

RODRIGO MARCHIORI DAL GALLO

**MÉTODO HEURÍSTICO EFICIENTE PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR
INTEIRA COM DIMENSÃO COMPLETA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática
Aplicada da Universidade Estadual de Campinas, como requisito
parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti

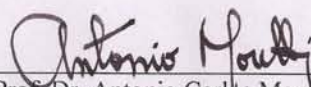
Campinas

2008

MÉTODO HEURÍSTICO EFICIENTE PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR
INTEIRA COM DIMENSÃO COMPLETA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rodrigo Marchiori Dal Gallo e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 16 de Maio de 2008



Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti
Orientador

Banca Examinadora:

1 Valéria Abrão de Podestá

2 Luis Leduino Salles Neto

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Dal Gallo, Rodrigo Marchiori

D15m Método heurístico eficiente para problemas de
programação linear inteira com dimensão completa / Rodrigo Marchiori
Dal Gallo-- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Antonio Carlos Moretti

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Heurística. 2. Programação inteira. 3. Algoritmos. I. Moretti,
Antonio Carlos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Efficient heuristic method for integer linear programming problems with
complete dimension

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Heuristics. 2. Integer programming. 3. Algorithms.

Área de concentração: Pesquisa operacional

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

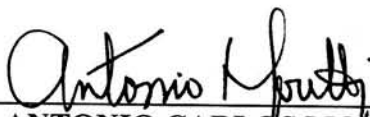
Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti (IMECC-UNICAMP)
Profª. Dra. Valéria Abrão de Podestá (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luis Leduino Salles Neto (UNIFESP)

Data da defesa: 16/05/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de maio de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS MORETTI



Prof. (a). Dr (a). VALÉRIA ABRÃO DE PODESTÁ



Prof. (a). Dr (a). LUIZ LEDUINO DE SALLES NETO

RESUMO

O trabalho tem como objetivo a implementação de um método heurístico para a resolução de problemas de programação inteira com dimensão completa. Nos atemos aos problemas de corte e empacotamento, mas a aplicação pode ser estendida a qualquer outro problema dessa classe.

No problema de programação linear relaxado aplicamos o Método de Gilmore & Gomory e a partir da solução contínua obtida através do método simplex, aplicamos o método heurístico e comparamos os resultados com as soluções exatas obtidas a partir de Branch & Bound.

Palavras-chave: Heurística, Programação Inteira, Algoritmos.

The objective of this dissertation is the implementation of a heuristic method to solve integer linear programming problems with complete dimension. We worked specifically with cutting and stock problems, but it can be applied to any other class of integer problems.

We used the Gilmore & Gomory method of column generation and starting by the continuous solution obtained with simplex method, we applied the heuristic method and made a comparison of results with the exact solutions obtained by the Branch&Bound method.

Keywords: Heuristics, Integer Programming, Algorithms.

Índice

Introdução	3
1. Problema de Corte e Empacotamento	
1.1 Problema de Corte Unidimensional	5
1.2 Método de Gilmore & Gomory para Geração de Colunas	8
2. Procedimento Heurístico Eficiente para Programação Linear Inteira (PHEPLI)	
2.1 Procedimento Heurístico Eficiente para Programação Linear Inteira com Interior (Dimensão Completa)	10
2.2 Exemplo	23
3. Experimentos Computacionais	
3.1 Implementação	26
3.2 Testes Computacionais	27
4. Conclusões e Trabalhos Futuros	54
Referência Bibliográfica	55

Introdução

Materiais como papel, fibra têxtil, celofane, chapas metálicas, fios, etc; são armazenados em grandes rolos ou bobinas; enquanto madeira, pvc, aço, etc, são armazenados em grandes vigas ou barras. Somente mais tarde essa matéria prima será processada em produtos menores. Nesse processo o material é *cortado* em *itens* de tamanhos específicos. Por exemplo, uma barra de 100 metros pode ser dividida, isto é, cortada em dois itens: um com comprimento de 35 metros e outro de 30 metros. Porém, como os tamanhos são variados, podemos, e nesse caso é a situação mais comum, ter o corte de dois itens de comprimento 45.5 metros, e portanto aparece uma quantidade de material que acaba sendo descartada, sendo desta forma que ocorre o *desperdício* de material. Problemas desse tipo são denominados *Problemas de Corte e Empacotamento*.

Os Problemas de Corte são problemas de programação linear[1], como poderá ser visto no Capítulo 1, porém lhes é introduzido restrições de integralidade, isto é, só pode haver quantidades inteiras de material cortado, pois não faz nenhum sentido cortar frações de itens de um comprimento. A dificuldade, então, reside em encontrar a solução para um problema de programação linear inteira.

Existem diversos métodos para a resolução de problemas linear inteiros (ou mistos) PLI[11], sendo que muitos desses métodos são exatos, como o Branch & Bound[11] e variantes (Branch&Cut[11], Cut Plane[11], etc...), ou como a Programação Dinâmica[11]. Contudo esses métodos têm uma principal desvantagem: o tempo de execução, que tem crescimento exponencialmente em proporção a dimensão do problema. Outras possibilidades são os métodos aproximativos, que são mais baratos computacionalmente em relação aos exatos, mas, neste caso não podemos garantir que a solução ótima seja encontrada.

Nosso intuito aqui é implementar um método não-exato, que forneça soluções de boa qualidade a baixo custo e em tempo de execução aceitável. Para tanto, nós utilizamos o trabalho publicado por Hillier, Frederick S. - *Efficient Heuristic Procedures for Integer Linear Programming with an Interior* [8] , que apresenta um método para resolução de problemas de programação linear inteira mista, e que experimentalmente se mostrou eficiente, pois apesar de não-exato, muitas vezes chega a obter até a própria solução inteira ótima, numa fração do tempo usado pelo simplex para obter a solução contínua. Outro ponto importante, é que todo o processo é subdividido em etapas ou fases, tornando-o flexível a mudanças, uma vez que qualquer uma dessas etapas pode ser alterada por um outro procedimento (se existir) que possa melhorar o rendimento do método. Mais detalhes sobre esse método estão descritos

no Capítulo 2.

O algoritmo do método foi passado da pseudo-linguagem presente no trabalho do autor, para a linguagem de programação C++. Esse algoritmo foi utilizado para resolver um conjunto de problemas de classes diferentes gerados a partir de um gerador de problemas, o CUTGEN1 [5]. Os detalhes sobre a implementação do algoritmo e os testes realizados estão no Capítulo 3. Cada classe tem como característica dados que representam situações do dia-a-dia, tais como, demanda pequena, média e grande, e itens de tamanhos pequenos, médios e grandes.

Finalmente, no Capítulo 4, fizemos uma avaliação dos resultados da aplicação do método a esse grupo de problemas, bem como registramos nossas considerações finais.

Capítulo 1

1.1 Problema de Corte Unidimensional

Dentre os problemas de corte, podemos destacar, em particular o mais simples e talvez o mais comum, que é o *Problema de Corte Unidimensional*. Nele, duas das dimensões estão pré-estabelecidas, diga-se a largura e/ou espessura, e é necessário que se corte em apenas em um sentido.

Primeiramente se faz necessário definir alguns termos que serão aqui usados.

Definição1: Padrão de Corte é o modo de cortar a matéria prima para produzir um determinado número de itens. Um padrão de corte homogêneo é o padrão que produz apenas um tipo de item.

Exemplo: para uma viga ou rolo de 100m e itens de tamanho l_i de $l_1 = 25m$, $l_2 = 35m$ e $l_3 = 45m$, listamos algumas possíveis configurações:

25	25	25	25
35	35	30	
45	45	10	
25	25	35	15
25	25	45	5
35	45	20	

Figural: Padrões de Corte em uma barra de 100m

A cada padrão associa-se um vetor de dimensão igual ao número de itens que quantifica a produção de cada item por corte. Por exemplo o primeiro padrão é associado ao vetor $a_1 = (4, 0, 0)$ e o último padrão ao vetor $a_6 = (0, 1, 1)$. Os padrões 1 e 2 são exemplos de padrões homogêneos.

Note que as porções escuras não possuem um item associado e portanto são consideradas desperdício.

Definição2: desperdício é a quantidade de material descartada por não atender ao tamanho de nenhum item especificado. Em determinadas situações, o excesso de produção pode ser considerado desperdício.

Definição3: demanda é a quantidade de um determinado item que deve ser produzida.

Em termos simples, os problemas de corte são problemas que consistem em encontrar o número de padrões de corte que atendam a demanda, e que minimizem o desperdício, seja por menor número de objetos (quantidade de padrões usados) ou pela escolha dos padrões com menor perda (em alguns casos necessita-se também a minimização do tempo de “setup”, isto é, o tempo para configurar as “facas” de acordo com um padrão de corte).

Dados:

m : o número de itens,

n : o número de padrões possíveis ou disponíveis,

a_{ij} : a quantidade do item i produzido pelo padrão j ,

d_i : a demanda do item i a ser atendida.

Variáveis:

x_j : representa o número de vezes que o padrão j será usado no corte da matéria prima.

Seja L o comprimento da matéria prima e l_i o comprimento do item i . A função objetivo que

representa a perda total pode ser escrita como $\sum_{j=1}^n \left[L - \sum_{i=1}^m a_{ij} l_i \right] x_j$. Sendo $T_j = L - \sum_{i=1}^m a_{ij} l_i$ a perda do padrão j , o modelo matemático usual para esse tipo de problema é dado na forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } \sum_j T_j x_j \\
& \text{Sujeito a} \\
& \sum_j a_{ij} x_j = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
& x_j \geq 0 \text{ e inteiro} \quad (j = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Como o método heurístico estudado requer que o polítopo formado pelas restrições tenha dimensão completa (isto é, com um interior), nós vamos trabalhar nesta dissertação com o problema

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } \sum_j T_j x_j \\
& \text{Sujeito a} \\
& \sum_j a_{ij} x_j \geq d_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \\
& x_j \geq 0 \text{ e inteiro} \quad (j = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Isto é, queremos minimizar o número de rolos-mestres utilizados para satisfazer a demanda dos itens da carteira de pedidos. Repare que neste caso, admitimos excesso de produção e assim o Problema (1.1.2) não é equivalente ao Problema (1.1.1).

1.2 Método de Gilmore & Gomory para Geração de Colunas

Escolheu-se utilizar o método de Gilmore & Gomory, pelo fato de que este método possibilita trabalhar apenas com o subconjunto de padrões que têm uma propriedade em comum: todas as variáveis associadas às colunas geradas são candidatas a estar na base da solução, ou seja, ao invés de se trabalhar com todo o universo de colunas, trabalhamos apenas com as melhores opções.

Apresentaremos aqui, de forma muito sucinta, o método de geração de colunas proposto por Gilmore & Gomory [6].

Tomando o modelo (1.1.1) apresentado, e supondo as dimensões, n como o número de padrões de corte possíveis ou existentes, e m o número de itens a serem cortados, e sendo a_j a coluna j satisfazendo as condições de que os elementos $a_{ij} \geq 0$, para $i = (1, \dots, m)$, e que $\sum_{i=1}^m l_i a_{ij} \leq L$, onde l_i é o tamanho a ser cortado do i -ésimo item e L é o tamanho da matéria prima a ser cortada. O método para encontrar uma nova coluna $p \in \mathbb{R}^m$ de Gilmore & Gomory pode ser descrito da seguinte maneira.

(1) Gere um subconjunto de padrões de corte (no nosso caso iniciamos com os padrões homogêneos).

(2) Resolva o problema abaixo até a otimalidade.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_j T_j x_j \\ & \text{Sujeito a} \\ & \sum_j a_{ij} x_j \geq d_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

(3) Seja $w \in \mathbb{R}^m$ o vetor das variáveis duais ótimo do Problema (1.2.1). Resolva o Problema da Mochila dado por

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } z = \sum_{i=1}^m w_i p_i \\ & \text{Sujeito a } \sum_{i=1}^m l_i p_i \leq L \\ & p_i \geq 0 \text{ e inteiro } (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

(4) Se $wp > c_{n+1}$ então adicione a coluna $a_{n+1} = p$ ao Problema (1.2.1) e volte para (2). Caso contrário, pare.

O passo (4) pode ser explicado da seguinte maneira. Note que ao anexarmos uma nova coluna

na matriz A , a variável correspondente a esta coluna, isto é, x_{n+1} , será candidata a entrar na base caso seu custo reduzido seja positivo, isto quer dizer que

$$z_{n+1} - c_{n+1} = wa_{n+1} - c_{n+1} > 0 \quad (1.2.3)$$

Mas, wp é o valor da função objetivo do Problema (1.2.2). Logo, se $wp > c_{n+1}$ significa que a coluna obtida em (3) é lucrativa se adicionada ao Problema (1.2.1).

Capítulo 2

2.1 Procedimento Heurístico Eficiente para Programação Linear Inteira (PHEPLI)

Este é um método geral que pode ser aplicado a qualquer problema de programação linear inteira [8]. O método visa obter uma solução factível para qualquer problema de programação linear inteira, isto é, com o valor da função objetivo o mais próximo possível da solução ótima (em certos casos, é até possível obter a solução ótima do problema). No artigo do autor, todo o desenvolvimento do método é realizado sobre o problema de programação linear inteira (PLI) na seguinte forma:

Maximize

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (r1)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (r2)$$

$$x_j \text{ inteiro} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (r3)$$

Assume-se que o conjunto de soluções que satisfazem o conjunto das restrições (r1) e (r2), formam um politopo de dimensão completa (isto é, com um interior).

O processo para se alcançar tal aproximação é dividido em três fases distintas, sendo que cada uma delas provê melhorias em relação a fase anterior.

Primeiramente, apresentaremos algumas notações, que serão usadas no decorrer da exposição do método:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

$$\bar{b}_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad \lfloor y \rfloor \text{ menor inteiro } \geq y \\
(b) \quad \lceil y \rceil \text{ maior inteiro } \leq y \\
(c) \quad (y)_+ = \max\{0, y\}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

As equações (2.1) e (2.2) são equações de normalização das restrições funcionais, ou melhor, as restrições ativas na solução factível (restrições satisfeitas na igualdade). As equações (2.3) são usadas nos arredondamentos de um valor real para inteiro.

