

EXTENSÃO ANALÍTICA
E
CLASSES REGULARES
EM ESPAÇOS DE BANACH

ELIANE QUELHO

ORIENTADOR

PROF. DR. JORGE MUJICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

A meus pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Jorge Mujica que, com sua segura orientação, permitiu a realização deste trabalho.

A meus pais, professores e colegas por seus estímulos, ensinamentos e discussões.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - pelo apoio financeiro.

EXTENSÃO ANALÍTICA E CLASSES REGULARES
EM ESPAÇOS DE BANACH

Introdução.

CAPÍTULO I- Domínios de Riemann sobre espaços de Banach.....1

CAPÍTULO II- Funções holomorfas em domínios de Riemann.....8

CAPÍTULO III- Classes regulares.....11

CAPÍTULO IV- Topologia sobre os espaços das aplicações holomorfas.....16

CAPÍTULO V- Construção da envoltória de holomorfia.....22

CAPÍTULO VI- Domínios de holomorfia e propriedades de convexidade.....29

BIBLIOGRAFIA.....36

INTRODUÇÃO

Este trabalho é concernente ao estudo de extensão de funções holomorfas definidas em domínios de Riemann sobre um espaço de Banach. Nosso estudo está baseado no conceito fundamental de classes regulares. Nossa referência mais importante é o trabalho de M. Schottenloher (10).

Iniciamos o capítulo I com as definições e propriedades elementares de domínio de Riemann sobre um espaço de Banach.

No capítulo II introduzimos a definição de aplicações holomorfas definidas em domínios de Riemann; o espaço vetorial dessas aplicações é representado por $\mathcal{H}(X)$. Definimos também diversas outras noções como extensão analítica simultânea, domínio de holomorfia, envoltória de holomorfia, etc.

No capítulo III definimos os importantes conceitos de classes regulares e de coberturas admissíveis e demonstramos as propriedades mais importantes.

Introduzimos várias topologias em $\mathcal{H}(X)$ no capítulo IV e demonstramos que se $j: X \rightarrow Y$ é uma extensão analítica simultânea de $\mathcal{H}(X)$ então a aplicação restrição $j^*: \mathcal{H}(Y) \ni g \mapsto g \circ j \in \mathcal{H}(X)$ é um isomorfismo de espaço vetorial topológico quando $\mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{H}(Y)$ são munidos da topologia bornológica associada à topologia compacto aberta.

No capítulo V usamos resultados do capítulo IV para obter uma construção da envoltória de holomorfia de um domínio de Riemann (X, p) via o espectro $\mathcal{H}(X)$.

Finalmente no capítulo VI demonstramos um teorema de Cartan-Thullen para classes regulares de funções holomorfas.

CAPÍTULO I

DOMÍNIOS DE RIEMANN SOBRE ESPAÇOS DE BANACH

Definição 1.1: Seja E um espaço de Banach. O par (X,p) é chamado uma variedade de Riemann sobre E se $X \neq \emptyset$ é um espaço de Hausdorff e $p:X \rightarrow E$ é um homeomorfismo local. (X,p) é dito um domínio de Riemann sobre E se (X,p) é uma variedade de Riemann sobre E e X é conexo.

Definição 1.2: Sejam (X,p) e (Y,q) variedades de Riemann sobre E . Uma aplicação $j:X \rightarrow Y$ é chamada um morfismo se j é contínua e satisfaz $p=q \circ j$.

Definição 1.3: Seja $j:X \rightarrow Y$ um morfismo. Para cada espaço topológico Z define-se

$$j^*: \mathcal{C}(Y;Z) \rightarrow \mathcal{C}(X;Z)$$

$$g \mapsto g \circ j$$

onde $\mathcal{C}(Y;Z)$ e $\mathcal{C}(X;Z)$ são os espaços das funções contínuas de Y em Z e de X em Z respectivamente. Como exemplo, seja $p:X \rightarrow E$ onde (X,p) é um domínio de Riemann sobre E . Isto define

$$p^*E' = \{\mu \circ p : \mu \in E'\}.$$

Lema 1.4: Sejam $i,j:X \rightarrow Y$ dois morfismos de domínios de Riemann sobre E tal que $i(x)=j(x)$ pelo menos num ponto $x \in X$. Então $i=j$. Em particular, todo morfismo $j:X \rightarrow Y$ com um ponto fixo é a identidade.

