
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Distribuições Temperadas
e Cálculo Estocástico**

por

Luis Roberto Lucinger de Almeida [†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Pedro José Catuogno

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Distribuições Temperadas e Cálculo Estocástico

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Luis Roberto Lucinger de Almeida** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de Março de 2008.



Prof. Dr. Pedro José Catuogno
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Pedro José Catuogno.

Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran.

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Almeida, Luis Roberto Lucinger de
AL64d Distribuições temperadas e cálculo estocástico / Luis Roberto
Lucinger de Almeida -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Pedro José Catuogno

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise estocástica. 2. Teoria das distribuições (Análise funcional). 3. Processo estocástico. I. Catuogno, Pedro José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Tempered distributions and stochastic calculus.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Stochastic analysis. 2. Functional analysis.
3. Stochastic processes.

Área de concentração: Análise Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran (UFBA)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 17/03/2008

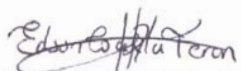
Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de março de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'Pedro José Catuogno', written over a horizontal line.

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'Edson Alberto Coayla Teran', written over a horizontal line.

Prof. (a). Dr (a). EDSON ALBERTO COAYLA TERAN

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'Paulo Regis Caron Ruffino', written over a horizontal line.

Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

AGRADECIMENTOS

À minha família, que sempre me apoiou e sempre me deu suporte em todos os momentos da minha vida.

À minha noiva Bianca, por ficar do meu lado todo esse tempo, e mesmo assim ainda querer se casar comigo.

Aos amigos que fiz nesses anos, pelo apoio acadêmico, pela amizade espetacular e, principalmente, pela companhia. Em particular, Thiago F. F., Ricardo M. M., Durval J. T., Adilson E. P., Mazilio C. M.. Em especial, aos que moraram ou ainda moram comigo, Mauricio Y. M., Diogo D. S. S., Welington V. A., João P. B., Anderson L. A. A., Lino A. S. G., Mateus A., Mayk V. C..

À todos os professores com que tive contato, em especial ao meu orientador, por sua sabedoria tanto como matemático quanto como orientador, e, principalmente, pela grande pessoa que é.

Aos funcionários do Imecc, principalmente aos da secretaria de pós-graduação.

E à todos aqueles que me ajudaram, direta ou indiretamente, MUITO OBRIGADO!

Resumo

Nessa dissertação, demonstraremos uma fórmula de Itô para distribuições temperadas, ou seja, para uma distribuição F em $\mathcal{S}'$. Para tanto, apresentaremos a teoria das distribuições temperadas e do cálculo estocástico necessária para esta finalidade.

Abstract

In this work, we will prove an Itô formula for tempered distributions, that is, for a distribution F in $\mathcal{S}'$. To achieve this, we will introduce the theory of tempered distributions and of stochastic calculus that will be needed.

Índice

Introdução	1
1 Distribuições temperadas	2
1.1 Espaços localmente convexos	2
1.2 Espaço de Fréchet	9
1.3 O espaço de Schwartz e as distribuições temperadas	11
1.4 Funções de Hermite	17
2 Probabilidade e cálculo estocástico	28
2.1 Conceitos básicos	28
2.2 Movimento Browniano	31
2.3 Fórmula de Itô	34
2.4 Integração estocástica	36
3 Uma fórmula de Itô para as distribuições temperadas	42
3.1 Ruído branco	42
3.2 A transformada S	46
3.3 Funções generalizadas	51
3.4 Composição com distribuições temperadas	54
3.5 Lema de Itô	61
A Apêndice	66
A.1 Resultados sobre polinômios de Hermite, e um resultado de K. Itô	66
A.2 Espaços de Sobolev e convoluções	70

Introdução

Kyosi Itô (1915 -) é um matemático japonês que, em 1951, introduziu a famosa fórmula de Itô, que pode ser interpretada como uma versão do teorema fundamental do cálculo e possui aplicações tanto em matemática e probabilidade, quanto em economia.

No primeiro capítulo, introduziremos um pouco da teoria das distribuições temperadas, que é o dual do espaço de Schwartz das funções de rápido decaimento. Começaremos com os espaços vetoriais topológicos e algumas de suas propriedades, e, terminaremos com os teoremas de representação para o espaço de Schwartz e as distribuições temperadas, onde se fará necessária um pouco da teoria das funções de Hermite.

No capítulo seguinte, apresentaremos a teoria probabilística necessária para o cálculo estocástico. Além disso, introduziremos o processo conhecido como movimento Browniano e alguns resultados do cálculo estocástico que utilizaremos para a demonstrar a fórmula de Itô e a integral de estocástica.

No terceiro e último capítulo, introduziremos os conceitos básicos da teoria do ruído branco (White Noise Analysis) e daremos a definição da composição de uma distribuição temperada com um movimento Browniano, baseado na expansão das distribuições temperadas tratada no primeiro capítulo. Por fim, demonstraremos uma extensão da fórmula de Itô, devido à A. Russek [12] e I. Kubo [4], para distribuições temperadas.

Por fim, no apêndice, apresentaremos brevemente a teoria dos espaços de Sobolev, convolução e algumas propriedades dos polinômios de Hermite.

Capítulo 1

Distribuições temperadas

Neste capítulo, introduziremos o espaço de Schwartz, as distribuições temperadas e algumas de suas propriedades. Além disso, demonstraremos seus respectivos teoremas de representação, onde estão envolvidas as funções de Hermite. Tais espaços serão muito importantes no desenvolvimento do capítulo 3.

1.1 Espaços localmente convexos

Aqui, apresentaremos os espaços vetoriais topológicos e algumas de suas propriedades elementares.

Definição 1.1.1 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma aplicação $\rho : V \rightarrow [0, \infty)$ é dita uma *seminorma* em V se possui as seguintes propriedades:

- (i) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$;
- (ii) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$;

para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Sejam A um conjunto de índices qualquer e $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de seminormas tal que:

- (iii) $\rho_\alpha(x) = 0$, para todo $\alpha \in A$, implica $x = 0$.

Dizemos que tal família *separa pontos*.

Definição 1.1.2 Um *espaço localmente convexo* é um par $(X, \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A})$ onde X é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e ρ_α é uma família de seminormas em X que separa pontos. A *topologia natural* num espaço localmente convexo é a topologia mais fraca, na qual todas as seminormas ρ_α são contínuas. Nesta topologia, a operação de adição também é contínua.

Por exigirmos que, num espaço localmente convexo, as seminormas separem pontos, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 A topologia natural num espaço localmente convexo é Hausdorff.

Demonstração: Trivial. □

Definição 1.1.4 Na topologia natural de um espaço localmente convexo $(X, \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A})$, a base de vizinhanças do 0 é formada pelos conjuntos

$$\{N_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A; \varepsilon > 0\},$$

onde

$$N_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon} = \{x \in X \mid \rho_{\alpha_i}(x) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Proposição 1.1.5 Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para $x \in X$ se, e somente se, $\rho_\alpha(x_\lambda - x)$ converge para 0, para todo $\alpha \in A$.

Demonstração: Basta observar que se N é uma vizinhança do 0, então o conjunto $x + N = \{x + y \mid y \in N\}$ é uma vizinhança de x . □

Definição 1.1.6 Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ num espaço localmente convexo X é dita ser de *Cauchy* quando para todo $\varepsilon > 0$, e cada seminorma ρ_α , existir $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\rho_\alpha(x_\lambda - x_{\lambda'}) < \varepsilon$ se $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. X é dito *completo* quando toda rede de Cauchy converge.

Definição 1.1.7 Duas famílias de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$ num espaço vetorial X são ditas *equivalentes* se elas geram a mesma topologia.

Proposição 1.1.8 Sejam $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$ duas famílias de seminormas num espaço vetorial X . São equivalentes:

(a) $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$ são famílias equivalentes de seminormas;

(b) Cada ρ_α é contínua na topologia gerada pela família $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$ e cada d_β é contínua na topologia gerada pela família $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$;

(c) Para cada $\alpha \in A$, existem $\beta_1, \dots, \beta_n \in B$ e $C > 0$ tais que, para todo $x \in X$,

$$\rho_\alpha(x) \leq C(d_{\beta_1}(x) + \dots + d_{\beta_n}(x)),$$

e para cada $\beta \in B$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in A$ e $D > 0$ tais que, para todo $x \in X$,

$$d_\beta(x) \leq D(\rho_{\alpha_1}(x) + \dots + \rho_{\alpha_m}(x)).$$

Demonstração: É fácil ver que (a) $\Leftrightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Como cada ρ_α é contínua na topologia gerada por $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$, segue que dados $\alpha \in A$ e $\delta > 0$, existe uma vizinhança $N_{\beta_1, \dots, \beta_n; \varepsilon} \subset X$ tal que se $y \in N_{\beta_1, \dots, \beta_n; \varepsilon}$, então $\rho_\alpha(y) < \delta$. Dado $x \in X$, considere

$$y = \frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{d_{\beta_1}(x) + \dots + d_{\beta_n}(x)}.$$

Logo, $y \in N_{\beta_1, \dots, \beta_n; \varepsilon}$, e assim, $\rho_\alpha(y) < \delta$, donde segue que

$$\rho_\alpha(x) \leq C(d_{\beta_1}(x) + \dots + d_{\beta_n}(x)).$$

A desigualdade para d_β se mostra de maneira análoga.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sejam $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Sejam $C > 0$ e $\beta_1, \dots, \beta_n \in B$ tais que

$$\rho_\alpha(x - x_0) < C(d_{\beta_1}(x - x_0) + \dots + d_{\beta_n}(x - x_0)),$$

para todo $x \in X$. Como cada d_{β_i} é contínua na topologia gerada por $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$, segue que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe vizinhança $\mathcal{V}_{x_0}^i$ de x_0 em X tal que

$$d_{\beta_i}(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{nC},$$

para todo $x \in \mathcal{V}_{x_0}^i$. Assim, tomando $\mathcal{V}_{x_0} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_{x_0}^i$ segue que

$$\rho_\alpha(x - x_0) < \varepsilon,$$

para todo $x \in \mathcal{V}_{x_0}$. Portanto, cada ρ_α é contínua na topologia gerada por $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$.

Analogamente, cada d_β é contínua na topologia gerada pela família $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$. $\square$

Definição 1.1.9 Seja $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de seminormas num espaço vetorial V . Dizemos que ρ_α é uma *família dirigida de seminormas* se, para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ existir $\gamma \in A$ e $C > 0$ tais que

$$\rho_\alpha(x) + \rho_\beta(x) \leq C\rho_\gamma(x),$$

para todo $x \in V$.

Observação 1.1.10 Se $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família dirigida, então os conjuntos da forma

$$\{x \mid \rho_\alpha(x) < \varepsilon\},$$

onde $\alpha \in A$ e $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças do 0.

Proposição 1.1.11 *Seja $(X, \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A})$ um espaço localmente convexo. Então, existe uma família dirigida de seminormas $\{d_F\}_{F \in B}$ que é equivalente à família $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$.*

Demonstração: Seja $B = \{F \subset A \mid F \text{ é finito}\}$ e defina, para cada $F \in B$, $d_F = \sum_{\alpha \in F} \rho_\alpha$. A equivalência se segue da Proposição 1.1.8, observando que cada d_F é contínua na topologia gerada por $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$, e vice-versa. Para mostrar que $\{d_F\}_{F \in B}$ é dirigida, basta ver que, dados $E, F \in B$, tem-se $d_E(x) + d_F(x) \leq d_{E \cup F}(x)$, para todo $x \in X$. $\square$

Sabemos que uma aplicação linear entre espaços normados é contínua se, e somente se, é limitada. Aqui, temos um resultado similar:

Teorema 1.1.12 *Sejam $(X, \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A})$ e $(Y, \{d_\beta\}_{\beta \in B})$ espaços localmente convexos. Uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para qualquer $\beta \in B$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ e $C > 0$ tais que*

$$d_\beta(T(x)) \leq C(\rho_{\alpha_1}(x) + \dots + \rho_{\alpha_n}(x)),$$

para todo $x \in X$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $\beta \in B$. Como $T(0) = 0$, T é contínua e $\mathcal{V} = \{y \in Y \mid d_\beta(y) < 1\}$ é vizinhança de $0 \in Y$, segue que existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $0 \in X$ tal que $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\mathcal{U} = N_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon}$. Dado $x \in X$, segue que

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\rho_{\alpha_1}(x) + \dots + \rho_{\alpha_n}(x)} \in \mathcal{U},$$

e portanto, $T(\bar{x}) \in \mathcal{V}$, isto é,

$$d_\beta(T(x)) \leq C(\rho_{\alpha_1}(x) + \cdots + \rho_{\alpha_n}(x)),$$

onde $C = \frac{2}{\varepsilon}$.

($\Leftarrow$) Sejam $x \in X$ e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede que converge para x . Logo, para qualquer $\beta \in B$, temos

$$d_\beta(T(x_\lambda) - T(x)) \leq C(\rho_{\alpha_1}(x_\lambda - x) + \cdots + \rho_{\alpha_n}(x_\lambda - x)) \rightarrow 0.$$

Então, $T(x_\lambda) \rightarrow T(x)$, mostrando que T é contínua em x . $\square$

Corolário 1.1.13 *Se a família $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ for dirigida, T é contínua se, e somente se, para qualquer $\beta \in B$, existem $\alpha \in A$ e $D > 0$ tais que*

$$d_\beta(T(x)) \leq D\rho_\alpha(x),$$

para todo $x \in X$.

Definição 1.1.14 Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto $C \subset V$ é

- (i) *convexo*, se para quaisquer $x, y \in C$ e $0 \leq t \leq 1$, tivermos $tx + (1 - t)y \in C$;
- (ii) *equilibrado*, se para quaisquer $x \in C$ e $|\lambda| \leq 1$, tivermos $\lambda x \in C$;
- (iii) *absorvente*, se $\bigcup_{t>0} tC = V$, ou seja, se para qualquer $x \in V$, tivermos que $tx \in C$ para algum $t > 0$.

Proposição 1.1.15 *Se $(X, \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A})$ é um espaço localmente convexo, então cada vizinhança do 0 da forma $N_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon}$ é um conjunto convexo, equilibrado e absorvente.*

Demonstração: Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ e $\varepsilon > 0$. Considere $N = N_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon}$. Então:

N é convexo, pois dados $x, y \in N$ e $t \in [0, 1]$, segue que para qualquer $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \rho_j(tx + (1 - t)y) &= t\rho_j(x) + (1 - t)\rho_j(y) \\ &< t\varepsilon + (1 - t)\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

N é equilibrado, pois dados $x \in N$ e $|\lambda| \leq 1$, segue que para qualquer $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}\rho_j(\lambda x) &= |\lambda| \rho_j(x) \\ &\leq \rho_j(x) \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

N é absorvente. De fato, seja $x \in X$. Se $\rho_j(x) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, então $x = 1x \in \bigcup_{t>0} tN$. Por outro lado, suponha que, $\rho_j(x) \neq 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $\frac{1}{t} = \frac{\varepsilon}{2 \rho_1(x) + \dots + \rho_n(x)} > 0$, e $\rho_j(\frac{1}{t}x) < \varepsilon$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Sendo assim, $x = ty$, para algum $y \in N$, donde se segue que $X \subset \bigcup_{t>0} tN$. Portanto, $X = \bigcup_{t>0} tN$. $\square$

Estamos interessados em mostrar a recíproca desta proposição. Para tanto, precisaremos de um lema auxiliar, sobre o funcional de Minkowski.

Definição 1.1.16 Seja C um subconjunto absorvente de um espaço vetorial V tal que se $x \in C$ e $0 \leq t \leq 1$, então $tx \in C$. Definimos o *funcional de Minkowski* (ou *calibre*) de C como sendo a aplicação $\rho : V \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \inf\{\lambda \mid x \in \lambda C\} \\ &= (\sup\{\mu \mid \mu x \in C\})^{-1}.\end{aligned}$$

Lema 1.1.17 *Seja $C \subset V$ como na Definição 1.1.16, e seja $\rho : V \rightarrow [0, \infty)$ o funcional de Minkowski de C . Temos:*

- (a) *Se $t \geq 0$, então $\rho(tx) = t\rho(x)$;*
- (b) *Se C é convexo, então $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$;*
- (c) *Se C é equilibrado, então $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$;*
- (d) $\{x \mid \rho(x) < 1\} \subset C \subset \{x \mid \rho(x) \leq 1\}$.

Demonstração: (a) Dados $x \in V$ e $t \geq 0$, seja $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda_0 C$. Logo, $tx \in t\lambda_0 C$, e assim,

$$\rho(tx) = \inf\{\lambda \mid tx \in \lambda C\} \leq t\lambda_0,$$

isto é, $\rho(tx) \leq t\lambda$, para qualquer $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda C$. Então,

$$\rho(tx) \leq t \inf\{\lambda \mid x \in \lambda C\} = t\rho(x).$$

Analogamente, trocando t por $\frac{1}{t}$ e x por tx , obtemos

$$\rho\left(\frac{1}{t}tx\right) \leq \frac{1}{t}\rho(tx).$$

Portanto, $\rho(tx) = t\rho(x)$.

