

**Universidade Estadual de Campinas
UNICAMP**

**Instituto de Matemática, Estatística e C. da Computação
IMECC**

Dissertação de Doutorado em Matemática:

**Problemas de evolução não lineares
com perturbações não-monótonas e
condições mistas de contorno.**

Orientador: Prof. Dr. Aloísio J.F. Neves

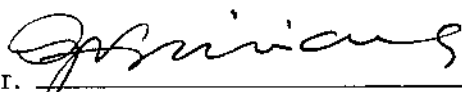
Autor: Valdair Bonfim.

Campinas, 6 de setembro de 1996.

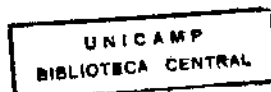
PROBLEMAS DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES COM PERTURBAÇÕES NÃO-MONÓTONAS E CONDIÇÕES MISTAS DE CONTORNO.

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Valdair Bonfim e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 06 de setembro de 1996

Prof. Dr. 
Aloísio J. F. Neves
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Ciência da Computação, UNI-
CAMP, como requisito parcial para obtenção do
Título de DOUTOR em MATEMÁTICA



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	B641P
V.	Ex.
TOMBO BC	28765
PROC.	667.1.96
C	☐
D	☒
PNECO	88.11.96
DATA	11/10/96
N.º CPD	

CM-00092812-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bonfim, Valdair

B641p Problemas de evolução não lineares com perturbações não-monótonas e condições mistas de contorno / Valdair Bonfim -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

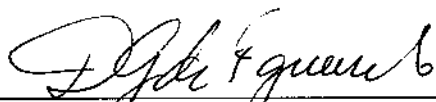
Orientador : Aloísio José Freiria Neves

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Equações de evolução não lineares. 2. Galerkin, métodos de. 3. Equações diferenciais parabólicas. 4. Equações diferenciais hiperbólicas. I. Neves, Aloísio José Freiria. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 06 de setembro de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



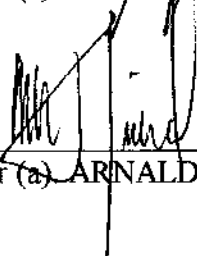
Prof (a). Dr (a). DAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO



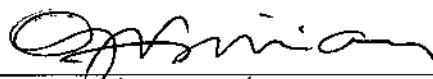
Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES



Prof (a). Dr (a). FLAVIO DICKSTEIN



Prof (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO



Prof (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

Dedico a:

Meus pais: *Vicente e Maria Dalva.*

Minha esposa: *Lúcia.*

Minha filha: *Laís.*

Agradecimentos

Ao professor Dr. Aloísio Neves toda a minha gratidão pela orientação segura, atenção desmedida, encorajamento e amizade.

Aos meus pais pelo apoio e carinho nas horas difíceis.

À minha esposa Lúcia, cuja cooperação foi imprescindível na conclusão deste trabalho.

À minha filha Laís, que aos dois anos de idade ainda não compreende porque eu trabalho também em casa, e não somente na Unicamp.

Ao IMECC pela minha formação, em especial aos professores Aloísio Neves, José Luiz Boldrini, Wilson Castro, Orlando Lopes, Djairo Guedes, J. Mujica e Mário Matos, professores estes cujas qualidades humanas e profissionais eu sempre tentarei alcançar.

Ao DM-UFSCar por conceder o afastamento.

Aos colegas do doutorado: Alveri Santana, Geraldo Botelho, Janete Crema, João Marcos Bezerra do Ó e Marcelo Montenegro.

Ao Flávio pela paciência que teve comigo no trabalho de digitação.

A Deus, por tudo.

Resumo

Neste trabalho estudamos questões relacionadas com a existência e regularidade de soluções de problemas hiperbólicos e parabólicos, com condições de contorno mistas e descontínuas, e perturbações não-monótonas no caso parabólico. Abordamos também a questão da continuidade dessas soluções com relação às condições iniciais e termo forçante, bem como o da existência de soluções periódicas forçadas.

Índice

Introdução	(v)
------------------	-----

Capítulo 1:

1 Preliminares	01
1.1 Espaços funcionais	01
1.2 Conceitos de solução forte e fraca e resultados abstratos	04
2 O problema $u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} + q(t, x, u_t) = 0$: formulação abstrata e existência de solução fraca	09
3. Regularidade	13

Capítulo 2:

1 O problema (P_{II}) quando $G \equiv 0$	17
2 O problema (P_{II}) genérico	23
2.1 O problema aproximado (P_γ)	25
2.2 Regularidade para as soluções de (P_γ)	47
2.3 O problema (P_γ) com condição inicial em H	48
2.4 Continuidade da solução com respeito às condições iniciais e termo forçante	52
2.5 De volta a (P_{II}) : existência, unicidade e dependência contínua	54
3 Soluções periódicas forçadas	63
Bibliografia	74

Introdução

Neste trabalho consideramos a questão da existência de soluções para duas classes de equações diferenciais parciais de evolução.

A primeira, tratada no capítulo I, estuda o problema

$$(1) \quad u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} + q(t, x, u_t) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in]0, \ell[,$$

com condições de contorno (2) colocadas adiante.

Equações desse tipo têm sido tratadas por Massat [10], Webb [11] e Fitzgibbon [12].

A equação (1) serve de modelo, por exemplo, para a deformação longitudinal, a partir da posição de equilíbrio, de uma barra de comprimento ℓ num determinado sistema mecânico. O termo $q(t, x, u_t)$ incorpora atritos do sistema, e as hipóteses que colocamos em q engloba casos usualmente encontrados nas aplicações (veja Barreto [9]). No caso particular de sistemas de bombeio mecânico de petróleo ([7], [8], [9], [15]) a função $u(t, x)$ deve satisfazer a equação (1) juntamente com condições de contorno que são não-lineares e descontínuas. Essa condição de contorno descontínua deve-se a um mecanismo de válvulas que imprime mudanças repentinas na tensão aplicada na extremidade da barra. Mais precisamente, denotando por H a função de Heaviside, consideramos em $x = \ell$ a condição de contorno $u_x(t, \ell) + u_{tx}(t, \ell) = m \cdot [1 - H(u_t(t, \ell))]$, isto é, para um sistema de referências adequado, quando a velocidade $u_t(t, \ell)$ é positiva então a tensão na extremidade $x = \ell$ da barra é nula, ao passo que quando $u_t(t, \ell)$ é negativa então a tensão corresponde ao peso da coluna de óleo em elevação. Na extremidade $x = 0$ pedimos que $u(t, 0) = \mu(t)$, onde $\mu(t)$ provém do movimento imposto ao sistema por um motor na superfície (sem perda de generalidade veremos que podemos supor $\mu = 0$). Resumindo, consideramos as condições de contorno

$$(2) \quad u(t, 0) = 0, \quad u_x(t, \ell) + u_{tx}(t, \ell) = m.[1 - H(u_t(t, \ell))].$$

Para a existência de soluções fracas utilizamos a teoria dos operadores máximos monótonos (Brézis [1]).

Mostramos que o problema (1)-(2) gera um semigrupo não-linear num espaço adequado, sendo que a principal dificuldade foi a formulação adequada do domínio do gerador do semigrupo.

A regularidade das soluções é conseguida pela observação de que $z := u + u_t - u(t, \ell)\xi$, onde u é solução fraca de (1)-(2) e ξ é um certo elemento de $L^\infty(0, \ell)$, satisfaz um problema de evolução do tipo:

$$(P_{II}) \quad z_t - z_{xx} + G(z) = h(t, x), \quad z(t, 0) = 0, \quad z_x(t, \ell) = m[1 - H(z(t, \ell))]$$

onde G é uma certa aplicação de $H_{1,0}$ em $L^2(0, \ell)$.

Este problema motivou o capítulo II, pois não encontramos na literatura resultados que se aplicavam ao caso específico acima. Neste capítulo resolvemos (P_{II}) para uma classe bastante ampla de aplicações G , a qual inclui obviamente o caso proveniente do capítulo I.

Em Hirano [4] e Ahmed-Xiang [5] encontramos resultados abstratos envolvendo perturbações não-monótonas G , entretanto as hipóteses que eles colocam em G não são satisfeitas para a classe que temos em mente. De fato, a nossa classe engloba casos que não cumprem a condição $(Gv, v) \geq -c \in \mathbb{R}$ feita em [4] e [5]. Mais ainda, estes autores pedem propriedades de continuidade de G mais restritas do que as nossas.

Falemos um pouco das dificuldades envolvidas na resolução de (P_{II}) . A primeira que ressaltamos é a condição de contorno descontínua. Só ela já torna o problema complicado, mesmo quando $G \equiv 0$. Uma outra dificuldade é o fato de G estar definida em $H_{1,0}$ e tomando valores em $L^2(0, \ell)$, dificultando o uso de técnicas de ponto fixo.

Ressaltadas essas duas grandes dificuldades passamos agora a descrever, em poucas linhas, o procedimento para a resolução de (P_{II}) .

Inicialmente tratamos o caso $G \equiv 0$. Tratamo-lo como um problema de evolução $\dot{z} + A(z) = h$ no espaço $H = L^2(0, \ell)$. Para a formulação abstrata introduzida provamos que A é maximal monótono em H , e mais ainda, que A é a subdiferencial de um funcional convexo, próprio e sci.

Feito isto passamos a considerar o caso $G \not\equiv 0$.

Optamos por utilizar o método de Galerkin para provarmos a existência de solução $z \in L^2(0, T : H_{1,0})$. Isso foi conseguido através de uma suavização da condição de fronteira em $x = \ell$ e posterior passagem ao limite até chegarmos à solução do problema (P_{II}) .

Tudo isto foi feito para condições iniciais z_0 em $H_{1,0}$. Entretanto, pedindo um pouco mais de G (veja pág. 48) estendemos estes resultados para condições iniciais z_0 em $L^2(0, \ell)$.

Agora, exigindo que G seja lipschitziana conseguimos também um teorema de dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais e termo forçante.

Além disso, quando o termo forçante é T -periódico provamos que existe solução forte T -periódica usando técnicas de ponto fixo de Berestycki [6].

Capítulo 1

1 Preliminares

Esta seção será destinada à introdução de alguns conceitos e resultados necessários ao desenvolvimento do trabalho, tais como: espaços funcionais, conceitos de solução fraca, forte e generalizada, lema de Aubin-Lions, bem como alguns resultados abstratos da teoria de operadores maximais monótonos. A única preocupação neste ponto é facilitar a leitura do texto expondo os resultados já estabelecidos na literatura matemática que foram usados durante o trabalho. Por essa razão não colocaremos as demonstrações de tais resultados. Restringir-nos-emos a dar referências das mesmas para os leitores interessados.

1.1 Espaços Funcionais:

Sejam X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e $1 \leq p \leq \infty$.

Definimos $L^p(0, T; X)$ como sendo o espaço de funções $f :]0, T[\rightarrow X$ tais que:

- (i) f é mensurável, e
- (ii) $\|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty$, onde:

$$(1) \quad \|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left[\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right]^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty, \text{ e}$$

$$(2) \quad \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \left\{ C \in \mathbb{R} : \|f(t)\|_X \leq C, \quad \text{para quase todo } t \in [0, T] \right\}$$

Observação: dt é a medida de Lebesgue em $[0, T]$.

É bem conhecido o fato de que $L^p(0, T : X)$ é Banach, para todo $1 \leq p \leq \infty$. Temos as seguintes propriedades:

Proposição 1.1: Sejam X e Y espaços de Banach, $u \in L^1(0, T : X)$ e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então $A\left(\int_0^T u(t)dt\right) = \int_0^T Au(t)dt$.

Em particular, se X' denota o dual topológico de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto de dualidade entre X' e X , então:

$$(3) \quad \left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle = \int_0^T \langle f, u(t) \rangle dt ,$$

quaisquer que sejam $u \in L^1(0, T : X)$ e $f \in X'$.

Um outro espaço de funções com o qual estaremos envolvidos é o seguinte:

Sejam V e H espaços de Hilbert reais.

Denotemos por $((\cdot, \cdot))$ e $\|\cdot\|$ o produto interno e a norma em V , respectivamente. Denotemos por $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$ as quantidades correspondentes para o espaço H . Suponhamos ainda que a inclusão $V \hookrightarrow H$ é contínua.

Então, identificando H e H' via teorema da representação de Riesz, temos as seguintes inclusões contínuas:

$$(4) \quad V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V' .$$

Definimos $W(0, T : V, V')$ por:

$$(5) \quad W(0, T : V, V') = \{u \in L^2(0, T : V) \mid \dot{u} \in L^2(0, T : V')\},$$

e munimos este conjunto da seguinte norma:

$$(6) \quad \|u\|_{W(0, T : V, V')} = \left[\|u\|_{L^2(0, T : V)}^2 + \|\dot{u}\|_{L^2(0, T : V')}^2 \right]^{1/2} .$$

Proposição 1.2: $W(0, T : V, V')$ é Hilbert com o produto interno

$$(7) \quad \int_0^T ((u(t), v(t))) dt + \int_0^T ((\dot{u}(t), \dot{v}(t)))_{V', V'} dt ,$$

onde $((,))_{V', V'}$ é o produto interno de V' definido por $((f, g))_{V', V'} = ((u_f, u_g))$, sendo u_f e u_g os únicos elementos de V que representam f e g , respectivamente.

Demonstração: [2], página 473.

A proposição abaixo dá informações sobre a regularidade dos elementos de $W(0, T : V, V')$.

Proposição 1.3: A inclusão

$$(8) \quad W(0, T : V, V') \hookrightarrow C([0, T] : H)$$

é contínua, onde em $C([0, T] : H)$ consideramos a norma da convergência uniforme, isto é, $\|u\|_{C([0, T] : H)} = \sup_{t \in [0, T]} |u(t)|$.

Demonstração: [2], página 473.

Nos será útil a “fórmula de integração por partes”.

Proposição 1.4: Dados $u, v \in W(0, T : V, V')$ então

$$(9) \quad \int_0^T \langle \dot{u}(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T \langle \dot{v}(t), u(t) \rangle dt = (u(T), v(T)) - (u(0), v(0)).$$

Demonstração: [2], página 477.

Também nos será útil a:

Proposição 1.5: Dados $u, v \in W(0, T : V, V')$ e $v \in V$ temos que

- (i) $t \mapsto (u(t), v)$ pertence a $L^1(0, T)$, portanto existe a derivada no sentido de distribuições, e
- (ii) $\frac{d}{dt}(u(t), v) = \langle \dot{u}(t), v \rangle$, no sentido de $\mathcal{D}'([0, T])$ isto é,
- $$-\int_0^T (u(t), v) \dot{\xi}(t) dt = \int_0^T \langle \dot{u}(t), v \rangle \xi(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}([0, T]).$$

Demonstração: [2], página 477.

1.2 Conceitos de solução forte e fraca e resultados abstratos:

Sejam H um espaço de Hilbert, $T \in \mathbb{R}$ positivo, $f \in L^1(0, T : H)$ e $A : H \rightarrow P(H)$, onde $P(H)$ é o conjunto das partes de H .

O domínio de A é, por definição, o conjunto $D(A) := \{u \in H : A(u) \neq \emptyset\}$, e a imagem de A é $R(A) := \bigcup_{u \in H} A(u)$.

Definição 1: Dizemos que $u \in C([0, T] : H)$ é uma solução forte do problema $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$ se:

- (i) u é absolutamente contínua em todo compacto $K \subset]0, T[$, e portanto existe $\dot{u}(t)$ quase sempre em $]0, T[$ (veja [1], pág. 145);
- (ii) $u(t) \in D(A)$, $\forall t \in]0, T[$;
- (iii) $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$, quase sempre em $]0, T[$.

Definição 2: $u \in C([0, T] : H)$ é dita ser uma solução fraca de $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$ se existirem sequências $f_n \in L^1(0, T : H)$ e $u_n \in C([0, T] : H)$ tais que u_n é solução forte de $\dot{u}_n(t) + A(u_n(t)) \ni f_n(t)$, $f_n \rightarrow f$ em $L^1(0, T : H)$ e $u_n \rightarrow u$ em $C([0, T] : H)$.

Definição 3: Um operador $A : H \rightarrow P(H)$ é dito ser *monótono* se, para todos $u_1, u_2 \in D(A)$, temos que $(v_1 - v_2, u_1 - u_2) \geq 0$ quaisquer que sejam $v_i \in A(u_i)$, $i = 1, 2$. O operador A é dito ser *estritamente monótono* se existir constante $\alpha > 0$ tal que $(v_1 - v_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2$ para todos $u_i \in D(A)$ e

$v_i \in A(u_i)$, $i = 1, 2$.

Podemos colocar a seguinte relação de ordem no conjunto dos operadores multívocos:

$$(10) \quad A \leq B \iff A(u) \subset B(u) \quad , \quad \forall u \in H.$$

Ou seja, $\leq$ é a relação de inclusão dos gráficos.

Podemos ver que o conjunto dos operadores monótonos de H com a relação $\leq$ é indutivo. Logo podemos dar a:

Definição 4: Um operador $A : H \rightarrow P(H)$ é *maximal monótono* se ele for maximal (com respeito a $\leq$) no conjunto dos operadores monótonos.

Temos a seguinte caracterização:

Proposição 1.6: Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow P(H)$. São equivalentes:

- (i) A é maximal monótono;
- (ii) A é monótono e $R(I + A) = H$;
- (iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração unívoca definida em todo H .

Demonstração: [1], pág. 23.

Para a classe dos operadores maximais monótonos temos o:

Teorema 1.7: Seja A maximal monótono em H . Então, dados $u_0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1(0, T : H)$, existe uma única solução fraca u para o problema $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$, $u(0) = u_0$.

Demonstração: [1], pág. 65.

Uma subclasse dos operadores maximais monótonos para os quais temos solução forte (veja teorema 1.9) é a dos operadores do tipo sub-diferencial, que passamos a definir agora:

Um funcional $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dito ser *próprio* se o conjunto $D(\varphi) := \{u \in H \mid \varphi(u) < \infty\}$ é não-vazio, ié, $\varphi \not\equiv \infty$.

Dizemos que $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é *convexa* se:

$$(11) \quad \varphi(tu + (1-t)v) \leq t.\varphi(u) + (1-t).\varphi(v), \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \forall u, v \in H.$$

Isto feito, colocamos a seguinte definição:

Definição 5: Seja $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexo e próprio. A *sub-diferencial* de φ é o operador $\partial\varphi : H \rightarrow P(H)$ definido por:

$$(12) \quad v \in \partial\varphi(u) \quad \text{se e somente se} \quad \varphi(w) \geq \varphi(u) + (v, w - u), \quad \forall w \in H.$$

Teorema 1.8: Seja $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexo e próprio. Então $\partial\varphi$ é monótono em H . Se além disso φ é semi-contínuo inferiormente (sci) então $\partial\varphi$ é maximal monótono em H .

Demonstração: [1], páginas 21 e 25.

Teorema 1.9: Seja $A = \partial\varphi$, onde $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexo, próprio e sci. Se $f \in L^2(0, T : H)$ então toda solução fraca do problema $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$, a qual existe pelos teoremas 1.7 e 1.8, é de fato solução forte. Mais ainda, temos que:

- (i) $t \mapsto \sqrt{t}\dot{u}(t)$ pertence a $L^2(0, T : H)$;
- (ii) $t \mapsto \varphi(u(t))$ pertence a $L^1(0, T)$;
- (iii) $t \mapsto \varphi(u(t))$ é absolutamente contínua (AC) em $[\delta, T], \forall \delta > 0$;

(iv) Se $u(0) \in D(\varphi)$ então a função $t \mapsto \varphi(u(t))$ é AC em $[0, T]$ e $\dot{u} \in L^2(0, T : H)$.

Demonstração: [1], páginas 72 a 76.

Nos será útil também o:

Lema 1.10: Sejam $A : H \rightarrow P(H)$ monótono, f e g em $L^1(0, T : H)$, e u, v soluções fracas de $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$ e $\dot{v}(t) + A(v(t)) \ni g(t)$. Então $|u(t) - v(t)| \leq |u(s) - v(s)| + \int_s^t |f(\sigma) - g(\sigma)| d\sigma, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$.

Demonstração: [1], páginas 64 e 65.

No que se refere a perturbações de operadores monótonos maximais temos o:

Teorema 1.11: Sejam $A : H \rightarrow P(H)$ maximal monótono e $B : H \rightarrow H$ monótono e lipschitziano. Então $A + B$ é maximal monótono.

Demonstração: [1], página 34.

Sobre existência de soluções periódicas temos os dois resultados clássicos abaixo:

Teorema 1.12: Se A é maximal monótono em H , $w > 0$, e $f \in BV(0, T : H)$ (i.e., $f : [0, T] \rightarrow H$ é de variação limitada), então o problema $\dot{u}(t) + A(u(t)) + wu(t) \ni f(t)$, $u(0) = u(T)$, tem solução forte.

Demonstração: [1], páginas 93 e 94.

Teorema 1.13: Seja A maximal monótono e coercivo, i.e., existe $u_0 \in H$ tal que:

$$(13) \quad \lim_{\substack{|u| \rightarrow \infty \\ u \in A(u)}} \frac{(v, u - u_0)}{|u|} = +\infty.$$

Então, para toda $f \in L^1(0, T : H)$, existe uma solução fraca do problema $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$, $u(0) = u(T)$.

Demonstração: [1], página 95.

Como consequência imediata dos teoremas 1.9 e 1.13 temos o

Corolário 1.14: Seja $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, própria e sci. Suponha que $\partial\varphi$ é coercivo. Então, para cada $f \in L^2(0, T : H)$, existe solução forte do problema $\dot{u}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t)$, $u(0) = u(T)$, com $\dot{u} \in L^2(0, T : H)$.

