

**O Teorema da Função Implícita em um contexto aplicado e
algumas conexões no cálculo de áreas de regiões planas**

Epitácio Pedro da Silva Júnior

Orientadora: Prof^a. Dr^a. **SANDRA AUGUSTA SANTOS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

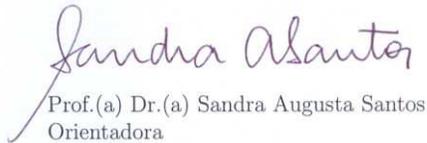
C A M P I N A S

Estado de São Paulo - Brasil

abril de 2008

O Teorema da Função Implícita em um contexto
aplicado e algumas conexões no cálculo de áreas de
regiões planas

Campinas, 16 de Abril de 2008



Prof.(a) Dr.(a) Sandra Augusta Santos
Orientadora

Banca Examinadora:

Prof.(a) Dr.(a) Sandra Augusta Santos (IMECC/UNICAMP)

Prof.(a) Dr.(a) Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC/UNICAMP)

Prof.(a) Dr.(a) Yuriko Yamamoto Baldin (DM/UFSCar)

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação
Científica, UNICAMP, como requisito prin-
cipal para obtenção do título de MESTRE
em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8a 162/2005

Silva Júnior, Eptácio Pedro da
Si38t O teorema da função implícita em um contexto aplicado e algumas conexões no cálculo de áreas de regiões planas / Eptácio Pedro da Silva Júnior – Campinas, [S.P. : s.n.], 2008.

Orientadora : Sandra Augusta Santos
Trabalho final (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teorema de função implícita. 2. Green, Teorema de. 3. Sistema de Posicionamento Global. 4. Cálculo de áreas. 5. Regiões Planas. I. Santos, Sandra Augusta. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(cqc/imecc)

Título em inglês: The implicit function theorem in an applied context and some connections in the calculus of the area of plane regions.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Implicit function theorem. 2. Green's theorem. 3. GPS (Global Positioning System). 4. Areas Calculation. 5. Planar regions.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Sandra Augusta Santos (IMECC/UNICAMP)
Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC/UNICAMP)
Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin (DM/UFSCar)

Data da defesa: 16/04/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de abril de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). SANDRA AUGUSTA SANTOS



Prof. (a). Dr (a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN



Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a meu filho, à minha filha, à minha esposa, aos meus pais, irmãos e irmãs.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A Deus pela minha vida e pela oportunidade de realizar este trabalho.

À minha esposa Rosimeire, pela compreensão e ajuda nos momentos difíceis.

Ao meu filho Neto e minha filhinha Maria Clara por se privarem da minha companhia.

Aos meus pais, Epitácio e Adiles, aos irmãos e irmãs por acreditarem sempre em mim.

Aos meus colegas de curso pelas ajudas oportunas.

À Prof^a. Dr^a. Sandra Augusta Santos por sua atenção e orientação na elaboração do trabalho.

Aos meus amigos pela confiança em meu trabalho.

À coordenação deste mestrado pela iniciativa e pela dedicação.

À parceria UNICAMP/UNEMAT pela realização do curso, muito útil para a região.

Ao LIPE, laboratório da UNEMAT-Barra do Bugres, pela disponibilidade dos softwares.

À SEDUC-MT pela liberação do meu trabalho, com ônus.

O Teorema da Função Implícita em um contexto aplicado e algumas conexões no cálculo de áreas de regiões planas

Autor: EPITÁCIO PEDRO DA SILVA JÚNIOR

Orientadora: Prof^a. Dr^a. SANDRA AUGUSTA SANTOS

RESUMO

Este trabalho tem dois objetivos principais. O primeiro é apresentar um contexto aplicado para o uso do Teorema da Função Implícita. Este resultado permite analisar a influência da precisão dos relógios envolvidos no funcionamento do GPS (*Global Positioning System*), cujo receptor é usado para determinar as coordenadas de um ponto da Terra. O segundo objetivo é estabelecer algumas conexões entre conceitos da Geometria Analítica do Ensino Médio com a do Ensino Superior, bem como com o Cálculo de Várias Variáveis, aparentemente desconectados para o aluno do Ensino Superior. Para tanto, a idéia foi partir do cálculo da área de regiões simples, como triângulos e polígonos, e chegar à computação de áreas de regiões mais sofisticadas, por meio do Teorema de Green. Este resultado permite justificar o funcionamento do aparelho mecânico denominado planímetro.

Palavras-chave: Teorema da Função Implícita; GPS; cálculo de áreas; regiões planas; teorema de Green.

The Implicit Function Theorem in an applied context and some connections in the calculus of the area of plane regions

Author: EPITÁCIO PEDRO DA SILVA JÚNIOR

Adviser: Prof^a. Dr^a. SANDRA AUGUSTA SANTOS

ABSTRACT

The objective of this work is twofold. First, it presents an applied context for using the Implicit Function Theorem. This result allows to analyze the influence of the accuracy of the clocks involved in the working of the GPS (*Global Positioning System*), the receiver of which is a device used to locate the position of a point on the surface of the earth. Second, it points some connections among concepts of Analytic Geometry, together with Calculus of Several Variables, apparently not linked for the university student. To achieve such goal, the idea was to start with the calculus of the area of simple regions, like triangles and polygons, and reach the computation of more sophisticated areas by using Green's theorem. This result allows to justify the working of the mechanical device called planimeter.

Keywords: Implicit Function Theorem; GPS; calculus of areas; plane regions; Green's theorem.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE FIGURAS	ix
Introdução	1
1 A Matemática do Sistema de Posicionamento Global	3
1.1 Superfície Esférica em Coordenadas Geográficas	4
1.2 Sistema Posicional Global - GPS	6
1.3 Modelo bidimensional	10
1.4 Determinando uma posição na Terra	17
1.5 O Teorema da Função Implícita	29
2 Cálculo de áreas de regiões planas: estabelecendo conexões	37
2.1 Área de um triângulo	38
2.1.1 Distância da origem $O(0,0)$ a uma reta	38
2.1.2 Distância de um ponto $P_0(x_0, y_0)$ a uma reta	39
2.1.3 Cálculo da área de um triângulo	40

2.2	Área de um paralelogramo	43
2.3	Volume de um paralelepípedo	48
2.4	Área de um polígono	56
2.5	Teorema de Green	57
2.6	Cálculo de área via integral de linha no contorno	64
2.7	Uma breve descrição do Planímetro	68
3	Considerações Finais	70
	Referências Bibliográficas	74

LISTA DE FIGURAS

	Página
1.1 Ilustração da superfície da Terra com seus elementos.	4
1.2 Ilustração da relação entre as coordenadas cartesianas x , y e z e geográficas, latitude ϕ , longitude α e altitude.	6
1.3 Ilustração de uma estação de gerenciamento. Extraída de [1, p.35].	7
1.4 Satélites orbitando sobre a Terra. Extraída de [1, p.34].	8
1.5 Ilustração para o cálculo da posição de um ponto situado no centro da região de cascalho, dentro de um círculo pavimentado. (Adaptada de [19, p.262]).	10
1.6 Região circular contornada pela circunferência C centrada em O , com o ponto (x, y) indicando a posição determinada no problema. (Adaptada de [19, p.263]).	12
1.7 Região circular contornada pela circunferência C centrada em O , sendo P_1 , P_2 e P_3 os pontos de partida dos mensageiros. (Adaptada de [19, p.263]).	13
1.8 Erro de 3s.	14
1.9 Erro de 4s	14
1.10 Erro de 5s	15
1.11 Erro de 6s	15

1.12	Ilustração da inclinação do satélite S_4 em relação à vertical do ponto P	24
1.13	Ilustração auxiliar para prova do Teorema da Função Implícita.	30
2.1	A distância da origem à reta r é dada pela distância entre O e P , onde $P \in t$ e $t \perp r$. . .	39
2.2	Ilustração para o cálculo da distância do ponto P_0 à reta r , sendo P_0 distinto da origem. .	40
2.3	Ilustração para o cálculo da área do triângulo ABC	41
2.4	Ilustração para o produto vetorial: os vetores \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} \times \vec{v}$ formam, nesta ordem, um sistema orientado positivamente.	44
2.5	Ilustração para a decomposição de triângulo (ou paralelogramo) em suas projeções. . .	47
2.6	Ilustração para o cálculo do ângulo entre dois vetores.	48
2.7	Os vetores u , v e w são ditos um conjunto destro	50
2.8	Os vetores u , v e w são ditos um conjunto sinistro	50
2.9	Paralelepípedo de altura igual a 1 (um), com face superior contida no plano β e inferior no plano $xy \equiv \alpha$	52
2.10	Paralelepípedo degenerado, gerado pelos vetores LDs \vec{u} , \vec{v} e \vec{w}	53
2.11	Um mapa conceitual que relaciona as diversas idéias sugeridas pela Figura 2.10, a qual ilustra a relação (2.2).	55
2.12	Ilustração para o cálculo da área do polígono de vértices P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5	56
2.13	Ilustração de uma região retangular R com fronteira C dividida em C_1, C_2, C_3 e C_4 . . .	58
2.14	Uma região curva R no plano- xy correspondente a uma região retangular T no plano- st , adotado o sentido anti-horário em seus contornos.	60
2.15	Ilustração das curvas C e C_1 e da região R compreendida entre elas.	63
2.16	Ilustração para o cálculo da área do triângulo ABC usando o Teorema de Green . . .	65
2.17	Imagem de um planímetro de Amsler, extraída de [16].	68
2.18	A região contornada por C é percorrida por B enquanto A se desloca ao longo do segmento fixo e a rodinha R gira, registrando as voltas dadas, adaptada de [4]. . . .	69

Introdução

Este trabalho está associado aos aspectos matemáticos subjacentes ao funcionamento de dois aparelhos utilizados em Ciências da Terra e áreas afins: o GPS (do inglês, *Global Positioning System*) e o planímetro. Estes aparelhos permitem ilustrar resultados sofisticados de Matemática, mais precisamente do Cálculo de Funções de Várias Variáveis, a saber, o Teorema da Função Implícita e o Teorema de Green, respectivamente.

Para a compreensão de como o contexto aplicado do GPS oferece uma oportunidade de aplicação para o Teorema da Função Implícita, bastante escassa nos livros-texto de Cálculo, apresentaremos, de forma resumida, o princípio de funcionamento desse aparelho. Tomamos como ponto de partida uma simplificação bidimensional para viabilizar a visualização e preparar a extensão para o espaço tridimensional em que o aparelho trabalha. A conexão efetiva com o Teorema da Função Implícita aparece associada a imprecisões na medição do tempo e o necessário ajuste dos relógios envolvidos. Para completar o texto, incluímos duas versões do Teorema da Função Implícita, de \mathfrak{R}^{n+1} em \mathfrak{R} , com a respectiva demonstração, e de \mathfrak{R}^{n+m} em \mathfrak{R}^n , com exemplos.

Com relação ao funcionamento do planímetro, como a sua conexão com o Teorema de Green já foi explorada em outros trabalhos (cf. [5], [16] e [18]), optamos por um desenvolvimento um pouco diferente. Nossa idéia foi buscar um resgate para o cálculo de áreas de regiões planas simples, como triângulos e polígonos, usando desde as ferramentas da

Geometria Analítica do Ensino Médio, até o Teorema de Green, o que permite interrelacionar diversos conceitos matemáticos aparentemente desconectados para o estudante do Ensino Superior.

As figuras que ilustram o texto foram preparadas com o auxílio dos programas Wimplot, Word e Cabri Geometry II Plus.

Este trabalho está distribuído em dois capítulos. O capítulo *A Matemática do Sistema de Posicionamento Global* foi baseado inicialmente no texto de ALVES (2004)[1] que trata da geometria da Terra e da matemática do GPS. Traz contribuições de THOMPSON (1998)[19] para um modelo bidimensional associado ao funcionamento do GPS e de NORD et al (1998)[15], para introduzir a necessidade do *Teorema da Função Implícita* na análise da precisão da medição do tempo e sua repercussão nas medidas registradas pelo receptor.

O capítulo *Cálculo de áreas de regiões planas: estabelecendo conexões* se concentra no cálculo de áreas de regiões planas, utilizando ferramentas que vão desde a Geometria Analítica do Ensino Médio até o Teorema de Green, passando pela Geometria Analítica Vetorial. Finaliza com uma breve descrição do funcionamento do Planímetro, instrumento usado para medir áreas de regiões planas, cujo princípio de atuação pode ser justificado pelo Teorema de Green.

Capítulo 1

A Matemática do Sistema de Posicionamento Global

A fundamentação matemática para o entendimento de modelos de sistema de navegação por satélite, consiste basicamente de um estudo sobre as posições relativas entre duas ou mais esferas e das relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas, conforme aponta [1]. No entanto, para se analisar a qualidade dos resultados obtidos por um receptor GPS, que são computados com base em localizações espaciais e distâncias bem como em variações de tempo com ordens de magnitude muito diferentes, o Teorema da Função Implícita consiste numa ferramenta bastante útil.

Este capítulo se concentra na apresentação de todas essas idéias e foi preparado com base em [1], [15] e [19].

1.1 Superfície Esférica em Coordenadas Geográficas

As coordenadas geográficas são usadas para a localização de pontos na superfície da Terra e são denominadas *latitude* e *longitude*. Para identificá-las, precisamos conhecer os elementos da superfície da Terra.

A forma da Terra é arredondada e sua superfície se aproxima de uma esfera de centro O e raio r . O eixo polar é uma reta que passa por O e pelos polos norte, e sul. A intersecção do *plano do equador*¹ com a superfície esférica da Terra determina uma circunferência de raio igual ao raio da Terra, que é chamada de *linha do equador*. A intersecção de qualquer outro plano, perpendicular ao eixo polar, com a superfície esférica da Terra determina uma circunferência de raio menor que o raio terrestre, chamada de *paralelo*.

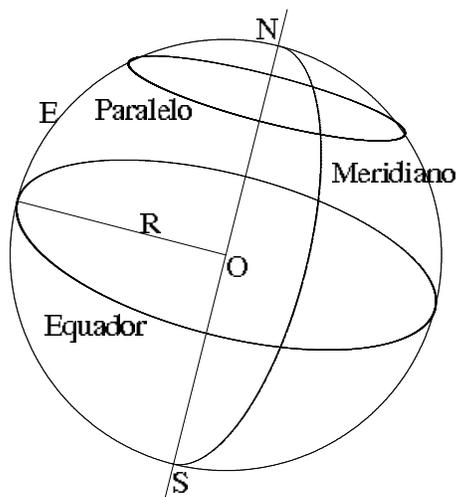


Figura 1.1: Ilustração da superfície da Terra com seus elementos.

Os *meridianos* são semicircunferências que passam pelos pólos Norte e Sul, ou seja,

¹plano do equador é um plano perpendicular ao eixo polar que passa pelo centro da Terra, ponto O .

são arcos contidos em circunferências máximas que passam pelos pólos, e estão contidos em planos perpendiculares ao plano do equador. O mais notável dos meridianos é o de *Greenwich*, localidade próxima a Londres, onde está instalado um observatório astronômico. A Figura 1.1 ilustra esses elementos.

A *latitude* de um ponto P situado no globo terrestre é a medida do arco de meridiano que passa por P , com extremos em P e na linha do equador. Ela é expressa em graus, minutos e segundos e varia de 0° a 90° norte (N) ou sul (S).

A *longitude* de um ponto P situado no globo terrestre é a medida do arco de paralelo que passa por P , com extremos em P e no meridiano de Greenwich. Ela é expressa em graus, minutos e segundos e varia de 0° a 180° leste (E) ou de 0° a 180° oeste (W).

Para escrever um ponto em coordenadas cartesianas ortogonais, vamos considerar o sistema com origem no ponto O da Figura 1.2 e com os eixos coordenados positivos x , y e z cortando a intersecção do meridiano de Greenwich com o equador, a intersecção do meridiano de 90°E com o equador e o pólo norte N, respectivamente. A diferença entre $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio R da Terra é a *altitude* de $P = (x, y, z)$. No triângulo retângulo ΔOAP da Figura 1.2, temos

$$\sin(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.1)$$

Se $z \geq 0$, $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ e neste caso, dizemos que a latitude de P é $\phi^\circ\text{N}$. Se $z < 0$, $-90^\circ \leq \phi < 0^\circ$ e dizemos que a latitude de P é $(-\phi)^\circ\text{S}$. Por outro lado, no triângulo retângulo ΔOBA da Figura 1.2, temos

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.2)$$

Se $y \geq 0$, temos que α varia entre 0° e 180° e a longitude do ponto P é $\alpha^\circ\text{E}$. Se $y < 0$, α varia entre -180° e 0° e a longitude do ponto P é $(-\alpha)^\circ\text{W}$.