» FASE 1

Tem como propósito identificar uma região a ser explorada na busca de soluções. Primeiramente são obtidos dois pontos, o primeiro resolvendo o problema relaxado ou o problema de programação linear contínua, pelo método Simplex; e o segundo, na vizinhança do primeiro, que tenha uma propriedade em particular, que é a de ter suas componentes arredondadas para o inteiro mais próximo, sem que seja violada a factibilidade.

Tendo a solução $x^{(1)}$ do PL, obtida pelo método Simplex, definimos $B = \{j \mid x_j^1 \text{ é básico}\}$ e N a cardinalidade de B .

Para se obter o segundo ponto, são empregados um dos dois métodos a seguir.

* Método 1

Substitui-se cada uma das restrições ativas na solução $x^{(1)}$ por:

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{j \in B} |a_{ij}| \tag{2.4}$$

Então, encontra-se uma nova solução que possua a mesma base de $x^{(1)}$, a partir do novo problema gerado:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(2)} = b_i^{(2)} \tag{2.5}$$

Este ponto tem a propriedade que desejamos, que é a possibilidade de ser arredondado para o inteiro mais próximo, sem que ocorra a violação das restrições. Como $x^{(2)}$ tem a mesma base de $x^{(1)}$, sendo então as variáveis não-básicas as mesmas (portanto as restrições ativas não mudam), e pela construção de (2.4) esta solução está pelo menos a uma distância de 1/2 das faces do politopo.

* Método 2

Faz-se a substituição das restrições ativas, por:

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{\sqrt{N}}{2} \quad (2.6)$$

E, da mesma forma que o Método 1, obtém-se $x^{(2)}$ com a mesma base de $x^{(1)}$ e que tem a propriedade de poder ser arredondado sem violar as restrições.

Isto é possível, pois o hiperplano de restrições (ou onde se encontra $x^{(1)}$) se encontra a $\sqrt{N}/2$ do hiperplano a que pertence $x^{(2)}$.

» FASE 2

Uma vez obtidos os pontos na FASE 1, a FASE 2 é responsável pela busca de uma solução melhor do que $x^{(2)}$, isto é, que seja um ponto mais próximo da solução ótima.

Basicamente a FASE 2 consiste em mover-se lentamente (na direção de descida) sobre o segmento de reta, gerado pela combinação convexa de $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$, e buscar novas soluções nesta região:

$$x = (1-\alpha)x^{(1)} + \alpha x^{(2)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.7)$$

Pela propriedade de $x^{(2)}$, esta busca sempre é bem sucedida, seja por que foi encontrado um ponto que é uma aproximação muito melhor, ou por que alcançou-se $\alpha=1$, isto é, chegou-se a extremidade do segmento de reta onde está $x^{(2)}$.

Assim como na FASE 1, existem métodos distintos para se obter tal melhor aproximação.

* Método 1

Constrói-se um segmento de reta pela combinação convexa de $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$, e faz-se a descida por este segmento, acrescentando-se lentamente o parâmetro α até que este seja igual a 1. Este acréscimo é feito de modo que o novo ponto esteja entre dois pontos inteiros. Então ao se fazer o arredondamento para o inteiro mais próximo (por exemplo a partir do ponto $x=(0.5,0.5)$, podemos ter $x=(0,0)$, $x=(1,1)$, $x=(0,1)$ e $x=(0,1)$), será alcançado um desses dois pontos.

Contudo só se garante a factibilidade deste ponto, em relação as restrições que estão ativas em $x^{(1)}$. Não há garantias que as outras restrições sejam satisfeitas.

* Método 2

Seguindo a mesma idéia do Método 1, o Método 2 também move-se pelo segmento de reta a procura de novas soluções, porém esta busca é um pouco mais refinada.

O acréscimo é fixo, sendo que foi usado, $\alpha = (0, 0.05, 0.10, \dots, 0.95, 1)$. À cada acréscimo o novo ponto sofre arredondamento. Se o ponto é infactível, procede-se como a seguir.

Definimos:

$$(Q1) \quad q = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i \right)_+ \quad (2.8)$$

$$(Q2) \quad q = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i \right\}$$

$$(P1) \quad p_j = -\Delta q_j$$

$$(P2) \quad p_j = \frac{c_j \Delta x_j}{(-\Delta q_j)} \quad (2.9)$$

As equações (2.8) medem, cada uma de uma forma diferente, a infactibilidade da solução x . As equações (2.9) medem o grau de melhoria, ao se modificar x_j . Em P1 apenas interessa quanta factibilidade x pode alcançar, já em P2, esperasse que a função objetivo também sofra melhora. Os parâmetros Δx_j e Δq_j serão apresentados nos Passos 6 e 7 do algoritmo.

A partir da combinação destas quatro medidas, criam-se os critérios para se alterar os valores das componentes x_j , de modo que x , alcance a factibilidade.

$$\begin{aligned} \text{CRITÉRIO A: } P1 \text{ e } Q1 \\ \text{CRITÉRIO B: } P1 \text{ e } Q2 \\ \text{CRITÉRIO C: } P2 \text{ e } Q1 \\ \text{CRITÉRIO D: } P2 \text{ e } Q2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos então descrever algebricamente o Método 2, da seguinte maneira:

Passo1. Faça $\alpha = 0$

Passo2. Faça $x = (1 - \alpha)x^{(1)} + \alpha x^{(2)}$

Passo3. Para todo $j = (1, \dots, n)$, faça $x_j = \left\lceil x_j + \frac{1}{2} \right\rceil$

Passo4. Calcule:

$$q_i = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i, \quad i = (1, \dots, m)$$

$$q = \begin{cases} \sum_{i=1}^m (q_i)_+, & \text{se CRITÉRIO A ou C} \\ \max_{i \in \{1, \dots, m\}} q_i, & \text{se CRITÉRIO B ou D} \end{cases}$$

$$S = \{i \mid q_i = q\}, \quad \text{se CRITÉRIO B ou D}$$

Passo5. Verifique o sinal de q :

- (a) Se $q > 0$, então prossiga para o Passo6;
- (b) Senão, x é a solução factível desejada, fim da **FASE 2**.

Passo6. Calcule:

Se CRITÉRIO A ou C,

$$s_j = \sum_{\{i \mid q_i > 0\}} \bar{a}_{ij};$$

$$\Delta x_j = \begin{cases} +1, & \text{se } s_j < 0, \\ -1, & \text{se } s_j > 0 \text{ e } x_j > 0, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$q_{ij}^* = q_i + \bar{a}_{ij} \Delta x_j, \quad i = (1, \dots, m);$$

$$q_j^* = \sum_{i=1}^m (q_{ij}^*)_+, \quad j = (1, \dots, n).$$

Se CRITÉRIO B ou D,

$$\Delta x_j = \begin{cases} +1, & \text{se } \bar{a}_{ij} < 0, \forall i \in S, \\ -1, & \text{se } \bar{a}_{ij} > 0, \forall i \in S \text{ e } x_j > 0, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$q_{ij}^* = q_i + \bar{a}_{ij} \Delta x_j, \quad i = (1, \dots, m);$$

$$q_j^* = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} (q_{ij}^*)_+;$$

$$S_j^* = \{i \mid q_{ij}^* = q_j^*\}, \quad j = (1, \dots, n).$$

Passo7. Faça:

$$Q = \{j \mid q_j^* < q\}$$

- (a) Se Q é vazio, então avance para o Passo10,
- (b) Caso contrário prossiga para o Passo8.

Passo8. Verificar o conjunto Q :

- (a) Se Q possui apenas um elemento, faça o valor do índice k igual a esse elemento, e prossiga para o Passo9;
- (b) Senão, calcule:

$$p_j = \begin{cases} q - q_j^*, & \text{se CRITÉRIO A ou C, } \forall j \in Q; \\ \frac{c_j \Delta x_j}{q - q_j^*}, & \text{se CRITÉRIO B ou D, } \forall j \in Q. \end{cases}$$

E, então faça:

$$k = \{r \mid p_r = \max_{j \in Q} \{p_j\}\}$$

Prossiga para o Passo9.

Passo9. Faça:

$$x_k = x_k + \Delta x_k;$$

$$q_i = q_{ik}^*, \quad i = (1, \dots, m);$$

$$q = q_k^*;$$

$$S = S_k^*, \quad \text{se CRITÉRIO B ou D.}$$

Retorne para o Passo5.

Passo10. Seja M um parâmetro inteiro positivo maior que 1 (utilizou-se 20 na implementação).

Atualize:

$$\alpha = \frac{\alpha + 1}{M}$$

E prossiga para o Passo11.

Passo11. Verifique se $x^{(2)}$ foi alcançado:

- (a) Se $\alpha \leq 1$, retorne para o Passo2;
- (b) Se $\alpha > 1$, nenhuma outra solução factível foi obtida, fim da **FASE 2**.

*** Método 3**

É o método que combina os Métodos 1 e 2: faz-se a busca refinada do Método 2, enquanto se move sobre o segmento de reta com o passo do método 1.

Para tanto, apenas se altera-se o Passo10 do Método 2, de modo que a atualização de α seja tal que o próximo ponto esteja entre dois inteiros quaisquer.

*** Método 4**

Simplesmente, arredonda-se as componentes de $x^{(1)}$ para o maior inteiro mais próximo, se e somente se, a matriz de restrições for toda negativa.

*** Método 5**

Nesse método aplica-se todas as possíveis combinações de arredondamento das componentes de $x^{(1)}$, e então escolhe-se a solução factível que promova o maior valor da função objetivo.

» FASE 3

O propósito desta fase é tentar buscar, por meio de dois modos alternativos, que são aplicados de forma sucessiva, uma solução melhor que a obtida nas fases anteriores. Isto é feito alterando-se o valor de uma ou mais componentes da solução obtida ao final da FASE 2. Estas alterações são feitas cuidadosamente, para que se mantenha a factibilidade enquanto se otimiza o valor da função objetivo. Este processo tem a grande vantagem de ter um baixo custo computacional.

O primeiro modo de busca consiste em alterar o valor de apenas uma variável. Sendo que essa alteração é feita levando em consideração dois propósitos: se manter no interior da região (para que as buscas subseqüentes possam ter regiões mais amplas para atuar) e obter um grande (se possível) incremento no valor da função objetivo.

Descreveremos algebricamente o primeiro modo de busca:

► Parte 1

Passo1. Faça $x = x^F$ (solução factível da FASE 2).

Passo2. Identifique os índices $P = \{(1), (2), \dots, (n)\}$, que sejam a permutação dos índices $J = \{1, 2, \dots, n\}$, tais que,

$$|c_{(1)}| \geq |c_{(2)}| \geq \dots \geq |c_{(n)}|$$

Identifique n_0 , o maior índice em P , tal que,

$$|c_{(j)}| > 0 \quad j = (1, 2, \dots, n_0);$$

$$|c_{(j)}| = 0 \quad j = (n_0 + 1, \dots, n).$$

E então, verifique os sinais,

$$\delta_{(j)} = \begin{cases} +1, & \text{se } c_{(j)} > 0, \\ -1, & \text{se } c_{(j)} < 0. \end{cases}$$

Passo3. Calcule, a folga em cada restrição:

$$s_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad i = (1, \dots, m)$$

► Parte 2

Passo1. Calcule, para todo $j = ((1), \dots, (n_0))$ e $i = (1, \dots, m)$,

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{s_i}{|a_{ij}|}, & \text{se } c_j a_{ij} > 0 \\ 0, & \text{se } c_j a_{ij} < 0 \text{ e } x_j = 0 \\ \infty, & \text{se } c_j a_{ij} < 0 \text{ ou } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Passo2. Usando um dos dois métodos, calcule:

*** Método 1** $d_j = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{[d_{ij}]\}, \quad j = ((1), \dots, (n_0))$

*** Método 2** $d_j = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} d_{ij}, \quad j = ((1), \dots, (n_0))$

Passo3. Calcule:

$$r_j = |c_j| * d_j, \quad j = ((1), \dots, (n_0))$$

Passo4. Encontre:

$$r_t = \max_{j \in \{(1), \dots, (n_0)\}} r_j$$

$$k = \{j \mid r_j = r_t\}$$

E, então verifique,

- (a) Se $r_k > 0$, prossiga para o Passo5,
- (b) Se $r_k = 0$, fim da **Parte 2**.

Passo5. Verifique o sinal de c_k ,

- (a) Se $c_k > 0$ faça, $x_k = x_k + 1$ e $s_i = s_i - a_{ik}$, para $i = (1, \dots, m)$ e retorne ao Passo1;
- (b) Se $c_k < 0$ faça, $x_k = x_k - 1$ e $s_i = s_i + a_{ik}$, para $i = (1, \dots, m)$ e retorne ao Passo1.

O segundo modo de busca considera a mais promissora das possibilidades de alterar simultaneamente duas variáveis.

Para cada par de variáveis investigadas, visa-se que uma tenha o maior coeficiente em valor absoluto na função objetivo e a outra permita o acréscimo/decréscimo na função objetivo. Para determinar a grandeza dessas alterações, as razões entre os custos de $x_{(j)}$ e $x_{(k)}$ são calculados e ajustados como segue:

► **Parte 3:** Calcule,

$$R_{j,k} = \left\| \frac{c_{(j)}}{c_{(k)}} \right\|$$

$$R'_{j,k} = \left\| \frac{c_{(j)}}{c_{(k)}} \right\|$$

para todo $j = (1, \dots, n_0)$ e $k = (j+1, \dots, n_0)$

A primeira das duas alterações em $x_{(j)}$ é aquela que aumentará o valor da função objetivo, e deve-se determinar se a alteração mantém a não-negatividade e a factibilidade de $x_{(j)}$. Isto é realizado como descrito a seguir:

► **Parte 4**

Passo1. Verificar o sinal de $(x_{(j)} + \delta_{(j)})$:

- (a) Se $(x_{(j)} + \delta_{(j)}) \geq 0$, prossiga para o Passo2;
- (b) Se $(x_{(j)} + \delta_{(j)}) < 0$, não se deve explorar $x_{(j)}$ nesta direção, fim da Parte 4.

Passo2. Faça, $\dot{s}_i = s_i - \delta_{(j)} a_{i,(j)}$ para $i = (1, \dots, m)$ e encontre $Q = \{i \mid \dot{s}_i < 0\}$.