Demonstração: O conjunto $Z = \{x \in X / i(x) = j(x)\}$ é fechado pois i e j são aplicações contínuas num espaço de Hausdorff. Vamos provar que Z é aberto. Sejam $x \in Z$, $V \subset Y$ aberto com $i(x) = j(x) \in V$ tal que $q|_V$ seja homeomorfismo e U aberto de X com $x \in U$ e $i(U) \subset V$, $j(U) \subset V$; para $z \in U$ temos $q \circ i(z) = p(z) = q \circ j(z)$. Como $q|_V$ é homeomorfismo temos $i(z) = j(z)$. Assim $U \subset Z$ e Z é aberto. Como X é conexo temos $Z = X$.

Lema 1.5: Seja (X, p) um domínio de Riemann sobre E e sejam $U, V \subset X$ subconjuntos abertos tais que $U \cap V \neq \emptyset$, $p(U) \cap p(V)$ seja conexo e $p|_U: U \rightarrow p(U)$, $p|_V: V \rightarrow p(V)$ sejam homeomorfismos. Então $p|_{U \cup V}: U \cup V \rightarrow p(U \cup V)$ é um homeomorfismo.

Demonstração: É suficiente provar que $p|_{U \cup V}$ é injetiva. Denotemos $q_U = (p|_U)^{-1}|_{p(U) \cap p(V)}: p(U) \cap p(V) \rightarrow U$ e analogamente q_V . Pela continuidade de q_U e q_V o conjunto $Z = \{z \in p(U) \cap p(V) / q_U(z) = q_V(z)\}$ é fechado em $p(U) \cap p(V)$. Z é não vazio pois para $x \in U \cap V$ temos $p(x) \in p(U \cap V) \subset p(U) \cap p(V)$ e $q_U(p(x)) = x = q_V(p(x))$ ou seja $p(x) \in Z$. Z é também aberto desde que $Z = p(U \cap V)$ e pelo fato de p ser aplicação aberta. Como $p(U) \cap p(V)$ é conexo, temos $p(U \cap V) = p(U) \cap p(V)$ e para $x \in U$, $y \in V$ com $p(x) = p(y) = z$ segue $x = q_U(z) = q_V(z) = y$.

Lema 1.6: Seja E um espaço de Banach. Então temos:

- (a) E é conexo por caminhos;
- (b) Toda variedade de Riemann sobre E é localmente conexa por caminhos;
- (c) Todo domínio de Riemann sobre E , (X, p) , é conexo por caminhos.

Demonstração: (a) e (b) são óbvias.

(c): Sejam $x_0 \in X$ e $Z = \{z \in X : z \text{ pode ser ligado por caminho a } x_0\}$. Z é aberto por (b). Provemos que Z é também fechado. Seja $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma rede em Z , $z_\alpha \rightarrow z$. Para $V(z)$, vizinhança de z , por (b) existe $W(z)$, vizinhança de z conexa por caminho contida em $V(z)$ e tal que existe $z_\alpha \in W(z)$, isto é, z_α pode ser ligado por caminho a z . Como z_α pode ser ligado por caminho a x_0 , temos que z pode ser ligado por caminho a x_0 ou seja $z \in Z$. Como X é conexo temos $Z=X$.

Lema 1.7: Se um conjunto aberto não vazio Z num domínio de Riemann sobre $E(X, p)$ é sequencialmente fechado, então $Z=X$.

Demonstração: Seja $x \in Z$. Pelo lema anterior, existe uma aplicação contínua $\phi: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\phi(0) \in Z$ e $\phi(1)=x$. $\phi^{-1}(Z)$ é aberto em $[0, 1]$. $\phi^{-1}(Z)$ é também fechado pois Z é sequencialmente fechado. Como $\phi^{-1}(Z)$ é não vazio e como $[0, 1]$ é conexo temos $\phi^{-1}(Z)=[0, 1]$; logo $x=\phi(1) \in Z$. Assim $Z=X$.

