

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MÉTODOS DERIVATIVE-FREE PARA
RESOLVER UM PROBLEMA DE
PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR COM
RESTRIÇÕES LINEARES**

Tulio Emiro López Erazo
Aluno

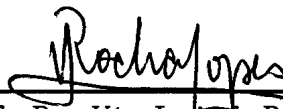
Prof. Dra. Véra Lucia da Rocha Lopes
Orientadora

DMA - IMECC - UNICAMP
Dezembro de 2007

MÉTODOS DERIVATIVE-FREE PARA RESOLVER UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR COM RESTRIÇÕES LINEARES

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Tulio Emiro López Erazo e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de Dezembro de 2007.



Profa. Dra. Vera Lucia da Rocha Lopes.

Orientadora

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Vera Lucia da Rocha Lopes

Profa. Dra. Maria A. Diniz Ehrhardt

Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC - UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em MATEMÁTICA APLICADA.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

López Erazo, Tulio Emiro

L881m Métodos derivative-free para resolver um problema de programação não linear com restrições lineares / Túlio Emiro López Erazo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Véra Lucia da Rocha Lopes

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização. 2. Programação não-linear. 3. Métodos iterativos (Matemática). 4. Métodos numéricos. 5. Algoritmos. I. Lopes, Véra Lucia da Rocha. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Methods derivative-free to resolve a problem of nonlinear programming with linear constraints.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Optimization. 2. Nonlinear programming. 3. Iterative methods (Mathematics). 4. Numerical methods. 5. Algorithms.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

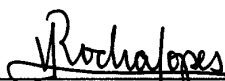
Banca examinadora: Profa. Dra. Véra Lucia da Rocha Lopes (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Maria Aparecida Diniz Ehrhardt (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça (UFRJ)

Data da defesa: 19-12-2007

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 19 de dezembro de 2007 e aprovada

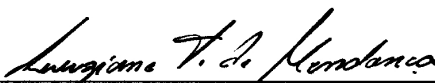
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). VÉRA LÚCIA DA ROCHA LOPES



Prof. (a). Dr (a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT



Prof. (a). Dr (a). LUZIANE FERREIRA DE MENDONÇA

À meus pais
Franco Tulio (in memorian) e *Dolores Sofía*.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora pela paciência e confiança; a UNICAMP pela oportunidade de estudar em ela; ao equipe de professores da Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UNICAMP por todos os conhecimentos que puseram ao interior de minha testa; à banca examinadora por ler esta dissertação e pelas sugestões dadas, que muito contribuíram para melhoria dela; Agradeço especialmente a meus padres, Franco T. López e Dolores S. Erazo, a meus irmãos e em geral a toda minha família por o grande apoio dado desde Colombia nas horas difíceis; Agradeço também a minha esposa, Liliana Jiménez Urrea, por su gram apoio e companhia em mi estadia no Brasil; Agradeço a todos meus amigos no Brasil, os quais estiveram sempre presentes, e na fase final muito me estimularam na elaboração deste trabalho, especialmente a Cristiano Torezzan e sua esposa Gláucia. Não posso esquecer de agradecer a Maribel del Carmen Diaz que foi um apoio constante em minha estadia no Brasil. Por último agradeço a Deus e a Virgem santíssima, os únicos seres que em todo momento ficam de nosso lado.

CONTEÚDO

Introdução	1
Símbolos usados	5
1 Conceitos fundamentais em otimização	6
2 Método de Lewis-Torczon	14
2.1 Introdução	14
2.2 Definições preliminares	14
2.3 Busca padrão em minimização irrestrita	17
2.4 Solução do problema (1)	18
2.5 O método de Lewis-Torczon	19
2.6 O algoritmo	21
3 Método de Lucidi-Sciandrone-Tseng	22
3.1 Introdução	22
3.2 Estimativa das restrições ativas	22
3.3 Direções de busca	24
3.4 Um primeiro resultado de convergência	30
3.5 Um segundo resultado de convergência	32
3.6 O método de Lucidi-Sciandrone-Tseng, sob a condição 1	33
3.7 O algoritmo, sob a condição 1	33
3.7.1 O procedimento <i>Expansão do passo</i>	34

4	Comentários gerais das implementações	36
4.1	Método de Lewis-Torczon	36
4.1.1	Obtenção de um conjunto padrão de direções P_k	37
4.1.2	Aumento ou decréscimo do passo Δ_k	37
4.2	Método de Lucidi-Sciandrone-Tseng	37
4.2.1	Cálculo de um conjunto de índices de restrições ϵ -ativas	38
4.2.2	Cálculo da matriz A_k	38
4.2.3	Obtenção de um conjunto de direções D_k que satisfaz a condição 1	39
4.2.4	Cálculo do passo máximo	40
4.2.5	Expansão do passo	45
5	Testes numéricos	47
5.1	Método de Lucidi-Sciandrone-Tseng	47
5.1.1	Escolha de parâmetros	47
5.1.2	Critério de parada	48
5.2	Método de Lewis-Torczon	48
5.2.1	Escolha de parâmetros	48
5.2.2	Critério de parada	48
5.3	Resultados de alguns problemas da coleção Hock-Schittkowski	53
	Conclusões	61
	Referências	63

INDICE DE TABELAS

5.1	Solução dos problemas (5.1) e (5.2).	51
5.2	Problemas com restrições de desigualdade e/ou de caixa. . . .	55
5.3	Porcentagem das iterações e das avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng respeito do método de Lewis-Torczon.	56
5.4	Resultados reportados em [5].	57
5.5	Outros problemas com restrições de desigualdade.	57
5.6	Porcentagem das iterações e das avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng respeito do método de Lewis-Torczon.	57
5.7	Problemas com restrições de desigualdade e/ou de caixa e/ou de igualdade.	59
5.8	Porcentagem das iterações e das avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng respeito do método de Lewis-Torczon.	59

INDICE DE FIGURAS

1.1	Exemplos de cones em $\mathbb{R}^2$	10
1.2	Exemplos de cones gerados em $\mathbb{R}^2$	11
1.3	Exemplos de cones polares em $\mathbb{R}^2$	12
1.4	Exemplos de cones normais em $\mathbb{R}^2$	13
1.5	Exemplos de cones tangentes em $\mathbb{R}^2$	13
2.1	Região factível em $\mathbb{R}^2$, com restrições de desigualdade.	15
2.2	Região factível e pontos factíveis em $\mathbb{R}^2$	16
2.3	Padrão de direções coordenadas em $\mathbb{R}^2$	18
2.4	(a) $P_k = D_k = \{d_k^1, d_k^2\}$, e (b) $P_k = \{\pm e_i : i = 1, \dots, n\}$	20
3.1	Região factível do exemplo (3.3.1).	26
3.2	Conjunto $T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k)$ do exemplo 3.1	28
4.1	Passo α_k com restrições de desigualdade em $\mathbb{R}^2$	41
4.2	Passo α_k com g_i ativa no ponto x_k	42
4.3	Passo α_k com g_i não ativa no ponto x_k	43
4.4	Passo α_k com restrições de igualdade em $\mathbb{R}^2$	44
4.5	Passo α_k com restrições de desigualdade e igualdade em $\mathbb{R}^2$	44
5.1	Solução gráfica do problema (5.1) com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon.	50
5.2	Solução gráfica do problema (5.2) com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon.	52

5.3	Solução do problema HS005 com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon, iniciando no ponto $x_0 = (-1, 2.5)$. . .	58
5.4	Solução do problema HS005 com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon, iniciando no ponto $x_0 = (1.5, 0.5)$. . .	60

RESUMO

No presente trabalho estudamos métodos numéricos que resolvem um problema de programação não linear com restrições lineares de desigualdade e de igualdade, os quais não fazem uso explícito do gradiente da função objetivo nem tampouco de aproximações ao mesmo. Um método de decréscimo suficiente e um método de decréscimo simples são estudados. O primeiro, procura melhores valores para a função objetivo ao longo de um conjunto de direções, as quais geram positivamente o cone poliedral convexo no ponto atual. O segundo método procura melhorar o valor da função objetivo ao longo de um conjunto de direções, as quais, dependendo do ponto atual, ou geram positivamente todo o espaço $\mathbb{R}^n$, ou geram positivamente o cone poliedral convexo em tal ponto. Algoritmos dos métodos, comentários das implementações feitas e testes numéricos de tais implementações com problemas da coleção Hock-Schittkowski são feitos ao final do trabalho.

ABSTRACT

In the present work we study numerical methods that solve a problem of non-linear programming with linear inequality and equality constraints, which do not make explicit use either neither of the gradient of the objective function nor approaches to the same one. A method of sufficient decrease and a method of simple decrease are studied. The first one, looks for better values for the objective function throughout a set of directions, which positively generate the convex polyhedral cone in the current point. The second method looks for to improve the value of the objective function throughout a set of directions, which, depending on the current point, either generates positively the whole spaces, or positively generates the convex polyhedral cone in this point. Algorithms of the methods, commentaries of the implementations done and numerical tests of such implementations with problems of the Hock-Schittkowski collection are made at the end of the work.

INTRODUÇÃO

O objetivo da presente dissertação é estudar a solução de um problema de otimização não linear com restrições lineares, o qual pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I \\ & h_\ell(x) = 0, \quad \forall \ell \in E, \end{array} \quad (1)$$

onde $I = \{1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{N}$, $E = \{m+1, \dots, m+p\} \subseteq \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) é uma função continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Além disso, assumimos que as funções $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são lineares para todo $i \in I$ e todo $\ell \in E$.

Problemas da forma (1) aparecem em diferentes áreas, como ciências, engenharias e no mundo dos negócios. Em ciências físicas, muitos princípios ótimos têm sido enunciados descrevendo fenômenos naturais nos campos de ótica e mecânica clássica. O campo da estatística trata diferentes *objetivos* tais como *máxima probabilidade*, *mínima perda*. Enquanto no campo dos negócios, fala-se por exemplo de *máximo benefício*, *mínimo custo*, *máximo uso de recursos*, *mínimo esforço*, *máxima eficiência*. Até aqui poderíamos falar que os *objetivos* mencionados são propostos pelo homem em sua necessidade por obter algum benefício. Além disso, a natureza por si mesma também otimiza. Os sistemas físicos, por exemplo, tendem a um estado de *mínima energia*, as moléculas em um sistema químico isolado reagem umas com outras até que a energia potencial total de seus elétrons seja *minimizada*.

e os raios de luz seguem trajetórias que *minimizam* o tempo decorrido [10].

Em qualquer campo no qual estejamos imersos onde apresenta-se uma tomada de decisões, devemos primeiro identificar algum "*objetivo*", tal como os apresentados acima. Tal objetivo pode ser *benefício*, *tempo*, *energia potencial*, ou qualquer quantidade ou combinação de quantidades que possam ser representadas por um único número. Tais objetivos podem, ou não, depender de diferentes características do sistema, as quais são chamadas *variáveis*, e estas, ao mesmo tempo, podem ou não ter que cumprir um conjunto de condições gerais às quais chamamos *restrições*. No caso em que as *variáveis* tenham que cumprir pelo menos uma *restrição*, falamos de um *problema restrito*; caso contrário, falamos de um *problema irrestrito*. Na simbologia do problema (1) modelamos um problema restrito, no qual identificamos um *objetivo*, simbolizado por $f(x)$, um conjunto de *características* que identificam o sistema, simbolizado por x e um conjunto de *restrições* que devem ser satisfeitas pelas características do sistema, as quais simbolizamos com $g_i(x) \leq 0$, com $i \in I$ e $h_\ell(x) = 0$, com $\ell \in E$.

Solucionar um problema de otimização como o apresentado em (1), consiste em encontrar um conjunto de características x , que satisfaz o conjunto de condições: $g_i(x) \leq 0$, com $i \in I$ e $h_\ell(x) = 0$, com $\ell \in E$, que forneça o melhor valor da função objetivo.

Em geral, não existe um conjunto de regras que permitam modelar facilmente um problema na forma (1), uma vez que identificar o objetivo proposto, as características do problema e as condições que tais características devem satisfazer, pode não ser uma tarefa fácil. Entretanto, uma vez modelado o problema na forma (1), existem diferentes métodos numéricos e não numéricos, muito eficientes, que permitem obter sua solução ótima.

A solução de um problema como o apresentado em (1) já foi tratada há vários séculos, tendo como ferramenta principal as primeiras derivadas da função f . Lembremos que quando a função f é duas vezes continuamente diferenciável no ponto x^* , o gradiente da função f em x^* , conjuntamente com os gradientes das restrições no mesmo ponto constituem ferramentas principais para determinar quando o ponto x^* é candidato a ser solução do problema (1), o que equivale a dizer, quando x^* é um ponto K.K.T. do problema (1). Esta ferramenta está relacionada com dois resultados conhecidos como: condições necessárias de primeira ordem ([7], pp. 328, [1], pp. 316) e condições necessárias de segunda ordem ([7], pp. 343, [1], pp. 316), os quais

determinam quais são os pontos K.K.T. do problema (1). No entanto, o fato de que o ponto x^* seja um ponto K.K.T. do problema (1) não garante que seja solução do problema (1). Logo, um novo problema se apresenta, o qual consiste em determinar se um ponto K.K.T. x^* do problema (1) é solução do mesmo. A resposta a esta pergunta se tem a partir do resultado conhecido com o nome de condições suficientes de segunda ordem ([7], pp. 345, [1], pp. 320), com o qual, a partir da matriz Hessiana da função Lagrangiana, é possível determinar se um ponto K.K.T. x^* resolve o problema (1).

O primeiro objetivo desta dissertação é estudar alguns métodos numéricos existentes para resolver o problema (1), supondo que o gradiente da função f não pode ser usado, seja porque não esteja disponível, ou simplesmente porque é de difícil cálculo. Não obstante, assumiremos que este gradiente existe, por razões teóricas.

A motivação para estudar métodos numéricos que solucionem o problema (1) sob as circunstâncias aqui mencionadas, está na alta demanda existente por tais ferramentas. Em casos típicos, $f(x)$ é muito cara para ser calculada e seu gradiente não é avaliável ou, $f(x)$ é o resultado de alguma medida física, química ou econômica, ou mais corriqueiramente, porque é o resultado de algum processo de simulação possivelmente muito extenso.

A comunidade matemática, há mais de 40 anos, tenta encontrar métodos numéricos que permitam resolver esses tipos de problemas, ou seja, resolver problemas como o apresentado em (1) quando não temos disponível o gradiente da função f . Hoje em dia, existem muitos métodos que tentam dar uma solução para estes problemas. Autores como: *Stefano Lucidi* [5], *Marco Sciandrone* [5], *Paul Tseng* [5], *Robert Michael Lewis* [4], *Virginia Torczon* [4], *Jerrold H. May* [6], *Michael J. D. Powell* [8], entre outros, são conhecidos na comunidade da Matemática aplicada e da Otimização, por tentarem desenvolver métodos numéricos eficientes que permitam resolver tais problemas.

No ano 2000, aparece publicado um método proposto por Robert Michael Lewis¹ e Virginia Torczon² [4] para resolver o problema (1), que não faz uso das derivadas da função f . O método desenvolvido escolhe um conjunto

¹R. M. Lewis: Department of Mathematics College of William & Mary P.O. Box 8795 Williamsburg, VA 23187-8795. Office, Jones Hall 124. E-mail, buckaroo@math.wm.edu

²V. Torczon: College of William & Mary Department of Computer Science P.O. Box 8795 Williamsburg, VA 23187-8795. E-mail, va@cs.wm.edu

padrão de direções de busca em uma vizinhança do ponto atual, ao longo das quais pode encontrar pontos factíveis que melhorem o valor de f . O método exige decréscimo simples do valor da função f . O segundo objetivo do presente trabalho, consiste em implementar em Matlab o algoritmo proposto por Lewis e Torczon e realizar testes numéricos com alguns problemas apresentados em [2] e [9]. No capítulo 2 descrevemos, em forma geral, o método proposto em [4] e no capítulo 4 apresentamos alguns detalhes ao interior da implementação do algoritmo. Os resultados obtidos com tal implementação são apresentados no capítulo 5.

No ano 2002, Marco Sciandrone³, Stefano Lucidi⁴ e Paul Tseng⁵ publicaram um artigo intitulado *Objective-Derivative-Free methods for constrained optimization* [5], no qual apresentam dois métodos para resolver o problema (1) com $E = \emptyset$ e para um conjunto de restrições de desigualdades gerais, os quais não fazem uso do gradiente da função f . Diferentemente do método proposto por Robert Michael Lewis e Virginia Torczon [4], os métodos propostos por Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng exigem decréscimo suficiente da função f . Ao final os autores mostram uma série de testes realizados com a implementação do método 2, para problemas com restrições lineares. Nosso terceiro objetivo no presente trabalho, consiste em adequar o método 1 proposto por Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng para resolver o problema (1), quando o conjunto $E \neq \emptyset$. Para tanto, mostramos como alguns resultados de [5] podem ser adaptados para este caso. Além disso, implementamos em Matlab o algoritmo do método 1, adaptando-o para o caso quando $E \neq \emptyset$ e realizamos testes numéricos com alguns problemas de [2] e [9]. No capítulo 3 descrevemos, em forma geral, o método para resolver o problema (1) com as adaptações feitas e no capítulo 4 apresentamos detalhes gerais ao interior da implementação do algoritmo. Os resultados obtidos com a implementação são apresentados no capítulo 5. Além disso, no capítulo 5 comparamos os resultados obtidos com os métodos correspondentes.

³M. Sciandrone: Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica "Antonio Ruberti- CNR Viale Manzoni, 30 00185 Roma - Italy. E-mail, sciandro@iasi.rm.cnr.it

⁴S. Lucidi: Dipartimento di Informatica e Sistemistica Università di Roma "La Sapienza" Via Ariosto n.25, 00185 Roma, Italia. Email, lucidi@dis.uniroma1.it

⁵P. Tseng: Department of Mathematics, Box 354350 University of Washington Seattle, WA 98195-4350. Email, tseng@math.washington.edu

SÍMBOLOS USADOS

Listamos a seguir uma série de símbolos usados no decorrer do presente trabalho.

