 0.$$

Se $\|x-x_0\| \geq \delta_1$ e $\lambda \geq \lambda_1$

temos que

$$v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|) < v_{\lambda_1}(\lambda\delta_1) < 0,$$

Agora usando a desigualdade de Kato,

$$-\Delta|u| \leq -\text{ sign } (u)\ \Delta u$$

no sentido das distribuições temos para w_{λ_1}, com $\lambda > \lambda_1$, o seguinte:

$$\int (-\Delta\varphi)w_{\lambda_1} = \frac{1}{2}\int (-\Delta\varphi)\ (v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|) + |v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|)|)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int \varphi(-\Delta v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|) - \text{sign } (v_{\lambda_1})\ \Delta v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|))dx =$$

$$= \int_{v_{\lambda_1}>0} \varphi(-\Delta v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|))dx = \int_{B(x_0,\delta_1)} \varphi(1-h)\ (-\Delta v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|))dx$$

onde

$$h = \begin{cases} 1 & \text{se } v_{\lambda_1} < 0 \\ 1/2 & \text{se } v_{\lambda_1} = 0 \\ 0 & \text{se } v_{\lambda_1} > 0 \end{cases}$$

Logo, usando a equação em (§) e a propriedade (*) e, além disso, lembrando que $f(x,0) > 0$, obtemos:

$$\int (-\Delta\varphi)w_{\lambda_1} < \int \varphi h\lambda f(x,0) + \int_{B(x_0,\delta_1)} \varphi(1-h)\lambda f_1(v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|))dx$$

$$< \int \varphi\ \left[h\lambda f(x,0) + (1-h)\lambda\ f(x,v_{\lambda_1}(\lambda\|x-x_0\|))\right]dx$$

$$= \int \varphi \lambda f(x, w_{\lambda_1}(x))\ dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$$

Isto mostra que a função

$$w_{\lambda_1}(x) = v^+_{\lambda_1}(\lambda \|x - x_o\|)$$

é uma subsolução de (P_1).
Observemos que, além disso, $w^+_{\lambda_1}$ é uma subsolução estrita.

Do Lema I.5 temos que para cada i=1,...,k, existe $\lambda_i > 0$ tal que para todo $\lambda > \lambda_i$ o problema (P_1) tem uma subsolução w_{λ_1} tal que

$$0 \le w_{\lambda_1}(x) < C_1 \quad \text{em } \overline{\Omega}$$

$$w_{\lambda_1}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

Agora para cada i=1,...,k, consideremos a função

$$f^1(x,s) = \begin{cases} f(x, w_{\lambda_1}(x)) & s \le w_{\lambda_1}(x) \\ f(x,s) & w_{\lambda_1}(x) \le s \le C_{i+1} \\ f(x, C_{i+1}) & s \ge C_{i+1} \ . \end{cases}$$

Então $f^1 : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada.

I.6.-LEMA
Se u é uma solução do problema

$$(P^1_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda\ f^1(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Então $w_{\lambda_1}(x) \le u(x) \le C_{i+1}$ em $\overline{\Omega}$ e consequentemente u é solução de (P_1).

DEMONSTRAÇÃO
Seja u uma solução de (P^1_λ) e seja

$$\Omega^+ = \left\{ x \in \overline{\Omega} : C_{i+1} < u(x) \right\} .$$

Queremos provar que $\Omega^+ = \phi$. Suponhamos por contradição que $\Omega^+ \neq \phi$.

Temos

$$\int_{\Omega^+} (u-C_{i+1})(-\Delta\varphi)dx \leq \int_{\Omega^+} \left[f^i(x,u(x)) - f(x,C_{i+1})\right]\varphi \, dx = 0, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega^+).$$

Então, $u-C_{i+1} \in C(\overline{\Omega}^+)$ é sub-harmônica e não negativa em Ω^+, logo $u-C_{i+1}$ atinge seu máximo no bordo de Ω^+, mas $u-C_{i+1} = 0$ em $\partial\Omega^+$, portanto $u - C_{i+1} \leq 0$ ou seja $u \leq C_{i+1}$ em Ω^+ o que é uma contradição. Logo $\Omega^+ = \phi$.

Se $\Omega^- = \left\{ x \in \overline{\Omega} : u(x) < w_{\lambda_1}(x) \right\}$ então analogamente ao feito acima, prova-se que $\Omega^- = \phi$.

Isto conclue a demonstração do Lema.

OBSERVAÇÃO:

Da teoria linear sabemos que o problema;

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \ f^i(x,u) & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem exatamente uma solução $v \in C(\overline{\Omega})$ para cada $u \in C(\overline{\Omega})$ fixa. Podemos definir então, o operador solução $K : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ por $v = Ku$ onde v é a única solução do problema acima.

É sabido que este operador é compacto sobre $C(\overline{\Omega})$ com a norma do máximo.

Seja $F: C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ o operador de Nemytski associado à função f^i, isto é:

$$F(u)(x) = f^i(x,u(x)) \quad \forall u \in C(\overline{\Omega}), \ \forall x \in \overline{\Omega}$$

então F é contínua e limitada. Logo o operador

$$T : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$$

definido por $T(u) = : (KF)(u)$

é um operador compacto, e u é solução de (P^i_λ) se, e somente se $u = Tu$.

I.7.- LEMA

Se u é uma subsolução do Problema (P_λ^1) então T u ≥ u.

DEMONSTRAÇÃO

Seja u uma sub-solução de (P_λ^1), então,

$$\int \left[u(-\Delta\varphi) - f(x,u)\varphi\right]dx \leq 0 , \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega).$$

Usando o operador T definido acima obtemos:

$$\int \left[Tu\ (-\Delta\varphi) - f(x,u)\varphi\right]dx = 0 , \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo

$$\int (u-Tu)(-\Delta\varphi) \leq 0 , \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$$

Seja $\Omega^+ = \{x \in \overline{\Omega} / u(x) > Tu(x)\}$

então Ω^+ é aberto e temos

$$\int (u-Tu)\ (-\Delta\varphi) \leq 0 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega^+)$$

Se $\Omega^+ \neq \phi$ então u-Tu é uma função sub-harmônica e não negativa em Ω^+, assim u-Tu deve atingir o seu máximo no bordo de Ω^+, mas u-Tu =0 em $\partial\Omega^+$, logo $u \leq Tu$ em Ω^+ o que é uma contradição.

Da mesma forma prova-se o

I.8.-LEMA

Se u é uma supersolução do Problema (P_λ^1) então Tu ≤ u.

OBSERVAÇÃO

Definamos as funções u_{λ_1} , u_1 da seguinte forma:

$$u_{\lambda_1} = w_{\lambda_1}$$

$$u_{\lambda_{1+1}} = \text{máx}\ \{u_{\lambda_1} , w_{\lambda_{1+1}}\}$$

$$u_i \equiv C_i \qquad u_{i+1} = C_{i+1}$$

Onde as constantes C_i são as dadas na condição (f_1) e as funções $w_{\lambda i}$ são aquelas definidas no Lema I.5.

Então $u_{\lambda i} \leq u_{\lambda i+1}$ são subsoluções de (P_λ^i) e

$u_i \leq u_{i+1}$ são supersoluções de (P_λ^i)

para $\lambda > \text{máx}\{\lambda_1,.....,\lambda_k\}$ e $u_{\lambda i} \leq u_i$ em $\overline{\Omega}$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA I.3

Dividimos a demonstração em duas partes, na primeira mostramos a existência das soluções no sentido da definição 1.4 e na segunda parte mostramos que estas soluções são soluções no sentido clássico.

1.- Existência.-

Provaremos que para cada i fixo i = 1,...,k o problema (P_λ^i) tem três soluções $u_{r,i}$ r = 1,2,3 tais que

*) $u_{\lambda i} \leq u_{1,i} < u_{2,i} < u_{3,i} < u_{i+1}$; $u_{1,i} < u_i$; $u_{\lambda i+1} < u_{3,i}$.

Coloquemos

$X = [u_{\lambda i}, u_{i+1}]$, $X_1 = [u_{\lambda i}, u_i]$, $X_2 = [u_{\lambda i+1}, u_{i+1}]$ e $f = T$.

Graças ao Lema I.1, T tem um ponto fixo minimal em X_2, seja u_m esta solução minimal, então $u_m(\underline{x}) > u_{\lambda i+1}(\underline{x})$ para algúm $\underline{x} \in \Omega$,pois $u_{\lambda i+1}$ é uma subsolução estrita de (P_1).

Definamos V_2 por

$$V_2 = (u_{\lambda i+1}, u_{i+1}] \cap \{ u \in X / u(\underline{x}) > (u_m(\underline{x}) + u_{\lambda i+1}(\underline{x}))/2 \}$$

se $u \in X_2 \backslash V_2$ então,

$$u(\underline{x}) \leq (u_m(\underline{x}) + u_{\lambda i+1}(\underline{x}))/2 < u_m(\underline{x}),$$

logo u não pode ser um ponto fixo de T, portanto podemos pôr $U_2 = V_2$.

Por outro lado se u é um ponto fixo de T em X_1 então pelo principio do máximo $u(x) < u_i(x)$ para todo x em Ω. Assim podemos colocar

$$U_1 = \{ u \in X_1 / \; u(x) < u_i(x), \; x \in \Omega \}.$$

Desta forma estamos nas hipóteses do Lema I.2, portanto existem três pontos fixos distintos de T , $u_{r,i}$ r = 1,2,3, nas condições (*). Além disso podemos escolher $u_{r,1}$ e $u_{r,3}$ como os pontos fixos minimal e maximal respectivamente, cuja existência é garantida pelo Lema I.1.

Para completar a demonstração da existência, de pelo menos 2k-1 soluções, notemos que pode acontecer que, para algum i, tenhamos $u_{3,i} = u_{1,i+1}$. Se esta situação ocorrer para todo i, então temos 2k-1 soluções

$$u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, u_{2,2}, u_{3,2}, u_{2,3}, u_{3,3}, \ldots\ldots\ldots, u_{2,k-1}, u_{3,k-1}, u_{2,k}, u_{3,k}$$

ordenadas, do problema (P_1). Se o anterior não ocorrer para todo i, então o problema (P_1) tem mais que 2k-1 soluções.

2.-Regularidade.-

Seja $u \in C(\Omega)$ uma solução do problema (P_λ) no sentido da definição 1.4 isto é

$$\int u(-\Delta\varphi) = \lambda \int f(x,u)\varphi \; , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como u é contínua e f é de classe C^1, tem-se que a única solução v do problema

$$-\Delta v = \lambda \, f(x,u) \quad \text{em } \Omega \; , \quad v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

é de classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$, isso implica que

$$\int u \; (-\Delta\varphi) = \lambda \int f(x,u) \; \varphi = \int v(-\Delta\varphi),$$

e portanto

$$\int (u-v)\Delta\varphi = 0 \; \forall \; \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \; .$$

Seja w a solução do problema

$$-\Delta w = u-v \text{ em } \Omega \ , \ w = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

então $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, e portanto

$$\int (u-v)\Delta w = 0,$$

assim $\int (u-v)^2 = 0$, logo $u = v$ e temos que u é de classe $C^{1,\alpha}$.