Definição 1.8: Seja (X, p) um domínio de Riemann sobre E . A distância à fronteira $d_X(x)$ de um ponto $x \in X$ é definido por:

$$d_X(x) = \sup\{r > 0 \mid \text{existe } U \subset X \text{ tal que } x \in U \text{ e } p|_U: U \rightarrow B_E(px, r) \text{ é homeomorfismo}\}.$$

Para $r \in (0, d_X(x)]$ denotemos por $B_X(x, r)$ a componente conexa de $p^{-1}(B_E(px, r))$ que contém o ponto x . Finalmente para $V \subset X$ definimos $d_X(V) = \inf\{d_X(x) \mid x \in V\}$ e $V_r = \bigcup\{B_X(x, r) \mid x \in V\}$ para $r \in (0, d_X(V)]$.

Proposição 1.9: Seja (X,p) uma variedade de Riemann sobre E . A aplicação $d_X: X \rightarrow (0, \infty]$ é contínua e temos $|d_X(x) - d_X(y)| \leq \|px - py\|$.

Demonstração: Fixemos $x \in X$. Seja $py \in B_E(px, d_X(x))$. Então $B_E(py, d_X(x) - \|px - py\|) \subset B_E(px, d_X(x))$. Daí, $d_X(y) \geq d_X(x) - \|px - py\|$. É claro que se $py \notin B_E(px, d_X(x))$, então $d_X(y) > 0 \geq d_X(x) - \|px - py\|$. Assim $d_X(y) \geq d_X(x) - \|px - py\|$ qualquerque seja $y \in X$. Analogamente, $d_X(x) \geq d_X(y) - \|px - py\|$.

Lema 1.10: Seja $j: X \rightarrow Y$ um morfismo de domínios de Riemann. Então $d_Y(j(x)) \geq d_X(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração: Seja $d_X(x) = s$. Então para $r \in (0, s)$ existe U_x , vizinhança de x , tal que U_x é homeomorfo a $B_E(px, r)$. Temos também $j(U_x)$ homeomorfo a $B_E(px, r)$ pois $q(j(U_x)) = p(U_x) = B_E(px, r)$, q contínua e $(q|_{j(U_x)})^{-1} = j \circ (p|_{U_x})^{-1}$ é também contínua. Assim $d_Y(j(x)) \geq s$.

Definição 1.11: Para $z \in E$, $a \in E$, $a \neq 0$ e $r > 0$ definimos

$$D_a(z, r) = \{z + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < r\} \subset E$$

e para $x \in X$ definimos

$d_X(x, a) = \sup\{r > 0 \mid \exists L \subset X \text{ tal que } x \in L \text{ e } p|_L: L \rightarrow D_a(px, r) \text{ é um homeomorfismo}\}$.

Se $r \in (0, d_X(x, a)]$ denotemos por $D_a(x, r)$ a componente conexa de $p^{-1}(D_a(px, r))$ que contém x .

Lema 1.12: $d_X(x) = \inf_{\|a\|=1} d_X(x,a)$.

Demonstração: (a) Mostremos que $d_X(x) \leq \inf_{\|a\|=1} d_X(x,a)$. Seja $0 < r < d_X(x)$ e seja $\|a\|=1$. Desde que $D_a(px,r) \subset B_E(px,r)$, segue que $r < d_X(x,a)$. Como r é arbitrário temos $d_X(x) \leq d_X(x,a)$. Assim $d_X(x) \leq \inf_{\|a\|=1} d_X(x,a)$.

(b) Agora, mostremos que $d_X(x) \geq \inf_{\|a\|=1} d_X(x,a)$. Seja $0 < r < \inf_{\|a\|=1} d_X(x,a)$. Seja $Z = \bigcup_{\|a\|=1} D_a(x,r)$. Observe que $\bigcup_{\|a\|=1} D_a(px,r) = B_E(px,r)$. Como $p|_{D_a(x,r)}$ é injetiva segue que $p|_{Z:Z \rightarrow B_E(px,r)}$ é injetiva também.