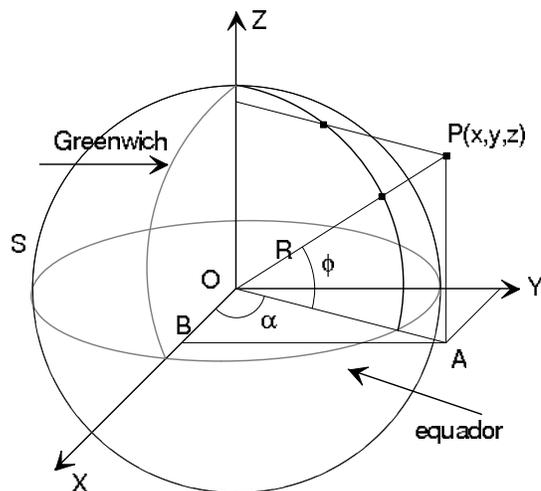


Figura 1.2: Ilustração da relação entre as coordenadas cartesianas x , y e z e geográficas, latitude ϕ , longitude α e altitude.

1.2 Sistema Posicional Global - GPS

O Sistema Posicional Global (GPS - *Global Positioning System*) é uma constelação de 24 satélites, orbitando em torno da Terra, a uma altura de 20200 km acima do nível do mar, controlados por seis estações terrestres de gerenciamento, Figura 1.3, que permitem determinar qualquer posição sobre a Terra com uma notável precisão.

Este projeto foi iniciado em 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos, oficialmente chamado de NAVSTAR (*Navigation Satellite Timing and Ranging*), que consiste em três segmentos: um segmento espacial (os satélites que emitem sinais), um segmento de controle (as estações terrestres de rastreamento e monitoramento) e um segmento do usuário (receptor que recebe os sinais emitidos pelos satélites). Tem como objetivos auxiliar a radionavegação com alta precisão nos cálculos de posição; propiciar navegação em tempo real; propiciar alta imunidade a interferências; proporcionar cobertura global 24 horas por dia e obter, de forma rápida as informações coletadas pelos

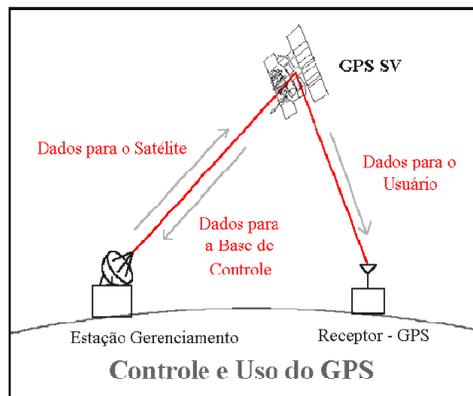


Figura 1.3: Ilustração de uma estação de gerenciamento. Extraída de [1, p.35].

satélites.

Antes de 1995, a navegação por satélite GPS feita com o uso de receptores portáteis de grande precisão era de uso restrito do Departamento de Defesa dos Estados Unidos para fins militares, e os aparelhos com baixa precisão eram destinados para o uso civil. Hoje, os receptores de precisão máxima são utilizados nas mais variadas áreas profissionais, como por exemplo: em todos os tipos de levantamento de áreas, controle de desastre ecológico, monitoramento de vôos e outros.

O segmento espacial é composto por 24 satélites em seis órbitas de 4 satélites, igualmente espaçados, conforme Figura 1.4, completando uma volta em torno da Terra a cada 12 horas. Cada satélite possui um ângulo de visão da Terra de aproximadamente 28° , de modo que todo ponto da superfície da Terra, em qualquer instante, é visualizado por pelo menos quatro satélites.

Os 24 satélites são controlados por seis estações terrestres de gerenciamento, sendo que a estação principal está localizada no Colorado - Estados Unidos - e junto com as outras cinco monitoram o desempenho do sistema, corrigindo as posições dos satélites e



Figura 1.4: Satélites orbitando sobre a Terra. Extraída de [1, p.34].

reprogramando o sistema com o padrão necessário.

Cada satélite do GPS transmite por rádio um sinal padrão, duas frequências, que são recebidas pelo receptor na Terra. Uma delas é usada para determinar a posição do receptor na Terra e a outra, para eventuais correções necessárias nas configurações do satélite. Estas frequências são de 1575.42 MHz e de 1227.60 MHz e são obtidas a partir da frequência fundamental (10.23 MHz) multiplicada por 154 e 120, respectivamente.

O receptor mede a diferença de tempo entre o sinal emitido e o sinal recebido e multiplica esse valor pela velocidade do sinal, que é de aproximadamente 2.99792458×10^8 m/s, determinando assim a distância entre o receptor e o satélite. Cada satélite é programado para emitir o que se chama de *efeméride*, que é sua posição, naquele instante, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas. Conhecendo-se a efeméride (posição do satélite) e a distância entre ele e o receptor conclui-se que o receptor se encontra numa esfera imaginária centrada no satélite de raio igual à distância entre o receptor e o satélite. Assim, usando os sinais de quatro satélites, o receptor determina as coordenadas geográficas (latitude, longitude e altitude) de sua posição na Terra, encontrando o ponto de intersecção entre as quatro esferas. Essas informações estão em [19, p.260-262] e em [11, p.50-52].

A garantia de que o receptor encontra um único ponto de intersecção entre as quatro esferas está no seguinte teorema, extraído de [1, p.30]:

Teorema 1.2.0.1 *Se quatro superfícies esféricas se interceptam e seus centros são não coplanares então esta intersecção consiste de um único ponto.*

Demonstração: Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , respectivamente. Mostraremos que se $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ e C_1, C_2, C_3, C_4 são não coplanares então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$.

Suponhamos $f_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2a_i x - 2b_i y - 2c_i z + d_i = 0$ as equações gerais de S_i , com centro $C_i = (a_i, b_i, c_i)$ onde $i = 1, 2, 3, 4$. Sem perda de generalidade, igualando as equações duas a duas, $f_1 = f_2$, $f_1 = f_3$ e $f_1 = f_4$, e simplificando os termos semelhantes, obtemos equações lineares em x, y e z .

Uma tal equação linear determina um plano que contém a correspondente intersecção. Por exemplo, da igualdade $f_1 = f_2$ obtem-se a equação do plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Assim, considerando os planos que contém $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$ temos que se $P = (x, y, z)$ está em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ então (x, y, z) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} -2(a_1 - a_2)x - 2(b_1 - b_2)y - 2(c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ -2(a_1 - a_3)x - 2(b_1 - b_3)y - 2(c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ -2(a_1 - a_4)x - 2(b_1 - b_4)y - 2(c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

A prova do teorema está terminada se mostrarmos que o sistema (1.3) tem uma única solução pois a existência de dois pontos distintos em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ acarretaria duas soluções distintas para o sistema (1.3).

Escrevendo o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (1.3) temos

$$\begin{vmatrix} -2(a_1 - a_2) & -2(b_1 - b_2) & -2(c_1 - c_2) \\ -2(a_1 - a_3) & -2(b_1 - b_3) & -2(c_1 - c_3) \\ -2(a_1 - a_4) & -2(b_1 - b_4) & -2(c_1 - c_4) \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}.$$

Como C_1, C_2, C_3, C_4 são não coplanares segue que o determinante à direita é não nulo e, portanto (1.3) é um sistema linear com matriz quadrada e não singular tendo assim uma única solução. \square

1.3 Modelo bidimensional

Para facilitar a compreensão sobre o funcionamento do GPS, que busca coordenadas de dimensão três, apresentaremos um modelo simples de dimensão dois, adaptado de [19].

Suponha que você está no centro de uma região plana, quase circular, de raio médio igual a 6 metros. Essa região é toda cascalhada e está dentro de uma região circular, pavimentada, com raio de 30 metros, circundada por uma estrada, conforme Figura 1.5.

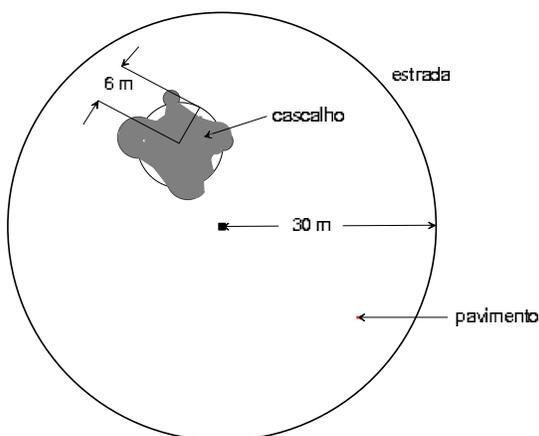


Figura 1.5: Ilustração para o cálculo da posição de um ponto situado no centro da região de cascalho, dentro de um círculo pavimentado. (Adaptada de [19, p.262]).

Para determinar sua posição, os mensageiros saem dos carros que estão na estrada

circular, caminham em linha reta na sua direção e informam a você o instante em que saíram do carro. Você tem um relógio e sabe que todos mensageiros andam com velocidade constante de 1.50 m/s no asfalto, e de 1.20 m/s no cascalho.

Vamos considerar um sistema de coordenadas retangulares com origem no centro do círculo que define a estrada, e que a posição de um ponto na estrada seja descrita pela distância angular a partir do leste, no sentido anti-horário. As distâncias serão medidas em metros e o tempo, em segundos. Para não perder demais a precisão dos cálculos, faremos um truncamento na terceira casa decimal.

Ao meio-dia, um mensageiro sai da posição 45° , e quando o alcança, seu relógio marca 20.2 s depois de meio-dia. Como você não sabe a real distância que ele andou no cascalho, então suponha que ele andou 6 m (raio médio). Como a velocidade é de 1.20 m/s nesse trecho, ele levou 5 s para percorrer o cascalho, restando 15.2 s para percorrer o pavimento. A uma velocidade de 1.50 m/s , a distância percorrida no pavimento foi de 22.80 m . Logo, você conclui que está situado em um ponto de um círculo de raio 28.80 m centrado na posição de partida do mensageiro.

Um segundo mensageiro deixa a estrada na posição -45° às 12:01 e quando chega na sua posição, seu relógio mostra que é 29.5 s depois de sua saída. Considerando que ele andou 6 m no cascalho em 5 s , então a caminhada no pavimento foi de $(29.5 - 5)(s) \times 1.5(m/s) = 36.75 \text{ m}$. Logo você conclui que está situado em um ponto de um círculo de raio 42.75 m centrado na posição de partida do segundo mensageiro.

As coordenadas do ponto de partida do primeiro e do segundo mensageiro são

$$P_1 = (30 \cos 45^\circ, 30 \sin 45^\circ) = (21.213, 21.213) \text{ e}$$

$$P_2 = (30 \cos(-45^\circ), 30 \sin(-45^\circ)) = (21.213, -21.213),$$

respectivamente.

Assim, as coordenadas (x, y) de sua posição satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} (x - 21.213)^2 + (y - 21.213)^2 = 28.80^2 \\ (x - 21.213)^2 + (y + 21.213)^2 = 42.75^2 \end{cases}$$

Os pontos $(-5.992, 11.763)$ e $(48.418, 11.763)$ são soluções do sistema, no entanto só o primeiro está dentro da região circular. Portanto conclui-se que você se encontra a -5.992 m ao oeste e 11.763 m ao norte do centro da região circular, conforme Figura 1.6.

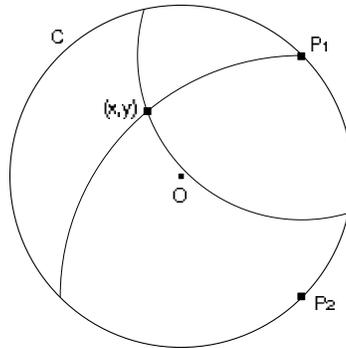


Figura 1.6: Região circular contornada pela circunferência C centrada em O , com o ponto (x, y) indicando a posição determinada no problema. (Adaptada de [19, p.263]).

Para confirmar sua posição você decide utilizar a informação de um terceiro mensageiro que deixa a estrada na posição -90° e chega até você 32.2 s mais tarde. Como ele levou 5 s para percorrer os 6 m de cascalho, a uma taxa de 1.2 m/s , você conclui que ele andou 40.8 m no pavimento a uma taxa de 1.5 m/s durante 27.2 s . Logo, você conclui que está situado em um ponto de um círculo de raio 46.8 m centrado na posição de partida do terceiro mensageiro, descrito pela equação $x^2 + (y + 30)^2 = 46.8^2$. Mas a sua posição $(-5.992, 11.763)$ já encontrada a partir dos dados dos dois primeiros mensageiros não é solução desta equação, veja Figura 1.7. Daí se conclui que sua posição não

corresponde ao ponto $(-5.992, 11.763)$ e que as distâncias percorridas pelos mensageiros não são 22.80 m , 42.75 m e 46.8 m , respectivamente.

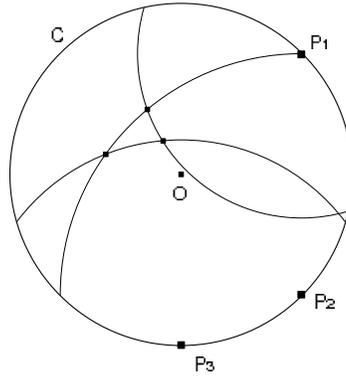


Figura 1.7: Região circular contornada pela circunferência C centrada em O , sendo P_1 , P_2 e P_3 os pontos de partida dos mensageiros. (Adaptada de [19, p.263]).

Como as distâncias percorridas pelos três mensageiros são funções do tempo, pois as velocidades são constantes, você conclui que existe um erro na medição do tempo. Então vamos supor que seu relógio funcione com um erro (ϵ) fixo. Portanto, a distância que cada mensageiro percorre é dada por:

$$d(\Delta t, \epsilon) = 6\text{ m} + (\Delta t - \epsilon - 5)\text{ s} \times 1.5\text{ m/s},$$

onde $d(\Delta t, \epsilon)$ é a distância, em metros (m), que cada mensageiro percorre e Δt é o intervalo de tempo gasto por cada mensageiro, medido por seu relógio, em segundos.

Daí, as distâncias $d_i(\Delta t_i, \epsilon)$, com $1 \leq i \leq 3$ são dadas por:

$$\begin{cases} d_1(\Delta t_1, \epsilon) = 28.80 - 1.5\epsilon \\ d_2(\Delta t_2, \epsilon) = 42.75 - 1.5\epsilon \\ d_3(\Delta t_3, \epsilon) = 46.80 - 1.5\epsilon \end{cases}$$

Assim, temos um sistema de três equações associadas à sua posição e as distâncias percorridas pelos três mensageiros, e três variáveis, x, y e ϵ , dado por:

$$\begin{cases} (x - 21.213)^2 + (y - 21.213)^2 = (28.80 - 1.5\epsilon)^2 \\ (x - 21.213)^2 + (y + 21.213)^2 = (42.75 - 1.5\epsilon)^2 \\ x^2 + (y + 30)^2 = (46.80 - 1.5\epsilon)^2 \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema numericamente você chegará a uma solução aproximada de $(3.275, 9.362, 4.867)$, o que significa que você está a 3.275 m ao leste e 9.362 m ao norte do centro da região circular, e que seu relógio tem um erro de aproximadamente 4.867 s . Como o erro é positivo, significa que esse relógio está adiantado, por isso que você mediu uma distância entre você e seus mensageiros maior que a verdadeira. Acompanhe nas Figuras de 1.8 a 1.11 o comportamento das circunferências obtidas a partir das equações do sistema, atribuindo valores fixos para o erro do relógio e considerando $P = (3.275, 9.362)$ e observe que o ponto P coincide com a interseção das três circunferências quando o erro está próximo de $\epsilon = 5 \text{ s}$, na Figura 1.10.

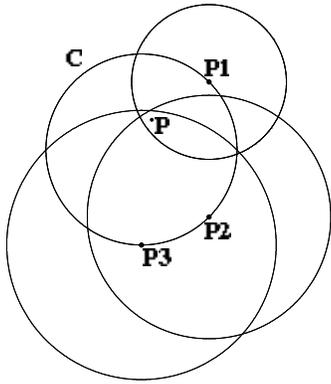


Figura 1.8: Erro de 3s.