- ✓ Os símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ representam respectivamente os conjuntos dos números Naturais, Inteiros, Racionais e Reais.
- ✓ Para representar números reais usamos letras em minúsculas tais como: y , z ou letras do alfabeto grego em minúsculas tais como α , β , γ .
- ✓ Os símbolos x , x_k , x_k^j , y_k^j representam vetores em $\mathbb{R}^n$.
- ✓ Os símbolos I , J , E , $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ representam subconjuntos de números Naturais.
- ✓ Os símbolos X , D , Y , K representam subconjuntos de pontos de $\mathbb{R}^n$,
- ✓ Os símbolos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e em geral letras em negrito representam vetores coluna em $\mathbb{R}^n$.
- ✓ O i -ésimo vetor canônico é representado por e_i .
- ✓ As matrizes, as representaremos com letras maiúsculas. As letras mais usadas são: A , B , Q , R . O símbolo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ significa que A é uma matriz de entradas reais, com m linhas e n colunas.
- ✓ O símbolo $\|\cdot\|$ simbolizara a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$.
- ✓ Simbolizamos a bola aberta euclidiana $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo apresentamos alguns elementos conceituais que consideramos importantes no estudo de qualquer problema de otimização e que em consequência, são importantes no desenvolvimento do presente trabalho.

Definição 1.0.1 (Algoritmo bem definido). Um algoritmo é considerado bem definido, se a solução é obtida de forma correta depois de um número finito de passos.

Definição 1.0.2 (Métodos Derivative-Free). Um método Derivative-Free é um método iterativo usado para resolver um problema de otimização o qual não faz uso do gradiente da função f .

Observação 1.0.1. Dentre todos os métodos Derivative-Free conhecidos encontramos os métodos de busca direta, os quais, além de não fazer uso explícito do gradiente da função f , não fazem uso de aproximações do mesmo, nem tampouco de aproximações da função f , por exemplo com polinômios interpolantes. Estes métodos determinam entre um conjunto de valores da função f em possíveis soluções, qual é o melhor valor, comparado com um valor de f considerado já como melhor, e conseqüentemente determinam a melhor solução do problema. A estratégia consiste em fazer comparações

de cada um destes valores com o melhor valor obtido até o momento. Esta estratégia não necessita avaliar a função f em todas as soluções possíveis, desde que no momento no qual encontra-se um valor melhor, a solução nova é definida e um novo conjunto de valores é obtido [3].

Definição 1.0.3 (Conjunto convexo). Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se, para cada par de pontos $x_1, x_2 \in X$ e cada número real α , $0 \leq \alpha \leq 1$, o ponto $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in X$.

Definição 1.0.4 (Função de várias variáveis). Uma função de várias variáveis (ou função escalar) é uma função definida do conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), tal que para cada ponto $x \in D$ existe um único número real z tal que $z = f(x)$.

Definição 1.0.5 (Gradiente de uma função de várias variáveis). Seja f uma função diferenciável de várias variáveis e $x \in D$. O gradiente de f no ponto x é um vetor em $\mathbb{R}^n$ definido da seguinte forma:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

onde o símbolo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ representa a derivada parcial de f no ponto x com respeito à variável x_i , para todo $i = 1, \dots, n$.

Dada uma função de várias variáveis f , associamos a f um problema de otimização restrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & x \in X \end{array} \quad (1.1)$$

onde assumimos que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto não vazio e convexo. X é chamado conjunto factível (ou região factível).

Solucionar o problema (1.1) consiste em encontrar um ponto $x^* \in X$, que minimize a função f . Tal ponto é chamado minimizador de f em X ou simplesmente solução do problema (1.1). Um minimizador pode ser de quatro tipos diferentes.

Definição 1.0.6 (Minimizador local). Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Um ponto $x^* \in X$, é um minimizador local de f sobre X se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x),$$

$\forall x \in X$, tal que $\|x - x^*\| < \epsilon$.

Definição 1.0.7 (Minimizador local estrito). Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Um ponto $x^* \in X$, é um minimizador local estrito de f sobre X se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) < f(x),$$

$\forall x \in X$ com $x \neq x^*$, tal que $\|x - x^*\| < \epsilon$.

Definição 1.0.8 (Minimizador global). Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Um ponto $x^* \in X$, é um minimizador global de f sobre X se

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.0.9 (Minimizador global estrito). Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Um ponto $x^* \in X$, é um minimizador global estrito de f sobre X se

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in X \text{ com } x \neq x^*.$$

Proposição 1.0.1 (Condição de otimalidade). Se x^* é um mínimo local de f sobre X , então

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (1.2)$$

Definição 1.0.10 (Ponto estacionário). Um ponto x^* que satisfaz a condição de otimalidade (1.2) chama-se ponto estacionário do problema (1.1).

Observação 1.0.2. Se o conjunto X tem uma forma particular definida por igualdades e/ou desigualdades, o problema (1.1) pode ser escrito na forma seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{N} \\ & h_j(x) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{J} = \{1, \dots, p\} \subseteq \mathbb{N}, \end{array} \quad (1.3)$$

onde $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e todo $j \in \mathcal{J}$. Neste caso temos que o conjunto factível X está definido da forma seguinte:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \forall i \in \mathcal{I} \text{ e } h_j(x) = 0, \forall j \in \mathcal{J}\}.$$

Definição 1.0.11 (Conjunto de índices de restrições ativas). Definimos o conjunto de índices das restrições ativas no ponto $x \in X$ da forma seguinte:

$$A(x) \cup \mathcal{J},$$

onde $A(x) = \{i \in \mathcal{I} : g_i(x) = 0\}$.

Definição 1.0.12 (Ponto regular). Sejam g_i e h_j , funções continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e todo $j \in \mathcal{J}$. Um ponto $x \in X$ chama-se regular se os gradientes $\nabla g_i(x)$ e $\nabla h_j(x)$, formam um conjunto linearmente independente para todo $i \in A(x)$ e todo $j \in \mathcal{J}$.

Teorema 1.0.2 (Condições necessárias de primeira ordem para o problema (1.3)). *Seja x^* um minimizador local do problema (1.3), onde as funções f , g_i e h_j são continuamente diferenciáveis para todo $i \in \mathcal{I}$ e todo $j \in \mathcal{J}$. Assumamos que x^* é um ponto regular. Então existem únicos vetores de multiplicadores de Lagrange*

$$\begin{aligned}\lambda^* &= (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*), \\ \mu^* &= (\mu_1^*, \dots, \mu_p^*),\end{aligned}$$

tais que:

1. $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, onde $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$.
2. $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m$.
3. $\lambda_i = 0, \forall i \notin A(x^*)$.

As condições 1, 2 e 3 são chamadas *Condições Karush-Kunh-Tucker*, ou simplesmente *Condições K.K.T.* do problema (1.3) ([1], pp. 316).

Demonstração. A demonstração do teorema (1.0.2) pode ser vista em [1], pp. 316-317.

Teorema 1.0.3 (Condições necessárias de segunda ordem para o problema (1.3)). *Sejam f , g_i e h_j funções duas vezes continuamente diferenciáveis para todo $i \in \mathcal{I}$ e todo $j \in \mathcal{J}$. Se x^* , λ^* e μ^* satisfazem as condições K.K.T. do problema (1.3), então*

$$y^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0, \quad (1.4)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla h_j(x^*)^T y = 0$, para todo $j \in \mathcal{J}$, $\nabla g_i(x^*)^T y = 0$, para todo $i \in A(x^*)$ ([1], pp. 316).

Demonstração. A demonstração do teorema (1.0.3) pode ser vista em [1], pp. 316-317.

Teorema 1.0.4 (Condições suficientes de segunda ordem para o problema (1.3)). *Assumamos que f , g_i e h_j são funções duas vezes continuamente diferenciáveis para todo $i \in \mathcal{I}$ e todo $j \in \mathcal{J}$ e sejam x^* , λ^* e μ^* satisfazendo as condições K.K.T. do problema (1.3). Então, se $y^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) y > 0$ para todo $y \neq 0$ tal que $\nabla h_j(x^*)^T y = 0$, para todo $j \in \mathcal{J}$, $\nabla g_i(x^*)^T y = 0$, para todo $i \in A(x^*)$, então o ponto x^* é um minimizador local estrito do problema (1.3) ([1], pp. 320).*

Demonstração. A demonstração do teorema (1.0.4) pode ser vista em [1], pp. 320.

Definição 1.0.13 (Cone). Um cone em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$\alpha x \in K, \quad \forall x \in K \text{ e } \forall \alpha > 0.$$

Na figura (1.1) podemos ver desenhos de cones em $\mathbb{R}^2$.

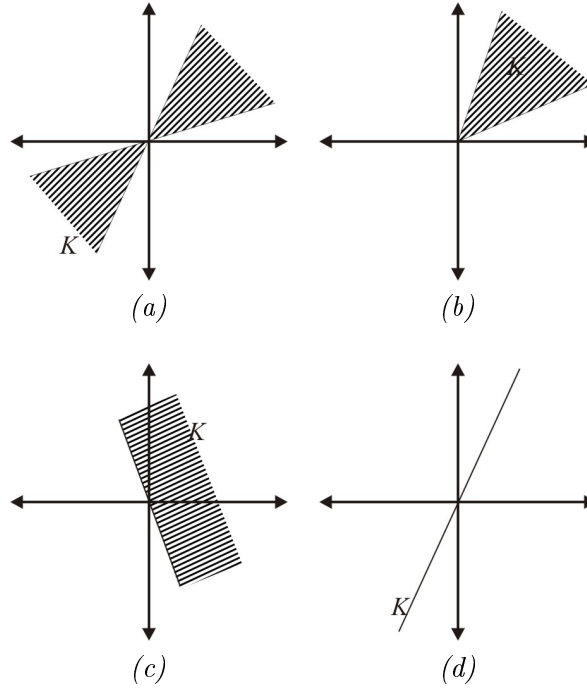


Figura 1.1. Exemplos de cones em $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.0.14 (Cone gerado). Seja $D = \{d^1, \dots, d^r\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto finito. Definimos o cone gerado por D da forma seguinte:

$$\text{cone}\{D\} = \{d^1\beta^1 + \dots + d^r\beta^r : \beta^1, \dots, \beta^r \geq 0\}.$$

Na figura (1.2) podemos ver desenhos de cones gerados em $\mathbb{R}^2$.

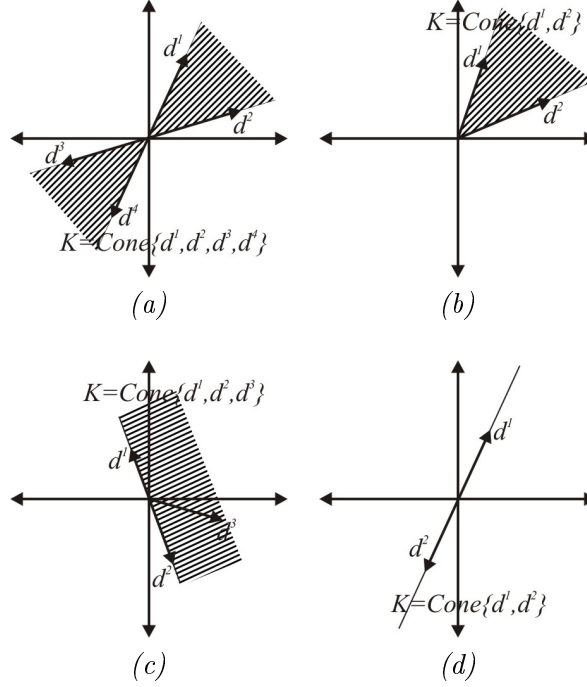


Figura 1.2. Exemplos de cones gerados em $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.0.15 (Cone polar). Dado um cone K , o cone polar de K , denotado por K^o , define-se da forma seguinte:

$$K^o = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 0, \forall x \in K\}.$$

Na figura (1.3) podemos ver desenhos de cones polares em $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.0.16 (Cone normal). Dado um conjunto convexo e fechado X e um ponto x da fronteira do conjunto X , o cone normal ao conjunto X no ponto x , denota-se $N_X(x)$, define-se da forma seguinte:

$$N_X(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T(u - x) \leq 0, \forall u \in X\}.$$

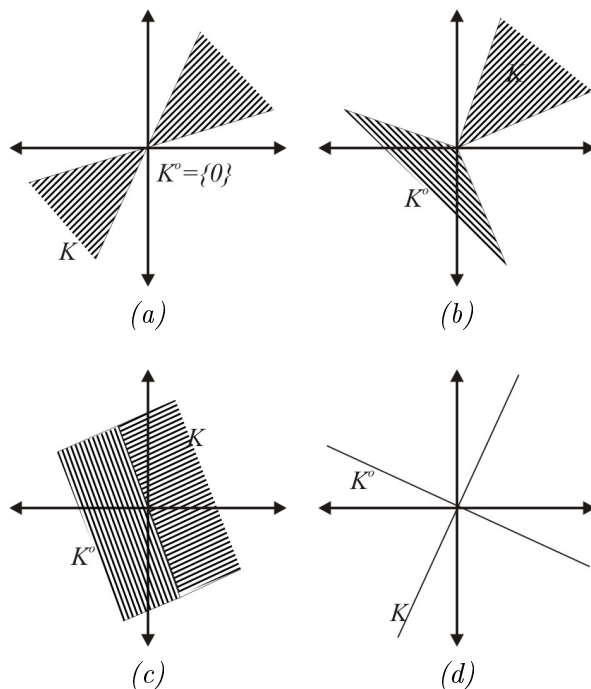


Figura 1.3. Exemplos de cones polares em $\mathbb{R}^2$.

Na figura (1.4) podemos ver desenhos de cones normais em $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.0.17 (Cone tangente). Dado um conjunto convexo e fechado X e um ponto x da fronteira do conjunto X , o cone tangente ao conjunto X no ponto x , nota-se $T_X(x)$, define-se da forma seguinte:

$$T_X(x) = N_X^o(x).$$

Na figura (1.5) podemos ver desenhos de cones tangentes a conjuntos fechados e convexos em $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.0.18 (Ponto de acumulação). Sejam $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que a é um ponto de acumulação do conjunto $\mathcal{A}$ se, para todo $\epsilon > 0$, $B(a, \epsilon)$ contém pontos do conjunto $\mathcal{A}$ diferentes de a .

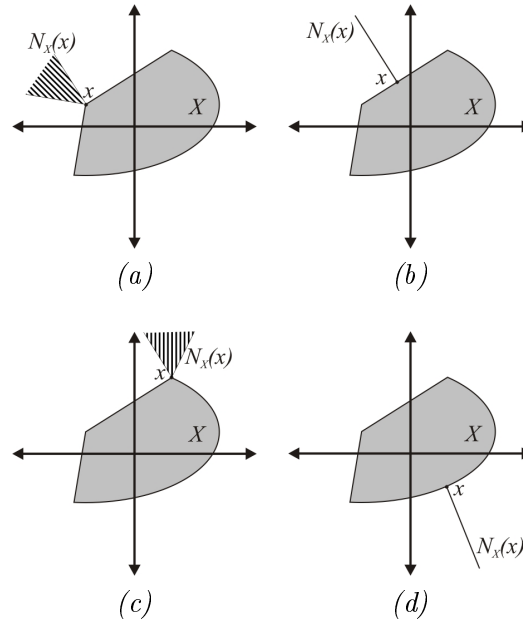


Figura 1.4. Exemplos de cones normais em $\mathbb{R}^2$.

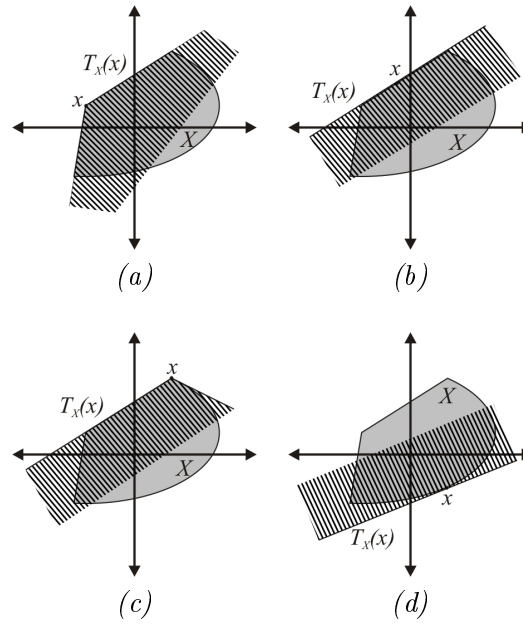


Figura 1.5. Exemplos de cones tangentes em $\mathbb{R}^2$.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE LEWIS-TORCZON

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos um método iterativo que soluciona o problema (1), o qual não faz uso do gradiente da função f e nem tampouco de aproximações ao mesmo. O método define em cada iteração um conjunto padrão de direções de busca no ponto atual e procura melhores valores para f , ao longo de alguma delas, sustentado em um critério de decréscimo simples.

Observação 2.1.1. O problema (1) pode ser considerado como um caso particular do problema (1.3), já que as funções g_i e h_ℓ no problema (1) são lineares, para todo $i \in I$ e todo $\ell \in E$. Neste caso, denotaremos o conjunto factível X como Ω . Na Figura (2.1) mostramos um conjunto factível Ω com restrições de desigualdade em $\mathbb{R}^2$.

Antes de iniciar com os detalhes centrais do método de Lewis-Torczon, apresentamos a seguir definições básicas relacionadas ao método e ao método de Lucidi-Sciandrone-Tseng o qual apresentamos no próximo capítulo.