Passo3. Verifique:

(a) Se Q vazio, faça $x_{(j)} = (x_{(j)} + \delta_{(j)})$ e $s_i = \acute{s}_i$ para $i = (1, ..., m)$ e retorne ao

Passo1;

(b) Senão, não se deve explorar $x_{(j)}$ nesta direção, fim da **Parte 4**.

Se na conclusão da Parte 4 for possível alterar o valor de $x_{(j)}$ em uma direção favorável, deve-se então encontrar o par $x_{(k)}$ que possa ser alterado juntamente com $x_{(j)}$ nos termos previamente definidos, isto é, factível e que permite o acréscimo na função objetivo.

Trabalharemos com a suposição de que os elementos da coluna $a_{(k)}$, para um particular índice $k = (j+1, ..., n_0)$, $i \in Q$, conforme definido no Passo2 acima que sejam não-nulos e tenham todos o mesmo sinal.

Seja então a coluna $a_{(k)}$ estritamente positiva (nos índices $i \in Q$), a factibilidade só pode ser reavida (isto se foi perdida na busca de $x_{(j)}$) decrescendo $x_{(k)}$ suficientemente. É preciso verificar se esta alteração existe e se de fato ela leva novamente a solução a factibilidade, e que ainda permita o maior acréscimo possível na função objetivo. A Parte 5 a seguir realiza esta verificação e identifica devidamente a nova solução.

► Parte 5

Passo1. Verifique o sinal de $c_{(k)}$,

(a) Se $c_{(k)} > 0$, faça $L_k = -\min \{x_{(k)}, R_{j,k}\}$,

(b) Senão, faça $L_k = -x_{(k)}$.

Passo2. Faça, $U_k = \min_{i \in Q} \left\{ \left\lceil \frac{\acute{s}_i}{a_{i,(k)}} \right\rceil \right\}$.

Passo3. Verifique,

(a) Se $L_k \leq U_k$, prossiga para o Passo4;

(b) Senão, fim da **Parte 5**.

Passo4. Encontre $I = \{ i \mid a_{i,(k)} < 0 \}$,

(a) Se I vazio, faça $\acute{L}_k = -\infty$;

(b) Senão, faça $\acute{L}_k = \max_{i \in I} \left\{ \left\lceil \frac{s_i}{a_{i,(k)}} \right\rceil \right\}$ e $L_k = \max \{ L_k, \acute{L}_k \}$.

Passo5. Verifique,

- (a) Se $L_k \leq U_k$, prossiga para o Passo6;
- (b) Senão, fim da **Parte 5**.

Passo6. Verifique o sinal de $c_{(k)}$,

- (a) Se $c_{(k)} > 0$, então $x_{(j)} = x_{(j)} + \delta_{(j)}$, $x_{(k)} = x_{(k)} + U_k$ e $s_i = \acute{s}_i - U_k a_{i,(k)}$, para todo $i = (1, \dots, m)$;
- (b) Se $c_{(k)} \leq 0$, então $x_{(j)} = x_{(j)} + \delta_{(j)}$, $x_{(k)} = x_{(k)} + L_k$ e $s_i = \acute{s}_i - L_k a_{i,(k)}$, para todo $i = (1, \dots, m)$.

Fim da **Parte 5**.

Considerando então que a coluna $a_{(k)}$ estritamente positiva (nos índices $i \in Q$), a factibilidade só pode ser reavida agora acrescentando $x_{(k)}$ suficientemente e de modo que o decréscimo em $x_{(k)}$ permita acréscimo na função objetivo. Analogamente à Parte 5, descrevemos a Parte 6.

► Parte 6

Passo1. Verifique o sinal de $c_{(k)}$,

- (a) Se $c_{(k)} < 0$, faça $U_k = R_{j,k}$,
- (b) Senão, faça $U_k = \infty$.

Passo2. Faça, $L_k = \max_{i \in Q} \left\{ \left\lfloor \frac{\acute{s}_i}{a_{i,(k)}} \right\rfloor \right\}$.

Passo3. Verifique,

- (a) Se $L_k \leq U_k$, prossiga para o Passo4;
- (b) Senão, fim da **Parte 6**.

Passo4. Encontre $I = \{ i \mid a_{i,(k)} > 0 \}$,

- (a) Se I vazio, faça $\acute{U}_k = \infty$;
- (b) Senão, faça $\acute{U}_k = \min_{i \in I} \left\{ \left\lfloor \frac{s_i}{a_{i,(k)}} \right\rfloor \right\}$ e $U_k = \min \{ U_k, \acute{U}_k \}$.

Passo5. Verifique,

- (a) Se $L_k \leq U_k$, prossiga para o Passo6;
- (b) Senão, fim da **Parte 6**.

Passo6. Verifique o sinal de $c_{(k)}$,

(a) Se $c_{(k)} > 0$, então $x_{(j)} = x_{(j)} + \delta_{(j)}$, $x_{(k)} = x_{(k)} + U_k$ e $s_i = \acute{s}_i - U_k a_{i,(k)}$, para todo $i = (1, \dots, m)$;

(b) Se $c_{(k)} \leq 0$, então $x_{(j)} = x_{(j)} + \delta_{(j)}$, $x_{(k)} = x_{(k)} + L_k$ e $s_i = \acute{s}_i - L_k a_{i,(k)}$, para todo $i = (1, \dots, m)$.

Fim da Parte 6.

Conseguimos abranger quase todas as possibilidades; falta apenas considerar quando a alteração em $x_{(j)}$ na direção favorável decresce a função objetivo. Neste caso, apenas devemos nos preocupar com a factibilidade da solução quando o par $x_{(k)}$, sofrer a mudança. Por essa razão, procuraremos $x_{(k)}$ para $k = (j+1, \dots, n_0)$, que promova o menor decréscimo na função objetivo. Esta busca é feito de modo sistemático como segue:

► Parte 7

Passo1. Verifique sinal de $(x_{(j)} - \delta_{(j)})$:

(a) Se $(x_{(j)} - \delta_{(j)}) \geq 0$, faça $\acute{s}_i = s_i + \delta_{(j)} a_{i,(j)}$, para todo $i = (1, \dots, m)$ e prossiga para o Passo 2;

(b) Senão, fim da **Parte 7**.

Passo2. Verifique:

(a) Se $k > n_0$, fim da **Parte 7**;

(b) Senão, prossiga para o Passo3.

Passo3. Verifique sinal de $(x_{(j)} + \delta_{(j)} * \acute{R}_{i,j})$:

(a) Se $(x_{(j)} + \delta_{(j)} * \acute{R}_{i,j}) \geq 0$, prossiga para o Passo4;

(b) Senão, faça $k=k+1$ e retorne ao Passo2.

Passo4. Identifique:

(a) Se para algum $i = (1, \dots, m)$, existe $(\acute{s}_i - \delta_{(k)} * \acute{R}_{j,k} * a_{i,(k)}) < 0$, então faça $k=k+1$ e retorne ao Passo2;

(b) Senão, prossiga para o Passo5.

Passo5. Faça $x_{(j)} = x_{(j)} - \delta_{(j)}$, $x_{(k)} = x_{(k)} + \delta_{(k)} * \acute{R}_{j,k}$ e $s_i = \acute{s}_i - \delta_{(k)} * \acute{R}_{j,k} * a_{i,(k)}$ para todo $i = (1, \dots, m)$; então retorne ao Passo1.

Tendo então considerado todos os casos, pode-se agora construir (ou pelo menos resumir) a FASE 3, e esclarecer quando e por que cada uma das Partes anteriormente descritas serão usadas no processo. Descreveremos a FASE 3 como segue:

Passo1. Inicializar os modos de buscas com as **Partes 1 e 3**.

Passo2. Executar a **Parte 2**, e então inicializar a variável $x^{(L)} = x$ e os índices $j = 1$ e $k = k_0$ (k_0 é um índice qualquer maior que j e menor que n_0).

Passo3. Executar a **Parte 4** para verificar a possibilidade de alterar $x_{(j)}$ numa direção favorável:

- (a) Se a resposta é afirmativa, prossiga para o Passo4;
- (b) Senão, faça $k = j+1$ e prossiga para o Passo8.

Passo4. Verificar o sinal de $a_{i,(k)}$ para todo $i \in Q$:

- (a) Se estritamente positivo, prossiga para o Passo5;
- (b) Se estritamente negativo, prossiga para o Passo6;
- (c) Se indefinido, prossiga para o Passo7.

Passo5. Executar a **Parte 5** para verificar a possibilidade de alterar $x_{(j)}$ numa direção favorável e decrescendo o valor de $x_{(k)}$:

- (a) Se a resposta é afirmativa, volte para o Passo3;
- (b) Senão, prossiga para o Passo7.

Passo6. Executar a **Parte 6** para verificar a possibilidade de alterar $x_{(j)}$ numa direção favorável e crescendo o valor de $x_{(k)}$:

- (a) Se a resposta é afirmativa, volte para o Passo3;
- (b) Senão, prossiga para o Passo7.

Passo7. Verifique:

- (a) Se $k-1 > j$, faça $k = k-1$ e volte ao Passo4;
- (b) Se $k-1 = j$, prossiga para o Passo8.

Passo8: Execute a **Parte 7**.

Passo9. Verifique:

- (a) Se $j < \min\{n_0, n-1\}$, faça $j = j+1$ e volte para o Passo3;
- (b) Se $j = \min\{n_0, n-1\}$, prossiga para o Passo10.

Passo 10. Verifique:

- (a) Se $x = x^{(L)}$, x é a solução desejada então fim da **FASE 3**;

(b) Senão, volte ao Passo 2.

Assim, conclui-se a apresentação do método heurístico proposto.

2.2 Exemplo

Para permitir um maior esclarecimento, vamos utilizar o método para resolver um problema em $\mathbb{R}^2$:

Maximize

$$z = x_1 + 5x_2$$

Sujeito a

$$x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e } x_1, x_2 \text{ inteiros}$$

Nesse exemplo, a solução do problema contínuo (diamante) é $x^*=(2,9/5)$, e a solução do problema inteiro (esfera) é $x^*=(0,2)$.

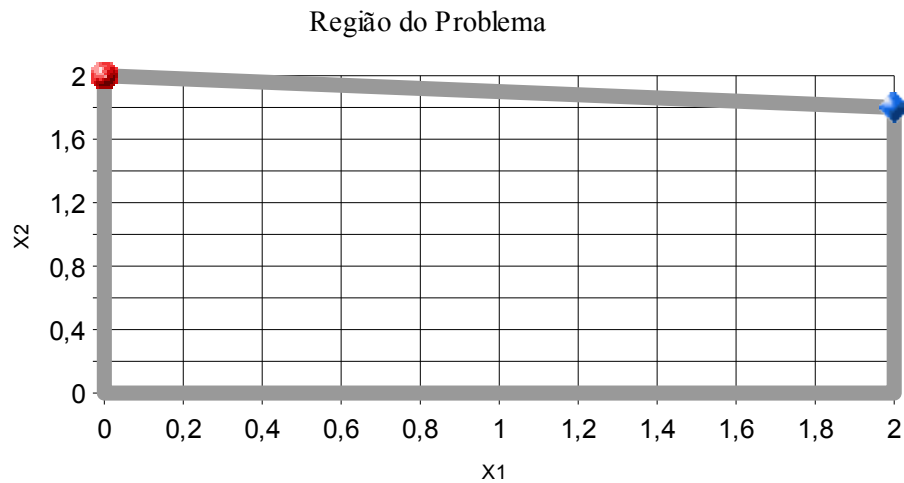


Grafico1: Região e Soluções do PL e PLI

Inicia-se a FASE1 partindo da solução contínua e encontra-se um ponto interior à região que possua duas características:

- 1) Possa ser arredondado sem que sejam violadas as restrições;
- 2) Tem a mesma base da solução ótima do problema contínuo.

Para tanto, determina-se então o conjunto $B = \{1,2\}$, das colunas básicas e altera-se o valor do vetor do lado direito:

$$b^{(2)} = b^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{j \in B} |a_j|$$

Resolve-se então esse problema modificado obtendo o segundo ponto na vizinhança da solução contínua.

No exemplo, os pontos em questão são: $x^{(1)} = (2, 1.8)$ e $x^{(2)} = (1.5, 1.3)$, sendo $x^{(1)}$ a solução do problema contínuo e $x^{(2)}$ a solução do problema modificado.

Inicia-se a FASE2 arredondando o ponto $x^{(1)}$. Depois, calcula-se a distância do ponto à restrição, e mede-se o grau de infactibilidade dessa solução. Desta forma pode-se determinar em qual direção diminui-se a infactibilidade:

$$q = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i \right)_+$$

$$q_{ij}^* = q_i + \bar{a}_{ij} \Delta x_j, \quad i = (1, \dots, m) \quad q_j^* = \sum_{i=1}^m (q_{ij}^*)_+, \quad j = (1, \dots, n)$$

$$p_j = q - q_j^*$$

Para o exemplo, arredondando $x^{(1)}$, temos o ponto $x = (2, 2)$, infactível em relação a restrição $x_1 + 10 x_2 \leq 20$, temos:

$$q = \frac{2}{\sqrt{101}};$$

$$q_1^* = \frac{1}{\sqrt{101}} \quad q_2^* = 0$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{101}} \quad p_2 = \frac{2}{\sqrt{101}}$$

Como $p_2 > p_1$, decrescer na direção de x_2 é melhor. Tem-se então ponto $x=(2,1)$ factível, terminando assim a FASE2.