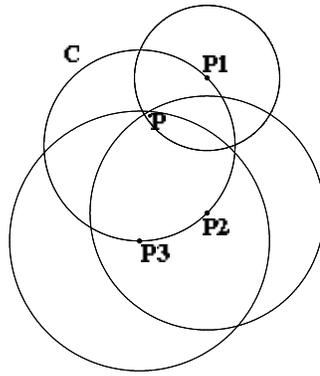


Figura 1.9: Erro de 4s

Veja que até aqui você considerou que a distância média percorrida pelos mensageiros na região de cascalho foi de 6 m , pois não tinha como determiná-la. Vamos então

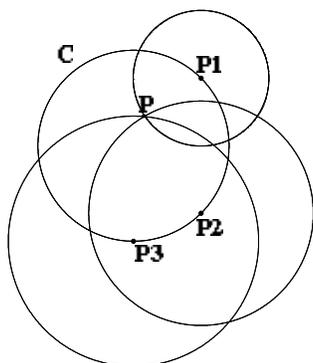


Figura 1.10: Erro de 5s

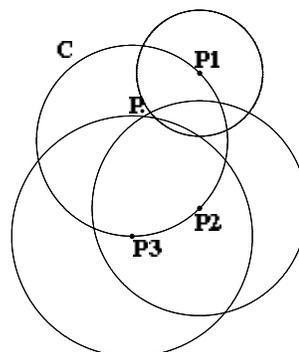


Figura 1.11: Erro de 6s

supor que cada mensageiro está acompanhado por um assistente, que anda no pavimento também com velocidade de 1.5 m/s , enquanto, no cascalho o mensageiro anda com velocidade de 1.2 m/s , e seu assistente, com 0.9 m/s .

Assim, devemos analisar as posições de partida dos mensageiros e seus assistentes, P_1 , P_2 e P_3 a partir dos dados originais do problema e resolver um novo sistema.

Sejam T e C as distâncias percorridas no trecho todo e no cascalho, respectivamente. Sabemos que o tempo medido no percurso do primeiro mensageiro foi de 20.2 s . Vamos supor que o tempo gasto pelo primeiro assistente foi de 21.9 s . Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} (T_1 - C_1)/1.5 + C_1/1.2 = 20.2 \\ (T_1 - C_1)/1.5 + C_1/0.9 = 21.9 \end{cases},$$

cuja solução é $T_1 = 28.77 \text{ m}$ e $C_1 = 6.12 \text{ m}$. Assim você estaria a 28.77 m do ponto P_1 .

Usando o mesmo procedimento para os pontos P_2 e P_3 e supondo que o tempo gasto pelo segundo assistente é de 31.3 s , e pelo terceiro é de 33.8 s , temos os sistemas:

$$\begin{cases} (T_2 - C_2)/1.5 + C_2/1.2 = 29.5 \\ (T_2 - C_2)/1.5 + C_2/0.9 = 31.3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (T_3 - C_3)/1.5 + C_3/1.2 = 32.2 \\ (T_3 - C_3)/1.5 + C_3/0.9 = 33.8 \end{cases}$$

que tem soluções respectivamente iguais a $T_2 = 42.63 \text{ m}$ e $C_2 = 6.48 \text{ m}$, $T_3 = 46.86 \text{ m}$ e $C_3 = 5.76 \text{ m}$. Portanto você estaria a 42.63 m e 46.86 m dos pontos P_2 e P_3 , respectivamente.

Logo, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} (x - 21.213)^2 + (y - 21.213)^2 = (28.77 - 1.5\epsilon)^2 \\ (x - 21.213)^2 + (y + 21.213)^2 = (42.63 - 1.5\epsilon)^2 \\ x^2 + (y + 30)^2 = (46.86 - 1.5\epsilon)^2 \end{cases}, \quad (1.4)$$

temos a solução $(3.612, 9.221, 4.981)$. Assim concluímos que você está a 3.612 m ao leste e 9.221 m ao norte do centro da região circular e que seu relógio tem um erro aproximadamente igual a 4.981 s . Na verdade você está a $28.77 - 1.5\epsilon = 21.298 \text{ m}$ do ponto P_1 , 35.158 m do ponto P_2 e 39.388 m do ponto P_3 , salvo um erro de precisão além do fato do erro do relógio ter sido considerado apenas no trajeto pavimentado.

Note que o sistema (1.4) pode ser interpretado geometricamente como a interseção de três superfícies cônicas circulares no sistema de referência $xy\epsilon$, com eixo de simetria paralelo ao eixo ϵ e centros em diferentes pontos, com alturas distintas.

As três variáveis x , y , e ϵ são funções dos intervalos de tempo t_1 , t_2 e t_3 gastos pelo primeiro, segundo e terceiro mensageiro, respectivamente, e medidos por você. Assim temos uma função $F : \mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, sendo x , y , e ϵ funções implícitas de t_1 , t_2 e t_3 . Portanto para determinar o erro máximo de precisão (Δx) na variável x , por exemplo, basta usar a relação entre o diferencial de x , denotado por dx e sua variação Δx . Assim

$$\Delta x \approx dx,$$

mas

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial x}{\partial t_3} dt_3.$$

Ou seja,

$$\Delta x \approx \frac{\partial x}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial x}{\partial t_3} \Delta t_3,$$

ou ainda

$$\Delta x \leq \left(\left| \frac{\partial x}{\partial t_1} \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial t_2} \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial t_3} \right| \right) M$$

onde $M = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3\}$.

Sabendo que x , y e ϵ são funções de t_1 , t_2 e t_3 e definidas implicitamente pelas equações

$$f_1(x, y, \epsilon, t_1, t_2, t_3) = a,$$

$$f_2(x, y, \epsilon, t_1, t_2, t_3) = b \text{ e}$$

$$f_3(x, y, \epsilon, t_1, t_2, t_3) = c,$$

com a , b e c , constantes, e aplicando a regra da cadeia em f_1 , f_2 e f_3 , é possível expressar $\frac{\partial x}{\partial t_1}$, $\frac{\partial x}{\partial t_2}$ e $\frac{\partial x}{\partial t_3}$ em termos das derivadas de f_1 , f_2 e f_3 , em relação a x , y , ϵ e em relação a t_1 , t_2 e t_3 . Isto é garantido pelo Teorema da Função Implícita que será apresentado com as devidas hipóteses na última seção deste capítulo. Mas deixaremos para desenvolver essa análise na determinação de uma posição na Terra com o uso do GPS, que é um dos nossos objetivos principais. Para isso precisamos de alguns conceitos e considerações que faremos a seguir.

1.4 Determinando uma posição na Terra

De acordo com [1], cada um dos satélites do GPS transmite um sinal de frequência por rádio que é recebido por um receptor na Terra, funcionando como um cronômetro

extremamente acurado. O receptor capta os sinais de quatro satélites para determinar suas próprias coordenadas e o erro de sincronização entre o satélite e o receptor.

Comparando com o modelo bidimensional de [19], o receptor é a pessoa que está na região circular, os sinais de ondas são os mensageiros e os satélites são os carros na estrada circundando a região, o vácuo é representado pela região pavimentada e a atmosfera terrestre, pela região de cascalho.

Usando a idéia do modelo bidimensional, se o ponto da região plana é determinado pela interseção das três circunferências, então no sistema GPS, o usuário está situado na interseção das quatro esferas, definidas no sistema (1.5):

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_2^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_3^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = r_4^2 \end{cases}, \quad (1.5)$$

onde (x_i, y_i, z_i) são as coordenadas das posições dos satélites ($i = 1, 2, 3, 4$) assumidas como constantes, (x, y, z) são as coordenadas da posição do receptor, a serem determinadas e r_i é a distância verdadeira entre o i -ésimo satélite S e o usuário, ($i = 1, 2, 3, 4$).

Observe que o sistema (1.5) tem solução única, garantida pelo Teorema 1.2.0.1, desde que os quatro satélites sejam convenientemente escolhidos.

A distância r_i é determinada por

$$r_i = c(\Delta t_i - \Delta t_{i,prop}),$$

onde c é a velocidade de propagação da luz no vácuo, Δt_i é o tempo de trânsito do sinal e $\Delta t_{i,prop}$ é o atraso da propagação do sinal decorrente da atmosfera. Observe que o intervalo de tempo considerado não é simplesmente a diferença entre o instante em que o receptor recebe o sinal e o tempo padrão do GPS. Existe uma diferença entre o relógio

atômico, responsável pelo disparo do sinal, e o tempo padrão do GPS, responsável pela ordem do disparo, atualizada pelas estações de monitoramento dos satélites, e ainda uma diferença entre o relógio do receptor e o tempo padrão do GPS que chamamos de erro de sincronização. Portanto,

$$r_i = c(\Delta t_{i,pseudo} + \Delta t_{i,drift} - \Delta t_{i,prop} + \Delta t_{rec,clock}),$$

onde $\Delta t_{i,pseudo}$ é a diferença entre o tempo transmitido pelo satélite e o tempo efetivo do receptor, $\Delta t_{i,drift}$ é a diferença entre o relógio atômico e o tempo padrão do GPS e $\Delta t_{rec,clock}$ é a diferença entre o relógio do receptor e o tempo padrão do GPS, que independe de i . Os termos $\Delta t_{i,prop}$ e $\Delta t_{i,drift}$ são aproximados por informação da transmissão, $\Delta t_{i,pseudo}$ é calculado pelo receptor e $\Delta t_{rec,clock}$ é um valor a ser determinado.

Assim o sistema (1.5), que tem solução única sob as hipóteses do Teorema 1.2.0.1, pode ser reescrito com quatro equações e quatro incógnitas, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(\Delta t_{1,pseudo} + \Delta t_{1,drift} - \Delta t_{1,prop} + \Delta t_{rec,clock})^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(\Delta t_{2,pseudo} + \Delta t_{2,drift} - \Delta t_{2,prop} + \Delta t_{rec,clock})^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(\Delta t_{3,pseudo} + \Delta t_{3,drift} - \Delta t_{3,prop} + \Delta t_{rec,clock})^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(\Delta t_{4,pseudo} + \Delta t_{4,drift} - \Delta t_{4,prop} + \Delta t_{rec,clock})^2 \end{array} \right., \quad (1.6)$$

onde x , y , z e $\Delta t_{rec,clock}$ são as incógnitas.

Como a expressão $\Delta t_{i,pseudo} + \Delta t_{i,drift} - \Delta t_{i,prop}$ é conhecida, a substituiremos por t_i , com $i = 1, 2, 3, 4$ e por uma questão de concordância com o modelo bidimensional, substituiremos o erro do relógio do receptor em relação ao tempo padrão do GPS, $\Delta t_{rec,clock}$,

por $-\epsilon$. Assim, reescrevendo o sistema (1.6), temos

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - c^2 \times (t_1 - \epsilon)^2 = 0 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 - c^2 \times (t_2 - \epsilon)^2 = 0 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 - c^2 \times (t_3 - \epsilon)^2 = 0 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 - c^2 \times (t_4 - \epsilon)^2 = 0 \end{cases}, \quad (1.7)$$

onde c é a velocidade de propagação do sinal e as variáveis x , y , z e ϵ são funções de t_1 , t_2 , t_3 e t_4 . As posições (x_i, y_i, z_i) dos satélites ($i = 1, 2, 3, 4$) são assumidas como constantes.

Considerando as pseudo distâncias, $d_i = c \times t_i$, e as equações do sistema (1.7) como funções $f_i(x, y, z, \epsilon) = f_i$ temos:

$$\begin{cases} f_1 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - (d_1 - c \times \epsilon)^2 = 0 \\ f_2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 - (d_2 - c \times \epsilon)^2 = 0 \\ f_3 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 - (d_3 - c \times \epsilon)^2 = 0 \\ f_4 = (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 - (d_4 - c \times \epsilon)^2 = 0 \end{cases}. \quad (1.8)$$

Resolvendo, numericamente, o sistema não linear de quatro equações e quatro variáveis expresso em (1.8), o receptor encontra uma solução que corresponde à sua posição na Terra. Converte as três coordenadas cartesianas, x , y e z , em coordenadas geográficas, que representam a latitude, a longitude, e a altitude. A quarta coordenada (ϵ) não tem valor representativo para o usuário pois trata-se do erro do relógio do receptor em relação ao satélite.

Vale destacar que os sistemas (1.6), (1.7) e (1.8) não possuem mais uma única solução, em decorrência da variável ϵ introduzida. Pode ser que possuam até duas soluções.

Para justificar esta última afirmação usaremos o argumento da prova do Teorema 1.2.0.1. Quando igualamos $f_1 = f_2$, $f_1 = f_3$ e $f_1 = f_4$, obtemos um sistema linear com três equações e três variáveis, com solução única, de acordo com as condições do teorema.

Mas as equações $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ e $f_4 = 0$ também precisam ser satisfeitas por essa solução. É por isso que no teorema aparece a hipótese que a solução do sistema $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ e $f_4 = 0$ é não vazia, justamente para garantir que essa solução única do sistema linear dê a solução desejada do sistema não linear.

No caso do sistema (1.8), aparece uma quarta variável (ϵ) e ao igualar as equações $f_1 = f_2$, $f_1 = f_3$ e $f_1 = f_4$, obtemos um sistema linear com três equações e quatro variáveis, com um grau de liberdade. Portanto, sua solução é uma reta em \mathbb{R}^4 : $(x, y, z, \epsilon) = (x(\epsilon), y(\epsilon), z(\epsilon), \epsilon)$, espaço onde mora(m) a(as) possível(is) solução(ões) do sistema (1.8). A(s) interseção(ões) da reta obtida com qualquer um desses hiper-cones do \mathbb{R}^4 produzirá as possíveis soluções do sistema (1.8), nenhuma, uma ou duas soluções.

O exemplo proposto a seguir visa discutir, do ponto de vista matemático, o método utilizado pelo GPS na determinação de um ponto sobre a superfície terrestre e a precisão dos resultados. Esta precisão é afetada, principalmente pelo número de dígitos considerados, e como o tempo de transmissão do sinal é menor que um décimo de segundo, as informações transmitidas pelo GPS precisam envolver ao menos dez dígitos para produzir resultados significativos.

Os dados que vamos considerar foram extraídos de [1, p.37], com alterações nos t_i 's a fim de que a altitude do ponto encontrado seja consistente com a altitude da região.

Vale ressaltar que tanto os dados propostos por [1, p.37] como os propostos por [15, p.693] produzem altitudes pouco razoáveis para a região em que está localizado o ponto encontrado. No primeiro caso, a altitude foi muito pequena, no deserto do Saara e próxima ao nível do mar. No segundo caso foi negativa, em um ponto no Oceano Atlântico, como se a medição do GPS tivesse ocorrido em um submarino. Por isso optamos por uma adaptação dos dados de [1, p.37], alterando os t_i 's de forma conveniente. Para isso procedemos da seguinte forma:

Prolongamos o vetor posição $\vec{P} = (x, y, z)$ (ver Figura 1.2, p.5) encontrado no exemplo de [1, p.37] para que a norma do vetor $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ficasse consistente com a localização de P . Encontramos os r_i 's usando a distância do ponto P até a posição do satélite S_i , respectivamente. Em seguida, determinamos os t_i 's a partir da relação $t_i = (r_i + c \epsilon)/c$, $i = 1, 2, 3, 4$ onde c é a velocidade da luz, extraída de (1.5) e (1.7). Com isso aumentamos o tamanho do vetor \vec{P} , a altitude, e mantivemos as coordenadas geográficas: latitude e longitude.