2.2 Definições preliminares

Definição 2.2.1 (Cone poliedral convexo). Sejam $x \in \Omega$ e $\mathcal{I} \subseteq (I \cup E)$ um subconjunto de índices. Definimos o cone poliedral convexo no ponto x da

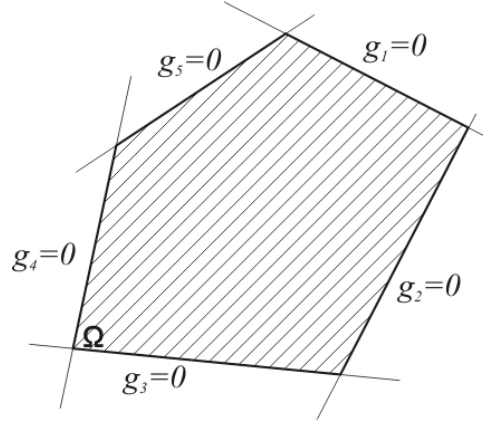


Figura 2.1. Região factível em $\mathbb{R}^2$, com restrições de desigualdade.

forma seguinte:

$$T_{\mathcal{I}}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x)^T d \leq 0, \forall i \in \mathcal{I} \cap I, \nabla h_\ell(x)^T d = 0, \forall \ell \in \mathcal{I} \cap E\}.$$

Observação 2.2.1. No problema que estamos resolvendo, o cone $T_{\mathcal{I}}(x)$ é o mesmo que o cone tangente de Ω no ponto x .

Definição 2.2.2. Para cada ponto $x \in \Omega$ definimos o cone de primeira ordem de variações factíveis da forma seguinte:

$$T(x) = T_{A(x) \cup E}(x).$$

Observação 2.2.2. Tendo em conta a definição (1.0.11) e a observação (2.1.1), o conjunto $A(x) \cup E$ é o conjunto de índices de restrições ativas do problema (1), onde $A(x) = \{i \in I : g_i(x) = 0\}$.

Tendo em conta as definições (1.0.10) e (2.2.2), podemos redefinir um ponto estacionário como segue.

Definição 2.2.3 (Ponto estacionário). Um ponto $\bar{x} \in \Omega$ é um ponto estacionário do problema (1) se satisfaz à seguinte condição de otimalidade de primeira ordem:

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0, \quad \forall d \in T(\bar{x}). \quad (2.1)$$

Definição 2.2.4. Para qualquer $x \in \Omega$ e qualquer escalar $\epsilon > 0$, definimos o conjunto de índices das restrições ϵ -ativas no ponto x da forma seguinte:

$$A(x; \epsilon) = E \cup \{i \in I : g_i(x) + \epsilon \geq 0\},$$

e o cone de primeira ordem de variações ϵ -factíveis,

$$T(x; \epsilon) = T_{A(x; \epsilon)}(x).$$

Observação 2.2.3. O conjunto $A(x) \cup E \subseteq A(x; \epsilon)$, pois se $i \in A(x) \cup E$, então, ou $i \in E$ e conseqüentemente $i \in A(x; \epsilon)$ ou $i \in A(x)$, com o qual temos que $g_i(x) = 0$ e portanto $g_i(x) + \epsilon \geq 0$, donde $i \in A(x; \epsilon)$.

Como conseqüência temos que o cone $T_{A(x; \epsilon)}(x) \subseteq T_{A(x) \cup E}(x)$.

Exemplo 2.2.1. Na figura (2.2) mostramos um conjunto factível Ω em $\mathbb{R}^2$, definido como:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0, -g_3(x) \leq 0\}.$$

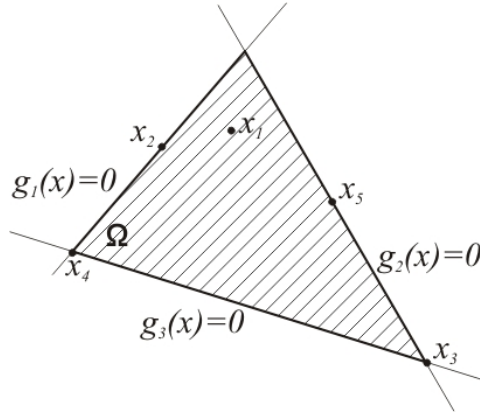


Figura 2.2. Região factível e pontos factíveis em $\mathbb{R}^2$.

Neste caso temos que $I = \{1, 2, 3\}$ e $E = \emptyset$. Além disso temos 4 pontos factíveis sobre a fronteira de Ω e um ponto factível fora da fronteira de Ω . De acordo com a figura (2.2), podemos dizer o seguinte:

- ✓ $A(x_1) = \emptyset$;
- ✓ $A(x_2) = \{1\}$;
- ✓ $A(x_3) = \{2, 3\}$;
- ✓ $A(x_4) = \{1, 3\}$;
- ✓ $A(x_5) = \{2\}$;

- ✓ $A(x_1; \epsilon) = \emptyset$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \min\{|g_1(x_1)|, |g_2(x_1)|, |g_3(x_1)|\}$;
- ✓ $A(x_1; \epsilon) = \{1, 2, 3\}$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \geq \max\{|g_1(x_1)|, |g_2(x_1)|, |g_3(x_1)|\}$;
- ✓ $A(x_2; \epsilon) = \{1\}$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \min\{|g_2(x_2)|, |g_3(x_2)|\}$;
- ✓ $A(x_3; \epsilon) = \{2, 3\}$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < |g_1(x_3)|$;
- ✓ $A(x_3; \epsilon) = \{1, 2, 3\}$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \geq |g_1(x_3)|$.
- ✓ $A(x_4; \epsilon) = \{1, 3\}$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < |g_2(x_4)|$;
- ✓ $A(x_5; \epsilon) = \{1, 2, 3\}$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \geq \max\{|g_1(x_5)|, |g_3(x_5)|\}$;
- ✓ $A(x_5; \epsilon) = \{2\}$, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \min\{|g_1(x_5)|, |g_3(x_5)|\}$;

Antes de apresentar o método de Lewis-Torczon [4] para resolver o problema (1), lembraremos rapidamente o método de busca padrão, usado para resolver o problema irrestrito:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}, \quad (2.2)$$

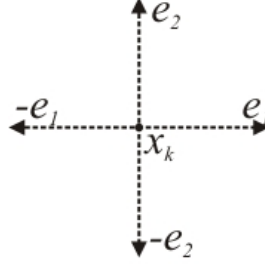
onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) é uma função continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$ [4, 11].

2.3 Busca padrão em minimização irrestrita

Definição 2.3.1 (Padrão de direções no caso irrestrito). Um *padrão de pontos* P em $\mathbb{R}^n$ consiste em um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^n$ que gera positivamente o espaço $\mathbb{R}^n$.

Um exemplo de um padrão de pontos está definido pelas coordenadas cartesianas. Em $\mathbb{R}^2$ temos $P = \{e_1, -e_1, e_2, -e_2\}$, ver figura (2.3). Em geral, em $\mathbb{R}^n$ temos: $P = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$.

O método de busca padrão [4, 11] para resolver o problema (2.2) consiste em: a partir de, um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$, um tamanho de passo $\Delta_k > 0$ e um padrão de pontos $P = \{d^i \in \mathbb{R}^n, \text{ com } i = 1, \dots, p\}$ em uma vizinhança do ponto x_k , fazemos comparações do valor da função f nos pontos que definem o padrão P , e escolhemos dentre todas as direções, aquela direção que gere

Figura 2.3. Padrão de direções coordenadas em $\mathbb{R}^2$.

decréscimo simples da função f . A partir de tal direção, definimos o próximo ponto x_{k+1} . Seja $x_+ = x_k + \Delta_k d^i$, com $i = 1, \dots, p$. Avaliamos a função f no ponto x_+ até que $i = p$ ou até que seja satisfeita a seguinte condição de decréscimo simples:

$$f(x_+) < f(x_k), \text{ para algum } i.$$

Se $f(x_+) \geq f(x_k)$ para todo $i = 1, \dots, p$ (fracasso na iteração), definimos $\Delta_{k+1} = \Delta_k \theta_k$, com $0 < \theta_k < 1$ e fazemos $x_{k+1} = x_k$. Caso contrário (sucesso na iteração), fazemos $x_{k+1} = x_+$ e $\Delta_{k+1} = \Delta_k$.

2.4 Solução do problema (1)

Agora podemos estudar o Método de Lewis-Torczon [4], usado para resolver o problema (1). Se o ponto $x_k \in \Omega$ não é um ponto estacionário do problema (1), devemos ter ao menos uma direção d de descida factível dentro de um conjunto padrão de direções P_k em $\mathbb{R}^n$. Não obstante, não é suficiente ter tal direção com as características mencionadas. Ela tem que ser tal que, ao longo dela, seja possível dar um passo suficientemente grande, para evitar que o novo ponto x_{k+1} fique muito perto do ponto atual x_k . É claro que definir um conjunto padrão de direções P_k da mesma forma como foi definido no caso irrestrito não é possível já que, além de ter decréscimo simples da função f , devemos ter factibilidade do novo ponto x_{k+1} . Logo, devemos definir um conjunto padrão de direções P_k em uma vizinhança do ponto x_k que contenha ao menos uma direção que gere decréscimo simples da função f e que mantenha a factibilidade do novo ponto x_{k+1} .

Definição 2.4.1 (Padrão de direções no caso restrito). Sejam $\epsilon > 0$ e $x_k \in \Omega$. Um padrão de pontos P_k para resolver o problema (1) é definido da forma

seguinte:

$$P_k = \begin{cases} D_k, & \text{se } A(x_k; \epsilon) \neq \emptyset \\ \{\pm e_i : i = 1, \dots, n\}, & \text{se } A(x_k; \epsilon) = \emptyset \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde $D_k = [\Gamma_k \ 0]$ e Γ_k é definido na proposição a seguir. O vetor $0 \in \mathbb{R}^n$ garante que o conjunto P_k contém ao menos uma direcção factível no ponto x_k , quando $A(x_k; \epsilon) \neq \emptyset$. O conjunto de índices $A(x_k; \epsilon)$ foi definido na definição (2.2.4).

Proposição 2.4.1. *Suponha que para $x_k \in \Omega$ e $\epsilon_k > 0$, a matriz*

$$A_k = [\nabla g_i(x_k) \dots \nabla h_\ell(x_k)], \text{ com } i \in (A(x_k, \epsilon_k) - E) \text{ e } \ell \in E$$

tem colunas linearmente independentes. Sejam $u_k^1, \dots, u_k^{s_k}$ vetores tais que:

$$\text{Cone}\{u_k^1, \dots, u_k^{s_k}\} = N(A_k^t), \text{ e}$$

os vetores $v_k^1, \dots, v_k^{t_k}$, são obtidos pela normalização das colunas da matriz

$$A_k(A_k^t A_k)^{-1}.$$

Então, o conjunto $\Gamma_k = \{u_k^1, \dots, u_k^{s_k}, v_k^1, \dots, v_k^{t_k}, -v_k^1, \dots, -v_k^{t_k}\}$ gera o cone poliedral convexo (definição 2.2.1) no ponto x_k .

A proposição (2.4.1) pode ser vista em sua versão original, conjuntamente com sua demonstração em [4], pp. 925-926.

Observação 2.4.1. Esta escolha do conjunto P_k permite que, quando o ponto $x_k \in \Omega$ está perto da fronteira da região factível Ω ($A(x_k; \epsilon) \neq \emptyset$), o padrão P_k gere positivamente o cone polar ao cone tangente à região Ω no ponto x_k e portanto temos pelo menos uma direcção de descida factível dependendo do passo Δ_k . A figura (2.4)(a) mostra um exemplo em $\mathbb{R}^2$, neste caso. E quando x_k está longe da fronteira da região factível Ω ($A(x_k; \epsilon) = \emptyset$), podemos mover-nos livremente em qualquer direcção coordenada obtendo ao mesmo tempo descida e factibilidade, dependendo do passo Δ_k . A figura (2.4)(b) mostra um exemplo em $\mathbb{R}^2$, neste caso.

2.5 O método de Lewis-Torczon

Descrevemos a seguir o Método de Lewis-Torczon (ver [4], pág. 922) que em cada iteração determina um conjunto padrão P_k de direcções factíveis e um tamanho de passo Δ_k que possa ser dado em alguma das direcções que formam o conjunto P_k . O método tenta dar um passo ao longo de alguma

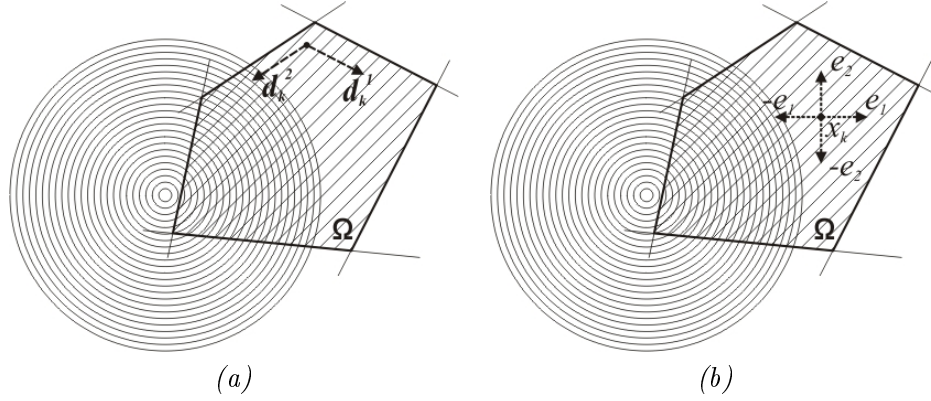


Figura 2.4. (a) $P_k = D_k = \{d_k^1, d_k^2\}$, e (b) $P_k = \{\pm e_i : i = 1, \dots, n\}$.

das direções de forma tal que a função f tenha decréscimo simples em seu valor.

Assumindo que estamos na k -ésima iteração, o método inicia tal iteração com um ponto factível x_k , com valor da função objetivo $f(x_k)$, com um tamanho de passo $\Delta_k > 0$, e com um conjunto padrão P_k de direções factíveis satisfazendo a definição (2.4.1). Lembramos que o parâmetro $\epsilon > 0$ é constante para toda iteração. O método avalia a função f no ponto $x_+ = x_k + \Delta_k d_k^j$, onde $d_k^j \in P_k$, com $j = 1, \dots, p_k$. Tendo em conta o valor de f nos pontos x_k e x_+ e a fatibilidade o não do ponto x_+ , determinamos se temos sucesso ou fracasso na k -ésima iteração, de acordo com as considerações seguintes.

- ✓ Se o ponto $x_+ \in \Omega$ (ponto factível) e se $f(x_+) < f(x_k)$ para algum $j = 1, \dots, p_k$ (otimalidade), terminamos a k -ésima iteração e fazemos $x_{k+1} = x_+$, $\Delta_{k+1} = \lambda_k \Delta_k$, com $\lambda_k > 1$ (aumentamos o tamanho do passo) e calculamos um novo conjunto padrão P_{k+1} de direções factíveis satisfazendo a definição (2.4.1). Neste caso dizemos que temos sucesso na iteração.
- ✓ Se o ponto $x_+ \in \Omega$ (ponto factível) mas $f(x_+) \geq f(x_k)$ para todo $j = 1, \dots, p_k$, terminamos a k -ésima iteração e fazemos $x_{k+1} = x_k$, $\Delta_{k+1} = \theta_k \Delta_k$ com $0 < \theta_k < 1$ (reduzimos o tamanho do passo) e $P_{k+1} = P_k$. Neste caso dizemos que temos fracasso na iteração.
- ✓ Se o ponto $x_+ \notin \Omega$ (ponto não factível) para todo j , com $1 \leq j \leq p_k$,

terminamos a k -ésima iteração e fazemos $x_{k+1} = x_k$, $\Delta_{k+1} = \theta_k \Delta_k$ com $0 < \theta_k < 1$ (reduzimos o tamanho do passo) e $P_{k+1} = P_k$. Neste caso dizemos que temos fracasso na iteração.

Observação 2.5.1. Ficamos na k -ésima iteração enquanto $f(x_+) \geq f(x_k)$ e $1 \leq j \leq p_k$. Enquanto que definimos um novo ponto x_+ enquanto $x_+ = x_k + \Delta_k d_k^j \notin \Omega$.

Observação 2.5.2. O problema (1) pode ser escrito na forma seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeita a} && v \leq Ax \leq u \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{(m+p) \times n}$, $v, u \in \mathbb{R}^{m+p}$, e $v \leq u$.

O método de Lewis-Torczon tem resultados de convergência que dizem sob que condições o método converge para um ponto estacionário do problema (1). Hipóteses sobre a matriz A e sobre o padrão P_k , entre outras, garantem convergência do método. Os detalhes completos acerca dos resultados podem ser vistos em [4], pp. 925-926.

2.6 O algoritmo

O algoritmo para resolver o problema (1) é o seguinte.

Dados de entrada.

$$x_0 \in \Omega, \Delta_0 > 0, \epsilon > 0.$$

Passo 1. Fazer $k = 0$.

Passo 2. Avaliar $f(x_k)$.

Passo 3. Determinar um conjunto padrão de direções P_k .

Passo 4. Minimizar sobre o conjunto P_k .

Passo 4.1. Fazer $j = 1$

Passo 4.2. Fazer $s_k = \Delta_k d_k^j$ e $x_+ = x_k + s_k$.

Se $x_+ \in \Omega$ e $f(x_+) < f(x_k)$:

fazer $x_{k+1} = x_+$, $\Delta_k = \lambda_k \Delta_k$ com $\lambda_k > 1$,

$k = k + 1$ e voltar ao passo 2.

Se $((x_+ \in \Omega \wedge f(x_+) \geq f(x_k)) \vee (x_+ \notin \Omega))$:

Se $j < p_k$, fazer $j = j + 1$ e voltar ao passo 4.2.

Se $j = p_k$ fazer $\Delta_k = \theta_k \Delta_k$ com $0 < \theta_k < 1$,

$k = k + 1$ e voltar ao passo 4.

Passo 5. Fazer $x = x_k$

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE LUCIDI- SCIANDRONE-TSENG

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a teoria envolvida no novo método para resolver o problema (1), o qual não faz uso da derivada da função f . É bom mencionar que o desenvolvimento do método envolve três grandes aspectos: a procura de uma matriz de posto completo tal que suas colunas correspondem aos gradientes das restrições quase ativas no ponto atual, a procura de um conjunto de direções satisfazendo certa condição e o cálculo de um passo a ser dado ao longo de uma direção de descida.