(b) Sejam $x, y \in V$. Considere $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que $x \in \lambda_1 C$ e $y \in \lambda_2 C$. Note que, se $z \in (\lambda_1 + \lambda_2)C$, então $z = \lambda_1 v + \lambda_2 v$, para algum $v \in C$, e assim, $z \in \lambda_1 C + \lambda_2 C$. Por outro lado, se $z \in \lambda_1 C + \lambda_2 C$, então $z = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, com $v_1, v_2 \in C$. Como C é convexo, segue que $w = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}v_2 \in C$, e portanto, $z = (\lambda_1 + \lambda_2)w \in (\lambda_1 + \lambda_2)C$. Sendo assim, $\lambda_1 C + \lambda_2 C = (\lambda_1 + \lambda_2)C$. Segue de $x \in \lambda_1 C$ e $y \in \lambda_2 C$ que existem $u, v \in C$ tais que $x = \lambda_1 u$ e $y = \lambda_2 v$. Logo, $x + y = \lambda_1 u + \lambda_2 v \in \lambda_1 C + \lambda_2 C = (\lambda_1 + \lambda_2)C$. Então, $\rho(x + y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$, ou seja, $\rho(x + y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que $x \in \lambda_1 C$ e $y \in \lambda_2 C$. Portanto,

$$\begin{aligned} \rho(x + y) &\leq \inf\{\lambda \mid x \in \lambda C\} + \inf\{\lambda \mid y \in \lambda C\} \\ &= \rho(x) + \rho(y). \end{aligned}$$

(c) Sejam $x \in V$ e λ um escalar. Se $x = 0$ ou $\lambda = 0$, então a igualdade é satisfeita, pois $\rho(0) = 0$. Suponha então $x \neq 0$ e $\lambda \neq 0$. Considere $\mu > 0$ tal que $x \in \mu C$. Assim, $x = \mu v$, para algum $v \in C$. Logo, $\frac{x}{\mu} = v \in C$, e como $\frac{\lambda}{|\lambda|}$ tem norma 1, segue que $\frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{x}{\mu} \in C$, pois C é equilibrado. Resulta que $\lambda x \in (|\lambda|\mu)C$. Então,

$$\begin{aligned} \rho(\lambda x) &= \inf\{\nu \mid \lambda x \in \nu C\} \\ &\leq |\lambda|\mu \\ &\leq |\lambda|\inf\{\nu \mid x \in \nu C\} \\ &= |\lambda|\rho(x). \end{aligned}$$

Analogamente, trocando λ por $\frac{1}{\lambda}$ e x por λx , segue que

$$\rho\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right|\rho(\lambda x).$$

Portanto,

$$\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x).$$

(d) Seja $x \in C$. Como $1 \in \{\lambda \mid x \in \lambda C\}$, segue que $\rho(x) \leq 1$. Logo, $C \subset \{x \mid \rho(x) \leq 1\}$. Por outro lado, seja x tal que $\rho(x) < 1$. Então, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $x \in \lambda C$. Assim, $\frac{1}{\lambda}x \in C$. Como C é absorvente, concluímos que $x = \lambda(\frac{1}{\lambda}x) \in C$, isto é, $\{x \mid \rho(x) < 1\} \subset C$. □

Teorema 1.1.18 *Seja V um espaço vetorial com uma topologia Hausdorff, tal que a adição e a multiplicação por escalar são funções contínuas. Então V é um espaço localmente convexo se, e somente se, 0 possui uma base de vizinhanças formada por conjuntos que são convexos, equilibrados e absorventes.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Proposição 1.1.15.

$(\Rightarrow)$ Seja $\mathcal{U}$ tal base. Para cada $U \in \mathcal{U}$, seja ρ_U seu funcional de Minkowski. Pelos itens (b) e (c) do Lema 1.1.17, segue que $\{\rho_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ é uma família de seminormas em V . Denote por τ_ρ a topologia gerada por essa família e por τ a topologia de V . Pelo item (d) do Lema 1.1.17, temos que

$$\{x \mid \rho_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x \mid \rho_U(x) \leq 1\}.$$

Como a multiplicação por escalar é uma aplicação contínua, segue que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\{x \mid \rho_U(x) < \varepsilon\} \subset \varepsilon U \subset \{x \mid \rho_U(x) \leq \varepsilon\},$$

para cada $U \in \mathcal{U}$. Sendo assim, τ e τ_ρ coincidem no 0 . Logo, como a adição é uma aplicação contínua, τ e τ_ρ coincidem em todo ponto de V . Portanto, $\tau = \tau_\rho$. $\square$

1.2 Espaço de Fréchet

Nesta seção, falaremos sobre espaços localmente convexos completos. Fato esse que está relacionado com a metrizabilidade.

Teorema 1.2.1 *Seja X um espaço localmente convexo. São equivalentes:*

- (a) X é metrizável;
- (b) 0 possui uma base enumerável de vizinhanças;
- (c) A topologia em X é gerada por uma família enumerável de seminormas.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Tome $\{B(0; r) \mid r \in \mathbb{Q}\}$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Seja $\mathcal{U}$ tal base de vizinhanças. Pelo Teorema 1.1.18, podemos supor que cada $U \in \mathcal{U}$ é convexo, equilibrado e absorvente, pois X é um espaço localmente convexo. Então,

$$\{\rho_U \mid U \in \mathcal{U}\},$$

onde ρ_U é o funcional de Minkowski de U , é uma família de seminormas em X que gera sua topologia.

(c) $\Rightarrow$ (a) Seja $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ a família enumerável de seminormas que gera a topologia de X . Defina, para $x, y \in X$,

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)}.$$

Para provar que ρ é uma métrica em X , basta observar que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$ e que a função $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{t}{1+t} \in \mathbb{R}$ é crescente (pois possui derivada estritamente positiva). Resta mostrar que as topologias coincidem. Para tanto, provemos as seguintes afirmações:

(i) Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tais que $N_{n_1, \dots, n_k; \delta} \subset B(0; \varepsilon)$.

De fato, se $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$, então $N_{1, \dots, n_0; \frac{\varepsilon}{2}} \subset B(0; \varepsilon)$.

(ii) Dado $N_{n_1, \dots, n_k; \varepsilon}$, existe $\delta > 0$ tal que $B(0; \delta) \subset N_{n_1, \dots, n_k; \varepsilon}$.

Vamos encontrar um δ conveniente. Sejam $\delta > 0$ e $x \in B(0; \delta)$. Então $2^{-j} \rho_j(x) < (1 + \rho_j(x))\delta$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Em particular, $(1 - 2^{n_j} \delta) \rho_{n_j}(x) < 2^{n_j} \delta$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Como

$$1 - 2^{n_j} \delta > 0 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{2^{n_j}},$$

seja $\delta > 0$ tal que $\delta < \min \left\{ \frac{1}{2^{n_j}} \mid j \in \{1, \dots, k\} \right\}$. Resulta que, se $x \in B(0; \delta)$, então $\rho_{n_j}(x) < \frac{2^{n_j} \delta}{1 - 2^{n_j} \delta}$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Como $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{2^{n_j} \delta}{1 - 2^{n_j} \delta} = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $\frac{2^{n_j} \delta}{1 - 2^{n_j} \delta} < \varepsilon$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. E, para este δ , temos que $B(0; \delta) \subset N_{n_1, \dots, n_k; \varepsilon}$, o que prova (ii).

Isso mostra que as topologias coincidem no 0. Utilizando o fato de que a adição é contínua, segue que as topologias coincidem em qualquer ponto, terminando a demonstração. □

Proposição 1.2.2 *Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é de Cauchy na métrica ρ (do Teorema 1.2.1) se, e somente se, é de Cauchy em cada ρ_n .*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Dado $\delta > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \delta$, para todos $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Em particular, $(1 - 2^n \delta) \rho_n(x_\lambda - x_{\lambda'}) < 2^n \delta$, para todos $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Procedendo como na demonstração do Teorema 1.2.1, existe $\delta > 0$ tal que $1 - 2^n \delta > 0$ e $\frac{2^n \delta}{1 - 2^n \delta} < \varepsilon$. Para este δ , existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\rho_n(x_\lambda - x_{\lambda'}) < \frac{2^n \delta}{1 - 2^n \delta} < \varepsilon,$$

para todos $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$, mostrando que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é de Cauchy em ρ_n .

($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótese, para cada $n \in \{1, \dots, n_0\}$, existe $\lambda_n \in \Lambda$ tal que $\rho_n(x_\lambda - x_{\lambda'}) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todos $\lambda, \lambda' \geq \lambda_n$. Logo, tomando $\lambda_0 = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_0}\}$, segue que

$$\rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < \varepsilon,$$

para todos $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$, isto é, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é de Cauchy em ρ . $\square$

Corolário 1.2.3 *Seja X um espaço localmente convexo metrizável. Então X é completo como espaço métrico se, e somente se, é completo como espaço localmente convexo.*

Definição 1.2.4 Chamamos de *espaço de Fréchet* à um espaço localmente convexo metrizável completo.

1.3 O espaço de Schwartz e as distribuições temperadas

Introduziremos nesta seção, o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$ e seu dual $\mathcal{S}'$, o espaço das distribuições temperadas, além da derivada fraca, ou derivada no sentido de distribuições.

Vamos começar convencionando algumas notações, para não carregar a definição.

I_+^n denotará o conjunto dos multi-índices, ou seja, o conjunto $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Denotaremos o produto $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ por x^α , e $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Por fim, D^α denotará a seguinte derivada parcial:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.3.1 O *espaço de Schwartz*, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é o espaço das funções $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que são C^∞ e tais que

$$\|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty,$$

para todos $\alpha, \beta \in I_+^n$.

Observação 1.3.2 As funções de $\mathcal{S}$ são aquelas que, juntamente com suas derivadas, decrescem mais rapidamente que o inverso de qualquer polinômio, ou seja, se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e P é um polinômio em $\mathbb{R}^n$, então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

para todo $\alpha \in I_+^n$.

Exemplo 1.3.3 Se $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, então $\varphi \in \mathcal{S}$.

Exemplo 1.3.4 Se φ é uma função C^∞ de suporte compacto, então $\varphi \in \mathcal{S}$.

Lema 1.3.5 $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in I_+^n\}$ é uma família de seminormas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que separa pontos.

Demonstração: Imediato. □

Teorema 1.3.6 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\alpha,\beta})$ é um espaço de Fréchet.

Demonstração: Como I_+^n é enumerável, segue que a família $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}$ é enumerável, e então, $\mathcal{S}$ é metrizável, pelo Teorema 1.2.1. Mostremos agora a completude. Seja (φ_m) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{S}$. Segue da Proposição 1.2.2 que (φ_m) é de Cauchy em cada seminorma $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$. Denote por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ do supremo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_m - \varphi_{m'}\|_{\alpha,\beta} < \varepsilon$, para todos $m, m' \geq 0$. Isso implica que

$$\|x^\alpha D^\beta \varphi_m - x^\alpha D^\beta \varphi_{m'}\|_\infty < \varepsilon,$$

para todos $m, m' \geq m_0$, mostrando que $(x^\alpha D^\beta \varphi_m)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, que é completo. Logo, para cada $\alpha, \beta \in I_+^n$, existe $g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$g_{\alpha,\beta} = \lim_{m \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta \varphi_m,$$

onde a convergência é uniforme. Vamos agora, dividir em dois casos:

($n = 1$) Pelo teorema fundamental do cálculo, segue que

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(0) + \int_0^x \varphi'_m(t) dt.$$

Como $\varphi'_m(x)$ converge uniformemente para $g_{0,1}$, obtemos, fazendo $m \rightarrow \infty$ na igualdade acima, que

$$g_{0,0}(x) = g_{0,0}(0) + \int_0^x g_{0,1}(t) dt.$$

Isto mostra que $g_{0,0}$ é C^1 . Da mesma maneira, como

$$\varphi'_m(x) = \varphi'_m(0) + \int_0^x \varphi''_m(t) dt,$$

segue que

$$g_{0,1}(x) = g_{0,1}(0) + \int_0^x g_{0,2}(t)dt.$$

Portanto, $g_{0,0}$ é C^2 , pois $g_{0,0}'' = g_{0,1}' = g_{0,2}$. Continuando esse processo, obtemos que $g_{0,0}$ é C^k e que $g_{0,0}^{(k)} = g_{0,k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $g_{0,0}$ é C^∞ . Por outro lado, segue da convergência uniforme que

$$g_{\alpha,\beta} = \lim_{m \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta \varphi_m = x^\alpha D^\beta \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m = x^\alpha D^\beta g_{0,0}.$$

Então, para todo $m \geq m_0$,

$$\|x^\alpha D^\beta g_{0,0}\|_\infty \leq \|g_{\alpha,\beta} - x^\alpha D^\beta \varphi_m\|_\infty + \|x^\alpha D^\beta \varphi_m\|_\infty < \infty,$$

pois $\|g_{\alpha,\beta} - x^\alpha D^\beta \varphi_m\|_\infty < \varepsilon$ e $\|x^\alpha D^\beta \varphi_m\|_\infty < \infty$. Isto é, $g_{0,0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e, para todos $\alpha, \beta \in I_+^1$, $\|g_{0,0} - \varphi_m\|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0$.

(n qualquer) Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Então, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_m(x + te_j) = \varphi_m(x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_m(x + se_j) ds.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, resulta que

$$g_{0,0}(x + te_j) = g_{0,0}(x) + \int_0^t g_{0,e_j}(x + se_j) ds.$$

Logo $\frac{\partial}{\partial x_j} g_{0,0} = g_{0,e_j}$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Então, cada derivada parcial de $g_{0,0}$ é contínua, ou seja, $g_{0,0}$ é de classe C^1 . Repetindo o processo, concluimos que $g_{0,0}$ é de classe C^∞ . E, como no caso anterior, $g_{0,0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi_m \rightarrow g_{0,0}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, provando a completude. $\square$

Definição 1.3.7 O espaço dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é chamado de *espaço das distribuições temperadas* e denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.3.8 (a) O dual topológico de um determinado espaço vetorial, é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos nele definidos.

(b) Ao invés de denotarmos por $T(\varphi)$ a distribuição temperada T aplicada na função $\varphi \in \mathcal{S}$, utilizaremos a notação $\langle T, \varphi \rangle$. Alguns autores dizem, nesse caso, que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par de dualidade entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

Exemplo 1.3.9 ($\mathcal{S}$) Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Defina o funcional $\langle \psi, \cdot \rangle : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x) dx.$$

É fácil ver que $\langle \psi, \cdot \rangle$ é linear. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} |\langle \psi, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx \\ &= \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{\infty}, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, onde $\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_{0,0}$. Logo, $\langle \psi, \cdot \rangle \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Note que a primeira desigualdade acima vale se $\psi \varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Além disso, para concluir a continuidade foi usado que $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$. Tais fatos são conseqüências do próximo exemplo.

Exemplo 1.3.10 (L^p) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é subespaço de cada $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.

($p = 1$) Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} (1+x^2) |\varphi(x)| dx \\ &\leq \pi (\|\varphi\|_{\infty} + \|x^2 \varphi\|_{\infty}) \\ &= \pi (\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0}), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{S} \subset L^1$.

($1 < p < \infty$) Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^p} &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\varphi(x)|^{\frac{1}{p}} |\varphi(x)|^{-\frac{1}{p}} |\varphi(x)| \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| \left(|\varphi(x)|^{1-\frac{1}{p}} \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\varphi\|_{\infty}^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{S} \subset L^p$.

Exemplo 1.3.11 (Função delta) Seja $x \in \mathbb{R}$. Defina

$$\begin{aligned}\delta_x : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x)\end{aligned}$$

ou seja, $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$.

$\delta_x \in \mathcal{S}'$, pois é linear e

$$|\langle \delta_x, \varphi \rangle| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{0,0}.$$

Exemplo 1.3.12 (δ') Defina

$$\begin{aligned}\delta' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto -\varphi'(0)\end{aligned}$$

ou seja, $\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$.

$\delta' \in \mathcal{S}'$, pois é linear e

$$|\langle \delta', \varphi \rangle| = |\varphi'(0)| \leq \|\varphi\|_{0,1}.$$

Exemplo 1.3.13 Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Defina $\langle g, \cdot \rangle : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ como no Exemplo 1.3.9.

$\langle g, \cdot \rangle \in \mathcal{S}'$, pois

$$\begin{aligned}|\langle g, \varphi \rangle| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x\varphi(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} (1+x^2) |x\varphi(x)| dx \\ &\leq (\|\varphi\|_{1,0} + \|\varphi\|_{3,0}) \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} dx \\ &= \pi(\|\varphi\|_{1,0} + \|\varphi\|_{3,0}).\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.14 (Função de Heaviside) $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Novamente como em 1.3.9, $\langle H, \cdot \rangle$ define uma distribuição temperada. A prova disso é análoga à do Exemplo 1.3.13.

Definição 1.3.15 Sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in I_+^n$. A *derivada fraca*, $D^\alpha T$ (ou *derivada no sentido de distribuições*), é definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Vamos aplicar diretamente a definição para calcular as respectivas derivadas fracas dos exemplos acima.

Exemplo 1.3.16 (g) Note primeiramente que g não é diferenciável no ponto 0, no sentido clássico. Porém, se $\varphi \in \mathcal{S}$, obtemos através de integração por partes que:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} g, \varphi \right\rangle &= (-1) \left\langle g, \frac{d}{dx} \varphi \right\rangle \\ &= - \int_0^\infty x \varphi'(x) dx \\ &= - [x \varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty \varphi(x) dx \\ &= 0 + \int_{-\infty}^\infty H(x) \varphi(x) dx \\ &= \langle H, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Isto é, $\frac{d}{dx} g = H$.

Exemplo 1.3.17 (H) Dada $\varphi \in \mathcal{S}$, segue que:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} H, \varphi \right\rangle &= (-1) \left\langle H, \frac{d}{dx} \varphi \right\rangle \\ &= - \int_0^\infty \varphi'(x) dx \\ &= - [\varphi(x)]_0^\infty \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Logo, $\frac{d}{dx} H = \delta_0$.

Exemplo 1.3.18 (δ_0) Pada $\varphi \in \mathcal{S}$, temos que:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} \delta_0, \varphi \right\rangle &= (-1) \left\langle \delta_0, \frac{d}{dx} \varphi \right\rangle \\ &= -\varphi'(0). \end{aligned}$$

Então, $\frac{d}{dx} \delta_0 = \delta'$.