Supusemos que o raio da Terra mede 6.378136245×10^6 metros ² e consideramos a velocidade da luz sendo igual a $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s (cf. [1, p.36]). Um receptor GPS registra os lapsos de tempo t_i com $1 \leq i \leq 4$ (em segundos) entre a transmissão e a recepção de sinal de cada um dos quatro satélites, conforme a tabela a seguir:

Satélite 1(t_1)	Satélite 2(t_2)	Satélite 3(t_3)	Satélite 4(t_4)
0.08251708666	0.07718499445	0.06890508021	0.07815774847

A efeméride (em metros) de cada satélite captada pelo receptor é dada pela tabela abaixo:

	x	y	z
Satélite 1	1.877191188×10^6	-1.064608026×10^7	2.428036099×10^7
Satélite 2	1.098145713×10^7	-1.308719098×10^7	2.036005484×10^7
Satélite 3	2.459587359×10^7	-4.336916128×10^6	9.090267461×10^6
Satélite 4	3.855818937×10^6	7.251740720×10^6	2.527733606×10^7

As distâncias d_i do receptor a cada satélite são:

$$d_1 = c \times t_1 = 2.473800023 \times 10^7 \text{ m},$$

$$d_2 = 2.313947920 \times 10^7 \text{ m},$$

²Calculado a partir do diâmetro equatorial, obtido em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Terra>.

$$d_3 = 2.065722336 \times 10^7 \text{ m e}$$

$$d_4 = 2.343110352 \times 10^7 \text{ m.}$$

Aplicando os dados do problema ao sistema (1.8) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = (x - 1.877191188 \times 10^6)^2 + (y + 1.064608026 \times 10^7)^2 \\ \quad + (z - 2.428036099 \times 10^7)^2 - (2.473800023 \times 10^7 \\ \quad - 2.99792458 \times 10^8 \times \epsilon)^2 = 0 \\ f_2 = (x - 1.098145713 \times 10^7)^2 + (y + 1.308719098 \times 10^7)^2 \\ \quad + (z - 2.036005484 \times 10^7)^2 - (2.313947920 \times 10^7 \\ \quad - 2.99792458 \times 10^8 \times \epsilon)^2 = 0 \\ f_3 = (x - 2.459587359 \times 10^7)^2 + (y + 4.336916128 \times 10^6)^2 \\ \quad + (z - 9.090267461 \times 10^6)^2 - (2.065722336 \times 10^7 \\ \quad - 2.99792458 \times 10^8 \times \epsilon)^2 = 0 \\ f_4 = (x - 3.855818937 \times 10^6)^2 + (y - 7.251740720 \times 10^6)^2 \\ \quad + (z - 2.527733606 \times 10^7)^2 - (2.343110352 \times 10^7 \\ \quad - 2.99792458 \times 10^8 \times \epsilon)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.9)$$

O sistema (1.9) tem duas soluções, encontradas usando o Método de Newton do programa `Maxima` (rotina `mnewton`),

$$\begin{array}{ll} x' = 565909.804 & x'' = -6276308.186 \\ y' = 978427.4556 & \text{e } y'' = -1359715.566 \\ z' = 2773838.294 & z'' = -1679649.828 \\ \epsilon' = -1.908218696 \times 10^{-10} & \epsilon'' = 0.1784211601. \end{array}$$

Observe que $\epsilon'' = 0.1784211601$ é um número relativamente grande e interfere diretamente nas distâncias r_i do sistema (1.5), cujos valores ficam em torno de 30000 *km* enquanto que os satélites estão a 20200 *Km* da Terra. O ponto correspondente à segunda

solução do sistema está a uma altitude de

$$\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} - 6378136.245 = 6637928.472 - 6378136.245 = 259792.227 \text{ m.}$$

Isto significa que os satélites não formariam um ângulo favorável com a vertical do ponto correspondente, para emissão do sinal. Tomando, por exemplo, o satélite S_4 , temos que $r_4 = d_4 - c \times \epsilon''$, ou seja,

$$r_4 = 2.343110352 \times 10^7 - 2.99792458 \times 10^8 \times \epsilon'' = 30058214.62 \text{ m}$$

e o ângulo de inclinação do satélite em relação à vertical (reta que passa pelo ponto P e pelo centro da Terra) no ponto

$$P = (-6276308.186, -1359715.566, -1679649.858)$$

é de aproximadamente $\beta = 127^\circ$. Observe a Figura 1.12.

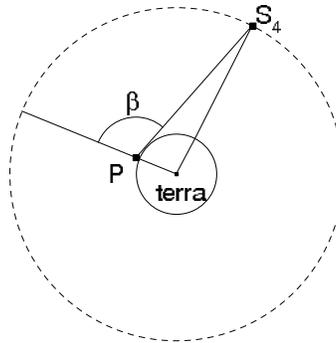


Figura 1.12: Ilustração da inclinação do satélite S_4 em relação à vertical do ponto P .

Além disso, para se ter uma idéia da ordem de grandeza da elevação desta segunda solução, notemos que o Monte Everest, ponto mais alto da Terra, possui altitude de 8.8 Km , enquanto as rotas usuais de aviões comerciais estão em torno de 12.5 Km .

Assim uma altitude de aproximadamente 260 *Km* só seria alcançada por um receptor a bordo de um foguete.

Portanto conclui-se que a primeira solução é a que corresponde ao problema, pois as distâncias entre as coordenadas

$$(565909.804, 978427.4556, 2773838.294)$$

e os quatro satélites, expressas por

$$r_1 = 2.473800023 \times 10^7 - 2.99792458 \times 10^8 \times \epsilon' = 2.4738000287 \times 10^7$$

$$r_2 = 2.313947925 \times 10^7$$

$$r_3 = 2.065722341 \times 10^7$$

$$r_4 = 2.343110357 \times 10^7$$

estão mais próximas de 20200 *Km*.

Logo, as coordenadas cartesianas do local (P) onde se encontra o receptor são $P = (565909.804, 978427.4556, 2773838.294)$, e o erro do relógio é igual a $-1.908218696 \times 10^{-10}$. O receptor de GPS converte estas coordenadas cartesianas em coordenadas geográficas.

Assim, como $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6378563.957$, e usando as equações (1.1) e (1.2), temos: $\sin(\phi) = 0.4348687749$ então $\phi = 25.77694412^\circ$; $\cos(\alpha) = 0.9853847835$ e $\sin(\alpha) = 0.1703432669$, então $\alpha = 9.807777^\circ$.

Portanto, as coordenadas geográficas assinaladas pelo receptor são: 25° 46 minutos 36 segundos latitude norte, 9° 48 minutos 28 segundos longitude leste, e o receptor está a uma altitude de 427.7122 *m*. De acordo com pesquisa no site <http://www.geobusca.net/>, este ponto está localizado no deserto do Saara, ao norte de Níger, África.

O valor de $\epsilon = -1.908218696 \times 10^{-10}$ indica que o relógio do receptor está atrasado 1.908218696 $\times 10^{-10}$ segundos em relação ao do satélite e as pseudo distâncias (d_i) são

menores que a distância real entre o receptor e cada satélite. Agora se t_i varia, então as coordenadas cartesianas também variam, acarretando um erro de precisão. Logo, o grau específico da exatidão do ponto P , a precisão de x , y , e z , depende da variação de t_i e para determiná-la, devemos usar o *Teorema da Função Implícita*. Seu enunciado, prova e exemplos serão apresentados na próxima sessão. Aqui vamos usá-lo dentro do contexto aplicado do GPS, completando a análise iniciada na sessão anterior para o caso bidimensional.

Então, seja $F \rightarrow \mathfrak{R}^8 \rightarrow \mathfrak{R}^4$, a aplicação $(t_1, \dots, t_4, x, y, z, \epsilon) \mapsto (f_1, \dots, f_4)$ definida em (1.8). Como $F \in C^\infty$, se a matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right]$ é invertível, então vale o *Teorema da Função Implícita*. Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial t_j} \end{bmatrix}, \text{ com } i, j = 1, 2, 3, 4,$$

sendo que i varia nas linhas e j varia nas colunas das matrizes.

Observe que neste caso consideramos $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ e $x_4 = \epsilon$. Assim

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_3} & \frac{\partial x}{\partial t_4} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_3} & \frac{\partial y}{\partial t_4} \\ \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_3} & \frac{\partial z}{\partial t_4} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t_1} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_2} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_3} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_4} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial \epsilon} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \frac{\partial f_1}{\partial t_3} & \frac{\partial f_1}{\partial t_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \frac{\partial f_2}{\partial t_3} & \frac{\partial f_2}{\partial t_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial t_1} & \frac{\partial f_3}{\partial t_2} & \frac{\partial f_3}{\partial t_3} & \frac{\partial f_3}{\partial t_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial t_1} & \frac{\partial f_4}{\partial t_2} & \frac{\partial f_4}{\partial t_3} & \frac{\partial f_4}{\partial t_4} \end{bmatrix}.$$

Considerando a função F definida em (1.8), temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_3} & \frac{\partial x}{\partial t_4} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_3} & \frac{\partial y}{\partial t_4} \\ \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_3} & \frac{\partial z}{\partial t_4} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t_1} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_2} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_3} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_4} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2(x - x_1) & 2(y - y_1) & 2(z - z_1) & 2c^2(t_1 - \epsilon) \\ 2(x - x_2) & 2(y - y_2) & 2(z - z_2) & 2c^2(t_2 - \epsilon) \\ 2(x - x_3) & 2(y - y_3) & 2(z - z_3) & 2c^2(t_3 - \epsilon) \\ 2(x - x_4) & 2(y - y_4) & 2(z - z_4) & 2c^2(t_4 - \epsilon) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\times \begin{bmatrix} -2c^2(t_1 - \epsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2c^2(t_2 - \epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c^2(t_3 - \epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c^2(t_4 - \epsilon) \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores do problema, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_3} & \frac{\partial x}{\partial t_4} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_3} & \frac{\partial y}{\partial t_4} \\ \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_3} & \frac{\partial z}{\partial t_4} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t_1} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_2} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_3} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t_4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.383 \times 10^9 & 1.283 \times 10^9 & -2.013 \times 10^8 & 2.983 \times 10^8 \\ -5.391 \times 10^6 & -4.143 \times 10^8 & 1.275 \times 10^8 & 2.921 \times 10^8 \\ -2.095 \times 10^9 & 2.284 \times 10^9 & -8.659 \times 10^8 & 6.768 \times 10^8 \\ -6.363 & 6.619 & -2.608 & 1.352 \end{bmatrix}.$$

Como a diferença Δx se aproxima do diferencial dx à medida que Δt tende para zero, escrevemos:

$$\Delta x \approx \frac{\partial x}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial x}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial x}{\partial t_4} \Delta t_4.$$

Considerando $|\Delta t_i| < M$, para todo i , então:

$$|\Delta x| \leq \left(\left| \frac{\partial x}{\partial t_1} \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial t_2} \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial t_3} \right| + \left| \frac{\partial x}{\partial t_4} \right| \right) M.$$

De acordo com os dados do problema, temos:

$$|\Delta x| \leq 3.2 \times 10^9 M, |\Delta y| \leq 8.4 \times 10^8 M \text{ e } |\Delta z| \leq 5.9 \times 10^9 M.$$

Segundo [15], o grau de precisão do relógio de um receptor de GPS de uso civil é da ordem de um nanosegundo (10^{-9} s). Logo, o erro na medida da variável x , por exemplo, é da ordem de 3 metros.

De acordo com [20], os receptores mais acurados têm uma precisão na casa dos milímetros, porém são muito caros. São capazes de captar as duas frequências emitidas pelos satélites, eliminando assim o efeito da refração ionosférica. Para maiores detalhes sobre refração na ionosfera, ver, por exemplo, [11].

As alterações feitas nos dados de [1, p.37], foram mudanças nos t_i 's da ordem de 10^{-7} para $i = 1, 2, 4$, e 10^{-6} para $i = 3$. Considerando $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_4 = 10^{-7}$ e $\Delta t_3 = 10^{-6}$, temos:

$$|\Delta x| \leq \left| \frac{\partial x}{\partial t_1} \right| \Delta t_1 + \left| \frac{\partial x}{\partial t_2} \right| \Delta t_2 + \left| \frac{\partial x}{\partial t_3} \right| \Delta t_3 + \left| \frac{\partial x}{\partial t_4} \right| \Delta t_4 = 497.73$$

$$|\Delta y| \leq 198.6791$$

$$|\Delta z| \leq 1371.48.$$

Determinando um limitante para o acréscimo do vetor posição $\vec{P} = (x, y, z)$, temos

$$\Delta P \leq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 1437.$$

De acordo com o Teorema da Função Implícita, as alterações nos t_i 's provocaram variação no vetor posição inferior a 1437 m. Como os t_i 's diminuíram em relação aos dados de [1, p.37], o ponto $P = (x, y, z)$ foi deslocado afastando-se da origem da Terra, de forma que computando efetivamente as diferenças entre os valores obtidos para a solução do sistema (1.8) com os dados de [1] e com a modificação que propusemos, obtivemos os valores $\Delta x = 355$ m, $\Delta y = 61.4$ m e $\Delta z = 174$ m. Assim, o vetor posição sofreu um deslocamento positivo igual a $\sqrt{355^2 + 61.4^2 + 174^2}$ m = 400 m. Esse valor é a diferença de altitude provocada pelas alterações dos t_i 's.

1.5 O Teorema da Função Implícita

Um resultado importante para este trabalho é o *Teorema de Função Implícita*. A demonstração que apresentaremos foi baseada em [8, p.310-311] para $F : \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}$, e em [10, p.84]. Porém, nas aplicações que consideramos é usado no formato mais geral, para $F : \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$, que será enunciado mas sua demonstração será omitida.

Segundo [8, p.309], equações implícitas da forma $f(x, y) = c$ foram tema de destaque no trabalho de Descartes (*Geometrie*, 1637). Não se duvidava que tais equações definiam curvas geométricas da forma $y = y(x)$, e Leibniz sabia como diferenciar tais funções. No entanto, foi na era de Weierstrass que os matemáticos sentiram a necessidade de uma prova mais rigorosa, para garantir que $f(x, y) = c$ é equivalente a $y = y(x)$ em uma vizinhança de um ponto (x_0, y_0) satisfazendo $f(x_0, y_0) = c$. Dizemos nesse caso que $f(x, y) = c$ pode ser resolvida para y . Esta formalização é feita a seguir:

Teorema 1.5.0.2 (*Teorema da Função Implícita*) *Considere uma função $F : \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}$ e um ponto $(x_0, y_0) \in \mathfrak{R}^{n+1}$, e suponha que as derivadas parciais $\partial F / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, e $\partial F / \partial y$ existem e são contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) . Se*

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

então existem vizinhanças U de x_0 e V de y_0 , e uma única função $y : U \rightarrow V$ tal que $y(x_0) = y_0$ e

$$F(x, y(x)) = 0 \text{ para todo } x \in U.$$

A função $y(x)$ é diferenciável em U e satisfaz

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Demonstração: Sem perda de generalidade vamos supor que $\partial F/\partial y > 0$ (caso contrário trabalharíamos com $-F$ ao invés de F). Assim, pela continuidade de $\partial F/\partial y$ temos que existem $\delta > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \geq \beta > 0 \text{ para todo } (x, y) \in B_\delta(x_0) \times V, \quad (1.11)$$

onde $B_\delta(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\}$ e $V =]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$. Isto implica que a função de uma variável $y \mapsto F(x, y)$ é monotonicamente crescente em $\bar{V} = [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Como $F(x_0, y_0) = 0$, segue que $F(x_0, y_0 - \delta) < 0 < F(x_0, y_0 + \delta)$. Sendo F contínua, basta tomar $\delta_1 < \delta$ que $F(x, y_0 - \delta) < 0 < F(x, y_0 + \delta)$ continua valendo para todo $x \in B_{\delta_1}(x_0) \equiv U$. Pelo Teorema do Valor Intermediário³ aplicado à função $y \mapsto F(x, y)$, de \bar{V} em \mathfrak{R} , para cada $x \in U$ existe uma única função $y : U \rightarrow V$ tal que $F(x, y(x)) = 0$. A unicidade de $y(x)$ vem da monotonia de F , considerada como função de y (ver Figura 1.13).

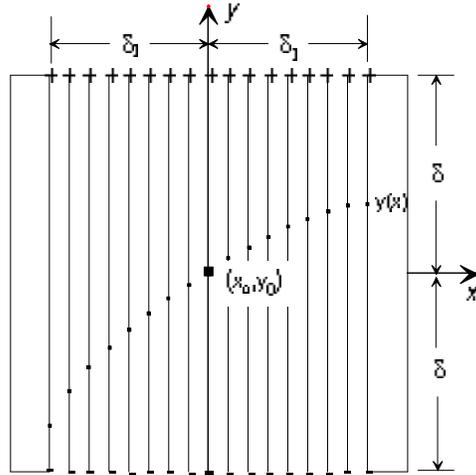


Figura 1.13: Ilustração auxiliar para prova do Teorema da Função Implícita.

Queremos mostrar que a função $y : U \rightarrow V$ é diferenciável em

³Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

$x \in U$ arbitrário. Provaremos uma condição suficiente, a saber, que y possui derivadas parciais contínuas em todo ponto $x \in U$.

Denotando por e_i o i -ésimo vetor elementar de \mathfrak{R}^n , $i = 1, \dots, n$, definimos $h \equiv h(t) = y(x + te_i) - y(x) \Rightarrow y(x + te_i) = y(x) + h$.

Então, para t suficientemente pequeno tal que $x + te_i \in U$ e $y(x + te_i) \in V$ temos,

$$F(x, y(x)) = F(x + te_i, y(x + te_i)) = F(x + te_i, y(x) + h) = 0.$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio⁴, para todo t existe $\theta(t) \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + te_i, y(x) + h) - F(x, y(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + \theta te_i, y(x) + \theta h)t + \frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta te_i, y(x) + \theta h)h. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{h}{t} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x + \theta te_i, y(x) + \theta h)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta te_i, y(x) + \theta h)} = \frac{y(x + te_i) - y(x)}{t}. \quad (1.12)$$

Chamando $-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x + \theta te_i, y(x) + \theta h)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta te_i, y(x) + \theta h)} = \varphi(t)$, como $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ é contínua, segue que é limitada em $U \times V$, digamos por M . Além disso, por (1.11) temos que $|\varphi(t)| \leq M/\beta$ para t suficientemente pequeno. Então, de (1.12)

$$|y(x + te_i) - y(x)| = |\varphi(t)t| \leq \frac{M}{\beta}|t| \quad (1.13)$$

e pelo Teorema do Confronto, passando (1.13) ao limite para $t \rightarrow 0$ obtemos a continuidade de y em $x \in U$.