A seguir se impõe uma condição adicional que deve ser satisfeita pela função f .

Suposição 1. $\inf_{x \in \Omega} f(x) > -\infty$.

De acordo com a suposição (1), a função objetivo tem que ser limitada inferiormente.

3.2 Estimativa das restrições ativas

A seguinte proposição descreve uma propriedade do conjunto de índices $A(x; \epsilon)$ (definição 2.2.4), como uma aproximação do conjunto de índices

$A(\bar{x}) \cup E$ quando o ponto x está perto do ponto $\bar{x}$.

Proposição 3.2.1. *Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pontos em Ω que converge para algum $\bar{x} \in \Omega$. Então, existe um escalar $\bar{\epsilon} > 0$, que depende só de $\bar{x}$, tal que, para cada escalar $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}]$ existe um número natural k_ϵ para o qual $A(x_k; \epsilon) = A(\bar{x}) \cup E$ para todo $k \geq k_\epsilon$.*

Demonstração. Seja $N(\bar{x}) = \{i \in I : g_i(\bar{x}) < 0\}$. logo

$$N(\bar{x}) \cap (A(\bar{x})) = \phi.$$

Definamos $\bar{\epsilon}$ da seguinte forma:

$$\bar{\epsilon} = \begin{cases} \frac{1}{3} \min_{i \in N(\bar{x})} -g_i(\bar{x}), & \text{se } N(\bar{x}) \neq \emptyset \\ 1, & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \leq \bar{\epsilon}$, temos que:

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon < 2\epsilon < 3\epsilon &\leq \min_{i \in N(\bar{x})} -g_i(\bar{x}) \leq -g_i(\bar{x}), \forall i \in N(\bar{x}), \\ 2\epsilon < 3\epsilon &\leq -g_i(\bar{x}), \forall i \in N(\bar{x}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Agora, como g_i é contínua para todo $i \in I$, então existe um escalar $\delta_\epsilon > 0$ tal que:

$$-g_i(\bar{x}) - \epsilon < -g_i(x) < -g_i(\bar{x}) + \epsilon, \text{ para todo } x \in B_{\delta_\epsilon}(\bar{x}).$$

Portanto, temos que:

$$-\epsilon < -g_i(x) + g_i(\bar{x}) < \epsilon, \forall x \in B_{\delta_\epsilon}(\bar{x})$$

o que equivale a dizer que

$$|g_i(\bar{x}) - g_i(x)| < \epsilon, \forall x \in B_{\delta_\epsilon}(\bar{x}).$$

Então,

$$\max_{i \in I} |-g_i(x) + g_i(\bar{x})| < \epsilon, \forall x \in B_{\delta_\epsilon}(\bar{x}). \quad (3.2)$$

Por hipótese, $\{x_k\} \rightarrow \bar{x}$, logo, para δ_ϵ existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x_k \in B_{\delta_\epsilon}(\bar{x}), \quad \forall k > k_\epsilon. \quad (3.3)$$

Fixando $k > k_\epsilon$, de (3.1) e (3.2), temos que:

$$g_i(x_k) = (g_i(x_k) - g_i(\bar{x})) + g_i(\bar{x}) < \epsilon - 2\epsilon = -\epsilon.$$

logo

$$g_i(x_k) + \epsilon < 0, \forall i \in N(\bar{x}).$$

Assim,

$$i \notin A(x_k; \epsilon) \text{ e } i \notin A(\bar{x}). \quad (3.4)$$

Agora, de (3.2) temos que

$$g_i(x_k) - g_i(\bar{x}) > -\epsilon, \forall x_k \in B_{\delta_\epsilon}(\bar{x}).$$

Logo, $\forall i \in (A(\bar{x}))$,

$$g_i(x_k) + \epsilon \geq 0,$$

donde,

$$i \in A(x_k; \epsilon). \quad (3.5)$$

Logo, de (3.4) e (3.5), $A(x_k; \epsilon) = A(\bar{x}) \cup E$, $\forall k > k_\epsilon$. Do que vimos anteriormente, se tem que $A(x_k; \epsilon) = A(\bar{x}) \cup E$ para todo $k \geq k_\epsilon$.

■

3.3 Direções de busca

Nesta seção se discute acerca da escolha de um conjunto de direções de busca. Tal conjunto deve ser tal que, caminhando ao longo de alguma direção no conjunto, tenhamos factibilidade do novo ponto e decréscimo suficiente da função f , quando não se tenha alcançado um ponto estacionário do problema. Tal conjunto é escolhido de forma que gere o cone de primeira ordem de variações factíveis $T(x)$ (definição 2.2.2). Assim, é possível caracterizar um ponto estacionário do problema (1) como segue:

Proposição 3.3.1. *Um ponto $\bar{x} \in \Omega$ é um ponto estacionário do problema (1) se e somente se*

$$\nabla f(\bar{x})^T d^j \geq 0, \forall j = 1, \dots, r,$$

onde as direções d^j são tais que:

$$T(\bar{x}) = \text{Cone} \{d^1, \dots, d^r\}.$$

Demonstração. Seja d^j uma de tais direções. Logo, $d^j \in T(\bar{x})$. Como $\bar{x}$ é um ponto estacionário do problema (1), então,

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0, \forall d \in T(\bar{x}). \quad (3.6)$$

Em particular, a desigualdade (3.6) se verifica para d^j , logo:

$$\nabla f(\bar{x})^T d^j \geq 0.$$

Consideremos agora $d \in T(\bar{x})$. Logo, existem escalares não negativos $\beta^1, \dots, \beta^r$ tais que

$$d = \beta^1 d^1 + \dots + \beta^r d^r.$$

Por hipótese, $\nabla f(\bar{x})^T d^j \geq 0$, para todo $j = 1, \dots, r$, logo,

$$\nabla f(\bar{x})^T d = \beta^1 \nabla f(\bar{x})^T d^1 + \dots + \beta^r \nabla f(\bar{x})^T d^r \geq 0,$$

isto é, $\bar{x}$ é um ponto estacionário do problema (1)

■

Observação 3.3.1. A partir das proposições (3.2.1) e (3.3.1) é possível obter caracterizações especiais para o conjunto de direções de busca.

- ✓ A proposição (3.2.1) dá uma estimativa para o conjunto de índices das restrições ativas num ponto $\bar{x} \in \Omega$, isto é:

$$A(\bar{x}) \cup E = A(x; \epsilon),$$

para um ponto x perto do ponto $\bar{x}$ e um escalar $\epsilon > 0$ conveniente.
Logo, temos uma estimativa para o cone poliedral convexo no ponto $\bar{x}$:

$$T_{A(\bar{x}) \cup E}(\bar{x}) = T_{A(x; \epsilon)}(x),$$

para um ponto x perto do ponto $\bar{x}$ e um escalar $\epsilon > 0$ conveniente.

- ✓ A proposição (3.3.1) dá uma caracterização para um ponto estacionário $\bar{x}$ do problema (1) através de um conjunto de direções $\{d^1, \dots, d^r\}$ que gere o cone poliedral convexo no ponto $\bar{x}$, $T_{A(\bar{x}) \cup E}(\bar{x})$.

Logo, devemos escolher um conjunto D de direções de busca no ponto $x \in \Omega$ tal que:

$$\text{Cone} \{D \cap T_{A(x; \epsilon)}(x)\} = T_{A(x; \epsilon)}(x).$$

É possível escolher esse conjunto D satisfazendo uma condição particular.

Condição 1. Dados $x_k \in \Omega$ e $\epsilon_k > 0$, o conjunto de direções de busca

$$D_k = \left\{ d_k^j, j = 1, \dots, r_k \right\}, \text{ com } \|d_k^j\| = 1,$$

satisfaz:

✓ $\{r_k\}$ é uniformemente limitada

✓ $\text{Cone}\{D_k\} = T(x_k; \epsilon_k)$.

Exemplo 3.3.1. Sejam $n = 2$, $I = \{1, 2\}$, $E = \emptyset$, $x_k = (0, 1)$, $g_1(x_1, x_2) = -x_1$ e $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Encontremos um conjunto D_k de direções de busca que satisfaça a condição 1. A Figura (3.1) mostra as funções restrições g_1 e g_2 e a região factível Ω .

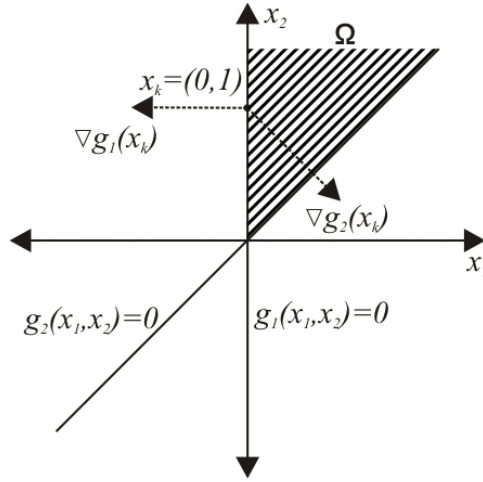


Figura 3.1. Região factível do exemplo (3.3.1).

Seja $\epsilon_k > 0$. Por definição temos que:

$$A(x_k; \epsilon_k) = E \cup \{i \in I : g_i(x_k) + \epsilon_k \geq 0\} \text{ e}$$

$$T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k) = \{d \in \mathbb{R}^2 : \nabla g_i(x_k)^T d \leq 0, \forall i \in (A(x_k; \epsilon_k) - E) \text{ e } \nabla h_\ell(x_k)^T d = 0, \forall \ell \in E\}.$$

Dado que $E = \emptyset$, temos:

$$A(x_k; \epsilon_k) = \{i \in I : g_i(x_k) + \epsilon_k \geq 0\} \text{ e}$$

$$T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k) = \{d \in \mathbb{R}^2 : \nabla g_i(x_k)^T d \leq 0, \forall i \in A(x_k; \epsilon_k)\}.$$

Agora,

$$g_1(x_k) + \epsilon_k = 0 + \epsilon_k = \epsilon_k > 0 \text{ e } g_2(x_k) + \epsilon_k = -1 + \epsilon_k \geq 0, \forall \epsilon_k \geq 1$$

Logo,

$$A(x_k; \epsilon_k) = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } 0 < \epsilon_k < 1 \\ \{1, 2\}, & \text{se } \epsilon_k \geq 1 \end{cases}$$

e

$$T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k) = \begin{cases} \{d \in \mathbb{R}^2 : \nabla g_1(x_k)^T d \leq 0\}, & \text{se } 0 < \epsilon_k < 1 \\ \{d \in \mathbb{R}^2 : \nabla g_1(x_k)^T d \leq 0, \nabla g_2(x_k)^T d \leq 0\}, & \text{se } \epsilon_k \geq 1 \end{cases}.$$

Pelo tanto, se $0 < \epsilon_k < 1$, então,

$$T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k) = \left\{ d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} : (-1, 0) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \leq 0 \right\},$$

e, se $\epsilon_k \geq 1$, então,

$$T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k) = \left\{ d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} : (-1, 0) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \leq 0 \text{ e } (1, -1) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \leq 0 \right\}.$$

- ✓ O conjunto $T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k)$, com $0 < \epsilon_k < 1$, é gerado, por exemplo, pelo conjunto:

$$D_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

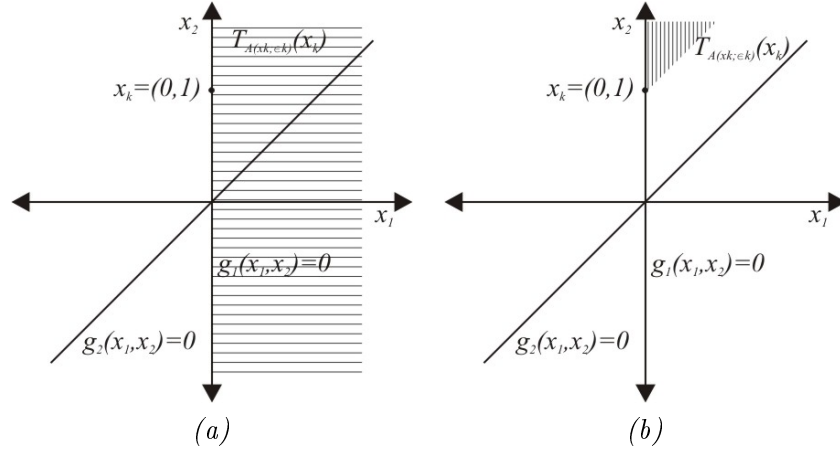
Assim, D_k satisfaz a condição 1, $\forall \epsilon_k > 0$, com $0 < \epsilon_k < 1$, (ver figura (3.2) (a)).

- ✓ O conjunto $T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k)$, com $\epsilon_k \geq 1$, é gerado, por exemplo, pelo conjunto:

$$D_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Logo, D_k satisfaz a condição 1, $\forall \epsilon_k \geq 1$, (ver figura (3.2) (b)).

Em geral não é fácil construir conjuntos D de direções de busca que satisfaçam a condição 1. Para o método proposto é importante obter tais conjuntos, pois junto com outras hipóteses, tal método tem propriedades desejáveis de convergência.

Figura 3.2. Conjunto $T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k)$ do exemplo 3.1

No caso em que os gradientes das restrições ϵ -ativas sejam linearmente independentes no ponto x_k , a seguinte proposição sugere uma forma simples de encontrar conjuntos de direções D_k que satisfaçam a condição 1, ([4], pp. 934, [5], pp. 42).

Proposição 3.3.2. *Suponha que para $x_k \in \Omega$ e $\epsilon_k > 0$, a matriz*

$$A_k = [\nabla g_i(x_k) \dots \nabla h_\ell(x_k)], \text{ com } i \in (A(x_k, \epsilon_k) - E) \text{ e } \ell \in E$$

tem colunas linearmente independentes. Sejam $u_k^1, \dots, u_k^{s_k}$ vetores tais que:

$$\text{Cone}\{u_k^1, \dots, u_k^{s_k}\} = N(A_k^t), \text{ e}$$

os vetores $v_k^1, \dots, v_k^{t_k}$, são obtidos pela normalização das colunas da matriz

$$A_k(A_k^t A_k)^{-1}.$$

Então, o conjunto $D_k = \{u_k^1, \dots, u_k^{s_k}, -v_k^1, \dots, -v_k^{t_k}\}$ satisfaz a condição 1.

Exemplo 3.3.2. Usar a proposição (3.3.2) para encontrar um conjunto de direções D_k que satisfaz a condição 1, para os dados fornecidos no exemplo (3.3.1).

1. Para $\epsilon_k > 0$, com $0 < \epsilon_k < 1$, temos que $A(x_k; \epsilon_k) = \{1\}$. Logo a matriz A_k é definida da seguinte forma:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo algumas contas, é possível verificar que uma base para o subespaço $N(A_k^t)$ é:

$$\beta_{N(A_k^t)}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Logo definimos, $u_k^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da mesma forma, é possível verificar que:

$$A_k (A_k^t A_k)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $v_k^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Portanto, o conjunto D_k definido como:

$$D_k = \{u_k^1, -v_k^1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

satisfaz a condição 1.

2. Para $\epsilon_k \geq 1$ temos que o conjunto de índices de restrições ϵ -ativas no ponto x_k é: $A(x_k; \epsilon_k) = \{1, 2\}$. Logo a matriz A_k está dada da seguinte forma:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo algumas contas, é possível verificar que $N(A_k^T) = \{0\}$ e, em consequência, $\beta_{N(A_k^t)}^* = \emptyset$.

Da mesma forma, é possível verificar que:

$$A_k (A_k^t A_k)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, definindo os vetores $v_k^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ temos que o conjunto D_k definido como:

$$D_k = \{-v_k^1, -v_k^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

satisfaz a condição 1.

3.4 Um primeiro resultado de convergência

A problema seguinte, estabelece uma condição suficiente para determinar que o ponto $\bar{x}$ é um ponto estacionário do problema (1). Em particular, uma das hipóteses que devem ser satisfeitas é que o conjunto de direções de busca D_k no ponto atual x_k deve satisfazer a condição 1. Logo, avaliando a função f ao longo de direções $d_k^j \in D_k$, é possível determinar se o ponto x_k é um ponto estacionário do problema (1) ou se a direção d_k^j é uma direção de descida factível.

Proposição 3.4.1. *Sejam $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pontos em Ω e $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $D_k = \{d_k^1, \dots, d_k^{r_k}\}$ uma seqüência de conjuntos de direções que satisfazem a condição 1 com $\epsilon_k \rightarrow 0$. Suponha que $\{x_k\}_K$ converge para um ponto $\bar{x}$ para algum conjunto infinito $K \subseteq \mathbb{N}$, e que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \max_{j \in J_k} \left\{ \min \left\{ 0, \nabla f(x_k)^T d_k^j \right\} \right\} = 0, \quad (3.7)$$

onde $J_k = \{1, \dots, r_k\}$.

Então $\bar{x}$ é um ponto estacionário do problema (1).

Demonstração. Suponhamos que $\bar{x}$ não é um ponto estacionário do problema (1). Logo existe uma direção $\bar{d} \in T_{A(\bar{x}; \epsilon_k)}(\bar{x})$ tal que:

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} < 0. \quad (3.8)$$

Por hipótese $\{x_k\}_K \rightarrow \bar{x}$, donde, para todo $\epsilon^* > 0$ existe um natural N tal que $\|x_k - \bar{x}\| < \epsilon^*$, sempre que $k > N$.

Agora, D_k é o conjunto de direções de busca no ponto x_k , que satisfaz a condição 1 com $\epsilon_k \rightarrow 0$ para cada $k \in K$; Logo, $\{D_k\}_{k \in K} \rightarrow \bar{D}$, onde $\bar{D}$ é o conjunto de direções de busca no ponto $\bar{x}$, com $\bar{D} = \{\bar{d}^1, \dots, \bar{d}^r\}$.