Tais exemplos mostram que, até mesmo δ , que não é uma função, pode ser escrita como derivada segunda de alguma função contínua. Tal fenômeno é típico para as distribuições temperadas. É o que afirma o seguinte teorema.

Teorema 1.3.19 (Teorema de regularidade para distribuições) *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então, existem $\beta \in I_+^n$ e uma função contínua e polinomialmente limitada g tais que $T = D^\beta g$. Isto é*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\beta|} g(x) (D^\beta \varphi)(x) dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}$.

Este teorema pode ser demonstrado através de um resultado que identifica o espaço de Schwartz com um espaço de seqüência, que é o resultado principal deste capítulo.

1.4 Funções de Hermite

Aqui, demonstraremos, enfim, a N -representação para $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$. Introduziremos inicialmente em $\mathcal{S}$, uma família de seminormas equivalente à família de normas de L^2 . Em seguida, trabalharemos com as funções de Hermite.

Começaremos fazendo a seguinte distinção entre as seminormas de $\mathcal{S}$ e as normas de L^2 . Para $\varphi \in \mathcal{S}$, denotaremos, ao invés de $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$,

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta,\infty} = \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_\infty.$$

E, definimos

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta,2} = \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_{L^2}.$$

Proposição 1.4.1 *As famílias de seminormas $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\infty}\}$ e $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$ são equivalentes em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: ($n = 1$) Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\tan^2 t)^{-2} \sec^2 t dt = \frac{\pi}{2},$$

temos que $(1+x^2)^{-1} \in L^2$. Seja $\varphi \in \mathcal{S}$. Então,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{0,0,2} &= \left[\int |\varphi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int (1+x^2)^{-2} |(1+x^2)\varphi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|(1+x^2)^{-1}\|_{L^2} \|(1+x^2)\varphi\|_{0,0,\infty}. \end{aligned}$$

Logo, se $C = \|(1+x^2)^{-1}\|_{L^2}$, segue que

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta,2} = \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_{0,0,2} \leq C \|(1+x^2)x^\alpha D^\beta \varphi\|_{0,0,2} \leq C \left(\|\varphi\|_{\alpha,\beta,\infty} + \|\varphi\|_{\alpha+2,\beta,\infty} \right).$$

Por outro lado, como $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi'(t) dt$, temos que

$$\|\varphi\|_{0,0,\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^x \varphi'(t) dt \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^x |\varphi'(t)| dt \leq \|\varphi'\|_{L^1}.$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder,

$$\|\varphi'\|_{L^1} = \|(1+x^2)^{-1}(1+x^2)\varphi'\|_{L^1} \leq \|(1+x^2)\varphi'\|_{L^2} \|(1+x^2)^{-1}\|_{L^2}.$$

Então,

$$\|\varphi\|_{0,0,\infty} \leq C (\|\varphi'\|_{L^2} + \|x^2 \varphi'\|_{L^2}).$$

Portanto, de $(x^\alpha D^\beta \varphi)' = \alpha x^{\alpha-1} D^\beta \varphi + x^\alpha D^{\beta+1} \varphi$, resulta que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\alpha,\beta,\infty} &= \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_{0,0,\infty} \\ &\leq C \left(\|(x^\alpha D^\beta \varphi)'\|_{0,0,2} + \|x^2 (x^\alpha D^\beta \varphi)'\|_{0,0,2} \right) \\ &\leq C \left(\alpha \|\varphi\|_{\alpha-1,\beta,2} + \|\varphi\|_{\alpha,\beta,2} + \alpha \|\varphi\|_{\alpha+1,\beta,2} + \|\varphi\|_{\alpha+2,\beta+1,2} \right). \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.1.8, concluímos o caso $n = 1$.

(n qualquer) Seja $|x|$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Como $(1+|x|^2)^{-m} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo $m > \frac{n}{2}$, segue o resultado através de cálculos similares. $\square$

Definição 1.4.2 Definimos os operadores $A, A^\dagger, N : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ como sendo:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right), \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \quad \text{e} \quad N = A^\dagger \circ A.$$

Definição 1.4.3 Definimos ϕ_0 pelas equações $A\phi_0 = 0$ e $\int_{\mathbb{R}} \phi_0^2 dx = 1$, ou seja,

$$\phi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Para $n \geq 1$,

$$\phi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} (A^\dagger)^n \phi_0 = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} (-1)^n \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}.$$

As funções $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ são chamadas de *funções de Hermite*.

Lema 1.4.4 Para cada n vale:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \phi_n = (2n+1) \phi_n.$$

Demonstração: Observe que o lema é verdadeiro se, e somente se,

$$2(n+1) \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} + 2x \left(\frac{d}{dx} \right)^{n+1} e^{-x^2} + \left(\frac{d}{dx} \right)^{n+2} e^{-x^2} = 0,$$

para todo n . Logo, segue o resultado, pois esta última igualdade se demonstra, sem dificuldades, usando indução em n . $\square$

Observação 1.4.5 Devido ao Lema 1.4.4, as $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ são também chamadas de *funções de onda do oscilador harmônico*.

Lema 1.4.6 A e $A^\dagger$ são adjuntos em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demonstração: Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Denote por $(\cdot, \cdot)$ o produto interno usual de L^2 . Usando integração por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} (A\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} (A\varphi)(x) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} (x\varphi(x) + \varphi'(x)) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x\varphi(x) \overline{\psi(x)} - \varphi(x) \overline{\psi'(x)} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{(A^\dagger \psi)(x)} dx \\ &= (\varphi, A^\dagger \psi). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.4.7

$$[A, A^\dagger] = AA^\dagger - A^\dagger A = 1.$$

Demonstração: Basta verificar, usando diretamente a definição, que $AA^\dagger(\varphi) - A^\dagger A(\varphi) = \varphi$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}$. $\square$

Lema 1.4.8 $A\phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1}$, $A^\dagger \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}$ e $N\phi_n = n \phi_n$, para todo n .

Demonstração: Usando a definição de ϕ_n , temos que

$$\phi_{n+1} = ((n+1)!)^{-\frac{1}{2}} (A^\dagger)^{n+1} \phi_0 = (n+1)^{-\frac{1}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}} A^\dagger \left((n!)^{\frac{1}{2}} \phi_n \right).$$

Logo,

$$A^\dagger \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1},$$

para todo n . Por outro lado, como $N = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right)$, segue do Lema 1.4.4 que

$$N\phi_n = n \phi_n,$$

para todo n . Com isso em mãos, juntamente com o Lema 1.4.7, concluímos que

$$A\phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1},$$

para todo n . $\square$

Lema 1.4.9 *Seja f uma função tal que $f \neq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}$ e tal que existem $c, \delta > 0$ com $|f(x)| \leq ce^{-\delta|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, $\text{span}\{x^n f(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Suponha que $\overline{\text{span}\{x^n f(x)\}} \neq L^2(\mathbb{R})$. Logo, existe $h \in L^2$, $h \neq 0$ q.t.p. tal que

$$(x^n f, h) = 0,$$

para todo n . Isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) h(x) dx = 0,$$

para todo n . Note que $fh \in L^1(\mathbb{R})$, pois, pela desigualdade de Hölder,

$$\int |f(x)h(x)| dx \leq c \int e^{-\delta|x|} |h(x)| dx \leq \|e^{-\delta|x|}\|_{L^2} \|h\|_{L^2}.$$

Considere

$$g(\lambda) = \int f(x)h(x)e^{-i\lambda x} dx.$$

Ou seja, g é a transformada de Fourier de fh . Note que, se $\delta_1 < \delta$, então $e^{\delta_1|x|}fh \in L^1(\mathbb{R})$, pois nesse caso, $|e^{\delta_1|x|}fh| \leq e^{(\delta_1-\delta)|x|}|h|$ com $\delta_1 - \delta < 0$. Assim, considerando os pontos $z \in \mathbb{C}$ por $z = \lambda + i\mu$, segue que se $|\mu| < \delta$, então $g(\lambda)$ pode ser prolongada à uma função analítica na variável z . Como $g^{(k)}(\lambda) = \int f(x)h(x)(-ix)^k e^{-i\lambda x} dx$, segue que $g^{(k)}(0) = 0$ para todo k . Sendo assim, $g(\lambda) = 0$ para todo λ devido à analiticidade. Logo, $fh = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $\overline{\text{span}\{x^n f(x)\}} = L^2(\mathbb{R})$. $\square$

Proposição 1.4.10 $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ é uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração: Como $\phi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\phi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} (A^\dagger)^n \phi_0$, segue que $\phi_n \in \mathcal{S}$, para todo n . Logo, $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty \subset L^2$. Sejam $m > n$. Então, dos Lemas 1.4.6 e 1.4.8, temos que

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_m) &= (m!)^{-\frac{1}{2}} (\phi_n, (A^\dagger)^m \phi_0) \\ &= (m!)^{-\frac{1}{2}} (A^m \phi_n, \phi_0) \\ &= (m!)^{-\frac{1}{2}} (A^{m-n} A^n \phi_n, \phi_0) \\ &= (m!)^{-\frac{1}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} (A^{m-n} \phi_0, \phi_0) \\ &= (m!)^{-\frac{1}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} (0, \phi_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $m - n > 0$. Se $m = n$, então

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_n) &= (n!)^{-\frac{1}{2}} (\phi_n, (A^\dagger)^n \phi_0) \\ &= (n!)^{-\frac{1}{2}} (A^n \phi_n, \phi_0) \\ &= (n!)^{-\frac{1}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} (\phi_0, \phi_0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

uma vez que $(\phi_0, \phi_0) = 1$, pois,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Sendo assim, $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ é um conjunto ortonormal. Aplicando o Lema 1.4.9 para $e^{-\frac{x^2}{2}}$, segue que

$$\overline{\text{span}\{\phi_n\}} = \overline{\text{span}\left\{x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}} = L^2(\mathbb{R}).$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Lema 1.4.11 Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$\left\| A_1^\# \cdots A_m^\# f \right\|_{L^2} \leq \left\| (N + mId)^{\frac{m}{2}} f \right\|_{L^2},$$

onde $A_j^\# = A$ ou $A^\dagger$.

Demonstração: Pelo Lema 1.4.8, vemos que para cada n ,

$$\left\| A_1^\# \cdots A_m^\# \phi_n \right\|_{L^2} = \|R_n \phi_n\|_{L^2} = |R_n| \|\phi_n\|_{L^2} = |R_n|,$$

onde R_n é um produto de m raízes da forma $\sqrt{n+a_j}$, com $-2m \leq a_j \leq 2m$. Logo, segue que para cada n ,

$$\begin{aligned} \left\| A_1^\# \cdots A_m^\# \phi_n \right\|_{L^2} &\leq \sqrt{n+1} \cdots \sqrt{n+m} \\ &\leq (n+m)^{\frac{m}{2}} \\ &= \left\| (nId + mId)^{\frac{m}{2}} \phi_n \right\|_{L^2} \\ &= \left\| (N + mId)^{\frac{m}{2}} \phi_n \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Seja então $f \in L^2$. Pela Proposição 1.4.10, $f = \sum b_n \phi_n$. Portanto, pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} \left\| A_1^\# \cdots A_m^\# f \right\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum A_1^\# \cdots A_m^\# (b_n \phi_n) \right\|_{L^2}^2 \\ &= \sum b_n^2 \left\| A_1^\# \cdots A_m^\# \phi_n \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum b_n^2 \left\| (N + mId)^{\frac{m}{2}} \phi_n \right\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| \sum b_n (N + mId)^{\frac{m}{2}} \phi_n \right\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| (N + mId)^{\frac{m}{2}} f \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

Os lemas acima serão necessários para introduzirmos uma outra seminorma em $\mathcal{S}$.

Definição 1.4.12 Definimos, para $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\|\varphi\|_n = \|(N+1)^n \varphi\|_{L^2},$$

para cada n .

Proposição 1.4.13 $\{\|\cdot\|_n\}$ é uma família de seminormas dirigida em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, equivalente à $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$.

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{S}$. Como $(N+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k$, segue que

$$\|\varphi\|_n = \|(N+1)^n \varphi\|_{L^2} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|N^k \varphi\|_{L^2}.$$

Como as operações presentes no operador N são multiplicar por x , derivar e identidade, segue que existem $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_l, \beta_l$ e $c > 0$ tais que

$$\|\varphi\|_n \leq c \sum_{k=1}^l \|\varphi\|_{\alpha_k, \beta_k, 2}.$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} D^\beta \varphi &= \frac{1}{2} D^{\beta-1} (\varphi' + x\varphi - x\varphi + \varphi') \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} D^{\beta-1} (A\varphi + A^\dagger \varphi) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} D^{\beta-2} \left(\frac{d}{dx} (A\varphi) + xA\varphi - xA\varphi + \frac{d}{dx} (A\varphi) \right) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} D^{\beta-2} \left(\frac{d}{dx} (A^\dagger \varphi) + xA^\dagger \varphi - xA^\dagger \varphi + \frac{d}{dx} (A^\dagger \varphi) \right) \\ &= \frac{1}{2} D^{\beta-2} (AA\varphi - A^\dagger A\varphi) + \frac{1}{2} D^{\beta-2} (AA^\dagger \varphi - A^\dagger A^\dagger \varphi). \end{aligned}$$

Procedendo desta maneira, concluímos que existem $c_1 > 0$ e $l_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$D^\beta \varphi = c_1 \sum_{k=1}^{l_1} \pm A_1^\# \cdots A_{r_k}^\# \varphi,$$

onde $A_j^\# = A$ ou $A^\dagger$. Além disso, se $\psi \in \mathcal{S}$, então

$$\begin{aligned} x^\alpha \psi &= \frac{1}{2} x^{\alpha-1} (x\psi + \psi' - \psi' + x\psi) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} x^{\alpha-1} (A\psi + A^\dagger \psi) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} x^{\alpha-2} \left(A\psi + \frac{d}{dx} (A\psi) - \frac{d}{dx} (A\psi) + A\psi \right) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} x^{\alpha-2} \left(A^\dagger \psi + \frac{d}{dx} (A^\dagger \psi) - \frac{d}{dx} (A^\dagger \psi) + A^\dagger \psi \right) \\ &= \frac{1}{2} x^{\alpha-2} (AA\psi + A^\dagger A\psi) + \frac{1}{2} x^{\alpha-2} (AA^\dagger \psi + A^\dagger A^\dagger \psi). \end{aligned}$$

Novamente, existem $c_2 > 0$ e $l_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$x^\alpha \psi = c_2 \sum_{k=1}^{l_2} A_1^\# \cdots A_{i_k}^\# \psi,$$

onde $A_j^\# = A$ ou $A^\dagger$. Juntando, obtemos que existem $c_3 > 0$ e $l_3 \in \mathbb{N}$ tais que

$$x^\alpha D^\beta \varphi = c_3 \sum_{k=1}^{l_3} \pm A_1^\# \cdots A_{m_k}^\# \varphi,$$

onde $A_j^\# = A$ ou $A^\dagger$. Sendo assim, segue do Lema 1.4.11 que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\alpha,\beta,2} &= \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_{L^2} \\ &\leq c_3 \sum_{k=1}^{l_3} \|A_1^\# \cdots A_{m_k}^\# \varphi\|_{L^2} \\ &\leq c_3 \sum_{k=1}^{l_3} \|(N + m_k)^{\frac{m_k}{2}} \varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Como

$$(N + m_k)^{\frac{m_k}{2}} = \sum_{i=0}^{\frac{m_k}{2}} \binom{\frac{m_k}{2}}{i} (m_k - 1)^i (N + 1)^{\frac{m_k}{2} - i},$$

segue que

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta,2} \leq c_3 \sum_{k=1}^{l_3} \sum_{i=0}^{\frac{m_k}{2}} \left| \binom{\frac{m_k}{2}}{i} \right| |m_k - 1|^i \|(N + 1)^{\frac{m_k}{2} - i} \varphi\|_{L^2}.$$

Portanto, existem $\tilde{c} > 0$ e $n_1, \dots, n_{\tilde{l}} \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta,2} \leq \tilde{c} \sum_{k=1}^{\tilde{l}} \|\varphi\|_{n_k},$$

concluindo a demonstração, devido à Proposição 1.1.8. □

Lema 1.4.14

$$\|(a_\alpha)\|_\beta = \left(\sum_{\alpha} (\alpha + 1)^{2\beta} |a_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

é uma seminorma no espaço das multisequências $(a_\alpha)_{\alpha \in I_+^k}$, onde $\beta \in I_+^k$ e $(\alpha + 1)^{2\beta} = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)^{2\beta_i}$.

Definição 1.4.15 Definimos s_k como sendo o espaço das multisequências $(a_\alpha)_{\alpha \in I_+^k}$ tais que $\sup_{\alpha \in I_+^k} |a_\alpha| |\alpha|^m < \infty$ para cada m e $\|(a_\alpha)\|_\beta < \infty$ para cada β .

Teorema 1.4.16 (A N -representação para $\mathcal{S}$) Existe um isomorfismo topológico entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ e s_k .

Demonstração: Daremos os detalhes para $k = 1$. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, considere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $a_n = (\varphi, \phi_n)$, onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno usual de L^2 . Como $\mathcal{S} \subset L^2$, segue da Proposição 1.4.10 que $\varphi = \sum_n a_n \phi_n$. De N ser um operador de $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, temos que $N^m \varphi \in L^2$, para todo m , ou seja, $\|N^m \varphi\|_{L^2} < \infty$. Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$\sum_n \|a_n n^m \phi_n\|_{L^2}^2 < \infty,$$

uma vez que $N\phi_n = n\phi_n$ (Lema 1.4.8). Isto significa que

$$\sum_n |a_n|^2 n^{2m} < \infty,$$

para cada m . Logo,

$$|a_n| n^m = (|a_n|^2 n^{2m})^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_n |a_n|^2 n^{2m} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

e portanto, $\sup_n |a_n| n^m < \infty$, para cada m . Então, $(a_n) \in s_1$, e definimos assim, uma aplicação $F : \mathcal{S} \rightarrow s_1$, dada por $F(\varphi) = ((\varphi, \phi_n))$.