⁴Dada $f : U \rightarrow \mathfrak{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathfrak{R}^n$, se o segmento de reta $[a, a + v]$ estiver contido em U então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial F}{\partial v}(a + \theta v) = \langle \nabla f(a + \theta v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(a + \theta v)\alpha_i$$

onde $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Agora, como

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(x + te_i) - y(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t),$$

da continuidade de $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ segue que

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = \varphi(0).$$

Logo, y tem derivadas parciais contínuas em $x \in U$, e dadas por (1.10) □

Antes de enunciar o caso geral do Teorema da Função Implícita, apresentaremos dois exemplos simples, baseados no exemplo discutido por Bortolossi em [3, p.339].

Exemplo: Seja uma transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (2x + 3y - z, 2x + y - z)$$

e o conjunto de nível

$$\mathcal{F}_{(1,2)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = (1, 2)\}.$$

Será que o conjunto de nível $\mathcal{F}_{(1,2)}$ pode ser representado como uma função, ou seja, existe uma vizinhança do ponto (x, y, z) na qual o conjunto de nível $\mathcal{F}_{(1,2)}$ coincide com o gráfico de uma função vetorial $f : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo B de \mathbb{R} ? Se a dimensão de B fosse $n > 1$, a pergunta seria: f está definida em uma bola aberta B de \mathbb{R}^n ?

Sabemos que um ponto (x, y, z) pertence ao conjunto de nível $\mathcal{F}_{(1,2)}$ se suas coordenadas satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}.$$

Escrevendo duas das incógnitas em função da terceira (variável independente), por exemplo, x e y em função de z , podemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 + z \\ 2x + y = 2 - z \end{cases}.$$

Escrevendo em notação matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + z \\ 2 - z \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

segue que podemos escrever x e y em função de z :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + z \\ 2 - z \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 + 4z \\ 2 - 4z \end{bmatrix}.$$

Portanto a função vetorial $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por

$$(x, y) = f(z) = -\frac{1}{4}(-5 + 4z, 2 - 4z)$$

é tal que o gráfico de f coincide com o conjunto de nível $\mathcal{F}_{(1,2)}$. Mas isso nem sempre é possível, depende da escolha da variável independente. Por exemplo, ao tentarmos escrever x e z em função de y (variável independente), temos o sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3y \\ 2 - y \end{bmatrix}.$$

Como a matriz A não é invertível, existem valores para y para os quais o sistema não tem solução. Se tomarmos, por exemplo, $y = 1$, o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

não possui solução. Logo não é possível escrever o conjunto de nível $\mathcal{F}_{(1,2)}$ de F como um gráfico de uma função vetorial f que depende de y . \square

Consideramos, no exemplo acima, uma função vetorial definida por uma transformação linear. Veremos agora um outro exemplo em que a função vetorial é não-linear.

Exemplo: Seja uma função vetorial $F : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, x^2 + 3y - z^2),$$

um ponto $p^* = (1, 1, 1)$ e o conjunto de nível

$$\mathcal{F}_{(1,3)} = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 | F(x, y, z) = (1, 3) = F(1, 1, 1)\}.$$

Vamos considerar uma aproximação linear de F no ponto p^* dada por

$$l(X) = F(p^*) + DF(p^*). (X - p^*) \tag{1.14}$$

onde $X = (x, y, z)$.

Vamos verificar se o conjunto de nível $\mathcal{L}_{(1,3)}$ definido por

$$\mathcal{L}_{(1,3)} = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 | l(x, y, z) = (1, 3) = l(1, 1, 1)\}$$

pode ser escrito como gráfico de uma função em uma vizinhança de p^* . Se $X \in \mathcal{L}_{(1,3)}$, então $l(X) = (1, 3)$ e como $F(1, 1, 1) = (1, 3)$, então da equação (1.14) segue que

$$DF(p^*). (X - p^*) = 0.$$

Assim, a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gera um sistema linear de duas equações e três incógnitas. Escrevendo x e y em função de z , temos

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 + 2z \\ 2x + 3y = 3 + 2z \end{cases}.$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes de x e y é diferente de zero, o sistema tem solução. Portanto o conjunto de nível $\mathcal{L}_{(1,3)}$ pode ser escrito como o gráfico de uma função vetorial que depende de z . Perceba que isso não acontece se tentarmos escrever x e z em função de y . \square

Logo, uma condição suficiente para que o conjunto de nível de uma função vetorial F possa ser escrito como gráfico de uma função vetorial em uma vizinhança de um ponto p^* , em relação a determinadas variáveis, é que a matriz definida pelas derivadas parciais de F em relação às outras variáveis, no ponto p^* , seja invertível. Com isso podemos estudar o comportamento dessas funções a partir do Teorema Geral das Funções Implícitas, enunciado a seguir e cuja prova pode ser encontrada em [10, p.119].

Teorema 1.5.0.3 *Considere uma função vetorial $F : \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ definida por*

$$F(x, y) = (F_1(x, y), \dots, F_n(x, y))$$

de classe C^k com $k \geq 1$, um ponto $p^ = (x^*, y^*)$ e um conjunto de nível*

$$\mathcal{F}_c = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^{m+n} | F(x, y) = c = F(x^*, y^*)\}$$

de F que passa por p^ . Aqui $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ e $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$. Se a matriz*

$$D_y F(p^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(p^*) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(p^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(p^*) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(p^*) \end{bmatrix}_{m \times m}$$

é invertível, então existe uma função vetorial $f : B \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ de classe C^k definida em uma bola aberta B de \mathfrak{R}^n tal que

(a) $x^* \in B$,

(b) $F(x, f(x)) = c$ para todo $x \in B$,

(c) $f(x^*) = y^*$ e

(d) a matriz jacobiana de f no ponto x^* pode ser calculada em termos da matriz jacobiana de F no ponto $p^* = (x^*, y^*)$:

$$Df(x^*) = -(D_y F(p^*))^{-1} \cdot D_x F(p^*).$$

Nesta situação, dizemos que a equação $F(x, y) = c$ define implicitamente y como uma função vetorial f de x em uma vizinhança do ponto p^* .

Capítulo 2

Cálculo de áreas de regiões planas: estabelecendo conexões

Existem diversas ferramentas matemáticas para o cálculo de áreas de regiões planas. Neste capítulo vamos destacar algumas delas, procurando relacioná-las.

Alem disso, existe um aparelho topográfico, denominado *planímetro*, cujo princípio de funcionamento está apoiado nos elementos matemáticos que iremos desenvolver. Nesse sentido, um instrumento utilizado por engenheiros civis, cartógrafos e outros profissionais de áreas afins, pode motivar, de maneira concreta, a apresentação e a aprendizagem dos elementos matemáticos envolvidos para estudantes de ciências exatas do Ensino Superior.

Para maiores detalhes sobre o funcionamento do planímetro, bem como dos princípios matemáticos que o sustentam, destacamos a dissertação do acadêmico Felix Silva Costa (cf.[5]), a página de João Nuno Tavares (cf.[18]), que inclui *applets* em Java ilustrando as idéias, e o texto [16] produzido sob a orientação da professora Sônia P. Carvalho (ICEX-UFMG).

Uma ferramenta matemática significativa para o cálculo de área de regiões planas é o

Teorema de Green, visto na disciplina de Cálculo de Várias Variáveis mas dissociada de outras ferramentas da geometria analítica e vetorial como cálculo de área de triângulos, de polígonos e até volume de paralelepípedo. O objetivo desta unidade é fazer estas interrelações.

Começemos com o cálculo da área do triângulo usando conceitos do Ensino Médio [14, p.59]. A equação da reta servirá de ponto de partida e será uma ferramenta fundamental para estabelecer as primeiras conexões.

2.1 Área de um triângulo

Vamos encaminhar o cálculo da área de um triângulo com base na expressão conhecida $A = \frac{1}{2}base.altura$. Para o cálculo da altura vamos utilizar a expressão para a distância de um ponto a uma reta, a qual deduziremos a partir do caso particular a seguir.

2.1.1 Distância da origem $O(0,0)$ a uma reta

Sejam uma reta r de equação $ax+by+c=0$, onde $a^2+b^2 \neq 0$ e uma reta t , perpendicular a r passando por $O(0,0)$.

Como $r \perp t$ então se $b \neq 0$, o coeficiente angular das retas r e t são dados respectivamente por: $m_r = -\frac{a}{b}$ e $m_t = \frac{b}{a}$. Daí $t: bx - ay = 0$. Caso $b = 0$, $t: y = 0$. O sistema formado pelas equações das retas r e t dará as coordenadas de $P = r \cap t$. Assim:

$$P = \left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right)$$

Logo, a distância de O a P é dada por:

$$d_{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \Rightarrow d_{OP} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

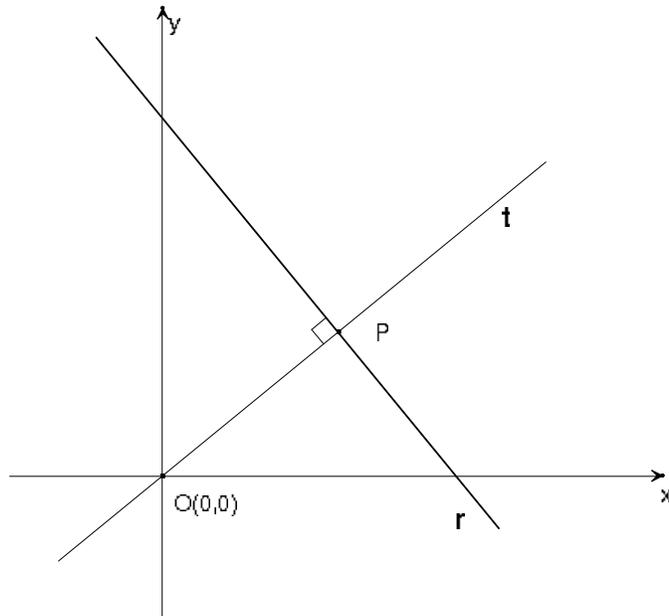


Figura 2.1: A distância da origem à reta r é dada pela distância entre O e P , onde $P \in t$ e $t \perp r$.

2.1.2 Distância de um ponto $P_0(x_0, y_0)$ a uma reta

Sejam $r : ax + by + c = 0$ e $P_0(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Considerando um novo sistema de eixos X e Y , com $X // x$ e $Y // y$, tal que sua origem seja P_0 , temos, conforme Figura 2, que:

$$x = x_0 + X \text{ e } y = y_0 + Y$$

Assim, a equação da reta r no novo sistema de eixos $X\hat{P}_0Y$ é expressa sob a forma:

$$a(x_0 + X) + b(y_0 + Y) + c = 0 \text{ ou } aX + bY + ax_0 + by_0 + c = 0$$

onde $ax_0 + by_0 + c = C$, constante.

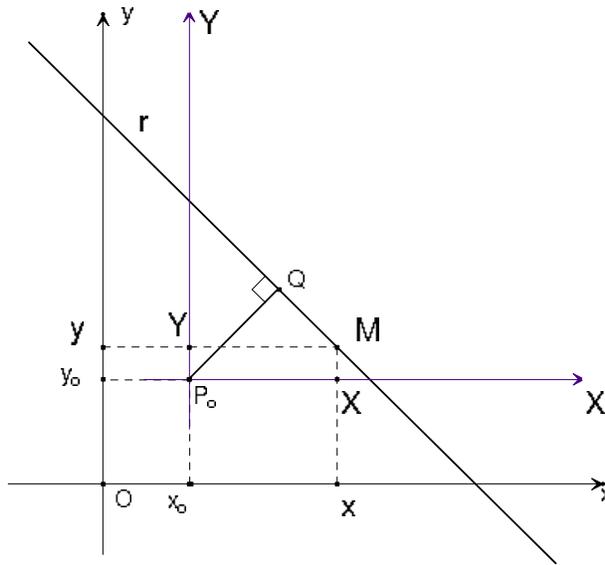


Figura 2.2: Ilustração para o cálculo da distância do ponto P_0 à reta r , sendo P_0 distinto da origem.

Pelo ítem anterior, a distância da origem P_0 à reta de equação $aX + bY + C = 0$ é dada por

$$d_{P_0, Q} = \frac{|C|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e como $ax_0 + by_0 + c = C$, vem:

$$d_{P_0, Q} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2.1.3 Cálculo da área de um triângulo

Dados três pontos $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, vale a expressão para a área (S), do triângulo ABC:

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \right|. \quad (2.1)$$

Da geometria elementar, a área S do triângulo ABC é dada por $S = \frac{1}{2}base \times altura$. Vejamos como esta expressão está relacionada com a fórmula expressa em (2.1).

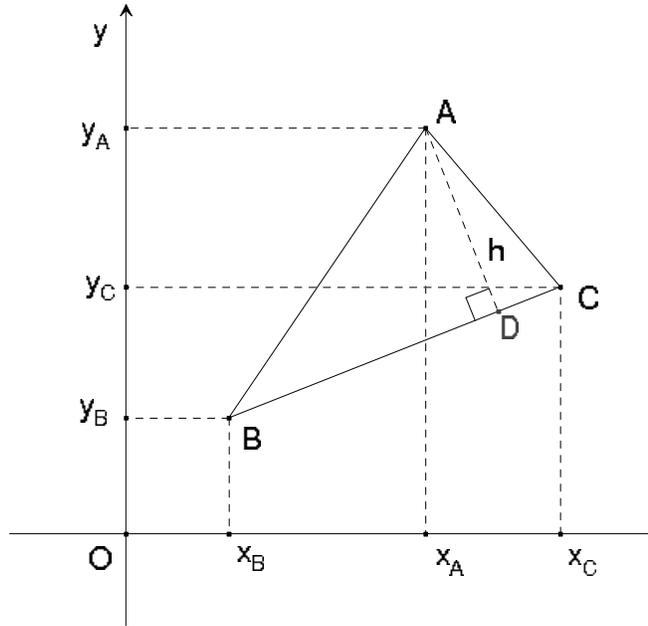


Figura 2.3: Ilustração para o cálculo da área do triângulo ABC

Vamos considerar que os vértices do triângulo ABC estão nessa ordem e no sentido anti-horário de sua poligonal, conforme Figura 2.3, afim de que o determinante da equação 2.1 seja não negativo e por esse motivo iremos omitir o (abs) sempre que estivermos percorrendo um poligonal no sentido anti-horário. Este resultado será justificado pelo Teorema de Green.

Tomando a base como o segmento BC e a altura (h) como o segmento AD , de acordo com a Figura 2.3, temos: $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$ e h é o módulo da distância

do ponto A à reta BC, cuja equação da reta é definida por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

isto é,

$$\underbrace{(y_B - y_C)}_a x + \underbrace{(x_C - x_B)}_b y + \underbrace{x_B y_C - x_C y_B}_c = 0,$$

onde os coeficientes a , b e c são facilmente identificados.

Aplicando o resultado do ítem anterior temos que a altura é dada por

$$h = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + x_B y_C - x_C y_B|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}.$$

Desenvolvendo o numerador e escrevendo na forma de determinante de matriz, temos:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}.$$

Daí conclui-se que:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Observando a matriz do determinante acima, do ponto de vista vetorial, temos que se os vetores $\vec{v}_1 = (x_A, y_A, 1)$, $\vec{v}_2 = (x_B, y_B, 1)$ e $\vec{v}_3 = (x_C, y_C, 1)$ são linearmente dependentes, os pontos A , B e C são colineares e por (2.2) a área do triângulo ABC é nula.

Desenvolvendo o determinante da equação (2.3), usando a expressão em co-fatores ao longo da terceira coluna (cf.[2]), temos:

$$S = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \right).$$

Usando a propriedade dos determinantes de permutação de linhas com troca de sinal, e rearranjando os elementos da diagonal secundária das submatrizes 2×2 para que as coordenadas dos vértices fiquem nas colunas temos

$$S = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & x_C \\ y_B & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & x_A \\ y_C & y_A \end{vmatrix} \right). \quad (2.4)$$

Observe que a ordem dos pontos na equação (2.4) é obtida percorrendo-se o ΔABC no sentido anti-horário da Figura 2.3.