Dado que r_k é uniformemente limitado, existem: um conjunto finito $J \subseteq \mathbb{N}$, um conjunto infinito $K_1 \subseteq K$ e uma direção $\bar{d}^j \in \mathbb{R}^n$, com $j \in J$ tais que:

$$J_k = J \quad \forall k \in K_1 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty, k \in K_1} d_k^j = \bar{d}^j, \quad \forall j \in J. \quad (3.9)$$

Por hipótese D_k satisfaz a condição 1 com $\epsilon_k \rightarrow 0$. Então, pela proposição (3.2.1), $A(x_k; \epsilon_k) \subseteq A(\bar{x}) \cup E$ para todo k suficientemente grande. Logo

$$T_{A(\bar{x}) \cup E}(x_k) \subseteq T_{A(x_k; \epsilon_k)}(x_k) = \text{Cone}\{D_k\} = \text{Cone}\left\{d_k^j\right\}_{j \in J_k}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, dado que as funções restrições do problema (1) são lineares, temos que

$$\{dist(T_{A(\bar{x})}(x_k), T_{A(\bar{x})}(\bar{x}))\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow (T(x_k) \rightarrow T(\bar{x})), \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Logo, dado que $\bar{d} \in T_{A(\bar{x}; \epsilon_k)}(\bar{x})$ e que $\{T(x_k)\} \rightarrow T(\bar{x})$, temos que $\bar{d} \in T(x_k)$ para k suficientemente grande. Logo, por (3.10) tem-se que $\bar{d} \in Cone\{d_k^j\}_{j \in J_k}$ e conseqüentemente,

$$\bar{d} = \sum_{j \in J_k} \beta^j d_k^j, \text{ para alguns } \beta^j \geq 0.$$

Além disso, $\{d_k^j\} \rightarrow \bar{d}^j$, logo $\bar{d} = \sum_{j \in J_k} \beta^j \bar{d}^j$ para k suficientemente grande.

Portanto

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T \bar{d} &= \nabla f(\bar{x})^T \left(\sum_{j \in J_k} \beta^j \bar{d}^j \right) = \sum_{j \in J_k} \beta^j \nabla f(\bar{x})^T \bar{d}^j = \\ &= \sum_{j \in J_k} \beta^j \nabla f \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right)^T \left(\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^j \right). \end{aligned}$$

Agora, como o operador ∇f é contínuo, então:

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = \sum_{j \in J_k} \beta^j \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k)^T d_k^j.$$

Por hipótese tem-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \max_{j \in J_k} \left\{ \min \left\{ 0, \nabla f(x_k)^T d_k^j \right\} \right\} = 0,$$

logo $\nabla f(x_k)^T d_k^j \geq 0$ para k suficientemente grande. Assim

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d} = \sum_{j \in J_k} \beta^j \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k)^T d_k^j \geq 0,$$

o que contradiz o suposto (3.8).

■

A hipótese (3.7) da proposição (3.4.1) é satisfeita, garantindo que, para cada direção $d_k^j \in D_k$, existe um escalar positivo ξ_k^j tal que

$$f(x_k + \xi_k^j d_k^j) \geq f(x_k) - o(\xi_k^j),$$

com $\{\xi_k^j\} \rightarrow 0$ e $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{o(\xi)}{\xi} = 0$.

Para levar em conta trocas de x_k ao longo das diferentes direções d_k^j , substituímos o ponto x_k pelo ponto x_k^j que deve satisfazer: $\{\|x_k^j - x_k\|\} \rightarrow 0$. Isto gera uma nova condição que deve ser satisfeita:

$$f(x_k^j + \xi_k^j d_k^j) \geq f(x_k^j) - o(\xi_k^j). \quad (3.12)$$

Além do anterior, devemos garantir que o novo ponto $x_k^j + \xi_k^j d_k^j$ seja factível, ou seja, que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\begin{aligned} g_i(x_k^j + \xi_k^j d_k^j) &\leq 0, \quad \forall i \in I \quad \text{e} \\ h_\ell(x_k^j + \xi_k^j d_k^j) &= 0, \quad \forall \ell \in E. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Usando o teorema de Taylor, é possível escrever a condição (3.13) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_i(x_k^j) + \xi_k^j \nabla g_i(x_k^j)^T d_k^j &\leq 0, \quad \forall i \in I \quad \text{e} \\ h_\ell(x_k^j) + \xi_k^j \nabla h_\ell(x_k^j)^T d_k^j &= 0, \quad \forall \ell \in E. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A seguinte proposição formaliza a discussão feita até aqui, em relação à existência do escalar ξ_k^j , que faz verdadeiras as condições (3.12) e (3.14).

3.5 Um segundo resultado de convergência

Proposição 3.5.1. *Sejam $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pontos em Ω e $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $D_k = \{d_k^1, \dots, d_k^{r_k}\}$ uma seqüência de conjuntos de direções e suponha que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

1. *os conjuntos D_k satisfazem a condição 1 com $\epsilon_k \rightarrow 0$;*
2. *$\{x_k\}_{k \in K} \rightarrow \bar{x}$ para algum conjunto infinito $K \subseteq \mathbb{N}$ e, para cada $k \in K$ e cada $j \in J_k$, onde $J_k = \{1, \dots, r_k\}$, existe um ponto $x_k^j \in \Omega$ e um escalar $\xi_k^j > 0$, que além de satisfazer as condições (3.12) e (3.14), satisfaz também*

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \max_{j \in J_k} \{\xi_k^j\} = 0, \quad (3.15)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \max_{j \in J_k} \|x_k - x_k^j\| = 0, \quad (3.16)$$

onde $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{o(\xi)}{\xi} = 0$.

Então $\bar{x}$ é um ponto estacionário do problema (1).

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [5], pp.47-48, tendo em conta que esta é feita em geral para restrições de desigualdade, onde as respectivas funções podem ser lineares ou não lineares.

3.6 O método de Lucidi-Sciandrone-Tseng, sob a condição 1

A seguir descrevemos o método que, em cada iteração determina um conjunto de direções factíveis D_k que satisfazem a condição 1, e que tenta dar um passo suficiente de descida ao longo de alguma daquelas direções.

Assumindo que estamos na k -ésima iteração, o método inicia tal iteração com um ponto factível x_k , com valor da função objetivo $f(x_k)$, um tamanho de passo α_k , um parâmetro $\epsilon_k > 0$ e determina um conjunto de direções de busca factíveis D_k que satisfaz a condição (1). Imediatamente, o método avalia a função f no ponto $x_k^j + \underline{\alpha}d_k^j$ (possível novo ponto), com $j = 1, \dots, r_k$, onde r_k é o número de direções no conjunto D_k , $x_k^j = x_k$, $d_k^j \in D_k$ e $\underline{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}, \alpha\}$, onde $\bar{\alpha}$ é o maior passo que se pode dar na direção d_k^j , de forma tal que se mantenha a factibilidade do possível novo ponto e $\alpha = \alpha_k$. Se temos decréscimo suficiente da função f ao mudar do ponto atual x_k^j ao ponto $x_k^j + \underline{\alpha}d_k^j$, então o método tenta dar um passo melhor ao longo desta direção. Se tal condição de decréscimo suficiente não é satisfeita, então o tamanho de passo α é diminuído por uma fração $\theta_\alpha \in (0, 1)$ e o ponto x_k não é mudado. No caso em que se tenha decréscimo suficiente com o máximo passo possível $\bar{\alpha}$, então termina a iteração atual, obtendo um novo ponto factível $x_{k+1} = x_k^j + \bar{\alpha}d_k^j$ e atualizando os parâmetros $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k$ e $\alpha_{k+1} = \bar{\alpha}$. De outra forma, uma nova direção d_k^{j+1} do conjunto D_k é testada, e se fazem $x_k^{j+1} = x_k^j$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ e se diminui o parâmetro ϵ_k por uma fração $\theta_\epsilon \in (0, 1)$, para obter $\epsilon_{k+1} = \theta_\epsilon \epsilon_k$.

3.7 O algoritmo, sob a condição 1

De acordo com o método apresentado em (3.6), o algoritmo para resolver o problema (1) é o seguinte.

Dados de entrada.

$$k = 0, x_0 \in \Omega, \alpha_0 > 0, \epsilon_0 > 0, \gamma > 0, \theta_\alpha \in (0, 1), \theta_\epsilon \in (0, 1).$$

Passo 1. Escolher um conjunto D_k que satisfaça a condição 1.

$$D_k = \{d_k^1, \dots, d_k^{r_k}\}.$$

Passo 2. Minimizar sobre o $\text{Cone}\{D_k\}$.

Passo 2.1. Inicialização.

$$\text{Fazer } j = 1, x_k^j = x_k, \alpha_k^j = \alpha_k.$$

Passo 2.2. Cálculo do tamanho do passo inicial.

Calcular o máximo tamanho do passo $\bar{\alpha}_k^j$ tal que

$$g_i(x_k^j) + \bar{\alpha}_k^j \nabla g_i(x_k^j) d_k^j \leq 0, \quad \forall i \in I \text{ e}$$

$$h_\ell(x_k^j) + \bar{\alpha}_k^j \nabla h_\ell(x_k^j) d_k^j = 0, \quad \forall \ell \in E.$$

$$\text{Fazer } \underline{\alpha}_k^j = \min \left\{ \bar{\alpha}_k^j, \alpha_k^j \right\}.$$

Passo 2.3. Teste sobre a direção de busca.

Se $\underline{\alpha}_k^j > 0$ e $f(y_k^j) \leq f(x_k^j) - \gamma(\underline{\alpha}_k^j)^2$, calcular α_k^{j+1} e x_k^{j+1} pelo procedimento *Expansão do passo*.

Caso contrário, fazer $x_k^{j+1} = x_k^j$ e $\alpha_k^{j+1} = \theta_\alpha \alpha_k^j$.

Passo 2.4. Teste sobre as restrições ativas.

Se $\alpha_k^{j+1} = \bar{\alpha}_k^j$, fazer $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k$, e ir ao passo 3.

Passo 2.5. Teste sobre a minimização no $\text{Cone}\{D_k\}$.

Se $j < r_k$, fazer $j = j + 1$ e ir ao passo 2.2.

Caso contrário, fazer $\epsilon_{k+1} = \theta_\epsilon \epsilon_k$ e ir ao passo 3.

Passo 3. Encontrar $x_{k+1} \in \Omega$ tal que $f(x_{k+1}) \leq f(x_k^{j+1})$.

Fazer $\alpha_{k+1} = \alpha_k^{j+1}$, $k = k + 1$, e ir ao passo 1.

3.7.1 O procedimento *Expansão do passo*

Dados de entrada.

$$\bar{\alpha}_k^j, \underline{\alpha}_k^j, y_k^j, x_k^j, d_k^j, \gamma > 0, \omega \in (0, 1).$$

Passo 1. Fazer $\alpha = \underline{\alpha}_k^j$, $x = y_k^j$.

Passo 2. Fazer $\tilde{\alpha} = \min \left\{ \bar{\alpha}_k^j, \frac{\alpha}{\omega} \right\}$ e $\tilde{x} = x_k^j + \tilde{\alpha} d_k^j$.

Se $\alpha = \bar{\alpha}_k^j$ ou $f(\tilde{x}) > f(x_k^j) - \gamma \tilde{\alpha}^2$, fazer $\alpha_k^{j+1} = \alpha$, $x_k^{j+1} = x$, sair.

Passo 3. Fazer $\alpha = \tilde{\alpha}$, $x = \tilde{x}$, e ir ao passo 2.

A proposição a seguir garante que o algoritmo (3.7.1), além de gerar seqüências de pontos factíveis, decresce o valor da função objetivo f em cada iteração, e que o tamanho do passo e a distância entre dois pontos consecutivos tende para 0.

Proposição 3.7.1. *Sejam $\{(x_k, \epsilon_k)\}$ e $\left\{ \left(x_k^j, \alpha_k^j, \bar{\alpha}_k^j, \underline{\alpha}_k^j, d_k^j \right)_{1 \leq j \leq \tilde{r}_k} \right\}$ seqüências geradas pelo algoritmo (3.7.1). Então, sob a suposição (1),*

1. *a seqüência $\{x_k\}$ está bem definida;*
2. *a seqüência $\{f(x_k)\}$ é decrescente e cada ponto de acumulação de seqüência $\{x_k\}$ pertence ao conjunto Ω ;*
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq \tilde{r}_k} \left\{ \alpha_k^j \right\} = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq \tilde{r}_k} \left\| x_k - x_k^j \right\| = 0$.

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [5], pp. 50-52, tendo em conta que esta é feita em geral para restrições de desigualdade, onde as respectivas funções podem ser lineares ou não lineares.

A proposição a seguir garante que o algoritmo (3.7.1) gera uma seqüência de pontos que converge para a solução do problema (1). A demonstração pode ser vista em [5], pp. 52-53.

Proposição 3.7.2. *Sob a suposição (1), se $\{x_k\}$ é a seqüência gerada pelo algoritmo (3.7.1) e $\{x_k\}$ é limitada, então existe ao menos um ponto de acumulação que é um ponto estacionário do problema (1).*

CAPÍTULO 4

COMENTÁRIOS GERAIS ACERCA DAS IMPLEMENTAÇÕES

Neste capítulo vamos mostrar de que forma foram implementadas partes importantes de cada um dos algoritmos (2.6) e (3.7.1), como por exemplo, no método de Lucidi-Sciandrone-Tseng, a forma como obtemos um conjunto de direções D_k que satisfaz a condição 1; a forma como é obtido o passo α_k de tal forma que o novo ponto seja factível ou a forma como é expandido o passo α_k ao longo de uma direção particular d_k , de tal forma que se tenha decréscimo suficiente da função f e factibilidade do novo ponto, etc. No método de Lewis-Torczon, consideramos importante a forma como é definido um conjunto padrão de direções de busca P_k , como também a forma como é diminuído ou aumentado o passo Δ_k dependendo das circunstâncias.

4.1 Método de Lewis-Torczon

Assumimos que na k -ésima iteração temos: um ponto factível x_k , um conjunto de direções padrão P_k e um tamanho de passo Δ_k . Além disso, e independente da iteração, temos $\epsilon > 0$.

4.1.1 Obtenção de um conjunto padrão de direções P_k

De acordo com a definição (2.4.1), o conjunto padrão de direções P_k depende da distância entre o ponto x_k e a fronteira do conjunto factível Ω . Aqui, a constante ϵ joga um papel importante na determinação do conjunto P_k .

- ✓ Se o conjunto $A(x_k; \epsilon) = \emptyset$ ou seja, se o ponto x_k está longe da fronteira da região factível, o conjunto P_k é definido simplesmente como:

$$P_k = \{\pm e_i : \forall i = 1, \dots, n\}.$$

- ✓ Se o conjunto $A(x_k; \epsilon) \neq \emptyset$ ou seja, se o ponto x_k está perto da fronteira da região factível, a construção do conjunto P_k depende do conjunto de índices $A(x_k; \epsilon)$. Tal conjunto é definido em (4.2.1), só que fazemos $\epsilon_k = \epsilon$ para todo k . Agora, a partir de tal conjunto de índices, obtemos a matriz A_k , definida na definição (2.2.4), da mesma forma como é obtida na subsecção (4.2.2). A seguir, construímos o conjunto P_k usando o mesmo procedimento usado na subsecção (4.2.3) com relação à fatoração da matriz A_k , a obtenção dos vetores u_k^i , com $i = 1, \dots, s_k$ e a obtenção dos vetores v_k^j , com $j = 1, \dots, t_k$. Mais o conjunto P_k é construído da seguinte forma:

$$P_k = \{u_k^1, \dots, u_k^{s_k}, v_k^1, \dots, v_k^{t_k}, -v_k^1, \dots, -v_k^{t_k}\}.$$

4.1.2 Aumento ou decréscimo do passo Δ_k

Dependendo das circunstâncias, precisaremos aumentar ou diminuir o tamanho do passo Δ_k . Para isto usamos as constantes λ_k no caso que precisemos aumentar o valor de Δ_k ou θ_k no caso que precisemos diminuir o valor Δ_k . Nestes casos usamos sempre as mesmas constantes, independentemente de k : $\lambda_k = 2$ e $\theta_k = 0.5$.

4.2 Método de Lucidi-Sciandrone-Tseng

Assumimos que na k -ésima iteração temos um ponto factível x_k , um conjunto de direções D_k , um tamanho de passo α_k , um valor para ϵ , ϵ_k e constantes θ_α , $0 < \theta_\alpha < 1$ e θ_ϵ , $0 < \theta_\epsilon < 1$ as quais não dependem de k .

4.2.1 Cálculo de um conjunto de índices de restrições ϵ -ativas

O conjunto de índices $A(x_k, \epsilon_k) \neq \phi$, (definição (2.2.4)), é definido de tal forma que a correspondente matriz A_k seja de posto coluna completo, (proposição (3.3.2)). Em consequência, $\dim(A(x_k, \epsilon_k)) \leq n$. Além disso, se o problema (1) tem restrições de igualdade $h_\ell = 0$, com $\ell = m+1, \dots, m+p$, tal conjunto deve conter os subíndices ℓ , com $\ell = m+1, \dots, m+p$. Agora, se o problema (1) tem restrições de desigualdade $g_i \leq 0$, com $i = 1, \dots, m$, tal conjunto contém os subíndices para os quais se satisfaz a condição $g_i(x) + \epsilon_k \geq 0$. A rotina *luscst_indices* realiza esta tarefa ao interior do algoritmo. Como comentário adicional, podemos mencionar que, no momento que precisar verificar a condição $g_i(x) + \epsilon_k \geq 0$, realizamos a comparação $g_i(x) + \epsilon_k \geq tol$, e usamos $tol = 10^{-10}$.

Procedimento índices

Dados de entrada: x_k, ϵ_k, n, m, p .

Dados de saída: I_k .

Passo 1. Fazer $I_k = \phi$ e $j = 1$.

Passo 2. Se $p \geq 1$.

Passo 2.1. Para $i = 1, \dots, p$, fazer $I_k = [i, I_k]$.

Passo 3. Fazer $lon = longitud(I_k)$.

Passo 4. Se $m \geq 1$.