Agora temos que

$$f(x,u(x)) \in C^{1,\alpha} \quad \text{e} \quad \int u(-\Delta\varphi) = \lambda \int f(x,u)\varphi,$$

donde

$$\int \nabla u \nabla\varphi = \lambda \int f(x,u)\varphi \ ,$$

e resulta que $u \in C^{2,\alpha}$.

Isto conclui a demonstração.

CAPITULO II

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE NEUMANN

§ 1.- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção investigamos a existência e multiplicidade de soluções do problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ $0 < \alpha < 1$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ representa a derivada normal exterior na fronteira $\partial\Omega$ de Ω, e $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 com exatamente r zeros consecutivos, todos simples, $a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_r$. Lembremos que a é um zero simples de f se $f(a) = 0$ e $f'(a) \neq 0$.

Observemos que se a é um zero de f, então a função constante $u \equiv a$ é solução do problema (P_2), chamaremos a estas de soluções triviais. Trata-se aqui de encontrar soluções não triviais.

Se definimos o funcional $\phi : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) \ ,$$

onde F é o potencial $\qquad F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds$

então ϕ é de classe $C^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e vemos que o problema de achar soluções do problema (P_2), transforma-se no problema de achar pontos críticos de ϕ.

A fim de ter o funcional ϕ bem definido fazemos as seguintes hipóteses de crescimento de f,

(f_1) $\quad |f(s)| \leq a\,|s|^{\sigma} + b \quad$ com

$$1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2} \qquad \text{se } N \geq 3 \quad \text{e}$$

$$1 \leq \sigma < \infty \qquad \text{se } N = 2$$

para certas constantes positivas a, b.

Quando precisarmos trabalhar com a segunda derivada de ϕ faremos a seguinte hipótese de crescimento para f':

(f_2) $\quad |f'(s)| \leq c|s|^{\sigma} + d \quad$ com

$$1 \leq \sigma < \frac{4}{N-2} \qquad \text{se } N \geq 3 \quad \text{e}$$

$1 \leq \sigma < \infty$ se $N = 2$,

para certas constantes positivas c,d.

ESTABELECIMENTO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

Para enunciar os resultados principais, precisamos das seguintes condições:

(f_3) $\quad f(s) > 0 \quad , \quad \forall\, s < a_1$

(f_4) $\quad f'(a_i) < \lambda_i = 0 \qquad$ se i é ímpar

$\lambda_2 < f'(a_j) \neq \lambda_k \qquad \forall k \geq 3$ se j é par

onde os λ_k são os autovalores do problema de Neumann

$$-\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega \ , \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

(f_5) Se o último zero a_r de f é tal que $f'(a_r) > 0$, isto é, se r é par, então existe $b > a_r$ tal que :

$$\left| \int_{a_{r-1}}^{a_r} f(s)ds \right| \leq \int_{a_r}^{b} f(s)ds$$

II.1.1.- TEOREMA

Suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, satisfaz $(f_1),(f_2),(f_3)$ e (f_4), e que o número de zeros de f é ímpar $r = 2\ell + 1$. Então, o problema (P_2) tem pelo menos 2ℓ soluções não triviais, $u_1,v_1,u_2,v_2.....u_\ell,v_\ell$ que satisfazem

$$a_1 \leq u_1,\ v_1 \leq a_3 \leq u_2\ ,v_2 \leq a_5 \leq.....\leq a_{2\ell-1} \leq u_\ell,v_\ell \leq a_{2\ell+1}.$$

Para enunciar o resultado seguinte precisamos da seguinte condição

(f_6) $\exists\ s_o>0$ e $c>0$ tais que uma das seguintes alternativas vale:

i) $sf(s) - 2F(s) \leq cs, \qquad \forall s \geq s_o$

ou

ii) $sf(s) - 2F(s) \geq cs, \qquad \forall s \geq s_o$

II.1.2.- TEOREMA

Suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfaz as condições (f_1)-(f_6), e que F satisfaz a condição

$$(F) \quad |F(s)| \leq es^2 + k, \qquad \forall s \geq 0$$

para certas constantes positivas e,k.

Além disso suponhamos que o número de zeros de f é par $r = 2\ell$. Então, o problema (P_2) tem pelo menos $2\ell-1$ soluções não triviais, $u_1,v_1,.....,u_{\ell-1},v_{\ell-1},u_\ell,$ que satisfazem

$$a_1 \leq u_1,v_1 \leq a_3 \leq u_2,v_2 \leq a_5 \leq .....\leq u_{\ell-1},v_{\ell-1} \leq a_{2\ell-1} \leq u_\ell$$

DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

A demonstração dos Teoremas II.1.1 e II.1.2, que será dada no final desta seção, obtém-se da aplicação iterada dos Teoremas II.1.3 e II.1.4, os quais enunciamos a seguir e que demonstramos após uma série de Lemas.

II.1.3.- TEOREMA

Suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, satisfaz $(f_1),(f_2),(f_3)$ e (f_4), e que o número de zeros de f é r = 3. Então o problema (P_2) tem pelo menos duas soluções não triviais u, v, que satisfazem $a_1 \leq u, v \leq a_3$ em Ω.

II.1.4.- TEOREMA

Suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, satisfaz as condições (f_1)-(f_6), F satisfaz a condição (F) e que o número de zeros de f é r=2. Então o problema (P_2) tem pelo menos uma solução não trivial u, que satisfaz $a_1 \leq u$ em Ω.

Lembremos algumas definições e notações

II.1.5.- DEFINIÇÁO.

Seja B um espaço de Banach real e $\phi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1.

Dizemos que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale (P-S), se dada uma sequência $(u_n) \subset B$ tal que

i) $\phi'(u_n) \longrightarrow o$ e

ii) $\exists c > 0$ tal que $|\phi(u_n)| \leq c$,

então (u_n) tem uma subseqüência convergente em B. Uma seqüência que satisfaz (i) e (ii) será chamada uma seqüência de Palais-Smale.

II.1.6.-DEFINIÇÁO.

Seja B um espaço de Banach e $U \subset B$ um subconjunto aberto não vazio e $\phi \in C^1(U,\mathbb{R})$, seja $u_o \in U$ tal que $\phi'(u_o) = 0$ e ponhamos $d = \phi(u_o)$, dizemos que u_o é do tipo passo da montanha, se para toda vizinhanza V de u_o, $V \subset U$, o espaço topológico $V \cap \phi^{-1}(-\infty,d)$ é não vazío e não conexo por caminhos.

Denotamos por $Cr(\phi,d)$ o conjunto dos pontos $u \in U$ tais que $\phi'(u) = 0$ e $\phi(u) = d$.

No futuro cada vez que aparecer $\| \ \|$, entenderemos que se trata da

norma de $H^1(\Omega)$ ou de $H^1(0,1)$ segundo o contexto. No caso de tratar-seda norma em outro espaço $\mathbb{E}$, escreveremos $\|.\|_{\mathbb{E}}$. Assim mesmo, quando não especificarmos o domínio de integração nas integrais, entenderemos que se trata de Ω ou $(0,1)$.

Na demostração de nossos resultados usamos o seguinte Teorema [H].

II.1.7.- TEOREMA (do Passo da Montanha)

Seja B um espaço de Banach real e $\phi \in C^1(B,\mathbb{R})$ um funcional que satisfaz a condicão de Palais-Smale.

Sejam e_0, e_1 dois pontos distintos de B e definamos o conjunto:

$$\Gamma := \{f \in C([0,1],B)/\ f(i) = e_i, \quad i = 0,1\ \}$$

$$d := \inf_{f\in\Gamma}\sup_{0\le t\le 1} \phi(f(t)).$$

Então, se $d > C = \max\{\phi(e_0),\phi(e_1)\}$, o conjunto $Cr(\phi,d)$ é não vazío.

Se além disso, os pontos de $Cr(\phi,d)$ são isolados em B, existe $u_0 \in Cr(\phi,d)$ que é do tipo passo da montanha.

II.1.8.- LEMA

Suponhamos que f satisfaz (f_1) e

$$(f_7) \qquad \lim_{s\longrightarrow-\infty}\sup\ s^{-1}f(s) < 0$$

Se $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ é uma seqüência tal que:

$$\text{II.1.9.-} \qquad |\phi'(u_n)v| = \left|\int \nabla u_n \nabla v - \int f(u_n)v\right| \le \varepsilon_n\|v\|, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

onde $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$, $\varepsilon_n \to 0$. Então, $\|u_n^-\|$ é limitada. Onde $u = u^+ - u^-$.

Observação: A demonstração deste Lema é análoga à demonstração do Lema 6.5 [dF 2] onde este mesmo resultado é provado para certo funcional $\phi: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÁO do LEMA II.1.8

Pela hipótese (f_7) temos que existe $c > 0$ e $\underline{s} > 0$ tais que $f(s) \ge -cs, \forall s \le -\underline{s}$, ora pela continuidade da f, vemos que existe $k > 0$

tal que $f(s) \geq -cs-k$, $\forall s \leq 0$.

Pondo $v = u_n^-$ em II.1.9 , obtemos

$$\left| -\int (\nabla u_n^-)^2 - \int f(-u_n^-)u_n^- \right| \leq \varepsilon_n \|u_n^-\|$$

e concluimos que

$$\int (\nabla u_n^-)^2 \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| - \int f(-u_n^-)u_n^- \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| - c\int (u_n^-)^2 + k\int u_n^-$$

logo

$$\|u_n^-\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| + (1-c)\int (u_n^-)^2 + k\int u_n^-$$

Temos dois casos :

i) Se $1-c \leq 0$, então

$$\|u_n^-\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| + k\int u_n^-$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta

$$\|u_n^-\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| + k\|u_n^-\|_{L^2} \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| + k\|u_n^-\|$$

donde resulta que $\|u_n^-\|$ é limitada.

ii) Se $1-c > 0$, então

$$\|u_n^-\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| + (1-c)\|u_n^-\|^2 + k\|u_n^-\|$$

assim,

$$c\,\|u_n^-\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n^-\| + k\,\|u_n^-\|$$

donde resulta que $\|u_n^-\|$ é limitada.

II.1.10.- LEMA

Seja $\Phi: H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional e $K: H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ um operador compacto. Suponhamos que $\Phi' = I-K$. Se toda sequência de Palais-Smale é limitada então Φ satisfaz a condição de Palais-Smale.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, como K é compacto e (u_n) é limitada então (Ku_n) têm uma subsequência (que continuamos chamando (Ku_n)), convergente em $H^1(\Omega)$, $Ku_n \longrightarrow v$.

Ora, $u_n - Ku_n = (I-K)u_n = \Phi'(u_n) \longrightarrow 0$, portanto $u_n \longrightarrow v$ o que conclue a demonstração.

No seguinte Lema precisamos da condição

$$(f_8) \qquad \liminf_{s\to+\infty} s^{-1}f(s) > -1$$

II.1.11.- LEMA

Suponhamos que f satisfaz (f_1), (f_6), (f_7) , (f_8) e que F satisfaz a condição (F). Então o funcional ϕ satisfaz a condição P-S.

DEMONSTRAÇÃO.

A idéia da demonstração é a mesma que em [C-M].

Seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, então $\exists\ (\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$, $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ e $C > 0$, tais que

$$(P\text{-}S)1 \qquad |\phi(u_n)| = \left|\frac{1}{2}\int |\nabla u_n|^2 - \int F(u_n)\right| \leq C$$

$$(P\text{-}S)2 \qquad |\phi\,(u_n)v| = \left|\int \nabla u_n \nabla v - \int f(u_n)v\ \right| \leq \varepsilon_n \|v\|, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

Graças ao Lema II.1.8, $\|u_n^-\|$ é limitada, então só temos que provar que $\|u_n^+\|$ é limitada.

Suponhamos por contradição que $\|u_n^+\| \longrightarrow +\infty$

Seja $\underline{u}_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ então $\underline{u}_n \in H^1(\Omega)$ para todo n, e existe $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\underline{u}_n \longrightarrow \underline{u} \qquad \text{fracamente em } H^1(\Omega)$$

$$\underline{u}_n \longrightarrow \underline{u} \qquad \text{em } L^2(\Omega)$$

$$\underline{u}_n \longrightarrow \underline{u} \qquad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Temos

$$\frac{\phi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\int \frac{|\nabla u_n|}{\|u_n\|^2} - \int \frac{F(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2} - \int \frac{F(u_n^+)}{\|u_n\|^2} - \int \frac{F(-u_n^-)}{\|u_n\|^2}$$

Graças à propriedade (F) temos que

$$\frac{\phi(u_n)}{\|u_n\|^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2} - e\int \frac{(u_n^+)^2}{\|u_n\|^2} - k\,\frac{|\Omega|}{\|u_n\|^2} - \int \frac{F(-u_n^-)}{\|u_n\|^2}$$

Passando ao límite temos que

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int (\underline{u})^2 - e\int (\underline{u}^+)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int (\underline{u})^2 - e\int (\underline{u})^2 \,, \quad \text{pois } \underline{u} \geq 0.$$

Assim,

$$\left(\frac{1}{2} + e\right)\int (\underline{u})^2 \geq \frac{1}{2}$$

isto implica que $\underline{u} \not\equiv 0$.

Por outro lado,

$$2\phi(u_n) - \phi'(u_n)u_n = \int f(u_n)u_n - 2\int F(u_n)$$

Se em (f_6) satisfaz-se (ii) temos que $\exists\ R > 0$ tal que

$$C\,u_n^+ - R \leq f(u_n^+)u_n^+ - 2F(u_n^+)\,,$$

e temos que

$$C\int u_n^+ - R|\Omega| \leq \int f(u_n^+)u_n^+ - 2\int F(u_n^+) =$$

$$= \int |\nabla u_n^+|^2 - 2\int F(u_n^+) - \int |\nabla u_n^+|^2 + \int f(u_n^+)u_n^+$$

$$= 2\phi(u_n^+) - \int \nabla u_n \nabla u_n^+ + \int f(u_n^+)u_n^+$$

$$= 2\phi(u_n^+) - \phi'(u_n)u_n^+ ,$$

assim

II.1.12 $$C\int u_n^+ - R|\Omega| \leq 2\phi(u_n^+) - \phi'(u_n)u_n^+ .$$

Por outro lado,

$$2\phi(u_n) = \int |\nabla u_n|^2 - 2\int F(u_n) =$$

$$= \int|\nabla u_n^+|^2 + \int |\nabla u_n^-|^2 - 2\int (F(u_n^+) + F(-u_n^-)) \leq C .$$

Logo,

$$2\phi(u_n^+) = \int|\nabla u_n^+|^2 - 2\int F(u_n^+) \leq C + 2\int F(-u_n^-) \leq C$$

onde C representa diferentes constantes.

Resulta de II.1.12 e da desigualdade acima que

$$C\int u_n^+ \leq R|\Omega| + C - \phi'(u_n)u_n^+ \leq R|\Omega| + C + \varepsilon_n\|u_n^+\|$$

onde a última desigualdade vale por hipótese, logo

$$C\int \frac{u_n^+}{\|u_n^+\|} \leq \frac{C}{\|u_n^+\|} + \varepsilon_n$$

ou seja

$$C\int \underline{u}_n^+ \leq \frac{C}{\|u_n^+\|} + \varepsilon_n .$$

Passando ao limite vemos que $\underline{u}_n^+ \longrightarrow 0$ o que contradiz o fato $\underline{u} \neq 0$.

Se em (f_6) satisfaz-se (i), então, existe $R \geq 0$ tal que

$$f(u_n^+)u_n^+ - 2F(u_n^+) \leq -Cu_n^+ + R$$

Logo

$$C\int u_n^+ \leq 2\int F(u_n^+) - \int f(u_n^+)u_n^+ + R|\Omega|$$

$$= \int \nabla u_n^+ \nabla u_n^+ - \int f(u_n^+)u_n^+ - \int \nabla u_n^+ \nabla u_n^+ + 2\int F(u_n^+) + R|\Omega|$$

$$= \int \nabla u_n^+ \nabla u_n^+ - \int f(u_n^+)u_n^+ - \int |\nabla u_n|^2 + \int |\nabla u_n^-|^2 + 2\int F(u_n) - 2\int F(-u_n^-) + R|\Omega|$$

$$= \phi'(u_n)u_n^+ - 2\phi(u_n) + \int |\nabla u_n^-|^2 - 2\int F(u_n^-) + R|\Omega|$$

$$\leq C + \phi'(u_n)u_n^+ - 2\phi(u_n) \leq C + \varepsilon_n\|u_n^+\| ,$$

logo

$$\int u_n^+ \leq C + \varepsilon_n\|u_n^+\|$$

onde C representa diferentes constantes, o que novamente implica o absurdo $\underline{u} \equiv 0$.

II.1.13.-LEMA

Suponhamos que f satisfaz $(f_1), (f_7)$ e

$$(f_9) \qquad \limsup_{s\to+\infty} s^{-1}f(s) < 0.$$

Então o funcional ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, então (u_n) satisfaz (P-S)1 e (P-S)2. Pondo $v = u_n$ em (P-S)2, obtemos

$$\left|\int |\nabla u_n|^2 - \int u_n f(u_n)\right| \leq \varepsilon_n \|u_n\|, \qquad \text{então}$$

$$\int |\nabla u_n|^2 + \int u_n^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \int u_n \, (f(u_n) + u_n)$$

ou seja

$$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \int u_n \, (f(u_n) + u_n)$$

Pondo $$K_n = \int_{u_n \leq 0} u_n (f(u_n) + u_n) \, ,$$

usando o Lema II.1.8 e a continuidade de f, temos $K_n \leq K$ para alguma constante K, e então

II.1.14 $$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + K + \int_{u_n \geq 0} u_n \, (f(u_n) + u_n).$$

De (f_9) temos que existe $c > 0$, $k \geq 0$ tal que $f(s) \leq -cs + k$, $\forall s \geq 0$; usando este fato obtemos de II.1.14 que

$$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + K + \int_{u_n \geq 0} (1 - C) \, u_n^2 + k \int_{u_n \geq 0} u_n$$

Então

$$\int |\nabla u_n|^2 + \int u_n^2 + c \int_{u_n \geq 0} u_n^2 - \int_{u_n \geq 0} u_n^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + K + k \int_{u_n \geq 0} u_n$$

Ora

$$\int (u_n)^2 - \int_{u_n \geq 0} u_n^2 \geq 0,$$

logo

$$\int |\nabla u_n|^2 + c \int_{u_n \geq 0} u_n^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + K + k\|u_n\|$$

onde temos usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Por outro lado, se $c \leq 1$ então

$$C \int |\nabla u_n|^2 \leq \int |\nabla u_n|^2$$

e se $c > 1$ temos que

$$\int_{u_n \geq 0} u_n^2 \leq c \int_{u_n \geq 0} u_n^2 ,$$

ora, como $\|u_n^-\|$ é limitada, existe $C' > 0$ tal que

$$C'\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \overline{K} + k\|u_n\|,$$

donde $\|u_n\|$ é limitada.

II.1.15.- LEMA

Suponhamos que f satisfaz (f_1), (f_2) e (f_4) então os pontos críticos de ϕ , dados por $u_i = a_i$, não são do tipo passo da montanha.

DEMONSTRAÇÃO.

Primeiro consideremos o caso $f'(a_i) < 0$. Temos que

$$\phi''(a_i)v^2 = \int |\nabla v|^2 - f'(a_i) \int v^2.$$

Se $f'(a_i) \leq -1$, então

$$\phi''(a_i)v^2 \geq \int |\nabla v|^2 + \int v^2 = \|v\|^2.$$

Se $f'(a_i) > -1$, então $f'(a_i) + 1 > 0$ e temos que

$$\phi''(a_i)v^2 = \int |\nabla v|^2 - f'(a_i) \int v^2$$

$$= -f'(a_i)\left[\int |\nabla v|^2 + \int v^2\right] + [f'(a_i) + 1] \int |\nabla v|^2$$

$$\geq -f'(a_i) \|v\|^2 \quad \text{com} \quad -f'(a_i) > 0.$$

Em qualquer caso vemos que a_i é um ponto de mínimo local estrito e portanto não pode ser do tipo passo da montanha.

Consideremos agora o caso em que $f'(a_j) > 0$.

Primeiro observemos que a_j é um ponto crítico não degenerado. Com efeito, se a_j for degenerado, então existe $v \in H^1(\Omega)$, $v \neq 0$ tal que

$\phi''(a_j)(v,w) = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)$, isto é $\int \nabla v \nabla w - f'(a_j) \int vw = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)$ isto implica que $f'(a_j)$ é um autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

o que é uma contradição com a hipótese (f_1). Podemos supor por translação que $a_j = 0$ e $\phi(a_j) = 0$. Aplicando o Lema de Morse podemos escrever ϕ na forma

$$\phi(\varphi(u)) = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

com $x = P^- u \in H^1(\Omega)^-$, $y = P^+ u \in H^1(\Omega)^+$ para u de norma pequena. Seja u de norma pequena tal que $\phi(\varphi(u)) < 0$ e ponhamos

$$u_t = P^- u + tP^+ u = x + ty, \qquad 0 \le t \le 1,$$

temos

$$\phi(\varphi(u_t)) = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}t^2\|y\|^2 \le -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

$$= \phi(\varphi(u)) < 0, \qquad \forall t \in [0,1]$$

Logo $u_1 = u$ e a projeção $P^- u = x$ estão na mesma componente conexa por caminhos.

Observemos agora que $\lambda_2 < f'(a_j)$ ou equivalentemente que

$$\mu_2 < g'(a_j) \quad \text{implica} \quad \dim H^1(\Omega)^- \ge 2.$$

De fato, seja $V = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ onde φ_i é uma autofunção do problema

$$-\Delta u + u = \mu u \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

associada a μ_i $i=1,2$. Então

$$\phi''(a_j)v^2 = \|v\|^2 - g'(a_j)\int v^2 < 0, \qquad \forall v \in V,\ v \neq 0$$

pois

$$\frac{1}{g'(a_j)} < \frac{1}{\mu_2} \leq \frac{\int u^2}{\|u\|^2}, \qquad \forall u \in V,\ u \neq 0$$

Logo $V \subset H^1(\Omega)^-$.

Se agora consideramos duas funções u_1, u_2 de norma pequena com $\phi(\varphi(u_i)) < 0$, $i=1,2$, temos $\phi(\varphi(P^- u_i)) < 0$ para $i=1,2$, então $P^- u_i \in H^1(\Omega)^-$ com $\dim H^1(\Omega)^- \geq 2$. Logo existe um caminho em $H^1(\Omega)^-$ que une $P^- u_1$ e $P^- u_2$, assim u_1 e u_2 estão na mesma componente conexa por caminhos. Consequentemente a_j não pode ser do tipo passo de montanha.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II.1.3.