Note que se $\varphi \in \mathcal{S}$, então

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_m^2 &= \|(N+1)^m \varphi\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_n |a_n|^2 (n+1)^{2m} \\ &= \|(a_n)\|_m^2, \end{aligned}$$

para cada m , onde $a_n = (\varphi, \phi_n)$. Disso se segue que F é injetiva. Vamos mostrar agora a sobrejetividade. Seja $(a_n) \in s_1$. Defina $\varphi_N = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n$. Logo, (suponha $M > N$) para cada m ,

$$\|\varphi_N - \varphi_M\|_m = \sum_{n=N+1}^M |a_n|^2 (n+1)^{2m} \rightarrow 0$$

se $M, N \rightarrow \infty$, pois $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{2m} < \infty$. Assim, (φ_N) é de Cauchy em cada $\|\cdot\|_m$, e então, é de Cauchy em $\mathcal{S}$, segundo a Proposição 1.2.2. Portanto, pelo Teorema 1.3.6, existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $\varphi_N \rightarrow \varphi$. Em particular, $\varphi_N \rightarrow \varphi$ em L^2 . Sendo assim,

$$(\varphi_N, \phi_n) \rightarrow (\varphi, \phi_n),$$

mostrando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varphi, \phi_n) \phi_n = \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n,$$

isto é, $F(\varphi) = (a_n)$.

Para concluir o teorema, só resta verificar que as topologias coincidem. Mas isso se dá devido à igualdade das seminormas $\|\cdot\|_m$ em $\mathcal{S}$ e em s_1 . $\square$

Teorema 1.4.17 (A N -representação para $\mathcal{S}'$) *Temos:*

- (a) Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ e $b_\alpha = \langle T, \phi_\alpha \rangle$ para cada $\alpha \in I_+^k$, então existem $c > 0$ e $\beta \in I_+^k$ tais que $|b_\alpha| \leq c(\alpha + 1)^\beta$, para todo α ;
- (b) Se (b_α) é uma multiseqüência tal que $|b_\alpha| \leq c(\alpha + 1)^\beta$, para todo α , então existe um único $T \in \mathcal{S}'$ tal que $\langle T, \phi_\alpha \rangle = b_\alpha$;
- (c) Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ e $b_\alpha = \langle T, \phi_\alpha \rangle$, então $\sum_\alpha b_\alpha \phi_\alpha$ converge para T na topologia $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$.

Demonstração: Novamente consideraremos o caso $k = 1$.

- (a) Segue do fato de T ser contínua e a família $\{\|\cdot\|_m\}$ ser dirigida.
- (b) Dado $(a_n) \in s_1$, defina $B((a_n)) = \sum_{n=0}^\infty b_n a_n$. Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
 |B((a_n))| &\leq \sum_{n=0}^\infty |b_n| |a_n| \\
 &\leq c \sum_{n=0}^\infty (n+1)^m |a_n| \\
 &= c \sum_{n=0}^\infty [(n+1)^{2m+2} |a_n|^2]^{\frac{1}{2}} [(n+1)^{-2}]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c \left(\sum_{n=0}^\infty (n+1)^{2(m+1)} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^\infty (n+1)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c \frac{\pi^2}{6} \|(a_n)\|_{m+1},
 \end{aligned}$$

ou seja, B é um funcional linear contínuo. Pelo Teorema 1.4.16, $T = B \circ F \in \mathcal{S}'$. Não é difícil ver que $\langle T, \phi_n \rangle = b_n$. A unicidade segue da Proposição 1.4.10.

(c) Note que $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ é a topologia fraca-* em $\mathcal{S}'$. Logo, precisamos mostrar que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}$, temos $\sum_{n=0}^N \langle b_n \phi_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ quando $N \rightarrow \infty$. Como $\varphi = \sum_{n=0}^\infty (\varphi, \phi_n) \phi_n$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, temos que

$$\left| \langle T, \varphi \rangle - \sum_{n=0}^N \langle b_n \phi_n, \varphi \rangle \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty (\varphi, \phi_n) \phi_n \right|,$$

e portanto, o resultado segue. $\square$

Observação 1.4.18 Os teoremas acima nos dão duas importantes simplificações:

- (a) Seqüências são mais fáceis de se trabalhar que funções;
- (b) As duas condições do espaço de Schwartz (C^∞ e rápido decrescimento) são substituídas por apenas uma (rápido decrescimento).

Com isso em mãos, somos capazes de demonstrar resultados interessantes sobre o espaço de Schwartz de maneira simples.

Corolário 1.4.19 $\mathcal{S}$ é denso em $\mathcal{S}'$ na topologia $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$.

Demonstração: Dado $T \in \mathcal{S}'$, considere a seqüência $T_N = \sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha \phi_\alpha$, onde $b_\alpha = \langle T, \phi_\alpha \rangle$. Segue que $(T_N) \subset \mathcal{S}$ e que $T_N \rightarrow T$ na topologia $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ (como feito no final da demonstração do Teorema 1.4.17). $\square$

Corolário 1.4.20 $\mathcal{S}$ é separável na topologia Fréchet. $\mathcal{S}'$ é separável na topologia $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$.

Demonstração: Defina $\mathcal{A}_N = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \mid a_n = 0 \text{ se } n > N\}$. Então, $\mathcal{A}_N$ é enumerável, assim como $\mathcal{A} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{A}_N$. Além disso, $\mathcal{A} \subset s_1$ é denso. Logo, pelo Teorema 1.4.16, temos que $F^{-1}(\mathcal{A})$ é enumerável e denso em $\mathcal{S}$. Portanto, $\mathcal{S}$ é separável.

Sendo $\mathcal{A}$ denso em $\mathcal{S}$, segue do Corolário 1.4.19 que $\mathcal{A}$ é denso em $\mathcal{S}'$, mostrando que $\mathcal{S}'$ é separável. $\square$

Capítulo 2

Probabilidade e cálculo estocástico

Neste capítulo, introduziremos algumas ferramentas básicas do cálculo estocástico e alguns conceitos probabilísticos que serão necessários para isso.

2.1 Conceitos básicos

Começaremos com as definições e resultados básicos sobre a teoria de probabilidade.

Definição 2.1.1 Um *espaço de probabilidade* é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde Ω é um conjunto, $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de conjuntos em Ω e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade definida em $\mathcal{F}$, ou seja, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

São exemplos de espaço de probabilidade:

Exemplo 2.1.2 $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \text{Borel}([0, 1])$ e $\mathbb{P}$ a medida de Lebesgue restrita ao intervalo $[0, 1]$.

Exemplo 2.1.3 $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \text{Borel}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}$ dada por

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Observação 2.1.4 Um espaço de probabilidade é um espaço de medida, onde a medida do conjunto todo vale 1.

Definição 2.1.5 Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e (E, τ) um espaço topológico. Uma função $X : \Omega \rightarrow E$ é uma *variável aleatória*, se for mensurável, isto é, se

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F},$$

para todo $A \in \tau$.

Definição 2.1.6 Seja X uma variável aleatória. Definimos a *probabilidade induzida* $\mathbb{P}_X$ em $Borel(E)$ por

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{X \in A\}).$$

Observação 2.1.7 $\mathbb{P}_X$ é, de fato, uma medida de probabilidade.

Definição 2.1.8 Uma família de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ é dita *independente* se, para qualquer conjunto finito de índices $\{i_1, \dots, i_r\} \subset I$, e quaisquer $A_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$, $j = 1, \dots, r$, resultar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^r \mathbb{P}(A_{i_j}).$$

Definição 2.1.9 Uma variável aleatória X é dita *independente* de uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ se $\sigma(X)$ e $\mathcal{F}$ são independentes, onde $\sigma(X)$ é a menor σ -álgebra onde X é mensurável.

Definição 2.1.10 Uma família de variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \in I}$ é dita *independente* se forem independentes as σ -álgebras $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$.

Definição 2.1.11 Seja X uma variável aleatória. Definimos a *esperança (ou média)* de X como sendo

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Definição 2.1.12 Seja X uma variável aleatória. Definimos a *variância* de X como sendo

$$var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Definição 2.1.13 Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Dizemos que X tem *distribuição normal com média m e variância σ^2* , e escrevemos $X \sim N(m, \sigma^2)$, se, para todo $A \in Borel(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Definição 2.1.14 Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória $\mathcal{F}$ -mensurável e $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ uma σ -álgebra. A *esperança condicional* $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$ de Y com relação à $\mathcal{G}$ é definida como sendo a única ($\mathbb{P}$ -q.t.p.) variável aleatória tal que

- (i) $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$ é $\mathcal{G}$ -mensurável;
- (ii) $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] d\mathbb{P}$, para todo $A \in \mathcal{G}$.

Observação 2.1.15 O teorema de Radon-Nikodym garante a existência da esperança condicional.

A esperança condicional de uma variável aleatória possui muitas propriedades, dentre elas:

Proposição 2.1.16 Sejam $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variáveis aleatórias e $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ -álgebras. Temos:

- (a) $\mathbb{E}[\alpha X + Y | \mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] + \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$;
- (b) Se Y é $\mathcal{G}$ -mensurável, então $\mathbb{E}[XY | \mathcal{G}] = Y \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$;
- (c) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{H}]$;
- (d) Se Y é independente de $\mathcal{G}$, então $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y]$.
- (e) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[Y]$.

Definição 2.1.17 Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e T um conjunto de índices. Uma *filtração* é uma família de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T} \subset \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, para todos $s, t \in T$, $s \leq t$.

Definição 2.1.18 Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias

$$\{X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid t \in T\},$$

onde T é um conjunto de índices.

Definição 2.1.19 Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dizemos que um processo estocástico $\{X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid t \in T\}$ é *adaptado* a uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ se X_t for $\mathcal{F}_t$ -mensurável, para todo $t \in T$.

Definição 2.1.20 Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{\mathcal{F}_t \in T\}$ uma filtração. Um *martingale*, com relação à filtração $\{\mathcal{F}_t\}$, é um processo $X = \{X_t \mid t \in T\}$, adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$, tal que

- (i) $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, para todo $t \in T$;
- (ii) $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$, se $s \leq t$.

2.2 Movimento Browniano

Falaremos aqui, sobre o processo estocástico conhecido como movimento Browniano, cujo nome se deve ao botânico Robert Brown, que estudou o movimento de partículas de pólen em meios aquosos.

Definição 2.2.1 Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Um processo estocástico $B = \{B_t \mid t \in [0, T]\}$, com $B_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $t \in [0, T]$, é chamado de *movimento Browniano* se possui as seguintes propriedades:

- (i) $B_0 = 0$;
- (ii) $t \rightarrow B_t(\omega)$ é uma função contínua $\mathbb{P}$ -q.t.p.;
- (iii) Os incrementos $B_t - B_s$ são independentes e possuem distribuição normal $N(0, t - s)$ para todo $s < t$.

Lema 2.2.2 *Todo movimento Browniano é um martingale.*

Demonstração: Seja $B = \{B_t\}$ um movimento Browniano e defina $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid s \leq t\})$. Sejam $s < t$. Como $B_t - B_s$ tem média zero e é independente de $\mathcal{F}_s$, segue que

$$\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0.$$

Ou seja, $\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s$ para todo $s < t$, donde segue que B é um martingale. □

Proposição 2.2.3 *Seja $B = \{B_t\}$ um movimento Browniano. Então, $M = \{M_t\}$, onde $M_t = B_t^2 - t$, é um martingale.*

Demonstração: Sejam $s < t$. Pelo Lema 2.2.2,

$$\mathbb{E} [2B_s^2 - 2B_t B_s | \mathcal{F}_s] = 2B_s^2 - 2B_s \mathbb{E} [B_t | \mathcal{F}_s] = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [M_t - M_s | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [B_t^2 - B_s^2 - (t - s) | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [B_t^2 - 2B_t B_s + B_s^2 - (t - s) | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [(B_t - B_s)^2 - (t - s) | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [(B_t - B_s)^2] - (t - s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, M é um martingale. □

Definição 2.2.4 Seja $B = \{B_t | t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano. Seja

$$\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_j} = T\}$$

uma seqüência de partições do intervalo $[0, T]$ tais que $n < m$ implica $\pi_n \subset \pi_m$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n| = 0$, onde $|\pi_n| = \sup_{t_i \in \pi_n} |t_{i+1} - t_i|$. Definimos

$$\pi_n B_T = \sum_{t_i \in \pi_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2.$$

Teorema 2.2.5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n B_T = T,$$

onde a convergência é q.t.p..

Demonstração: Note que

$$\pi_n B_T - T = \sum_{t_i \in \pi_n} \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i) \right] = \sum_i Y_i,$$

onde $Y_i = (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)$ são variáveis aleatórias independentes com média zero. Assim,

$$\mathbb{E} [(\pi_n B_T - T)^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_i Y_i \right)^2 \right] = \sum_i \mathbb{E} [Y_i^2].$$

Observamos que

$$\begin{aligned} Y_i^2 &= \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i) \right]^2 \\ &= \left[\frac{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2}{t_{i+1} - t_i} (t_{i+1} - t_i) - (t_{i+1} - t_i) \right]^2 \\ &= \left[\frac{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2}{t_{i+1} - t_i} - 1 \right]^2 (t_{i+1} - t_i)^2 \end{aligned}$$

e que $\frac{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2}{t_{i+1} - t_i}$ tem a mesma distribuição que Z^2 , onde $Z \sim N(0, 1)$, para todo i . Assim, Y_i^2 tem a mesma distribuição que $(Z^2 - 1)^2 (t_{i+1} - t_i)^2$, para todo i . Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\pi_n B_T - T)^2] &= \sum_i \mathbb{E} [Y_i^2] \\ &= \sum_i \mathbb{E} [(Z^2 - 1)^2 (t_{i+1} - t_i)^2] \\ &\leq \mathbb{E} [(Z^2 - 1)^2] |\pi_n| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \\ &= \mathbb{E} [(Z^2 - 1)^2] |\pi_n| T. \end{aligned}$$

Portanto, como $|\pi_n| \rightarrow 0$ e $\mathbb{E} [(Z^2 - 1)^2] T$ é constante, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n B_T = T \quad \text{em } L^2.$$

Em particular, existe uma subsequência $\pi_{n_k} B_T$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n_k} B_T = T \quad \text{q.t.p.}$$

Defina agora,

$$N_n(\omega) = \pi_{-n} B_T = \sum_{t_i \in \pi_{-n}} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2,$$

e as σ -álgebras

$$\mathcal{G}_n = \sigma(N_m \mid m \leq n),$$

ambos para $n = -1, -2, \dots$. Resulta que (N_n) é um martingale com relação à $(\mathcal{G}_n)$. Sendo assim, segue do teorema de convergência pra trás de martingale que existe q.t.p. o limite

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} N_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n B_T.$$

Portanto, segue o resultado, pois se o limite existe, então toda subsequência converge para ele. $\square$

Observação 2.2.6 Para mais detalhes sobre o teorema de convergência pra trás de martingales (Backwards Martingale Convergence Theorem), consultar [10].

Definição 2.2.7 Seja $B = \{B_t \mid t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano. A *variação do caminho* $B_t(\omega)$ no intervalo $[a, b] \subset [0, T]$ é definida por

$$V_{[a,b]}B(\omega) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \sum_{t_i \in \pi} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|,$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas partições finitas do intervalo $[a, b]$.

Teorema 2.2.8

$$\mathbb{P}(V_{[a,b]}B < \infty) = 0.$$

Isto é, as trajetórias do movimento Browniano não têm variação finita $\mathbb{P}$ -q.t.p..

Demonstração: Suponha que $\mathbb{P}(V_{[a,b]}B < \infty) > 0$. Seja $(\pi_n) \subset \mathcal{P}$ uma seqüência de partições tal que $n < m$ implica $\pi_n \subset \pi_m$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n| = 0$. No conjunto $\{V_{[a,b]}B < \infty\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} b - a &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \pi_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_i \in \pi_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \sum_{t_i \in \pi_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n| V_{[a,b]}B \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, $\mathbb{P}(V_{[a,b]}B < \infty) = 0$. □

2.3 Fórmula de Itô

Demonstraremos nesta seção a fórmula de Itô, uma das ferramentas básicas do cálculo estocástico, que foi descoberta por K. Itô, em 1951.

Fixemos uma seqüência de partições

$$\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_j} = T\}$$

do intervalo $[0, T]$ tais que $n < m$ implica $\pi_n \subset \pi_m$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n| = 0$, onde $|\pi_n| = \sup_{t_i \in \pi_n} |t_{i+1} - t_i|$.

Definição 2.3.1 Sejam $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p > 0$. A p -variação de X é a função $\langle X \rangle_p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\langle X \rangle_p(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{t_i \in \pi_n \\ t_i \leq t}} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^p.$$

Observação 2.3.2 (a) Se $\langle X \rangle_p(t) < \infty$ para todo $t \in [0, T]$, dizemos que X tem p -variação finita.

(b) $\langle X \rangle_p$ é monótona não-decrescente e $\langle X \rangle_p(0) = 0$.

(c) Se $\mu([0, t]) = \langle X \rangle_2(t)$, então μ é uma medida em $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{Borel}(\mathbb{R}_{\geq 0}))$. Logo, a integral

$$\int f(s) d\langle X \rangle_2(s),$$

onde f é uma função boreliana em $\mathbb{R}_{\geq 0}$, está bem definida como sendo um integral de Lebesgue-Stieltjes.