Passo 4.1. Em quanto $lon \leq n$ e $g_j(x_k) + \epsilon_k \geq 0$ e $j \leq m$.

Passo 4.1.1. fazer $I_k = [j, I_k]$.

Passo 4.1.2. fazer $lon = longitud(I_k)$.

Passo 4.1.3. fazer $j = j + 1$.

4.2.2 Cálculo da matriz A_k

De acordo com (4.2.1), o conjunto $A(x_k, \epsilon_k)$ está intimamente relacionado com a matriz A_k . Isto é, dado $A(x_k, \epsilon_k)$, a j -ésima coluna da matriz A_k corresponde ao gradiente da j -ésima restrição do problema (1), assumindo que as restrições tem uma ordem pré-definida e $j \in A(x_k, \epsilon_k)$. Se a matriz A_k não é de posto coluna completo, então um novo conjunto de índices $A(x_k, \epsilon_k)$ é calculado, a partir de um decréscimo do valor de ϵ_k pelo fator θ_ϵ .

Procedimento matriz

Dados de entrada: $x_k, A(x_k, \epsilon_k), m, p$.

Dados de saída: $A_k, bandera$.

Passo 1. Fazer $A_k = []$.

Passo 2. Fazer $lon = longitud(A(x_k, \epsilon_k))$.

Passo 3. Se $p \geq 1$.

Passo 3.1. Para $i = 1, \dots, p$, fazer $A_k = [\nabla h_i(x_k), A_k]$.

Passo 4. Se $m \geq 1$.

Passo 4.1. Para $j = p + 1, \dots, p + m$, fazer $A_k = [\nabla g_j(x_k), A_k]$.

Passo 5. Fazer $k = posto(A_k)$.

Passo 6. Se $k = lon$, fazer $bandera = true$.

Em caso contrário, fazer $bandera = false$

4.2.3 Obtenção de um conjunto de direções D_k que satisfaz a condição 1

A partir da matriz A_k , obtida em (4.2.2), obtemos o conjunto de direções D_k , o qual deve satisfazer a condição 1. Este conjunto é obtido a partir da proposição (3.3.2), segundo a qual, um conjunto D_k satisfazendo a condição 1 é obtido da seguinte forma:

$$D_k = \{u_k^1, \dots, u_k^{s_k}, -v_k^1, \dots, -v_k^{t_k}\},$$

onde o conjunto

$$U_k = \{u_k^1, \dots, u_k^{s_k}\},$$

gera o cone $N(A_k^T)$ e o conjunto

$$\{v_k^1, \dots, v_k^{t_k}\},$$

é formado com as colunas normalizadas da matriz $A_k(A_k^T A_k)^{-1}$. Para encontrar o conjunto $\beta_{N(A_k^t)}^*$ usamos a fatoração QR da matriz A_k . Isto é:

$$A_k = Q_k R_k = \begin{bmatrix} \hat{Q}_k & \tilde{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_k \\ \dots \\ \tilde{0}_k \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde a matriz $\hat{Q}_k \in \mathbb{R}^{n \times m_k}$, é tal que suas colunas formam uma base ortonormal $\beta_{Im(A_k)}^*$ para o espaço $Im(A_k)$, e a matriz $\tilde{Q}_k \in \mathbb{R}^{n \times (n-m_k)}$ forma uma base ortonormal $\beta_{N(A_k^t)}^*$ para o espaço $N(A_k^t)$. A matriz $\hat{R}_k \in \mathbb{R}^{m_k \times m_k}$ é triangular superior, invertível, e a matriz $\tilde{0}_k \in \mathbb{R}^{(n-m_k) \times m_k}$. Logo, as colunas da matriz $\tilde{Q}_k$, junto com o negativo das mesmas colunas são as candidatas a formar o conjunto U_k .

Observação 4.2.1. Para calcular a matriz $A_k(A_k^t A_k)^{-1}$ temos em conta o seguinte: a partir da igualdade (4.1), é possível escrever tal matriz de uma forma mas simples.

$$\begin{aligned}
A_k(A_k^t A_k)^{-1} &= \begin{bmatrix} \hat{Q}_k \\ \tilde{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_k \\ \cdots \\ \tilde{0}_k \end{bmatrix} \left\{ \left(\begin{bmatrix} \hat{Q}_k \\ \tilde{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_k \\ \cdots \\ \tilde{0}_k \end{bmatrix} \right)^t \begin{bmatrix} \hat{Q}_k \\ \tilde{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_k \\ \cdots \\ \tilde{0}_k \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{Q}_k \\ \tilde{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_k \\ \cdots \\ \tilde{0}_k \end{bmatrix} \left(\hat{R}_k^t \hat{Q}_k^t \hat{Q}_k \hat{R}_k \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{Q}_k \\ \tilde{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_k \\ \cdots \\ \tilde{0}_k \end{bmatrix} \left(\hat{R}_k^t \hat{R}_k \right)^{-1} \\
&= \left(\hat{Q}_k \hat{R}_k \right) \left(\hat{R}_k^{-1} \hat{R}_k^{-t} \right) \\
&= \hat{Q}_k \left(\hat{R}_k \hat{R}_k^{-1} \right) \hat{R}_k^{-t} \\
&= \hat{Q}_k \hat{R}_k^{-t}.
\end{aligned}$$

Dado que a matriz $\hat{R}_k$ é triangular superior invertível, a matriz $\hat{R}_k^t$ é triangular inferior invertível. Logo para realizar o cálculo da matriz $\hat{R}_k^{-t}$ resolvemos n -sistemas lineares da forma $\hat{R}_k^t b_i = e_i$ onde b_i é a i -ésima coluna da matriz $\hat{R}_k^{-t}$ e e_i é o i -ésimo vetor canônico.

4.2.4 Cálculo do passo máximo

Calcular o passo máximo α_k que podemos caminhar na direção d_k , onde $d_k \in D_k$, tal que o novo ponto $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ seja factível é muito importante no interior do método. Isto é conseguido calculando α_k tal que as restrições impostas sobre x no problema (1) sejam satisfeitas no ponto x_{k+1} . Ou seja, encontramos α_k tal que:

$$g_i(x_{k+1}) = g_i(x_k + \alpha_k d_k) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

e

$$h_\ell(x_{k+1}) = h_\ell(x_k + \alpha_k d_k) = 0, \forall \ell = m+1, \dots, m+p. \quad (4.3)$$

As condições (4.2) e (4.3) podem ser rescritas como:

$$g_i(x_k) + \alpha_k \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0, \forall i = 1, \dots, m, \quad (4.4)$$

$$\alpha_k \nabla h_\ell(x_k)^T d_k = 0, \forall \ell = m+1, \dots, m+p. \quad (4.5)$$

Para encontrar α_k , analisamos três possíveis casos:

1. o problema (1) tem só restrições de desigualdade. Um exemplo de conjunto factível em $\mathbb{R}^2$, é apresentado na figura (4.1). Neste caso temos

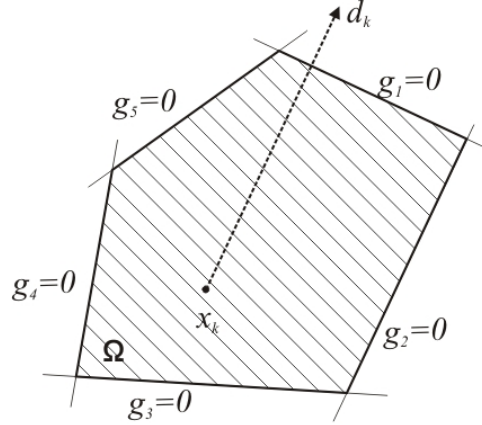


Figura 4.1. Passo α_k com restrições de desigualdade em $\mathbb{R}^2$.

que α_k deve satisfazer só a condição (4.4); não obstante, diferentes situações podem apresentar-se e são analisadas a seguir:

- i. a restrição g_i é ativa no ponto x_k e a direção d_k é perpendicular ao gradiente da restrição g_i no ponto x_k . Isto é, $g_i(x_k) = 0$ e $\nabla g_i(x_k)^T d_k = 0$. A figura (4.2)(a) ilustra tal situação. Logo, a direção d_k está sobre a restrição g_i e podemos caminhar sobre tal restrição sem perda de factibilidade. Isto é,

$$g_i(x_k) + \alpha_k \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_k \geq 0.$$

- ii. A restrição g_i é ativa no ponto x_k e a direção d_k forma um ângulo β , $0 \leq \beta < \pi/2$, com o gradiente da restrição g_i no ponto x_k . Isto é, $g_i(x_k) = 0$ e $\nabla g_i(x_k)^T d_k > 0$. A figura (4.2)(b) ilustra tal situação. Logo, não é possível caminhar na direção d_k . Isto é,

$$g_i(x_k) + \alpha_k \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_k \leq 0.$$

- iii. A restrição g_i é ativa no ponto x_k , e a direção d_k forma um ângulo β , $\pi/2 < \beta \leq \pi$, com o gradiente da restrição g_i no ponto x_k . Isto é, $g_i(x_k) = 0$ e $\nabla g_i(x_k)^T d_k < 0$. A figura (4.2)(c) ilustra tal situação. Logo, é possível caminhar sobre tal direção. Isto é,

$$g_i(x_k) + \alpha_k \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_k \geq 0.$$

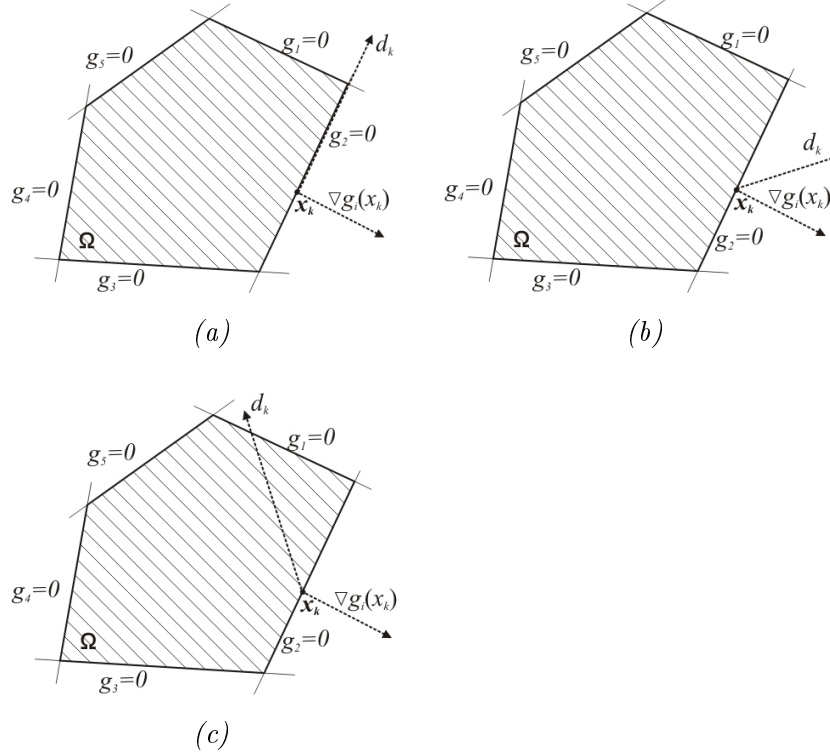


Figura 4.2. Passo α_k com g_i ativa no ponto x_k .

- iv. A restrição g_i não é ativa no ponto x_k e a direção d_k é perpendicular ao gradiente da restrição g_i no ponto x_k . Isto é, $g_i(x_k) < 0$ e $\nabla g_i(x_k)^T d_k = 0$. A figura (4.3)(a) ilustra tal situação. Logo, é possível caminhar na direção d_k . Isto é,

$$g_i(x_k) + \alpha_k \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_k \geq 0.$$

- v. A restrição g_i não é ativa no ponto x_k e a direção d_k forma um ângulo β , com $0 \leq \beta < \pi/2$, com o gradiente da restrição g_i no ponto x_k . Isto é, $g_i(x_k) < 0$ e $\nabla g_i(x_k)^T d_k > 0$. A figura (4.3)(b) ilustra tal situação. Logo,

$$g_i(x_k) + \alpha_k \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha_k \leq \frac{-g_i(x_k)}{\nabla g_i(x_k)^T d_k}.$$

- vi. A restrição g_i não é ativa no ponto x_k e a direção d_k forma um ângulo β , com $\pi/2 < \beta \leq \pi$, com o gradiente da restrição g_i no

ponto x_k . Isto é, $g_i(x_k) < 0$ e $\nabla g_i(x_k)^T d_k < 0$. A figura (4.3)(c) ilustra tal situação. Logo,

$$g_i(x_k) + \alpha_k \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0 \Leftrightarrow 0 > \alpha_k \geq \frac{-g_i(x_k)}{\nabla g_i(x_k)^T d_k}.$$

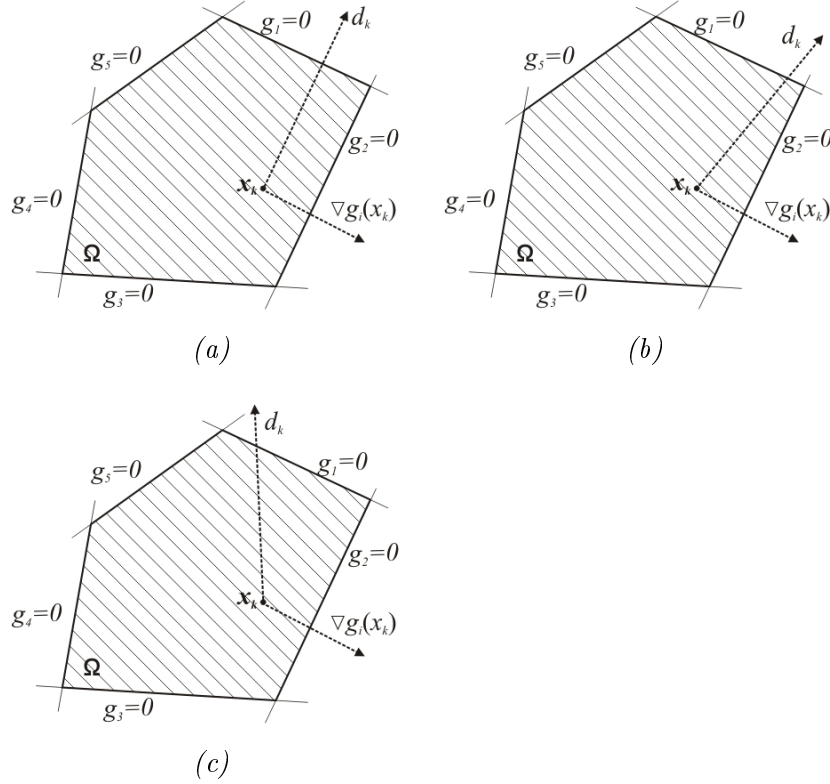


Figura 4.3. Passo α_k com g_i não ativa no ponto x_k .

2. O problema (1) tem só restrições de igualdade. Um exemplo de conjunto factível em $\mathbb{R}^2$, neste caso é apresentado na figura (4.4). Neste caso, só é possível caminhar na direção d_k , se d_k for perpendicular ao gradiente de h_ℓ . Isto é:

$$\alpha_k \nabla h_\ell(x_k)^T d_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = 0 \vee \nabla h_\ell(x_k)^T d_k = 0.$$

3. O problema (1) tem restrições de igualdade e desigualdade. Um exemplo de conjunto factível em $\mathbb{R}^2$, neste caso é apresentado na figura

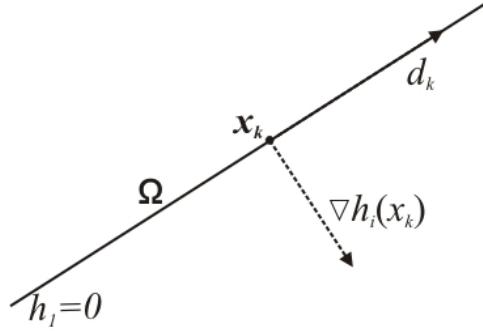


Figura 4.4. Passo α_k com restrições de igualdade em $\mathbb{R}^2$.

(4.5). Neste caso, α_k deve satisfazer simultaneamente as condições impostas nos itens (1) e (2).

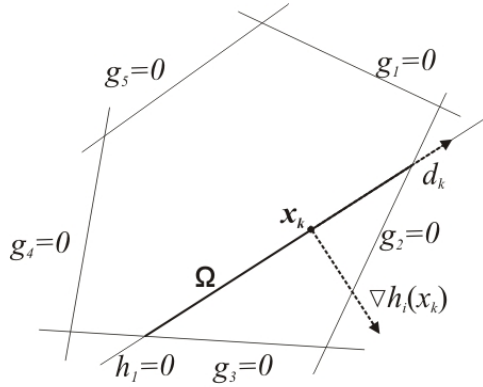


Figura 4.5. Passo α_k com restrições de desigualdade e igualdade em $\mathbb{R}^2$.

Agora, pensando na implementação, e tendo em conta as observações feitas até aqui, o cálculo de α_k deve levar em conta o tipo de restrições que tem o problema (1).

- ✓ No caso em que o problema (1) tem restrições de desigualdade e igualdade, primeiro encontramos α_k tal que a condição (4.4) seja verificada, de acordo com o item (1). Depois verificamos que a condição (4.5) também seja cumprida, de acordo com o item (2). Só sob tais condições aceitamos α_k . Se $\nabla g_i(x_k)^T d_k \neq 0$ para algum i , então fazemos $\alpha_k = 0$.
- ✓ No caso em que o problema (1) tem somente restrições de desigualdade,

encontramos α_k tal que a condição (4.4) seja verificada para todo $i = 1, \dots, m$, de acordo com o item (1).

- ✓ No caso em que o problema (1) tem somente restrições de igualdade, verificamos que a condição $\nabla h_\ell(x_k)^T d_k = 0$, $\forall \ell = 1, \dots, p$, de acordo com o item (2). Se tal condição é satisfeita para todo $\ell = 1, \dots, p$, atribuímos a α_k qualquer valor positivo. Caso contrário, fazemos $\alpha_k = 0$.