Outro resultado muito útil no desenvolvimento do trabalho é o:

Teorema 1.15: Sejam dados A_n e A operadores maximais monótonos, f_n e $f \in L^1(0, T : H)$, $u_{0n} \in \overline{D(A_n)}$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$. Sejam u_n e $u \in C([0, T] : H)$ as soluções fracas de:

$$\begin{aligned} \dot{u}_n(t) + A_n(u_n(t)) &\ni f_n(t), \quad u_n(0) = u_{0n}, \text{ e} \\ \dot{u}(t) + A(u(t)) &\ni f(t), \quad u(0) = u_0, \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Se $u_{0n} \rightarrow u_0$ em H , $f_n \rightarrow f$ em $L^1(0, T : H)$, e se

$$(I + \lambda A_n)^{-1}(z) \xrightarrow{n} (I + \lambda A)^{-1}(z) \quad \text{em } H, \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall z \in H,$$

então $u_n \rightarrow u$ em $C([0, T] : H)$. Ou seja, é contínua a aplicação $(u_0, f, A) \mapsto u$, onde u é a única solução fraca de $\dot{u}(t) + A(u(t)) \ni f(t)$, $u(0) = u_0$.

Demonstração: [1], página 102.

Lema 1.16 (Aubin-Lions): Sejam $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ espaços de Banach tais que:

- (i) a imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta;
- (ii) B_k é reflexivo, $k = 0, 1$.

Sejam $0 < T < \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, e

$W := \{v \in L^{p_0}(0, T : B_0) \mid \dot{v} \in L^{p_1}(0, T : B_1)\}$, munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0, T : B_0)} + \|\dot{v}\|_{L^{p_1}(0, T : B_1)}.$$

Então $(W, \|\cdot\|_W)$ é Banach, e está imerso compactamente em $L^{p_0}(0, T : B)$.

Demonstração: [3], página 58.

2 O problema $u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} + q(t, x, u_t) = 0$: formulação abstrata e existência de solução fraca.

Como foi dito na introdução, consideraremos o problema

$$(P_I) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} + q(t, x, u_t) = 0 \\ u(t, 0) = \mu(t), \quad u_x(t, \ell) + u_{tx}(t, \ell) = m.[1 - H(u_t(t, \ell))] \end{cases}$$

onde

- (i) onde $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\tilde{\mu} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$;
- (ii) ℓ, m, T , são constantes positivas;
- (iii) para cada $t \in [0, T]$ fixado, a aplicação $v \in L^2(0, \ell) \mapsto q(t, \cdot, v(\cdot)) \in L^2(0, \ell)$ é lipschitziana, com constante de lipschitz independente de $t \in [0, T]$, isto é, existe constante $K > 0$ tal que $|q(t, \cdot, u) - q(t, \cdot, v)|_{L^2(0, \ell)} \leq K \|u - v\|_{L^2(0, \ell)}$, $\forall t \in [0, T]$ e $\forall u, v \in L^2(0, \ell)$.
- (iv) Para cada $v \in L^2(0, \ell)$ fixado, a aplicação $t \mapsto q(t, \cdot, v(\cdot))$ pertence ao espaço $L^2(0, T : L^2(0, \ell))$.

Casos importantes que aparecem nas aplicações (veja [9]) são:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} + cu_t &= f(t, x) \quad \text{e} \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} + \int_0^\ell u_t(t, s) ds &= f(t, x), \end{aligned}$$

onde $c > 0$ é constante e $f \in L^2_{\text{loc}}(0, \infty : L^2(0, \ell))$.

Estes são dois modelos distintos de atrito usualmente considerados nos sistemas de bombeio mecânico comentado na introdução, e ambos são casos particulares de (P_I) .

Sem perda de generalidade podemos supor $\mu(t) \equiv 0$.

De fato, colocando $\hat{u}(t, x) = u(t, x) - V(t, x)$, onde $V(t, x) = \mu(t) \cdot (x - \ell)^2 / \ell^2$, obtemos a seguinte equação para $\hat{u}$:

$$\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} - \hat{u}_{txx} + \hat{q}(t, x, \hat{u}_t) = 0,$$

onde $\hat{q}(t, x, v) = q(t, x, v + V_t) + [\ddot{\mu}(t)(x - \ell)^2 - 2(\mu(t) + \dot{\mu}(t))]/\ell^2$ satisfaz a condição (iii) graças a condição (i) em $\mu(t)$.

Mas agora a condição de contorno em $x = 0$ é zero, isto é, $\hat{u}(t, 0) = 0$, enquanto não muda em $x = \ell$.

No que segue escrevemos $u(t, x)$ em vez de $\hat{u}(t, x)$, ou seja, estaremos considerando o problema (P_I) com $\mu = 0$.

Vamos agora à formulação abstrata. Colocando $v = u_t$ obtemos:

$$(14) \quad (u_t, v_t) + (-v, -(u + v)_{xx}) + (0, q(t, \cdot, v)) = (0, 0)$$

$$(15) \quad u(t, 0) = 0, \quad (u + v)_x(t, \ell) = m \cdot [1 - H(v(t, \ell))]$$

ou seja, obtemos a equação de evolução:

$$(16) \quad \dot{w}(t) + A(w(t)) + B(t, w(t)) = 0$$

no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H_{1,0} \times L^2(0, \ell)$, com o produto interno

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle = \int_0^\ell u'_1 u'_2 dx + \int_0^\ell v_1 v_2 dx, \quad \text{onde}$$

(17) $B : [0, T] \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é dada por

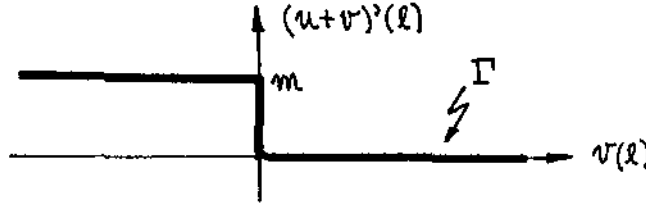
$$B(t, (u, v)) := (0, q(t, \cdot, v)), \quad \text{e}$$

(18) $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$A(u, v) := (-v, -(u + v)''), \quad \text{com}$$

$$D(A) := \{(u, v) \in H_{1,0} \times H_{1,0} \mid u + v \in H^2(0, \ell) \text{ e } (v(\ell), (u + v)'(\ell)) \in \Gamma\}$$

sendo $H_{1,0} := \{u \in H^1(0, \ell) \mid u(0) = 0\}$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ o gráfico abaixo:



Neste ponto podemos provar a:

Proposição 1.17: A é maximal monótono em $\mathcal{H}$.

Demonstração: Sejam $(u_i, v_i) \in D(A)$, $i = 1, 2$. Então:

$\langle A(u_1, v_1) - A(u_2, v_2), (u_1, v_1) - (u_2, v_2) \rangle = (v_1(\ell) - v_2(\ell)) \cdot [(u_2 + v_2)'(\ell) - (u_1 + v_1)'(\ell)] + \|v_1 - v_2\|^2$. Como $(v_i(\ell), (u_i + v_i)'(\ell)) \in \Gamma$ para $i = 1, 2$ então $(v_1(\ell) - v_2(\ell)) \cdot [(u_2 + v_2)'(\ell) - (u_1 + v_1)'(\ell)] \geq 0$, donde segue que A é monótono. Vejamos agora a questão da maximalidade. Seja então $(f, g) \in \mathcal{H} = H_{1,0} \times L^2(0, \ell)$. Queremos $(u, v) \in D(A)$ tal que $(u, v) + A(u, v) = (f, g)$, i.é., $u - v = f$ e $v - (u + v)'' = g$.

Obs.: Observe que não podemos esperar que $u \in H^2$ e $v \in H^2$, pois $u - v = f$ e $f \in H^1(0, \ell)$.

Agora, para conseguir (u, v) como desejado consideremos z e w em $H^2(0, \ell)$ tais que

$$(19) \quad \begin{cases} z - 2z'' = f \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w - 2w'' = g \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

Não é difícil ver que, para $a \in \mathbb{R}$ fixado, existem únicos z e w em $H^2(0, \ell)$ satisfazendo (19).

Agora, definindo u e v por:

$$(20) \quad u := z - z'' + w \quad \text{e} \quad v := z'' + w$$

temos que $u - v = f$, donde $u - v \in H_{1,0}$. Também, como $u + v = z + 2w$ então $u + v \in H^2(0, \ell)$. Em particular $u + v \in H^1(0, \ell)$, o que nos dá, junto com o fato $u - v \in H_{1,0}$, que u e v pertencem a $H^1(0, \ell)$ individualmente. Ou seja, temos

$$(21) \quad u, v \in H^1(0, \ell) \quad \text{e} \quad u + v \in H^2(0, \ell).$$

Agora, usando (20) obtemos que $v - (u + v)'' = g$, graças à escolha (19).

Veremos agora que é possível escolher $a \in \mathbb{R}$ tal que o par (u, v) definido em (20) satisfaça $(v(\ell), (u + v)'(\ell)) \in \Gamma$ e $u(0) = v(0) = 0$. De fato, usando as equações (19) e (20) podemos escrever:

$$(22) \quad u = (z + 2w + f)/2 \quad \text{e} \quad v = (z + 2w - f)/2,$$

donde segue que $u(0) = v(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

Ainda de (20) segue que:

$$(v(\ell), (u + v)'(\ell)) \in \Gamma \iff ((z + 2w)(\ell), (z + 2w)'(\ell)) \in \tilde{\Gamma} := \Gamma + (f(\ell), 0).$$

De (19) tiramos também que $\varphi := z + 2w$ satisfaz o problema:

$$(23) \quad \varphi - 2\varphi'' = f - 2g, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = a$$

Colocando $h := f - 2g$ temos que o par $(\varphi(\ell), \varphi'(\ell))$ é dado, pela fórmula de variação de parâmetros, por:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\ell) \\ \varphi'(\ell) \end{bmatrix} = ae^{\ell M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^\ell e^{(\ell-s)M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ h(s) \end{bmatrix} ds, \quad \text{onde} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação acima é uma reta no plano parametrizada por $a \in \mathbb{R}$, com vetor diretor $e^{\ell M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(\ell) \\ d_2(\ell) \end{bmatrix}$, onde $d_1(\ell) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell^{2k+1}}{(2k+1)!2^k}$ e $d_2(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell^{2k}}{(2k)!2^k}$,

e portanto interceptará o gráfico $\tilde{\Gamma}$ em apenas um ponto, ou seja, existe um único valor a tal que $(\varphi(\ell), \varphi'(\ell)) \in \tilde{\Gamma}$. Assim, escolhendo esse valor para a teremos $(u, v) \in D(A)$ e $(I + A)(u, v) = (f, g)$, o que prova ser A maximal. ■

Assim podemos enunciar o:

Teorema 1.18: Para cada $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{H}$ e $f \in L^2(0, T : L^2(0, \ell))$ existe uma única solução fraca $w \in C([0, T] : \mathcal{H})$ para $\dot{w}(t) + A(w(t)) = (0, f(t))$, $w(0) = w_0$.

Na próxima secção provaremos que essas soluções fracas são de fato soluções fortes. Depois completaremos provando a existência de soluções fortes para o problema original.

3 Regularidade:

Sejam $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{H}$ e $f \in L^2(0, T : H)$ dadas, e denotemos $w = (u, v) \in C([0, T] : \mathcal{H})$ a única solução fraca de $\dot{w}(t) + A(w(t)) = (0, f(t))$, com condição inicial w_0 . Isto é, o par (u, v) satisfaz fracamente o problema:

$$\begin{cases} u_t(t, \cdot) = v(t, \cdot), & v_t(t, \cdot) = (u + v)_{xx}(t, \cdot) + f(t, \cdot) \\ u(t, 0) = 0, & (u + v)_x(t, \ell) = m \cdot [1 - H(v(t, \ell))] \\ u(0, \cdot) = u_0, & v(0, \cdot) = v_0 \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações obtemos:

$$(24) \quad (u + v)_t(t, \cdot) = (u + v)_{xx}(t, \cdot) + v(t, \cdot) + f(t, \cdot)$$

De $u(t, 0) = 0$ então $v(t, 0) = 0$, de onde segue que

$$(25) \quad (u + v)(t, 0) = 0.$$

Coloquemos

$$(26) \quad z(t, \cdot) = (u + v)(t, \cdot) - g(t, \cdot)$$

e tentemos determinar $g(t, x)$ de modo que a condição de contorno $(u + v)_x(t, \ell) = m[1 - H(v(t, \ell))]$ transforme-se em $z_x(t, \ell) = m[1 - H(z(t, \ell))]$, e a condição de contorno em $x = 0$ permaneça a mesma, isto é, $z(t, 0) = 0$. Para isso basta determinar $g(t, x)$ de modo que $z_x(t, \ell) = (u + v)_x(t, \ell)$, $z(t, \ell) = v(t, \ell)$ e $z(t, 0) = 0$. Ora, mas temos que:

$$z_x(t, \ell) = (u + v)_x(t, \ell) \iff g_x(t, \ell) = 0 \quad (C1),$$

$$z(t, \ell) = v(t, \ell) \iff g(t, \ell) = u(t, \ell) \quad (C2), \quad e$$

$$z(t, 0) = 0 \iff g(t, 0) = 0 \quad (C3).$$

Uma $g(t, x)$ satisfazendo (C1)-(C3) é, por exemplo,

$$(27) \quad g(t, x) = u(t, \ell)\xi(x), \quad \text{onde } \xi(x) = (2\ell x - x^2)/\ell^2.$$

Na variável z definida em (26)-(27) a equação (24) transforma-se em:

$$(28) \quad z_t(t, \cdot) - z_{xx}(t, \cdot) + z(t, \ell)\xi(\cdot) = h(t, \cdot) \in L^2(0, \ell),$$

onde $h(t, \cdot) := f(t, \cdot) + v(t, \cdot) + u(t, \ell)\xi''(\cdot)$. Além disso, z satisfaz as condições de contorno:

$$(29) \quad z(t, 0) = 0, \quad z_x(t, \ell) = m[1 - H(z(t, \ell))].$$

No capítulo seguinte provaremos que o problema

$$(P_{II}) \quad \begin{cases} z_t - z_{xx} + G(z) = h(t, x) \\ z(t, 0) = 0, \quad z_x(t, \ell) = m[1 - H(z(t, \ell))] \end{cases}$$

onde G é uma aplicação de $H_{1,0}$ em $L^2(0, \ell)$ satisfazendo certas propriedades, possui soluções fortes quaisquer que sejam as condições iniciais z_0 em $L^2(0, \ell)$ e termo forçante $h \in L^2(0, T : L^2(0, \ell))$.

A classe de aplicações G para as quais faremos isso obviamente incluirá o caso em que $G(z) := z(\ell)\xi(\cdot)$, donde seguirá que $z(t, \cdot) \in H^2(0, \ell)$ para $t > 0$. Mas sendo $(u + v)(t, \cdot) = z(t, \cdot) + g(t, \cdot)$ e $g(t, \cdot) \in H^2(0, \ell)$ então $(u + v)(t, \cdot) \in H^2(0, \ell)$. Em particular $(u + v)(t, \cdot) \in H^1(0, \ell)$, e como já temos $u(t, \cdot) \in H^1(0, \ell)$ então $v(t, \cdot) \in H^1(0, \ell)$ também. Agora, do modo que z foi definida obtemos que $(u + v)_x(t, \ell) = m[1 - H(v(t, \ell))]$.

Resumindo, $w(t) \in D(A)$ para $t > 0$.

Além disso, substituindo a expressão $z(t, \cdot) = (u + v)(t, \cdot) - u(t, \ell)\xi(\cdot)$ na equação (28) obtemos, após simplificação, que $v_t(t, \cdot) - (u + v)_{xx}(t, \cdot) = f(t, \cdot)$, ae $]0, T[$.

Voltando ao problema original, podemos enunciar o:

Teorema 1.19: Para cada $w_0 \in \mathcal{H}$ existe uma única solução forte $w \in C([0, T] : \mathcal{H})$ para o problema $\dot{w}(t) + A(w(t)) + B(t, w(t)) = 0$, $w(0) = w_0$.

Demonstração: Seja $\{w_n\}_{n \geq 1} \subset C([0, T] : \mathcal{H})$ definida por

$$(30) \quad w_1(t) \equiv w_0,$$

e para $n \geq 1$, seja $w_{n+1} \in C([0, T] : \mathcal{H})$ a única solução forte de

$$(31) \quad \dot{w}_{n+1}(t) + A(w_{n+1}(t)) = -B(t, w_n(t)), \quad w_{n+1}(0) = w_0,$$

a qual existe graças à condição (iv) do início da secção, que implica ser de $L^2(0, T : \mathcal{H})$ a aplicação $t \in [0, T] \mapsto B(t, w_n(t))$.

Agora, graças ao lema 1.10 com $s = 0$ temos

$$(32) \quad \|w_{n+1}(t) - w_n(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \int_0^t \|B(\sigma, w_n(\sigma)) - B(\sigma, w_{n-1}(\sigma))\|_{\mathcal{H}} d\sigma, \quad \forall t \in [0, T],$$

e devido a condição (iii) sobre a aplicação q conseguimos

$$\|B(\sigma, w_n(\sigma)) - B(\sigma, w_{n-1}(\sigma))\|_{\mathcal{H}} \leq K \|w_n(\sigma) - w_{n-1}(\sigma)\|_{\mathcal{H}},$$

que, junto com (32) nos dá:

$$\|w_{n+1}(t) - w_n(t)\|_{\mathcal{H}} \leq K \int_0^t \|w_n(\sigma) - w_{n-1}(\sigma)\|_{\mathcal{H}} d\sigma.$$

Consequentemente:

$$\|w_{n+1}(t) - w_n(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{(KT)^n}{n!} \|w_1 - w_0\|_{C([0,T];\mathcal{H})}, \quad \forall t \in [0, T],$$

ou seja,

$$\|w_{n+1} - w_n\|_{C([0,T];\mathcal{H})} \leq \frac{(KT)^n}{n!} \|w_1 - w_0\|_{C([0,T];\mathcal{H})}.$$

Isso implica que $\{w_n\}_{n \geq 1}$ é de Cauchy em $C([0, T] : \mathcal{H})$.

Assim $w_n \rightarrow w$ em $C([0, T] : \mathcal{H})$, solução fraca do problema $\dot{w}(t) + A(w(t)) = -B(t, w(t))$, $w(0) = w_0$.

Mas como $t \in [0, T] \mapsto q(t, \cdot, v(t, \cdot))$ pertence a $L^2(0, T : H)$, segue que existe uma única $\tilde{w} \in C([0, T] : \mathcal{H})$ solução forte de $\dot{\tilde{w}}(t) + A(\tilde{w}(t)) = -B(t, w(t))$, $\tilde{w}(0) = w_0$. Em particular, $\tilde{w}$ é solução fraca de $\dot{\tilde{w}}(t) + A(\tilde{w}(t)) = -B(t, w(t))$, $\tilde{w}(0) = w_0$. Por unicidade de solução fraca temos que $\tilde{w} = w$, donde segue que w é solução forte de $\dot{w}(t) + A(w(t)) = -B(t, w(t))$, $w(0) = w_0$, como afirmado. ■

Obs.: Repetimos que a regularidade de soluções para (P_{II}) não será feita aqui, pois a faremos no capítulo (II) para aplicações G mais gerais do que $G(z) := z(\ell)\xi(\cdot)$.

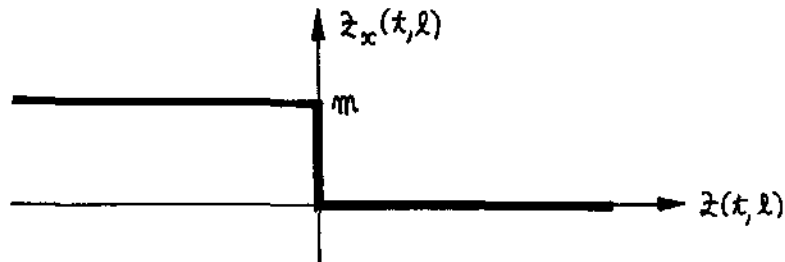
Capítulo 2

1 O problema (P_{II}) quando $G \equiv 0$: existência e regularidade.

Nesta seção vamos considerar o problema de achar uma função real $z = z(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in]0, \ell[$, satisfazendo

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = h(t, x) \\ z(t, 0) = 0, \quad (z(t, \ell), z_x(t, \ell)) \in \Gamma \\ z(0, \cdot) = z_0 \end{cases}$$

onde $z_0 \in L^2(0, \ell)$ e $h \in L^2(0, T : L^2(0, \ell))$ são dadas, e $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ é o gráfico:



Para simplificar a notação escreveremos $H = L^2(0, \ell)$.

Vamos olhar o problema acima como uma equação de evolução no espaço H .

Definamos então o operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ por:

$$(1) \quad A(z) := -z''$$

$$(2) \quad D(A) := \{z \in H_{1,0} \cap H^2(0, \ell) \mid (z(\ell), z'(\ell)) \in \Gamma\}.$$

A respeito do operador A podemos provar o:

Lema 2.1: A é maximal monótono em H .

Demonstração: Sejam $u, v \in D(A)$. Temos que:

$$(Au - Av, u - v) = -[u'(\ell) - v'(\ell)][u(\ell) - v(\ell)] + \int_0^\ell (u' - v')^2 dx \geq 0,$$

pois os pontos $(u(\ell), u'(\ell))$ e $(v(\ell), v'(\ell))$ pertencem ao gráfico Γ , donde $-[u'(\ell) - v'(\ell)][u(\ell) - v(\ell)] \geq 0$. Portanto A é monótono em H .