Assim $p|_{Z:Z \rightarrow B_E(px,r)}$ é contínua, injetiva e sobrejetiva. Para provar que $p|_Z$ é uma aplicação aberta é suficiente mostrar que Z é aberto pois p é um homeomorfismo local. Fixemos $a \in E$ com $\|a\|=1$.

Para cada $y \in D_a(x,r)$ podemos encontrar uma vizinhança U_y de y que é homeomorfa por p a uma vizinhança V_{py} de py . Desde que $D_a(x,r)$ é relativamente compacto, existem $y_1, \dots, y_n \in D_a(x,r)$ tal que

$D_a(x,r) \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$. Pelo lema 1.5, $U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ é homeomorfo por p a $V_{py_1} \cup \dots \cup V_{py_n}$. Daí podemos encontrar uma vizinhança

U de $D_a(x,r)$ que é homeomorfa por p a uma vizinhança $px+V$ de $D_a(px,r)$, onde podemos assumir $V \subset B_E(px,r)$, V uma bola centrada na origem. Assim cada $D_b(x,1)$ com $b \in V$ está contida em algum

$D_c(x,r)$ com $\|c\|=1$. Daí para cada $b \in V$, $p|_{D_b(x,1):D_b(x,1) \rightarrow$

$D_b(px,1)$ é um homeomorfismo. Como $p|_{U:U \rightarrow px+V}$ é um homeomorfismo e $px+V = \bigcup_{b \in V} D_b(px,1)$ segue que $U = \bigcup_{b \in V} D_b(x,1)$. Mas cada

$D_b(x,1)$ está contida em Z (pois cada $D_b(x,1)$, com $b \in V$, está contido em algum $D_c(x,r)$ com $\|c\|=1$). Daí $U \subset Z$ e Z é aberto.

Proposição 1.13: Seja (X,p) um domínio de Riemann sobre E . Se E é separável então X é segundo enumerável. Em particular, X é Lindelöf e separável.

Demonstração: Seja β uma base enumerável para os conjuntos abertos de E formado pelas bolas. Fixemos $x_0 \in X$ e seja X_n o conjunto dos pontos $x \in Y$ que podem ser ligados a x_0 por uma cadeia de no máximo n conjuntos do tipo $B_X(y,r)$ com $B_E(py,r) \in \beta$. É claro que cada X_n é aberto, e desde que X é conexo, vemos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Assim para mostrar que X é segundo enumerável, é suficiente provar que cada X_n é segundo enumerável. Provaremos por indução em n . Observe que

$$X_1 = \{B_X(y,r) : B_E(py,r) \in \beta \text{ e } x_0 \in B_X(y,r)\}.$$

Desde que E é segundo enumerável, $B_E(py,r)$ e $B_X(y,r)$ também são.

Logo X_1 é segundo enumerável. Suponhamos agora que X_n é segundo enumerável. Então X_n é separável. Seja D_n um conjunto enumerável e denso de X_n . Então

$$X_{n+1} = \{B_X(y,r) : B_E(py,r) \in \beta \text{ e } B_X(y,r) \text{ contem algum } z \in D_n\}.$$

Assim X_{n+1} é também segundo enumerável, terminando a demonstração.

Corolário 1.14: Se E é separável, então cada fibra $p^{-1}(a)$ é no máximo enumerável.

Demonstração: Como X é Lindelöf, o subconjunto fechado $p^{-1}(a)$ é também Lindelöf. Mas $p^{-1}(a)$ é certamente discreto, daí é no máximo enumerável.

Corolário 1.15: Se D é um subconjunto enumerável denso de E , então $p^1(D)$ é um subconjunto enumerável e denso de X .

Demonstração: Se D é um subconjunto denso de E então claramente $p^1(D)$ é um subconjunto denso de X . Agora é só aplicar o corolário anterior.