Dado $\varepsilon > 0$ consideremos uma função $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tal que:

$$\hat{f}(s) = f(s) \qquad \forall s \in (a_1 - \varepsilon,\ a_3 + \varepsilon)$$

$$\hat{f}(s) > 0 \qquad \forall s \leq a_1 - \varepsilon$$

$$\hat{f}(s) < 0 \qquad \forall s \geq a_3 + \varepsilon$$

e tal que $\lim_{s \to -\infty} s^{-1} \hat{f}(s) < 0$ e

$$\hat{f}(s) \leq -\lambda s \qquad \forall s \geq \bar{s} > a_3 + \varepsilon$$

para algúm $\bar{s}$ e algúm $\lambda > 0$. Seja

$$\hat{\phi}(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int \hat{F}(u),$$

onde

$$\hat{F}(s) = \int_0^s \hat{f}(t)\, dt$$

Uma aplicação direta do princípio do máximo, mostra que os pontos críticos de $\hat{\phi}$ são também, pontos críticos de ϕ. Pelo Lema II.1.13, vemos que $\hat{\phi}$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Da demonstração do

Lema II.1.15 vemos que a_1 e a_3 são pontos de mínimos locais estritos do funcional $\hat{\phi}$, assim pondo $e_o = a_1$, $e_1 = a_3$ no teorema do Passo da Montanha vemos que

$$d = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{0\le t\le 1} \hat{\phi}(f(t)) > c = \max\{\hat{\phi}(e_o), \hat{\phi}(e_1)\}$$

é um valor crítico de $\hat{\phi}$, onde

$$\Gamma = \{f \in ([0,1], H^1(\Omega)) \ / \ f(0) = e_o, \ f(1) = e_1\}$$

Se os pontos críticos em $Cr(\hat{\phi},d)$ não são isolados em $H^1(\Omega)$ então ϕ tem uma infinidade de pontos críticos. Se os pontos em $Cr(\hat{\phi},d)$ são isolados, então existe $u_o \in Cr(\hat{\phi},d)$ que é do tipo passo da Montanha e então, pelo Lema II.1.15 $u_o \neq a_i$, $i = 1,2,3$ e logo existe pelo menos uma solução não trivial do problema (P_1).

Para mostrar a existência da segunda solução faremos primeiro algumas considerações.

II.1.16

Existe $R > 0$ tal que $\hat{\phi}'(u)u > 0$ $\forall u \in \partial B_R$ onde ∂B_R é o bordo da bola $B_R = B(0,R)$, com centro em zero e raio R, em $H^1(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Pela construção de $\hat{f}$ temos que

$$\lim_{s\to -\infty} \sup s^{-1}\hat{f}(s) < 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{s\to +\infty} \sup s^{-1}\hat{f}(s) < 0.$$

Estas desigualdades e a continuidade de $\hat{f}$, implicam que existe

$\varepsilon > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\hat{f}(s)s < -\varepsilon s^2 + c, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Concluimos que

$$\hat{\phi}'(u)u = \int_0^1 |\nabla u|^2 - \int_0^1 \hat{f}(u)u > \int_0^1 |\nabla u|^2 + \varepsilon \int u^2 - C$$

Se $\varepsilon > 1$,

$$\hat{\phi}'(u)u > \|u\|^2 - C$$

Se $\varepsilon \le 1$,

$$\hat{\phi}'(u)u > \varepsilon\|u\|^2 - C,$$

então existe $R > 0$ suficientemente grande tal que se $\|u\| = R$ então, $\hat{\phi}'(u)u > 0$.

II.1.17.-

Tem-se como consequência da observação 1.16, vía uma homotopía com a identidade que $d(\hat{\phi}', B_R, 0) = 1$.

II.1.18.-

As funções $u_i \equiv a_i$, $i = 1,3$ são pontos de mínimo local estrito de $\hat{\phi}$ e por tanto são pontos críticos com índice de morse igual a zero. Assim $d(\hat{\phi}', B_i, 0) = (-1)^0 = 1$ onde

$B_i =: B(a_i, \varepsilon)$, $i = 1,3$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Temos por excisão que escolhendo R tal que $B_1 \cup B_3 \subset B_R$ resulta:

$$d(\hat{\phi}', B_R \setminus (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_3), 0) + d(\hat{\phi}', B_1, 0) + d(\hat{\phi}', B_3, 0) = 1$$

Logo

$$d(\hat{\phi}', B_R \setminus (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_3), 0) = -1$$

II.1.19.-

Para completar a demonstração do Teorema II.1.3, precisamos ainda o seguinte resultado ([H],Teo.2.).

Consideremos a seguinte condição:

(ϕ) Seja H um espaço de Hilbert real e $\phi \in C^2(H,\mathbb{R})$, suponha que $\phi' = I - K$ onde I é a identidade de H e $K: H \longrightarrow H$ é um operador compacto. Além disso suponhamos que para todo $u_o \in Cr(\phi)$, o primeiro autovalor λ_1 da linearização $\phi''(u_o) \in \mathcal{L}(H)$ em u_o, é simples desde que $\lambda_1 \leq 0$.

TEOREMA:[H]

Suponhamos que a condição (ϕ) vale e que $u_o \in H$ é um ponto crítico isolado do tipo passo da Montanha. Então, o grau local de u_o é -1.

II.1.20.-

O funcional $\hat{\phi}$ satisfaz a condição (ϕ)

Demonstração.-

Seja u_o um ponto crítico de $\hat{\phi}$ e seja λ um autovalor de $\hat{\phi}''(u_o)$,

então existe $v \in H^1(\Omega)$ $v \neq 0$ tal que $\hat{\phi}''(u_o)v = \lambda v$, esta igualdade é equivalente a

$$\langle \hat{\phi}''(u_o)v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle \quad , \qquad \forall w \in H^1(\Omega)$$

ou seja,

$$\int \nabla v \nabla w - \int \hat{f}'(u_o)vw = \lambda \left[\int \nabla v \nabla w + \int vw \right], \qquad \forall w \in H^1(\Omega)$$

ou equivalentemente,

$$(1-\lambda) \int \nabla v \nabla w = \int (\hat{f}'(u_o)+\lambda)vw \ , \qquad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Logo $\hat{\phi}''(u_o)v = \lambda v$ se e somente se

$$\text{II.1.21} \qquad \int \nabla v \nabla w = \frac{1}{1-\lambda} \int [\hat{f}'(u_o)v+\lambda v]\, w \qquad , \forall w \in H^1(\Omega)$$

como $\hat{f}'(u_o)v+\lambda v \in L^2(\Omega)$ então, $\nabla v \in H^1(\Omega)$ e por tanto $v \in H^2(\Omega)$.

Por outro lado somando $\int vw$ a ambos os lados da igualdade II.1.21 vemos que $\hat{\phi}''(u_o)v = \lambda v$ se e somente se (λ, v) é solução do problema

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta v + v = \frac{1}{1-\lambda} (\hat{f}'(u_o)+1)\, v & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Seja agora λ_1 o primeiro autovalor de $\phi''(u_o)$, e suponhamos que $\lambda_1 \leq 0$. Então, $\frac{1}{1-\lambda_1} > 0$, e se v é uma solução não nula de (P_{λ_1}), então

$$\int (\nabla v)^2 + \int v^2 = \frac{1}{1-\lambda_1} \int (\hat{f}'(u_o)+1)\, v^2,$$

consequêntemente $\hat{f}'(u_o(x_o))+1 > 0$ para algum $x_o \in \Omega$.

Seja (P_μ) o problema

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \mu(\hat{f}'(u_o)+1)v & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

O primeiro autovalor μ_1 de (P_μ) é positivo e simples [M-M], [H-K].

Afirmamos que $\mu_1 = \frac{1}{1-\lambda_1}$. Com efeito, como $\frac{1}{1-\lambda_1}$ é um autovalor de (P_μ), se a afirmação for falsa então

$$\mu_1 < \frac{1}{1-\lambda_1} \quad \text{ou equivalentemente} \quad \lambda_1 > \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1},$$

observar que isto é uma contradição se $\frac{\mu_1 - 1}{\mu_1}$ for autovalor de $\phi''(u_o)$, logo basta provar que nestas condições, $\frac{\mu_1 - 1}{\mu_1}$ é de fato um autovalor de $\hat{\phi}''(u_o)$, mas depois dos cálculos acima, isto é consequência imediata do fato de μ_1 ser autovalor do problema (P_μ).

Isto conclue a demonstração da afirmação II.1.20.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II.1.3 (Completada)

Mostramos a existência de uma segunda solução.

Seja u_o a solução do tipo passo da montanha encontrada anteriormente; estamos supondo que é isolada. Graças às observações II.1.19 e II.1.20, temos que $d(\hat{\phi}', B, 0) = -1$ onde B é uma bola suficientemente pequena com centro em u_o. Seja R grande tal que $B \cup B_1 \cup B_3 \subset B_R$ e $u_2 \equiv a_2 \in B_R$, u_2 é um ponto crítico não degenerado de $\hat{\phi}$ com índice de morse ≥ 2. Se u_2 for o único ponto crítico de $\hat{\phi}$ em $A = B_R \setminus (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_3 \cup \overline{B})$, então

$$0 = d(\hat{\phi}', B_R \setminus (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_3 \cup \overline{B}), 0) = (-1)^k$$

onde $k \geq 2$ é o índice de morse de u_2 o que é um absurdo, logo $\hat{\phi}$ tem pelo menos mais um ponto crítico $u \neq u_2$ em $B_R \setminus (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_3 \cup \overline{B}), 0)$. Logo (P_1) têm uma solução não trivial $u \neq u_o$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II.1.4.

Seja $\hat{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}(s) = f(s)$ $\forall s \geq a_1$ e $\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} < 0$.

Então, o funcional $\hat{\phi} : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{\phi}(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int \hat{F}(u),$$

onde $\hat{F}(s) = \int_0^s \hat{f}(t)\,dt$,

satisfaz a condição de Palais-Smale. De fato $\hat{\phi}$ satisfaz as hipótesis do Lema II.1.11.

Como $\hat{\phi}(a_1) \geq \hat{\phi}(b)$ e a_1 e um ponto de mínimo local estrito de $\hat{\phi}$, então estamos nas hipóteses do Teorema Passo da Montanha e portanto o funcional $\hat{\phi}$ (e logo ϕ) tem infinitos pontos críticos ou pelo menos um que é do tipo passo da Montanha. Como a_1 e a_2 não são do tipo passo da Montanha (Lema II.1.15) isto conclui a demostração.

DEMONSTRAÇÁO DO TEOREMA II.1.1

Para cada $i=1,\ldots,\ell$ consideremos uma função de classe C^1

$f_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_i(s) = f(s) \quad \forall\, s \in [a_{2i-1}, a_{2i+1}]$

$f_i(s) > 0 \quad \forall\, s < a_{2i-1}$

e $f_i(s) < 0 \quad \forall\, s > a_{2i+1}$

Graças ao Teorema II.1.3 , o problema

$$-\Delta u = f_i(u) \quad \text{em } \Omega \;; \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \;,$$

tem duas soluções u_i, v_i, tais que $a_{2i-1} \leq u_i, v_i \leq a_{2i+1}$.