Veamos agora a questão da maximalidade, isto é, devemos provar que $R(I + A) = H$. Para isto, dado $g \in H$ queremos $u \in D(A)$ tal que $u + A(u) = g$, isto é:

$$u - u'' = g \quad , \quad u(0) = 0 \quad \text{e} \quad (u(\ell), u'(\ell)) \in \Gamma.$$

Colocando $v = u'$ isto é equivalente a resolver o problema:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad u(0) = 0, \quad \begin{bmatrix} u(\ell) \\ v(\ell) \end{bmatrix} \in \Gamma, \quad \text{onde} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, mas a solução de (3) é dada por:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = e^{xM} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v(0) \end{bmatrix} + \int_0^x e^{(x-s)M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -g(s) \end{bmatrix} ds$$

desde que

$$(4) \quad \begin{bmatrix} u(\ell) \\ v(\ell) \end{bmatrix} = v(0) \cdot e^{\ell M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^\ell e^{(\ell-s)M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -g(s) \end{bmatrix} ds$$

pertença a Γ . Como $e^{\ell M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh \ell \\ \cosh \ell \end{bmatrix}$, então (4) é a equação paramétrica (no parâmetro $v(0) \in \mathbb{R}$) de uma recta no plano, com inclinação $\coth \ell > 0$, e portanto interseccionará Γ em um único ponto. Logo existe um único $v(0) \in \mathbb{R}$ tal que $(u(\ell), v(\ell))$ pertence a Γ , como queríamos. Isso conclui a demonstração do lema

2.1. ■

Observação: Na verdade o operador A é estritamente monótono e maximal, isto é, temos que:

$$(Au - Av, u - v) \geq \int_0^\ell (u' - v')^2 dx = \|u - v\|_{H_{1,0}}^2,$$

e como a inclusão $H_{1,0} \hookrightarrow H$ é contínua, mais precisamente, vale $|w|^2 \leq \frac{\ell^2}{2} \|w\|_{H_{1,0}}^2$ para todo $w \in H_{1,0}$, obtemos que:

$$(Au - Av, u - v) \geq \frac{2}{\ell^2} |u - v|^2, \quad \forall u, v \in D(A).$$

Provaremos agora que A é do tipo sub-diferencial.

Isto é feito no lema abaixo.

Sejam $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definidas por:

$$j(x) := \begin{cases} -mx, & \text{se } x \leq 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad e$$

$$\varphi(w) := \begin{cases} j(w(\ell)) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\ell w'(x)^2 dx = j(w(\ell)) + \frac{1}{2} \|w\|_{H_{1,0}}^2, & \text{se } w \in H_{1,0} \\ +\infty, & \text{se } w \in H \setminus H_{1,0} \end{cases}$$

Lema 2.2: φ definida acima é convexa, própria e semi-continua inferiormente.

Mais ainda, $A = \partial\varphi$.

Demonstração: É claro que φ é convexa e própria. Mostremos que φ é sci. Para isso seja $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset H$ tal que $u_n \rightarrow u$ em H . Devemos mostrar que $\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $u_n \in D(\varphi) = H_{1,0}$ para todo $n \geq 1$. Chamando $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n)$, queremos mostrar que $\varphi(u) \leq L$.

Se $L = +\infty$ não temos nada a fazer. Suponhamos então que $L \in \mathbb{R}$. Existe subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}_{n \geq 1}$, tal que $\varphi(u_n) \rightarrow L$ quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, $j(u_n(\ell)) + 1/2 \cdot \|u_n\|_{H_{1,0}}^2 \rightarrow L$ quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, $\{u_n\}_{n \geq 1}$ é limitada em $H_{1,0}$. Logo existe subsequência, que denotaremos ainda por $\{u_n\}_{n \geq 1}$, e existe $v \in H_{1,0}$ tal que u_n converge fracamente para v em $H_{1,0}$.

Agora, como a imersão $H_{1,0} \hookrightarrow H$ é compacta, então u_n converge para v fortemente em H . Consequentemente $v = u$, donde

$$(5) \quad u \in H_{1,0} \quad \text{e} \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_{1,0}.$$

Também, como o funcional $w \in H_{1,0} \mapsto w(\ell) \in \mathbb{R}$ é linear e contínuo, segue de (5) que $u_n(\ell) \rightarrow u(\ell)$ quando $n \rightarrow \infty$. Da continuidade de $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ concluímos então que:

$$(6) \quad j(u_n(\ell)) \rightarrow j(u(\ell)) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Agora, como a função norma é sci na topologia fraca, segue de (5) que:

$$(7) \quad 1/2 \cdot \|u\|_{H_{1,0}}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} 1/2 \cdot \|u_n\|_{H_{1,0}}^2.$$

De (6) e (7), mais o fato que $\lim x_n + \lim y_n \leq \lim(x_n + y_n)$ obtemos que

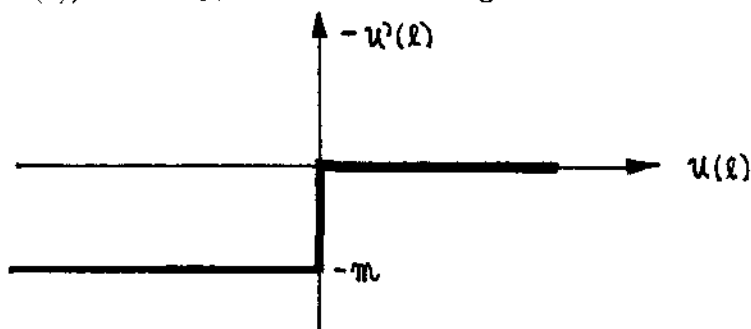
$$j(u(\ell)) + 1/2 \cdot \|u\|_{H_{1,0}}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} [j(u_n(\ell)) + 1/2 \cdot \|u_n\|_{H_{1,0}}^2],$$

ou seja, $\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) = L$, como afirmado.

Resta provar que $A = \partial\varphi$. Como já sabemos que A é maximal monótono, é suficiente provar que $A \subset \partial\varphi$. Para isso seja $u \in D(A)$, e provemos que $A(u) \in \partial\varphi(u)$. Devemos provar então que $\varphi(v) \geq \varphi(u) + (Au, v - u)$, para todo $v \in D(\varphi) = H_{1,0}$, pois quando $v \notin D(\varphi)$ então $\varphi(v) = +\infty$, e a desigualdade fica trivialmente satisfeita. Agora para $v \in D(\varphi)$ temos que:

$$(8) \quad (Au, v - u) = (-u'', v - u) = -u'(\ell) \cdot [v(\ell) - u'(\ell)] + (u', v') - |u'|^2.$$

Mas observe que sendo $u \in D(A)$ então $(u(\ell), u'(\ell)) \in \Gamma$, e portanto $(u(\ell), -u'(\ell)) \in \tilde{\Gamma} = \partial j$, onde $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2$ é o gráfico



ou seja, $-u'(\ell) \in \partial j(u(\ell))$, de onde segue que:

$$j(\xi) \geq j(u(\ell)) - u'(\ell) \cdot [\xi - u(\ell)], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Em particular, quando $\xi = v(\ell)$ obtemos:

$$(9) \quad j(v(\ell)) \geq j(u(\ell)) - u'(\ell) \cdot [v(\ell) - u(\ell)].$$

Logo, de (8) e (9) podemos escrever:

$$(10) \quad (Au, v - u) \leq j(v(\ell)) - j(u(\ell)) + (u', v') - |u'|^2$$

e como $(u', v') - |u'|^2 \leq 1/2 \cdot |v'|^2 - 1/2 \cdot |u'|^2$ então (10) nos dá que $(Au, v - u) \leq j(v(\ell)) - j(u(\ell)) + 1/2 \cdot |v'|^2 - 1/2 \cdot |u'|^2$, ou seja, $(Au, v - u) \leq \varphi(v) - \varphi(u)$, como desejado. A demonstração do lema 2.2 está completa. ■

Podemos então enunciar o seguinte teorema, o qual resolve o problema P_{II} quando $G \equiv 0$:

Teorema 2.3: Se $z_0 \in H$ e $h \in L^2(0, T : H)$, existe uma única solução forte do problema $\dot{z}(t) + A(z(t)) = h(t)$, $z(0) = z_0$. Mais precisamente, existe uma única $z \in C([0, T] : H)$ satisfazendo as propriedades:

- (i) z é AC em todo compacto $K \subset]0, T[$ (de onde existe $\dot{z}(t)$ para quase todo $t \in]0, T[$);
- (ii) $z(t) \in D(A), \forall t \in]0, T[$;
- (iii) $\dot{z}(t) + A(z(t)) = h(t)$, ae $]0, T[$;
- (iv) $z(0, \cdot) = z_0$.

Mais ainda, $t \mapsto \sqrt{t}\dot{z}(t)$ pertence ao espaço $L^2(0, T : H)$.

Quando $z_0 \in D(\varphi) = H_{1,0}$ então $\dot{z} \in L^2(0, T : H)$, e a função $t \mapsto \varphi(z(t, \cdot))$ é AC em $[0, T]$.

Demonstração: Segue do Teorema 1.9 e Lema 2.2. ■

Com a finalidade de estabelecer existência de solução periódica para P_{II} no caso em que $G \equiv 0$ colocamos o:

Lema 2.4: A é coercivo.

Demonstração: É imediata, pois para $u \in D(A)$ temos que:

$(Au, u) = -u'(\ell).u(\ell) + \|u\|_{H_{1,0}}^2$, e como $(u(\ell), u'(\ell)) \in \Gamma$ então $-u'(\ell).u(\ell) \geq 0$, de onde segue que $(Au, u) \geq \|u\|_{H_{1,0}}^2 \geq (2/\ell^2).|u|^2$. Consequentemente, $(Au, u)/|u| \geq (2/\ell^2).|u| \rightarrow \infty$ quando $|u| \rightarrow \infty$, ou seja, A é coercivo. ■

Com isso podemos enunciar o:

Teorema 2.5: Se $h \in L^2(0, T : H)$, então existe solução forte $z \in C([0, T] : H)$ de $\dot{z}(t) + A(z(t)) = h(t)$ satisfazendo $z(0) = z(T)$.

Demonstração: Segue do Corolário 1.14 e Lemas 2.2 e 2.4. ■

2 O problema P_{II} genérico.

Nosso objetivo daqui para frente é provar resultados análogos aos apresentados acima no caso em que G não é identicamente nula. A classe de aplicações G que temos em mente inclui, dentre outros, os seguintes casos:

- (i) $G(v) = f(v')$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana, e
- (ii) $G(v) = a(\cdot)v(\ell)$, onde $a \in L^\infty(0, \ell)$.

Neste sentido trabalharemos com aplicações G definidas em $H_{1,0}$ e tomando valores em $H = L^2(0, \ell)$.

Os resultados que conhecemos na literatura para problemas do tipo P_{II} não se aplicam ao nosso caso específico. Veja por exemplo [1], [4] e [5].

Assim adotaremos o seguinte procedimento para o estudo de P_{II} : vamos introduzir uma noção bem fraca de solução, a qual denominaremos de *solução generalizada*. Esta solução z de P_{II} será tal que a aplicação $t \mapsto G(z(t))$ fique bem definida e pertença ao espaço $L^2(0, T; H)$. Daí utilizaremos os resultados da secção 1, olhando P_{II} na forma $\dot{\omega}(t) + A(\omega(t)) = h(t) - G(z(t))$, $\omega(0) = z_0$.

Isto porém não será feito diretamente para P_{II} , mas sim para um problema suavizado P_γ , onde $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ é gráfico de uma função não-crescente e lipschitziana $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Finalizamos justificando o processo de passagem ao limite.

Para formalizar este plano trabalharemos com o operador A_γ , definido de maneira análoga ao operador A , isto é:

$$(11) \quad \begin{aligned} A_\gamma : D(A_\gamma) \subset H &\rightarrow H, A_\gamma(u) := -u'', \text{ com} \\ D(A_\gamma) &:= \{u \in H_{1,0} \cap H^2(0, \ell) \mid u'(\ell) = \rho(u(\ell))\}. \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo ao que foi feito para A , temos os seguintes lemas relativos ao operador A_γ :

Lema 2.6: A_γ é maximal monótono em H .

Também, definindo $j_\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_\gamma : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por:

$$(12) \quad j_\rho(x) := - \int_0^x \rho(s) ds \quad , e$$

$$(13) \quad \varphi_\gamma(u) := \begin{cases} j_\rho(u(\ell)) + \frac{1}{2} \cdot \|u\|_{H_{1,0}}^2, & \text{se } u \in H_{1,0} \\ +\infty, & \text{se } u \in H \setminus H_{1,0} \end{cases}$$

temos o:

Lema 2.7: φ_γ é convexo, próprio e sci: Além disso, $A_\gamma = \partial\varphi_\gamma$.

Lema 2.8: A_γ é coercivo.

Como as demonstrações são análogas às do caso $A = \partial\varphi$, não as escreveremos aqui.

Com os Lemas 2.6, 2.7 e 2.8 obtemos resultados análogos aos teoremas 2.3 e 2.5. Mais precisamente, temos os teoremas:

Teorema 2.9: Se $z_0 \in H$, $h \in L^2(0, T : H)$ e $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é não-crescente, limitada e lipschitziana, então existe uma única solução forte do problema $\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) = h(t)$, $z(0) = z_0$. Mais precisamente, existe uma única $z \in C([0, T] : H)$ satisfazendo:

- (i) z é AC em todo compacto $K \subset]0, T[$;
- (ii) $z(t) \in D(A_\gamma)$, $\forall t \in]0, T[$;
- (iii) $\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) = h(t)$, ae $]0, T[$;
- (iv) $z(0, \cdot) = z_0$.

Mais ainda, $t \mapsto \sqrt{t}\dot{z}(t)$ pertence ao espaço $L^2(0, T : H)$.

Quando $z_0 \in D(\varphi_\gamma) = H_{1,0}$ então $\dot{z} \in L^2(0, T : H)$, e a função $t \mapsto \varphi_\gamma(z(t))$ é AC em $[0, T]$.

Teorema 2.10: Se $h \in L^2(0, T; H)$ e $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é como no teorema acima, então existe solução forte $z \in C([0, T]; H)$ de $\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) = h(t)$ satisfazendo $z(0) = z(T)$.

2.1 O problema aproximado P_γ .

Nesta secção vamos considerar o problema

$$(P_\gamma) \begin{cases} z_t - z_{xx} + G(z) = h(t, x) \\ z(t, 0) = 0, \quad z_x(t, \ell) = \rho(z(t, \ell)), \quad z(0, \cdot) = z_0 \end{cases}$$

Hipóteses em G, h, ρ e z_0 serão dadas adiante.

Antes estabeleceremos mais algumas notações.

Continuaremos a denotar $H = L^2(0, \ell)$, munido do produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma $|\cdot|$ usuais, e denotaremos $V = H_{1,0}$, o qual é Hilbert com o produto interno

$$(14) \quad ((u, v)) := \int_0^\ell u'(x)v'(x)dx.$$

A norma associada a este produto interno será denotada por $\|\cdot\|$.

Será de grande importância a desigualdade:

$$(15) \quad |u(\ell)|_{\mathbb{R}} \leq \sqrt{\ell} \|u\|, \quad \forall u \in H_{1,0}$$

que pode ser justificada da seguinte maneira:

$$|u(\ell)|_{\mathbb{R}} = \left| \int_0^\ell u'(x)dx \right|_{\mathbb{R}} = |(1, u')|_{\mathbb{R}} \leq |1| \cdot |u'| = \sqrt{\ell} \|u\|$$

Denotaremos $C_{0,\text{esq}}^\infty(0, \ell)$ o seguinte conjunto de funções:

$$(16) \quad C_{0,\text{esq}}^\infty(0, \ell) := \{\varphi \in C^\infty(0, \ell) \mid \varphi(x) = 0 \text{ em } [0, r[, \text{ para algum } r \in]0, \ell[\}.$$

Pode-se mostrar que

$$(17) \quad \overline{C_{0,\text{esq}}^\infty(0, \ell)}^{H^1(0, \ell)} = V, \text{ e que}$$

$$(18) \quad \overline{V}^H = H.$$

Mais do que isto, temos que:

$$(19) \quad \overline{C_{0,\text{esq}}^\infty(0, \ell)}^H = H.$$

Isto feito daremos a definição de solução generalizada para o problema (P_γ) baseado nas seguintes contas formais:

Multiplicando a equação de (P_γ) por $\varphi \in C_{0,\text{esq}}^\infty(0, \ell)$, integrando de 0 até ℓ , e usando a condição de contorno $z_x(t, \ell) = \rho(z(t, \ell))$ obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell z_t(t, x)\varphi(x)dx + \int_0^\ell z_x(t, x)\varphi'(x)dx - \varphi(\ell)\rho(z(t, \ell)) + \int_0^\ell G(z(t, x))\varphi(x)dx = \\ & = \int_0^\ell h(t, x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_{0,\text{esq}}^\infty(0, \ell). \end{aligned}$$

Agora, como $C_{0,\text{esq}}^\infty(0, \ell)$ é denso em V concluímos que a igualdade acima vale para todo $v \in V$, e usando as notações adotadas para os produtos de H e V ficamos com

$$(20) \quad (z_t(t, \cdot), v) + ((z(t, \cdot), v)) - v(\ell)\rho(z(t, \ell)) + (Gz(t, \cdot), v) = (h(t, \cdot), v),$$

para todo $v \in V$.

Sobre os dados G, h e ρ faremos as hipóteses:

(H1) $G : V \rightarrow H$ satisfaz

- (a) $|G(u)| \leq a \cdot \|u\| + b, \forall u \in V$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes;
- (b) G é sequencialmente contínua de V forte em H fraco, ié, se $u_n \rightarrow u$ forte em V então $G(u_n) \rightharpoonup G(u)$ fraco em H ;

(H2) $h \in L^2(0, T : H)$;

(H3) $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é não-crescente, limitada e lipschitziana.

Definição 6: (Solução generalizada de P_γ).

Uma solução generalizada de P_γ é um elemento z tal que:

(i) $z \in L^2(0, T : V)$ e $\dot{z} \in L^2(0, T : V')$;

(ii) $z(0) = z_0$;

(iii) $\frac{d}{dt}(z(t, \cdot), v) + ((z(t, \cdot), v)) - v(\ell)\rho(z(t, \ell)) + (Gz(t, \cdot), v) = (h(t, \cdot), v)$,
no sentido de $\mathcal{D}'([0, T])$, $\forall v \in V$.

OBS.1: A condição (i) implica que $z \in W(0, T : V, V')$; logo $z \in C([0, T] : H)$,
donde faz sentido a restrição $z(0)$ da condição (ii).

OBS.2: É fácil ver que se $z \in L^2(0, T : V)$ e $v \in V$, então as funções
 $f_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, definidas por: $f_1(t) = (z(t, \cdot), v)$, $f_2(t) = ((z(t, \cdot), v))$, $f_3(t) = \rho(z(t, \ell))v(\ell)$, $f_4(t) = (Gz(t, \cdot), v)$ e $f_5(t) = (h(t, \cdot), v)$, per-
tencem ao conjunto $L^1(0, T)$, graças a (H1.a), (H2) e (H3).. Sendo assim é lícito
vê-las como elementos de $\mathcal{D}'([0, T])$, justificando o item (iii) da definição 6. Note
então que (iii) significa que

$$\left[\frac{d}{dt}(z(t, \cdot), v), \xi \right] + \left[((z(t, \cdot), v)), \xi \right] - \left[\rho(z(t, \ell))v(\ell), \xi \right] + \\ + \left[(Gz(t, \cdot), v), \xi \right] = \left[(h(t, \cdot), v), \xi \right], \quad \forall \xi \in \mathcal{D}([0, T]),$$

onde acima, dadas $f \in L^1(0, T)$ e $\xi \in \mathcal{D}([0, T])$, denotamos por $[f, \xi]$ o número
 $\int_0^T f(t)\xi(t)dt$.

Agora, relembrando o conceito de derivada de distribuição temos que se $f \in \mathcal{D}'([0, T])$ então $df/dt \in \mathcal{D}'([0, T])$ é a distribuição que, a cada $\xi \in \mathcal{D}([0, T])$, associa o número real $[df/dt, \xi] := -[f, d\xi/dt]$. Logo (iii) significa que:

$$(21) \quad - \int_0^T (z(t, \cdot), v) \dot{\xi}(t) dt + \int_0^T ((z(t, \cdot), v)) \xi(t) dt - \int_0^T \rho(z(t, \ell)) v(\ell) \xi(t) dt + \int_0^T (Gz(t, \cdot), v) \xi(t) dt = \int_0^T (h(t, \cdot), v) \xi(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(]0, T[) \text{ e } \forall v \in V.$$

Estamos agora em condição de enunciar o:

Teorema 2.11: Se $z_0 \in V$ e se G, h, ρ satisfazem (H1)-(H3) então o problema (P_γ) tem solução generalizada z . Mais ainda, $z \in L^\infty(0, T : V)$.

Demonstração:

A demonstração utiliza o método de Galerkin e será dividida em cinco etapas:

1ª Etapa: Introduzimos problemas aproximados (P_γ^m) e demonstramos existência de solução z^m para os mesmos.

2ª Etapa: Estabelecemos estimativas para as soluções aproximadas z^m , estimativas estas que nos permitem obter um candidato $z \in L^2(0, T : V)$ a solução generalizada de (P_γ) .

3ª Etapa: Provamos que o candidato z acima satisfaz

$$\frac{d}{dt}(z(t, \cdot), v) + ((z(t, \cdot), v)) - v(\ell)\rho(z(t, \ell)) + (\beta(t, \cdot), v) = (h(t, \cdot), v),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(]0, T[)$, para todo $v \in V$, e para um determinado $\beta \in L^2(0, T : H)$.

4ª Etapa: Demonstramos que $\dot{z} \in L^2(0, T : V')$ e que $z(0) = z_0$.

5ª Etapa: Finalmente, provamos que $\beta(t, \cdot) = G(z(t, \cdot))$, ae $[0, T]$ concluindo a demonstração.