Teorema 2.3.3 (Fórmula de Itô) Seja $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com $\langle X \rangle_2(T) < \infty$, e seja $F \in C^2(\mathbb{R})$. Então,

$$F(X_T) - F(X_0) = \int_0^T F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^T F''(X_s) d\langle X \rangle_2(s),$$

onde

$$\int_0^T F'(X_s) dX_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{t_i \in \pi_n \\ t_i \leq T}} F'(X_{t_i}) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

é definida como a integral de Itô de $F'(X_t)$ com relação à X_t .

Demonstração: Seja $t_i \in \pi_n$, $t_i \leq T$. Pelo teorema de Taylor, existe $\tilde{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ tal que

$$\begin{aligned} F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) &= F'(X_{t_i}) \Delta X_{t_i} + \frac{1}{2} F''(\tilde{t}_i) (\Delta X_{t_i})^2 \\ &= F'(X_{t_i}) \Delta X_{t_i} + \frac{1}{2} F''(X_{t_i}) (\Delta X_{t_i})^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} [F''(\tilde{t}_i) - F''(X_{t_i})] (\Delta X_{t_i})^2 \\ &= F'(X_{t_i}) \Delta X_{t_i} + \frac{1}{2} F''(X_{t_i}) (\Delta X_{t_i})^2 + R_n(t_i), \end{aligned}$$

onde

$$R_n(t_i) = \frac{1}{2} [F''(\tilde{t}_i) - F''(X_{t_i})] (\Delta X_{t_i})^2.$$

Seja $\delta_n = \max \{ \Delta X_{t_i} \mid t_i \in \pi_n, t_i \leq T \}$. Como X é uniformemente contínua em $[0, T]$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n| = 0$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Como X é contínua, obtemos que $X([0, T])$ é compacto. Logo, F'' é uniformemente contínua em $X([0, T])$, e assim, existe uma sequência (ε_n) , com $\varepsilon_n > 0$ para todo $n \geq 0$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ e

$$\begin{aligned} |R_n(t_i)| &\leq \frac{1}{2} \max \{ |F''(x) - F''(y)| \mid x, y \in X([0, T]), |x - y| \leq \delta_n \} (\Delta X_{t_i})^2 \\ &\leq \varepsilon_n (\Delta X_{t_i})^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum R_n(t_i) = 0,$$

$$\text{pois } |\sum R_n(t_i)| \leq \varepsilon_n \sum (\Delta X_{t_i})^2 \text{ e } \langle X \rangle_2(T) < \infty.$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum [F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})] = F(X_T) - F(X_0),$$

por ser uma soma telescópica, logo, os termos intermediários se cancelam.

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum F''(X_{t_i}) (\Delta X_{t_i})^2 = \frac{1}{2} \int_0^T F''(X_s) d\langle X \rangle_2(s),$$

uma vez que tal limite converge para a integral de Riemann que, por isso, coincide com a de Lebesgue-Stieltjes.

Sendo assim, como

$$\sum [F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})] = \sum F'(X_{t_i}) \Delta X_{t_i} + \frac{1}{2} \sum F''(X_{t_i}) (\Delta X_{t_i})^2 + \sum R_n(t_i),$$

resulta que existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{t_i \in \pi_n \\ t_i \leq T}} F'(X_{t_i}) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}),$$

que definimos como sendo a integral de Itô,

$$\int_0^T F'(X_s) dX_s,$$

de $F'(X_t)$ com relação à X_t . □

2.4 Integração estocástica

Aqui, introduziremos o conceito de integral estocástica, mais especificamente, a integral de um processo estocástico com relação a um movimento Browniano. Além disso, apresentaremos uma fórmula de Itô para processos do tipo semimartingale.

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{B_t \mid t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano. Considere a filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, onde $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s \mid s \leq t)$, e seja $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ uma partição de $[0, T]$.

Definição 2.4.1 Chamamos de *processo estocástico elementar*, um processo da forma

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j=1}^n e_j(\omega) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t),$$

onde e_j são variáveis aleatórias $\mathcal{F}_{t_j}$ -mensuráveis.

Definição 2.4.2 Definimos a *integral estocástica* de um processo elementar ϕ como sendo

$$\int_0^T \phi(s, \omega) dB_s(\omega) = \sum_{j=1}^n e_j(\omega) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)).$$

Observação 2.4.3 O conjunto $\mathcal{E}$ de todos os processos elementares está contido em $L^2([0, T] \times \Omega, \text{Borel}([0, T] \times \Omega), \lambda \times \mathbb{P})$, onde λ é a medida de Lebesgue.

Lema 2.4.4 (Isometria de Itô) Temos a isometria

$$\begin{aligned} I : \mathcal{E} &\rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ \phi &\mapsto \int_0^T \phi(s, \omega) dB_s(\omega) \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Logo,

$$\mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} \mathbb{E}[e_j^2] (t_{j+1} - t_j) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

pois, para $i = j$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_j^2 (\Delta B_j)^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e_j^2 (\Delta B_j)^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \mathbb{E}[e_j^2 \mathbb{E}[(\Delta B_j)^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \mathbb{E}[e_j^2 \mathbb{E}[(\Delta B_j)^2]] \\ &= \mathbb{E}[e_j^2] (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $i < j$, então $e_i e_j \Delta B_i$ é independente de ΔB_j , e assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] &= \mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i] \mathbb{E}[\Delta B_j] \\ &= \mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i] 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \phi dB \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^n e_j \Delta B_j \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n e_j^2 \Delta B_j^2 \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{j \neq i} e_j e_i \Delta B_j \Delta B_i \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [e_j^2] (t_{j+1} - t_j) + \sum_{j \neq i} 0 \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \phi^2 dt \right].
 \end{aligned}$$

□

No que segue, estenderemos a definição da integral estocástica ao espaço E .

Definição 2.4.5 Defina

$$E = \{f \in L^2(\lambda \times \mathbb{P}) \mid f(t, \cdot) \text{ é adaptado a } \mathcal{F}_t \text{ para todo } t \in [0, T]\}.$$

Lema 2.4.6 Se $g \in E$ é limitada e $g(\cdot, \omega)$ é contínua para cada $\omega \in \Omega$, então existe uma sequência de processos elementares $(\phi_n) \subset E$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (g - \phi_n)^2 dt \right] = 0.$$

Isto é, $\phi_n \rightarrow g$ em $L^2(\lambda \times \mathbb{P})$.

Demonstração: Considere $\phi_n(t, \omega) = \sum_{j=1}^n g(t_j, \omega) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$. Segue que ϕ_n é elementar, pois $g \in E$, e converge para g . □

Lema 2.4.7 Se $h \in E$ é limitada, então existe uma sequência $(g_n) \subset E$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (h - g_n)^2 dt \right] = 0$$

onde g_n é limitada e $g(\cdot, \omega)$ é contínua para cada $\omega \in \Omega$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração: Seja $M > 0$ tal que $|h(t, \omega)| \leq M$, para todo (t, ω) . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja ψ_n a função real não-negativa tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) dx = 1$ e $\phi_n(x) = 0$ para $x \in (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [0, \infty)$. Definindo

$$g_n(t, \omega) = \int_0^t \phi_n(s - t) h(s, \omega) ds,$$

obtemos a sequência desejada. □

Lema 2.4.8 *Se $f \in E$, então existe uma seqüência $(h_n) \subset E$, onde cada h_n é limitada, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (f - h_n)^2 dt \right] = 0.$$

Demonstração: Tomar, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n(t, \omega) = \begin{cases} -n & \text{se } f(t, \omega) < -n \\ f(t, \omega) & \text{se } -n \leq f(t, \omega) \leq n \\ n & \text{se } f(t, \omega) > n \end{cases}$$

e aplicar o teorema da convergência dominada. $\square$

Assim, para cada $f \in E$, podemos escolher, através dos Lemas 2.4.6, 2.4.7 e 2.4.8, uma seqüência de processos elementares (ϕ_n) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (f - \phi_n)^2 dt \right] = 0.$$

Pela isometria de Itô, a seqüência $\left(\int_0^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \right)_{n \geq 0}$ é de Cauchy. Portanto, o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega)$$

existe em $L^2(\mathbb{P})$ e não depende da escolha dos processos ϕ_n . Sendo assim, temos:

Definição 2.4.9 Para $f \in E$, definimos a *integral de Itô* de f , de 0 à T , como sendo

$$\int_0^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

onde (ϕ_n) é uma seqüência de processos elementares tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T (f - \phi_n)^2 dt \right] = 0.$$

Utilizando as propriedades dos processos elementares e, em seguida, tomando limite, obtemos os seguintes corolários:

Corolário 2.4.10 (Isometria de Itô) *Se $f \in E$, então*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right].$$

Demonstração: Segue da isometria para processos elementares. $\square$

Corolário 2.4.11 *Se $f, g \in E$ e c é uma constante, então*

$$\int_0^T (cf + g) dB_t = c \int_0^T f dB_t + \int_0^T g dB_t.$$

Demonstração: Se $\phi(t, \omega) = \sum_{j=1}^n e_j(\omega) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$, e $\tilde{\phi}(t, \omega) = \sum_{j=1}^n \tilde{e}_j(\omega) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$, onde $e_j, \tilde{e}_j$ são variáveis aleatórias $\mathcal{F}_{t_j}$ -mensuráveis, então

$$\begin{aligned} \int_0^T (c\phi(t, \omega) + \tilde{\phi}(t, \omega)) dB_t(\omega) &= \int_0^T \sum_{j=1}^n (ce_j(\omega) + \tilde{e}_j(\omega)) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t) \\ &= \sum_{j=1}^n (ce_j(\omega) + \tilde{e}_j(\omega)) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)) \\ &= \sum_{j=1}^n ce_j(\omega) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \tilde{e}_j(\omega) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)) \\ &= c \int_0^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) + \int_0^T \tilde{\phi}(t, \omega) dB_t(\omega). \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 2.4.12 *Se $f \in E$, então*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f dB_t \right] = 0.$$

Demonstração: Seja $\phi(t, \omega) = \sum_{j=1}^n e_j(\omega) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$, onde e_j são variáveis aleatórias $\mathcal{F}_{t_j}$ -mensuráveis. Resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n e_j(\omega) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [e_j(\omega) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega))] \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [\mathbb{E} [e_j(\omega) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)) | \mathcal{F}_j]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [e_j(\omega) \mathbb{E} [(B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)) | \mathcal{F}_j]] \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [e_j(\omega) (B_{t_j}(\omega) - B_{t_j}(\omega))] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Ou seja, podemos estender a isometria de Itô ao espaço E . Além disso, a integral de Itô é linear e tem média zero.

A seguir, segue uma fórmula de Itô para semimartingales. Mais detalhes sobre tais processos podem ser obtidos em [10], página 51.

Teorema 2.4.13 (Fórmula de Itô) *Seja X um semimartingale e seja $F \in C^2(\mathbb{R})$. Então $F(X)$ é um semimartingale, e vale*

$$\begin{aligned}
F(X_t) - F(X_0) &= \int_{0+}^t F'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t F''(X_{s-}) d[X, X]_s^c + \\
&\quad + \sum_{0 < s \leq t} [F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-}) \Delta X_s].
\end{aligned}$$

Demonstração: Página 78 de [10].

Capítulo 3

Uma fórmula de Itô para as distribuições temperadas

Apresentaremos neste capítulo, os conceitos básicos da teoria do ruído branco (White Noise Analysis) e uma extensão da fórmula de Itô para distribuições temperadas, devido à A. Russek [12] e I. Kubo [4], que se dá utilizando o método de dualidade da teoria de distribuições.

3.1 Ruído branco

Aqui, introduziremos o ruído branco e algumas de suas propriedades, como a decomposição em caos de Wiener-Itô.

Teorema 3.1.1 (Bochner-Minlos) *Existe uma única medida de probabilidade μ definida em $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \text{Borel}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)))$ tal que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [e^{i\langle \cdot, \varphi \rangle}] &= \int_{\mathcal{S}'} e^{i\langle T, \varphi \rangle} d\mu(T) \\ &= e^{-\frac{\|\varphi\|^2}{2}}\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, onde $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Observação 3.1.2 A demonstração deste teorema foge um pouco do assunto tratado nessa dissertação e por isso a omitiremos. Detalhes podem ser consultados em [3].

Definição 3.1.3 A tripla $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \text{Borel}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)), \mu)$ é chamada de *espaço de probabilidade do ruído branco 1-dimensional* e μ é chamada de *medida do ruído branco*.

Definição 3.1.4 O *ruído branco* é a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \mathcal{S} \times \mathcal{S}' &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, u) &\mapsto \langle u, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Observação 3.1.5 A partir do ruído branco $\mathcal{W}$, podemos construir um movimento Browniano $B_t(u)$, para $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{S}'$, definindo

$$B_t(u) = \mathcal{W}(1_{[0,t]}, u) = \begin{cases} \langle u, 1_{[0,t]} \rangle, & \text{se } t \geq 0 \\ -\langle u, 1_{[t,0]} \rangle, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Como $1_{[0,t]} \in L^2$ não é um elemento de $\mathcal{S}$, a expressão $\langle u, 1_{[0,t]} \rangle$ faz sentido aproximando tal função por elementos de $\mathcal{S}$ e tomando limite.

Definição 3.1.6 Definimos $\hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ como sendo o subconjunto das funções simétricas de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$L^2(\mathcal{S}')$ possui a seguinte expansão em caos de Wiener-Itô:

Teorema 3.1.7

$$L^2(\mathcal{S}') = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n,$$

isto é, cada $f \in L^2(\mathcal{S}')$ pode ser representada por uma série $f = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, onde $f_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$I_n(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}.$$

Mais ainda,

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{S}')}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Demonstração: Ver [3] ou [8]. □

Observação 3.1.8 Os conjuntos $\mathcal{K}_n$ podem, ainda, ser considerados como espaços gerados por polinômios de Fourier-Hermite. É o que diz o Teorema 3.1.15 abaixo, que é consequência dos resultados a seguir.

O espaço vetorial complexo gerado por funções exponenciais da forma

$$\exp(i \langle u, \xi \rangle), \quad \xi \in \mathcal{S},$$

forma uma álgebra, que denotamos por $\mathbf{A}$.

Teorema 3.1.9 *A álgebra $\mathbf{A}$ é densa em $L^2(\mathcal{S}')$.*

Demonstração: Fixe $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{S}$ e suponha que, para todo t_k , $1 \leq k \leq n$, temos

$$\int_{\mathcal{S}'} \prod_{k=1}^n \exp[it_k \langle u, \xi_k \rangle] \overline{\varphi(u)} d\mu(u) = 0.$$

Se $\mathcal{B}_n \subset Borel(\mathcal{S}')$ é a σ -álgebra gerada por $\langle u, \xi_1 \rangle, \dots, \langle u, \xi_n \rangle$, então a igualdade acima pode ser reescrita como

$$\int_{\mathcal{S}'} \exp \left[i \sum_{k=1}^n \langle u, \xi_k \rangle t_k \right] \mathbb{E} \left[\overline{\varphi(u)} \mid \mathcal{B}_n \right] d\mu(u) = 0.$$

Assim,

$$\mathbb{E} \left[\overline{\varphi(u)} \mid \mathcal{B}_n \right] = 0, \quad \mu - \text{q.t.p.}.$$

Adicionando ξ_k , $k \geq n+1$, tal que $\{\xi_n\}$ seja um sistema completo em $L^2(\mathbb{R})$, obtemos que $\mathcal{B}_n$ cresce monotonamente para $Borel(\mathcal{S}')$. Logo, concluímos que

$$\mathbb{E} \left[\overline{\varphi(u)} \mid Borel(\mathcal{S}') \right] = \overline{\varphi(u)} = 0, \quad \mu - \text{q.t.p.},$$

concluindo a demonstração. □

A coleção $\mathbf{P}$ de todos os polinômios em u também forma uma álgebra.

Corolário 3.1.10 *A álgebra $\mathbf{P}$ é densa em $L^2(\mathcal{S}')$.*

Demonstração: Segue do fato de que a expansão de Taylor

$$\exp[i \langle u, \xi \rangle] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[i \langle u, \xi \rangle]^n}{n!}$$

converge μ -q.t.p. e em $L^2(\mathcal{S}')$. □

Corolário 3.1.11 Se $\{\eta_n\} \subset \mathcal{S}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\mathbb{R})$, então a coleção de todos os produtos finitos da forma

$$\prod_j \langle u, \eta_j \rangle^{n_j}, \quad n_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

gera um subespaço denso de $L^2(\mathcal{S}')$.

Definição 3.1.12 Definimos os *polinômios de Hermite* como sendo

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$n = 0, 1, \dots, x \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1.13 Um *polinômio de Fourier-Hermite* em relação à $\{\eta_n\}$ é um polinômio em u expresso como produto finito da forma

$$\varphi(u) = c \prod_j h_{n_j} \left(\frac{\langle u, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}} \right), \quad c = \text{constante}.$$

Uma vez que $\langle u, \eta_j \rangle, j \geq 1$ são mutuamente independentes, obtemos que a norma $L^2(\mathcal{S}')$ de um tal polinômio é

$$|c|^2 \prod_j n_j! 2^{n_j}.$$

Sendo assim, tomamos $c = \left(\prod_j n_j! 2^{n_j} \right)^{-\frac{1}{2}}$, e ordenamos os polinômios de Fourier-Hermite em uma seqüência $\varphi_1, \varphi_2, \dots$.

Teorema 3.1.14 A coleção $\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ de polinômios de Fourier-Hermite normalizados, definidos acima, forma um sistema ortonormal completo em $L^2(\mathcal{S}')$.