É claro que para todo i , u_i, v_i, são soluções de (P_2). Isto conclui a demonstração.

DEMONSTRAÇÁO DO TEOREMA II.1.2

Se $\ell = 1$, aplíca-se diretamente o Teorema II.1.4. Se $\ell \geq 2$, então definimos $\underline{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\underline{f}(s) = f(s) \quad \forall s \leq a_{2\ell-1}$ e $f(s) < 0$ $\forall s > a_{2\ell-1}$, então por aplicação do Teorema II.1.1, resulta que (P_2) tem $2\ell-2$ soluções não triviais $u_1, v_1, \ldots u_{\ell-1}, v_{\ell-1}$, tais que

$$a_1 \leq u_1, v_1 \leq a_3 \leq u_2, v_2 \leq a_5 \leq \ldots\ldots\ldots \leq u_{\ell-1}, v_{\ell-1} \leq a_{2\ell-1}.$$

Ora, definimos $\hat{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}(s) > 0 \quad \forall s < a_{2\ell-1}$ e

$\hat{f}(s) = f(s) \quad \forall s \geq a_{2\ell-1}$. Aplicando o Teorema II.1.4 ao problema

$$-\Delta u = \hat{f}(u) \text{ em } \Omega \ ; \ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega \ ,$$

compléta-se a demonstração.

§ 2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.

Nesta parte investigamos a existência e multiplicidade de soluções do problema:

$$(P_3) \quad -u'' = f(u) \quad \text{em } (0,1); \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

onde $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é, como na seção 1, uma função de classe C^1 com exatamente r zeros consecutivos, todos simples, $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$.

Também como na seção 1, investigamos a existência e multiplicidade de soluções não triviais. Porquanto no caso de equações diferenciais ordinarias podemos aplicar técnicas da teoria de bifurcação, obtemos resultados mais amplos que no caso de equações diferenciais parciais. Mais precisamente, damos uma resposta positiva à questão da existência e multiplicidade de soluções no caso que a não linearidade f não satisfaz a condição (f_4), neste caso os λ_k são os autovalores do problema

$$-u'' = \lambda u \quad \text{em } (0,1) \ , \ u'(0)=u'(1)=0.$$

ESTABELECIMENTO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS.

II.2.1.-TEOREMA

Seja $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ com um número ímpar de zeros $r = 2\ell+1$. Suponhamos que f satisfaz (f_3), (f_4). Então o problema (P_3) tem pelo menos 2ℓ soluções não triviais $u_1,v_1,\ldots u_\ell,v_\ell$, que satisfazem:

$$a_1 \leq u_1,v_1 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_{2\ell-1} \leq u_\ell,v_\ell \leq a_{2\ell+1} \qquad \text{em } (0,1)$$

II.2.2.- TEOREMA

Seja $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ com um número par de zeros $r = 2\ell$. Suponhamos que f satisfaz (f_3), (f_4) e (f_5). Então o problema (P_3) tem pelo menos $2\ell-1$ soluções não triviais $u_1,u_1,\ldots, u_{\ell-1}, v_{\ell-1},u_\ell$, que satisfazem
$a_1 \leq u_1,v_1 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_{2\ell-3} \leq u_{\ell-1},v_{\ell-1} \leq a_{2\ell-1} \leq u_\ell \leq b \qquad \text{em } (0,1).$

DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS.

Os resultados principais, Teoremas II.2.1 e II.2.2 têm demonstrações completamente análogas às dos Teoremas II.1.1 e II.1.2 respectivamente, por esta razão as omitiremos. Como no caso de EDP,estas demonstrações, resultam de uma aplicação iterada de dois Teoremas mais particulares(Teoremas II.2.3 e II.2.4) que enunciamos abaixo. A demonstração do Teorema II.2.3 é a mesma que a do Teorema II.1.3 com as mudanças obvias e a omitiremos. A demonstração do Teorema II.2.4 tem uma pequena diferença com a do Teorema II.1.4 e a daremos apos uma série de Lemas.

II.2.3.-TEOREMA

Seja $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ com $r = 3$. Suponhamos que f satisfaz (f_3) e (f_4). Então o problema (P_3) tem pelo menos duas soluções não triviais, u_1 e v_1 que satisfazem

$$a_1 \leq u_1,\ v_1 \leq a_3 \quad \text{em } (0,1).$$

II.2.4.-TEOREMA

Seja $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ com $r = 2$. Suponhamos que f satisfaz (f_3), (f_4) e (f_5). Então o problema (P_3) tem pelo menos uma solução não trivial, u, que satisfaz

$$a_1 \leq u \leq b \quad \text{em} \quad (0,1).$$

II.2.5.-LEMA

Seja u uma solução do problema (P_3) e seja $x_0 \in [0,1]$ tal que

$$u(x_0) = \text{máx } u(x). \quad \text{Então } f(u(x_0)) \geq 0.$$

II.2.6.-LEMA

Seja u uma solução do problema (P_1) com f satisfazendo (f_0). Então $u(x) \geq a_1$, $\forall x \in (0,1)$.

Os Lemas II.2.5 e II.2.6 são consequências imediatas do princípio do máximo.

OBSERVAÇÃO

Se $u \in H =: H^1(0,1)$ e definimos o operador $Ku : H \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$(Ku)(v) = \int_0^1 (u+f(u))v \quad ,$$

vemos que o operador $K : H \longrightarrow H$ definido por esta relação é um operador compacto.

Por outro lado, se $\phi : H^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ é o funcional definido por

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \int_0^1 F(u)$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Então,

$$\phi'(u)(v) = \int_0^1 u'v' - \int_0^1 f(u)v \qquad \forall v \in H^1(0,1)$$

logo

$$\phi'(u)v = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv - \int_0^1 (u+f(u))v = \langle u,v\rangle_{H^1(0,1)} - (Ku)(v)$$

Vemos assim que ϕ' é da forma I-K, com K compacto.

II.2.7.-LEMA

Seja $\Psi : H^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional, e $K : H^1(0,1) \longrightarrow H^1(0,1)$ um operador compacto. Suponhamos que $\Psi' = I-K$. Se toda sequência de Palais-Smale é limitada, então Ψ satisfaz a condição PS.

A demonstração é análoga à demonstração do Lema II.1.10.

II.2.8.-LEMA

Suponhamos que f satisfaz (f_7) e seja $(u_n) \subset H^1(0,1)$ uma sequência tal que

$$|\phi'(u_n)v| = \left|\int_0^1 u_n'v' - \int_0^1 f(u_n)v\right| \leq \varepsilon_n\|v\|, \quad \forall v \in H^1(0,1).$$

onde ϕ é o funcional definido na observação acima e (ε_n) é uma sequência de números reais positivos convergente a zero.

Então $\|u_n^-\|$ é limitada, onde $u = u^+ - u^-$ e $u^+ = \max\{u,0\}$ é a parte positiva de u.

Demonstra-se na mesma forma que o Lema II.1.8

Para o seguinte Lema precisamos da seguinte condição:

(f_6') $\exists s_o$ tal que uma das seguintes alternativas vale:

$$\text{i)}\quad f(s) + s \leq 2F(s) - sf(s) \quad \forall s \geq s_o \quad \text{ou}$$
$$\text{ii)}\quad f(s) + s \leq sf(s) - 2F(s), \quad \forall s \geq s_o$$

onde F é definida como antes por $F(s) = \int_0^s f(t)dt.$

II.2.9.-LEMA

Se f satisfaz (f_6'), f_7) e (f_8) então ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale.

DEMOSTRACÃO

Seja $(u_n) \subset H^1(0,1)$ uma sequência de Palais-Smale, ou seja (u_n) satisfaz

$$\text{II.2.10}\quad |\phi'(u_n)v| = \left|\int_0^1 u_n' v' - \int_0^1 f(u_n)v\right| \leq \varepsilon_n \|v\|, \quad \forall v \in H^1(0,1)$$

com $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$, $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, e

$$\text{II.2.11}\quad |\phi(u_n)| = \left| \frac{1}{2} \int_0^1 (u_n')^2 - \int_0^1 F(u_n)\right| \leq C$$

onde C é uma constante.

Graças à observação anterior e ao Lema II.2.7, só temos que provar que (u_n) é limitada.

Suponhamos que f satisfaz $(f_6'.i)$ (no caso em que f satisfaz (ii) a demostração é análoga).

Pondo $v = u_n$ em II.2.10, temos

$$\text{II.2.12}\quad \left|\int_0^1 (u_n')^2 - \int_0^1 u_n f(u_n)\right| \leq \varepsilon_n \|u_n\|,$$

de II.2.10 e II.2.11 temos que

$$\left| \int_0^1 (u_n f(u_n) - 2F(u_n))\right| \leq 2C + \varepsilon_n \|u_n\|$$

e pela hipótese $(f_6'.i)$

$$\int_{u_n \geq s_0} (f(u_n) + u_n) \leq \int_{u_n \geq s_0} (2F(u_n) - u_n f(u_n))$$

$$= K_n + \int_0^1 (2F(u_n) - u_n f(u_n)),$$

onde $-K_n = \int_{u_n \leq s_0} (2F(u_n) - u_n f(u_n))$

Como $\|u_n^-\|_{H^1(0,1)}$ é limitada (Lema II.2.8) e $H^1(0,1) \subset C([0,1])$ e dado que f e F são contínuas, temos que (K_n) e limitado, ou seja existe K tal que $K_n \leq K$, $\forall n$. Logo

II.2.13 $$\int_{u_n \geq s_0} [f(u_n) + u_n] \leq K + 2c + \varepsilon_n \|u_n\|$$

Por outro lado, de II.2.12 tem-se

$$\int_0^1 (u_n')^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \int_0^1 u_n f(u_n)$$

e logo

$$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \int_0^1 u_n (f(u_n) + u_n)$$

e temos

II.2.14 $$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \int_{u_n \leq s_0} u_n (f(u_n) + u_n) + \int_{u_n \geq s_0} u_n (f(u_n) + u_n)$$

Da hipótese (f_8) $\exists$ $C > -1$ e $\bar{s} > 0$ tal que $f(s) \geq Cs$ $\forall s \geq \bar{s}$, então $f(s)+s \geq (C+1)s$ $\forall s \geq \bar{s}$. Sem perder generalidade podemos supor que $s_0 \geq \bar{s}$ e temos que $f(s) + s > 0$ $\forall s \geq s_0$, então da desigualdade II.2.14 resulta

$$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \bar{K} + \|u_n\|_\infty \int_{u_n \geq s_0} (f(u_n) + u_n)$$

Agora por 2.13 e pela imersão $H^1(0,1) \hookrightarrow C\,[0,1]$ resulta:

$$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n \|u_n\| + \overline{K} + \overline{C}\|u_n\|(K + 2\,C + \varepsilon_n \|u_n\|).$$

Logo

$$(1 - \overline{C}\varepsilon_n)\ \|u_n\| \leq \varepsilon_n + \frac{\overline{K}}{\|u\|} + \overline{C}\ (K + 2C)$$

o que mostra que $\|u_n\|$ é limitado.

II.2.15.-LEMA

Seja f satisfazendo (f_7) e (f_9). Então o funcional ϕ satisfaz a condição P-S.