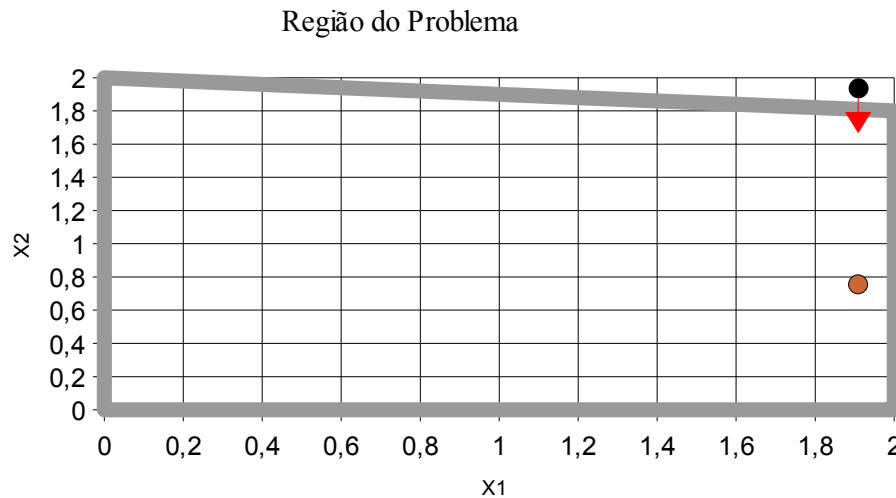


Gráfico2: Ponto interior a região encontrado pelo método

Inicia-se a FASE3 a partir da solução inteira factível obtida na FASE2. Através de métodos alternados (uma única variável e duas variáveis simultaneamente), faz-se a busca por uma solução melhor.

Primeiramente são ordenados os custos em valor absoluto, e determina-se o vetor de variação.

Do exemplo, $C = (1,5)$, portanto o vetor de custos quando permutado é $C_p = (5,1)$, e $\delta = (1,1)$.

Depois calcula-se a folga: $s = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

E determina-se em que direção a mudança é favorável,

$$d_{11} = 8; d_{12} = 0.8; d_{21} = 0 \text{ e } d_{22} = \infty \quad d_j = \min_i \{ |d_{ij}| \} \rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclui-se que a mudança isolada de uma variável não é possível, já que não existe direção.

O próximo passo é verificar se a mudança simultânea é possível. Como existem apenas duas variáveis, as candidatas são óbvias, caso ao contrário, haveria necessidade de se determinar as candidatas a sofrerem mudanças em seu valor. Fixa-se então $j=1$, ou, $(j) = 2$ e $k=2$, ou, $(k) = 1$.

Como a coluna de índice $(k) = 1$, é estritamente positiva, verifica-se então o acréscimo em $x_{(j)}$ e o decréscimo em $x_{(k)}$, ou seja, o acréscimo em x_2 e o decréscimo em x_1 .

Na Parte V do algoritmo, executada nesse caso, tem-se que o limite inferior, $L=-2$ e superior $U=2$, portanto, o ponto é atualizado da seguinte forma, $x_2 = 2$ e $x_1 = 0$.

Não havendo mais nenhuma possível alteração nas iterações seguintes, a FASE3 é terminada com a solução $x^* = (0,2)$. Sendo esta a solução exata do problema.

Capítulo 3

Experimentos Computacionais

Neste capítulo, vamos apresentar alguns detalhes da implementação, e os resultados obtidos a partir de um conjunto de problemas utilizados para testar o algoritmo no contexto de Problemas de Corte e Empacotamento.

A compilação do programa e execução dos testes foram efetuados em um computador pessoal com processador Athlon 64 X2 Dual Core 4200+ 2,2GHz com 1GB de RAM, sobre a plataforma Windows XP SP2.

3.1 Implementação

Primeiramente nós implementamos o algoritmo numa linguagem mais simples (MATLAB[19]), com o objetivo de estudá-lo e testar suas capacidades. Utilizando-se problemas de pequeno a médio porte, foi nos permitido ter uma visão de quão eficaz é o método, e apesar não ter sido registrado o tempo de execução, constatou-se a rapidez dessa execução.

A implementação inicial seguiu exatamente o conteúdo explicitado no artigo, sofrendo algumas adaptações, mas nada que modificasse sua forma original.

Na transcrição para a linguagem C++, o código sofreu algumas mudanças relevantes, tais como: agrupamento de laços repetidos, globalização de variáveis, e, talvez a maior: o método de armazenamento de matrizes esparsas. Por motivos de padronização, adotamos o mesmo método usado no GLPK (GNU Linear Programming Kit)[17], que é pelo esquema de coordenadas (três vetores, um contendo o índices de linhas, outro os índices de colunas e por fim um com os valores não-nulos da matriz).

Pela ausência das ferramentas algébricas e de manipulação matricial, e que apesar de existirem bibliotecas com ferramentas de Álgebra Linear como Lapack++[18] ou Boost++[16], que infelizmente eram incompatíveis com a nossa implementação, houve então a necessidade de criar tais ferramentas (mesmo que rudimentares), o que pode vir a influenciar o tempo de execução.

Em adicional, foi implementado o método de Gilmore e Gomory para geração de colunas

previamente apresentado no Capítulo 2. Essa implementação utiliza o GLPK para resolver os Problemas da Mochila e o PLI relaxado.

3.2 Testes Computacionais

Afim de avaliar a performance da heurística, nós geramos aleatoriamente várias classes de problemas de corte unidimensional utilizando o gerador de problemas CUTGEN1 desenvolvido por Gau, T. e Wäscher, G. [5]. Este algoritmo foi traduzido de um código em Fortran fornecido pelo autor. Geramos 18 classes de problemas pela combinação de diferentes valores dos parâmetros de geração:

- v_1 (razão entre o tamanho mínimo do item e o tamanho da matéria prima) assume os valores 0.01 e 0.2;
- v_2 (razão entre o tamanho máximo do item e o tamanho da matéria prima) assume os valores 0.2 e 0.8;
- o número de padrões no plano de corte original, denotado por M foi fixo em 10 (problemas pequenos), 20 (problemas médios) e 40 (problemas grandes);
- problemas com demanda média pequena ($\bar{d} = 10$) e demanda média grande ($\bar{d} = 100$) .

Cada classe contém 5 problemas. Nós geramos seis classes com itens pequenos ($v_1=0.01$ e $v_2=0.2$), seis classes com itens de tamanhos diversos ($v_1=0.01$ e $v_2=0.8$) e outras seis classes com itens grandes ($v_1=0.2$ e $v_2=0.8$). A tabela abaixo mostra as 18 classes e seus respectivos parâmetros. O tamanho do rolo-mestre foi fixado em 1000.

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
V_1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
V_2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
Número de Itens	10	10	20	20	40	40	10	10	20	20	40	40	10	10	20	20	40	40
Demanda Média	10	100	10	100	10	100	10	100	10	100	10	100	10	100	10	100	10	100

O gerador CUTGEN1, ao gerar os problemas, apresenta uma variação de cerca de 10% no número de itens. Isso se dá pelo fato de estarmos lidando com distribuições probabilísticas (uniforme e normal), e portanto existe no processo de truncagem (o tamanho dos itens deve ser inteiro) repetição de valores. O algoritmo agrupa itens de mesmo tamanho, somando suas demandas.

Para todos os problemas computamos o tempo de execução, o valor da função objetivo (número de objetos) e o valor da perda total de material (desperdício mais excesso de produção). Comparamos então com a solução inteira exata (ou a última solução obtida antes de exceder o limite de tempo estipulado) obtida através do algoritmo de Branch & Bound implementado no pacote GLPK.

Relacionamos os valores para cada classe de problemas nas tabelas abaixo, onde o tempo de execução foi medido em milissegundos com um erro aproximado de 10ms.

Para o algoritmo de Branch & Bound limitamos o tempo de execução em 300s e não restringimos o número de iterações. Enquanto que, para o algoritmo heurístico restringimos o número de iterações para 4000 e deixamos ilimitado o tempo de execução.

Como media comparativa, calculamos as diferenças relativas tanto para a função objetivo (perda total), para o número de objetos, e para o desperdício (perda total + excesso de produção), em relação a solução exata do Branch & Bound, isto é,

$$Diferença\ Relativa = \frac{Valor_{B\&B} - Valor_{PHEPLI}}{Valor_{B\&B}}$$

CLASSE 1

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	4	25	10	12653	58	25	4	4	25	36	10	12653	0.0000	0.0000	0.0000
2	130	14	10	4274	177	14	6	130	14	111	10	4274	0.0000	0.0000	0.0000
3	133	27	10	18607	133	28	3	133	28	25	10	19607	0.0000	-0.0370	-0.0537
4	92	17	10	6808	92	19	2	92	19	21	16	8808	0.0000	-0.1176	-0.2938
5	97	18	16	4244	166	18	4	97	18	67	10	4244	0.0000	0.0000	0.0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0.0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0.1176	Máxima Diferença de Desperdício:	0.2938
Mínima Diferença das Perdas:	0.0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0.0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0.0000
Média das Diferenças:	0.0000	Média das Diferenças:	0.0309	Média das Diferenças:	0.0695

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	13	164	13	13
2	13	158	52	52
3	17	139	20	20
4	17	135	20	20
5	11	125	16	16
6	4	114	8	8
7	5	108	12	12
8	6	74	30	30
9	10	64	40	40
10	4	12	15	15

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	4	184	5	5
2	18	142	21	21
3	7	106	10	10
4	14	99	20	20
5	16	91	23	23
6	11	90	11	11
7	10	82	14	14
8	6	65	12	12
9	3	59	15	15
10	11	43	24	24

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	9	198	10	10
2	13	188	15	15
3	3	159	102	108
4	4	123	8	8
5	8	101	9	9
6	4	49	20	20
7	21	46	21	22
8	22	34	30	30
9	16	30	33	33

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	8	198	10	10
2	20	185	20	20
3	10	177	30	40
4	3	170	5	5
5	6	142	7	7
6	2	102	7	9
7	6	79	12	12
8	18	38	31	31
9	9	20	50	50
10	18	13	18	20

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	15	196	15	15
2	12	185	13	13
3	14	165	18	18
4	7	158	12	12
5	10	137	12	12
6	13	132	18	18
7	10	100	10	10
8	14	69	16	16
9	1	64	21	21
10	4	16	14	14

CLASSE 2

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	34	222	10	99926	34	222	1	34	222	17	10	99926	0.0000	0.0000	0.0000
2	921	101	10	3667	921	101	2	921	101	53	10	3667	0.0000	0.0000	0.0000
3	960	248	10	164106	960	250	6	960	250	25	10	166106	0.0000	-0.0081	-0.0122
4	800	142	10	37904	941	148	7	800	148	46	10	43904	0.0000	-0.0423	-0.1583
5	794	153	10	16172	831	153	4	794	153	64	10	16172	0.0000	0.0000	0.0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0.0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0.0423	Máxima Diferença de Desperdício:	0.1583
Mínima Diferença das Perdas:	0.0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0.0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0.0000
Média das Diferenças:	0.0000	Média das Diferenças:	0.0101	Média das Diferenças:	0.0341

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	126	164	126	126
2	129	158	504	504
3	170	139	172	172
4	168	135	170	170
5	108	125	112	112
6	40	114	40	40
7	49	108	102	102
8	63	74	258	258
9	95	64	383	383
10	52	12	136	136

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	39	184	40	40
2	179	142	182	182
3	72	106	74	74
4	140	99	140	140
5	162	91	165	165
6	108	90	110	110
7	105	82	111	111
8	61	65	63	63
9	28	59	30	30
10	106	43	123	123

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	88	198	90	90
2	135	188	135	135
3	28	159	1032	1044
4	37	123	40	40
5	84	101	90	90
6	29	49	40	40
7	209	46	209	211
8	217	34	242	242
9	173	30	198	198

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	84	198	85	85
2	200	185	200	200
3	102	177	270	300
4	31	170	35	35
5	65	142	70	70
6	21	102	61	67
7	64	79	84	84
8	177	38	177	177
9	94	20	100	100
10	162	13	162	168

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	147	196	150	150
2	120	185	122	122
3	137	165	138	138
4	69	158	72	72
5	101	137	104	104
6	132	132	132	132
7	102	100	110	110
8	144	69	146	146
9	3	64	182	182
10	45	16	106	106

CLASSE 3

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	38	35	10	12729	50	35	5	38	35	125	10	12729	0.0000	0.0000	0.0000
2	55	43	10	23863	96	44	6	55	44	107	10	24863	0.0000	-0.0233	-0.0419
3	209	39	10	9652	209	39	10	209	39	100	10	9652	0.0000	0.0000	0.0000
4	213	30	16	11210	257	30	10	213	30	142	10	11210	0.0000	0.0000	0.0000
5	72	31	10	7957	82	31	7	72	31	154	10	7957	0.0000	0.0000	0.0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0.0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0.0233	Máxima Diferença de Desperdício:	0.0419
Mínima Diferença das Perdas:	0.0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0.0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0.0000
Média das Diferenças:	0.0000	Média das Diferenças:	0.0047	Média das Diferenças:	0.0084

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	10	190	10	10
2	9	188	10	10
3	9	164	14	9
4	6	158	18	18
5	6	146	6	6
6	15	144	18	18
7	8	139	14	14
8	20	135	60	60
9	15	125	16	16
10	4	114	8	8
11	18	111	18	18
12	7	108	16	16
13	14	76	26	26
14	16	74	16	16
15	22	64	26	39
16	6	61	10	10
17	3	52	3	3
18	12	12	25	24

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	17	198	18	18
2	1	193	10	10
3	9	188	10	10
4	3	186	25	30
5	7	159	12	12
6	19	156	20	20
7	13	124	13	13
8	18	123	24	24
9	16	101	18	18
10	1	84	2	2
11	8	81	12	12
12	29	49	156	156
13	3	46	5	6
14	6	41	26	26
15	2	34	2	2
16	6	33	9	9
17	17	32	117	117
18	9	30	171	171
19	16	12	16	18

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	7	199	10	10
2	1	196	5	5
3	13	195	15	15
4	11	186	15	15
5	10	185	13	13
6	16	179	20	20
7	19	165	24	24
8	17	163	18	18
9	13	158	18	18
10	18	141	21	21
11	18	139	21	21
12	2	137	7	7
13	16	132	18	18
14	2	100	10	10
15	18	99	20	20
16	1	69	3	3
17	11	66	15	15
18	4	64	6	6
19	2	16	3	3
20	1	13	43	43

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	197	15	15
2	2	172	16	16
3	20	156	30	30
4	8	144	8	8
5	15	135	21	21
6	2	125	8	8
7	16	122	16	16
8	8	110	9	9
9	15	102	21	21
10	2	93	9	9
11	15	82	24	24
12	6	70	6	6
13	6	49	18	18
14	12	44	25	25
15	16	43	23	23
16	14	41	24	24
17	12	33	30	30
18	11	29	35	35
19	6	24	6	6