Demonstração: A ortogonalidade segue do fato de que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}'} \prod_j h_{n_j} \left(\frac{\langle u, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}} \right) \prod_j h_{m_j} \left(\frac{\langle u, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}} \right) d\mu(u) &= \\ &= \prod_j \int_{\mathcal{S}'} h_{n_j} \left(\frac{\langle u, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}} \right) h_{m_j} \left(\frac{\langle u, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}} \right) d\mu(u) = \\ &= \prod_j n_j! 2^{n_j} \delta_{n_j, m_j}. \end{aligned}$$

O fato de que todo polinômio como no Corolário 3.1.11 pode ser expresso como uma soma de polinômios de Fourier-Hermite de grau menor ou igual a $\sum_j n_j$, garante, juntamente com o mesmo corolário, que $\{\varphi_n\}$ gera $L^2(\mathcal{S}')$. $\square$

Como consequência, temos:

Teorema 3.1.15

$$L^2(\mathcal{S}') = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n,$$

onde $\mathcal{K}_n$ é o subespaço de $L^2(\mathcal{S}')$ gerado por todos os polinômios de Fourier-Hermite de grau n .

3.2 A transformada S

Nesta seção, introduziremos a transformada S , e demonstraremos algumas de suas propriedades.

Definição 3.2.1 A transformada τ é dada por

$$\begin{aligned} \tau : L^2(\mathcal{S}') &\rightarrow \mathcal{S}^* \\ f &\mapsto \tau(f) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \tau(f)(\xi) \end{aligned}$$

onde

$$\tau(f)(\xi) = \int_{\mathcal{S}'} e^{i\langle u, \xi \rangle} f(u) d\mu(u).$$

Observação 3.2.2 Entendemos por $\mathcal{S}^*$ o espaço de todos funcionais lineares definidos em $\mathcal{S}$, ou seja, seu dual algébrico.

Proposição 3.2.3 Se $f \in \mathcal{K}_n$, então existe $f_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(\tau)(f)(\xi) = i^n e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_n(t_1, \dots, t_n) \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

para qualquer $\xi \in \mathcal{S}$.

Demonstração: A demonstração dessa proposição segue dos lemas subseqüentes, e da definição de $\mathcal{K}_n$.

Lema 3.2.4 Se $\|\eta\| = 1$, então

$$\tau \left(h_k \left(\frac{\langle \cdot, \eta \rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) (\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} (i\sqrt{2})^k (\eta, \xi)^k.$$

Demonstração: Se $\varphi(u) = \exp\left(\frac{2t\langle u, \eta \rangle}{\sqrt{2}} - t^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} h_k\left(\frac{\langle u, \eta \rangle}{\sqrt{2}}\right)$, então, aplicando τ em $\exp\left(\frac{2t\langle u, \eta \rangle}{\sqrt{2}} - t^2\right)$, obtemos que

$$\tau(\varphi)(\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\sqrt{2})^k}{k!} (\eta, \xi)^k.$$

Por outro lado, aplicando τ em $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} h_k\left(\frac{\langle u, \eta \rangle}{\sqrt{2}}\right)$, segue que

$$\tau(\varphi)(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \tau\left(h_k\left(\frac{\langle \cdot, \eta \rangle}{\sqrt{2}}\right)\right)(\xi).$$

Portanto,

$$e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} (i\sqrt{2})^k (\eta, \xi)^k = \tau\left(h_k\left(\frac{\langle \cdot, \eta \rangle}{\sqrt{2}}\right)\right)(\xi).$$

□

Lema 3.2.5 Se $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ é um sistema ortonormal completo, então existe $\hat{F} \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\tau\left(\prod_j h_{k_j}\left(\frac{\langle \cdot, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}}\right)\right)(\xi) = i^n e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \int \cdots \int \hat{F}(t_1, \dots, t_n) \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

onde $n = \sum_j k_j$.

Demonstração: Como a soma é sobre finitos j , segue que podemos escrever $\xi = \sum_j t_j \eta_j + \xi'$, onde ξ' é ortogonal aos η_j 's envolvidos na soma. Logo, pelo Lema 3.2.4,

$$\tau\left(\prod_j h_{k_j}\left(\frac{\langle \cdot, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}}\right)\right)(\xi) = e^{-\frac{\|\xi'\|^2}{2}} \prod_j e^{-\frac{t_j^2}{2}} (i\sqrt{2})^{k_j} (\eta_j, t_j \eta_j)^{k_j}.$$

Como $t_j = (\eta_j, \xi)$ e $\|\xi\|^2 = \sum_j t_j^2 + \|\xi'\|^2$, concluímos que

$$\tau\left(\prod_j h_{k_j}\left(\frac{\langle \cdot, \eta_j \rangle}{\sqrt{2}}\right)\right)(\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} (i\sqrt{2})^n \int \cdots \int G(t_1, \dots, t_n) \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

onde $G(t_1, \dots, t_n) = \eta_1(t_1) \cdots \eta_1(t_{k_1}) \eta_2(t_{k_1+1}) \cdots \eta_2(t_{k_1+k_2}) \cdots \eta_n(t_{k_1+\dots+k_n})$ e $n = \sum_j k_j$.
Defina

$$F(t_1, \dots, t_n) = (\sqrt{2})^n G(t_1, \dots, t_n).$$

A simetrização da F é a função $\hat{F}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} F(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)})$, onde a soma é sobre todas as permutações π de $\{1, 2, \dots, n\}$. Note que $F, \hat{F} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e que

$$\int \cdots \int F(t_1, \dots, t_n) \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) dt_1 \cdots dt_n = \int \cdots \int \hat{F}(t_1, \dots, t_n) \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) dt_1 \cdots dt_n.$$

Portanto, $\hat{F} \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz o lema. $\square$

Definição 3.2.6 A transformada S é dada por

$$\begin{aligned} S: L^2(\mathcal{S}') &\rightarrow \mathcal{S}^* \\ f &\mapsto S(f): \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad \xi \mapsto S(f)(\xi) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} S(f)(\xi) &= \int_{\mathcal{S}'} f(u + \xi) d\mu(u) \\ &= e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \int_{\mathcal{S}'} e^{\langle u, \xi \rangle} f(u) d\mu(u). \end{aligned}$$

Lema 3.2.7 $S(f)(\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \tau(f)(-i\xi)$.

Demonstração: Imediato. $\square$

Corolário 3.2.8 Se $f \in \mathcal{K}_n$, então existe $f_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(S)(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_n(t_1, \dots, t_n) \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

para qualquer $\xi \in \mathcal{S}$.

Demonstração: Segue da Proposição 3.2.3 e do Lema 3.2.7. $\square$

Observação 3.2.9 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid s \leq t\})$ é uma filtração.

Lema 3.2.10 Se $f \in L^2(\mathcal{S}')$ é $\mathcal{F}_t$ -mensurável, então

$$S(f)(\xi) = S(f)(1_{(-\infty, t]} \xi),$$

para qualquer $\xi \in \mathcal{S}$.

Demonstração: Seja $\xi_t = 1_{(-\infty, t]} \xi$. Defina

$$Z_t = \exp \left(\int_{-\infty}^t \xi(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t [\xi(s)]^2 ds \right)$$

e

$$Z = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi(s) dB_s - \frac{\|\xi\|^2}{2} \right).$$

Pela fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_{t_0} + \int_{t_0}^t Z_s \left(\xi(s) dB_s - \frac{1}{2} [\xi(s)]^2 ds \right) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t Z_s [\xi(s)]^2 ds \\ &= Z_{t_0} + \int_{t_0}^t Z_s \xi(s) dB_s. \end{aligned}$$

Fazendo $t_0 \rightarrow -\infty$, obtemos que

$$Z_t = 1 + \int_{-\infty}^t Z_s \xi(s) dB_s.$$

Ou ainda,

$$dZ_t = Z_t \xi(t) dB_t.$$

Logo, $\{Z_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ é um martingale e, então, $\mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t] = Z_t$. Resulta que

$$\begin{aligned} S(f)(\xi) &= \int_{\mathcal{S}'} \left(e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} e^{\int_{-\infty}^{\infty} \xi dB_s} \right) (u) f(u) d\mu(u) \\ &= \mathbb{E}[Zf] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Zf | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[f \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[f Z_t] \\ &= \int_{\mathcal{S}'} \left(e^{-\frac{\|\xi_t\|^2}{2}} e^{\int_{-\infty}^{\infty} \xi_t dB_s} \right) (u) f(u) d\mu(u) \\ &= S(f)(\xi_t). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2.11 *Seja $\{Y_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ um processo adaptado em $L^2(\mathcal{S}' \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue. Então, para toda $\xi \in \mathcal{S}$,*

$$S \left(\int_{-\infty}^t Y_s dB_s \right) (\xi) = \int_{-\infty}^t S(Y_s)(\xi) \xi(s) ds.$$

Demonstração: Seja $Z_t = 1 + \int_{-\infty}^t Z_s \xi(s) dB_s$ como no Lema 3.2.10. Como $\int_{-\infty}^t Y_s dB_s \in \mathcal{F}_t$, segue que

$$\begin{aligned}
 S\left(\int_{-\infty}^t Y_s dB_s\right)(\xi) &= S\left(\int_{-\infty}^t Y_s dB_s\right)(\xi_t) \\
 &= \mathbb{E}\left[\left(\int_{-\infty}^t Y_s dB_s\right)\left(1 + \int_{-\infty}^t Z_s \xi(s) dB_s\right)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^t Y_s dB_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_{-\infty}^t Y_s dB_s\right)\left(\int_{-\infty}^t Z_s \xi(s) dB_s\right)\right] \\
 &= 0 + \int_{-\infty}^t \mathbb{E}[Y_s Z_s \xi(s)] ds \\
 &= \int_{-\infty}^t \xi(s) \mathbb{E}[Y_s Z_s] ds \\
 &= \int_{-\infty}^t \xi(s) S(Y_s)(\xi_s) ds \\
 &= \int_{-\infty}^t \xi(s) S(Y_s)(\xi) ds.
 \end{aligned}$$

Onde usamos a isometria de Itô e o fato de que a integral de Itô tem média zero. $\square$

Corolário 3.2.12 Se $f_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathcal{S}$, então

$$S(I_n(f_n))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) f_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n.$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
 S(I_n(f_n))(\xi) &= S\left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_n(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}\right)(\xi) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \xi(t_n) S\left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_n(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_{n-1}}\right)(\xi) dt_n \\
 &= \cdots \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) S(f_n)(\xi) dt_1 \cdots dt_n \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \xi(t_1) \cdots \xi(t_n) f_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n.
 \end{aligned}$$

$\square$

Observação 3.2.13 O Corolário 3.2.12 mostra que a aplicação $f \in \mathcal{K}_n \mapsto f_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ é sobrejetiva.

3.3 Funções generalizadas

Assim como tínhamos a tripla de Gel'fand

$$\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}',$$

aqui definiremos nossa nova tripla, onde se dará o desenvolvimento dos próximos resultados, inclusive o lema de Itô. Lembramos que os espaços de Sobolev H^α são tratados no apêndice.

Definição 3.3.1 O *espaço dos funcionais teste* é o espaço $(L^2)_+ \subset L^2(\mathcal{S}')$ formado pelos elementos $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\varphi_n)$, onde $\varphi_n \in H^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\varphi\|_+^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|\varphi_n\|_{\frac{n+1}{2}}^2 < \infty.$$

Definição 3.3.2 O espaço dual de $(L^2)_+$ é o *espaço dos funcionais Brownianos generalizados*, que denotamos por $(L^2)_-$.

Observação 3.3.3 (a) Denotaremos por $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ o par de dualidade entre $(L^2)_-$ e $(L^2)_+$.
 (b) Temos os mergulhos naturais (inclusão e dual):

$$(L^2)_+ \subset L^2(\mathcal{S}') \subset (L^2)_-,$$

que nos dá nossa nova tripla de Gel'fand.

A seguir, como na Proposição A.2.8, iremos caracterizar o espaço $(L^2)_-$.

Proposição 3.3.4 $\Phi \in (L^2)_-$ se, e somente se, existe $g_n \in H^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ com $\sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 < \infty$ tal que $\langle\langle \Phi, \cdot \rangle\rangle = \langle\langle g, \cdot \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle g_n, \cdot \rangle$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja $g = (g_n)$ como no enunciado. Defina a aplicação $\Phi_g : (L^2)_+ \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\langle\langle \Phi_g, \varphi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle g_n, \varphi_n \rangle,$$

onde $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\varphi_n) \in (L^2)_+$ e $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^n)$. É fácil ver que Φ_g é linear, uma vez que $I_n(f_n + \tilde{f}_n) = I_n(f_n) + I_n(\tilde{f}_n)$. Provemos que é uma aplicação contínua. Note que

$$|\langle\langle \Phi_g, \varphi \rangle\rangle| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n! |\langle g_n, \varphi_n \rangle| = \sum_{n=0}^{\infty} n! |\langle \check{g}_n, \hat{\varphi}_n \rangle|.$$

Como

$$\begin{aligned}
|\langle \check{g}_n, \hat{\varphi}_n \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\check{g}_n(x)| |\hat{\varphi}_n(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}_n(-x)| (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{4}} (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{4}} |\hat{\varphi}_n(x)| dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}_n(-x)|^2 (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}_n(x)|^2 (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}} \|\varphi_n\|_{\frac{n+1}{2}},
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi_g, \varphi \rangle| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}} \|\varphi_n\|_{\frac{n+1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! \|\varphi_n\|_{\frac{n+1}{2}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|g\|_- \|\varphi\|_+,
\end{aligned}$$

onde $\|g\|_-^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}}^2$. Assim, $\Phi_g \in (L^2)_-$.

($\Rightarrow$) Seja $\Phi \in (L^2)_-$. Considere, para cada $n \geq 0$, a restrição

$$\Phi_n = \Phi|_{H^{\frac{n+1}{2}}} : H^{\frac{n+1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sabemos que a transformada inversa de Fourier nos fornece, para cada $n \geq 0$, um isomorfismo unitário

$$\mathfrak{F}^{-1} : L^2(\nu_n) \rightarrow H^{\frac{n+1}{2}},$$

onde $d\nu_n = (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} dx$. Assim,

$$\Phi_n \circ \mathfrak{F}^{-1} : L^2(\nu_n) \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear e contínua. Segue do teorema da representação de Riesz que, para cada $n \geq 0$, existe uma única função $\tilde{h}_n \in L^2(\nu_n)$ tal que

$$\Phi_n(\mathfrak{F}^{-1}(\xi)) = \left(\tilde{h}_n, \xi \right)_{L^2(\nu_n)},$$

para toda $\xi \in L^2(\nu_n)$, e

$$\|\Phi_n \mathfrak{F}^{-1}\| = \|\tilde{h}_n\|_{L^2(\nu_n)}.$$

Se $\varphi_n \in H^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, então existe $\xi_n \in L^2(\nu_n)$ tal que $\check{\xi}_n = \varphi_n$. Logo,

$$\langle\langle \Phi_n, \varphi_n \rangle\rangle = \langle\langle \Phi_n, \check{\xi}_n \rangle\rangle = \left(\tilde{h}_n, \xi_n \right)_{L^2(\nu_n)} = \left(\tilde{h}_n, \hat{\varphi}_n \right)_{L^2(\nu_n)}.$$

Defina

$$g_n(x) = \left[\tilde{h}_n(x) (1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \right]^\wedge.$$

Resulta que, para cada $n \geq 0$, $\langle g_n, \varphi_n \rangle = \langle\langle \Phi_n, \varphi_n \rangle\rangle$, para toda $\varphi_n \in H^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,

$$\|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 = \left\| \tilde{h}_n \right\|_{L^2(\nu_n)}^2.$$

Trocando g_n por $\frac{g_n}{n!}$ (e utilizando a mesma notação), obtemos uma sequência $g = (g_n)$ tal que para cada $n \geq 0$, $g_n \in H^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $n! \langle g_n, \varphi_n \rangle = \langle\langle \Phi_n, \varphi_n \rangle\rangle$, para toda $\varphi_n \in H^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Logo,

$$\langle\langle \Phi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\langle \Phi, \varphi_n \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\langle \Phi_n, \varphi_n \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle g_n, \varphi_n \rangle,$$

para toda $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\varphi_n) \in (L^2)_+$. Resta mostrarmos que $\|g\|_- < \infty$. Mas como

$$\|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{n!} \left\| \tilde{h}_n \right\|_{L^2(\nu_n)} = \frac{1}{n!} \left\| \Phi_n \mathfrak{F}^{-1} \right\|$$

e

$$\left\| \Phi_n \mathfrak{F}^{-1} \right\| \leq \left\| \Phi_n \right\| \left\| \mathfrak{F}^{-1} \right\| = \left\| \Phi_n \right\| \leq \left\| \Phi \right\|,$$

concluimos que

$$\|g\|_-^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\Phi\|^2}{n!} = \|\Phi\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty,$$

pois Φ é contínuo e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. □

Corolário 3.3.5 $(L^2)_-$ é isomorfo ao espaço

$$\left\{ g = (g_n)_{n=0}^{\infty} \left| g_n \in H^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|g\|_-^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 < \infty \right. \right\}.$$

Demonstração: Só precisamos mostrar que a aplicação que, a cada $g = (g_n)$, associa o operador $\Phi_g \in (L^2)_-$ é injetiva. Suponha que $\Phi_g = \Phi_{\tilde{g}}$. Logo,

$$\langle\langle \Phi_g, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle \Phi_{\tilde{g}}, \varphi \rangle\rangle,$$

para toda $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\varphi_n) \in (L^2)_+$. Ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \langle g_n, \varphi_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle \tilde{g}_n, \varphi_n \rangle.$$

Suponha que $g \neq \tilde{g}$. Logo, existe $m \geq 0$ tal que $g_m \neq \tilde{g}_m$. Como para qualquer $\varphi_m \in H^{\frac{m+1}{2}}(\mathbb{R}^m)$ temos $I_m(\varphi_m) \in (L^2)_+$ e, assim, $\langle\langle \Phi_g, I_m(\varphi_m) \rangle\rangle = \langle\langle \Phi_{\tilde{g}}, I_m(\varphi_m) \rangle\rangle$, resulta que

$$\langle g_m, \varphi_m \rangle = \langle \tilde{g}_m, \varphi_m \rangle,$$

para toda $\varphi_m \in H^{\frac{m+1}{2}}(\mathbb{R}^m)$, o que é uma contradição. Portanto, segue a injetividade. $\square$

3.4 Composição com distribuições temperadas

Para $f \in L^2(\mathbb{R})$, denotemos por $I(f) = I_1(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dB_t$. Definiremos a composição

$$u(I(f)),$$

para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Para tanto, trabalharemos com a expansão de distribuições temperadas em termos dos polinômios de Hermite.