Demonstra-se na mesma forma que o Lema II.1.13.

II.2.16.-LEMA

Suponhamos que f satisfaz (f_4), então os pontos críticos de ϕ, dados por $u_i = a_i$. não são do tipo passo da montanha.

Demonstra-se en forma anàloga ao Lema II.1.15.

DEMONSTRAÇÁO DO TEOREMA II.2.4.

Separamos a demonstração em duas partes; na primeira provamos uma estimativa a priori para as soluções de (P_3) e na segunda aplicamos o Teorema do passo da Montanha.

1.- Estimativa a priori.-

Afirmação: Se u é uma solução de (P_3) então $\|u\|_\infty \leq b$.

Com efeito, sunponhamos que $u \neq$ cte. e seja $u(x_0) = \text{máx}\ u(x)$ com $0 \leq x \leq 1$, graças aos Lemas II.2.5 , II.2.6 temos que $u(x_0) \geq a_2$ $u(x) \geq a_1\ \forall x \in (0,1)$.

Afirmamos que $u(x_0) > a_2$.

Senão, $u(x_0) = a_2$ e $u''(x) \geq 0\ \ \forall x \in (0,1)$. Temos três casos;

$$x_0 = 0, \qquad x_0 = 1 \quad \text{e} \quad 0 < x_0 < 1.$$

Mas em qualquer destes casos, o princípio do máximo conduz a contradição. Com efeito:

Se $0 < x_0 < 1$, então $u \equiv a_2$. Se $x_0 = 0$, então $u'(x_0) < 0$ e se $x_0 = 1$ então $u'(x_0) > 0$. Logo $u(x_0) > a_2$.

Suponhamos que $0 < x_o < 1$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $u'(x) > 0$ $\forall x \in (x_o - \varepsilon, x_o)$. Seja $\bar{x}$ definido por

$$\bar{x} = \sup \left\{ x \in [0, x_o - \varepsilon] \ / \ u'(x) = 0 \right\}$$

então $u'(\bar{x}) = 0$. Ora, multiplicando (P_3) por u' e integrando entre $\bar{x}$ e x_o, obtemos

$$0 = -\frac{1}{2}(u'(x_o))^2 + \frac{1}{2}(u'(\bar{x}))^2 = \int_{u(\bar{x})}^{u(x_o)} f(s)\, ds$$

o que implica que $u(x_o) \leq b$.

Se $x_o = 0$ então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $u'(x) < 0$, $\forall x \in (0, \varepsilon)$. Seja $\underline{x}$ definido por

$$\underline{x} = \text{ínf } \{x \in [\varepsilon, 1] \ / \ u'(x) = 0\},$$

então multiplicando (P_1) por u' e integrando, agora entre x_o e $\bar{x}$, obtemos a mesma estimativa, e analogamente se $x_o = 1$. Isto prova a estimativa $\|u\|_\infty \leq b$.

2.-Aplicação do Teorema do Passo da Montanha.

Definamos agora, $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$\hat{f}(s) = f(s)$ para $a_1 \leq s \leq b$

$\hat{f}(s) > 0$ para $s < a_1$ e

$\hat{f}(s) > 0$ para $s > b$, satisfazendo $\lim\sup_{s \to -\infty} s^{-1}\hat{f}(s) < 0$ e (f_6'),

então pelo Lema II.2.9, $\hat{\phi}$ satisfaz a condição (P-S). Observemos também que $\hat{\phi}(a_1) \geq \hat{\phi}(b)$. Como a_1 é um mínimo local estrito de $\hat{\phi}$, podemos colocar $e_o = a_1$, $e_1 = b$ no Teorema do passo Montanha, e assim, temos a existência de um ponto crítico u_o de $\hat{\phi}$ tal que:

$$\hat{\phi}(u_o) = d =: \inf_{f \in \Gamma} \sup_{0 \leq t \leq 1} \hat{\phi}(f(t)), \quad \text{e} \quad u_o \neq a_1 \quad \text{pois} \quad d > \hat{\phi}(a_1).$$

Se os pontos críticos de $Cr(\hat{\phi}, d)$ são isolados, existe $u_o \in Cr(\hat{\phi}, d)$ do tipo passo da montanha e pelo Lema II.2.16, $u_o \neq a_2$. Isto conclui a demonstração.

O resultado abaixo mostra existência e multiplicidade de soluções do problema (P_2) no caso en que f não satisfaz a condição (f_4).

II.2.17.-TEOREMA

Suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tem exatamente r zeros consecutivos, todos simples, que satisfaz (f_3) e $f'(a_i)=k^2\pi^2$ para algúm $k \geq 2$ e para algúm $i \in \{1,\ldots,r\}$. Então o problema (P_3) tem pelo menos k-1 soluções não triviais.

DEMONSTRAÇÁO.-

Para demonstrar o Teorema II.2.17, estudamos, via teoria de bifurcação o problema não linear de autovalores

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -u'' = \lambda f(u) \text{ em } (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

e aplicamos os resultados com $\lambda = 1$.

Pondo $v = u-a_i$ e $g_i(v) = f(v+a_i)$ o problema (P_λ) se escreve na forma

$$(P_{i,\lambda}) \quad \begin{cases} -v'' = \lambda g_i(v) \text{ em } (0,1) \\ v'(0) = v'(1) = 0 \end{cases}$$

Observemos que $g_i(0) = 0$ e que então $(\lambda,0)$ é solução de $(P_{i,\lambda})$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1,\ldots,r$.

Usando a fórmula de Taylor obtemos o problema equivalente

$$(\overline{P}_{i,\lambda}) \quad \begin{cases} -v'' = \lambda g_i'(0)\, v + \lambda h(v) \quad \text{em } (0,1) \\ v'(0) = v'(1) = 0 \end{cases}$$

onde $h(v) = \sigma(\|v\|)$ perto de $v = 0$.

Se $G(t,s)$ é a função de Green para o operador $\mathcal{L}(v) \equiv - v''+ \varepsilon v$, com condições de Neumann, o problema $(\overline{P}_{i,\lambda})$ transforma-se na equação integral equivalente

$$(I_{i,\lambda}) \qquad v = (\lambda g_i'(0) + \varepsilon)\, Lv + G_i(\lambda,v), \text{ onde}$$

$$Lv = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds \qquad \text{e} \qquad G_i(\lambda,v) = \lambda \int_0^1 G(t,s)h(v(s))ds$$

Pondo $\mu = \lambda\, g_i'(0) + \varepsilon$, pode-se escrever o problema $(I_{i,\lambda})$ na forma

$$(I_{i,\mu}) \qquad v - \mu Lv - \tilde{G}_i(\mu, v) = 0$$

onde

$$\tilde{G}_i(\mu, v) = G_i\left(\frac{\mu - \varepsilon}{g_i'(0)}, v\right)$$

Seja $E = \left\{ v \in C^1[0,1] \;/\; v'(0) = v'(1) = 0 \right\}$

com a norma usual $\|v\|_1 = \max\limits_{0 \le s \le 1} |v(s)| + \max\limits_{0 \le s \le 1} |v'(s)|$

Os operadores L e $\tilde{G}_i$ são compactos e $\tilde{G}_i = \sigma(\|v\|)$ perto de $v = 0$, uniformemente sobre intervalos limitados de μ.

Queremos estudar o diagrama de bifurcação da equação $(I_{i,\mu})$ com relação à reta de soluções triviais $(\mu, 0)$.

Os valores característicos de L são exatamente os autovalores de $\mathcal{L}$, ou seja os autovalores do problema de Neumann:

$$-v'' + \varepsilon v = \mu v \quad \text{em} \quad (0,1); \quad u'(0) = u'(1) = 0,$$

cujas soluções são (μ_k, v_k) com $\mu_k = k^2\pi^2 + \varepsilon$, $v_k = \cos k\pi t$, $k = 0,1,2,..$

Então os possíveis pontos de birfucação são do tipo $(\mu_k, 0)$. Ora, todos os autovalores μ_k são simples. De fato mostremos que

$$\mathrm{Ker}(\mu_k - \mathcal{L})^2 \subset \mathrm{Ker}(\mu_k - \mathcal{L}).$$

Seja $v \in \mathrm{Ker}(\mu_k - \mathcal{L})^2$, então

$$(\mu_k - \mathcal{L})v = c \cos k\pi t$$

para alguma constante real c.

Multiplicando esta igualdade por $\cos k\pi t$, obtemos:

$$(\mu_k v - \mathcal{L}v) \cos k\pi t = c \cos^2 k\pi t,$$

ou equivalentemente

$$(\mu_k v + v'' - \varepsilon v) \cos k\pi t = c \cos^2 k\pi t,$$

integrando entre 0 e 1, temos:

$$(\varepsilon + k^2\pi^2) \int_0^1 v \cos k\pi t + \int_0^1 v'' \cos k\pi t - \varepsilon \int_0^1 v \cos k\pi t = c \int_0^1 \cos^2 k\pi t$$

donde

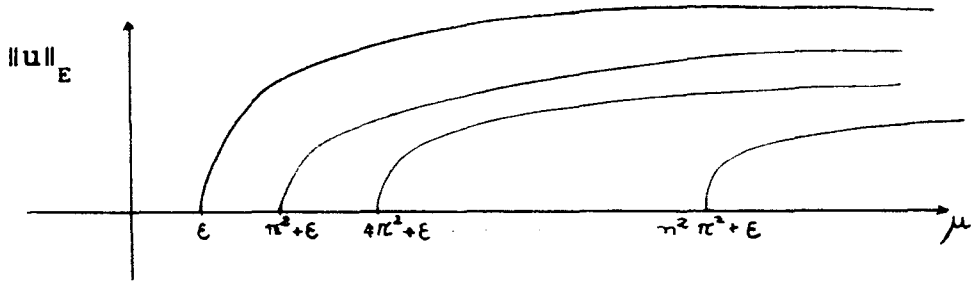
$$0 = c\int_0^1 \cos^2 k\pi t \, dt$$

o que implica $c = 0$.

Portanto $(\mu_k - \mathcal{L})v = 0$. Conseqüêntemente $\mathrm{Ker}(\mu_k - \mathcal{L})^2 \subset \mathrm{Ker}(\mu_k - \mathcal{L})$

Ora, aplicando os resultados em [R; Teo.1.10 e 2.5], vemos que para todo $k = 0,1,.....$, existe uma componente conexa $\mathcal{C}_k$ de soluções (μ,v) de $(I_{i,\mu})$ tal que $\mathcal{C}_k$ é não limitada en $\mathbb{R} \times E$ e $(\mu_k,0) \in \mathcal{C}_k$.