2.2 Área de um paralelogramo

Apresentaremos, inicialmente, duas definições para o produto vetorial, uma algébrica e outra geométrica.

Definição 2.2.0.1 (*definição algébrica do produto vetorial*) O produto vetorial de $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}$ por $\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$ é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Definição 2.2.0.2 (*definição geométrica do produto vetorial*) Se \vec{u} e \vec{v} são vetores não paralelos então

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (\text{Área do paralelogramo de lados } \vec{u} \text{ e } \vec{v})\vec{n} \\ &= (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta)\vec{n} \end{aligned}$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} e \vec{n} é o vetor unitário perpendicular a \vec{u} e a \vec{v} , apontado na direção dada pela regra da mão direita. Se \vec{u} e \vec{v} são paralelos então $\vec{u} \times \vec{v} = 0$.

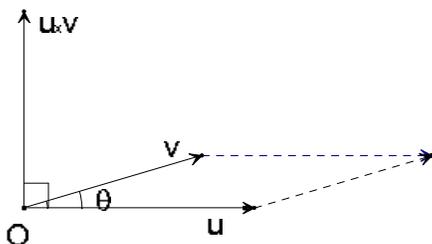


Figura 2.4: Ilustração para o produto vetorial: os vetores \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} \times \vec{v}$ formam, nesta ordem, um sistema orientado positivamente.

Como \vec{n} é unitário e o paralelogramo gerado por $\vec{u}, \vec{v} \in \mathfrak{R}^3$ tem área (S) dada por

$$S = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta,$$

onde $\|\vec{u}\|$ é a base, $\|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$ é a altura e θ é o ângulo entre os dois vetores, conclui-se que a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}, \vec{v} \in \mathfrak{R}^3$ é numericamente igual à norma do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Assim:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \right\|. \quad (2.5)$$

Por outro lado, da geometria elementar sabemos que a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Considerando que os vetores estão contidos no plano XY de um sistema tridimensional XYZ, tal que $\vec{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A, 0)$ e $\vec{v} = (x_C - x_A, y_C - y_A, 0)$

e calculando a norma do produto vetorial $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$, temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \left\| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \|[(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)]\vec{k}\| \\ &= |(x_B y_C - x_C y_B) - (x_A y_C - x_C y_A) + (x_B y_C - x_C y_B)| \\ &= abs \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \right) \\ &= abs \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que isso acontece quando uma mesma coordenada de \vec{u} e \vec{v} é nula, ou seja, os pontos A , B e C pertencem a um plano perpendicular a um dos eixos coordenados, x , y ou z .

Portanto, a expressão que determina a área de um triângulo é um caso particular da expressão que determina a área de um paralelogramo, ou seja, a área do paralelogramo paralelo a um dos planos coordenados pode ser determinada pelas expressões:

$$abs \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}, abs \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_B & 1 & z_B \\ x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} = abs \begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_B & z_B & 1 \\ x_C & z_C & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$abs \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_B & z_B \\ 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} = abs \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Quando os pontos A , B e C não pertencerem a um plano perpendicular a um dos eixos coordenados, temos: $\vec{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ e $\vec{v} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$. Assim, usando as propriedades dos determinantes, temos

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x_A & -y_A & -z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} \\
 \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ -x_A & -y_A & -z_A \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x_A & -y_A & -z_A \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x_A & -y_A & -z_A \\ -x_A & -y_A & -z_A \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_C & y_C & z_C \\ x_A & y_A & z_A \end{vmatrix}. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Assim

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a},$$

onde $\vec{a} = (x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b} = (x_B, y_B, z_B)$ e $\vec{c} = (x_C, y_C, z_C)$.

Usando a expansão em co-fatores ao longo das primeiras linhas dos determinantes da equação (2.6) e rearranjando os elementos, temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_B & z_B & 1 \\ x_C & z_C & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Pela desigualdade triangular, temos:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| \leq abs \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + abs \begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_B & z_B & 1 \\ x_C & z_C & 1 \end{vmatrix} + abs \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Ou seja, a área de um paralelogramo é menor ou igual a soma das áreas de suas projeções ortogonais nos três planos coordenados. Veja Figura 2.5.

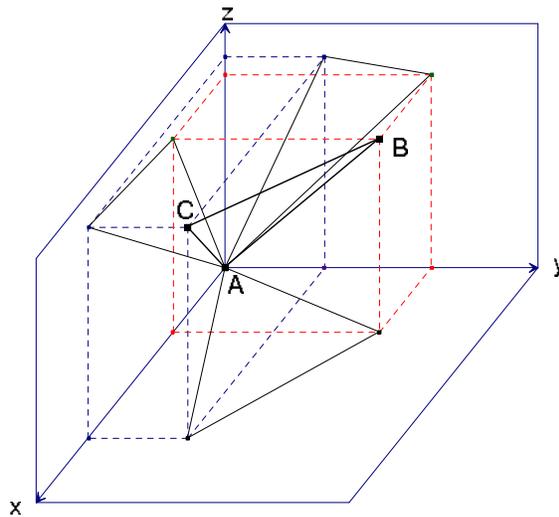


Figura 2.5: Ilustração para a decomposição de triângulo (ou paralelogramo) em suas projeções.

Vale mencionar que a decomposição do triângulo (ou paralelogramo) em suas projeções nos planos coordenados permite uma espécie de generalização do Teorema de Pitágoras:

o quadrado da área do objeto original é igual à soma dos quadrados das áreas das projeções nos três planos coordenados. Esta observação foi feita pela professora Sueli Costa na defesa oral deste trabalho.

2.3 Volume de um paralelepípedo

Teorema 2.3.0.3 *Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores não nulos em \mathbb{R}^3 e seja θ o ângulo entre eles. Então*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

Demonstração:

Sem perda de generalidade, consideremos $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ e $\vec{s} = \overrightarrow{RP}$, sendo $\vec{s} \perp \vec{v}$ e $R \in \overline{OQ}$, conforme a Figura 2.6.

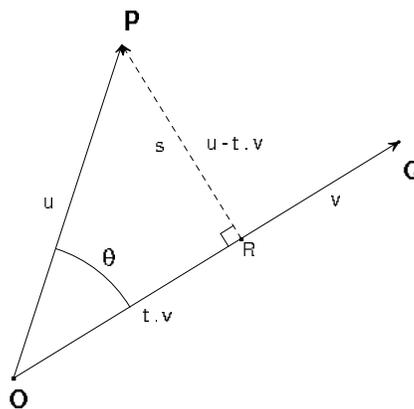


Figura 2.6: Ilustração para o cálculo do ângulo entre dois vetores.

Observe que \overrightarrow{OR} é múltiplo escalar de $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$. Assim $\overrightarrow{OR} = t\vec{v}$ e como \vec{u} , $t\vec{v}$ e \overrightarrow{RP} são os três lados do triângulo retângulo $\triangle OPR$, podemos escrever $\overrightarrow{RP} = \vec{u} - t\vec{v}$. Assim:

$$\cos(\theta) = \frac{\|t\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = t \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}. \quad (2.7)$$

Pelo Teorema de Pitágoras e as operações com vetores, vem:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \|t\vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - t\vec{v}\|^2 \\ &= t^2 \|\vec{v}\|^2 + (\vec{u} - t\vec{v}) \cdot (\vec{u} - t\vec{v}) \\ &= t^2 \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot (t\vec{v}) + (t\vec{v}) \cdot (t\vec{v}) \\ &= t^2 \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2t(\vec{u} \cdot \vec{v}) + t^2 \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

ou seja

$$2t(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2t^2 \|\vec{v}\|^2,$$

e então $t = 0$ ou

$$t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}. \quad (2.8)$$

Como $\vec{u} \neq 0$, sua projeção sobre \vec{v} não pode ser nula, logo apenas (2.8) nos interessa. Substituindo (2.8) em (2.7), temos:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

□

Proposição 2.3.0.4 *Dados três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, o valor absoluto do produto misto entre eles é numericamente igual ao volume do prisma gerado pelos três vetores*

$$|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| = \text{abs} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \text{volume}(V).$$

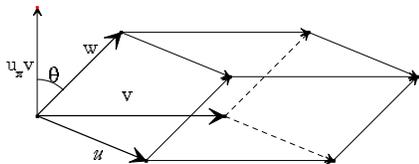


Figura 2.7: Os vetores u, v e w são ditos um conjunto destro

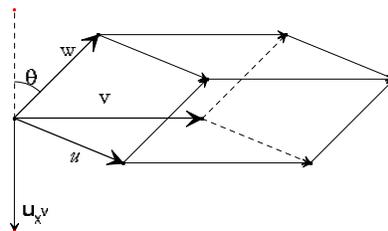


Figura 2.8: Os vetores u, v e w são ditos um conjunto sinistro

Demonstração:

Tanto na Figura 2.7 quanto na Figura 2.8, a altura do paralelepípedo é dada por $\|\vec{w}\| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre \vec{w} e $\vec{u} \times \vec{v}$. Na Figura 2.7, o ângulo θ é menor que $\frac{\pi}{2}$ e o produto interno $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ é positivo, pois de acordo com o Teorema 2.3.0.3 o cosseno entre dois vetores é igual à razão entre seu produto interno e o produto de suas normas. Assim, o volume (V) do paralelepípedo é dado por:

$$V = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta.$$

Na Figura 2.8, o ângulo $\pi - \theta$ é menor que $\frac{\pi}{2}$ e o produto interno $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ é negativo. Assim:

$$V = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta = -\|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\pi - \theta).$$

Pelo Teorema 2.3.0.3

$$V = -(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|.$$

Portanto o volume (V) do paralelepípedo é dado por

$$|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|.$$

Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \cdot (x_w \vec{i} + x_w \vec{j} + x_j \vec{k}) \\
 &= [(y_u z_v - z_u y_v) \vec{i} + (z_u x_v - x_u z_v) \vec{j} + (x_u y_v - y_u x_v) \vec{k}] \cdot (x_w \vec{i} + x_w \vec{j} + x_j \vec{k}) \\
 &= (y_u z_v - z_u y_v) x_w + (z_u x_v - x_u z_v) y_w + (x_u y_v - y_u x_v) z_w \\
 &= \begin{vmatrix} x_w & y_w & z_w \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dai,

$$V = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| = abs \begin{vmatrix} x_w & y_w & z_w \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

□

Quando dois dos três vetores têm uma mesma coordenada nula e a coordenada correspondente do terceiro vetor é igual a 1(um), o volume do paralelepípedo gerado por esses três vetores é numericamente igual à área do paralelogramo gerado pelos dois vetores de mesma coordenada nula e como esse paralelogramo pertence a um plano coordenado, o volume do paralelepípedo é numericamente igual ao dobro da área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema cartesiano e as extremidades desses dois vetores. Na verdade trata-se de um paralelepípedo cuja base pertence a um plano coordenado e cuja altura é igual a 1(um). Por exemplo, um paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathfrak{R}^3$, tais que, $\vec{u} = (x_u, y_u, 0)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, 0)$ e $\vec{w} = (x_w, y_w, 1)$ onde o ponto A é a origem e os

pontos B e C são as extremidades de \vec{u} e \vec{v} , respectivamente, tem seu volume dado por

$$\begin{aligned}
 V &= abs \begin{vmatrix} x_w & y_w & 1 \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} = abs \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \\
 &= abs \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{\Delta ABC}.
 \end{aligned}$$

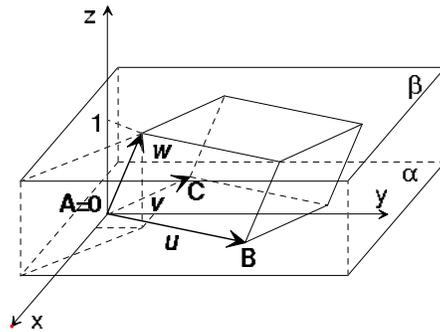


Figura 2.9: Paralelepípedo de altura igual a 1 (um), com face superior contida no plano β e inferior no plano $xy \equiv \alpha$.

Veja na Figura 2.9 que a altura do paralelepípedo em relação à base gerada pelos vetores \vec{u} e \vec{v} vale 1 (um), logo seu volume é numericamente igual à área do paralelogramo gerado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .

Consideremos agora que os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são linearmente dependentes (LDs), tais que $\vec{u} = (x, y, k)$, $\vec{v} = (x_B, y_B, k)$ e $\vec{w} = (x_C, y_C, k)$ e que formem um conjunto LI de

dimensão dois. Então

$$\begin{vmatrix} x & y & k \\ x_B & y_B & k \\ x_C & y_C & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pela equação (2.2), os pontos $A = (x, y, k)$, $B = (x_B, y_B, k)$ e $C = (x_C, y_C, k)$ extremos dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} pertencem a uma reta contida no plano gerado pelos três vetores. Portanto a área do triângulo ABC é nula e o paralelepípedo corresponde a um prisma de altura zero cuja base é um paralelogramo contido no plano (α), conforme Figura 2.10, gerado pelos três vetores LDs, ou seja, o volume desse paralelepípedo também é nulo.

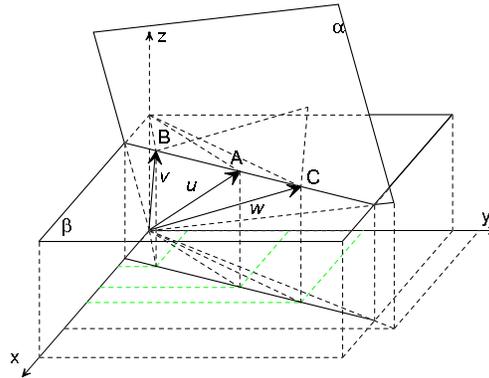


Figura 2.10: Paralelepípedo degenerado, gerado pelos vetores LDs \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

Mas se os três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} formam um conjunto de dimensão 1 (um), ou seja, $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = k_1(x, y, z)$ e $\vec{w} = k_2(x, y, z)$ com k_1 e k_2 constantes, temos que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ k_1x & k_1y & k_1z \\ k_2x & k_2y & k_2z \end{vmatrix} = k_1k_2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, além dos três extremos pertencerem a uma reta no \mathbb{R}^3 , essa reta passa pela origem do sistema cartesiano.

Note que essa idéia nos permite rever a relação (2.2) para a equação de uma reta em \mathfrak{R}^2 : tomamos um ponto (x, y) , o qual queremos que pertença à reta que passa por (x_B, y_B) e (x_C, y_C) conhecidos. Ao impormos a relação (2.2) estamos exigindo que os pontos A , B e C , expandidos para o \mathfrak{R}^3 , tenham todos coordenadas $z = k$, e os três vetores correspondentes \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} sejam dependentes, ou que os pontos A , B e C , expandidos para o \mathfrak{R}^3 , tenham coordenadas proporcionais. Logo, suas extremidades estão na intersecção dos planos α e β , portanto, pertencem a uma reta (em \mathfrak{R}^3). Projetando-a no plano $z = 0$ recuperamos a reta em \mathfrak{R}^2 desejada.

Para ilustrar as diversas relações sugeridas pela Figura 2.10 a partir da relação (2.2), apresentaremos um *mapa conceitual*¹ na Figura 2.11, que pode ser lido de cima para baixo, conforme indicam as setas. Os termos mais importantes estão destacados nos quadros, e as conexões entre eles acompanham as setas.

¹Para mais detalhes sobre mapas conceituais ver, por exemplo, [17] e suas referências.