Vamos então à demonstração de cada etapa:

Etapa 1: Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$ uma base de Schauder de V . Vamos tomá-la ortonormal em V . Sejam $V_m = [e_1, \dots, e_m]$ o espaço gerado pelos m primeiros elementos da base acima, e $z_{0m} \in V_m$ tal que $z_{0m} \rightarrow z_0$ em V . Podemos então provar o:

Lema 2.12: Existe $z^m : [0, T] \rightarrow V_m$ absolutamente contínua tal que $z_t^m \in L^2(0, T : V_m)$, e z^m satisfaz o seguinte problema aproximado

$$(P_\gamma^m) \begin{cases} (z_t^m(t, \cdot), e_k) + ((z^m(t, \cdot), e_k)) - e_k(\ell)\rho(z^m(t, \ell)) + (Gz^m(t, \cdot), e_k) = (h(t, \cdot), e_k), \\ \text{para todo } k \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall t \in]0, T[; \\ z^m(0, \cdot) = z_{0m} \end{cases}$$

Dem. do Lema 2.12: Como queremos $z^m(t, \cdot) \in V_m$, determinaremos m funções $a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{mm}$ de $[0, T]$ em $\mathbb{R}$ de sorte que, colocando $z^m(t, \cdot) = \sum_{j=1}^m a_{jm}(t)e_j$, então (P_γ^m) fique satisfeito. Substituindo a expressão de $z^m(t, \cdot)$ nas m equações de (P_γ^m) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$(22) \quad A\dot{x}^m(t) + x^m(t) + F(x^m(t)) = b(t) \quad , x^m(0) = x_{0m} \quad , \text{ onde :}$$

$$x^m(t) = \begin{bmatrix} a_{1m}(t) \\ \vdots \\ a_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{bmatrix} \quad \text{com } b_j(t) = (h(t, \cdot), e_j) \quad ,$$

$A = (A_{ij})_{m \times m}$ com $A_{ij} = (e_i, e_j)$, e finalmente a parte não linear $F = F_1 + F_2$, sendo $F_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$(23) \quad F_1(\xi) := -\rho\left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j(\ell)\right) \cdot \begin{bmatrix} e_1(\ell) \\ \vdots \\ e_m(\ell) \end{bmatrix} \quad ,$$

e $F_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$(24) \quad F_2(\xi) = \begin{bmatrix} F_{21}(\xi) \\ \vdots \\ F_{2m}(\xi) \end{bmatrix}, \text{ onde } F_{2k} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ por sua vez é dada}$$

por $F_{2k}(\xi) := (G(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j), e_k), \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

OBS.1: Sendo $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana então $F_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ também é lipschitziana (e em particular contínua).

OBS.2: A hipótese (H1.b) em G garante que $F_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua. De fato, seja $\{\xi^i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\xi^i \rightarrow \xi$ em $\mathbb{R}^m$ quando $i \rightarrow \infty$. Então $\sum_{j=1}^m \xi_j^i e_j \xrightarrow{i} \sum_{j=1}^m \xi_j e_j$ forte em V , donde $G\left(\sum_{j=1}^m \xi_j^i e_j\right) \xrightarrow{i} G\left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j\right)$ fraco em H , e consequentemente $\left(G\left(\sum_{j=1}^m \xi_j^i e_j\right), e_k\right) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \left(G\left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j\right), e_k\right)$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, ou seja, $F_{2k}(\xi^i) \xrightarrow{i} F_{2k}(\xi) \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$, donde $F_2(\xi^i) \xrightarrow{i} F_2(\xi)$ em $\mathbb{R}^m$.

Assim, ficamos com um sistema de e.d.o.'s da forma (22), onde A é matriz inversível e $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua, ou seja, obtemos uma e.d.o do tipo:

$$(25) \quad \dot{x}^m(t) = g(t, x^m(t)), \quad x^m(0) = x_{0m},$$

onde $g : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dada por

$$(26) \quad g(t, x) := A^{-1}(b(t) - x - F(x))$$

Como g é de Caratheodory, temos garantida existência local de pelo menos uma solução $x^m(t)$.

Adiante (veja observação 35) veremos que as soluções $x^m(t)$ podem ser estendidas a todo intervalo $[0, T], \forall m \geq 1$.

Observe que a condição inicial x_{0m} mencionada acima, provém da condição inicial z_{0m} . Mais precisamente, $x_{0m} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de coordenadas $\lambda_{1m}^0, \lambda_{2m}^0, \dots, \lambda_{mm}^0$,

onde estes são os coeficientes de z_{0m} com respeito à base $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de V_m , isto é, $z_{0m} = \sum_{j=1}^m \lambda_{jm}^0 e_j$.

A demonstração do Lema 2.12 está completa. ■

Etapa 2: Estimativas a priori:

Sobre a sequência de soluções aproximadas podemos provar o:

Lema 2.13: $\{z^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^\infty(0, T : H)$ e em $L^2(0, T : V)$.

Dem. do Lema 2.13: Vimos na etapa 1 que existe, para cada m , $z^m(t, \cdot) \in V_m$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} & (z_t^m(t, \cdot), e_k) + ((z^m(t, \cdot), e_k)) - e_k(\ell) \cdot \rho(z^m(t, \ell)) + (Gz^m(t, \cdot), e_k) = \\ & = (h(t, \cdot), e_k), \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall t \in]0, T[. \end{aligned}$$

Assim, multiplicando a equação acima por $a_{km}(t)$ e somando em $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ obtemos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z^m(t, \cdot)|^2 + \|z^m(t, \cdot)\|^2 = z^m(t, \ell) \rho(z^m(t, \ell)) - (Gz^m(t, \cdot), z^m(t, \cdot)) + (h(t, \cdot), z^m(t, \cdot))$$

e integrando de 0 a t , com $t \in [0, T]$, obtemos ainda:

$$\begin{aligned} (27) \quad & 1/2 |z^m(t, \cdot)|^2 + \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds = 1/2 |z_{0m}|^2 + (I) + (II) + (III), \text{ onde} \\ & (I) = \int_0^t z^m(s, \ell) \rho(z^m(s, \ell)) ds, \quad (II) = - \int_0^t (Gz^m(s, \cdot), z^m(s, \cdot)) ds \quad \text{e} \\ & (III) = \int_0^t (h(s, \cdot), z^m(s, \cdot)) ds. \end{aligned}$$

Vamos agora majorar cada um dos termos do segundo membro da equação acima de modo adequado:

Em primeiro lugar,

$$(28) \quad |z_{0m}| \leq k_0, \forall m \geq 1, \text{ pois } z_{0m} \text{ é convergente.}$$

Como ρ é limitada temos, tomando $\varepsilon > 0$ e usando (15) que:

$$\begin{aligned} (I) &\leq \mathbb{C} \cdot \int_0^t |z^m(s, \ell)|_{\mathbb{R}} ds \leq \mathbb{C} \sqrt{\ell} \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\| ds \\ &\leq \mathbb{C} \sqrt{\ell} \cdot \int_0^t \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \|z^m(s, \cdot)\|^2 \right] ds \leq \\ &\leq \mathbb{C} \sqrt{\ell} T / 2\varepsilon + (\mathbb{C} \sqrt{\ell} \varepsilon / 2) \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds, \text{ ou seja,} \end{aligned}$$

$$(29) \quad (I) \leq k_1/\varepsilon + k_2 \varepsilon \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds, \text{ para certas constantes } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Agora, usando a hipótese (H1.a) em G temos que:

$$(II) \leq \int_0^t |Gz^m(s, \cdot)| \cdot |z^m(s, \cdot)| ds \leq \int_0^t [a \cdot \|z^m(s, \cdot)\| + b] \cdot |z^m(s, \cdot)| ds,$$

e tomando $\varepsilon > 0$ temos ainda que:

$$\begin{aligned} (II) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t [a \cdot \|z^m(s, \cdot)\| + b]^2 ds + \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^t |z^m(s, \cdot)|^2 ds, \text{ ou ainda,} \\ (II) &\leq \frac{a^2 \varepsilon}{2} \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds + ab\varepsilon \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\| ds + \frac{b^2 \varepsilon t}{2} + \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^t |z^m(s, \cdot)|^2 ds \end{aligned}$$

Agora, como

$$ab\varepsilon \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\| ds = ab \cdot \int_0^t \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} \|z^m(s, \cdot)\| ds \leq \frac{ab}{2} \int_0^t [\varepsilon + \varepsilon \cdot \|z^m(s, \cdot)\|^2] ds$$

então ficamos com:

$$(II) \leq \frac{(a^2 + ab)\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^t |z^m(s, \cdot)|^2 ds + \frac{(b^2 + ab)\varepsilon T}{2},$$

ou, em notações mais convenientes:

$$(30) \quad (II) \leq k_3 \cdot \varepsilon \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^t |z^m(s, \cdot)|^2 ds + k_4 ,$$

para certas constantes $k_3, k_4 \in \mathbb{R}$.

Finalmente,

$$(III) \leq \int_0^t |h(s, \cdot)| \cdot |z^m(s, \cdot)| ds \leq \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^t |h(s, \cdot)|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t |z^m(s, \cdot)|^2 ds ,$$

e como $|v|^2 \leq \frac{\ell^2}{2} \cdot \|v\|^2$ para todo $v \in V$ obtemos ainda que

$$(III) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^T |h(s, \cdot)|^2 ds + \frac{\ell^2 \varepsilon}{4} \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds , \text{ ou seja,}$$

$$(31) \quad (III) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \|h\|_{L^2(0, T; H)}^2 + k_5 \varepsilon \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds .$$

Logo, da equação (27) e desigualdades (28) a (31) podemos escrever:

$$\frac{1}{2} \cdot |z^m(t, \cdot)|^2 + \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds \leq k_6 + k_7 \varepsilon \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds + \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^t |z^m(s, \cdot)|^2 ds$$

para certas constantes $k_6, k_7 \in \mathbb{R}$.

Portanto:

$$(32) \quad |z^m(t, \cdot)|^2 + (2 - 2k_7 \varepsilon) \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds \leq 2k_6 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \cdot |z^m(s, \cdot)|^2 ds$$

Tomando $0 < \varepsilon < k_7^{-1}$ podemos escrever ainda:

$$|z^m(t, \cdot)|^2 \leq 2k_6 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \cdot |z^m(s, \cdot)|^2 ds , \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall m \geq 1.$$

Pelo lema de Gronwall-Bellman concluimos que:

$$(33) \quad |z^m(t, \cdot)|^2 \leq 2k_6 e^{T/\varepsilon} =: k_8 , \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall m \geq 1.$$

Portanto

$$(34) \quad \{z^m\}_{m \geq 1} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T : H), \text{ e}$$

$$(35) \quad z^m(t, \cdot) \text{ está definida para todo } t \geq 0, \text{ qualquer que seja } m \geq 1.$$

Agora, voltando a (32) e usando (33) temos que:

$$(2 - 2k_7\varepsilon) \cdot \int_0^t \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds \leq 2k_6 + k_8 T \varepsilon^{-1}, \forall t \in [0, T], \text{ ou seja,}$$

$$\int_0^T \|z^m(s, \cdot)\|^2 ds \leq (2k_6 + k_8 T \varepsilon^{-1}) \cdot (2 - 2k_7\varepsilon)^{-1} =: k_9, \text{ de onde sai que}$$

$$\{z^m\}_{m \geq 1} \text{ é limitada em } L^2(0, T : V), \text{ concluindo o lema 2.13. } \blacksquare$$

Corolário 2.14: Tomando subsequência se necessário, temos as seguintes convergências:

- (i) $z^m \xrightarrow{*} z$ em $L^\infty(0, T : H)$
- (ii) $z^m \rightharpoonup z$ em $L^2(0, T : V)$.

Demonstração: (i) e (ii) seguem imediatamente dos fatos bem conhecidos de que os conjuntos limitados de $L^\infty(0, T : H) = (L^1(0, T : H))^*$ são pré-compactos na topologia fraca-estrela, e os limitados de $L^2(0, T : V)$ são pré-compactos na topologia fraca. $\blacksquare$

Isso finaliza a etapa 2, e antes de começarmos a terceira etapa colocaremos o:

Lema 2.15: $\{z_t^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^2(0, T : H)$, e $\{z^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^\infty(0, T : V)$.

Dem. do lema 2.15:

Para simplificar a notação escreveremos $z^m(t)$ e $\dot{z}^m(t)$ para indicar $z^m(t, \cdot)$ e $\dot{z}_t^m(t, \cdot)$, respectivamente. Temos que:

$$(36) \quad (\dot{z}^m(t), \varphi) + ((z^m(t), \varphi)) - \varphi(\ell)\rho(z^m(t, \ell)) + (Gz^m(t), \varphi) = (h(t), \varphi), \quad \forall \varphi \in V_m.$$

Como $\dot{z}^m(t) = \sum_{j=1}^m \dot{a}_{jm}(t)e_j$ então $\dot{z}^m(t) \in V_m$. Logo, colocando $\varphi = \dot{z}^m(t)$ em

(36) ficamos com:

$$|\dot{z}^m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^m(t)\|^2 = \rho(z^m(t, \ell))\dot{z}^m(t, \ell) - (Gz^m(t), \dot{z}^m(t)) + (h(t), \dot{z}^m(t))$$

Integrando de 0 a t , com $t \in [0, T]$, obtemos:

$$(37) \quad \int_0^t |\dot{z}^m(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \|z^m(t)\|^2 = \frac{1}{2} \|z_{0m}\|^2 + \int_0^t \rho(z^m(s, \ell))\dot{z}^m(s, \ell) ds + \\ - \int_0^t (Gz^m(s), \dot{z}^m(s)) ds + \int_0^t (h(s), \dot{z}^m(s)) ds$$

Agora, como $z_{0m} \rightarrow z_0$ em V então:

$$(38) \quad \|z_{0m}\| \leq c_1, \quad \forall m \geq 1.$$

Também, introduzindo $\tilde{\rho}(x) := \int_0^x \rho(s) ds$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^t \rho(z^m(s, \ell))\dot{z}^m(s, \ell) ds &= \int_0^t \frac{d}{ds} \{\tilde{\rho}(z^m(s, \ell))\} ds = \tilde{\rho}(z^m(t, \ell)) - \tilde{\rho}(z_{0m}(\ell)) = \\ &= \int_{z_{0m}(\ell)}^{z^m(t, \ell)} \rho(s) ds \leq \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot |z^m(t, \ell) - z_{0m}(\ell)|_{\mathbf{R}} \leq \sqrt{\ell} \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \|z^m(t) - z_{0m}\| \leq \\ &\leq \sqrt{\ell} \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot (\|z^m(t)\| + \|z_{0m}\|) \leq \sqrt{\ell} \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \|z^m(t)\| + c_1 \sqrt{\ell} \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq \\ &\leq \frac{\ell \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|z^m(t)\|^2 + c_1 \sqrt{\ell} \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}, \text{ ou seja,} \end{aligned}$$

$$(39) \quad \int_0^t \rho(z^m(s, \ell))\dot{z}^m(s, \ell) ds \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|z^m(t)\|^2 + c_2.$$

Agora, usando Cauchy-Schwarz e desigualdade de Young,

$$(40) \quad \int_0^t (h(s), \dot{z}^m(s)) ds \leq \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \|h\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t |\dot{z}^m(s)|^2 ds.$$

Finalmente, usando a hipótese (H1.a) de crescimento em G , e o fato já provado que $\{z^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^2(0, T : V)$ obtemos que:

$$(41) \quad - \int_0^t (Gz^m(s), \dot{z}^m(s)) ds \leq c_3 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t |\dot{z}^m(s)|^2 ds .$$

Assim, da equação (37) e desigualdades (38) a (41) segue que

$$(42) \quad \int_0^t |\dot{z}^m(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \cdot \|z^m(t)\|^2 \leq c_4 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|z^m(t)\|^2 + \varepsilon \cdot \int_0^t |\dot{z}^m(s)|^2 ds ,$$

onde $c_4 = \frac{c_1^2}{2} + c_2 + c_3 + \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(0, T; H)}^2$.

Portanto,

$$(43) \quad (1 - \varepsilon) \cdot \int_0^t |\dot{z}^m(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \|z^m(t)\|^2 \leq c_4 , \quad \forall t \in [0, T] .$$

Tomando $0 < \varepsilon < 1$ obtemos que $\|z^m(t)\|^2 \leq 2c_4 \cdot (1 - \varepsilon)^{-1}$, $\forall t \in [0, T]$ e $\forall m \geq 1$, donde segue que $\{z^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^\infty(0, T : V)$.

Voltando em (43) com $t = T$ obtemos que:

$(1 - \varepsilon) \cdot \int_0^T |\dot{z}^m(s)|^2 ds \leq c_4$, ou seja, $\|\dot{z}^m\|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq c_4(1 - \varepsilon)^{-1}$, para todo $m \geq 1$, ou seja, $\{\dot{z}^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^2(0, T : H)$, concluindo a demonstração do lema 2.15. ■

Etapa 3: O objetivo agora é mostrar a equação

$$(44) \quad - \int_0^T (z(t), v) \dot{\xi}(t) dt + \int_0^T ((z(t), v)) \xi(t) dt - \int_0^T v(\ell) \rho(z(t, \ell)) \xi(t) dt + \\ + \int_0^T (\beta(t), v) \xi(t) dt = \int_0^T (h(t), v) \xi(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(]0, T[), \quad \forall v \in V, \text{ e}$$

para um determinado $\beta \in L^2(0, T : H)$.

Para isso fixemos $\xi \in \mathcal{D}(]0, T[)$ e $v \in V$.

Sabemos que existe sequência $\{v_m\}_{m \geq 1}$ tal que $v_m \in V_m$ e $v_m \rightarrow v$ forte em V .

Coloquemos:

$$(45) \quad \psi_m(t, \cdot) := \xi(t)v_m \quad \text{e} \quad \psi(t, \cdot) := \xi(t)v.$$

É fácil ver que:

$$(46) \quad \psi_m \rightarrow \psi \text{ forte em } L^2(0, T : V), \text{ e } \dot{\psi}_m \rightarrow \dot{\psi} \text{ forte em } L^2(0, T : H)$$

Agora, sabemos que $z^m(t, \cdot) \in V_m$ satisfaz, $\forall t \in]0, T[$, a seguinte equação:

$$(47) \quad (\dot{z}^m(t), \varphi) + ((z^m(t), \varphi)) - \varphi(\ell) \cdot \rho(z^m(t, \ell)) + (Gz^m(t), \varphi) = (h(t), \varphi), \forall \varphi \in V_m.$$

Também, como

$$d/dt(z^m(t), \psi_m(t)) = (\dot{z}^m(t), \psi_m(t)) + (z^m(t), \dot{\psi}_m(t)) ,$$

ao integrarmos de 0 a T obtemos que

$$\int_0^T (\dot{z}^m(t), \psi_m(t))dt = - \int_0^T (z^m(t), \dot{\psi}_m(t))dt.$$

Assim, tomando $\varphi = \psi_m(t)$ em (47) e integrando de 0 a T obtemos, graças à equação anterior, que:

$$(48) \quad - \int_0^T (z^m(t), \dot{\psi}_m(t))dt + \int_0^T ((z^m(t), \psi_m(t)))dt - \int_0^T \psi_m(t, \ell) \rho(z_m(t, \ell))dt + \\ + \int_0^T (Gz^m(t), \psi_m(t))dt = \int_0^T (h(t), \psi_m(t))dt$$

Agora vamos calcular o limite de cada termo dessa expressão:

$$(49) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (z^m(t), \dot{\psi}_m(t))dt = \int_0^T (z(t), \dot{\psi}(t))dt = \int_0^T (z(t), v) \dot{\xi}(t)dt$$

pelo seguinte motivo:

$$\left| \int_0^T (z^m(t), \dot{\psi}_m(t))dt - \int_0^T (z(t), \dot{\psi}(t))dt \right| \leq (I_m) + (II_m) , \text{ onde} \\ (I_m) = \left| \int_0^T (z^m(t) - z(t), \dot{\psi}_m(t))dt \right| \quad \text{e} \quad (II_m) = \left| \int_0^T (z(t), \dot{\psi}_m(t) - \dot{\psi}(t))dt \right|.$$

Mas $(I_m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, pois $z^m - z \xrightarrow{*} 0$ em $(L^1(0, T : H))^*$ e $\dot{\psi}_m \rightarrow \dot{\psi}$ forte em $L^2(0, T : H)$, e em particular em $L^1(0, T : H)$.

Também temos que $(II_m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, pois

$$\begin{aligned} 0 \leq (II_m) &\leq \int_0^T |z(t)| \cdot |\dot{\psi}_m(t) - \dot{\psi}(t)| dt \leq \left[\int_0^T |z(t)|^2 dt \right]^{1/2} \cdot \left[\int_0^T |\dot{\psi}_m(t) - \dot{\psi}(t)|^2 dt \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\ell}{\sqrt{2}} \cdot \|z\|_{L^2(0, T : V)} \cdot \|\dot{\psi}_m - \dot{\psi}\|_{L^2(0, T : H)} \rightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow \infty, \text{ o que} \end{aligned}$$

conclui a igualdade (49).

Agora, também é verdade que

$$(50) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T ((z^m(t), \psi_m(t))) dt = \int_0^T ((z(t), \psi(t))) dt, \text{ pois}$$

$z^m \rightharpoonup z$ em $L^2(0, T : V)$ e $\psi_m \rightarrow \psi$ forte em $L^2(0, T : V)$.

É fácil ver também que

$$(51) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (h(t), \psi_m(t)) dt = \int_0^T (h(t), \psi(t)) dt, \text{ pois}$$

$\left| \int_0^T (h(t), \psi_m(t)) dt - \int_0^T (h(t), \psi(t)) dt \right| \leq \frac{\ell}{\sqrt{2}} \cdot \|h\|_{L^2(0, T : H)} \cdot \|\psi_m - \psi\|_{L^2(0, T : V)}$, o qual tende a zero quando $m \rightarrow \infty$.