Definição 3.4.1 Defina, para $n \geq 0$ e $\sigma > 0$, as funções

$$g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{e} \quad g_{n,\sigma}(x) = h_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) g_{\sigma}(x),$$

onde h_n é o n -ésimo polinômio de Hermite, definido em 3.1.12

Definição 3.4.2 As funções de Hermite com parâmetro $\sigma > 0$ são definidas por

$$H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) = h_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) \sqrt{g_{\sigma}(x)}.$$

Proposição 3.4.3 Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $\sigma > 0$. Então, u é representado por

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n\left(\frac{\cdot}{\sigma}\right),$$

onde $a_n = \langle u, g_{n,\sigma} \rangle$.

Demonstração: Seja $v = u\sqrt{g_\sigma}$. Logo, $\langle v, \varphi \rangle = \langle u, \sqrt{g_\sigma}\varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}$. Resulta que

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle v, H_n \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) \right\rangle H_n \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle u, h_n \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) \sqrt{g_\sigma} \sqrt{g_\sigma} \right\rangle h_n \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) \sqrt{g_\sigma} \\ &= \sqrt{g_\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) \end{aligned}$$

Como $g_\sigma(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, segue o resultado. $\square$

Observação 3.4.4 Se $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{g_\sigma}}$, então $u = \sum_{n=0}^{\infty} b_n H_n \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right)$. Logo, pela N -representação para $\mathcal{S}'$, existem $\tilde{c} > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $|b_n| \leq \tilde{c}(1+n)^m$ para todo $n \geq 0$. E como g_σ é uma função limitada, obtemos que existe $c > 0$ tal que

$$|a_n| = \sqrt{g_\sigma} |b_n| \leq c(1+n)^m,$$

para todo $n \geq 0$.

Definição 3.4.5 Definimos a composição de $u \in \mathcal{S}'$ com $I(f)$ por

$$u(I(f)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n \left(\frac{I(f)}{\|f\|} \right).$$

Para provarmos que tal série converge em $(L^2)_-$, considere o seguinte lema.

Lema 3.4.6 *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Então, existem $c_1 > 0$ e $0 < q < 1$ tais que*

$$\|f^{\otimes n}\|_{-\frac{n+1}{2}} \leq c_1 q^n \|f\|^n,$$

onde $f^{\otimes n}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1) \cdots f(t_n)$.

Demonstração: Seja $R > 0$ qualquer e fixe $\alpha > 0$. Note que

$$\begin{aligned} \|f^{\otimes n}\|_{-\alpha}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| (f^{\otimes n})^\wedge(x) \right|^2 (1+|x|^2)^{-\alpha} dx \\ &= \int_{|x| < R} \left| (f^{\otimes n})^\wedge(x) \right|^2 (1+|x|^2)^{-\alpha} dx + \int_{|x| \geq R} \left| (f^{\otimes n})^\wedge(x) \right|^2 (1+|x|^2)^{-\alpha} dx \\ &\leq \int_{|x| < R} \left| (f^{\otimes n})^\wedge(x) \right|^2 dx + (1+R^2)^{-\alpha} \left\| (f^{\otimes n})^\wedge \right\|^2. \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \left| (f^{\otimes n})^\wedge(x) \right|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i x \cdot y} f^{\otimes n}(y)|^2 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} |f(y_1)|^2 \cdots |f(y_n)|^2 dy_1 \cdots dy_n \\ &= \|f\|^{2n}, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Jensen e o teorema de Fubini. Tome $R_0 > 0$ tal que $\int_{|x| < R_0} dx < 2^{-n}$. Logo, para $R \leq R_0$, obtemos pelas estimativas acima que

$$\begin{aligned} \|f^{\otimes n}\|_{-\alpha}^2 &\leq 2^{-n} \|f\|^{2n} + (1 + R_0^2)^{-\alpha} \|f\|^{2n} \\ &= (2^{-n} + q_1^\alpha) \|f\|^{2n}, \end{aligned}$$

onde $q_1 = (1 + R_0^2)^{-1}$, ou seja, $0 < q_1 < 1$. Seja agora $\alpha = \frac{n+1}{2}$. Considere $q = \sqrt{q_1}$ e tome $c_1 > 0$ tal que $c_1^2 q^{2n} - q^{n+1} \geq 2^{-n}$. Resulta que $0 < q < 1$ e

$$\begin{aligned} \|f^{\otimes n}\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 &\leq (2^{-n} + q^{n+1}) \|f\|^{2n} \\ &\leq c_1^2 q^{2n} \|f\|^{2n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f^{\otimes n}\|_{-\frac{n+1}{2}} \leq c_1 q^n \|f\|^n.$$

□

Teorema 3.4.7 *A série na Definição 3.4.5 é convergente em $(L^2)_-$.*

Demonstração: Sabemos que (Corolário A.1.10), se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $n \geq 0$, então

$$I_n(f^{\otimes n}) = \|f\|^n \sqrt{n!} h_n \left(\frac{I(f)}{\|f\|} \right).$$

Seja $f_n = \frac{f^{\otimes n}}{\|f\|^n \sqrt{n!}}$. Como I_n é linear, segue que

$$h_n \left(\frac{I(f)}{\|f\|} \right) = I_n(f_n).$$

Logo, $h_n \left(\frac{I(f)}{\|f\|} \right) \in \mathcal{K}_n$ e, além disso,

$$u(I(f)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n(f_n).$$

Então, precisamos mostrar que a seguinte série é finita

$$\begin{aligned}\|u(I(f))\|_-^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 n! \|f_n\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\|f\|^{2n}} \|f^{\otimes n}\|_{-\frac{n+1}{2}}^2.\end{aligned}$$

Mas, do Lema 3.4.6 e da Observação 3.4.4, obtemos que

$$\|u(I(f))\|_-^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^2 (1+n)^{2m}}{\|f\|^{2n}} c_1^2 q^{2n} \|f\|^{2n} = c^2 c_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2m} q^{2n}.$$

E, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2m} q^2 = q^2 < 1,$$

segue do teste da razão que

$$\|u(I(f))\|_- < \infty.$$

□

Definição 3.4.8 Sejam $u, u_k \in \mathcal{S}'$, $k \geq 0$. Dizemos que u_k converge forte em $\mathcal{S}'$ para u se existe $m \geq 0$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_n|^2 (n+1)^{-2m} = 0,$$

onde $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n \left(\frac{\cdot}{\sigma}\right)$, e $u_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} h_n \left(\frac{\cdot}{\sigma}\right)$.

Proposição 3.4.9 Se u_k converge forte em $\mathcal{S}'$ para u , então $u_k(I(f)) \rightarrow u(I(f))$ em $(L^2)_-$.

Demonstração: Seja $f_n = \frac{f^{\otimes n}}{\|f\|^n \sqrt{n!}}$. Logo, pelo Lema 3.4.6,

$$\begin{aligned}\|u_k(I(f)) - u(I(f))\|_-^2 &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(k)} - a_n) h_n \left(\frac{I(f)}{\|f\|} \right) \right\|_-^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_n|^2 \|I_n(f_n)\|_-^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_n|^2 \|f\|^{-2n} \|f^{\otimes n}\|_{-\frac{n+1}{2}}^2 \\ &\leq c_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_n|^2 q^{2n}.\end{aligned}$$

Seja $m \geq 0$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_n|^2 (n+1)^{-2m} = 0.$$

Como $0 < q < 1$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{2n} (1+n)^{2m} = 0$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $q^{2n} \leq (1+n)^{-2m}$. Seja $\tilde{c} > 0 = \max_{0 \leq n \leq n_0} |q^{2n} - (1+n)^{-2m}|$. Resulta que,

$$q^{2n} \leq \tilde{c} (1+n)^{-2m},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim,

$$\|u_k(I(f)) - u(I(f))\|_-^2 \leq \tilde{c} c_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_n|^2 (1+n)^{-2m},$$

e o resultado segue. $\square$

Observação 3.4.10 Note que

$$B_t = B_t - B_0 = \int_0^t dB_s = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,t]}(s) dB_s = I(1_{[0,t]}).$$

Definição 3.4.11 Chamamos de *função regularizadora* a uma função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, \varepsilon) = f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$.

Observação 3.4.12 Note que $g_\sigma = f_{\sigma^2}$.

Corolário 3.4.13 Seja $u \in \mathcal{S}'$. Se $u_\varepsilon = u * f_\varepsilon$, então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(B_t) = u(B_t)$$

em $(L^2)_-$.

Usando a definição de $u(I(f))$ dada anteriormente, provaremos dois resultados, antes do lema de Itô.

Lema 3.4.14 Fixado $\phi \in (L^2)_+$, a seguinte função real é contínua

$$g_\phi(x) = \frac{\langle \delta_x(B_t), \phi \rangle}{\langle \delta_x(B_t), 1 \rangle}.$$

Demonstração: Basta observar que as aplicações $x \in \mathbb{R} \mapsto \delta_x \in \mathcal{S}'$, $u \in \mathcal{S}' \mapsto u(B_t) \in (L^2)_-$ e $T \in (L^2)_- \mapsto \langle T, \phi \rangle \in \mathbb{R}$ são contínuas. $\square$

Proposição 3.4.15 *Seja $t > 0$. Se $\psi \in L^2(\mathcal{S}')$ é $\sigma(B_t)$ -mensurável, então*

$$\mathbb{E}[\psi\phi] = \mathbb{E}[\psi g_\phi(B_t)].$$

Demonstração: Se $\psi \in L^2(\mathcal{S}')$ é $\sigma(B_t)$ -mensurável, então existe $u \in \mathcal{S}'$ tal que $\psi = u(B_t)$. Logo,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_n \left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{b_n}{\sqrt{n!} (\sqrt{t})^n} 1_{[0,t]}^{\otimes n} \right),$$

onde $b_n = \left\langle u, h_n \left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \right) g_\sigma \right\rangle$. Seja $g_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{g_n}{\sqrt{n!}} \right)$. Resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi\phi] &= \langle \psi, \phi \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{b_n}{\sqrt{n!} (\sqrt{t})^n} 1_{[0,t]}^{\otimes n}, \frac{g_n}{\sqrt{n!}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(\sqrt{t})^n} \left(1_{[0,t]}^{\otimes n}, g_n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(\sqrt{t})^n} c_n, \end{aligned}$$

onde $c_n = \left(1_{[0,t]}^{\otimes n}, g_n \right)$.

Por outro lado, como

$$\delta_x(B_t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,\sqrt{t}}(x) h_n \left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{g_{n,\sqrt{t}}(x)}{\sqrt{n!} (\sqrt{t})^n} 1_{[0,t]}^{\otimes n} \right),$$

resulta que

$$g_\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\sqrt{t})^n} h_n \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

Assim,

$$g_\phi(B_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\sqrt{t})^n} h_n \left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{c_n}{(\sqrt{t})^n \sqrt{n!} (\sqrt{t})^n} 1_{[0,t]}^{\otimes n} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi g_\phi(B_t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{c_n}{(\sqrt{t})^{2n} \sqrt{n!}} \frac{b_n}{(\sqrt{t})^n \sqrt{n!}} \left(1_{[0,t]}^{\otimes n}, 1_{[0,t]}^{\otimes n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\sqrt{t})^{2n}} \frac{b_n}{(\sqrt{t})^n} (\sqrt{t})^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(\sqrt{t})^n} c_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[\psi\phi] = \mathbb{E}[\psi g_\phi(B_t)].$$

□

Corolário 3.4.16

$$\mathbb{E}[\phi|B_t] = g_\phi(B_t).$$

Demonstração: De fato, se $A \in \sigma(B_t)$, então

$$\begin{aligned} \int_A \phi d\mu &= \mathbb{E}[1_A \phi] \\ &= \mathbb{E}[1_A g_\phi(B_t)] \\ &= \int_A g_\phi(B_t) d\mu. \end{aligned}$$

□

Observação 3.4.17 Se avaliarmos a variável aleatória $\mathbb{E}[\phi|B_t]$ num ponto pertencente ao conjunto $\{u \in \mathcal{S}' \mid B_t(u) = x\}$, obtemos a esperança condicional $\mathbb{E}[\phi|B_t = x]$.

Proposição 3.4.18 Para $t \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (L^2)_+$, considere $g_{t,\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_{t,\phi}(x) = \langle \delta_x(B_t), \phi \rangle.$$

Então, $g_{t,\phi} \in \mathcal{S}$.

Demonstração: Da demonstração da Proposição 3.4.15, como

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = h_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \sqrt{g_{\sqrt{t}}(x)},$$

temos que

$$g_{t,\phi}(x) = g_{\sqrt{t}}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\sqrt{t})^n} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{g_{\sqrt{t}}(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\sqrt{t})^n} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

onde $g_{\sqrt{t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ e $c_n = (1_{[0,t]}^{\otimes n}, g_n)$. Como $\sqrt{g_{\sqrt{t}}} \in \mathcal{S}$, se mostrarmos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\sqrt{t})^n} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \in \mathcal{S},$$

a proposição estará provada. De fato, seja $m \geq 0$. Temos que

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \left(1_{[0,t]}^{\otimes n}, g_n \right) \right| \\ &\leq \left\| 1_{[0,t]}^{\otimes n} \right\|_{-\frac{n+1}{2}} \|g_n\|_{\frac{n+1}{2}} \\ &\leq \left(\sqrt{t} \right)^n \|g_n\|_{\frac{n+1}{2}} \\ &\leq \left(\sqrt{t} \right)^n a q^n, \end{aligned}$$

com $a > 0$ e $0 < q < 1$, pelo Lema 3.4.6. Logo,

$$\left| \frac{c_n}{(\sqrt{t})^n} \right| \leq a q^n.$$

Como existe $\tilde{a} > 0$ tal que $q^n \leq \tilde{a}(1+n)^{-m}$, para todo $n \geq 0$, resulta que

$$|c_n| \leq a'(1+n)^{-m},$$

para todo $n \geq 0$, onde $a' = a\tilde{a}$. Logo, como isso vale para todo $m \geq 0$, resulta da N -representação que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\sqrt{t})^n} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \in \mathcal{S}$. $\square$

3.5 Lema de Itô

Finalmente, chegamos ao resultado esperado desta dissertação, que é uma fórmula de Itô para distribuições temperadas.

Teorema 3.5.1 *Sejam $F \in \mathcal{S}'$ e $t > s > 0$. Então*

$$F(B_t) - F(B_s) = \int_s^t F'(B_r) dB_r + \frac{1}{2} \int_s^t F''(B_r) dr,$$

onde

$$\int_s^t F'(B_r) dB_r = \int_s^t S^{-1} \left(\xi(r) S(F'(B_r))(\xi) \right) dr.$$

Demonstração: Os números que aparecem logo acima do sinal de igualdade, se referem ao lema utilizado, que se encontra após a demonstração. Temos:

$$S(F(B_t))(\xi) - S(F(B_s))(\xi) \stackrel{(3.5.2)}{=} F * g_{\sqrt{t}} \left(\int_0^t \xi(y) dy \right) - F * g_{\sqrt{s}} \left(\int_0^s \xi(y) dy \right)$$

$$\begin{aligned}
&= F * \left(g_{\sqrt{t}} \left(\int_0^t \xi(y) dy \right) - g_{\sqrt{s}} \left(\int_0^s \xi(y) dy \right) \right) \\
&\stackrel{(3.5.3)}{=} F * \left(\int_s^t \frac{d}{dr} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr \right) \\
&\stackrel{(3.5.4)}{=} \int_s^t F * \frac{d}{dr} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr \\
&\stackrel{(3.5.5)}{=} - \int_s^t F * \xi(r) \frac{d}{dx} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_s^t F * \frac{d^2}{dx^2} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr \\
&= - \int_s^t \xi(r) \frac{d}{dx} F * g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{d^2}{dx^2} F * g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr \\
&= - \int_s^t \xi(r) \frac{d}{dx} S(F(B_r))(\xi) dr + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{d^2}{dx^2} S(F(B_r))(\xi) dr \\
&= \int_s^t \xi(r) S(F'(B_r))(\xi) dr + \frac{1}{2} \int_s^t S(F''(B_r))(\xi) dr.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos o resultado esperado aplicando S^{-1} e o Corolário 3.5.7. $\square$

Lema 3.5.2 Se $u \in \mathcal{S}'$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$S(u(I(f))) (\xi) = u * g_\varepsilon (\langle f, \xi \rangle),$$

para toda $\xi \in \mathcal{S}$, onde $\varepsilon = \|f\|$.