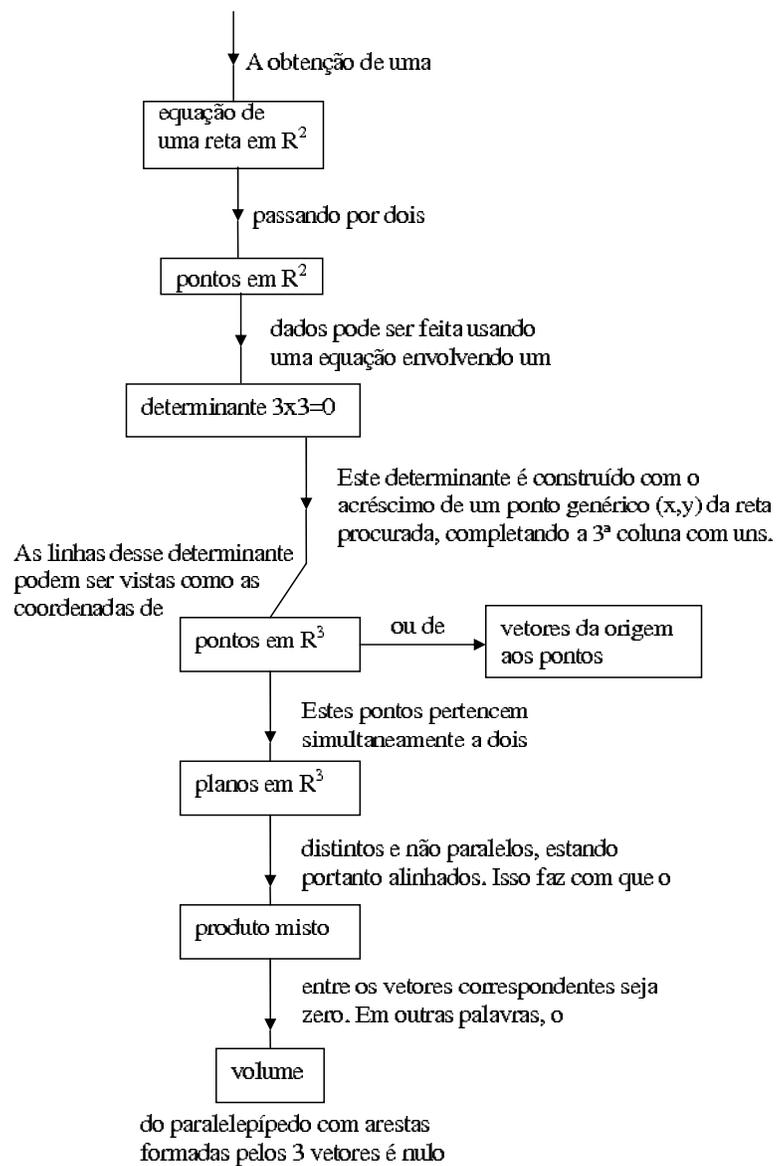


Figura 2.11: Um mapa conceitual que relaciona as diversas idéias sugeridas pela Figura 2.10, a qual ilustra a relação (2.2).

2.4 Área de um polígono

Seja a região delimitada pela poligonal $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, conforme a Figura 2.12.

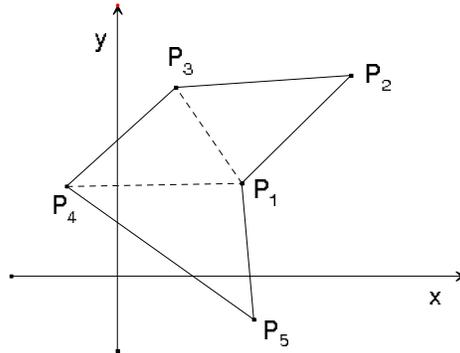


Figura 2.12: Ilustração para o cálculo da área do polígono de vértices P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5

Assumindo que todo polígono pode ser triangularizado, dividindo o polígono em triângulos, conforme Figura 2.12, temos que a área do polígono $A(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ é igual à soma das áreas dos triângulos. Assim, aplicando a equação (2.4), temos:

$$A(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = A(P_1, P_2, P_3) + A(P_1, P_3, P_4) + A(P_1, P_4, P_5) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ y_4 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_5 & x_1 \\ y_5 & y_1 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Simplificando as ocorrências repetidas e com sinais contrários, temos:

$$A(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ y_4 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_5 & x_1 \\ y_5 & y_1 \end{vmatrix} \right).$$

Observe que a ordem dos pontos está associada a percorrer a poligonal no sentido anti-horário, conforme Figura 2.12.

Generalizando, temos que a área (A) da região delimitada pela poligonal $(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n)$ com $1 < i < n$, e $n \geq 3$ é dada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right). \quad (2.10)$$

2.5 Teorema de Green

Nesta seção, seguindo a apresentação de [12, p.220], provaremos o Teorema de Green para regiões retangulares e em seguida o provaremos para regiões parametrizadas por retângulos, baseados na fórmula de mudança de variáveis em integrais duplas.

Teorema 2.5.0.5 (*Teorema de Green*) *Seja U um conjunto aberto de \mathfrak{R}^2 e seja $\vec{F} = (F_1, F_2)$ um campo vetorial de classe C^1 sobre U . Suponha que $\vec{r} : [a, b] \rightarrow U$ é um caminho fechado simples, seccionalmente suave, orientado no sentido positivo. Seja R o interior de $C = \vec{r}([a, b])$. Então:*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.11)$$

Demonstração: Inicialmente, provaremos o Teorema de Green quando R é uma região retangular, como mostra a Figura 2.13.

Supomos que o campo de vetores \vec{F} é dado em componentes por

$$\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$$

e que a fronteira C da região R é dividida em

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } y = c\};$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = b \text{ e } c \leq y \leq d\};$$

$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } y = d\};$$

$$C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

Para obter o caminho \vec{r} para C orientado positivamente vamos considerar o sentido anti-horário de modo que os pontos internos de R estejam sempre à esquerda da curva C .

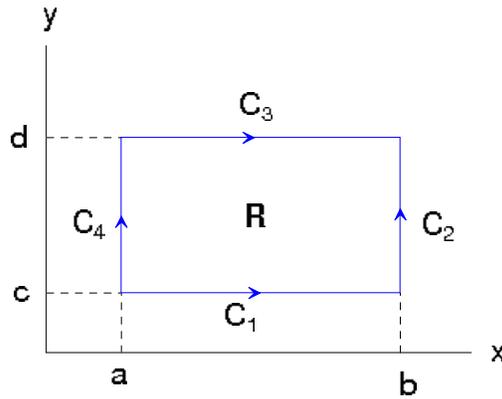


Figura 2.13: Ilustração de uma região retangular R com fronteira C dividida em C_1 , C_2 , C_3 e C_4 .

A integral de linha do primeiro membro da equação (2.11) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b F_1(x, c) dx + \int_c^d F_2(b, y) dy - \int_a^b F_1(x, d) dx - \int_c^d F_2(a, y) dy \\ &= \int_c^d (F_2(b, y) - F_2(a, y)) dy + \int_a^b (-F_1(x, d) + F_1(x, c)) dx. \end{aligned}$$

A integral dupla do segundo membro da equação (2.11) pode ser escrita como integral iterada. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo na integral interior temos:

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy + \iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy + \int_a^b \int_c^d -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy dx \\ &= \int_c^d (F_2(b, y) - F_2(a, y)) dy \\ &\quad + \int_a^b (-F_1(x, d) + F_1(x, c)) dx. \end{aligned}$$

Como a integral de linha e a integral dupla são iguais, provamos o Teorema de Green para regiões retangulares.

Agora, sem perda de generalidade, provaremos o Teorema de Green para uma região R que pode ser transformada numa região retangular T , supondo que a região R no plano- xy corresponda a uma região T no plano- st conforme a Figura 2.14 e que a mudança de coordenadas é um-a-um no interior de T , tal que

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t).$$

Provaremos o Teorema de Green para a região R usando o Teorema de Green para a região T e a fórmula de mudança de variáveis em integrais duplas, ver [12, p.152].

Escrevendo, em notação vetorial a mudança de coordenadas, temos

$$\vec{r} = \vec{r}(s, t) = x(s, t)\vec{i} + y(s, t)\vec{j} \Rightarrow d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt.$$

Portanto, escrevendo a integral de linha sobre C como integral de linha sobre D , vem:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt \right)$$

ou

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds + \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt.$$

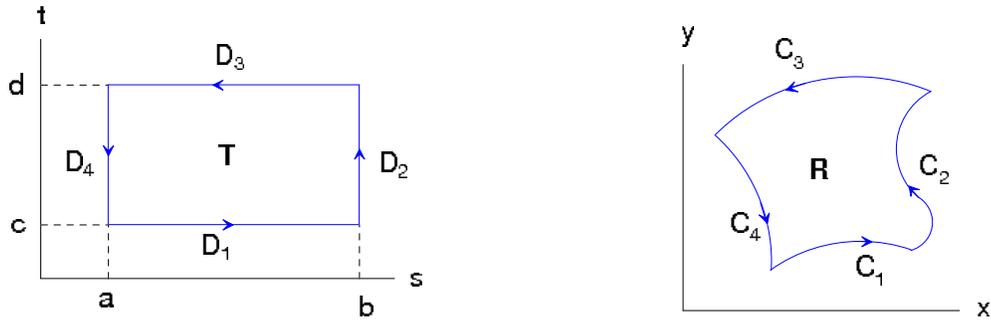


Figura 2.14: Uma região curva R no plano- xy correspondente a uma região retangular T no plano- st , adotado o sentido anti-horário em seus contornos.

Definindo o campo de vetores \vec{G} no plano- st com componentes

$$G_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \text{ e } G_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (2.12)$$

e \vec{u} como vetor posição de um ponto no plano- st , temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{G} \cdot d\vec{u}.$$

Desenvolvendo o produto vetorial em (2.12) e em seguida, usando a regra do produto e a regra da cadeia, temos:

$$G_1 = (F_1, F_2) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right) = F_1 \frac{\partial x}{\partial s} + F_2 \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$G_2 = (F_1, F_2) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = F_1 \frac{\partial x}{\partial t} + F_2 \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial t} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + F_1 \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \\ &+ \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + F_2 \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial s} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + F_1 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} \\ &+ \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + F_2 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s}. \end{aligned}$$

Como o caminho C é suave, sendo as derivadas segundas contínuas, as derivadas mistas são iguais. Assim, simplificando os termos iguais e rearranjando vem

$$\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Usando a fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas, temos:

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} ds dt \\ &= \iint_T \left(\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) ds dt. \end{aligned}$$

Assim mostramos que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{G} \cdot d\vec{u}$$

e que

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_T \left(\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) ds dt.$$

Como as integrais dos segundos membros são iguais pelo Teorema de Green para regiões retangulares, concluímos que as integrais dos primeiros membros são iguais. Com isso provamos o Teorema de Green para a região R . \square

A forma vetorial do Teorema de Green, que pode ser reescrita como:

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde C é a curva bordo da região R .

Este teorema possui algumas conseqüências imediatas importantes. Se um campo vetorial de classe C^1 dado por $\vec{F} = (F_1, F_2)$ é tal que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, então o campo \vec{F} é chamado conservativo. Sobre uma região simplesmente conexa (sem buraco) contida no seu domínio, a integral de linha sobre a curva C que contorna a região R é igual a zero.

De fato,

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \int \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_R 0 = 0.$$

Observe que nesse caso a integral independe do caminho, mas temos que ter cuidado com a região. Vejamos um exemplo em que a região contém um ponto que não pertence ao domínio de \vec{F} e outro em que a região não é simplesmente conexa.

O campo vetorial $\vec{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$ é conservativo em qualquer domínio simplesmente conexo que não contém a origem, pois

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Para determinar a integral de \vec{F} sobre a curva C definida por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$ não podemos usar o Teorema de Green, pois o ponto $(0, 0)$ da região contornada por C não pertence ao domínio de \vec{F} . Assim, parametrizando a curva C , temos:

$$C : \vec{r}(t) = 2 \cos(t) \vec{i} + 2 \sin(t) \vec{j}, t \in [0, 2\pi].$$

Então, integrando, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-2 \sin t}{4} (-2 \sin t) + \frac{2 \cos t}{4} (2 \cos t) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Veja que se o sentido da curva fosse invertido, a integral seria -2π , portanto a integral de \vec{F} em um domínio que contém C depende do caminho de integração.

Agora vamos considerar uma curva fechada simples C_1 , suave por partes, orientada no sentido anti-horário e que circunda a origem, contida na região limitada por C .

Seja R a região compreendida entre as curvas C_1 e C , tal que seus pontos interiores fiquem à esquerda das curvas orientadas $-C_1$ e C (cf.Figura 2.15).

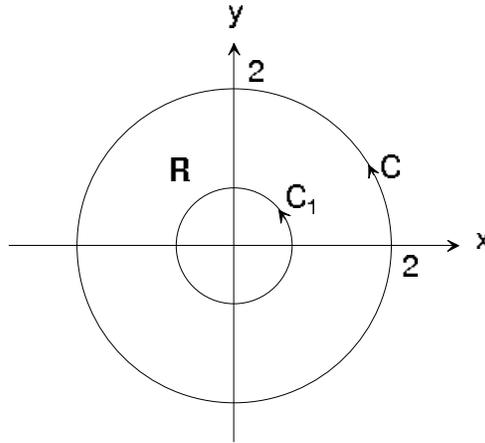


Figura 2.15: Ilustração das curvas C e C_1 e da região R compreendida entre elas.

Como os pontos da região R pertencem ao domínio de \vec{F} , podemos aplicar o Teorema de Green. Assim, vem:

$$\int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e como $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$, segue que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Portanto podemos concluir que a integral de \vec{F} independe do caminho de integração também para qualquer domínio que contém a origem, embora o campo \vec{F} não esteja definido nesse ponto.

2.6 Cálculo de área via integral de linha no contorno

Dada uma região plana R , podemos calcular sua área por meio de uma integral de linha ao longo de seu contorno utilizando o Teorema de Green. Assim, sejam os campos vetoriais contínuos com derivadas parciais contínuas em \mathfrak{R}^2 , $\vec{F} = x\vec{j}$ e $\vec{G} = -y\vec{i}$.

Se denotarmos por A a área da região R e por C a fronteira de R , aplicando o Teorema de Green aos campos \vec{F} e \vec{G} , temos:

$$\oint_C xdy = \oint_C -ydx = \int \int_R dx dy = A.$$

Logo

$$A = \oint_C xdy$$

ou

$$A = \oint_C -ydx$$

ou ainda

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx). \quad (2.13)$$

O cálculo da área de um triângulo de vértices A , B e C por meio do Teorema de Green justifica a equação (2.4). De fato, considere a Figura 2.16 e sejam:

$$C_1(t) = tC + (1-t)B = (\underbrace{tx_C + (1-t)x_B}_{x_1}, \underbrace{ty_C + (1-t)y_B}_{y_1}), \text{ com } 0 \leq t \leq 1;$$

$$C_2(t) = (\underbrace{tx_A + (1-t)x_B}_{x_2}, \underbrace{ty_A + (1-t)y_B}_{y_2}), \text{ com } 0 \leq t \leq 1;$$

$$C_3(t) = (\underbrace{tx_C + (1-t)x_A}_{x_3}, \underbrace{ty_C + (1-t)y_A}_{y_3}), \text{ com } 0 \leq t \leq 1,$$

donde

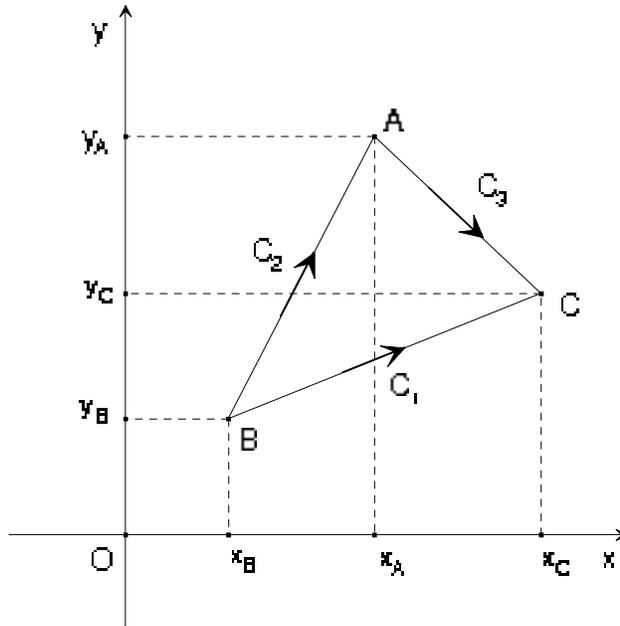


Figura 2.16: Ilustração para o cálculo da área do triângulo ABC usando o Teorema de Green

$$C_1'(t) = (x_C - x_B, y_C - y_B), \text{ com } 0 \leq t \leq 1;$$

$$C_2'(t) = (x_A - x_B, y_A - y_B), \text{ com } 0 \leq t \leq 1;$$

$$C_3'(t) = (x_C - x_A, y_C - y_A), \text{ com } 0 \leq t \leq 1.$$

Aplicando a equação (2.13), temos:

$$A = \frac{1}{2} \left(\oint_{C_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) + \oint_{-C_2} (x_2 dy_2 - y_2 dx_2) + \oint_{-C_3} (x_3 dy_3 - y_3 dx_3) \right)$$

ou

$$A = \frac{1}{2} \left(\oint_{C_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \oint_{C_2} (x_2 dy_2 - y_2 dx_2) - \oint_{C_3} (x_3 dy_3 - y_3 dx_3) \right). \quad (2.14)$$

Calculando a integral sobre a curva C_1 , temos:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) &= \int_0^1 (tx_C + (1-t)x_B)(y_C - y_B) dt \\
&\quad - \int_0^1 (ty_C + (1-t)y_B)(x_C - x_B) dt \\
&= (y_C - y_B) \left[\frac{t^2 x_C}{2} + \left(t - \frac{t^2}{2} \right) x_B \right]_0^1 \\
&\quad - (x_C - x_B) \left[\frac{t^2 y_C}{2} + \left(t - \frac{t^2}{2} \right) y_B \right]_0^1 \\
&= (y_C - y_B) \left(\frac{x_C}{2} + \frac{x_B}{2} \right) - (x_C - x_B) \left(\frac{y_C}{2} + \frac{y_B}{2} \right) \\
&= x_B y_C - x_C y_B;
\end{aligned}$$

Analogamente, as integrais sobre as curvas C_2 e C_3 , são:

$$\oint_{C_2} (x_2 dy_2 - y_2 dx_2) = x_B y_A - x_A y_B$$

e

$$\oint_{C_3} (x_3 dy_3 - y_3 dx_3) = x_A y_C - x_C y_A.$$

Substituindo os três resultados na equação (2.14), chegamos na equação (2.4), como era de se esperar.