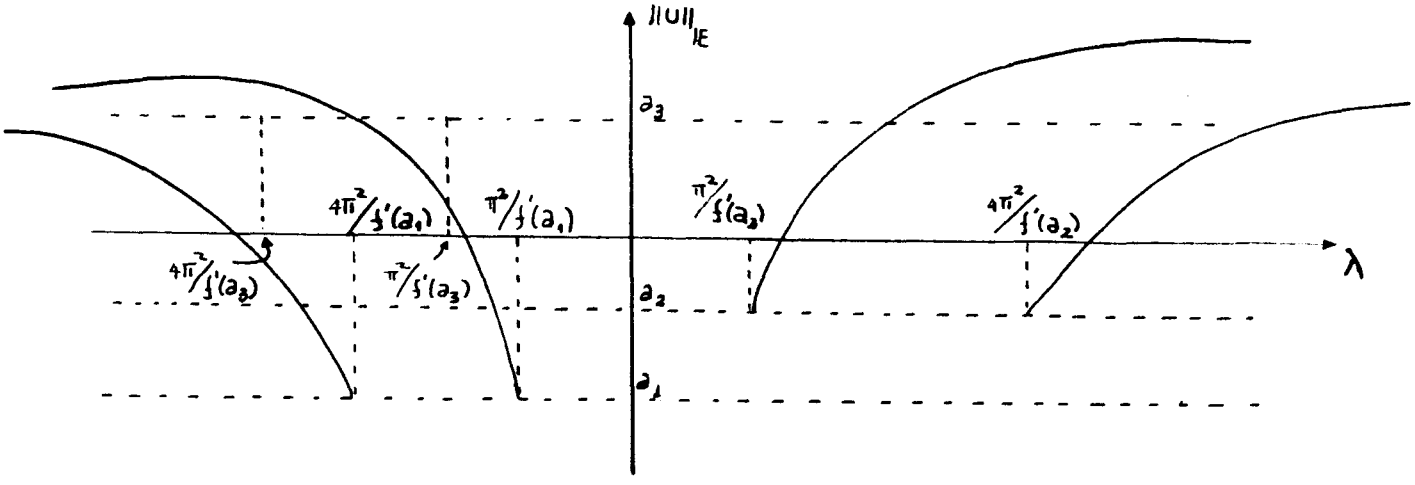
Para $(I_{i,\mu})$ temos o seguinte diagrama de bifurcação



Voltando às variáveis (λ,u) temos que $\forall k=1,2,...$ e $\forall i=1,..,r$ existe uma componente de soluções de $(I_{i,\lambda})$, $\mathcal{C}_{k,i} \subseteq \mathbb{R} \times E$, não limitada tal que

$$\left(\frac{k^2\pi^2}{f'(a_i)}, a_i\right) \in \mathcal{C}_{k,i}.$$

Temos o seguinte diagrama de bifurcação para o problema original



Aplicando dos Lemas II.2.5 e II.2.6 e graças à estimativa a priori achada na demonstração do Teorema 2.4, temos que se (λ,u) com $\lambda > 0$ é uma solução de (P_λ) então existe $M > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq M$.

Ora, integrando (P_λ) entre 0 e t, temos:

$$-u'(t) = \lambda \int_0^t f(u(s))ds$$

e dai

$$|u'(t)| \leq \lambda \int_0^t |f(u(s))|ds$$

Pela continuidade de f e a limitação de u, existe K tal que $\|u'\|_\infty \leq \lambda K$.

Logo para as soluções de (P_λ), (λ,u) con $\lambda > 0$, u está limitada na norma de $\mathbb{E}$, $\|u\|_1 \leq \lambda K + M$. Isto significa que as soluções u estão limitadas para λ limitado.

Observemos também que se $k \geq 1$, então as soluções $(\lambda,u) \in \mathcal{C}_{k,i}$ têm pelo menos um zero (simples) e portanto $\lambda \neq 0$, pois para $\lambda = 0$ as únicas soluções são as constantes, isto significa que as ramas de bifurcação devem "ir para a direita" desde o ponto $(\frac{k^2\pi^2}{f'(a_1)}, a_1)$ se i é par, e "para a esquerda" se i é ímpar, isto justifica o diagrama acima.

Do anterior vemos que para todo k=2,3,...e para todo i par. $\mathcal{C}_{k,i}$ contem pelo menos uma solução do tipo $(\frac{(k+1)^2\pi^2}{f'(a_1)}, u)$.

Se $f'(a_1) = k^2\pi^2$ então para todo $j < k$, $\mathcal{C}_{j,1}$ contem pelo menos uma solução do tipo (1,u) com u não constante. Isto conclui a demonstração

CAPITULO III

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÖES PARA O PROBLEMA MISTO

§ 1.- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

APRESENTAÇÁO DO PROBLEMA

Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_k$, $2k - 1$ zeros simples de f tais que:

(f_1) Existe uma constante $c > 0$ tal que

$$f'(a_i) < -c \qquad \forall i = 1,\ldots,k.$$

(f_2) f não muda sinal nos intervalos

$(-\infty, a_1)$, $(a_k, +\infty)$

(a_i, b_i) $\quad i = 1,\ldots,k$

(b_i, a_{i+1}) $\quad i = 1,\ldots,k-1.$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com bordo regular. No caso em que $\varepsilon = 0$ (problema de Dirichlet) é bem conhecido que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ os problemas (P_4) e (P_5) tem uma solução positiva u com $b_i < \text{máx } u < a_{i+1}$ desde que f satisfaça a condiçãode área

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)dt > 0 \qquad \forall j \leq i$$

e que esta condição de área é necessária e suficiente para obter tal resultado de existência.

Por outro lado, os resultados do Capítulo II, mostram que no caso do problema de Neumann, uma tal condição de área não é necessária. Isto motiva o estudo do problema misto

$$(P_4) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & \Omega \\ u + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde λ, ε são parâmetros reais positivos.

O objetivo desse estudo é determinar os valores de λ para os quais o problema (P_4) tem soluções positivas e para que valores de $\varepsilon > 0$ é necessária alguma condição de área para a existência de tais soluções.

Nas demonstrações dos Teoremas deste Capítulo, usamos novamente os resultados de H. Amann usados no Capítulo I.

O conceito de solução aqui, é o conceito de solução clássica, isto é:

III.1.1 DEFINIÇÃO:

u é solução do problema (P_4) se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e satisfaz pontualmente as equações

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & \Omega \\ u + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma sub(super) solução de (P_4), se

$$\begin{cases} -\Delta u \leq (\geq) \lambda F(u), & \Omega \\ u(x) + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) \leq (\geq) 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Considerando o mesmo operador $T: C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ definido no Capítulo I para este conceito de solução, vemos que $u \in C(\overline{\Omega})$ é solução de (P_4), se e somente se u é ponto fixo de T.

Nesse caso a regularidade segue da Teoria de Schauder.

ESTABELECIMIENTO DE RESULTADOS

III.1.2.-TEOREMA

Seja f a função definida na apresentação do problema, satisfazendo (f_1) e (f_2). Suponhamos que Ω satisfaz a condição da esfera interior uniforme.

Sejam α, $\beta > 0$ tais que

$$a_i + \beta < b_i < a_{i+1} - \alpha \qquad \forall i = 1,\ldots,k-1.$$

Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ o problema (P_4) tem, para cada $i = 1,\ldots,k-1$, pelo menos três soluções positivas u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} tais que

$$a_i - \alpha \leq u_{1i} \leq a_i + \beta$$

$$a_{i+1} - \alpha \leq u_{3i} \leq a_{i+1} + \beta$$

$$u_{1i} \leq u_{2i} \leq u_{3i} \qquad \forall i = 1,\ldots,k-1.$$

DEMONSTRAÇÄO

Seja $\delta > o$ tal que os vetores normais ao bordo de Ω passando por pontos diferentes de $\partial\Omega$ não se interceptam em $\overline{\Omega}_\delta$, onde

$$\Omega_\delta = \left\{ x \in \Omega \ / \ d(x,\partial\Omega) < \delta \right\}.$$

Reparametrizemos $\overline{\Omega}_\delta$ na forma seguinte

$$x \in \overline{\Omega}_\delta \longmapsto (s(x),t(x)),$$

tal que $s(x)$ é o único ponto de $\partial\Omega$ tal que

$$d(x, \partial\Omega) = d(x,s(x))$$

e

$$t(x) = :d(x,s(x)).$$

Seja

$$v(s,t) = (a_1 - \alpha) + \frac{a_1 - \alpha}{\varepsilon}\, t$$

Para $t(x) = 0$, isto é, para $x \in \partial\Omega$, temos

$$v(s(x),0) = a_1 - \alpha \ , \ e$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(s(x),0) = -\frac{a_1 - \alpha}{\varepsilon}$$

logo

$$v(x) = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Seja agora $\beta(s)$ o primeiro valor de t para o qual $v(x,t) \geq a_1$, caso ele exista, senão $\beta(s) = \delta$.

Então $\forall s \in \partial\Omega$, $\beta(s) > 0$ e por compacidade do bordo $\partial\Omega$, $\zeta := \inf \{ \beta(s) : s \in \partial\Omega \}$ é positivo.

Seja φ uma função de classe $C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$\varphi(x) = 1 \qquad \forall x \in \bar{\Omega}_{\zeta/2}$$

$$\varphi(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_{3\zeta/4}$$

e

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \qquad \forall x \in \Omega \ .$$

Se $0 < \xi < \alpha$ definamos

$$\underline{u}_1(x) = \varphi(x)\, v(s(x),t(x)) + (1 - \varphi(x))\,(a_1 - \xi)$$

para $x \in \bar{\Omega}_\delta$

e

$$\underline{u}_1(x) = a_1 - \xi \qquad \text{para } x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$$

é claro que $a_1 - \alpha \leq \underline{u}_1(x) < a_1$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Como $-\Delta \underline{u}_1$ é limitado e $f(x,\underline{u}_1(x)) > 0$ em $\bar{\Omega}$ temos que existe $\bar{\lambda}_1 > 0$ tal que

$$-\Delta \underline{u}_1 \leq f(\underline{u}_1) \text{ em } \Omega$$

para todo $\lambda \geq \bar{\lambda}_1$, donde $\underline{u}_1$ é subsolução do problema (P_4) para todo $\lambda \geq \bar{\lambda}_1$.

Trocando a_1 por a_1, constroi-se de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, uma função $\underline{u}_1 \in C^2(\bar{\Omega})$, tal que

$$a_1 - \alpha \leq \underline{u}_1(x) < a_1, \qquad \forall x \in \bar{\Omega}$$

e acha-se $\bar{\lambda}_1 > 0$ tal que, para todo $\lambda \geq \bar{\lambda}_1$, $\underline{u}_1$ é subsolução do problema (P_4).

Por outro lado, é fácil ver que quaisquer constantes $C_1, i = 1,\ldots,k$ com $a_1 < C_1 < b_1$, onde colocamos $b_k = +\infty$, são super-soluções de (P_4).

Se $\lambda_0 = \text{máx} \left\{ \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_k \right\}$, então para todo $i = 1,\ldots,k$ as funções

$\underline{u}_1$ são subsoluções de (P_4) $\qquad \forall \lambda \geq \lambda_0$

C_1 são supersoluções de (P_4) $\qquad \forall \lambda \geq \lambda_0$.

Pondo para cada $i = 1,\ldots,k-1$

$$X_1 = \left[\underline{u}_1, C_{1+1} \right]$$

$$X_{11} = \left[\underline{u}_1, C_1 \right]$$

$$X_{21} = \left[\underline{u}_{1+1}, C_{1+1} \right]$$

e aplicando os resultados de H. Amann [A] obtem-se para cada $i = 1,\ldots,k-1$, três soluções de (P_4) u_{11}, u_{21}, u_{31} tais que

$$u_{11} \leq u_{21} \leq u_{31}, \qquad a_1 - \alpha \leq u_{11} \leq a_1 + \beta \qquad \text{e} \qquad a_{1+1} - \alpha \leq u_{31} \leq C_{1+1}.$$

Para acabar a demonstração do Teorema é suficiente observar que podemos escolher C_1 tal que

$$a_1 < C_1 \leq a_1 + \beta$$

III.1.3. - OBSERVAÇÕES

1 - Como no caso do Capítulo I, pode acontecer que $u_{3i} = u_{1i+1}$. Se esse for o caso para todo i, obtemos 2k-1 soluções ordenadas do problema (P_4).