Resta provar que:

$$(52) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \psi_m(t, \ell) \cdot \rho(z^m(t, \ell)) dt = \int_0^T \psi(t, \ell) \cdot \rho(z(t, \ell)) dt \text{ e}$$

$$(53) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (Gz^m(t), \psi_m(t)) dt = \int_0^T (\beta(t), \psi(t)) dt,$$

para algum $\beta \in L^2(0, T : H)$.

Para isso vamos usar o lema de Aubin-Lions (veja lema 1.16) com $B_0 = V = H_{1,0}$, $B = H^{3/4}(0, \ell)$, $B_1 = H = L^2(0, \ell)$ e $p_0 = p_1 = 2$.

Ora, do lema 2.13 sabemos que $\{z^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^2(0, T : V)$, e do lema 2.15 temos que $\{\dot{z}^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^2(0, T : H)$. Logo $\{z^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em

W , e como a inclusão $W \hookrightarrow L^2(0, T : H^{3/4}(0, \ell))$ é compacta concluímos que existe subsequência de z^m , ainda denotada z^m , tal que:

$$(54) \quad z^m \rightarrow z \text{ forte em } L^2(0, T : H^{3/4}(0, \ell)).$$

De posse disso temos que:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \psi_m(t, \ell) \rho(z^m(t, \ell)) dt - \int_0^T \psi(t, \ell) \rho(z(t, \ell)) dt \right| \leq (III_m) + (IV_m), \text{ onde} \\ (III_m) &= \int_0^T |\psi_m(t, \ell) - \psi(t, \ell)|_{\mathbf{R}} |\rho(z^m(t, \ell))|_{\mathbf{R}} dt \quad \text{e} \\ (IV_m) &= \int_0^T |\psi(t, \ell)|_{\mathbf{R}} |\rho(z^m(t, \ell)) - \rho(z(t, \ell))|_{\mathbf{R}} dt. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} (III_m) &\leq \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \int_0^T |\psi_m(t, \ell) - \psi(t, \ell)|_{\mathbf{R}} dt \leq \sqrt{\ell} \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \int_0^T \|\psi_m(t) - \psi(t)\| dt \leq \\ &\leq \sqrt{\ell T} \cdot \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \|\psi_m - \psi\|_{L^2(0, T; V)}, \text{ donde } (III_m) \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Também temos que:

$$(IV_m) = |v(\ell)|_{\mathbf{R}} \cdot \int_0^T |\xi(t)|_{\mathbf{R}} |\rho(z^m(t, \ell)) - \rho(z(t, \ell))|_{\mathbf{R}} dt,$$

e como $\xi \in \mathcal{D}([0, T])$ então ξ é limitada (digamos por $\mathcal{C}$), donde

$$(IV_m) \leq \mathcal{C} \cdot |v(\ell)|_{\mathbf{R}} \cdot \int_0^T |\rho(z^m(t, \ell)) - \rho(z(t, \ell))|_{\mathbf{R}} dt.$$

Usando o fato que $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana então

$$\begin{aligned} (IV_m) &\leq \overline{\mathcal{C}} \cdot |v(\ell)|_{\mathbf{R}} \cdot \int_0^T |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbf{R}} dt \leq \\ &\leq \overline{\mathcal{C}} \cdot |v(\ell)|_{\mathbf{R}} \cdot \int_0^T \left[\sup_{0 \leq x \leq \ell} |z^m(t, x) - z(t, x)|_{\mathbf{R}} \right] dt = \\ &= \overline{\mathcal{C}} \cdot |v(\ell)|_{\mathbf{R}} \cdot \int_0^T \|z^m(t) - z(t)\|_{C([0, \ell])} dt, \end{aligned}$$

e como a inclusão $H^{3/4}(0, \ell) \hookrightarrow C([0, \ell])$ é contínua obtemos ainda que:

$$\begin{aligned}
(IV)_m &\leq \tilde{C} \cdot |v(\ell)|_{\mathbb{R}} \cdot \int_0^T \|z^m(t) - z(t)\|_{H^{3/4}(0, \ell)} dt \leq \\
&\leq \sqrt{T} \tilde{C} \cdot |v(\ell)|_{\mathbb{R}} \cdot \left[\int_0^T \|z^m(t) - z(t)\|_{H^{3/4}(0, \ell)}^2 dt \right]^{1/2}, \text{ ou seja,} \\
(IV_m) &\leq \tilde{C} \sqrt{T} \cdot |v(\ell)|_{\mathbb{R}} \cdot \|z^m - z\|_{L^2(0, T; H^{3/4}(0, \ell))}, \text{ o qual tende a zero}
\end{aligned}$$

quando $m \rightarrow \infty$ graças a (54), confirmando o limite em (52).

Para finalizar a etapa 3 calculemos o limite (53).

Do lema 2.15 temos que $\|z^m(t, \cdot)\| \leq k$, $\forall t \in [0, T]$ e $\forall m \geq 1$, para uma certa constante k . Logo, da hipótese (H1.a) concluímos que $|G(z^m(t, \cdot))| \leq \tilde{k}$, $\forall t \in [0, T]$ e $\forall m \geq 1$, ou seja, $\{Gz^m\}_{m \geq 1}$ é limitada em $L^\infty(0, T : H)$, e em particular em $L^2(0, T : H)$. Portanto, tomando subsequência se necessário, existe $\beta \in L^2(0, T : H)$ tal que

$$(55) \quad Gz^m \rightharpoonup \beta \text{ fraco em } L^2(0, T : H).$$

Agora, do fato que $\psi_m \rightarrow \psi$ forte em $L^2(0, T : V)$ temos em particular que $\psi_m \rightarrow \psi$ forte em $L^2(0, T : H)$. Isto, juntamente com (55) nos dá o limite (53), concluindo a etapa 3.

Etapa 4: $\dot{z} \in L^2(0, T : V')$ e $z(0) = z_0$.

Definindo $g_i \in L^2(0, T : V')$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, por:

$$\begin{aligned}
\langle g_1(t), v \rangle &:= ((z(t), v)), \quad \langle g_2(t), v \rangle := \rho(z(t, \ell))v(\ell) \quad , \\
\langle g_3(t), v \rangle &:= (\beta(t), v), \quad \text{e} \quad \langle g_4(t), v \rangle := (h(t), v),
\end{aligned}$$

então a equação (44) demonstrada na etapa anterior está dizendo que

$$(56) \quad - \int_0^T (z(t), v) \dot{\xi}(t) dt = \int_0^T \langle g(t), v \rangle \xi(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(]0, T[) \text{ e}$$

$\forall v \in V$, onde $g = -g_1 + g_2 - g_3 + g_4 \in L^2(0, T : V')$.

Mudando a ordem de integração, temos que:

$$(57) \quad - \int_0^T (z(t), v) \dot{\xi}(t) dt = \left(- \int_0^T \dot{\xi}(t) z(t) dt, v \right).$$

Como $\int_0^T \xi(t) g(t) dt \in V'$, temos que o lado direito de (56) pode ser escrito como

$$(58) \quad \int_0^T \langle \xi(t) g(t), v \rangle dt = \langle \int_0^T \xi(t) g(t) dt, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

De (56), (57) e (58) concluimos que

$$\left(- \int_0^T \dot{\xi}(t) z(t) dt, v \right) = \langle \int_0^T \xi(t) g(t) dt, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Usando a identificação do produto interno com o produto de dualidade entre V e V' , obtemos:

$$\left(- \int_0^T \dot{\xi}(t) z(t) dt, v \right) = \langle \int_0^T \xi(t) g(t) dt, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Portanto $-\int_0^T \dot{\xi}(t) z(t) dt = \int_0^T \xi(t) g(t) dt$, e como $\xi \in \mathcal{D}([0, T])$ é arbitrário concluimos que $\dot{z} = g \in L^2(0, T : V')$, como queríamos.

Provaremos agora que $z(0) = z_0$.

Para isso seja $\varphi \in C^\infty([0, T])$ tal que $\varphi(0) \neq 0$ e $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in [T - \delta, T]$, e algum $0 < \delta < T$. Seja também $v \in V$.

Temos que $t \mapsto \varphi(t)v$ pertence a $W(0, T : V, V')$. Logo, integrando por partes (veja proposição 1.4) temos que:

$$\int_0^T \langle \dot{z}(t), v \rangle \varphi(t) dt = - \int_0^T \langle z(t), v \rangle \dot{\varphi}(t) dt - (z(0), v) \cdot \varphi(0)$$

De maneira análoga temos:

$$\int_0^T \langle \dot{z}^m(t), v_m \rangle \varphi(t) dt = - \int_0^T \langle z^m(t), v_m \rangle \dot{\varphi}(t) dt - (z_{0m}, v_m) \cdot \varphi(0)$$

Assim, se provarmos que $\int_0^T \langle \dot{z}^m(t), v_m \rangle \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle \dot{z}(t), v \rangle \varphi(t) dt$ quando $m \rightarrow \infty$, não restará mais nada a fazer, pois o lado direito da última equação tende para $-\int_0^T \langle z(t), v \rangle \dot{\varphi}(t) dt - (z_0, v) \cdot \varphi(0)$, donde resultará que $(z(0), v) \varphi(0) = (z_0, v) \cdot \varphi(0)$, e sendo $\varphi(0) \neq 0$ então $(z(0), v) = (z_0, v)$. Como v é arbitrário em V , e $\overline{V} = H$, então $(z(0), v) = (z_0, v) \forall v \in H$, donde $z(0) = z_0$.

Provaremos então que $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \dot{z}^m(t), v_m \rangle \varphi(t) dt = \int_0^T \langle \dot{z}(t), v \rangle \varphi(t) dt$

Como

$$(59) \quad \frac{d}{dt} (z(t), v) + ((z(t), v)) - v(\ell) \cdot \rho(z(t), \ell)) + (\beta(t), v) = (h(t), v)$$

no sentido de $\mathcal{D}'([0, T])$, para todo $v \in V$, e como $\frac{d}{dt} (z(t), v) = \langle \dot{z}(t), v \rangle$ temos, multiplicando (59) por $\varphi(t)$, que

$$(60) \quad \langle \dot{z}(t), v \rangle \varphi(t) + ((z(t), v)) \varphi(t) - v(\ell) \cdot \rho(z(t), \ell)) \varphi(t) + (\beta(t), v) \varphi(t) = (h(t), v) \varphi(t).$$

Agora, é fácil ver que $f_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, onde

$$f_1(t) := \langle \dot{z}(t), v \rangle, \quad f_2(t) := ((z(t), v)), \quad f_3(t) := v(\ell) \rho(z(t), \ell), \quad f_4(t) := (\beta(t), v)$$

e $f_5(t) := (h(t), v)$, pertencem ao espaço $L^2(0, T)$. Logo, como $\varphi \in L^2(0, T)$, então $f_i \cdot \varphi \in L^1(0, T) \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ou seja, podemos integrar (60) de 0 a T obtendo:

$$(61) \quad \int_0^T \langle \dot{z}(t), v \rangle \varphi(t) dt = - \int_0^T ((z(t), v)) \varphi(t) dt + \int_0^T v(\ell) \rho(z(t), \ell)) \varphi(t) dt + \\ - \int_0^T (\beta(t), v) \varphi(t) dt + \int_0^T (h(t), v) \varphi(t) dt.$$

De modo análogo temos para as aproximações z^m a igualdade:

$$(62) \quad \int_0^T \langle \dot{z}^m(t), v_m \rangle \varphi(t) dt = - \int_0^T ((z^m(t), v_m)) \varphi(t) dt + \int_0^T v_m(\ell) \rho(z^m(t), \ell)) \varphi(t) dt \\ - \int_0^T (Gz^m(t), v_m) \varphi(t) dt + \int_0^T (h(t), v_m) \varphi(t) dt$$

Assim obtemos por (62) que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \dot{z}^m(t), v_m \rangle \varphi(t) dt =$$

$$= - \int_0^T ((z(t), v)) \varphi(t) dt + \int_0^T v(\ell) \rho(z(t, \ell)) \varphi(t) dt - \int_0^T (\beta(t), v) \varphi(t) dt +$$

$\int_0^T (h(t), v) \varphi(t) dt$, sendo que as convergências quando $m \rightarrow \infty$ se justificam de modo análogo a convergências já estabelecidas anteriormente.

Logo, da equação acima e de (61) tiramos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \dot{z}^m(t), v_m \rangle \varphi(t) dt = \int_0^T \langle \dot{z}(t), v \rangle \varphi(t) dt, \text{ como}$$

desejado. Isso completa a quarta etapa.

Etapa 5: $\beta = G(z)$.

Para isso precisaremos do:

Lema 2.16: $z^m \rightarrow z$ forte em $L^2(0, T : V)$.

Demonstração: Seja $X_m(T)$ definido por

$$X_m(T) := \frac{1}{2} |z^m(T) - z(T)|^2 + \int_0^T \|z^m(t) - z(t)\|^2 dt$$

Podemos escrever:

$$X_m(T) = \frac{1}{2} |z^m(T)|^2 + \int_0^T \|z^m(t)\|^2 dt + Y_m(T), \text{ onde}$$

$$Y_m(T) := -(z^m(T), z(T)) + \frac{1}{2} |z(T)|^2 - 2 \int_0^T ((z^m(t), z(t))) dt + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt.$$

Agora, como z^m é limitada em $L^\infty(0, T : H)$ então $z^m(T)$ é limitada em H , donde $z^m(T) \rightharpoonup \theta$ fraco em H , tomando subsequência se necessário. Mas, tomando $\varphi \in C^\infty([0, T])$ tal que $\varphi(T) \neq 0$ e $\varphi(t) = 0 \forall t \in [0, \delta]$ para algum $0 < \delta < T$,

obtemos que $\theta = z(T)$ por um argumento análogo ao que foi feito na demonstração de que $z(0) = z_0$. Portanto $z^m(T) \rightarrow z(T)$ em H , donde:

$$(63) \quad (z^m(T), z(T)) \rightarrow |z(T)|^2 \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Recordando que $z^m \rightharpoonup z$ em $L^2(0, T : V)$ então

$$(64) \quad \int_0^T ((z^m(t), z(t))) dt \rightarrow \int_0^T \|z(t)\|^2 dt, \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Logo, de (63) e (64) segue que

$$(65) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(T) = -\frac{1}{2} \cdot |z(T)|^2 - \int_0^T \|z(t)\|^2 dt$$

Agora, das aproximações sabemos que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |z^m(t)|^2 + \|z^m(t)\|^2 = z^m(t, \ell) \cdot \rho(z^m(t, \ell)) - (Gz^m(t), z^m(t)) + (h(t), z^m(t)),$$

e integrando de 0 a T obtemos:

$$(66) \quad \frac{1}{2} \cdot |z^m(T)|^2 + \int_0^T \|z^m(t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot |z_{0m}|^2 + \int_0^T z^m(t, \ell) \cdot \rho(z^m(t, \ell)) dt \\ - \int_0^T (Gz^m(t), z^m(t)) dt + \int_0^T (h(t), z^m(t)) dt.$$

Agora vamos calcular o limite de cada termo do segundo membro de (66):

Em primeiro lugar temos que

$$|z_{0m}|^2 \rightarrow |z_0|^2, \text{ pois } z_{0m} \rightarrow z_0 \text{ em } V \text{ (e em particular em } H).$$

Também temos

$$\int_0^T z^m(t, \ell) \rho(z^m(t, \ell)) dt \rightarrow \int_0^T z(t, \ell) \rho(z(t, \ell)) dt, \text{ pois} \\ \left| \int_0^T z^m(t, \ell) \rho(z^m(t, \ell)) dt - \int_0^T z(t, \ell) \rho(z(t, \ell)) dt \right|_{\mathbb{R}} \leq (V_m) + (VI_m), \text{ onde} \\ (V_m) = \int_0^T |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbb{R}} \cdot |\rho(z^m(t, \ell))|_{\mathbb{R}} dt \text{ e} \\ (VI_m) = \int_0^T |z(t, \ell)|_{\mathbb{R}} \cdot |\rho(z^m(t, \ell)) - \rho(z(t, \ell))|_{\mathbb{R}} dt.$$

Agora,

$$\begin{aligned}(V_m) &\leq |\rho|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \int_0^T |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbb{R}} dt \text{ e} \\(VI_m) &\leq \mathfrak{C} \cdot \sqrt{\ell} \cdot \int_0^T \|z(t)\| \cdot |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbb{R}} dt \text{ ,}\end{aligned}$$

graças à desigualdade (15) e o fato de ρ ser lipschitziana.

Também, graças ao lema 2.15 temos que $z \in L^\infty(0, T : V)$ de onde segue que

$$(VI_m) \leq \tilde{\mathfrak{C}} \cdot \sqrt{\ell} \cdot \int_0^T |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbb{R}} dt.$$

Mas, do mesmo modo que estimamos o termo (IV_m) , temos que $\int_0^T |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbb{R}} dt \leq \overline{\mathfrak{C}} \cdot \sqrt{T} \cdot \|z^m - z\|_{L^2(0, T; H^{3/4}(0, \ell))}$, de onde segue que (V_m) e (VI_m) tendem a zero quando $m \rightarrow \infty$.

Também é verdade que

$\int_0^T (Gz^m(t), z^m(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\beta(t), z(t)) dt$, pois sabemos que $Gz^m \rightharpoonup \beta$ em $L^2(0, T : H)$ por (55), e que $z^m \rightarrow z$ forte em $L^2(0, T : H)$ graças a (54) e o fato $H^{3/4}(0, \ell) \hookrightarrow H$.

Finalmente,

$$\int_0^T (h(t), z^m(t)) dt \rightarrow \int_0^T (h(t), z(t)) dt, \text{ pois } z^m \rightarrow z \text{ forte}$$

(em particular fraco) em $L^2(0, T : H)$.

Assim, de (66) segue que:

$$\begin{aligned}(67) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} |z^m(T)|^2 + \int_0^T \|z^m(t)\|^2 dt \right] &= \frac{1}{2} |z_0|^2 + \int_0^T z(t, \ell) \rho(z(t, \ell)) dt + \\ &- \int_0^T (\beta(t), z(t)) dt + \int_0^T (h(t), z(t)) dt.\end{aligned}$$

Agora, como

$$\langle \dot{z}(t), v \rangle + ((z(t), v)) - v(\ell) \cdot \rho(z(t, \ell)) + (\beta(t), v) = (h(t), v) \quad \forall v \in V,$$

então, fixando t e tomando $v = z(t)$ obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |z(t)|^2 + \|z(t)\|^2 = z(t, \ell) \cdot \rho(z(t, \ell)) - (\beta(t), z(t)) + (h(t), z(t)) ,$$

e integrando de 0 a T obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot |z(T)|^2 + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot |z_0|^2 + \int_0^T z(t, \ell) \rho(z(t, \ell)) dt - \int_0^T (\beta(t), z(t)) dt + \int_0^T (h(t), z(t)) dt$$

Disso e de (67) concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \cdot |z^m(T)|^2 + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \right] = \frac{1}{2} \cdot |z(T)|^2 + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt, \text{ o qual,}$$

juntamente com (65), nos dá que $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m(T) = 0$, concluindo o lema 2.16. ■

Voltando à etapa 5, provemos que $\beta = G(z)$.

Ora, como $\int_0^T \|z^m(t) - z(t)\|^2 dt \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, então $\|z^m(t) - z(t)\| \rightarrow 0$ para quase todo $t \in [0, T]$, tomando subsequência se necessário, ou seja, $z^m(t) \rightarrow z(t)$ forte em V , a.e $[0, T]$. Da hipótese (H1.b) em G concluímos que:

$$(68) \quad G(z^m(t)) \rightharpoonup G(z(t)) \text{ fraco em } H, \text{ a.e } [0, T].$$

Afirmção:

$$(69) \quad Gz^m \rightharpoonup Gz \text{ em } L^2(0, T : H).$$

De fato, fixe $\varphi \in L^2(0, T : H)$. Queremos provar que

$$\int_0^T (G(z^m(t)), \varphi(t)) dt \xrightarrow{m} \int_0^T (G(z(t)), \varphi(t)) dt.$$

Mas, para cada $t \in [0, T]$ temos que $\varphi(t) \in H$. Logo, de (68) segue que:

$$(70) \quad (G(z^m(t)), \varphi(t)) \xrightarrow{m} (G(z(t)), \varphi(t)), \text{ a.e } [0, T].$$

Agora, $|(G(z^m(t)), \varphi(t))|_R \leq |G(z^m(t))| \cdot |\varphi(t)|$, e como $|G(z^m(t))| \leq \hat{k} \quad \forall t \in [0, T]$ e $\forall m \geq 1$ então vem que

$$(71) \quad |(Gz^m(t), \varphi(t))|_R \leq \hat{k} \cdot |\varphi(t)|.$$

Como $t \mapsto \tilde{k} \cdot |\varphi(t)|$ é integrável, segue de (70), (71) e do teorema da convergência dominada de Lebesgue que $\int_0^T (Gz^m(t), \varphi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (Gz(t), \varphi(t)) dt$, o que prova (69).

Agora, de (55) e (69) segue que $\beta = Gz$, como queríamos.

A demonstração do teorema (2.11) está completa. ■

2.2 Regularidade para as soluções de (P_γ) :

O objetivo deste parágrafo é mostrar o:

Teorema 2.17: Se G, h, ρ satisfazem (H1)-(H3) e se $z_0 \in V$, então o problema (P_γ) tem uma solução forte z . Mais ainda, $\dot{z} \in L^2(0, T : H)$.

Demonstração: Seja z uma solução generalizada de (P_γ) , ié,

$$(72) \quad \langle \dot{z}(t), v \rangle + ((z(t), v)) - v(\ell) \cdot \rho(z(t, \ell)) + (Gz(t), v) = (h(t), v),$$

no sentido de $\mathcal{D}'([0, T[), \forall v \in V$.