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	21	197	25	25
2	20	188	20	20
3	1	178	1	1
4	17	161	20	20
5	8	143	8	8
6	5	126	6	6
7	2	123	8	8
8	9	122	16	16
9	17	120	18	18
10	12	102	28	28
11	15	93	18	18
12	19	90	22	22
13	4	87	11	11
14	8	65	12	12
15	16	63	21	21
16	1	47	21	21
17	15	46	20	20
18	1	41	2	2
19	9	10	29	29

CLASSE 4

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	292	304	15	79299	328	304	4	292	304	125	10	79299	0,0000	0,0000	0,0000
2	414	391	16	198899	426	392	4	414	392	107	10	198899	0,0000	-0,0026	-0,0050
3	1701	306	10	13685	1714	306	8	1701	306	216	10	13685	0,0000	0,0000	0,0000
4	1546	232	10	44898	1551	231	7	1546	233	160	10	45898	0,0000	-0,0043	-0,0223
5	543	257	15	27529	599	257	3	543	257	155	10	27529	0,0000	0,0000	0,0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0043	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0223
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0014	Média das Diferenças:	0,0055

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	102	190	102	102
2	93	188	95	95
3	92	164	95	95
4	64	158	168	168
5	56	146	60	60
6	153	144	156	156
7	83	139	84	84
8	200	135	612	612
9	148	125	152	152
10	39	114	40	40
11	180	111	180	180
12	73	108	80	80
13	141	76	143	143
14	164	74	171	171
15	214	64	221	221
16	62	61	82	82
17	28	52	28	28
18	108	12	210	210

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	171	198	172	172
2	4	193	5	5
3	94	188	96	96
4	29	186	285	290
5	71	159	72	72
6	192	156	192	192
7	134	124	134	134
8	179	123	184	184
9	164	101	171	171
10	11	84	19	19
11	80	81	84	84
12	287	49	1608	1608
13	30	46	57	58
14	61	41	84	84
15	20	34	30	30
16	61	33	86	86
17	169	32	1206	1206
18	89	30	1634	1634
19	154	12	155	157

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	72	199	75	75
2	5	196	5	5
3	131	195	135	135
4	109	186	110	110
5	97	185	97	97
6	164	179	165	165
7	186	165	186	186
8	170	163	174	174
9	129	158	132	132
10	181	141	182	182
11	185	139	189	189
12	18	137	21	21
13	157	132	162	162
14	24	100	30	30
15	177	99	180	180
16	5	69	22	22
17	108	66	120	120
18	42	64	47	47
19	25	16	27	27
20	15	13	333	333

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	139	197	140	140
2	17	172	176	180
3	196	156	200	200
4	85	144	88	90
5	146	135	147	147
6	17	125	24	24
7	162	122	168	168
8	84	110	90	90
9	152	102	154	154
10	20	93	66	66
11	144	82	144	144
12	63	70	68	68
13	65	49	120	120
14	120	44	197	197
15	156	43	161	161
16	136	41	144	144
17	123	33	150	150
18	110	29	110	110
19	65	24	65	66

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	210	197	210	210
2	196	188	200	200
3	8	178	8	8
4	168	161	170	170
5	85	143	86	86
6	45	126	48	48
7	24	123	24	24
8	86	122	88	88
9	166	120	168	168
10	123	102	301	301
11	154	93	156	156
12	194	90	198	198
13	41	87	44	44
14	82	65	96	96
15	158	63	182	182
16	6	47	21	21
17	151	46	176	176
18	5	41	12	12
19	98	10	236	236

CLASSE 5

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	199	90	15	49684	246	91	14	202	91	563	10	50684	-0,0151	-0,0111	-0,0201
2	275	81	10	33710	275	84	15	275	84	328	10	36710	0,0000	-0,0370	-0,0890
3	93	99	10	60392	166	102	12	93	102	367	10	63392	0,0000	-0,0303	-0,0497
4	78	77	10	36249	129	78	8	78	78	234	10	37249	0,0000	-0,0130	-0,0276
5	346	109	16	66137	346	112	26	348	107	632	10	64137	-0,0058	0,0183	0,0302

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0151	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0370	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0890
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0111	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0201
Média das Diferenças:	0,0042	Média das Diferenças:	0,0220	Média das Diferenças:	0,0433

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	12	190	15	15
2	4	188	5	5
3	20	184	20	20
4	4	167	5	5
5	3	164	6	6
6	19	158	24	24
7	10	152	45	65
8	2	146	6	6
9	16	144	73	73
10	4	142	7	7
11	8	139	14	14
12	12	135	12	12
13	3	133	7	7
14	11	125	16	16
15	1	114	18	26
16	2	111	9	9
17	19	108	24	24
18	20	106	27	27
19	16	105	16	16
20	18	102	160	160
21	1	101	27	27
22	10	99	10	10
23	3	91	3	3
24	8	90	11	11
25	20	82	24	24
26	14	76	14	14
27	19	74	26	26
28	17	73	18	18
29	1	65	6	6
30	28	64	33	33
31	10	63	33	33
32	3	61	16	16
33	7	59	73	17
34	2	52	18	18
35	6	44	10	10
36	18	43	20	27
37	10	34	27	27
38	19	12	19	23

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	9	200	10	10
2	11	199	15	15
3	21	198	25	25
4	2	196	4	4
5	21	195	25	25
6	4	191	25	30
7	8	186	10	10
8	15	185	15	15
9	4	183	4	4
10	14	179	65	70
11	4	178	5	5
12	17	170	20	20
13	13	165	18	18
14	7	163	12	12
15	3	158	6	6
16	10	143	10	10
17	4	142	7	7
18	18	141	21	21
19	2	139	7	7
20	15	137	15	15
21	2	132	2	2
22	21	121	24	24
23	9	120	21	21
24	15	108	18	18
25	2	100	10	10
26	17	99	20	20
27	9	83	12	12
28	16	69	103	117
29	2	66	15	15
30	6	64	13	14
31	9	53	11	11
32	7	35	9	9
33	7	34	7	8
34	13	28	13	14
35	17	23	50	50
36	14	16	62	62
37	25	15	26	29
38	7	13	16	17

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	197	15	15
2	3	191	4	4
3	6	188	55	60
4	2	179	5	5
5	7	178	10	10
6	15	177	15	15
7	10	161	12	12
8	13	154	18	18
9	4	153	5	5
10	9	146	9	9
11	30	143	30	30
12	7	140	7	7
13	2	126	5	5
14	5	123	80	96
15	16	122	63	63
16	10	120	10	10
17	14	115	18	18
18	16	102	21	21
19	1	95	22	22
20	12	93	16	16
21	13	90	22	22
22	14	87	100	100
23	16	84	221	221
24	9	83	12	12
25	22	65	22	22
26	1	63	3	3
27	15	51	18	18
28	13	49	20	20
29	9	47	21	21
30	11	46	11	12
31	10	45	23	23
32	9	41	24	24
33	16	39	32	32
34	13	30	35	35
35	13	16	13	15
36	6	15	12	12
37	9	14	11	12
38	5	10	21	21

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	198	15	15
2	11	189	15	15
3	9	180	9	9
4	11	166	12	12
5	24	165	36	36
6	17	156	18	18
7	8	153	12	12
8	13	147	18	18
9	14	131	14	14
10	10	128	12	12
11	18	125	24	24
12	15	122	16	16
13	15	111	18	18
14	12	97	70	70
15	21	94	30	30
16	16	91	56	56
17	14	90	14	14
18	6	87	6	6
19	7	83	12	12
20	1	80	18	18
21	11	79	12	14
22	16	69	21	21
23	12	68	36	36
24	12	65	15	15
25	9	64	65	78
26	3	59	6	6
27	11	55	98	98
28	2	46	21	21
29	17	45	112	112
30	7	33	42	42
31	14	23	18	18
32	4	22	42	42
33	8	17	11	11
34	14	15	14	14
35	4	10	18	19

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	11	188	30	40
2	17	186	17	17
3	16	183	47	47
4	2	179	5	5
5	21	172	25	25
6	4	171	5	5
7	13	169	15	15
8	7	160	12	12
9	21	151	22	22
10	19	145	23	23
11	19	140	21	21
12	16	139	21	21
13	6	134	8	8
14	1	133	7	7
15	11	130	56	14
16	14	127	17	17
17	9	119	10	10
18	14	116	119	119
19	7	112	66	66
20	19	101	21	21
21	2	89	132	143
22	4	74	40	40
23	7	73	12	12
24	4	71	14	14
25	7	60	7	9
26	10	58	10	21
27	9	54	18	18
28	7	50	20	20
29	4	46	23	23
30	4	45	22	22
31	6	43	23	23
32	18	42	18	18
33	5	35	112	112
34	14	32	31	31
35	1	31	32	32
36	18	30	42	36
37	6	26	11	11
38	16	21	16	17
39	3	20	50	50
40	8	19	8	8

CLASSE 6

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	2159	593	46	187008	2160	593	12	2160	593	383	10	187008	-0,0005	0,0000	0,0000
2	2164	699	15	224071	2164	701	17	2164	701	332	10	226071	0,0000	-0,0029	-0,0089
3	747	930	16	542958	788	933	17	747	933	448	10	545958	0,0000	-0,0032	-0,0055
4	624	712	15	306022	676	716	9	625	716	258	10	310022	-0,0016	-0,0056	-0,0131
5	2522	890	10	461329	2571	892	12	2522	891	733	10	462329	0,0000	-0,0011	-0,0022

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0016	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0056	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0131
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0004	Média das Diferenças:	0,0026	Média das Diferenças:	0,0059

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	123	190	125	125
2	42	188	45	45
3	204	184	205	205
4	40	167	40	40
5	26	164	30	30
6	194	158	198	198
7	99	152	100	100
8	22	146	24	24
9	162	144	752	752
10	42	142	42	42
11	81	139	84	84
12	124	135	124	124
13	25	133	28	28
14	111	125	112	112
15	3	114	8	8
16	24	111	27	27
17	192	108	192	192
18	199	106	207	207
19	158	105	164	160
20	182	102	186	186
21	4	101	279	279
22	101	99	110	110
23	31	91	31	31
24	75	90	77	77
25	205	82	216	216
26	143	76	147	147
27	191	74	195	195
28	174	73	174	182
29	12	65	48	48
30	288	64	308	297
31	104	63	332	324
32	31	61	576	592
33	65	59	87	87
34	22	52	189	189
35	65	44	81	81
36	179	43	187	188
37	95	34	115	115
38	162	12	163	165

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	94	200	95	95
2	115	199	115	115
3	212	198	215	215
4	22	196	24	24
5	210	195	210	210
6	36	191	290	295
7	83	186	85	85
8	153	185	155	155
9	38	183	40	40
10	143	179	630	630
11	44	178	45	45
12	166	170	170	170
13	131	165	132	132
14	68	163	72	72
15	27	158	30	30
16	105	143	106	106
17	39	142	42	42
18	184	141	189	189
19	17	139	21	21
20	147	137	152	152
21	18	132	20	20
22	207	121	208	208
23	90	120	175	175
24	154	108	162	162
25	17	100	20	20
26	171	99	180	180
27	88	83	96	96
28	160	69	1000	1014
29	21	66	30	30
30	60	64	126	126
31	92	53	93	93
32	66	35	89	89
33	68	34	68	69
34	126	28	126	126
35	165	23	189	189
36	144	16	186	186
37	247	15	250	253
38	72	13	153	153

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	135	197	135	135
2	33	191	35	33
3	60	188	570	570
4	17	179	20	20
5	71	178	75	75
6	147	177	150	150
7	103	161	108	108
8	128	154	132	132
9	40	153	40	40
10	94	146	94	94
11	302	143	306	306
12	72	140	75	75
13	19	126	51	51
14	51	123	896	904
15	162	122	658	658
16	104	120	104	104
17	136	115	136	137
18	161	102	165	165
19	11	95	214	215
20	122	93	127	134
21	135	90	143	143
22	142	87	1040	1040
23	163	84	2144	2154
24	92	83	96	96
25	214	65	214	215
26	1	63	22	22
27	149	51	162	162
28	126	49	126	126
29	93	47	105	105
30	114	46	114	114
31	104	45	119	117
32	91	41	96	120
33	162	39	184	178
34	129	30	155	153
35	126	16	126	128
36	61	15	108	108
37	93	14	114	114
38	37	10	184	184

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	144	198	145	145
2	106	189	106	110
3	93	180	93	94
4	107	166	108	108
5	238	165	372	376
6	168	156	168	168
7	78	153	78	78
8	131	147	132	132
9	139	131	140	140
10	97	128	98	99
11	177	125	184	184
12	149	122	152	152
13	149	111	153	153
14	125	97	690	690
15	212	94	220	220
16	157	91	560	560
17	144	90	144	144
18	58	87	58	60
19	68	83	72	73
20	5	80	186	188
21	113	79	113	113
22	158	69	161	161
23	122	68	348	360
24	120	65	120	120
25	88	64	650	650
26	32	59	50	50
27	106	55	1008	1008
28	17	46	126	147
29	178	45	1152	1152
30	66	33	433	433
31	143	23	179	179
32	44	22	432	432
33	76	17	77	80
34	138	15	138	139
35	54	10	178	179

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	106	188	345	345
2	171	186	171	171
3	163	183	481	481
4	21	179	25	25
5	209	172	210	210
6	40	171	40	40
7	132	169	135	135
8	74	160	104	104
9	207	151	208	208
10	186	145	187	187
11	186	140	189	189
12	162	139	168	168
13	63	134	64	64
14	7	133	7	7
15	112	130	119	119
16	138	127	138	138
17	85	119	85	85
18	138	116	1197	1197
19	73	112	624	624
20	191	101	193	193
21	25	89	1485	1496
22	39	74	376	376
23	73	73	84	84
24	43	71	56	56
25	70	60	70	70
26	101	58	101	101
27	86	54	90	90
28	74	50	80	80
29	39	46	58	58
30	38	45	44	44
31	60	43	69	69
32	185	42	186	186
33	49	35	56	56
34	136	32	155	155
35	14	31	32	32
36	178	30	184	184
37	63	26	104	104
38	164	21	164	165
39	26	20	50	50
40	73	19	89	89

CLASSE 7

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	577	66	10	17853	577	66	1	577	66	22	10	17853	0,0000	0,0000	0,0000
3	1685	38	10	6230	1685	38	2	1685	38	29	10	6230	0,0000	0,0000	0,0000
5	219	53	10	13681	219	53	1	219	53	27	10	13681	0,0000	0,0000	0,0000

Os Problemas #2 e 4 têm solução inteira.