2 - Se considerarmos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u(x) + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

onde $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida no Capítulo I, o nosso resultado ainda vale. É suficiente observar que em tal caso, as constantes C_i ainda são supersoluções e que as subsoluções são dadas por

$$\underline{u}_i(x) = \varphi(x)\, v_i(s(x), t(x)) + (1 - \varphi(x))\,(g_i(x) - \xi)$$

onde

$$v_i(s(x), t(x)) = (g_i(x) - \alpha) + \left(\frac{g_i(x) - \alpha}{\varepsilon}\right) t(x)$$

§ 2.- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção estudamos o problema

$$(P_5) \qquad \begin{cases} -u'' = \lambda\, f(u) & \text{em } (0,1) \\ u(0) - \varepsilon\, u'(0) = 0 \\ u(1) + \varepsilon\, u'(1) = 0 \end{cases}$$

onde f é a mesma função definida na seção 1.

Obtemos os mesmos resultados da seção 1, e obtemos também alguns resultados de simetria das soluções de (P_5) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

A demonstração da existência e multiplicidade das soluções, faz-se de forma análoga à demonstração do Teorema I.2 deste Capítulo. Por esta razão não a repetiremos. O estudo das simetrias das soluções é desenvolvido aqui aplicando as mesmas técnicas usadas por Gidas,Ni e Nirenberg em [G-N-N].

ESTABELECIMENTO DE RESULTADOS

III.2.2.-TEOREMA

Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (f_1) e (f_2).

Sejam α e β reais positivos tais que $a_i+\beta<b_i<a_{i+1}-\alpha$. Para todo $\varepsilon>0$ existe $\lambda_0>0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, o problema (P_5) tem, para cada $i = 1,\ldots,k-1$, pelo menos três soluções positivas u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} tais que

$$a_i-\alpha \leq u_{1i} \leq a_i+\beta; \qquad a_{i+1}-\alpha \leq u_{3i} \leq a_{i+1};$$

$$u_{1i} \leq u_{2i} \leq u_{3i}$$

III.2.3. - TEOREMA

Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ toda solução do problema (P_5) é simétrica em (0,1) com relação a $\frac{1}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja u uma solução positiva de (P_5). Para $\nu \in [\frac{1}{2},1)$ consideremos os intervalos

$$I_\nu = (\nu,\ 1), \qquad J_\nu = (2\nu - 1,\ \nu).$$

Para $x \in \overline{I}_\nu$ denotamos por x^ν o ponto simétrico de x com relação a ν $x^\nu = 2\nu - x \in \overline{J}_\nu$.

Para ν suficientemente perto de 1 temos que

III.2.4 - $$u'(x) < 0 \quad \text{e} \quad u(x) < u(x^\nu) \qquad \forall x \in I_\nu$$

fazemos decrescer ν até atingir um primeiro "valor critico" $\bar{\nu}$ tal que III.2.4 não vale para $\nu < \bar{\nu}$.

Afirmamos que $\bar{\nu} \leq \frac{1}{2}$.

Suponhamos por contradição que $\bar{\nu} > \frac{1}{2}$.

III.2.4 vale para $\nu > \bar{\nu}$ e por continuidade temos

$$u'(x) < 0 \quad \text{e} \quad u(x) \leq u(x^{\bar{\nu}}) \qquad \forall x \in I_{\bar{\nu}} .$$

Suponhamos que para todo $x \in I_{\bar{\nu}}$ $u(x) = u(x^{\bar{\nu}})$, definamos v em $(1^{\bar{\nu}}, 1)$ por

$$v(x) = v(x^{\bar{\upsilon}}) = u(x) \qquad \forall x \in [1^{\bar{\upsilon}}, 1]$$

então v é simétrica em $[\ 1^{\bar{\nu}},\ 1\ ]$ com relação a $\bar{\nu}$. É fácil ver que se ε é suficientemente pequeno então $u(0) < a_1$ e $u(1) < a_1$. Isto é, a simétria de v em $[1^{\bar{\nu}},\ 1\ ]$ implica que

$$u'(0) \geq - u'(1) \qquad \text{e} \qquad u(0) < u(1).$$

Então

$$u(0) = \varepsilon\, u'(0) \geq - \varepsilon\, u'(1) = u(1)$$

o que é uma contradição.

Esta contradição implica que

$u(x) \leq u(x^{\bar{\nu}}) \quad \forall x \in I_{\bar{\nu}}$ e $u(x) \not\equiv u(x^{\bar{\nu}})$ em $I_{\bar{\nu}}$.

Aplicando um resultado de Gidas-Ni Nirenberg [G-N-N] (Lema 2.2) temos que

$$u'(\bar{\nu}) < 0 \quad \text{e} \quad u(x) < u(x^{\bar{\nu}}) \qquad \forall x \in I_{\bar{\nu}} .$$

Ora como $u'(\bar{\nu})<0$ então existe $\delta > 0$ tal que $u'(x)<0$ $\forall x \in (\bar{\nu}-\delta, 1)$. Assim pela definição de $\bar{\nu}$ vemos que existe uma seqüência (ν_j) com $\frac{1}{2}<\nu_j$, crescente que converge a $\bar{\nu}$ e uma seqüência (x_j), $x_j \in I_{\nu_j}$ tal que

$u(x_j) \geq u(x_j^{\nu_j})$.

(x_j) ou uma sübsequência dela (que continuamos chamando (x_j)) converge a $x \in \bar{I}_{\bar{\nu}}$, então $x_j^{\nu_j} \longrightarrow x^{\nu_j}$. Tem-se

$$u(x) = \lim u(x_j) = \lim u(x_j^{\nu_j}) = u(x^{\bar{\nu}})$$

logo $x = x^{\bar{\nu}} = \bar{\nu}$.

Ora pelo Teorema do Valor Médio, para j suficientemente grande existe $y_j \in (x_j, x_j^{\nu_j})$ tal que $u'(y_j) \geq 0$. Como $y_j \longrightarrow \bar{\nu}$, então $u'(\bar{\nu}) \geq 0$, o que é uma contradição. Logo $\bar{\nu} \leq \frac{1}{2}$.

Um raciocinio análogo mostra que $\bar{\nu} \geq \frac{1}{2}$ logo $\bar{\nu} = \frac{1}{2}$ e a solução u é simétrica com relação a $\frac{1}{2}$.

O seguinte exemplo mostra que as soluções do problema de Neumann não são necesariamente simétrica no seu domínio

III.2.5 - EXEMPLO

Seja $I = (c,d)$ um intervalo real, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe

C^1 com exatamente dois zeros (simples) a_1, a_2, $a_1 < a_2$

$$f(s) > 0 \qquad \forall\ s < a_1$$

Se u é uma solução do problema

$$\begin{cases} -u'' = f(u) & \text{em } (c, d) \\ u'(c) = u'(d) = 0, \end{cases}$$

suponhamos que u é simétrica não constante, então

$$u(c) = u(d) \geq a_1.$$

Se $u(c) \leq a_2$ então u tem máximo em $\frac{c + d}{2}$.

$$u\left(\frac{c + d}{2}\right) > a_2 \qquad \text{e} \qquad u'\left(\frac{c + d}{2}\right) = 0$$

logo o problema

$$\begin{cases} -u'' = f(u) & \text{em } \left(c, \frac{c + d}{2}\right) \\ u'(c) = u'\left(\frac{c + d}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

tem uma solução não simétrica.

Se $a_2 < u(c)$, a situação é análoga.

BIBLIOGRAFIA.

[A] Amann, H.,"Fixed Point Equations and Nonlinear EigenvalueProblems in Ordered Banach Spaces", SIAM Rev., 4, 18 (1976), 620-709.

[C-S] Clément, Ph. et Sweers,G."Existence et Multiplicité des Solutions d'un Problème aux Valeurs Propres Elliptique Semilinéaire", C.R.Acad.Sc.Paris, t.302, s.I, 19(1986)

[C-M] Costa, D.G. and Magalhães, C.A. "A Variational Approach to Subquadratic Perturbations of Elliptic Systems", (to appear).

[D-S] Dancer, E. N.and Schmitt, K., "On Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations", Proc.A.M.S.101 (1987), 445-452.

[d F] de Figuiredo,D.G."On the Uniqueness of Positive Solutions of the Dirichlet Problem - $\Delta u = \lambda \sin u$ ", Nonl.P.D.E. and Appl., Collège de France Seminar vol.7, Pitman 1985, 80-83.

[d F.1] de Figueiredo, D. G."On the Existence of Multiple Ordered Solutions of Nonlinear Eigenvalue Problems", Nonlinear Analysis, 4, 11 (1987), 481-492.

[d F.2] de Figueiredo,D.G."Lectures on Ekeland Variational Principle with Applications and Detours", Monografía da UNICAMP, 1987.

[D] Deimling, K."Nonlinear Funtional Analysis", Springer-Verlag, Berlin 1985.

[G-T] Gilbarg, D.and Trudinger N.S.,"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag. Berlin / Heidelberg / New York, 1977.

[G-N-N] Gidas,B.;Ni,W.M.and Nirenberg,L."Symetry and Related Properties via the Maximum Principle", Comm.Math. Phys.,68, 1979, 209-243.

[H] Hess,P."On Multiple Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems", Comm. Partial Differential Equations, 8, 6 (1981), 951-961.

[H-K] Hess ,P.and Kato T."On same Linear and Nonlinear Eigenvalue Problems with an Indefinite Weight Function" Comm. in P.D.E., 5, 10(1980), 999-1030.

[H] Hoffer,H."A Note on the Topological Degree at a Critical Point of Mountainpass-Type ", Proc.A.M.S., 90, 2(1984), 309-315.

[K] Kato,T."Schröedinger Operators with Singular Potentials", Israel J. Math., 13, 1972, 135-148.

[M-M] Manes,A. and Micheletti,A.M., "Un'estensione della Teoria Variazionalle Classica degli Autovalori per Operatori Ellitici del Secondo Ordine", Boll.U.M. Italiana, 7 (1973), 285-301.

[P-W] Protter, M. and Weinberger,H."Maximum Principles in Differential Equations", Prentice-Hall, New Jersey, 1967.

[R.1] Rabinowitz,P.H.,"Pairs of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations",Indiana Univ. Math.J., 23, 1973, 172-185.

[R] Rabinowitz,P.H.,"Some Aspects of Nonlinear Eigenvalue Problems", Rocky Mountain J.Math., 3, 1973,161-202.

[Sa 1] Sattinger,D.H.,"Topics in Stability and Bifurcation Theory", Lecture Notes Math., 309, Berlin / Heidelberg / New York, Springer, 1973.

[Sa] Sattinger,D.H.,"Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems", Indiana Univ.Math.J., 21, 1972, 979-1000.

[S] Sweers, G. "Semilinear Elliptic Eigenvalue Problems", Doctoral Thesis, Technische Universiteit Delft, 1988.