Agora, graças à hipótese (H1.a) de crescimento de G , temos que $t \mapsto h(t, \cdot) - G(z(t, \cdot))$ pertence ao espaço $L^2(0, T : H)$. Logo, existe uma única $w \in C([0, T] : H)$ solução forte do problema

$$(73) \quad \dot{w}(t) + A_\gamma w(t) = h(t, \cdot) - G(z(t, \cdot)), \quad w(0) = z_0.$$

Assim, fixado $v \in V$ obtemos que

$$(\dot{w}(t), v) - (w_{xx}(t, \cdot), v) = (h(t, \cdot), v) - (Gz(t, \cdot), v).$$

Integrando por partes vemos que $(w_{xx}(t, \cdot), v) = v(\ell) \cdot \rho(w(t, \ell)) - ((w(t, \cdot), v))$, e identificando $(\dot{w}(t), v) = \langle \dot{w}(t), v \rangle$ obtemos ainda:

$$(74) \quad \langle \dot{w}(t), v \rangle + ((w(t, \cdot), v)) - v(\ell) \cdot \rho(w(t, \ell)) = (h(t) - Gz(t), v),$$

para quase todo $t \in]0, T[$ e todo $v \in V$.

Também, como $w(0) = z_0 \in V = D(\varphi_\gamma)$ então $\dot{w} \in L^2(0, T : H)$ graças ao teorema (2.9) .

Agora, subtraindo (72) e (74) ficamos com:

$$\langle \dot{z}(t) - \dot{w}(t), v \rangle + ((z(t) - w(t), v)) - v(\ell) \cdot [\rho(z(t, \ell)) - \rho(w(t, \ell))] = 0$$

Fixando t e tomando $v = z(t) - w(t)$ obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |z(t) - w(t)|^2 + ||z(t) - w(t)||^2 = [z(t, \ell) - w(t, \ell)] \cdot [\rho(z(t, \ell)) - \rho(w(t, \ell))].$$

Como $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é decrescente então o segundo membro acima é não-positivo, ou seja, $d/dt |z(t) - w(t)|^2 \leq 0$, donde $z = w$.

Ou seja, z é de fato solução forte, como afirmado. ■

2.3 O problema (P_γ) com condição inicial $z_0 \in H$.

Para tratar desse problema colocaremos a seguinte hipótese na aplicação G :

$$(H4) \quad |G(u) - G(v)|^2 \leq K \cdot (A_\gamma u - A_\gamma v, u - v), \quad \forall u, v \in D(A_\gamma).$$

OBS.: É fácil ver que se $G : V \rightarrow H$ é lipschitziana então a hipótese (H4) é satisfeita. Entretanto a recíproca não vale em geral.

Podemos então enunciar e provar o:

Teorema 2.18: Se $z_0 \in H$ e se G, h, ρ satisfazem (H1)-(H4) então problema (P_γ) com condição inicial z_0 tem uma única solução forte.

Dem. do teorema 2.18:

Unicidade: Sejam $z, w \in C([0, T] : H)$ soluções fortes de (P_γ) com condição inicial $z_0 \in H$. Ou seja,

$$\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) + G(z(t)) = h(t), \quad \dot{w}(t) + A_\gamma(w(t)) + G(w(t)) = h(t),$$

e $z(0) = w(0)$. Então $\dot{z}(t) - \dot{w}(t) + A_\gamma(z(t)) - A_\gamma(w(t)) = -G(z(t)) + G(w(t))$, e tomando o produto interno (de H) com $z(t) - w(t)$ obtemos:

$$(75) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |z(t) - w(t)|^2 + (A_\gamma z(t) - A_\gamma w(t), z(t) - w(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} |Gz(t) - Gw(t)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |z(t) - w(t)|^2,$$

e usando (H4) obtemos ainda:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |z(t) - w(t)|^2 + \left[1 - \frac{K\varepsilon}{2}\right] \cdot (A_\gamma z(t) - A_\gamma w(t), z(t) - w(t)) \leq \frac{1}{2\varepsilon} |z(t) - w(t)|^2.$$

Assim, tomando $0 < \varepsilon < 2K^{-1}$ podemos escrever

$\frac{d}{dt} |z(t) - w(t)|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} |z(t) - w(t)|^2$, $\forall t \in [0, T]$, e usando Gronwall concluímos que $|z(t) - w(t)|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, ou seja, $z = w$.

Existência de solução forte:

Seja $\{z_0\}_{m \geq 1} \subset V$ tal que $z_{0m} \rightarrow z_0$ em H .

Pelo teorema 2.17 sabemos que existe, para cada $m \geq 1$, uma solução forte z^m para o problema $\dot{z}^m(t) + A_\gamma(z^m(t)) + G(z^m(t)) = h(t, \cdot)$, $z^m(0, \cdot) = z_{0m}$. Subtraindo as equações para z^m e z^n obtemos:

$$\dot{z}^m(t) - \dot{z}^n(t) + A_\gamma z^m(t) - A_\gamma z^n(t) = -(Gz^m(t) - Gz^n(t)), (z^m - z^n)(0) = z_{0m} - z_{0n}$$

e tomando o produto interno (em H) com $z^m(t) - z^n(t)$ vem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |z^m(t) - z^n(t)|^2 + (A_\gamma z^m(t) - A_\gamma z^n(t), z^m(t) - z^n(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} |Gz^m(t) - Gz^n(t)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |z^m(t) - z^n(t)|^2. \text{ Usando (H4) obtemos ainda:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |z^m(t) - z^n(t)|^2 + \left[1 - \frac{K\varepsilon}{2}\right] \cdot (A_\gamma z^m(t) - A_\gamma z^n(t), z^m(t) - z^n(t)) \leq$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}|z^m(t) - z^n(t)|^2$$

Integrando de 0 a t vem:

$$(76) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2}|z^m(t) - z^n(t)|^2 + \left[1 - \frac{K\varepsilon}{2}\right] \cdot \int_0^t (A_\gamma z^m(s) - A_\gamma z^n(s), z^m(s) - z^n(s)) ds \\ & \leq \frac{1}{2}|z_{0m} - z_{0n}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t |z^m(s) - z^n(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Como antes, escolhendo $0 < \varepsilon < 2K^{-1}$ obtemos:

$$|z^m(t) - z^n(t)|^2 \leq |z_{0m} - z_{0n}|^2 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} |z^m(s) - z^n(s)|^2 ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Por Gronwall ficamos com:

$$|z^m(t) - z^n(t)|^2 \leq |z_{0m} - z_{0n}|^2 \cdot e^{T/\varepsilon}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{ou seja:}$$

$$(77) \quad \|z^m - z^n\|_{C([0,T];H)}^2 \leq |z_{0m} - z_{0n}|^2 \cdot e^{T/\varepsilon}.$$

Portanto $\{z^m\}_{m \geq 1}$ é de Cauchy em $C([0, T] : H)$, donde existe $z \in C([0, T] : H)$ tal que $z^m \rightarrow z$ em $C([0, T] : H)$.

Agora, voltando à equação (76) com $t = T$ podemos escrever:

$$[2 - K\varepsilon] \cdot \int_0^T (A_\gamma z^m(s) - A_\gamma z^n(s), z^m(s) - z^n(s)) ds \leq |z_{0m} - z_{0n}|^2 + \frac{T}{\varepsilon} \cdot \|z^m - z^n\|_{C([0,T];H)}^2.$$

Desenvolvendo o primeiro membro da desigualdade acima ficamos com:

$$\int_0^T \|z^m(s) - z^n(s)\|^2 ds \leq (2 - K\varepsilon)^{-1} \cdot \left[|z_{0m} - z_{0n}|^2 + \frac{T}{\varepsilon} \|z^m - z^n\|_{C([0,T];H)}^2 + g_{mn}(T) \right],$$

onde $g_{mn}(T) := \int_0^T [z^m(s, \ell) - z^n(s, \ell)] \cdot [\rho(z^m(s, \ell)) - \rho(z^n(s, \ell))] ds$.

Agora, sendo $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decrescente então $g_{mn}(T) \leq 0$, donde

$$(78) \quad \begin{aligned} & \|z^m - z^n\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq (2 - K\varepsilon)^{-1} \cdot \left[|z_{0m} - z_{0n}|^2 + \right. \\ & \left. \frac{T}{\varepsilon} \cdot \|z^m - z^n\|_{C([0,T];H)}^2 \right], \quad \text{ou seja,} \end{aligned}$$

$\{z^m\}_{m \geq 1}$ é de Cauchy em $L^2(0, T : V)$, donde existe $\tilde{z} \in L^2(0, T : V)$ tal que $z^m \rightarrow \tilde{z}$ em $L^2(0, T : V)$. Agora, é fácil ver que $\tilde{z} = z$, donde:

$$(79) \quad z^m \rightharpoonup z \text{ forte em } L^2(0, T : V)$$

Afirmamos que:

$$(80) \quad Gz^m \rightarrow Gz \text{ forte em } L^2(0, T : H).$$

De fato, pois:

$$\begin{aligned} & \int_0^T |Gz^m(t) - Gz(t)|^2 dt \leq K \cdot \int_0^T (A_\gamma z^m(t) - A_\gamma z(t), z^m(t) - z(t)) dt = \\ & = K \cdot \|z^m - z\|_{L^2(0, T; V)}^2 - K \cdot \int_0^T [\rho(z^m(t, \ell)) - \rho(z(t, \ell))] \cdot [z^m(t, \ell) - z(t, \ell)] dt \leq \\ & \leq K \cdot \|z^m - z\|_{L^2(0, T; V)}^2 + 2K \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \int_0^T |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbf{R}} dt. \\ & \quad \text{Mas } \int_0^T |z^m(t, \ell) - z(t, \ell)|_{\mathbf{R}} dt \leq \int_0^T \|z^m(t, \cdot) - z(t, \cdot)\|_{C([0, \ell])} dt \leq \\ & \leq \mathcal{C} \cdot \int_0^T \|z^m(t, \cdot) - z(t, \cdot)\| dt \leq \mathcal{C} \sqrt{T} \|z^m - z\|_{L^2(0, T; V)}, \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade se justifica pelo fato da imersão $V \hookrightarrow C([0, \ell])$ ser contínua, e a última se justifica pela desigualdade de Hölder.

Assim,

$$\int_0^T |Gz^m(t) - Gz(t)|^2 dt \leq K \cdot \|z^m - z\|_{L^2(0, T; V)}^2 + 2\sqrt{T} \mathcal{C} K \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \|z^m - z\|_{L^2(0, T; V)}$$

de onde segue a afirmação graças a (79).

Resumindo temos que:

$$\begin{aligned} & \dot{z}^m(t) + A_\gamma(z^m(t)) = h(t) - G(z^m(t)), \quad z^m(0) = z_{0m}, \\ & z_{0m} \rightarrow z_0 \text{ em } H \text{ e } h - Gz^m \rightarrow h - Gz \text{ em } L^2(0, T : H). \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 1.15 temos que $z^m \rightarrow w$ em $C([0, T] : H)$, onde $w \in C([0, T] : H)$ é a única solução fraca de $\dot{w}(t) + A_\gamma(w(t)) = h(t) - G(z(t)), w(0) = z_0$.

Por unicidade do limite em $C([0, T] : H)$ temos que $z = w$, ou seja, z é solução fraca do problema $\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) = h(t) - G(z(t))$, $z(0) = z_0$. Agora, sendo $A_\gamma = \partial\varphi_\gamma$, como $t \mapsto h(t) - G(z(t))$ pertence ao espaço $L^2(0, T : H)$, segue do teorema 1.9 que z é de fato solução forte do problema $\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) = h(t) - G(z(t))$, $z(0) = z_0$, como queríamos. ■

2.4 Continuidade da solução com respeito às condições iniciais e termo forçante.

Sob as hipóteses (H1) - (H4) vale o teorema 2.18 de existência e unicidade de soluções para (P_γ) . Logo fica bem definida a aplicação:

$$(z_0, h) \in H \times L^2(0, T : H) \xrightarrow{S_\gamma} z \in C([0, T] : H) \cap L^2(0, T : V),$$

onde z é a única solução forte de (P_γ) com condição inicial z_0 e termo forçante h . Nessas condições podemos provar o:

Teorema 2.19: Se ρ satisfaz (H3) e se G satisfaz (H1) e (H4) então a aplicação S_γ , onde $\gamma = \text{gráf}(\rho)$, satisfaz:

$$(81) \quad \|S_\gamma(z_0, h) - S_\gamma(\tilde{z}_0, \tilde{h})\|_{C([0, T] : H)}^2 \leq M \cdot [|z_0 - \tilde{z}_0|^2 + \|h - \tilde{h}\|_{L^2(0, T : H)}^2] \quad , \quad \text{e}$$

$$(82) \quad \|S_\gamma(z_0, h) - S_\gamma(\tilde{z}_0, \tilde{h})\|_{L^2(0, T : V)}^2 \leq M \cdot [|z_0 - \tilde{z}_0|^2 + \|h - \tilde{h}\|_{L^2(0, T : H)}^2] \quad ,$$

para todos (z_0, h) e $(\tilde{z}_0, \tilde{h})$ em $H \times L^2(0, T : H)$, e uma certa constante $M \in \mathbb{R}$. Em particular, a aplicação S_γ é contínua de $H \times L^2(0, T : H)$ em $C([0, T] : H)$, e também é contínua de $H \times L^2(0, T : H)$ em $L^2(0, T : V)$.

Demonstração: Chamemos $z = S_\gamma(z_0, h)$ e $\tilde{z} = S_\gamma(\tilde{z}_0, \tilde{h})$. Então

$$\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) + G(z(t)) = h(t), \quad z(0) = z_0 \quad \text{e}$$

$$\dot{\tilde{z}}(t) + A_\gamma(\tilde{z}(t)) + G(\tilde{z}(t)) = \tilde{h}(t), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0.$$

Subtraindo estas duas equações, tomando o produto interno com $z(t) - \tilde{z}(t)$, e usando (H4) conseguimos que:

$$(83) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt}|z(t) - \tilde{z}(t)|^2 + [2 - K\varepsilon].(A_\gamma z(t) - A_\gamma \tilde{z}(t), z(t) - \tilde{z}(t)) \leq \\ & \leq |h(t) - \tilde{h}(t)|^2 + (1 + \varepsilon^{-1}).|z(t) - \tilde{z}(t)|^2. \end{aligned}$$

Tomando $0 < \varepsilon < 2K^{-1}$ obtemos, com contas análogas às anteriores, que:

$$(84) \quad \|z - \tilde{z}\|_{C([0,T];H)}^2 \leq \left[|z_0 - \tilde{z}_0|^2 + \|h - \tilde{h}\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right]. e^{(1+\varepsilon^{-1})T}$$

e também:

$$(85) \quad \|z - \tilde{z}\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq (2 - K\varepsilon)^{-1} \left[(1 + \varepsilon^{-1})T \|z - \tilde{z}\|_{C([0,T];H)}^2 + \|h - \tilde{h}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + |z_0 - \tilde{z}_0|^2 \right]$$

E, de (84) e (85) podemos escrever ainda:

$$(86) \quad \|z - \tilde{z}\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq M. \left[|z_0 - \tilde{z}_0|^2 + \|h - \tilde{h}\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right], \text{ onde}$$

$$M = M(\varepsilon) = [1 + (1 + \varepsilon^{-1})T.e^{(1+\varepsilon^{-1})T}]/(2 - K\varepsilon).$$

Observe que ε depende apenas da constante K da hipótese (H4), e não depende dos elementos (z_0, h) e $(\tilde{z}_0, \tilde{h})$. Ou seja, provamos que existe constante $M \in \mathbb{R}$ tal que (81) e (82) ocorrem. ■

Corolário 2.20: A aplicação S_γ leva conjuntos limitados de $H \times L^2(0, T : H)$ em conjuntos limitados de $C([0, T] : H)$ e $L^2(0, T : V)$.

OBS.: A constante M do teorema 2.19 independe de ρ .

2.5 De volta a (P_{II}) : existência, unicidade e dependência contínua.

Com o que já temos estabelecido podemos provar o:

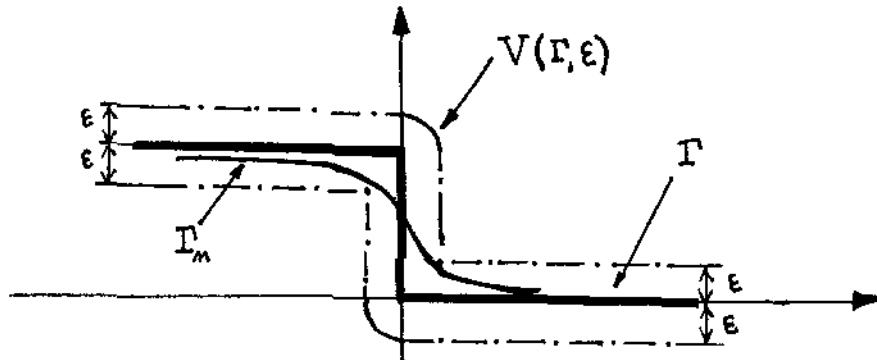
Teorema 2.21: Se $z_0 \in H$, $h \in L^2(0, T : H)$ e $G : V \rightarrow H$ é lipschitziana, então o problema (P_{II}) com condição inicial z_0 tem uma única solução forte $z \in C([0, T] : H) \cap L^2(0, T : V)$.

Demonstração: Suponhamos em princípio que $z_0 \in V$.

Seja $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- (i) $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é não-crescente, $\forall n \geq 1$;
- (ii) $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana, $\forall n \geq 1$.
- (iii) $\Gamma_n := \text{gráf}(\rho_n) \rightarrow \Gamma$ quando $n \rightarrow \infty$ no seguinte sentido:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_n \subset V(\Gamma; \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0(\varepsilon)$, onde $V(\Gamma; \varepsilon) := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(P; \Gamma) < \varepsilon\}$.



OBS.: Em particular, a condição (iii) garante que $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ é uniformemente limitada, ié, existe constante $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ tal que $|\rho_n(x)|_{\mathbb{R}} \leq \mathcal{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \geq N_1$ (sem perda de generalidade, podemos supor $N_1 = 1$).

Sejam $A = A_\Gamma$ e $A_n = A_{\Gamma_n}$.

Já sabemos que A e A_n são maximais monótonos, $\forall n \geq 1$.

Mais ainda, existem funcionais $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $\varphi_n : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexos, próprios e semi-contínuos inferiormente tais que $A = \partial\varphi$ e $A_n = \partial\varphi_n$, $\forall n \geq 1$.

Sabemos também que, para cada $n \geq 1$, existe uma única solução forte $z^n \in C([0, T] : H) \cap L^2(0, T : V)$ para o problema:

$$(P_n) \begin{cases} \dot{z}^n(t) + A_n(z^n(t)) + G(z^n(t)) = h(t, \cdot) \\ z^n(0) = z_0 \end{cases}$$

Mais ainda, $\dot{z}^n \in L^2(0, T : H)$ para todo $n \geq 1$.

Assim, tomando o produto interno (em H) com $\dot{z}^n(t)$ obtemos:

$$(87) \quad |\dot{z}^n(t)|^2 + (A_n z^n(t), \dot{z}^n(t)) + (G z^n(t), \dot{z}^n(t)) = (h(t), \dot{z}^n(t))$$

Agora, como $z^n(0) = z_0 \in V = D(\varphi_n)$ então a função $t \in [0, T] \mapsto \varphi_n(z^n(t)) \in \mathbb{R}$ é absolutamente contínua em $[0, T]$, donde derivável quase sempre em $[0, T]$, e vale a fórmula $(A_n z^n(t), \dot{z}^n(t)) = \frac{d}{dt} \{\varphi_n(z^n(t))\}$. Essa afirmação decorre da demonstração do teorema (1.9).

Assim, a equação (87) fica:

$$(88) \quad |\dot{z}^n(t)|^2 + \frac{d}{dt} \{\varphi_n(z^n(t))\} = (h(t), \dot{z}^n(t)) - (G z^n(t), \dot{z}^n(t)).$$

Integrando de 0 a t , com $t \in [0, T]$, obtemos que:

$$(89) \quad \int_0^t |\dot{z}^n(s)|^2 ds + \varphi_n(z^n(t)) = \varphi_n(z_0) + (I) + (II) ,$$

onde $(I) = \int_0^t (h(s), \dot{z}^n(s)) ds$ e $(II) = \int_0^t (G z^n(s), \dot{z}^n(s)) ds$.

OBS.: (89) se justifica, pois sendo $t \mapsto \varphi_n(z^n(t))$ absolutamente contínua, então $\int_0^t \frac{d}{ds} \{\varphi_n(z^n(s))\} ds = \varphi_n(z^n(t)) - \varphi_n(z^n(0))$, ou seja, a função é a integral de sua derivada.

Agora, para $\varepsilon > 0$ arbitrário temos que:

$$(I) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \|h\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t |\dot{z}^n(s)|^2 ds \quad , \quad e$$

$$(II) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_0^t |Gz^n(s)|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t |\dot{z}^n(s)|^2 ds, \quad \text{e como } G: V \rightarrow H \text{ é}$$

lipschitziana então existem constantes $a, b \geq 0$ tais que $|G(u)| \leq a \cdot \|u\| + b, \forall u \in V$,
donde segue que

$$(II) \leq c_1 \cdot \int_0^t \frac{1}{2} \cdot \|z^n(s)\|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^t |\dot{z}^n(s)|^2 ds + c_2, \quad ,$$

onde $c_1 = c_1(\varepsilon) = (a^2 + 1)/\varepsilon$ e $c_2 = c_2(\varepsilon) = (a^2 + 1)b^2 T/2\varepsilon$.