Procedimento passo

Dados de entrada: d_k, x_k, m, p .

Dados de saída: α_k .

Passo 1. Se $m \geq 1$.

Passo 1.1. Para $i = 1, \dots, m$,

encontrar α_{max} tal que $g_i(x_k) + \alpha_{max} \nabla g_i(x_k)^T d_k \leq 0$.

Passo 1.2. Se $p \geq 1$.

Passo 1.2.1. Para $j = 1 \dots, p$

Se $|\nabla h_j(x_k)^T d_k| > 0$, fazer $\alpha_{max} = 0$ e ir ao passo 3.

Passo 1.3. Se $p = 0$.

Ir ao passo 3.

Passo 2. Se $m = 0$.

Passo 2.1. Fazer $\alpha_{max} = 1$

Passo 2.2. Para $j = 1 \dots, p$

Se $|\nabla h_j(x_k)^T d_k| > 0$, fazer $\alpha_{max} = 0$ e ir ao passo 3.

Passo 3. Fazer $\alpha_k = \alpha_{max}$.

4.2.5 Expansão do passo

No interior do método tentamos aumentar o tamanho do passo α_k , quando este é positivo e temos decréscimo suficiente da função f . A idéia é, a partir de α_k , e na mesma direção d_k , testar diferentes pontos da forma $x_k + \alpha_k^+ d_k$, com $\alpha_k^+ > \alpha_k$, procurando melhorar o valor da função f , quando tenhamos factibilidade do novo ponto e decréscimo suficiente da função f . Se é possível encontrar tal ponto, fazemos $\alpha_k = \alpha_k^+$. Caso contrário, não modificamos α_k .

Procedimento expansão do passo

Dados de entrada:

$$\bar{\alpha}_k^j, \underline{\alpha}_k^j, y_k^j, x_k^j, d_k^j.$$

Dados de saída:

$$\alpha_k^{j+1}, x_k^{j+1}.$$

Parâmetros:

$$\gamma > 0, \omega \in (0, 1).$$

Passo 1. Fazer $\alpha = \underline{\alpha}_k^j, x = y_k^j$.

Passo 2. Fazer $\tilde{\alpha} = \min \left\{ \bar{\alpha}_k^j, \frac{\alpha}{\omega} \right\}$ e fazer $\tilde{x} = x_k^j + \tilde{\alpha} d_k^j$.

Passo 2.1. Se $\alpha = \bar{\alpha}_k^j$ ou $f(\tilde{x}) > f(x_k^j) - \gamma \tilde{\alpha}^2$.

fazer $\alpha_k^{j+1} = \alpha, x_k^{j+1} = x$ e sair.

Passo 3. Fazer $\alpha = \tilde{\alpha}, x = \tilde{x}$ e ir ao passo 2.

CAPÍTULO 5

TESTES NUMÉRICOS

Neste capítulo mostramos os resultados numéricos obtidos com a implementação dos métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon. O primeiro deles usa, na k -ésima iteração, um conjunto D_k de direções de busca que satisfazem a condição 1 e procura decréscimo suficiente do valor da função f . O segundo deles usa, na k -ésima iteração, um conjunto padrão P_k de direções e procura decréscimo simples da função f . Os diferentes problemas resolvidos tem restrições lineares de igualdade e/ou desigualdade e/ou caixa e foram tirados da coleção Hock-Schittkowski [2, 9]. As implementações foram feitas em MATLAB 6.5.

5.1 Método de Lucidi-Sciandrone-Tseng

5.1.1 Escolha de parâmetros

Depois de diferentes testes feitos com alguns problemas, foi possível determinar alguns parâmetros, que são usados na maioria dos problemas testados.

- ✓ Tolerância usada no critério de parada, $tol = 10^{-6}$;
- ✓ passo inicial, $\alpha_0 = 1$;
- ✓ constante usada na condição de decréscimo suficiente, $\gamma = 10^{-6}$;
- ✓ constante $\theta_\alpha \in (0, 1)$ usada para diminuir o tamanho do passo α_k quando seja necessário, $\theta_\alpha = 0.5$;

- ✓ constante $\theta_\epsilon \in (0, 1)$ usada para diminuir o valor de ϵ quando for necessário, $\theta_\epsilon = 0.5$;
- ✓ ϵ inicial,

$$\epsilon_0 = \begin{cases} 10^{-2} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |g_j(x_0)|, & \text{se existem restrições de desigualdade} \\ 1, & \text{se não existem restrições de desigualdade} \end{cases};$$
- ✓ constante ω usada no momento de tentar expandir o tamanho do passo, quando se tem decréscimo suficiente, $\omega = 0.5$.

5.1.2 Critério de parada

Como critério de parada do método usamos:

$$\max_{j=1, \dots, r_k} \alpha_k^j < tol.$$

5.2 Método de Lewis-Torczon

5.2.1 Escolha de parâmetros

Depois de diferentes testes feitos com alguns problemas, foi possível determinar alguns parâmetros, os quais são usados na maioria dos problemas testados.

- ✓ Tolerância usada no critério de parada, $tol = 10^{-6}$;
- ✓ passo inicial, $\Delta_0 = 1$;
- ✓ ϵ inicial, $\epsilon_0 = 0.5$;
- ✓ constante $\theta_\epsilon \in (0, 1)$ usada para diminuir o valor de ϵ quando seja necessário, $\theta_\epsilon = 0.5$.

5.2.2 Critério de parada

Como critério de parada do método usamos:

$$\Delta_k < tol.$$

Denotamos por:

- ✓ *Lu-Sc-Ts*, Método de Lucidi-Sciandrone-Tseng;

- ✓ *Le-To*, Método de Lewis-Torczon;
- ✓ *nome*, o nome com o qual está identificado o problema;
- ✓ *n*, o número de variáveis do problema;
- ✓ *D*., número de restrições de desigualdade do problema;
- ✓ *C*., número de restrições de caixa do problema;
- ✓ *I*., número de restrições de igualdade do problema;
- ✓ *It*., número de iterações realizadas pelo método;
- ✓ *NF*, número de vezes que foi avaliada a função *f*;
- ✓ *f_{rep}*, valor mínimo da função *f* reportado em [2, 9];
- ✓ Δf , diferença entre o valor mínimo da função *f* obtido com o método correspondente e o melhor valor reportado em [2, 9].

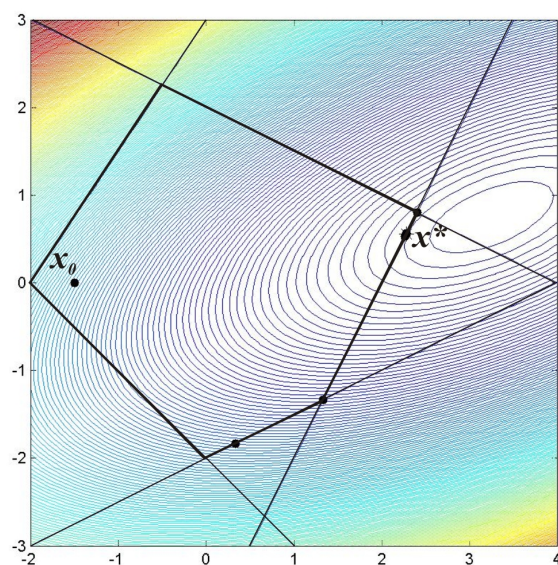
Antes de entrar na resolução dos problemas da coleção [2, 9], resolvemos dois problemas em $\mathbb{R}^2$, usando os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon. Apresentamos graficamente os pontos gerados por cada um dos métodos e uma tabela com os resultados obtidos.

Exemplo 5.2.1. resolver o seguinte problema de otimização:

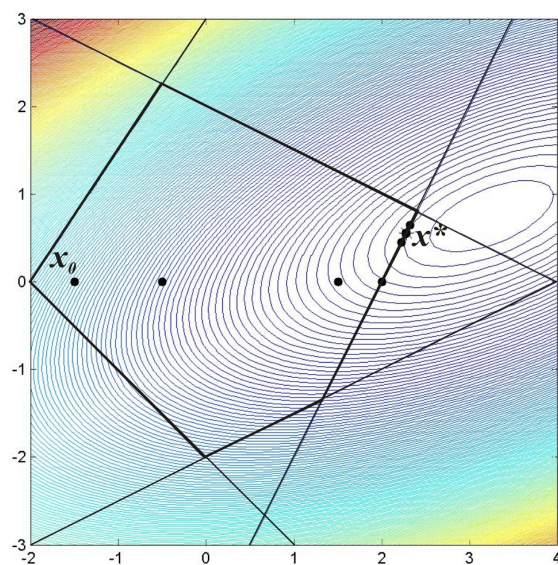
$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && (x_1 - 2)^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1 + 2x_2 \\
 &\text{sujeita a} && x_2 - 1.5x_1 - 3 \leq 0 \\
 &&& 0.5x_1 - 2 - x_2 \leq 0 \\
 &&& -x_1 - 2 - x_2 \leq 0 \\
 &&& 2x_1 - 4 - x_2 \leq 0 \\
 &&& x_2 + 0.5x_1 - 2 \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Observação 5.2.1. O problema (5.1) tem função objetivo quadrática e cinco restrições de desigualdade lineares.

Solução. Na tabela (5.1) aparecem os resultados obtidos com a execução dos algoritmos dos métodos de *Lucidi-Sciandrone-Tseng* e *Lewis-Torczon*. Além disso, a figura (5.1 *a*) mostra a seqüência de pontos gerada pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng e a figura (5.1 *b*) mostra a seqüência de pontos gerada pelo método de Lewis-Torczon. Para o cálculo da razão $\Delta f/f_{rep}$, usamos como *f_{rep}* a solução gerada pelo *Mathematica* [12], com o comando:



(a)



(b)

Figura 5.1. Solução gráfica do problema (5.1) com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon.

Características					Lu-Sc-Ts			Le-To		
Nome	n	D	C	I	It	NF	$\Delta f/f_{rep}$	It	NF	$\Delta f/f_{rep}$
Problema (5.1)	2	5	0	0	17	119	10^{-6}	58	172	10^{-6}
Problema (5.2)	2	3	0	1	12	42	10^{-16}	40	69	10^{-8}

Tabela 5.1. Solução dos problemas (5.1) e (5.2).

$$\text{Minimize}[\{f, cons\}, \{x, y, \dots\}].$$

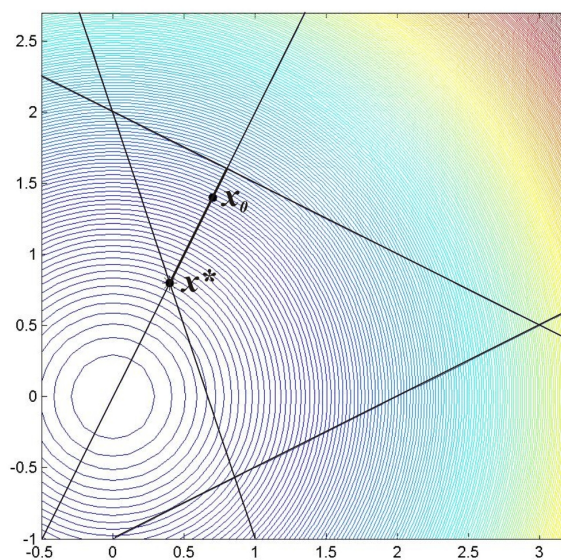
Exemplo 5.2.2. resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && x_1^2 + x_2^2 \\
 &\text{sujeita a} && 0.5x_1 - x_2 - 1 \leq 0 \\
 & && 2 - 3x_1 - x_2 \leq 0 \\
 & && x_2 - 2 + 0.5x_1 \leq 0 \\
 & && 2x_1 - x_2 = 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

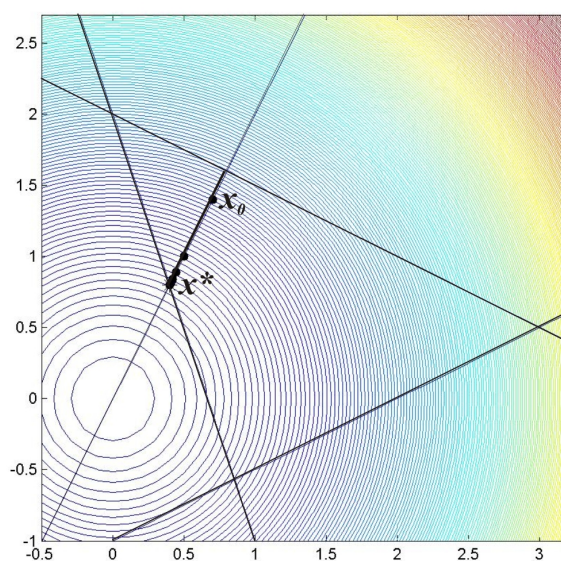
Observação 5.2.2. O problema (5.2) tem função objetivo quadrática e quatro restrições lineares, das quais, três são restrições de desigualdade y uma de igualdade.

Solução. Na tabela (5.1) aparecem os resultados obtidos na solução do problema (5.2) com a execução dos algoritmos dos métodos de *Lucidi-Sciandrone-Tseng* e *Lewis-Torczon*. A figura (5.2 a) mostra a seqüência de pontos gerada pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng e a figura (5.2 b) mostra a seqüência de pontos gerada pelo método de Lewis-Torczon. Para o cálculo da razão $\Delta f/f_{rep}$, usamos como f_{rep} a solução gerada pelo *Mathematica* [12].

Podemos observar que na solução dos problemas (5.1) e (5.2), os dois métodos encontram a solução com uma presisão muito boa. No entanto, se temos em conta o número de iterações feitas pelos métodos, podemos ver que o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng fez aproximadamente um 30% das iterações feitas pelo método de Lewis-Torczon. Agora tendo em conta o número de avaliações da função objetivo f feitas pelos métodos, na solução do problema (5.1), o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng fez aproximadamente um 69% das avaliações feitas pelo método de Lewis-Torczon. Em quanto que, na solução do problema (5.2), o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng fez aproximadamente um 60.86% das avaliações feitas pelo método de Lewis-Torczon.



(a)



(b)

Figura 5.2. Solução gráfica do problema (5.2) com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon.

5.3 Resultados de alguns problemas da coleção Hock-Schittkowski

Apresentamos a seguir três tabelas com resultados obtidos na solução de alguns problemas tirados da coleção Hock-Schittkowski [2, 9], com as implementações feitas para os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon. Além disso, em uma quarta tabela, Tabela (5.4) apresentamos os resultados obtidos por Marco Sciandrone, Stefano Lucidi e Paul Tseng com a implementação do método que eles fizeram, os quais estão reportados em [5]. A tabela (5.2) apresenta resultados obtidos para problemas com restrições de desigualdade e/ou de caixa, os quais também foram testados por Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng [5]. A tabela (5.5) apresenta resultados obtidos para problemas do mesmo formato que os apresentados na tabela (5.2), os quais não foram testados por Marco Sciandrone, Stefano Lucidi e Paul Tseng e pelo tanto não foram reportados em [5]. E a tabela (5.7) apresenta resultados para problemas com restrições de desigualdade e/ou de caixa e/ou de igualdade, os quais não foram testados por Marco Sciandrone, Stefano Lucidi e Paul Tseng e pelo tanto não são reportados em [5]. Os problemas foram testados tendo em conta o ponto inicial x_0 proposto em [2, 9]. No entanto, para alguns problemas (problemas: HS021, HS038, HS052, HS105, HS262, HS265, HS340 e HS392), o ponto inicial x_0 proposto em [2, 9] não é factível, pelo qual iniciamos o teste para o problema correspondente com um ponto factível proposto por nós. Estes pontos iniciais são os seguintes:

- ✓ HS021: $x_0 = (2, -1)^t$;
- ✓ HS038: $x_0 = (1, 1, 1, 1)^t$;
- ✓ HS052: $x_0 = (-6, 2, 2, 2, 2)^t$;
- ✓ HS105: $x_0 = (0.1, 0.2, 100, 130, 175, 11.2, 13.2, 15.8)^t$;
- ✓ HS262: $x_0 = (1, 2, 3, 0)^t$;
- ✓ HS265: $x_0 = (3/4, 1/4, 5/8, 3/8)^t$;
- ✓ HS340: $x_0 = (0.1, 0.1, 0.1)^t$;
- ✓ HS392: $x_0 = (100, 126.3, 520, 95.9, 199, 400, 34.2, 217, 500, 54.6, 217.1, 630, 49.8, 200.1, 600, 112.4, 126.3, 520.4, 83.5, 199.6, 399.7, 34.2, 248.6, 500, 54.6, 185.5, 630, 49.8, 200.1, 600)^t$.

De acordo com os resultados obtidos com as implementações dos métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon na solução dos problemas reportados na Tabela (5.2), podemos afirmar que os resultados que obtivemos com as implementações feitas resolvem a maioria dos problemas com uma precisão muito boa (erro relativo pequeno). Só, a solução do problema HS044 com o método de Lewis-Torczon não é considerada como boa, pois o erro relativo reportado é muito grande. Também podemos afirmar o mesmo para o problema HS392, no entanto, comparando o resultado reportado por Marco Sciandrone, Stefano Lucidi e Paul Tseng em [5] com os resultados que nós obtivemos com as implementações feitas, o erro relativo com as três implementações são os mesmos, o qual faz-nos acreditar que os resultados que obtivemos com os métodos são bom em geral. Em relação ao número de iterações feitas e ao número de vezes que foi avaliada a função f com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon, podemos dizer que o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng foi muito melhor comparado com o método de Lewis-Torczon. A Tabela (5.3) reporta o porcentagem de iterações e avaliações da função objetivo f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng com respeito ao método de Lewis-Torczon. Por exemplo, para o problema HS331, o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng fez um 17.85% das iterações feitas pelo método de Lewis-Torczon e um 25.80% das avaliações da função f feitas pelo método de Lewis-Torczon. De acordo com os dados da Tabela (5.3), podemos considerar que o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng é muito melhor que o método de Lewis-Torczon.