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0000
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	13	648	13	13
2	13	625	13	13
3	17	545	17	17
4	17	529	17	17
5	11	488	12	12
6	4	443	17	17
7	5	418	17	17
8	6	277	13	13
9	10	236	13	13
10	4	22	157	157

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	9	789	9	9
2	13	750	13	13
3	3	629	3	3
4	4	481	4	4
5	8	389	8	8
6	1	172	13	13
7	3	171	6	6
8	21	161	24	24
9	22	111	27	27
10	16	93	26	26

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	8	792	8	8
2	20	738	20	20
3	10	704	10	10
4	3	675	6	6
5	6	557	6	6
6	2	394	6	6
7	6	298	6	6
8	18	129	21	21
9	9	54	116	116
10	18	24	172	172

CLASSE 8

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
3	16991	372	10	54446	16991	372	2	16991	372	29	10	54446	0,0000	0,0000	0,0000
4	2235	541	10	138791	2331	541	2	2235	541	57	10	138791	0,0000	0,0000	0,0000

Os Problemas #1,2 e 5 têm solução inteira

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0000
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	88	789	88	88
2	135	750	135	135
3	28	629	28	28
4	37	481	38	38
5	84	389	84	84
6	3	172	135	135
7	26	171	56	56
8	209	161	210	210
9	217	111	225	225
10	173	93	260	260

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	84	792	84	84
2	200	738	200	200
3	102	704	102	102
4	31	675	64	64
5	65	557	65	65
6	21	394	65	65
7	64	298	64	64
8	177	129	182	182
9	94	54	1176	1176
10	162	24	1740	1740

CLASSE 9

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	652	107	10	20705	652	107	1	652	107	103	10	20705	0,0000	0,0000	0,0000
2	864	88	10	14780	908	88	2	864	88	269	10	14780	0,0000	0,0000	0,0000
3	1479	163	10	47363	1479	163	1	1479	163	68	10	47363	0,0000	0,0000	0,0000
5	614	109	10	19362	614	110	4	614	110	101	10	20362	0,0000	-0,0092	-0,0516

O Problema #4 tem solução inteira

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0092	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0516
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0023	Média das Diferenças:	0,0129

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	10	757	10	10
2	9	750	9	9
3	9	648	9	9
4	6	625	6	6
5	6	576	6	6
6	15	566	16	16
7	8	545	18	18
8	20	529	20	20
9	11	488	12	12
10	4	486	4	4
11	4	443	4	4
12	18	429	18	18
13	7	418	20	20
14	14	286	15	15
15	16	277	16	16
16	11	236	12	12
17	11	234	11	11
18	6	225	8	8
19	3	185	12	12
20	12	22	261	261

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	17	789	17	17
2	1	770	1	1
3	9	750	9	9
4	3	742	3	3
5	7	629	7	7
6	19	615	19	19
7	13	482	14	14
8	18	481	18	18
9	16	389	16	16
10	1	318	3	3
11	8	306	9	9
12	19	172	23	23
13	10	171	10	10
14	3	161	6	6
15	6	139	38	38
16	2	111	2	2
17	6	106	16	16
18	17	101	61	61
19	9	93	10	10
20	16	22	74	74

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	7	793	7	7
2	1	784	1	1
3	13	779	13	13
4	11	741	11	11
5	10	736	10	10
6	16	711	16	16
7	19	653	19	19
8	17	647	17	17
9	13	626	13	13
10	18	555	18	18
11	18	548	18	18
12	2	538	2	2
13	16	516	18	18
14	2	382	2	2
15	18	379	18	18
16	1	254	18	18
17	11	244	86	86
18	4	235	18	18
19	2	35	162	162
20	1	24	557	557

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	21	787	21	21
2	20	751	20	20
3	1	708	1	1
4	17	638	17	17
5	8	564	19	20
6	5	490	6	6
7	2	481	2	2
8	9	476	10	10
9	17	468	18	18
10	12	394	12	12
11	15	354	17	17
12	19	345	19	20
13	4	332	6	6
14	5	241	17	17
15	3	238	3	3
16	16	232	17	17
17	1	165	6	6
18	15	160	21	21
19	1	139	6	6
20	9	13	327	334

CLASSE 10

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	6450	1066	10	194818	6450	1066	1	6450	1066	103	10	194818	0,0000	0,0000	0,0000
2	8520	865	10	129787	8520	865	2	8520	865	133	10	129787	0,0000	0,0000	0,0000
3	14858	1630	10	478459	14858	1630	1	14858	1630	68	10	478459	0,0000	0,0000	0,0000
4	26822	870	10	153767	26822	870	2	26822	870	122	10	153767	0,0000	0,0000	0,0000
5	5804	1052	10	159573	5804	1052	1	5804	1052	101	10	159573	0,0000	0,0000	0,0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0000
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	102	757	102	102
2	93	750	93	93
3	92	648	92	92
4	64	625	64	64
5	56	576	56	56
6	153	566	164	164
7	83	545	180	180
8	200	529	200	200
9	110	488	110	110
10	38	486	38	38
11	39	443	40	40
12	180	429	180	180
13	73	418	200	200
14	141	286	148	148
15	164	277	164	164
16	109	236	110	110
17	105	234	105	105
18	62	225	64	64
19	28	185	128	128
20	108	22	2588	2588

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	171	789	171	171
2	4	770	4	4
3	94	750	94	94
4	29	742	29	29
5	71	629	71	71
6	192	615	192	192
7	134	482	134	134
8	179	481	180	180
9	164	389	164	164
10	11	318	12	12
11	80	306	81	81
12	190	172	236	236
13	97	171	100	100
14	30	161	30	30
15	61	139	384	384
16	20	111	20	20
17	61	106	164	164
18	169	101	600	600
19	89	93	90	90
20	154	22	713	713

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	72	793	72	72
2	5	784	5	5
3	131	779	131	131
4	109	741	109	109
5	97	736	97	97
6	164	711	164	164
7	186	653	186	186
8	170	647	170	170
9	129	626	129	129
10	181	555	181	181
11	185	548	185	185
12	18	538	24	24
13	157	516	177	177
14	24	382	24	24
15	177	379	177	177
16	5	254	185	185
17	108	244	855	855
18	42	235	181	181
19	25	35	1617	1617
20	15	24	5585	5585

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	139	786	139	139
2	17	682	17	17
3	196	617	196	196
4	85	568	85	85
5	146	531	146	146
6	17	488	18	18
7	162	477	162	162
8	84	428	84	84
9	152	392	152	152
10	20	353	146	146
11	57	312	57	57
12	87	310	87	87
13	63	258	196	196
14	65	172	139	139
15	120	153	120	120
16	156	147	302	302
17	136	142	140	140
18	123	108	146	146
19	110	89	196	196
20	65	71	104	104

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	210	787	210	210
2	196	751	196	196
3	8	708	8	8
4	168	638	168	168
5	85	564	194	194
6	45	490	46	46
7	24	481	24	24
8	86	476	86	86
9	166	468	166	166
10	123	394	124	124
11	154	354	168	168
12	194	345	194	194
13	41	332	42	42
14	48	241	162	162
15	34	238	34	34
16	158	232	160	160
17	6	165	6	6
18	151	160	210	210
19	5	139	62	62
20	98	13	3238	3238

CLASSE 11

Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
				FASE2			FASE3			FASE2+3				
Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1485	200	10	45045	1489	201	3	1487	201	761	10	46045	-0,0013	-0,0050	-0,0222
1926	243	10	59105	1926	243	1	1927	242	644	10	58105	-0,0005	0,0041	0,0169
693	189	10	40919	737	190	4	693	190	473	10	41919	0,0000	-0,0053	-0,0244
700	182	10	25111	760	181	5	700	182	528	16	25111	0,0000	0,0000	0,0000
3542	210	10	44303	3598	210	3	3542	210	482	10	44303	0,0000	0,0000	0,0000

Máxima Diferença das Perdas: 0,0013
 Mínima Diferença das Perdas: 0,0000
 Média das Diferenças: 0,0004

Máxima Diferença de Número de Objetos: 0,0053
 Mínima Diferença de Número de Objetos: 0,0000
 Média das Diferenças: 0,0029

Máxima Diferença de Desperdício: 0,0244
 Mínima Diferença de Desperdício: 0,0000
 Média das Diferenças: 0,0127

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	12	757	12	12
2	4	750	4	4
3	20	733	20	20
4	4	660	4	4
5	3	648	3	3
6	19	625	19	19
7	10	601	13	13
8	2	576	2	3
9	16	566	16	16
10	4	560	4	4
11	8	545	8	8
12	12	529	16	16
13	3	519	3	3
14	3	488	4	4
15	8	486	8	8
16	1	443	2	2
17	2	429	2	2
18	19	418	20	20
19	20	407	20	20
20	16	404	16	16
21	18	393	18	18
22	1	390	4	4
23	10	379	24	24
24	3	346	4	3
25	8	341	19	19
26	20	308	21	21
27	14	286	14	14
28	19	277	48	48
29	17	272	17	17
30	1	239	4	4
31	8	236	20	20
32	20	234	48	51
33	10	233	12	12
34	3	225	4	4
35	7	213	7	7
36	2	185	10	10
37	6	152	10	10
38	18	147	18	18
39	10	111	18	18
40	19	22	274	277

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	9	798	9	9
2	11	793	11	11
3	21	792	21	21
4	2	784	2	2
5	13	779	13	13
6	8	776	8	8
7	4	761	4	4
8	8	741	8	8
9	15	736	15	15
10	4	729	4	4
11	14	711	14	14
12	4	705	4	4
13	17	674	17	17
14	13	653	13	13
15	7	647	7	7
16	3	626	3	3
17	10	564	10	10
18	4	558	4	4
19	18	555	18	18
20	2	548	17	17
21	15	538	15	15
22	2	516	21	19
23	21	473	21	21
24	9	465	10	10
25	15	419	18	18
26	2	382	15	15
27	17	379	17	17
28	9	313	20	20
29	16	254	30	30
30	2	244	8	8
31	6	235	10	10
32	9	189	14	14
33	7	114	67	67
34	7	113	39	39
35	13	85	18	18
36	17	66	122	122
37	14	35	57	57
38	25	31	62	63
39	7	24	76	76

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	787	14	14
2	3	762	3	3
3	6	751	6	6
4	2	711	15	15
5	7	708	7	7
6	15	702	15	15
7	10	638	10	10
8	13	610	13	14
9	4	603	7	7
10	9	576	9	9
11	16	564	16	16
12	14	561	14	14
13	7	548	13	13
14	2	490	2	2
15	5	481	6	6
16	16	476	16	16
17	10	468	10	10
18	14	448	14	14
19	16	394	16	16
20	1	363	16	16
21	12	354	12	12
22	13	345	13	13
23	14	332	15	15
24	16	318	18	18
25	9	312	9	9
26	16	241	20	20
27	6	238	7	7
28	1	232	15	15
29	15	182	15	15
30	13	172	14	14
31	9	165	20	20
32	11	160	17	17
33	10	156	12	12
34	9	139	14	14
35	16	130	39	42
36	13	94	19	19
37	13	38	54	54
38	6	31	93	93
39	9	29	73	73
40	5	13	76	76

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	788	14	14
2	11	754	11	11
3	9	716	9	9
4	11	659	11	11
5	12	654	12	12
6	12	652	12	12
7	17	618	17	17
8	8	605	8	8
9	13	578	13	13
10	14	512	14	14
11	10	499	10	10
12	18	489	18	18
13	15	474	16	16
14	15	429	16	16
15	12	373	16	16
16	9	360	10	10
17	12	358	16	16
18	16	346	17	17
19	14	343	14	14
20	6	330	6	6
21	7	314	9	9
22	1	301	3	3
23	11	299	12	12
24	16	258	16	16
25	12	252	17	17
26	12	241	12	12
27	9	237	9	9
28	3	214	11	11
29	11	198	26	26
30	2	163	14	14
31	9	157	11	11
32	8	156	8	8
33	7	109	11	11
34	14	65	23	23
35	4	60	58	58
36	8	42	28	28
37	14	31	82	82
38	4	12	248	248

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	11	751	11	11
2	17	741	17	17
3	16	730	16	16
4	2	710	2	2
5	21	684	21	21
6	4	678	4	4
7	13	672	13	13
8	7	634	7	7
9	21	597	21	21
10	19	571	19	19
11	19	552	19	19
12	16	545	16	16
13	6	525	6	6
14	1	520	1	1
15	11	508	11	11
16	14	495	14	14
17	9	462	10	10
18	14	452	14	14
19	7	435	8	8
20	19	388	22	22
21	2	339	11	11
22	4	275	19	19
23	7	271	16	16
24	4	263	6	6
25	7	220	19	19
26	10	211	35	35
27	9	192	21	21
28	7	176	16	16
29	4	160	8	8
30	4	158	26	26
31	6	149	19	19
32	18	144	25	25
33	5	114	19	19
34	14	103	22	22
35	1	97	21	21
36	18	93	19	19
37	6	78	8	8
38	16	56	72	72
39	3	54	28	28
40	8	50	20	20

CLASSE 12

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	14840	1988	16	426747	14910	1989	2	14842	1989	801	10	427747	-0,0001	-0,0005	-0,0023
2	19282	2440	10	592659	19282	2440	1	19283	2439	644	10	591659	-0,0001	0,0004	0,0017
3	5742	1913	10	428239	5742	1914	4	5742	1914	192	10	429239	0,0000	-0,0005	-0,0023
4	7313	1808	16	245473	7313	1808	3	7313	1808	271	10	245473	0,0000	0,0000	0,0000
5	34864	2072	10	414889	34864	2072	1	34864	2072	235	10	414889	0,0000	0,0000	0,0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0001	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0005	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0023
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0003	Média das Diferenças:	0,0013