Logo, de (89) e das majorações conseguidas para (I) e (II) obtemos que:

$$(90) \quad (1-\varepsilon) \cdot \int_0^t |\dot{z}^n(s)|^2 ds + \varphi_n(z^n(t)) \leq \varphi_n(z_0) + \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(0,T;H)}^2 + c_1 \cdot \int_0^t \frac{1}{2} \|z^n(s)\|^2 ds + c_2$$

Agora, $\varphi_n(z_0) = - \int_0^{z_0(\ell)} \rho_n(s) ds + \frac{1}{2} \|z_0\|^2$, e como $-\int_0^{z_0(\ell)} \rho_n(s) ds \leq \mathbb{C}\sqrt{\ell} \|z_0\| \leq \frac{\mathbb{C}^2 \ell}{2} + \frac{\|z_0\|^2}{2}$ então

$$(91) \quad \varphi_n(z_0) \leq \frac{\mathbb{C}^2 \ell}{2} + \|z_0\|^2.$$

Assim, tomando $0 < \varepsilon < 1$, concluímos a partir de (90) e (91) que:

$$(92) \quad \varphi_n(z^n(t)) \leq \frac{\mathbb{C}^2 \ell}{2} + \|z_0\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(H)}^2 + c_1 \int_0^t \frac{1}{2} \|z^n(s)\|^2 ds + c_2$$

Afirmção: Existem constantes $c_3 > 0$ e $c_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_0^t \frac{1}{2} \|z^n(s)\|^2 ds \leq c_3 \int_0^t \varphi_n(z^n(s)) ds + c_4.$$

De fato, pois:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z^n(s)) &= - \int_0^{z^n(s,\ell)} \rho_n(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \|z^n(s)\|^2, \quad \text{e como} \\ \left| - \int_0^{z^n(s,\ell)} \rho_n(\xi) d\xi \right|_{\mathbb{R}} &\leq \mathbb{C}\sqrt{\ell} \|z^n(s)\| \quad \text{então} \end{aligned}$$

$$\varphi_n(z^n(s)) \geq -\mathbb{C}\sqrt{\ell}\|z^n(s)\| + \frac{1}{2}\|z^n(s)\|^2 = f(\|z^n(s)\|), \text{ onde}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é a função quadrática } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \mathbb{C}\sqrt{\ell}x.$$

Agora, tomando $0 < D < 1/2$ e $\mathbb{E} \leq \min_{x \in \mathbb{R}} \{(\frac{1}{2} - D)x^2 - \mathbb{C}\sqrt{\ell}x\}$, é fácil ver que $f(x) \geq D.x^2 + \mathbb{E}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $\varphi_n(z^n(s)) \geq D.\|z^n(s)\|^2 + \mathbb{E}$, ou seja,

$$\|z^n(s)\|^2 \leq D^{-1}.\varphi_n(z^n(s)) - D^{-1}.\mathbb{E}, \text{ donde}$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}\|z^n(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2D} \cdot \int_0^t \varphi_n(z^n(s)) ds - \frac{\mathbb{E}.T}{2D}, \quad \forall t \in [0, T], \text{ provando a}$$

afirmação com $c_3 = 1/2D > 0$ e $c_4 = -\mathbb{E}T/2D$.

Portanto, de (92) e da afirmação tiramos que:

$$\varphi_n(z^n(t)) \leq \frac{\mathbb{C}^2\ell}{2} + \|z_0\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|h\|_{L^2(H)}^2 + c_1 \left[c_3 \int_0^t \varphi_n(z^n(s)) ds + c_4 \right] + c_2,$$

ou ainda,

$$(93) \quad \varphi_n(z^n(t)) \leq \left[\frac{\mathbb{C}^2\ell}{2} + \|z_0\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|h\|_{L^2(H)}^2 + c_5 \right] + \int_0^t c_6 \varphi_n(z^n(s)) ds.$$

Usando o lema de Gronwall-Bellman concluímos que:

$$(94) \quad \varphi_n(z^n(t)) \leq \left[\frac{\mathbb{C}^2\ell}{2} + \|z_0\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|h\|_{L^2(H)}^2 + c_5 \right] \cdot e^{c_6 T}, \quad \forall t \in [0, T], \text{ ié,}$$

$$(95) \quad \varphi_n(z^n(t)) \leq \overline{K}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Agora, para todo $u \in D(\varphi_n)$ temos que:

$$\varphi_n(u) = - \int_0^{u(\ell)} \rho_n(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\|u\|^2 \geq -\mathbb{C}\sqrt{\ell}\|u\| + \frac{1}{2}\|u\|^2 \geq \underline{K}, \text{ com } \underline{K} \text{ independente de } u \text{ e de } n. \text{ Logo:}$$

$$(96) \quad \underline{K} \leq \varphi_n(z^n(t)) \leq \overline{K} \quad \forall t \in [0, T], \text{ ou ainda,}$$

$$(97) \quad \underline{K} \leq - \int_0^{z^n(t, \ell)} \rho_n(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \|z^n(t)\|^2 \leq \overline{K}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Em particular,

$$(98) \quad \|z^n(t)\| \leq \tilde{K}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (\tilde{K} \text{ independente de } n \in \mathbb{N}),$$

pois do contrário existirá sequência $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [0, T]$ tal que $\|z^n(t_j)\| \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, donde $\varphi_n(z^n(t_j)) \geq -\mathfrak{C}\sqrt{\ell}\|z^n(t_j)\| + \frac{1}{2}\|z^n(t_j)\|^2 \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, contradizendo (96).

Agora, de (90), (91) e (98) tiramos que:

$$(1 - \varepsilon) \int_0^t |\dot{z}^n(s)|^2 ds + \varphi_n(z^n(t)) \leq \frac{\mathfrak{C}^2 \ell}{2} + \|z_0\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \frac{1}{2} C_1 T \tilde{K}^2 + C_2,$$

ou seja, chamando o segundo membro acima de $c_7(\varepsilon)$ obtemos

$$(1 - \varepsilon) \int_0^t |\dot{z}^n(s)|^2 ds \leq c_7(\varepsilon) - \varphi_n(z^n(t)) \leq c_7(\varepsilon) - \underline{K} =: c_8(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, T]$$

e $\forall n \geq 1$.

Portanto:

$$(1 - \varepsilon) \int_0^T |\dot{z}^n(s)|^2 ds \leq c_8(\varepsilon) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \text{ ou seja}$$

$$(99) \quad \|\dot{z}^n\|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq (1 - \varepsilon)^{-1} \cdot c_8(\varepsilon), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\{\dot{z}^n\}_{n \geq 1}$ é limitada em $L^2(0, T; H)$.

Agora, é possível provar que $\{z^n\}_{n \geq 1}$ é limitada em $L^2(0, T; V)$ com as mesmas contas do parágrafo 2.1. Ou, alternativamente, use o teorema 2.19 juntamente com a observação de que a constante M daquele teorema independe da função ρ .

Ora, mas tendo $\{z^m\}_{m \geq 1}$ limitada em $L^2(0, T : V)$ e $\{\dot{z}^m\}_{m \geq 1}$ limitada em $L^2(0, T : H)$, podemos usar o lema de Aubin-Lions como já feito antes e concluir que:

(100) $z^m \rightarrow z$ forte em $L^2(0, T : H^{3/4})$, tomando subsequência se necessário.

Agora, de:

$$\begin{cases} \dot{z}^n(t) + A_n z^n(t) + G z^n(t) = h(t) \\ z^n(0) = z_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{z}^m(t) + A_m z^m(t) + G z^m(t) = h(t) \\ z^m(0) = z_0 \end{cases}$$

obtemos, após subtrair e tomar o produto com $z^n(t) - z^m(t)$, a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z^n(t) - z^m(t)|^2 + \|z^n(t) - z^m(t)\|^2 = \\ & = [\rho_n(z^n(t, \ell)) - \rho_m(z^m(t, \ell))] \cdot [z^n(t, \ell) - z^m(t, \ell)] + \\ & - (G z^n(t) - G z^m(t), z^n(t) - z^m(t)). \end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, o fato que $\{\rho_n\}$ é uniformemente limitada por $\mathcal{C}$, e o fato de $G : V \rightarrow H$ ser lipschitziana concluimos que:

$$(101) \quad \frac{d}{dt} |z^m(t) - z^n(t)|^2 + (2 - K^2 \varepsilon) \|z^m(t) - z^n(t)\|^2 \leq 4\mathcal{C} \cdot |z^m(t, \ell) - z^n(t, \ell)|_{\mathbf{R}} + \frac{1}{\varepsilon} |z^m(t) - z^n(t)|^2. \text{ Após integração de } 0 \text{ a } t \in [0, T] \text{ obtemos}$$

$$\begin{aligned} & |z^m(t) - z^n(t)|^2 + (2 - K^2 \varepsilon) \int_0^t \|z^m(s) - z^n(s)\|^2 ds \leq \\ & \leq 4\mathcal{C} \cdot \int_0^t |z^m(s, \ell) - z^n(s, \ell)|_{\mathbf{R}} ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} |z^m(s) - z^n(s)|^2 ds \\ & \leq 4\bar{\mathcal{C}} \sqrt{T} \cdot \|z^m - z^n\|_{L^2(0, T; H^{3/4})} + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} |z^m(s) - z^n(s)|^2 ds, \text{ ou seja :} \end{aligned}$$

$$(102) \quad |z^m(t) - z^n(t)|^2 + (2 - K^2 \varepsilon) \int_0^t \|z^m(s) - z^n(s)\|^2 ds \leq \hat{\mathcal{C}} \cdot \|z^m - z^n\|_{L^2(0, T; H^{3/4})} + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} |z^m(s) - z^n(s)|^2 ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

A partir daqui tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e agimos como em situações anteriores para obter que:

$$(103) \quad \|z^m - z^n\|_{C([0,T]:H)}^2 \leq \widehat{\mathcal{G}} \cdot \|z^m - z^n\|_{L^2(0,T:H^{3/4})} \cdot e^{T/\varepsilon}, \text{ e também}$$

$$(104) \quad \|z^m - z^n\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq (2 - K^2\varepsilon)^{-1} \cdot \widehat{\mathcal{G}} \|z^m - z^n\|_{L^2(0,T:H^{3/4})} + \\ + (2 - K^2\varepsilon)^{-1} T\varepsilon^{-1} \|z^m - z^n\|_{C([0,T]:H)}^2$$

Ou seja, $\{z^n\}_{n \geq 1}$ é de Cauchy em $C([0,T] : H)$ e em $L^2(0,T : V)$, donde $z^n \rightarrow z$ forte nesses dois espaços.

Agora, de $z^n \rightarrow z$ forte em $L^2(0,T : V)$ e G lipschitziana então

$$(105) \quad Gz^n \rightarrow Gz \text{ forte em } L^2(0,T : H).$$

Para concluir o teorema no caso $z_0 \in V$ precisamos do:

Lema 2.22: $(I + \lambda A_n)^{-1}(u) \xrightarrow{n} (I + \lambda A)^{-1}(u)$ em H , $\forall \lambda > 0$ e $\forall u \in H$.

Demonstração do Lema: Sejam $\lambda > 0$ e $u \in H$ fixados. Denotemos $v_n := (I + \lambda A_n)^{-1}(u)$ e $v := (I + \lambda A)^{-1}(u)$. Queremos mostrar que $v_n \rightarrow v$ em H quando $n \rightarrow \infty$. Ora, da definição de v_n e v temos que:

$$(106) \quad v_n - \lambda v_n'' = u, \quad v_n(0) = 0, \quad (v_n(\ell), v_n'(\ell)) \in \Gamma_n = \text{graf}(\rho_n), \text{ e}$$

$$(107) \quad v - \lambda v'' = u, \quad v(0) = 0, \quad (v(\ell), v'(\ell)) \in \Gamma.$$

Portanto $(v_n - v) - \lambda(v_n - v)'' = 0$, $(v_n - v)(0) = 0$.

Tomando o produto interno (em H) com $v_n - v$ ficamos com:

$$(108) \quad |v_n - v|^2 - \lambda[v_n'(\ell) - v'(\ell)][v_n(\ell) - v(\ell)] + \lambda\|v_n - v\|^2 = 0, \text{ ou ainda,} \\ |v_n - v|^2 + \lambda\|v_n - v\|^2 = \lambda[v_n'(\ell) - v'(\ell)][v_n(\ell) - v(\ell)]$$

Assim, se provarmos que o lado direito de (108) tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ obteremos que $v_n \rightarrow v$ em H (e até mesmo em V). E isto é verdade, conforme podemos ver no que segue:

De $v_n - \lambda v_n'' = u$, $v_n(0) = 0$ e $(v_n(\ell), v_n'(\ell)) \in \Gamma_n$ então

$$\begin{bmatrix} v_n(\ell) \\ v_n'(\ell) \end{bmatrix} = P_0 + v_n'(0) \cdot \vec{d}, \text{ onde } P_0 = \int_0^\ell e^{(\ell-s)M} \begin{bmatrix} 0 \\ -u(s)/\lambda \end{bmatrix} ds, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\vec{d} = e^{\ell M} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \text{ com}$$

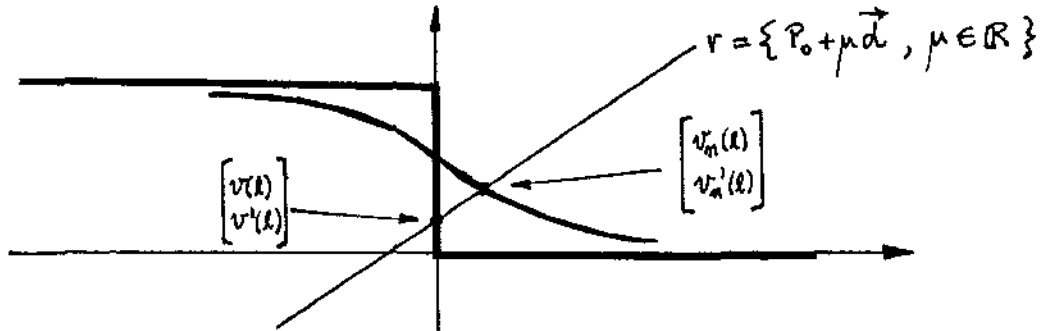
$$d_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell^{2k+1}}{\lambda^k \cdot (2k+1)!} > 0 \text{ e } d_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell^{2k}}{\lambda^k \cdot (2k)!} > 0.$$

Lembre que $v_n'(0)$ é escolhido (de modo único) tal que $\begin{bmatrix} v_n(\ell) \\ v_n'(\ell) \end{bmatrix}$ pertença a Γ_n .

De modo análogo temos que:

$$\begin{bmatrix} v(\ell) \\ v'(\ell) \end{bmatrix} = P_0 + v'(0) \cdot \vec{d}, \text{ sendo } P_0 \text{ e } \vec{d} \text{ como acima, e } v'(0) \text{ determinado (também}$$

de modo único) tal que $\begin{bmatrix} v(\ell) \\ v'(\ell) \end{bmatrix}$ pertença a Γ . Veja ilustração abaixo:



Assim, como $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$ quando $n \rightarrow \infty$, então $\begin{bmatrix} v_n(\ell) \\ v_n'(\ell) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v(\ell) \\ v'(\ell) \end{bmatrix}$ quando $n \rightarrow \infty$, donde segue que $[v_n'(\ell) - v'(\ell)] \cdot [v_n(\ell) - v(\ell)] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, concluindo a demonstração do lema (2.22).

Resumindo, temos estabelecido que:

$\dot{z}^n(t) + A_n z^n(t) = h(t) - Gz^n(t)$, $z^n(0) = z_0$, e também :

- $h - Gz^n \rightarrow h - Gz$ em $L^2(0, T : H)$ [em particular, em $L^1(0, T : H)$];
- $(I + \lambda A_n)^{-1}(u) \rightarrow (I + \lambda A)^{-1}(u)$ em H quando $n \rightarrow \infty, \forall \lambda > 0$ e $\forall u \in H$.

Logo, do teorema 1.15 segue que $z^n \rightarrow w$ em $C([0, T] : H)$, onde $w \in C([0, T] : H)$ é a única solução fraca do problema $\dot{w}(t) + Aw(t) = h(t) - Gz(t), w(0) = z_0$. Agora, sendo $A = \partial\varphi$ e $h - Gz \in L^2(0, T : H)$ então, pelo teorema 1.9, w é solução forte. Agora, da unicidade do limite em $C([0, T] : H)$ tiramos que $w = z$, donde z é solução forte de $\dot{z}(t) + Az(t) + Gz(t) = h(t), z(0) = z_0$, o que conclui o teorema no caso $z_0 \in V$.

O caso em que $z_0 \in H$ segue agora fácil. Tomamos sequência $\{z_{0n}\}_{n \geq 1} \subset V$ tal que $z_{0n} \rightarrow z_0$ em H .

Pelo que provamos acima, existe solução forte $z_n \in C([0, T] : H) \cap L^2(0, T : V)$ para o problema:

$$\dot{z}^n(t) + Az^n(t) + Gz^n(t) = h(t), \quad z^n(0) = z_{0n}.$$

Com argumentos análogos conseguimos provar que existe $z \in C([0, T] : H) \cap L^2(0, T : V)$ tal que $z^n \rightarrow z$ forte nesses dois espaços.

Agora, de $z^n \rightarrow z$ em $L^2(0, T : V)$ então $Gz^n \rightarrow Gz$ em $L^2(0, T : H)$, e em particular em $L^1(0, T : H)$. Portanto:

$$\begin{cases} \dot{z}^n(t) + Az^n(t) = h(t) - Gz^n(t) \\ z^n(0) = z_{0n} \end{cases}$$

e além disso $z_{0n} \rightarrow z_0$ em H , e $h - Gz^n \rightarrow h - Gz$ em $L^1(0, T : H)$. Logo, usando o teorema 1.9 novamente concluímos que z é solução forte de $\dot{z}(t) + Az(t) + Gz(t) = h(t), z(0) = z_0$, como queríamos.

A unicidade segue fácil. ■

Graças ao teorema 2.21 fica bem definida a aplicação

$S_\Gamma : H \times L^2(0, T; H) \rightarrow C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$, que a cada par (z_0, h) associa a única solução forte z do problema $\dot{z}(t) + A_\Gamma z(t) + Gz(t) = h(t)$, $z(0) = z_0$.

De modo análogo ao que provamos no teorema 2.19 para S_γ , onde $\gamma = \text{gráf}(\rho)$, temos a seguinte propriedade para S_Γ :

Teorema 2.23: Se $G : V \rightarrow H$ é lipschitziana então existe constante $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(109) \quad \|S_\Gamma(z_0, h) - S_\Gamma(\tilde{z}_0, \tilde{h})\|_{C([0, T]; H)}^2 \leq M \cdot \left[|z_0 - \tilde{z}_0|^2 + \|h - \tilde{h}\|_{L^2(0, T; H)}^2 \right], \quad e$$

$$(110) \quad \|S_\Gamma(z_0, h) - S_\Gamma(\tilde{z}_0, \tilde{h})\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq M \cdot \left[|z_0 - \tilde{z}_0|^2 + \|h - \tilde{h}\|_{L^2(0, T; H)}^2 \right],$$

para todos (z_0, h) e $(\tilde{z}_0, \tilde{h})$ em $H \times L^2(0, T; H)$.

Em particular, a solução de (P_Γ) depende continuamente da condição inicial e do termo forçante.

Dem.: Segue os mesmos passos do teorema 2.19. ■

Obs.: A constante M acima pode ser tomada como $M = \frac{1 + (1 + \varepsilon^{-1})T \cdot e^{(1 + \varepsilon^{-1})T}}{2 - K^2 \cdot \varepsilon}$, onde $0 < \varepsilon < 2K^{-2}$ e K é a constante de lipschitz de G .

3 Soluções periódicas forçadas.

Dado $h \in L^2(0, T; H)$ colocamos a seguinte pergunta:

Existe $z_0 \in H$ tal que a única solução $z = S_\Gamma(z_0, h)$ satisfaz $z(T, \cdot) = z_0$?

Inicialmente responderemos esta questão para o problema (P_γ) , onde $\gamma = \text{gráf}(\rho)$, com $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, não-crescente e lipschitziana.

Para isto introduzimos a aplicação (de Poincaré)

$$(111) \quad \mathcal{F}_T^\gamma : H \rightarrow H, \quad \mathcal{F}_T^\gamma(z_0) := z(T, \cdot), \quad \text{onde } z = S_\gamma(z_0, h).$$

Queremos então saber se $\mathcal{F}_T^\gamma$ tem ponto fixo, e o teorema de Schaeffer abaixo será de grande utilidade:

Teorema (Schaeffer):

Sejam E Banach com norma $||\cdot||$ e $F : E \rightarrow E$ compacta (i.e., leva limitados em relativamente compactos). Suponhamos ainda que existe $R > 0$ tal que $\{u \in E \mid u = \lambda F(u), \lambda \in [0, 1]\} \subset B_E(0; R)$, onde $B_E(0; R) = \{v \in E : ||v|| < R\}$. Então F tem ponto fixo $u_0 \in \overline{B_E(0; R)}$.

Demonstração. É consequência do teorema de Schauder, e está feita em textos clássicos (veja [6], por exemplo). ■

Começamos provando o:

Lema 2.24: $\mathcal{F}_T^\gamma : H \rightarrow H$ é compacta.

Demonstração: Seja $B \subset H$ limitado. Provaremos que $\mathcal{F}_T^\gamma(B)$ é limitado em V , donde seguirá o resultado, pois a inclusão $V \hookrightarrow H$ é compacta.

Sem perda de generalidade podemos supor $B = \{v \in H : |v| \leq R_B\}$.

Seja $z_0 \in B$, e provemos que existe constante $\mathbb{K} = \mathbb{K}(B) \in \mathbb{R}$ tal que $||\mathcal{F}_T^\gamma(z_0)|| \leq \mathbb{K}$.

Para isso tomemos $\{z_{0n}\}_{n \geq 1} \subset V$ tal que $z_{0n} \rightarrow z_0$ em H .

Novamente sem perder generalidade suporemos $z_{0n} \in \{v \in H : |v| \leq R_B + 1\}$, $\forall n \geq 1$.