CAPÍTULO II

FUNÇÕES HOLOMORFAS EM DOMÍNIOS DE RIEMANN

Definição 2.1: Seja (X, p) um domínio de Riemann sobre o espaço E . Uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada holomorfa (analítica) se para todo $x \in X$ existe $r > 0$, $r < d_X(x)$ tal que com $B = B_X(x, r)$ a aplicação

$$f \circ (p|_B)^{-1}: B_E(px, r) \rightarrow \mathbb{C}$$

é holomorfa. $\mathcal{H}(X)$ denotará o espaço vetorial das funções holomorfas de X em $\mathbb{C}$.

Observação 2.2: Segue das propriedades elementares de funções holomorfas em um conjunto aberto de E que uma função $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se e somente se para todo $x \in X$ existem uma sequência

$(\hat{d}^n f(x))_{n \geq 0}$ de polinômios contínuos homogêneos $\hat{d}^n f(x): E \rightarrow \mathbb{C}$ de grau n e $r > 0$ satisfazendo $r < d_X(x)$ e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \left\{ \left\| f(y) - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \cdot (py - px) \right\| ; y \in B_X(x, r) \right\} = 0.$$

Observação 2.3: Seja $f \in \mathcal{H}(X)$; a função $\hat{d}_a^n f: X \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $x \in X \rightarrow \hat{d}^n f(x) \cdot a \in \mathbb{C}$ é holomorfa. Isto segue por (4).

Observação 2.4: (Desigualdade de Cauchy) Dada $f \in \mathcal{H}(X)$, $x \in X$ e $s > 0$ temos

$$\left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \right\| \leq s^{-n} \|f\|_{B(x, s)}.$$

Ver (4).

Observação 2.5: Uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica se e somente se f é contínua e G -analítica no seguinte sentido: Para todo $x \in X$ e $a \in E \setminus \{0\}$ a aplicação:

$$\{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| < d_X(x, a)\} \ni \lambda \rightarrow f \circ (p|_D)^{-1}(px + \lambda a) \in \mathbb{C},$$

onde $D = D_a(x, d_X(x, a))$, é analítica. Ver (5).

Definição 2.6: Seja A um conjunto de funções holomorfas definidas num domínio de Riemann (X, p) sobre E .

(a) Um morfismo $j: X \rightarrow Y$ de domínios de Riemann sobre E é dito uma extensão analítica simultânea (e.a.s.) de A se cada $f \in A$ fatora analiticamente através de j ; isto é, para cada $f \in A$ existe $f' \in \mathcal{H}(Y)$ tal que $f' \circ j = f$. f' é dita a extensão de f a Y através de j .

(b) Uma e.a.s. $j: X \rightarrow Y$ é dita maximal se j fatora através de cada e.a.s. $j': X \rightarrow Z$ de A como um morfismo ou seja existe um morfismo $j'': Z \rightarrow Y$ tal que $j = j'' \circ j'$. Se $j: X \rightarrow \mathcal{H}(X)$ é uma e.a.s. maximal de $\mathcal{H}(X)$, então $\mathcal{H}(X)$ será chamada uma envoltória de holomorfia de X .

(c) X é chamado um A-domínio de holomorfia se cada e.a.s. de A é um isomorfismo de domínios. X é um domínio de holomorfia se X é um $\mathcal{H}(X)$ -domínio de holomorfia. X é o domínio de existência de uma aplicação $f \in \mathcal{H}(X)$ se X é um $\{f\}$ -domínio de holomorfia.

Observação 2.7: Para $j: X \rightarrow Y$ um morfismo de domínios de Riemann sobre E, podemos definir a aplicação linear sobrejetiva

$$j^*: g \in \mathcal{H}(Y) \rightarrow g \circ j \in \mathcal{H}(X)$$

e em particular

$$p^*: g \in \mathcal{H}(E) \rightarrow g \circ p \in \mathcal{H}(X)$$

Aqui e a seguir, para uma aplicação $g: B \rightarrow F$ com valores num espaço normado, usaremos a notação:

$$\|g\|_B = \sup\{\|g(x)\| / x \in B\}.$$

Definição 2.8: Seja X um domínio de Riemann sobre E e $A \in \mathcal{H}(X)$.