A comparação dos resultados obtidos com a implementação que fizemos do método de Lucidi-Sciandrone-Tseng, Tabela (5.1), com os resultados reportados por Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng, Tabela (5.4), pode ser um pouco perigosa, porque existem diferentes fatores no momento de fazer as implementações que podem alterar os resultados obtidos. Para mencionar alguns destes fatores, podemos mencionar entre outros os seguintes:

- ✓ Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng fizeram a implementação do método proposto em Fortran, enquanto que nós fizemos as implementações do método de Lucidi-Sciandrone-Tseng em Matlab 6.5.
- ✓ No momento de fazer comparações de quantidades, por exemplo, comparar com zero, usamos certas tolerâncias, sem conhecer a forma como eles fizeram o mesmo.
- ✓ No momento de calcular o maior passo que pode ser dado em uma di-

Características					Lu-Sc-Ts			Le-To		
<i>Nome</i>	<i>n</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>It</i>	<i>NF</i>	$\Delta f/f_{rep}$	<i>It</i>	<i>NF</i>	$\Delta f/f_{rep}$
HS331	2	1	3	0	10	75	10^{-5}	56	217	10^{-5}
HS021	2	1	4	0	16	119	10^{-11}	22	85	0
HS024	2	3	2	0	13	57	10^{-16}	64	147	10^{-6}
HS232	2	3	2	0	13	57	10^{-16}	68	157	10^{-6}
HS224	2	4	4	0	21	160	10^{-10}	48	143	10^{-16}
HS340	3	1	1	0	12	143	10^{-7}	64	297	10^{-8}
HS036	3	1	6	0	14	86	0	56	171	10^{-8}
HS251	3	1	6	0	17	237	10^{-10}	44	195	10^{-16}
HS037	3	2	6	0	17	237	10^{-10}	44	195	10^{-16}
HS250	3	2	6	0	15	96	0	56	171	10^{-8}
HS354	4	1	4	0	21	436	10^{-5}	258	1629	10^{-7}
HS076	4	3	4	0	14	157	10^{-7}	56	281	10^{-10}
HS044	4	6	4	0	9	64	0	30	122	10^{-1}
HS105	8	1	16	0	10	73	10^{-5}	140	802	10^{-6}
HS118	15	29	30	0	30	436	10^{-5}	358	2742	10^{-8}
HS392	30	45	30	0	7	97	10^{-3}	582	11305	10^{-3}

Tabela 5.2. Problemas com restrições de desigualdade e/ou de caixa.

reção particular, usamos algumas constantes para determinados casos, e não conhecemos como eles obtiveram este tamanho de passo.

No entanto, podemos dizer que, nos problemas HS105 e HS392 obtivemos melhores resultados com a implementação que fizemos do método de Lucidi-Sciandrone-Tseng comparados com os resultados obtidos por Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng. No problema HS105 o erro relativo foi menor que o obtido por eles, o que implica um melhor valor para a função objetivo. Além disso, o resultado foi obtido com somente 73 avaliações da função f em quanto que Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng, obtiveram o resultado com 3548 avaliações da função f . No problema HS392 obtivemos o mesmo erro relativo com 97 avaliações da função f , em quanto que Stefano Lucidi, Marco Sciandrone e Paul Tseng, obtiveram o resultado com 200 avaliações da função f .

Na Tabela (5.5) apresentamos os resultados obtidos na solução dos problemas HS005, HS009, HS035 e HS038, os quais são problemas com restrições de desigualdade e/ou caixa. De acordo com os resultados, podemos dizer que os dois métodos implementados resolvem os problemas de uma forma muito eficiente. Só o problema HS038 não apresenta bons resultados com o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng. Este problema foi resolvido com o

Problema	Lu-Sc-Ts	
	%It	%NF
HS331	17,85	25,80
HS021	72,72	25,88
HS024	20,31	43,53
HS232	19,11	43,31
HS224	43,75	33,56
HS340	18,75	21,54
HS036	25	32,74
HS251	38,63	22,56
HS037	38,63	22,56
HS250	26,78	32,74
HS354	8,13	15,83
HS076	25	19,92
HS044	30	24,59
HS105	7,14	17,45
HS118	8,37	13,05
HS392	1,20	5,14
Promedio	25,08	25,01

Tabela 5.3. Porcentagem das iterações e das avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng respeito do método de Lewis-Torczon.

método de Lewis-Torczon com um número elevado de iterações, 4102 e um número elevado de avaliações da função f , 27241. Na tabela (5.6) reportamos o porcentagem de iterações e avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng com respeito ao método de Lewis-Torczon.

O problema HS005, merece também um comentário adicional, pois a função objetivo f não é convexa, e na região factível ela tem dois mínimos locais. A importância do ponto inicial queda manifesta neste problema, já que dependendo deste, a solução encontrada pelos métodos pode ser diferente. A figura (5.3 *a*) mostra os pontos gerados com o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng e a figura (5.3 *b*) mostra os pontos gerados com o método de Lewis-Torczon, iniciando as iterações no ponto inicial $x_0 = (-1, 2.5)$, os dois métodos convergem para o ponto de mínimo $x^* = (2.5944, 1.5944)$; enquanto que, se o ponto inicial é $x_0 = (1.5, 0.5)$, os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon convergem para o ponto de mínimo $x^* = (-0.5472, -1.5472)$. As gráficas (5.4 *a*) e (5.4 *b*) mostram os pontos gerados com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon respectivamente.

Características					Reportado em [5]	
<i>Nome</i>	<i>n</i>	<i>Des.</i>	<i>Cai.</i>	<i>Igu.</i>	<i>NF</i>	$\Delta f/f_{rep}$
HS331	2	1	3	0	104	10^{-4}
HS021	2	1	4	0	33	0
HS024	2	3	2	0	24	0
HS232	2	3	2	0	29	0
HS224	2	4	4	0	100	0
HS340	3	1	1	0	108	0
HS036	3	1	6	0	34	0
HS251	3	1	6	0	153	0
HS037	3	2	6	0	153	0
HS250	3	2	6	0	34	0
HS354	4	1	4	0	236	0
HS076	4	3	4	0	153	0
HS044	4	6	4	0	32	0
HS105	8	1	16	0	3548	-10^{-3}
HS118	15	29	30	0	251	10^{-5}
HS392	30	45	30	0	200	10^{-3}

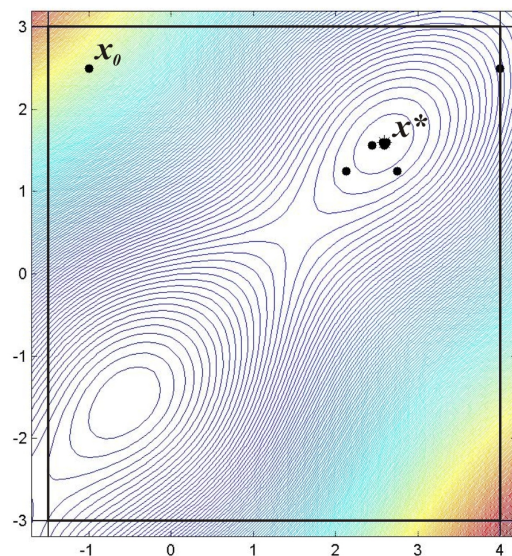
Tabela 5.4. Resultados reportados em [5].

Características					Lu-Sc-Ts			Le-To		
<i>Nome</i>	<i>n</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>It</i>	<i>NF</i>	$\Delta f/f_{rep}$	<i>It</i>	<i>NF</i>	$\Delta f/f_{rep}$
HS005	2	0	2	0	15	144	10^{-7}	70	273	10^{-7}
HS009	2	0	2	0	13	53	10^{-13}	32	88	10^{-15}
HS035	3	1	3	0	12	133	10^{-8}	84	368	10^{-13}
HS038	4	2	4	0	359	992	10^{-2}	4102	27241	10^{-7}

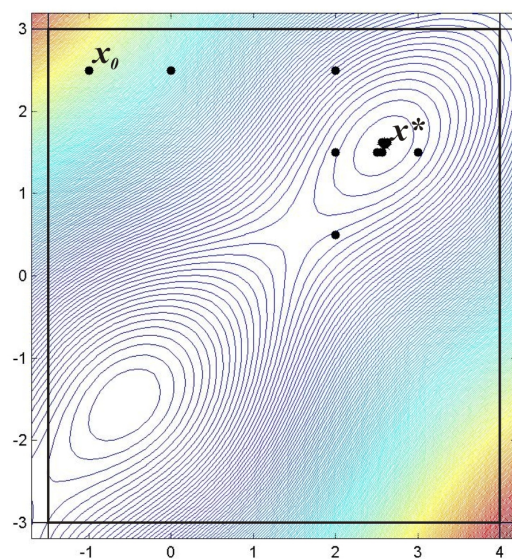
Tabela 5.5. Outros problemas com restrições de desigualdade.

		Lu-Sc-Ts	
<i>Problema</i>		<i>%It</i>	<i>%NF</i>
HS005		21,42	52,74
HS009		40,62	60,22
HS035		14,28	36,14
HS038		8,75	3,64
<i>Promedio</i>		21,27	38,18

Tabela 5.6. Porcentagem das iterações e das avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng respeito do método de Lewis-Torczon.



(a)



(b)

Figura 5.3. Solução do problema HS005 com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon, iniciando no ponto $x_0 = (-1, 2.5)$.

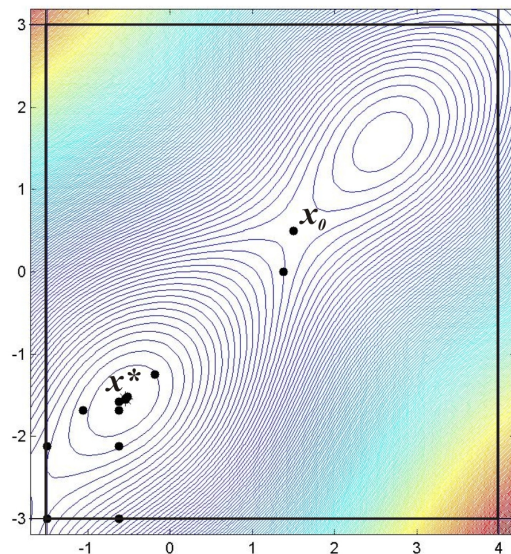
Características					Lu-Sc-Ts			Le-To		
<i>Nome</i>	<i>n</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>It</i>	<i>NF</i>	$\Delta f/f_{rep}$	<i>It</i>	<i>NF</i>	$\Delta f/f_{rep}$
HS347	3	0	6	1	9	25	10^{-6}	68	150	10^{-6}
HS262	4	3	4	1	10	66	10^{-16}	92	256	10^{-7}
HS265	4	0	4	2	7	24	10^{-7}	22	61	10^{-3}
HS050	5	0	0	3	66	450	10^{-9}	84	349	10^{-12}
HS051	5	0	0	3	13	147	10^{-8}	66	269	10^{-13}
HS052	5	0	0	3	18	201	10^{-6}	74	292	10^{-6}
HS269	5	0	0	3	13	155	10^{-7}	66	275	10^{-7}

Tabela 5.7. Problemas com restrições de desigualdade e/ou de caixa e/ou de igualdade.

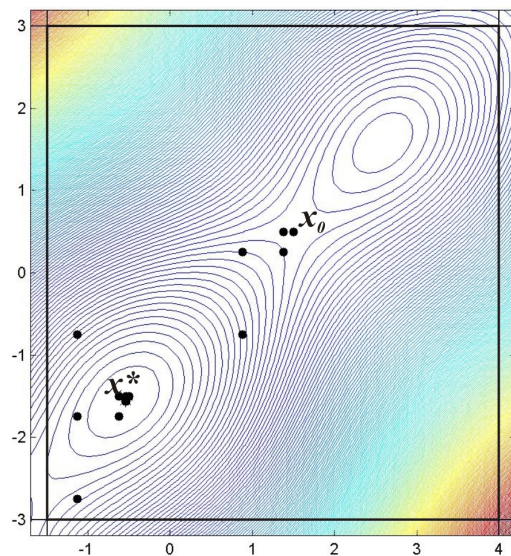
Na tabela (5.7) apresentamos os resultados dos testes feitos para alguns problemas com restrições de igualdade e/ou de desigualdade e/ou de caixa. Todos os problemas convergem com os métodos implementados para a solução fornecida em [2, 9], com excelentes resultados. Em quanto ao número de iterações e ao número de avaliações da função f feitas pelos métodos, a Tabela (5.8) apresenta o porcentagem de iterações e avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng com respeito ao método de Lewis-Torczon. De esta, podemos concluir que o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng é muito mais eficiente que o método de Lewis-Torczon.

<i>Problema</i>	Lu-Sc-Ts	
	<i>%It</i>	<i>%NF</i>
HS347	13,23	45,33
HS262	10,86	35,93
HS265	31,81	36,06
HS050	78,57	24,06
HS051	19,69	24,53
HS052	24,32	25,34
HS269	19,69	24
<i>Promedio</i>	28,31	30,75

Tabela 5.8. Porcentagem das iterações e das avaliações da função f feitas pelo método de Lucidi-Sciandrone-Tseng respeito do método de Lewis-Torczon.



(a)



(b)

Figura 5.4. Solução do problema HS005 com os métodos de Lucidi-Sciandrone-Tseng e Lewis-Torczon, iniciando no ponto $x_0 = (1.5, 0.5)$.

CONCLUSÕES

1. No presente trabalho estudamos dois métodos que não usam o gradiente da função f para solucionar o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I \\ & h_\ell(x) = 0, \quad \forall \ell \in E, \end{array}$$

onde $I = \{1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{N}$, $E = \{m+1, \dots, m+p\} \subseteq \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Além disso, assumimos que as funções $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são lineares para todo $i \in I$ e todo $\ell \in E$.

Em particular, para o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng foi possível adaptar o primeiro método apresentado em [5] sob a condição 1 de tal forma que o novo método soluciona o problema (1). A implementação dos métodos estudados não apresentam maiores dificuldades e os resultados obtidos para os problemas testados são considerados bons, em geral.

2. De acordo com a definição (1.0.2), podemos classificar os métodos de Lewis-Torczon e de Lucidi-Sciandrone-Tseng como métodos Derivative-Free, já que nenhum deles usa o gradiente da função f no desenvolvimento dos algoritmos. O método de Lewis-Torczon pode ser classificado como método de busca direta, já que ele só usa comparações de valores da função f como estratégia para definir o próximo ponto factível com melhor valor. Não consideramos o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng como de busca direta, já que ele usa uma estratégia

de decréscimo suficiente para determinar o próximo ponto factível com melhora valor da função f .

3. Após fazer muitos testes com as implementações feitas, em especial com a implementação do método de Lucidi-Sciandrone-Tseng, podemos concluir que a escolha dos parâmetros envolvidos no método é muito importante. Parâmetros "mal escolhidos" podem ocasionar erros na solução de um problema e em consequência desconfiaríamos do bom desempenho dos métodos. A partir dos resultados que obtivemos, podemos dizer que tomar $\theta_\alpha = 0.5$, $\theta_\epsilon = 0.5$ e $\alpha_0 = 1$ (passo inicial) é uma boa opção para obter bons resultados com o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng. E tomar $\Delta = 1$ (tamanho do passo inicial) e $\epsilon = 0.5$ é uma boa escolha no método de Lewis-Torczon.
4. Quanto ao desempenho dos métodos estudados, tendo em conta os testes realizados, podemos concluir que o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng apresenta vantagem em relação ao método de Lewis-Torczon se nos referimos ao número de iterações e ao número de avaliações da função f . De acordo com as Tabelas (5.3), (5.6) e (5.8), o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng faz aproximadamente um 25.31% das iterações feitas pelo método de Lewis-Torczon e um 26.30% das avaliações da função f feitas pelo método de Lewis-Torczon na solução de um problema.
5. Consideramos que o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng faz menos iterações e menos avaliações da função f comparado com o método de Lewis-Torczon porque o método de Lucidi-Sciandrone-Tseng procura melhores valores para a função objetivo f explorando todas e cada uma das direções no conjunto D_k , enquanto o método de Lewis-Torczon, se ele encontra um valor melhor para a função objetivo f ao longo de alguma direção no conjunto P_k , ele termina a iteração correspondente.

REFERÊNCIAS

- [1] Bertsekas, D. P., 1995. *"Nonlinear programming"*, Athena Scientific, second edition.
- [2] Hock, W. e Schittkowski, K., 1981. *"Test examples for nonlinear programming codes"*, Springer, Berlin.
- [3] Hooke, R. e Jeeves, T. A., 1961. *"Direct search solution of numerical and statistical problems"*, Journal of the Association for Computing Machinery 8, pp.212-229.
- [4] Lewis, R. M. e Torczon, V., 2000. *"Pattern search methods for linearly constrained minimization"*, SIAM Journal of optimization, vol. 10, No. 3, pp. 917-941.
- [5] Lucidi, S., Siandrone, M., e Tseng, P., 2002. *"Objective-derivative-free methods for constrained optimization"*, Mathematical Programming, pp. 37-59.
- [6] May, J. H., 1974. *"Linearly constrained nonlinear programming: a solution method that does not require analytic derivatives"*, Ph.D. Thesis, Yale University.
- [7] Nocedal, J. e Wright, S. J., 1995. *"Numerical Optimization"*, Springer.
- [8] Powell, M. J. D. 1998. *"Direct search algorithms for optimization calculations"*, Acta Numerica 7, pp. 287-336.

- [9] Schittkowski, K. 1987. *"More test examples for nonlinear programming codes"*, Springer, Berlin.
- [10] Thomas, F., E., David M. H. e Leon S., L., 2001. *"Optimization of chemical processes"*. McGraw Hill, second edition, New York.
- [11] Torczon, V., 1997. *"On the convergence of pattern search algorithms"*. SIAM Journal of Optimization, Vol 7, No. 1, pp.1-25.
- [12] Wolfram, S. *"The mathematica book"*. Fifth edition.