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	123	757	123	123
2	42	750	42	42
3	204	733	204	204
4	40	660	40	40
5	26	648	26	26
6	194	625	194	194
7	99	601	130	130
8	22	576	22	23
9	162	566	162	162
10	42	560	42	42
11	81	545	81	81
12	124	529	158	158
13	25	519	25	25
14	34	488	34	34
15	77	486	78	78
16	3	443	4	4
17	24	429	24	24
18	192	418	192	192
19	199	407	200	200
20	158	404	158	158
21	182	393	182	182
22	4	390	42	42
23	101	379	243	243
24	31	346	32	31
25	75	341	196	196
26	205	308	207	207
27	143	286	144	144
28	191	277	494	494
29	174	272	174	174
30	12	239	12	12
31	85	236	204	204
32	203	234	507	510
33	104	233	123	123
34	31	225	32	32
35	65	213	65	65
36	22	185	100	100
37	65	152	96	96
38	179	147	179	179
39	95	111	99	99
40	162	22	2681	2684

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	135	787	135	135
2	33	762	33	33
3	60	751	104	104
4	17	711	149	149
5	71	708	71	71
6	147	702	147	147
7	103	638	103	103
8	128	610	128	128
9	40	603	67	67
10	94	576	94	94
11	159	564	159	159
12	143	561	156	156
13	72	548	135	136
14	19	490	20	20
15	51	481	52	52
16	162	476	162	162
17	104	468	104	104
18	136	448	136	136
19	161	394	161	161
20	11	363	159	159
21	122	354	122	122
22	135	345	135	136
23	142	332	144	144
24	163	318	165	165
25	92	312	93	93
26	156	241	156	156
27	58	238	71	71
28	1	232	147	147
29	149	182	149	149
30	126	172	135	135
31	93	165	206	206
32	114	160	189	189
33	104	156	104	104
34	91	139	122	122
35	162	130	384	384
36	129	94	135	136
37	126	38	548	548
38	61	31	1167	1167
39	93	29	719	719
40	37	13	793	794

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	94	798	94	94
2	115	793	115	115
3	212	792	212	212
4	22	784	22	22
5	128	779	128	128
6	82	776	82	82
7	36	761	36	36
8	83	741	83	83
9	153	736	153	153
10	38	729	38	38
11	143	711	143	143
12	44	705	44	44
13	166	674	166	166
14	131	653	131	131
15	68	647	68	68
16	27	626	27	27
17	105	564	105	105
18	39	558	39	39
19	184	555	184	184
20	17	548	171	171
21	147	538	147	147
22	18	516	207	205
23	207	473	207	207
24	90	465	90	90
25	154	419	184	184
26	17	382	147	147
27	171	379	171	171
28	88	313	193	193
29	160	254	303	303
30	21	244	83	83
31	60	235	105	105
32	92	189	141	141
33	66	114	676	676
34	68	113	393	393
35	126	85	188	188
36	165	66	1238	1238
37	144	35	555	555
38	247	31	617	618
39	72	24	775	775

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	144	788	144	144
2	106	754	106	106
3	93	716	93	93
4	107	659	107	107
5	121	654	121	121
6	117	652	117	117
7	168	618	168	168
8	78	605	78	78
9	131	578	131	131
10	139	512	144	144
11	97	499	98	98
12	177	489	178	178
13	149	474	150	150
14	149	429	150	150
15	125	373	128	128
16	95	360	96	96
17	117	358	246	246
18	157	346	157	157
19	144	343	144	144
20	58	330	60	60
21	68	314	69	69
22	5	301	6	6
23	113	299	114	114
24	158	258	197	197
25	122	252	165	165
26	120	241	120	120
27	88	237	93	93
28	32	214	107	107
29	106	198	262	262
30	17	163	144	144
31	94	157	106	106
32	84	156	84	84
33	66	109	107	107
34	143	65	150	150
35	44	60	550	550
36	76	42	288	288
37	138	31	878	878
38	54	12	2199	2199

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	106	751	106	106
2	171	741	171	171
3	163	730	163	163
4	21	710	21	21
5	209	684	209	209
6	40	678	40	40
7	132	672	132	132
8	74	634	74	74
9	207	597	207	207
10	186	571	186	186
11	186	552	186	186
12	162	545	162	162
13	63	525	63	63
14	7	520	7	7
15	112	508	112	112
16	138	495	138	138
17	85	462	86	86
18	138	452	138	138
19	73	435	74	74
20	191	388	214	214
21	25	339	112	112
22	39	275	186	186
23	73	271	162	162
24	43	263	63	63
25	70	220	186	186
26	101	211	353	353
27	86	192	209	209
28	74	176	162	162
29	39	160	80	80
30	38	158	264	264
31	60	149	186	186
32	185	144	260	260
33	49	114	186	186
34	136	103	136	136
35	14	97	209	209
36	178	93	186	186
37	63	78	76	76
38	164	56	716	716
39	26	54	280	280
40	73	50	80	80

CLASSE 13

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
2	4814	59	10	11474	4814	59	1	4814	59	32	10	11474	0,0000	0,0000	0,0000
3	8421	59	10	15649	8421	59	3	8441	55	87	10	11649	-0,0024	0,0678	0,2556
4	4312	63	10	13888	4312	63	2	4312	63	38	10	13888	0,0000	0,0000	0,0000

Os Problemas #1 e 5 têm solução inteira.

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0024	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0678	Máxima Diferença de Desperdício:	0,2556
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0008	Média das Diferenças:	0,0226	Média das Diferenças:	0,0852

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	4	749	4	4
2	18	618	18	18
3	7	502	7	7
4	14	480	14	14
5	16	455	16	16
6	11	452	12	12
7	10	427	10	10
8	6	374	18	18
9	3	354	7	7
10	11	304	12	12

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	9	791	9	9
2	13	762	13	13
3	3	670	12	6
4	4	557	4	4
5	8	488	8	8
6	1	323	3	3
7	3	322	3	3
8	21	315	21	21
9	22	276	24	24
10	16	263	16	16

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	8	794	8	8
2	20	753	20	20
3	10	727	10	10
4	3	705	12	12
5	6	615	6	6
6	2	492	2	2
7	6	418	6	6
8	18	291	18	18
9	9	233	12	12
10	18	211	30	30

CLASSE 14

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
2	47769	584	10	108512	47769	584	2	47769	584	32	10	108512	0,0000	0,0000	0,0000
3	84045	591	10	157594	84045	591	2	84065	587	87	10	153594	-0,0002	0,0068	0,0254
4	44442	630	10	132045	44442	630	1	44442	630	38	10	132045	0,0000	0,0000	0,0000

Os Problemas #1 e 5 têm solução inteira.

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0002	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0068	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0254
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0001	Média das Diferenças:	0,0023	Média das Diferenças:	0,0085

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	39	749	39	39
2	179	618	179	179
3	72	502	72	72
4	140	480	140	140
5	162	455	162	162
6	108	452	108	108
7	105	427	106	106
8	61	374	179	179
9	28	354	72	72
10	106	304	108	108

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	88	791	88	88
2	135	762	135	135
3	28	670	136	130
4	37	557	37	37
5	84	488	84	84
6	3	323	3	3
7	26	322	27	27
8	209	315	210	210
9	217	276	219	219
10	173	263	173	173

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	84	794	84	84
2	200	753	200	200
3	102	727	102	102
4	31	705	112	112
5	65	615	65	65
6	21	492	22	22
7	64	418	64	64
8	177	291	177	177
9	94	233	96	96
10	162	211	302	302

CLASSE 15

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
2	4459	117	10	22961	4459	118	4	4459	118	124	10	23961	0,0000	-0,0085	-0,0436
4	9497	118	10	24886	9497	118	2	9497	118	129	10	24886	0,0000	0,0000	0,0000
5	4670	134	10	27440	4670	134	2	4670	134	144	10	27440	0,0000	0,0000	0,0000

Os Problemas #1 e 3 têm solução inteira.

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0085	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0436
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0028	Média das Diferenças:	0,0145

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	17	791	17	18
2	1	777	1	1
3	9	762	9	9
4	3	756	3	3
5	7	670	7	7
6	19	659	19	19
7	13	558	13	13
8	18	557	18	18
9	16	488	16	16
10	1	434	5	5
11	8	424	13	13
12	19	323	21	21
13	10	322	12	12
14	3	315	3	3
15	6	298	6	6
16	2	276	3	3
17	6	273	6	6
18	17	269	17	17
19	9	263	19	19
20	16	209	66	67

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	789	14	14
2	2	710	2	2
3	20	661	20	20
4	8	624	8	8
5	15	596	15	15
6	2	563	9	9
7	16	555	16	16
8	8	517	8	8
9	15	490	16	16
10	2	461	2	2
11	6	429	16	16
12	9	428	9	9
13	6	389	8	8
14	6	323	6	6
15	12	308	12	12
16	16	304	18	18
17	14	300	28	28
18	12	274	15	15
19	11	260	12	12
20	6	246	6	6

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	21	790	21	21
2	20	763	20	20
3	1	730	1	1
4	17	677	17	17
5	8	621	8	8
6	5	565	5	5
7	2	558	2	2
8	9	554	9	9
9	17	548	17	17
10	12	492	12	12
11	15	461	16	16
12	19	454	20	20
13	4	445	17	17
14	5	375	8	8
15	3	373	3	3
16	16	368	16	16
17	1	318	3	3
18	15	314	15	15
19	1	298	17	17
20	9	203	56	56

CLASSE 16

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
2	44218	1161	10	218321	44218	1162	6	44218	1162	124	10	219321	0,0000	-0,0009	-0,0046
3	129020	1795	10	535420	129020	1795	1	129020	1795	126	10	535420	0,0000	0,0000	0,0000
4	93362	1165	10	236371	93362	1165	1	93362	1165	129	10	236371	0,0000	0,0000	0,0000
5	45464	1318	10	255399	45464	1318	2	45464	1318	144	10	255399	0,0000	0,0000	0,0000

O Problema #1 tem solução inteira.

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0000	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0009	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0046
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0002	Média das Diferenças:	0,0011

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	171	791	171	172
2	4	777	4	4
3	94	762	94	94
4	29	756	29	29
5	71	670	71	71
6	192	659	192	192
7	134	558	134	134
8	179	557	179	179
9	164	488	164	164
10	11	434	49	49
11	80	424	134	134
12	190	323	192	192
13	97	322	99	99
14	30	315	30	30
15	61	298	63	63
16	20	276	21	21
17	61	273	63	63
18	169	269	169	169
19	89	263	192	192
20	154	209	656	657

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	72	795	72	72
2	5	788	5	5
3	131	784	131	131
4	109	755	109	109
5	97	752	97	97
6	164	733	164	164
7	186	688	186	186
8	170	684	170	170
9	129	668	129	129
10	181	614	181	181
11	185	608	185	185
12	18	601	108	108
13	157	584	157	157
14	24	483	24	24
15	177	481	178	178
16	5	386	185	185
17	108	378	108	108
18	42	371	157	157
19	25	219	129	129
20	15	211	1043	1043

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	139	789	139	139
2	17	710	17	17
3	196	661	196	196
4	85	624	85	85
5	146	596	146	146
6	17	563	87	87
7	162	555	162	162
8	84	517	84	84
9	152	490	152	152
10	20	461	20	20
11	57	429	162	162
12	87	428	87	87
13	63	389	84	84
14	65	323	66	66
15	120	308	120	120
16	156	304	156	156
17	136	300	281	281
18	123	274	146	146
19	110	260	111	111
20	65	246	65	65

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	210	790	210	210
2	196	763	196	196
3	8	730	8	8
4	168	677	168	168
5	85	621	85	85
6	45	565	45	45
7	24	558	24	24
8	86	554	86	86
9	166	548	166	166
10	123	492	124	124
11	154	461	154	154
12	194	454	194	194
13	41	445	166	166
14	48	375	85	85
15	34	373	34	34
16	158	368	158	158
17	6	318	6	6
18	151	314	153	153
19	5	298	168	168
20	98	203	545	545

CLASSE 17

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	16264	260	10	65324	16264	260	1	16268	259	982	10	64324	-0,0002	0,0038	0,0153
2	23372	278	16	61320	23372	278	1	23372	278	431	10	61320	0,0000	0,0000	0,0000
3	6914	231	10	41566	6938	233	4	6930	233	819	10	43566	-0,0023	-0,0087	-0,0481
4	12007	243	10	46888	12017	243	2	12007	243	696	15	46888	0,0000	0,0000	0,0000
5	15240	271	10	68197	15240	271	4	15240	271	370	10	68197	0,0000	0,0000	0,0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0023	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0087	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0481
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0005	Média das Diferenças:	0,0025	Média das Diferenças:	0,0127

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	12	767	12	12
2	4	763	4	4
3	20	749	20	20
4	4	694	15	15
5	3	684	3	3
6	19	667	19	19
7	10	649	10	10
8	2	630	7	7
9	16	622	16	16
10	4	618	4	4
11	8	606	8	8
12	12	594	19	19
13	3	587	3	3
14	3	563	3	3
15	8	562	8	8
16	1	529	1	1
17	2	519	14	14
18	19	510	19	19
19	20	502	37	35
20	16	499	16	16
21	18	491	18	18
22	1	489	2	2
23	10	480	10	10
24	3	455	4	4
25	8	452	8	8
26	20	427	20	20
27	14	410	14	14
28	19	403	19	19
29	17	399	17	17
30	1	374	3	3
31	8	372	16	16
32	20	370	20	20
33	10	369	10	10
34	3	363	4	4
35	7	354	8	8
36	2	333	3	3
37	6	308	6	6
38	18	304	18	18
39	10	277	20	20
40	19	209	71	71

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	9	799	9	9
2	11	795	11	11
3	21	794	21	21
4	2	788	2	2
5	13	784	13	13
6	8	782	8	8
7	4	770	4	4
8	8	755	8	8
9	15	752	15	15
10	4	746	4	4
11	14	733	14	14
12	4	728	4	4
13	17	704	17	17
14	13	688	13	13
15	7	684	7	7
16	3	668	3	3
17	10	621	10	10
18	4	616	4	4
19	18	614	18	18
20	2	608	2	2
21	15	601	15	15
22	2	584	16	16
23	21	551	21	21
24	9	546	9	9
25	15	511	15	15
26	2	483	2	2
27	17	481	18	18
28	9	430	15	15
29	16	386	16	16
30	2	378	21	21
31	6	371	9	9
32	9	336	10	10
33	7	279	14	14
34	7	278	25	25
35	13	257	15	15
36	17	243	19	19
37	14	219	26	26
38	25	216	47	47
39	7	211	20	20