Demonstração: Sabemos que (ver demonstração do Teorema 3.4.7)

$$u(I(f)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n(f_n),$$

onde $f_n = \frac{1}{\|f\|^n \sqrt{n!}} f^{\otimes n}$. Assim,

$$\begin{aligned}
S(u(I(f))) (\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n S(I_n(f_n)) (\xi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\|f\|^n \sqrt{n!}} S(I_n(f^{\otimes n})) (\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\|f\|^n \sqrt{n!}} (f^{\otimes n}, \xi^{\otimes n})_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, g_{n, \|f\|} \rangle \frac{1}{\|f\|^n \sqrt{n!}} (f, \xi)_{L^2(\mathbb{R})}^n.
\end{aligned}$$

Seja $\beta = (f, \xi)_{L^2(\mathbb{R})}$. Pelo Lema A.1.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \langle u, g_{n, \|f\|} \rangle \frac{1}{\|f\|^n \sqrt{n!}} \beta^n &= \left\langle u, \sum_{n=0}^{\infty} g_{n, \|f\|} \frac{1}{\|f\|^n \sqrt{n!}} \beta^n \right\rangle \\
&= \left\langle u, \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\|f\|} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} h_n \left(\frac{x}{\|f\|} \right) g_{\|f\|} \right\rangle \\
&= \left\langle u, \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\|f\|} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} h_n \left(\frac{x}{\|f\|} \right) \frac{1}{\|f\| \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\|f\|^2}} \right\rangle \\
&= \left\langle u, \frac{1}{\|f\| \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\|f\|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\|f\|} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} h_n \left(\frac{x}{\|f\|} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle u, \frac{1}{\|f\| \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\|f\|^2}} e^{\frac{2\beta x - \beta^2}{2\|f\|^2}} \right\rangle \\
&= \left\langle u, \frac{1}{\|f\| \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\beta)^2}{2\|f\|^2}} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S(u(I(f)))(\xi) &= \langle u, g_{\|f\|}(x - \beta) \rangle \\
&= u * g_{\varepsilon}(\langle f, \xi \rangle)
\end{aligned}$$

□

Lema 3.5.3

$$g_{\sqrt{t}} \left(\int_0^t \xi(y) dy \right) - g_{\sqrt{s}} \left(\int_0^s \xi(y) dy \right) = \int_s^t \frac{d}{dr} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr.$$

Demonstração: Teorema fundamental do cálculo.

□

Lema 3.5.4

$$F * \left(\int_s^t \frac{d}{dr} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr \right) = \int_s^t F * \frac{d}{dr} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy \right) dr.$$

Demonstração: Seja $f = f(r)$ uma função integrável em $[s, t]$. Mostremos que o lema vale para f . Com efeito, sejam $P = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ partições do intervalo $[s, t]$ e sejam $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Logo,

$$\begin{aligned} F * \int_s^t f(r) dr &= F * \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F * f(x_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_s^t F * f(r) dr, \end{aligned}$$

uma vez que a convolução é linear e contínua. $\square$

Lema 3.5.5

$$\frac{d}{dr} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy - x \right) = \xi(r) \frac{d}{dx} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy - x \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} g_{\sqrt{r}} \left(\int_0^r \xi(y) dy - x \right).$$

Demonstração: Basta calcular as respectivas derivadas. $\square$

Lema 3.5.6

$$S \left(\int_s^t f(r) dr \right) (\xi) = \int_s^t S(f(r)) (\xi) dr.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} \left\langle \int_s^t f(r) dr, u + \xi \right\rangle &= \left\langle \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1}), u + \xi \right\rangle \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \langle f(x_i), u + \xi \rangle (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_s^t \langle f(r), u + \xi \rangle dr. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} S \left(\int_s^t f(r) dr \right) (\xi) &= \int_{S'} \left\langle \int_s^t f(r) dr, u + \xi \right\rangle d\mu(u) \\ &= \int_{S'} \int_s^t \langle f(r), u + \xi \rangle dr d\mu(u) \\ &= \int_s^t \int_{S'} \langle f(r), u + \xi \rangle d\mu(u) dr \\ &= \int_s^t S(f(r)) (\xi) dr. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 3.5.7

$$S^{-1} \int_s^t g(r) dr = \int_s^t S^{-1}(g(r)) dr.$$

Demonstração: Tomando $f(r) = S^{-1}g(r)$ no Lema 3.5.6, obtemos

$$S \left(\int_s^t S^{-1}g(r) dr \right) (\xi) = \int_s^t g(r) dr.$$

Logo, aplicando S^{-1} , segue o resultado. □

Como uma aplicação do lema de Itô, podemos calcular o valor de

$$\int_s^t \delta_x(B_r) dr.$$

De fato, seja

$$F_x(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x \end{cases}$$

Observamos que F_x é a mesma função do Exemplo 1.3.13. Logo, $F_x \in \mathcal{S}'$, $F'_x = H_x$ e $F''_x = \delta_x$, onde

$$H_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x \end{cases}$$

Portanto, pelo lema de Itô, obtemos que

$$F_x(B_t) - F_x(B_s) = \int_s^t H_x(B_r) dB_r + \frac{1}{2} \int_s^t \delta_x(B_r) dr,$$

isto é,

$$\int_s^t \delta_x(B_r) dr = 2[F_x(B_t) - F_x(B_s)] - 2 \int_s^t H_x(B_r) dB_r.$$

Apêndice A

Apêndice

A.1 Resultados sobre polinômios de Hermite, e um resultado de K. Itô

Definição A.1.1 Definimos os *polinômios de Hermite* como sendo

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$n = 0, 1, \dots$, $x \in \mathbb{R}$. h_n é um polinômio de grau n e é chamado de n -ésimo *polinômio de Hermite*.

Para $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $T > 0$, denotemos

$$\|g\| = \|g\|_{L^2([0, T])} = \int_0^T |g(t)|^2 dt.$$

Teorema A.1.2 *Sejam $g \in L^2([0, T])$ e $B = \{B_t \mid t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano. Então,*

$$\int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} g(t_1)g(t_2) \cdots g(t_n) dB_{t_1} dB_{t_2} \cdots dB_{t_n} = \frac{\|g\|^n}{n!} h_n \left(\frac{\int_0^T g(s) dB_s}{\|g\|} \right).$$

Lema A.1.3 *Se $\alpha, x \in \mathbb{R}$, então*

$$e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} h_n(x).$$

Demonstração: Como $\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x - \alpha)^2$, segue que

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} &= e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2} \\
 &= e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \Big|_{\alpha=0} e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2} \\
 &= e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{d^n}{du^n} \Big|_{u=x} e^{-\frac{u^2}{2}} \right) \left(\frac{du}{dx} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) (-1)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} h_n(x).
 \end{aligned}$$

□

Lema A.1.4 Se $\alpha, x, t \in \mathbb{R}$, então

$$e^{\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n t^{\frac{n}{2}} n! h_n(x).$$

Demonstração: Seja $u = \alpha\sqrt{t}$. Logo, pelo Lema A.1.3,

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}} &= e^{u \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{u^2}{2}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} h_n \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n t^{\frac{n}{2}}}{n!} h_n \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).
 \end{aligned}$$

□

Definição A.1.5

$$g_n(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} e^{\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}}.$$

Lema A.1.6

$$g_n(x, t) = t^{\frac{n}{2}} h_n \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

Demonstração: De fato, pelo Lema A.1.4,

$$\begin{aligned}
 g_n(x, t) &= \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^{\frac{k}{2}}}{k!} h_k \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k-n} t^{\frac{k}{2}}}{k!} h_k \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Big|_{\alpha=0} \\
 &= \frac{\alpha^{k-n} t^{\frac{k}{2}}}{k!} h_k \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Big|_{k=n} \\
 &= t^{\frac{n}{2}} h_n \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).
 \end{aligned}$$

□

Lema A.1.7

$$\frac{\partial}{\partial x} g_n(x, t) = n g_{n-1}(x, t).$$

Demonstração: Como $\frac{d}{dx} h_n(x) = n h_{n-1}(x)$, segue do Lema A.1.6 que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} g_n(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(t^{\frac{n}{2}} h_n \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right) \\
 &= \frac{t^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{t}} n h_{n-1} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \\
 &= n g_{n-1}(x, t).
 \end{aligned}$$

□

Lema A.1.8

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) g_n(x, t) = 0.$$

Demonstração: Note que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}} = \alpha^2 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}} = -\frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}}.$$

Logo, como podemos trocar $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ com $\frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$, o resultado segue.

□

Lema A.1.9 *Seja $\{X_t \mid t \in [0, T]\}$ um processo estocástico tal que $X_0 = 0$ e seja $t \in [0, T]$. Então*

$$g_n(X_t, \langle X \rangle_2(t)) = n! \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} dX_{t_1} dX_{t_2} \cdots dX_{t_n},$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Seja $t \in [0, T]$. Aplicando a fórmula de Itô para g_n e utilizando os Lemas A.1.7 e A.1.8, vemos que

$$\begin{aligned} g_n(X_t, \langle X \rangle_2(t)) &= g_n(X_0, \langle X \rangle_2(0)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g_n(X_s, \langle X \rangle_2(s)) dX_s + \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) g_n(X_s, \langle X \rangle_2(s)) d\langle X \rangle_2(s) \\ &= g_n(0, 0) + \int_0^t n g_{n-1}(X_s, \langle X \rangle_2(s)) dX_s \\ &= n \int_0^t g_{n-1}(X_s, \langle X \rangle_2(s)) dX_s, \end{aligned}$$

uma vez que $g_n(0, 0) = 0$.

Como $g_1(X_t, \langle X \rangle_2(t)) = X_t$ e $1! \int_0^t dX_{t_1} = X_t - X_0 = X_t$, o resultado vale para $n = 1$. Suponha agora que

$$g_{n-1}(X_s, \langle X \rangle_2(s)) = (n-1)! \int_0^s \int_0^{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2} dX_{t_1} dX_{t_2} \cdots dX_{t_{n-1}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_n(X_t, \langle X \rangle_2(t)) &= n \int_0^t g_{n-1}(X_{t_n}, \langle X \rangle_2(t_n)) dX_{t_n} \\ &= n \int_0^t \left[(n-1)! \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2} dX_{t_1} dX_{t_2} \cdots dX_{t_n} \right] dX_{t_n} \\ &= n! \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} dX_{t_1} dX_{t_2} \cdots dX_{t_n}, \end{aligned}$$

provando assim o lema. □

Demonstremos agora o Teorema A.1.2. Defina o processo $\{Y_t \mid t \in [0, T]\}$ pondo $Y_t = \frac{\int_0^t g(s) dB_s}{\|g\|}$. Assim, $Y_0 = 0$ e $\langle Y \rangle_2(t) = \frac{\int_0^t g^2(s) ds}{\|g\|^2}$. Logo, pelo Lema A.1.9, temos que

$$g_n(Y_T, \langle Y \rangle_2(T)) = n! \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} dY_{t_1} dY_{t_2} \cdots dY_{t_n}.$$

Isto é,

$$g_n \left(\frac{\int_0^T g(s) dB_s}{\|g\|}, 1 \right) = n! \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \frac{g(t_1)}{\|g\|} \cdots \frac{g(t_n)}{\|g\|} dB_{t_1} dB_{t_2} \cdots dB_{t_n}.$$

Portanto, segue do Lema A.1.6 que

$$\int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} g(t_1) g(t_2) \cdots g(t_n) dB_{t_1} dB_{t_2} \cdots dB_{t_n} = \frac{\|g\|^n}{n!} h_n \left(\frac{\int_0^T g(s) dB_s}{\|g\|} \right).$$

□

Corolário A.1.10 *Sejam $g \in L^2([0, T])$ e $B = \{B_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ um movimento Browniano. Então,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) g(t_2) \cdots g(t_n) dB_{t_1} dB_{t_2} \cdots dB_{t_n} = \frac{\|g\|^n}{n!} h_n \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(s) dB_s}{\|g\|} \right).$$

Demonstração: Como os polinômios de Hermite são funções contínuas, basta tomarmos limites. □

Observação A.1.11 Utilizando a definição de polinômios de Hermite dada no capítulo 3, a equação acima fica da seguinte maneira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) g(t_2) \cdots g(t_n) dB_{t_1} dB_{t_2} \cdots dB_{t_n} = \|g\|^n \sqrt{n!} h_n \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(s) dB_s}{\|g\|} \right).$$

A.2 Espaços de Sobolev e convoluções

Definição A.2.1 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definimos a *transformada de Fourier* da f como sendo a função

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i xy} dx,$$

quando esta integral existe.

Observação A.2.2 (a) Na integral acima, xy denota o produto interno canônico de x e y em $\mathbb{R}^n$.

(b) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então existe a transformada de Fourier da f .

Proposição A.2.3 Se $f, g \in L^1$, então

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Demonstração: Basta observar que ambos os lados são iguais à

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dxdy.$$

□

Corolário A.2.4 Se $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, então

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \check{\varphi}, \hat{\psi} \rangle.$$

Demonstração: Segue de

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \varphi(x)\psi(x)dx.$$

□

Definição A.2.5 Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev de ordem α é o espaço

$$H^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_\alpha < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 (1 + |x|^2)^\alpha dx.$$

Proposição A.2.6 A transformada de Fourier é um isomorfismo unitário entre $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n, \nu_n)$, onde $d\nu_n = (1 + |x|^2)^\alpha dx$.

Observação A.2.7 Esta demonstração será omitida, devido à sua extensão. No entanto, pode ser encontrada em [2].

Proposição A.2.8 $T \in (H^\alpha)'$ se, e somente se, existe $g \in H^{-\alpha}$ tal que $T = \langle g, \cdot \rangle$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja $g \in H^{-\alpha}$. Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle \check{g}, \hat{\varphi} \rangle = \int \check{g}(x)\hat{\varphi}(x)dx.$$

Assim, segue da desigualdade de Schwarz que

$$\begin{aligned}
 |(\check{g}, \hat{\varphi})| &\leq \int |\check{g}(x)| |\hat{\varphi}(x)| dx \\
 &= \int |\hat{g}(-x)| (1 + |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |\hat{\varphi}(x)| dx \\
 &\leq \left(\int |\hat{g}(-x)|^2 (1 + |x|^2)^{-\alpha} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\hat{\varphi}(x)|^2 (1 + |x|^2)^{\alpha} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|g\|_{-\alpha} \|\varphi\|_{\alpha},
 \end{aligned}$$

isto é, o funcional $\langle T_g, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ é linear e contínuo. Logo, T_g se estende à $H^{-\alpha}$ com norma menor ou igual à $\|g\|_{-\alpha}$. No entanto, se definirmos $f(x) = \left[\hat{g}(-x) (1 + |x|^2)^{-\alpha} \right]^\sim$, obtemos que $f \in H^{\alpha}$ e $\|g\|_{-\alpha} = \|f\|_{\alpha}$. Além disso,

$$\langle T_g, f \rangle = \int |\check{g}(x)|^2 (1 + |x|^2)^{-\alpha} dx = \|g\|_{-\alpha}^2 = \|g\|_{-\alpha} \|f\|_{\alpha}.$$

Portanto,

$$\|T_g\| = \|g\|_{-\alpha}.$$

($\Rightarrow$) Seja $T \in (H^{\alpha})'$. Logo, $T \circ \mathfrak{F}^{-1}$ é um funcional linear contínuo em $L^2(\nu)$, onde $d\nu = (1 + |x|^2)^{\alpha} dx$. Pelo teorema da representação de Riesz, existe uma única $f \in L^2(\nu)$ tal que para toda $\varphi \in H^{\alpha}$, temos

$$\langle T, \varphi \rangle = \int (1 + |x|^2)^{\alpha} f(x) \hat{\varphi}(x) dx.$$

Sendo assim, $T = T_g$, onde $g = \left[\hat{f}(x) (1 + |x|^2)^{\alpha} \right]^\sim \in H^{-\alpha}$. □

Observação A.2.9 $H^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ são duais um do outro no sentido de espaços de Banach.

Falaremos agora um pouco sobre convolução.

Definição A.2.10 Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções. A *convolução* de f e g é a função

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy,$$

definida em todos os pontos em que exista tal integral.

Proposição A.2.11 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ e g' é limitada, então

$$(f * g)' = f * g'.$$

Demonstração: Observamos que $f * g = g * f$, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{\infty}^{-\infty} f(z)g(x-z)(-1)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Defina $F(x, y) = f(y)g(x-y)$. Por hipótese, $F(x, \cdot)$ é integrável, para cada $x \in \mathbb{R}$. Além disso, como $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = f(y) \frac{d}{dx} g(x-y)$, segue que $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y)$ é limitada por uma função de L^1 , uma vez que g' é limitada e $f \in L^1$. Portanto, $\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y)dy$. Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{d}{dx} g(x-y)dy.$$

□

Definição A.2.12 Sejam $T \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$. A *convolução de T e φ* é definida como sendo a distribuição temperada $T * \varphi$, dada por

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \psi * \tilde{\varphi} \rangle,$$

onde $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Bibliografia

- [1] CATUOGNO, P. - Notas de Aula de Cálculo Estocástico, 2007.
- [2] FOLLAND, G. B. - Real Analysis. John Wiley & Sons, 1984.
- [3] HIDA, T. - Brownian Motion. Springer-Verlag, 1980.
- [4] KUBO, I. - Ito Formula For Generalized Brownian Functionals. Proc. Conf. on Theory and Appl. of Random Fields, Bangalore (1983), Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 49 (1983), 156-166, Springer-Verlag.
- [5] KUO, H-H. - White Noise Distribution Theory. CRC Press, 1996.
- [6] OKSENDAL, B. - (Notas de Aula) An Introduction to Malliavin Calculus With Applications to Economics, 1997.
- [7] OKSENDAL, B. - Stochastic Differential Equations, fifth edition. Springer-Verlag, 2000.
- [8] OKSENDAL, B., HOLDEN, H., UBOE, J. e ZHANG, T. - Stochastic Partial Differential Equations. Birkhäuser, 1996.
- [9] POTTHOFF, J. - (Notas de Aula) An Introduction to White Noise and Malliavin Calculus.
- [10] PROTTER, P. E. - Stochastic Integration and Differential Equations, second edition. Springer, 2004.
- [11] REED, M. e SIMON, B. - Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis. Academic Press, 1973.
- [12] RUSSEK, A. - Hermite Expansions of Generalized Brownian Functionals. Probability Theory on Vector Spaces III (1980), 233-243.

- [13] SIMON, B. - Distributions and Their Hermite Expansions. Journal of Mathematical Physics, vol. 12 (1971), 140-148.
- [14] SONDERMANN, D. - Introduction to Stochastic Calculus for Finance. Springer, 2006.