Por simplicidade escreveremos $z_n = S_\gamma(z_{0n}, h)$, ou seja:

$$(112) \quad \dot{z}_n(t) + A_\gamma(z_n(t)) + G(z_n(t)) = h(t), \quad z_n(0, \cdot) = z_{0n}.$$

Tomando o produto interno (de H) com $\dot{z}_n(t)$ obtemos:

$$(113) \quad |\dot{z}_n(t)|^2 + (A_\gamma z_n(t), \dot{z}_n(t)) + (Gz_n(t), \dot{z}_n(t)) = (h(t), \dot{z}_n(t)).$$

Obs.: A equação acima faz sentido, pois como $z_{0n} \in V$ então $\dot{z}_n \in L^2(0, T : H)$. Mais ainda, como $A_\gamma = \partial\varphi_\gamma$ para um certo funcional $\varphi_\gamma : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexo, próprio e sci, e como $z_{0n} \in V = D(\varphi_\gamma)$ então a função $t \mapsto \varphi_\gamma(z_n(t, \cdot))$ é absolutamente contínua em $[0, T]$, donde é derivável quase sempre em $]0, T[$. Além disso, vale a igualdade

$$(114) \quad \frac{d}{dt}\varphi_\gamma(z_n(t, \cdot)) = (A_\gamma z_n(t, \cdot), \dot{z}_n(t, \cdot)), \text{ ae }]0, T[.$$

Logo, multiplicando (113) por $t \in [0, T]$ e usando (114) obtemos:

$$(115) \quad t|\dot{z}_n(t)|^2 + t\frac{d}{dt}\varphi_\gamma(z_n(t)) = t(h(t), \dot{z}_n(t)) - t(Gz_n(t), \dot{z}_n(t))$$

Integrando de 0 a T ficamos com:

$$(116) \quad \int_0^T t|\dot{z}_n(t)|^2 dt + \int_0^T t\frac{d}{dt}\varphi_\gamma(z_n(t))dt = (I) + (II), \quad \text{onde}$$

$$(I) = \int_0^T t(h(t), \dot{z}_n(t))dt \quad \text{e} \quad (II) = - \int_0^T t(Gz_n(t), \dot{z}_n(t))dt.$$

Agora, integrando por partes obtemos que

$$\int_0^T t\frac{d}{dt}\varphi_\gamma(z_n(t))dt = T\varphi_\gamma(z_n(T)) - \int_0^T \varphi_\gamma(z_n(t))dt,$$

de onde segue que (116) fica

$$(117) \quad \int_0^T t|\dot{z}_n(t)|^2 dt + T\varphi_\gamma(z_n(T)) = (I) + (II) + (III), \quad \text{onde}$$

$$(III) = \int_0^T \varphi_\gamma(z_n(t))dt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ é fácil ver que:

$$(I) \leq \frac{T}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T t|\dot{z}_n(t)|^2 dt,$$

e usando a condição (H1.a) de crescimento em G :

$$(II) \leq c_1 \|z_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T t |\dot{z}_n(t)|^2 dt + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas dependendo de ε, T , e das constantes a, b da condição (H1.a).

Também:

$$(III) = \int_0^T \left[- \int_0^{z_n(t,\ell)} \rho(s) ds + \frac{1}{2} \|z_n(t)\|^2 \right] dt,$$

mas como $-\int_0^{z_n(t,\ell)} \rho(s) ds \leq \sqrt{\ell} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \|z_n(t)\|$ então

$$(III) \leq \int_0^T \sqrt{\ell} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \|z_n(t)\| dt + \frac{1}{2} \|z_n\|_{L^2(0,T;V)}^2$$

Agora, usando a desigualdade de Young temos

$$\int_0^T \sqrt{\ell} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \cdot \|z_n(t)\| dt \leq \frac{1}{2} T \ell \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \frac{1}{2} \|z_n\|_{L^2(0,T;V)}^2,$$

de onde segue finalmente que:

$$(III) \leq \frac{1}{2} T \ell \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \|z_n\|_{L^2(0,T;V)}^2.$$

Logo, de (117) e das majorações conseguidas para (I), (II) e (III) ficamos com:

$$(1 - \varepsilon) \int_0^T |\dot{z}_n(t)|^2 dt + T \varphi_\gamma(z_n(T)) \leq \frac{T}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{T\ell}{2} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + c_3 \|z_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 + c_2.$$

Tomando $0 < \varepsilon < 1$, e escrevendo $L^2(X)$ para designar $L^2(0, T : X)$, obtemos da inequação anterior que:

$$\varphi_\gamma(z_n(T)) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(H)}^2 + \frac{\ell}{2} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \frac{c_3}{T} \|z_n\|_{L^2(V)}^2 + \frac{c_2}{T},$$

ou seja,

$$(118) \quad \frac{1}{2} \|z_n(T)\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(H)}^2 + \frac{\ell}{2} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + c_4 \|z_n\|_{L^2(V)}^2 + c_5 + \int_0^{z_n(T, \ell)} \rho(s) ds.$$

Agora, como

$$\int_0^{z_n(T, \ell)} \rho(s) ds \leq \sqrt{\ell} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|z_n(T)\| \leq \frac{\ell}{2\varepsilon} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|z_n(T)\|^2$$

então (118) fica:

$$\frac{(1-\varepsilon)}{2} \|z_n(T)\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{L^2(H)}^2 + \frac{(1+\varepsilon^{-1})\ell}{2} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + c_4 \|z_n\|_{L^2(V)}^2 + c_5$$

ou ainda,

$$\|z_n(T)\|^2 \leq c_6 \|h\|_{L^2(H)}^2 + c_7 \|z_n\|_{L^2(V)}^2 + c_8,$$

onde c_6, c_7 e c_8 são constantes positivas que dependem dos parâmetros $\varepsilon, h, \ell, \rho, T, a, b$. Em notação mais conveniente ficamos com:

$$(119) \quad \|z_n(T)\|^2 \leq c_6 \|h\|_{L^2(H)}^2 + c_7 \|S_\gamma(z_{0n}, h)\|_{L^2(V)}^2 + c_8$$

Agora, como $|z_{0n}| \leq R_B + 1, \forall n \geq 1$, então o conjunto $\{(z_{0n}, h); n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em $H \times L^2(0, T : H)$. Mas lembrando que S_γ leva limitados de $H \times L^2(0, T : H)$ em limitados de $L^2(0, T : V)$, então existe constante $K = K(R_B) > 0$ tal que $\|S_\gamma(z_{0n}, h)\|_{L^2(V)} \leq K, \forall n \geq 1$.

De (119) segue então que

$$(120) \quad \|z_n(T)\|^2 \leq c_6 \|h\|_{L^2(H)}^2 + c_7 K(B)^2 + c_8 =: K_B^2$$

Em particular, existe $\theta \in V$ tal que $z_n(T) \rightharpoonup \theta$ fraco em V , tomando subsequência se necessário. Por um argumento já utilizado anteriormente podemos provar que $\theta = z(T)$, donde $z_n(T) \rightharpoonup z(T)$ fraco em V . Assim, como a norma é fracamente semi-continua inferiormente obtemos que:

$$(121) \quad \|z(T)\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n(T)\|^2.$$

Também, como $(z_{0n}, h) \rightarrow (z_0, h)$ em $H \times L^2(0, T : H)$ então $S_\gamma(z_{0n}, h) \rightarrow S_\gamma(z_0, h)$ forte em $L^2(0, T : V)$ (graças ao teorema 2.19), de onde segue de (119) que:

$$(122) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n(T)\|^2 \leq c_6 \|h\|_{L^2(H)}^2 + c_7 \|S_\gamma(z_0, h)\|_{L^2(V)}^2 + c_8$$

De (121) e (122) concluímos que

$$\|z(T)\|^2 \leq c_6 \|h\|_{L^2(H)}^2 + c_7 \|S_\gamma(z_0, h)\|_{L^2(V)}^2 + c_8 \leq K_B^2, \text{ ou seja,}$$

$$\|\mathcal{F}_T^\gamma(z_0)\|^2 \leq K_B^2, \text{ qualquer que seja } z_0 \in B.$$

Isso mostra que $\mathcal{F}_T^\gamma(B)$ é limitado em V , como queríamos. ■

Procedendo da mesma maneira obtemos o:

Lema 2.25: Seja $G : V \rightarrow H$ lipschitziana. Então a aplicação de Poincaré $\mathcal{F}_T^\Gamma$ associada ao problema (P_Γ) é compacta.

Demonstração: Análoga à feita no lema 2.24. ■

Faremos agora a seguinte hipótese na aplicação G :

$$(H5) \quad \begin{cases} \text{Existem constantes } 0 \leq \alpha < 1 \text{ e } \beta \geq 0 \text{ tais que} \\ (Gv, v) \geq -\alpha \|v\|^2 - \beta, \forall v \in V. \end{cases}$$

Com isto podemos provar o:

Lema 2.26: Seja $G : V \rightarrow H$ lipschitziana satisfazendo (H5). Então a aplicação de Poincaré $\mathcal{F}_T^\gamma$ satisfaz a condição do teorema de Schaeffer, isto é, existe $R > 0$ tal que $\{z_0 \in H | z_0 = \lambda \mathcal{F}_T^\gamma(z_0), \lambda \in [0, 1]\}$ está contido na bola $B_H(0, R) = \{v \in H : |v| \leq R\}$.

Demonstração:

Temos que $z_0 = \lambda \mathcal{F}_T^\gamma(z_0) \iff z_0 = \lambda z(T)$, onde $z = S_\gamma(z_0, h)$.

Em particular $z_0 \in V$, pois já provamos que $z(t) \in D(A_\gamma)$ para $t > 0$, isto é, o semigrupo gerado por $A_\gamma + G$ regulariza os dados iniciais.

Agora, $z = S_\gamma(z_0, h)$ significa que:

$$\dot{z}(t) + A_\gamma(z(t)) + G(z(t)) = h(t), \quad z(0) = z_0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 + \|z(t)\|^2 = \rho(z(t, \ell))z(t, \ell) + (h(t), z(t)) - (Gz(t), z(t)).$$

Logo, usando a hipótese (H5) concluímos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 + (1 - \alpha) \|z(t)\|^2 \leq \rho(z(t, \ell))z(t, \ell) + (h(t), z(t)) + \beta.$$

Agora, para $\varepsilon > 0$ temos que:

$$(h(t), z(t)) \leq \frac{1}{2\varepsilon} |h(t)|^2 + \frac{\ell^2 \varepsilon}{4} \|z(t)\|^2, \text{ de onde segue que}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 + \left[1 - \alpha - \frac{\ell^2 \varepsilon}{4} \right] \|z(t)\|^2 \leq \rho(z(t, \ell))z(t, \ell) + \frac{1}{2\varepsilon} |h(t)|^2 + \beta.$$

Também é fácil ver que:

$$\rho(z(t, \ell))z(t, \ell) \leq \frac{\ell}{2\varepsilon} \|\rho\|_{L^\infty(\mathcal{R})}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|z(t)\|^2, \text{ de onde concluímos que}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 + \left[1 - \alpha - \frac{\ell^2 \varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right] \|z(t)\|^2 \leq \frac{\ell}{2\varepsilon} \|\rho\|_{L^\infty(\mathcal{R})}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |h(t)|^2 + \beta.$$

Chamemos $K_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \alpha - \frac{\ell^2 \varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \right]$, o qual é positivo se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno (graças ao fato $\alpha < 1$). Então:

$$(123) \quad \frac{d}{dt} |z(t)|^2 + K_1 \|z(t)\|^2 \leq 2\beta + \ell \varepsilon^{-1} \|\rho\|_{L^\infty(\mathcal{R})}^2 + \varepsilon^{-1} |h(t)|^2.$$

Agora, como $|u|^2 \leq (\ell^2/2) \cdot \|u\|^2$ para todo $u \in V$ então $(2K_1/\ell^2) \cdot |u|^2 \leq K_1 \|u\|^2$, donde sai de (123) que:

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + \frac{2K_1}{\ell^2}|z(t)|^2 \leq 2\beta + \ell\epsilon^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \epsilon^{-1}|h(t)|^2.$$

Denotando $K_2 = 2K_1/\ell^2$ obtemos que:

$$e^{K_2 t} \cdot \frac{d}{dt}|z(t)|^2 + K_2 e^{K_2 t} \cdot |z(t)|^2 \leq e^{K_2 T} \cdot \left[2\beta + \ell\epsilon^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \epsilon^{-1}|h(t)|^2 \right],$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{K_2 t} \cdot |z(t)|^2 \right\} \leq e^{K_2 T} \cdot \left[2\beta + \ell\epsilon^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \epsilon^{-1}|h(t)|^2 \right],$$

e integrando de 0 a T obtemos

$$e^{K_2 T} \cdot |z(T)|^2 - |z_0|^2 \leq e^{K_2 T} \cdot \left[2\beta T + T\ell\epsilon^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \epsilon^{-1}\|h\|_{L^2(H)}^2 \right].$$

Agora, lembrando que $z_0 = \lambda z(T)$, e que podemos supor $0 < \lambda \leq 1$ sem perder generalidade, ficamos com:

$$(\lambda^{-1}e^{K_2 T} - 1) \cdot |z_0|^2 \leq e^{K_2 T} \cdot \left[2\beta T + T\ell\epsilon^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 + \epsilon^{-1}\|h\|_{L^2(H)}^2 \right],$$

e como $\lambda \leq 1$ obtemos ainda:

$$(e^{K_2 T} - 1) \cdot |z_0|^2 \leq e^{K_2 T} \cdot \left[2\beta T + T\ell\epsilon^{-1}\|\rho\|_{L^\infty}^2 + \epsilon^{-1}\|h\|_{L^2(H)}^2 \right],$$

ou seja,

$$|z_0|^2 \leq \frac{e^{K_2 T}}{e^{K_2 T} - 1} \cdot \left[2\beta T + T\ell\epsilon^{-1}\|\rho\|_{L^\infty}^2 + \epsilon^{-1}\|h\|_{L^2(H)}^2 \right] =: R^2,$$

concluindo o lema 2.26. ■

Do teorema de Schaeffer e dos lemas 2.24 e 2.26 podemos enunciar o:

Teorema 2.27: Sejam:

- (i) $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decrescente, limitada e lipschitziana, $\gamma = \text{graf}(\rho)$;
- (ii) $h \in L^2(0, T : H)$;
- (iii) $G : V \rightarrow H$ lipschitziana satisfazendo (H5).

Então existe $z_0 \in H$ tal que a única solução forte z de (P_γ) com condição inicial z_0 satisfaz $z(T, \cdot) = z_0$.

Agora, da mesma forma que demonstramos o lema 2.26 podemos mostrar o:

Lema 2.28: Seja $G : V \rightarrow H$ lipschitziana satisfazendo a hipótese (H5). Então a aplicação de Poincaré $\mathcal{F}_T^\Gamma$ associada ao problema (P_Γ) satisfaz a condição: existe $R > 0$ tal que o conjunto $\{z_0 \in H | z_0 = \lambda \mathcal{F}_T^\Gamma(z_0), \lambda \in [0, 1]\}$ fica contido em $B_H(0; R)$.

Logo, dos lemas 2.25, 2.28, e teorema de Schaeffer concluímos o:

Teorema 2.29: Sejam:

- (i) $h \in L^2(0, T : H)$;
- (ii) $G : V \rightarrow H$ lipschitziana satisfazendo (H5).

Então existe $z_0 \in H$ (na verdade, $z_0 \in V$) tal que a única solução forte z de (P_Γ) com condição inicial z_0 satisfaz $z(T, \cdot) = z_0$.

Antes de terminarmos a dissertação vale lembrar que a regularidade das soluções do problema estudado no capítulo I ficou dependendo da regularidade das soluções de $\dot{z}(t) + A(z(t)) + G(z(t)) = h(t)$ no caso em que $G : H_{1,0} \rightarrow L^2(0, \ell)$ é dada por $G(z) = z(\ell)\xi(\cdot)$ para um certo $\xi \in L^\infty(0, \ell)$. Ora, mas isto segue do que fizemos no capítulo II, pois para tal G temos que:

$$|G(u) - G(v)| = |(u(\ell) - v(\ell))\xi(\cdot)| = |\xi| \cdot |u(\ell) - v(\ell)|_{\mathbb{R}} \leq |\xi| \sqrt{\ell} \|u - v\|,$$

quaisquer que sejam $u, v \in V$, ou seja, $G : V \rightarrow H$ é lipschitziana.

Vale a pena também colocar exemplos de aplicações G que satisfazem a propriedade (H5):

Exemplo 1: $G : H_{1,0} \rightarrow L^2(0, \ell)$, $G(v) = v'$.

Neste caso temos:

$$(Gv, v) = \int_0^\ell v'(x)v(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{d}{dx} \{v(x)\}^2 dx = \frac{1}{2} v^2(\ell) \geq 0,$$

ou seja, G satisfaz (H5) com qualquer $0 \leq \alpha < 1$ e qualquer $\beta \geq 0$.

Exemplo 2: $G : H_{1,0} \rightarrow L^2(0, \ell)$, $G(v) = v(\ell)\xi(\cdot)$, com $\xi \geq 0$ (ou seja, é o caso que originou o capítulo II).

Aqui temos, para todo $v \in V$, que:

$$(Gv, v) = v(\ell) \int_0^\ell \xi(x)v(x)dx,$$

e considerando $\psi(x) := \int_0^x \xi(s)ds$ (donde $\psi' = \xi$) então

$$(Gv, v) = v(\ell) \int_0^\ell \psi'(x)v(x)dx,$$

e integrando por partes obtemos ainda que

$$(Gv, v) = \psi(\ell)v^2(\ell) - v(\ell) \int_0^\ell \psi(x)v'(x)dx.$$

Mas sendo $v \in V$ então $v' \in H = L^2(0, \ell)$, ou seja, v' é integrável. Além disso como $\psi' = \xi \geq 0$ então ψ é monótona. Logo, usando a segunda fórmula da média (veja [14], página 99) sabemos que existe $c \in [0, \ell]$ tal que

$$\int_0^\ell \psi(x)v'(x)dx = \psi(\ell) \int_c^\ell v'(x)dx + \psi(0) \int_0^c v'(x)dx,$$

e como $\psi(0) = 0$ então

$$\int_0^\ell \psi(x)v'(x)dx = \psi(\ell)v(\ell) - \psi(\ell)v(c),$$

de onde segue que

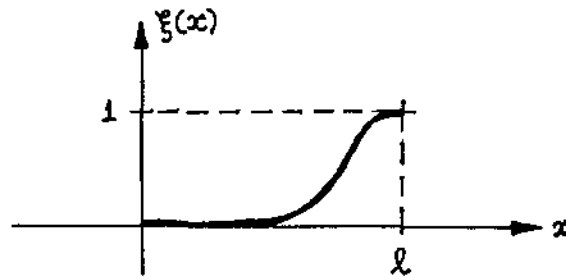
$$(Gv, v) = \psi(\ell)v(\ell)v(c)$$

e como $|v(s)|_R \leq \sqrt{\ell} \|v\| \quad \forall 0 \leq s \leq \ell$ então $|v(\ell)v(c)|_R \leq \ell \|v\|^2$, ou seja

$$(Gv, v) \geq -\ell\psi(\ell) \|v\|^2.$$

Assim, se $\ell\psi(\ell) < 1$ temos (H5) satisfeita com $\alpha = \ell\psi(\ell)$ e $\beta = 0$.

Obs.: $\ell\psi(\ell) < 1$ é equivalente a $\int_0^\ell \xi(s)ds < \ell^{-1}$, ou seja, $\int_0^\ell \xi(s)ds$ tem que ser um número “pequeno”. Se notarmos na secção da regularidade no capítulo I veremos que a função auxiliar ξ pode ser tomada satisfazendo esta condição, sem perda de generalidade.



Observe que, apesar de restringirmos mais a classe de aplicações G impondo (H5) na busca de soluções periódicas, ainda pedimos muito menos do que a condição $(Gv, v) \geq -c$ para todo $v \in V$, feita em [4] e [5].

Bibliografia

- [1] Brézis, H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam (1973).
- [2] Dautray R. & Lions J.L., Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, volume 5. Springer-Verlag (1973).
- [3] Lions J.L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [4] Hirano N., Nonlinear evolution equations with nonmonotonic perturbations; Nonlinear Analysis-Theory, Methods and Applications, Vol. 13, N^o 6, pp. 599-609 (1989).
- [5] Ahmed N.U. & Xiang X., Existence of solutions for a class of nonlinear evolution equations with nonmonotone perturbations. Nonlinear Analysis, T.M.A., vol. 22, pp. 81-89 (1994).
- [6] Berestycki H., Méthodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires. Universidade de Paris VI, 1975.
- [7] Pavlick N., Schwingungsmodelle fuer die gestage bewegung in forderden erdol sandin und ihre Anwendung auf die analyse von dyn diagrammen; Clausthal, Universidade Técnica de Clausthal, 1981.
- [8] Pavlik N. & Schäfer M., Ein neues verfahren zur berechnung von kolbendynamogrammen bei gestängetiefpumpen, Erdocl-Erdgas-Zeitschrift 99, 163-166 (1983).
- [9] Barreto M.A.F., Geração de carta dinamométrica de fundo para diagnóstico do bombeio mecânico em poços de petróleo; Faculdade de Engenharia Mecânica - Depto. de Engenharia de Petróleo - Unicamp (1973).

- [10] Massat P., Limiting behavior for strongly damped nonlinear wave equations; Journal of Differential Equations, 48, 334-349, (1983).
- [11] Webb G.F., Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation; Can. J. Math., Vol. XXXII, N^o 3, pp. 631-643, (1980).
- [12] Fitzgibbon W.E., Strongly damped quasilinear evolution equations; Journal of Mathematical Analysis and Applications, 79, 536-550, (1981).
- [13] Hale J.K., Asymptotic behavior of dissipative systems, Math. Surveys and Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1988).
- [14] Fernandez P.J., Medida e Integração. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1976.
- [15] Neves, Aloísio F. and Boldrini, J.L., Periodic motions of sucker rod pumping systems; Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 22, N^o 7, pp 797-808, 1994.