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	790	14	14
2	3	771	3	3
3	6	763	6	6
4	2	732	2	2
5	7	730	7	7
6	15	726	15	15
7	10	677	14	16
8	13	656	13	13
9	4	651	4	4
10	9	630	9	10
11	16	621	16	16
12	14	618	14	14
13	7	609	16	16
14	2	565	2	2
15	5	558	5	5
16	16	554	16	16
17	10	548	16	16
18	14	533	14	14
19	16	492	16	16
20	1	468	2	2
21	12	461	12	12
22	13	454	14	14
23	14	445	16	16
24	16	434	16	16
25	9	429	14	14
26	16	375	16	16
27	6	373	16	16
28	1	368	14	14
29	15	330	15	15
30	13	323	15	15
31	9	318	9	9
32	11	314	12	12
33	10	311	10	10
34	9	298	17	17
35	16	291	16	16
36	13	264	15	15
37	13	221	17	17
38	6	216	9	9
39	9	214	11	11
40	5	203	29	29

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	14	791	14	14
2	11	765	11	11
3	9	736	10	10
4	11	693	11	11
5	12	689	12	12
6	12	688	12	12
7	17	662	17	17
8	8	652	8	8
9	13	632	13	13
10	14	581	14	14
11	10	571	12	12
12	18	564	18	18
13	15	553	15	15
14	15	518	15	15
15	12	476	12	12
16	9	466	10	10
17	12	464	12	12
18	16	455	16	16
19	14	453	14	14
20	6	443	6	6
21	7	431	8	8
22	1	421	4	4
23	1	420	15	15
24	10	419	15	15
25	16	388	16	16
26	12	383	14	14
27	12	375	12	12
28	9	372	18	18
29	3	355	13	13
30	11	343	18	18
31	2	316	8	8
32	9	312	9	9
33	8	311	12	12
34	7	275	8	8
35	14	242	14	14
36	4	238	11	11
37	8	224	20	20
38	14	216	28	28
39	4	201	14	14

Problema#5				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	11	763	11	11
2	17	756	17	17
3	16	747	16	16
4	2	732	18	18
5	21	712	21	21
6	4	707	4	4
7	13	703	13	13
8	7	674	7	7
9	21	646	21	21
10	19	626	19	19
11	19	611	19	19
12	16	606	16	16
13	6	591	6	6
14	1	587	7	7
15	11	578	11	11
16	14	568	14	14
17	9	543	9	9
18	14	536	14	14
19	7	523	7	7
20	19	487	20	20
21	2	450	7	7
22	4	401	6	6
23	7	398	7	7
24	4	392	11	11
25	7	359	9	9
26	10	353	14	14
27	9	338	14	14
28	7	326	9	9
29	4	314	6	6
30	4	312	6	6
31	6	305	6	6
32	18	302	35	35
33	5	279	7	7
34	14	271	21	21
35	1	266	19	19
36	18	263	18	18
37	6	251	6	6
38	16	235	37	37
39	3	234	34	34
40	8	230	13	13

CLASSE 18

Problema	Branch & Bound				PHEPLI								PHEPLI / Branch & Bound		
					FASE2			FASE3			FASE2+3				
	Perda	Número de Objetos	Tempo de Execução	Desperdício	Perda	Número de Objetos	Iterações	Perda	Número de Objetos	Iterações	Tempo de Execução	Desperdício	Diferença Relativa das Perdas	Diferença Relativa do Número de Objetos	Diferença Relativa do Desperdício
1	162928	2613	10	657349	162953	2614	2	162957	2613	982	10	657349	-0,0002	0,0000	0,0000
2	235247	2786	10	612811	235247	2786	1	235247	2786	431	10	612811	0,0000	0,0000	0,0000
3	66876	2177	10	279663	66876	2177	1	66876	2177	435	10	279663	0,0000	0,0000	0,0000
4	117781	2402	10	445713	117781	2402	1	117781	2402	347	10	445713	0,0000	0,0000	0,0000
5	150121	2684	10	655858	150121	2684	1	150121	2684	370	10	655858	0,0000	0,0000	0,0000

Estatísticas

Máxima Diferença das Perdas:	0,0002	Máxima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Máxima Diferença de Desperdício:	0,0000
Mínima Diferença das Perdas:	0,0000	Mínima Diferença de Número de Objetos:	0,0000	Mínima Diferença de Desperdício:	0,0000
Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000	Média das Diferenças:	0,0000

Problema#1				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	123	767	123	123
2	42	763	42	42
3	204	749	204	204
4	40	694	153	153
5	26	684	26	26
6	194	667	194	194
7	99	649	99	99
8	22	630	79	79
9	162	622	162	162
10	42	618	42	42
11	81	606	81	81
12	124	594	200	200
13	25	587	25	25
14	34	563	34	34
15	77	562	77	77
16	3	529	3	3
17	24	519	143	143
18	192	510	192	192
19	199	502	379	377
20	158	499	158	158
21	182	491	182	182
22	4	489	4	4
23	101	480	102	102
24	31	455	32	32
25	75	452	76	76
26	205	427	205	205
27	143	410	143	143
28	191	403	191	192
29	174	399	174	174
30	12	374	34	34
31	85	372	158	158
32	203	370	203	203
33	104	369	104	104
34	31	363	31	32
35	65	354	66	66
36	22	333	24	24
37	65	308	66	66
38	179	304	179	179
39	95	277	204	204
40	162	209	710	711

Problema#2				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	94	799	94	94
2	115	795	115	115
3	212	794	212	212
4	22	788	22	22
5	128	784	128	128
6	82	782	82	82
7	36	770	36	36
8	83	755	83	83
9	153	752	153	153
10	38	746	38	38
11	143	733	143	143
12	44	728	44	44
13	166	704	166	166
14	131	688	131	131
15	68	684	68	68
16	27	668	27	27
17	105	621	105	105
18	39	616	39	39
19	184	614	184	184
20	17	608	17	17
21	147	601	147	147
22	18	584	160	160
23	207	551	207	207
24	90	546	90	90
25	154	511	154	154
26	17	483	18	18
27	171	481	172	172
28	88	430	154	154
29	160	386	160	160
30	21	378	207	207
31	60	371	90	90
32	92	336	92	92
33	66	279	144	144
34	68	278	247	247
35	126	257	147	147
36	165	243	191	191
37	144	219	270	270
38	247	216	461	461
39	72	211	199	199

Problema#3				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	135	790	135	135
2	33	771	33	33
3	60	763	60	60
4	17	732	17	17
5	71	730	71	71
6	147	726	147	147
7	103	677	104	104
8	128	656	128	128
9	40	651	40	40
10	94	630	94	94
11	159	621	159	159
12	143	618	143	143
13	72	609	72	72
14	19	565	19	19
15	51	558	51	51
16	162	554	162	162
17	104	548	163	163
18	136	533	136	136
19	161	492	162	162
20	11	468	12	12
21	122	461	122	122
22	135	454	136	136
23	142	445	162	162
24	163	434	163	163
25	92	429	136	136
26	156	375	159	159
27	58	373	143	143
28	1	368	72	72
29	149	330	150	150
30	126	323	126	126
31	93	318	93	93
32	114	314	114	114
33	104	311	104	104
34	91	298	168	168
35	162	291	163	163
36	129	264	129	129
37	126	221	164	164
38	61	216	93	93
39	93	214	109	109
40	37	203	280	280

Problema#4				
Item	Demanda	Tamanho do Item	Produção Branch & Bound	Produção PHEPLI
1	144	791	144	144
2	106	765	106	106
3	93	736	93	93
4	107	693	107	107
5	121	689	121	121
6	117	688	117	117
7	168	662	168	168
8	78	652	78	78
9	131	632	131	131
10	139	581	139	139
11	97	571	120	120
12	177	564	177	177
13	149	553	149	149
14	149	518	149	149
15	125	476	126	126
16	95	466	96	96
17	117	464	118	118
18	157	455	158	158
19	144	453	144	144
20	58	443	58	58
21	68	431	68	68
22	5	421	33	33
23	11	420	149	149
24	102	419	149	149
25	158	388	158	158
26	122	383	139	139
27	120	375	120	120
28	88	372	177	177
29	32	355	131	131
30	106	343	188	188
31	17	316	78	78
32	94	312	94	94
33	84	311	121	121
34	66	275	66	66
35	143	242	145	145
36	44	238	107	107
37	76	224	196	196
38	138	216	274	274
39	54	201	144	144

Problema#5				
<i>Item</i>	<i>Demanda</i>	<i>Tamanho do Item</i>	<i>Produção Branch & Bound</i>	<i>Produção PHEPLI</i>
1	106	763	106	106
2	171	756	171	171
3	163	747	163	163
4	21	732	178	178
5	209	712	209	209
6	40	707	40	40
7	132	703	132	132
8	74	674	74	74
9	207	646	207	207
10	186	626	186	186
11	186	611	186	186
12	162	606	162	162
13	63	591	63	63
14	7	587	73	73
15	112	578	112	112
16	138	568	138	138
17	85	543	85	85
18	138	536	138	138
19	73	523	73	73
20	191	487	192	192
21	25	450	73	73
22	39	401	63	63
23	73	398	73	73
24	43	392	112	112
25	70	359	85	85
26	101	353	138	138
27	86	338	138	138
28	74	326	75	75
29	39	314	39	39
30	38	312	39	39
31	60	305	60	60
32	185	302	348	348
33	49	279	74	74
34	136	271	207	207
35	14	266	186	186
36	178	263	178	178
37	63	251	63	63
38	164	235	372	372
39	26	234	338	338
40	73	230	132	132

Capítulo 4

Usamos C++ por ser uma linguagem mais dinâmica, inclusive o código pode ser levado para qualquer plataforma, pois o compilador para C++ é, ou senão quase, universal, e também por possuir uma grande quantidade de recursos e bibliotecas disponíveis. Porém o aprendizado se deu no percorrer do trabalho e, neste sentido, o código não está otimizado. Como já descrito no Capítulo 3, a integração de recursos como as bibliotecas algébricas ficou comprometida; ou pela inexperiência, ou pelo próprio fato de que cada um desses recursos (diga-se as bibliotecas de funções, o GLPK e outros pacotes de conteúdo) serem incompatíveis.

Em comparação com um código otimizado como é o Branch&Bound do GLPK, o nosso código implementado se mostrou bastante rápido. Afinal tanto o Branch&Bound como o PHEPLI tiveram seus tempos de execução registrados de 10 a 15 ms, e devemos considerar que o erro do contador é da ordem de 10ms.

As soluções encontradas, na sua maioria, são soluções ótimas, já que possuem o mesmo valor de função objetivo e os mesmos valores de itens produzidos. Apesar disso em vários problemas as variáveis não nulas não são as mesmas que são obtidas pelo Branch&Bound (ou seja, temos soluções alternativas). As maiores diferenças relativas encontradas tanto entre o Número de Objetos, como da Perda Total, isto é, desperdício mais excesso de produção, são em torno de 0.1, sendo que estes valores representam em material desperdiçado o equivalente a 1 ou 2 unidades de matéria prima.

Desta forma, podemos dizer que o resultado final é satisfatório, já que se alcançou o objetivo esperado de se obter boas soluções em tempos razoáveis, a baixo custo.

Como o algoritmo usado foi o padrão, ou melhor, um algoritmo geral para problemas inteiros mistos, abre-se para futuros trabalhos a busca de aprimoramento da robustez desse método para os problemas de corte em específico. Estamos estudando outros trabalhos mais recentes de métodos heurísticos, como o *Feasibility Pump*, trabalho de **Glover, Fred et. al.** [7] e o trabalho de **Belov, G. & Scheithauer, G.** [2]. Ambos podem fornecer alternativas para a estrutura do algoritmo apresentado, ou até mesmo idéias para o aprimoramento do nosso procedimento.

Referência Bibliográfica

Livros e Artigos:

- [1] BAZAARA, M.S.; JARVIS, J.J. **Linear Programming & Network Flows**. John Wiley. 1990.
- [2] BELOV, G.; SCHEITHAUER, G. **A Cutting Plane Algorithm for the One-Dimensional Cutting Stock Problem with Multiple Stock Lengths**. Preliminary Draft.
- [3] DUFF, I.S; ERISMAN, A.M; REID, J.K. **Direct Methods for Sparse Matrices**. Clarendon Press. 1986.
- [4] ECKEL, B. **Thinking in C++**. Volumes 1 & 2. Sem Editora. 2000.
- [5] GAU, T.; WÄSCHER, G. CUTGEN1: A problem generator for the Standard One-dimensional Cutting Stock Problem. **European Journal of Operation Research**. volume 84. p. 572-579, 1995.
- [6] GILMORE, P.C; GOMORY, R.E. A Linear Approach to the Cutting Stock Problem. **Operations Research**. volume 9. p. 849-859, 1961.
- [7] GLOVER, F.; MATTEO, F.; LODI, A. **The Feasibility Pump**. Preliminary Draft, 2003.
- [8] HILLIER, F.S. Efficient Heuristic Procedures for Integer Linear Programming with an Interior. **Operations Research Journal**. volume 17. p. 600-637, 1969.
- [9] HILLIER, F.S.; LIEBERMAN, G.J. **Introduction to Operations Research**. McGraw Hill. 1990.
- [10] KAUFMANN, A.; LABORDÉRE, A.H. **Integer and Mixed Programming Theory and Application**. Academic Press. 1977.
- [11] NEMHAUSER, G.L.; WOLSEY, L.A. **Integer and Combinatorial Optimization**. John Wiley & Sons. 1988.
- [12] PRESS, W.H. et al. **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. Cambridge University Press. 1992.
- [13] STROUSTRUP, B. **The C++ Programming Language**. Addison-Wesley. 1997.
- [14] VASEK, C. **Linear Programming**. WH Ferman & Company. 1983.
- [15] YANASSE, HORACIO H. et al. **Mini Curso: O Problema de Corte e Empacotamento e Aplicações Industriais**, 1997.

Referências da Web:

- [16] <http://www.boost.org/>
- [17] <http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html>
- [18] <http://math.nist.gov/lapack++/>
- [19] <http://www.mathworks.com/>