De um modo geral, a integral de linha do campo vetorial $\vec{F} = \frac{1}{2}(x\vec{j} - y\vec{i})$ sobre um segmento orientado com origem em $P_i = (x_i, y_i)$ e extremidade $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, onde

$$C_i(t) = tP_{i+1} + (1-t)P_i = (tx_{i+1} + (1-t)x_i, ty_{i+1} + (1-t)y_i), \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

é a equação parametrizada do segmento $P_i P_{i+1}$ e

$$C'_i(t) = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)$$

é sua derivada, constante por se tratar de um segmento parametrizado pela combinação convexa de seus extremos. Vale

$$\begin{aligned}
\oint_{C_i} \frac{1}{2}(xdy - ydx) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [(tx_{i+1} + (1-t)x_i)(y_{i+1} - y_i)] dt \\
&- \frac{1}{2} \int_0^1 [(ty_{i+1} + (1-t)y_i)(x_{i+1} - x_i)] dt \\
&= \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) \left[\frac{t^2 x_{i+1}}{2} + x_i \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \right]_0^1 \\
&- \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \left[\frac{t^2 y_{i+1}}{2} + y_i \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i) \left(\frac{1}{2}x_{i+1} + \frac{1}{2}x_i \right) \\
&- \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \left(\frac{1}{2}y_{i+1} + \frac{1}{2}y_i \right) \\
&= \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).
\end{aligned}$$

Assim, aplicando o Teorema de Green no cálculo da área de uma região plana delimitada por uma poligonal $(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n)$ com $1 \leq i \leq n$, e $n \geq 3$, de modo que os pontos $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$, com $P_i(x_i, y_i)$ estejam nesta ordem e no sentido anti-horário da linha poligonal, temos que a área (A) do polígono é dada por:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \left(\oint_{C_1} (xdy - ydx) + \dots + \oint_{C_i} (xdy - ydx) + \dots + \oint_{C_n} (xdy - ydx) \right) \\
&= \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \dots + (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \dots + x_n y_1 - x_1 y_n],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$A = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right).$$

Também como era de se esperar, esse resultado é o mesmo da equação (2.10).

2.7 Uma breve descrição do Planímetro

De acordo com o Teorema 2.5.0.5, o Teorema de Green associa integrais de linha em curvas fechadas no plano com integrais duplas nas regiões delimitadas por essas curvas. Por essa razão, o Teorema de Green é uma ferramenta fundamental no cálculo de áreas de regiões mais gerais no plano e um instrumento que associa essa ferramenta com seu funcionamento é o planímetro. Mas para entender essa aplicação, precisamos conhecer o planímetro e o seu funcionamento.

Planímetro é um instrumento usado para medir áreas de regiões planas limitadas, inventado pelo matemático suíço Jakob Amsler, em 1854. O projeto original era composto por dois braços, AB e BC, ligados pela extremidade B, como um compasso, com regulagem para formar um ângulo fixo entre 0^0 e 180^0 . A extremidade A do braço AB tem um apoio para ser fixado na superfície plana que contém a região cuja área se deseja medir, enquanto a extremidade B de AB possui uma rodinha com movimento de rotação perpendicular ao braço AB que se move à medida que o extremo C de BC dá uma volta sobre a linha que contorna a região. Nessa rodinha existe um contador de voltas que está associado à área da região. A Figura 2.17 ilustra este aparelho.



Figura 2.17: Imagem de um planímetro de Amsler, extraída de [16].

Hoje, existem planímetros de vários formatos e com contador de voltas eletrônico. Um exemplo é o planímetro linear, composto de uma única barra com uma extremidade

percorrendo um segmento fixo enquanto a outra percorre a curva que limita a região. A rodinha com o contador de voltas fica em um ponto da barra. Observe a Figura 2.18.

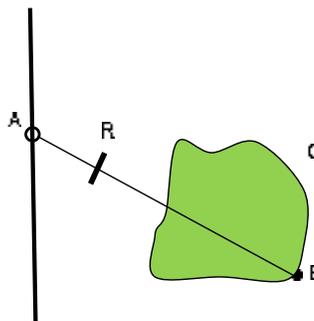


Figura 2.18: A região contornada por C é percorrida por B enquanto A se desloca ao longo do segmento fixo e a rodinha R gira, registrando as voltas dadas, adaptada de [4].

Em [18], por meio de um *applet* interativo, o funcionamento de um planímetro linear pode ser visualizado, bem como são apresentados princípios matemáticos relacionados ao funcionamento desse instrumento, ilustrados com *gifs* animados.

O texto [16], produzido por dois estudantes de graduação em Engenharia Elétrica da UFMG, sob a orientação da prof^a. Sônia P. Carvalho, apresenta com mais detalhe a conexão entre o funcionamento do planímetro e o Teorema de Green. Já o texto [4], produzido por Eduardo Colli (IME-USP), faz uma modelagem do planímetro linear e usa elementos físicos, como velocidade instantânea de rotação da rodinha, para fazer a conexão entre o Teorema de Green e o planímetro. Esses dois textos se complementam.

Capítulo 3

Considerações Finais

Este trabalho sugere que dois aparelhos utilizados em Ciências da Terra e áreas correlatas, a saber, o receptor GPS e o planímetro, e os princípios matemáticos envolvidos em seus funcionamentos, sirvam, respectivamente, como motivação para o estudo de dois resultados clássicos do Cálculo de Várias Variáveis: o Teorema da Função Implícita e o Teorema de Green.

O contexto prático do funcionamento do GPS para ilustrar o uso do Teorema da Função Implícita é significativo, pois se trata de um resultado bastante utilizado dentro da própria matemática, mas sem aplicações efetivas nos livros-texto de Cálculo. Por meio deste teorema é possível estimar como as incertezas presentes nas medições do tempo feitas pelo receptor GPS repercutem na precisão das medidas espaciais que se deseja. De acordo com o exemplo desenvolvido nesse trabalho, para se ter um erro máximo de 3 cm na variável x , a precisão do receptor deve ser de 10^{-11} segundos.

Esta abordagem aplicada para o uso do Teorema da Função Implícita foi inspirada pelo artigo de Nord et al. [15], e complementada com os textos do minicurso de Alves [1] e do artigo de Thompson [19] para os detalhes relativos ao funcionamento do GPS.

Para completar nosso texto do ponto de vista teórico, incluímos duas versões do Teorema da Função Implícita, com a demonstração do caso mais simples e um encaminhamento via exemplos para o caso efetivamente empregado na aplicação.

Vale destacar que os dados propostos como constantes típicas para as situações-exemplo, tanto em [1] quanto em [15], produziram soluções pouco consistentes, o que nos levou a introduzir modificações em parte desses dados. Embora Alves sugira que seja consultado um atlas geográfico ou um globo terrestre para identificar a posição efetiva do usuário do GPS, possivelmente ele não percebeu que, com os dados que sugeriu, a elevação do ponto encontrado fica incompatível com sua localização. Já em Nord et al. essa verificação não é sequer mencionada, possivelmente por fugir do escopo do artigo.

Em nosso processo de validação dos resultados percebemos a tensão presente nos trabalhos envolvendo problemas aplicados. Resolver um exercício ‘teórico’ do livro-texto, possivelmente com resposta no final para se conferir é um tipo de tarefa. Outro tipo, em geral mais desafiador, é trabalhar com um problema cuja solução possui significado físico e geográfico. Na análise da solução encontrada, quando esta não faz sentido, a primeira suspeita recai sobre a forma utilizada para encontrá-la. Será que de fato procedemos corretamente? Em nosso caso, uma vez eliminada qualquer suspeita sobre os procedimentos adotados, revisitamos o problema e os dados utilizados, procurando adequá-los para que a solução ficasse correta do ponto de vista físico e geográfico.

Ainda no capítulo que trata da matemática do GPS, para a apresentação do modelo bidimensional, fizemos uma pequena adaptação dos dados utilizados por Thompson [19], para trabalhar no sistema internacional de unidades (metros, quilogramas e segundos) ao invés do sistema inglês (pés, onças e segundos). Incluímos, no modelo bidimensional, uma análise ilustrando que para melhorar a precisão da localização do ponto que se deseja encontrar, devemos contornar os efeitos causados pela atmosfera na propagação

dos sinais. Isso justifica o fato de cada satélite emitir duas frequências diferentes, que no caso do modelo bidimensional correspondem ao mensageiro e a seu assistente.

De acordo com o Teorema 1.2.0.1, sendo os centros dos satélites não coplanares, o sistema (1.5) de interseção entre as quatro esferas tem solução única. Ocorre que os sistemas (1.6), (1.7) ou (1.8) não têm solução única. Isso já ocorria com seus equivalentes bidimensionais, quando havia duas soluções, mas uma ficava fora do círculo pavimentado. No caso do sistema (1.9), as duas soluções obtidas correspondem a dois pontos que estão dentro da gaiola de satélites, porém existem outros fatores preponderantes na emissão dos sinais dos satélites, envolvendo a geometria orbital da Terra, bem como o efeito de refração da ionosfera, dentre outros. Na validação dos resultados encontrados na solução do sistema (1.9) percebemos que o descarte de uma das soluções poderia estar associado à inclinação desfavorável do sinal em relação ao vetor posição da localização correspondente, além da elevação excessiva do ponto obtido com a segunda solução.

A Figura 2.10, que ilustra a relação (2.2, p.43), na qual visualizamos a identificação dos pontos (x, y) de \mathbb{R}^2 com $(x, y, 0)$ de \mathbb{R}^3 e posterior ampliação para $(x, y, 1)$, permite vislumbrar ainda outras conexões, envolvendo as coordenadas homogêneas da geometria projetiva. Conforme observado pela professora Yuriko Baldin na defesa oral deste trabalho, esta "projetivização" é essencial no tratamento de movimentos rígidos via álgebra matricial, bastante empregado na computação gráfica e em robótica (ver, por exemplo, [2]).

No caso da relação entre o funcionamento do planímetro e o teorema de Green, embora tenhamos apontado brevemente como isso ocorre, destacamos outros trabalhos nesta temática que detalham melhor tal relação ([4, 5, 16, 18]). Pela forma como encaminhamos nosso estudo, percebemos que poderíamos oferecer alguma contribuição ao enfatizar diversos elementos e conceitos matemáticos presentes no processo do cálculo de áreas

de regiões planas, especialmente as simples, como triângulos e regiões poligonais, e suas inter-relações.

Dentre as expressões que permitem estabelecer a equação de uma reta em \mathbb{R}^2 , a que envolve um determinante 3×3 ser nulo (cf. (2.2)) propicia uma interessante oportunidade de conexão com elementos da Geometria Analítica, como vetores geradores de planos, produto misto e volume de paralelepípedo, entre outros.

Já no caso da área de regiões poligonais, a idéia geométrica de particionar a região em triângulos permite deduzir a expressão geral, a qual, por sua vez, também pode ser obtida via Teorema de Green. Sua prova é incluída em nosso texto, para o caso de regiões parametrizadas por retângulos, assim como apresentado em [12]. Este importante resultado matemático pode ser visto como uma espécie de extensão do Teorema Fundamental do Cálculo, ao relacionar a integral dupla do rotacional de um campo (função ‘derivada’) em uma região fechada do plano com a integral de linha deste campo (função ‘primitiva’) no contorno da região. Com a escolha de campos convenientes, com rotacional identicamente igual a um, a integral dupla que computa a área de uma dada região simples pode ser substituída por uma integral de linha no seu contorno. Esse teorema ajuda a evidenciar a convenção utilizada na expressão para a área de uma região poligonal para a ordem com que a poligonal deve ser percorrida. Tal convenção está associada à orientação positiva para a curva: a região por ela delimitada deve ficar sempre à esquerda quando se percorre seu contorno.

Gostaríamos que o nosso trabalho mobilizasse o leitor tanto para a investida em problemas aplicados, quanto para se manter atento para o estabelecimento de possíveis conexões em seu processo de ensinar e aprender matemática.

Bibliografia

- [1] ALVES, S. **A Geometria do Globo Terrestre**. minicurso proferido na II Bienal da SBM (Salvador, BA, 2004), texto disponível em <http://www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf>.
Acessado em 15/09/2007.
- [2] ANTON, H.;RORRES, C., **Álgebra Linear com Aplicações**, 8^a ed. Porto Alegre: Bookmam, 2001.
- [3] BORTOLOSSI, H. J. **Cálculo diferencial a várias variáveis: uma introdução à teoria de otimização**. Editora PUC-Rio/Editora Loyola, São Paulo - SP, 2002.
- [4] COLLI, E. **O Planímetro Linear** <http://matemateca.incubadora.fapesp.br/portal/textos/matemateca/planimetro/>
Acessado em 22/01/2008.
- [5] COSTA, F. S. **Áreas e Contornos**. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional de Matemática), IMECC, Unicamp, Campinas, 2008.
- [6] FIGUEIREDO, V. L. X.; MELLO, M. P.; SANTOS, S. A. **Cálculo com Aplicações: Atividades Computacionais e Projetos**.. Coleção IMECC Textos Didáticos 3, ISBN 85-87185-04-7. Acompanha CD-Rom. Campinas, SP

- [7] GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo C: Funções Vetoriais**, Integrais Curvilíneas e Integrais de Superfície. 3ª edição, Ed. Makron Books, São Paulo - SP, 1999.
- [8] HAIRER, E.; WANNER, G. **Analysis by Its History**. Springer, New York - EUA, 2000.
- [9] LIMA, E. L. **Análise Real**.(Coleção Matemática Universitária) 5ª edição, vol.1, IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2004.
- [10] LIMA, E. L. **Análise Real**.(Coleção Matemática Universitária) 5ª edição, vol.2, IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2004.
- [11] MAIA, T. C. B. **Estudo e análise de Poligonais Segundo a NBR 13.133 e o Sistema de Posicionamento Global**(1999), dissertação (mestrado) -Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo - SP.
- [12] McCALLUM, W. G. et al. **Cálculo de Várias Variáveis**. (Tradução: Elza F. Gomide), São Paulo - SP:Editora Edgard Blücher LTDA, 1997.
- [13] MENZORI, M. **Classificação da Exatidão de Coordenadas Obtidas com a Fase da Portadora L1 do GPS**(2005), tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo - SP.
- [14] NETO, S. P. **Matemática**. Vol.3, 2º grau, São Paulo - SP: Scipione Autores e Editores, 1984.
- [15] NORD, G.; JABON, D.; NORD, J. **The Global Positioning System and the Implicit Function Theorem..** SIAM Review 40 (3) pp.692-696, 1998.

- [16] RABELO, A. B. e MANSO, F. F. **O Planímetro e o Teorema de Green**, Belo Horizonte, 12p. Disponível em www.mat.ufmg.br/comed/2004/e2004/planimetro.pdf
Acessado em 23/01/2008.
- [17] SANTOS, S. A. **Exploração da linguagem escrita nas aulas de matemática**, in: *Escritas e Leituras na Educação Matemática*, Adair Mendes Nacarato e Celi A. Espasandin Lopes (orgs.) [pp.127-141], Autêntica, Belo Horizonte (MG), 2005.
- [18] TAVARES, J. N. **Teoria Geral dos Planímetros**
<http://cmup.fc.up.pt/cmup/cmec2/Planimetro/Planimetro.html>
Acessado em 19/01/2008.
- [19] THOMPSON, R. B. **Global Positioning System: The Mathematics of GPS Receivers**. *Mathematics Magazine* 71 (4) pp.260-269, 1998.
- [20] **Sistema de Posicionamento Global**
http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_Posicionamento_Global#Descri.C3.A7.C3.A3o_t.C3.A9cnica.
Acessado em 10/01/2008.