Um conjunto BCX é chamado A-limitante se $\|f\|_B < \infty$ para toda $f \in A$.

Definição 2.9: Seja $f \in \mathcal{H}(X)$ uma função holomorfa no domínio de Riemann (X, p) sobre E. O raio de convergência de f no ponto $x \in X$ é definido por:

$$\rho_f(x) = \sup\{r \geq 0 / \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \right\| r^n < \infty\}.$$

CAPÍTULO III

CLASSES REGULARES

Definição 3.1: Um conjunto não vazio $A \subset \mathcal{H}(X)$ de funções analíticas em X onde (X, p) é um domínio de Riemann sobre E é chamado uma classe regular em X se:

- (a) $\lambda f^m \in A$ para toda $f \in A$, $m \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (b) $\tilde{d}_a^n f \in A$ para toda $f \in A$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in E \setminus \{0\}$;
- (c) Para $x \in X$, $\rho_A(x) > 0$ onde $\rho_A(x) = \inf\{\rho_f(x) / f \in A\}$.

Pela desigualdade de Cauchy, a última propriedade em 3.1 é equivalente a: Para $x \in X$ existe uma vizinhança de x A -limitante.

Definição 3.2: Uma cobertura aberta $\mathcal{V}$ do domínio de Riemann (X, p) sobre E é dita admissível se:

- (a) Para todo $U \in \mathcal{V}$, existem $s > 0$ e $V \in \mathcal{V}$ tal que $d_X(U) > s$ e $U_s \subset V$;
- (b) $U \cup V \in \mathcal{V}$ para todo $U, V \in \mathcal{V}$.

A cobertura admissível é dita limitada se $p(V)$ é limitada em E para todo $V \in \mathcal{V}$.

Para uma cobertura admissível $\mathcal{V}$ definimos:

$$A = \{f \in \mathcal{H}(X) / \|f\|_U < \infty \text{ para todo } U \in \mathcal{V}\}.$$

Observações 3.3: (a) Se $\mathcal{V}$ é uma cobertura admissível enumerável então $A_{\mathcal{V}}$ é uma álgebra de Frechet.

(b) $A_{\mathcal{V}}$ é uma classe regular. De fato a primeira propriedade de 3.1 é evidente; provemos a segunda e a terceira propriedades. Seja $U \in \mathcal{V}$ e s, V como em 3.2 (a). De $x \in X$ e $f \in A_{\mathcal{V}}$ segue da desigualdade de Cauchy:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \hat{d}_a^n f(x) \right| &\leq \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \right\| \|a\|^n \leq \left(\left\| \frac{a}{s} \right\| \right)^n \|f\|_{B(x,s)} \leq \\ &\leq \left(\frac{\|a\|}{s} \right)^n \|f\|_V < \infty. \end{aligned}$$

Assim $\|\hat{d}_a^n f\|_U < \infty$ para toda $f \in A_{\mathcal{V}}$, $a \in E \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Para $r \in (0, s)$ a série $\sum \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \|r\|^n$ é convergente pois $\sum \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \|r\|^n \leq \|f\|_V \left(\frac{r}{s}\right)^n$. Logo $\rho_f(x) \leq s$ para toda $f \in A$.

(c) Se $\mathcal{V}$ é uma cobertura admissível limitada de E então $\{\mu.p : \mu \in E'\} \subset A_{\mathcal{V}}$.

Proposição 3.4: Seja (X, p) um domínio de Riemann sobre E . Então $\mathcal{H}(X) = \bigcup_{\mathcal{V} \in \beta} A$ onde $\beta = \{\mathcal{V} / \mathcal{V} \text{ é cobertura enumerável e limitada de } X\}$.

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{H}(X)$. Para $x \in X$ seja $U_x = B_X(x, x)$ com $\rho_x \leq d_X(x)$ e tal que $\|f\|_{B_X(x, x)} < \infty$. Seja $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_x} < \rho_x$ e sejam $U_{x,n} = B(x, x - \frac{1}{n})$ para $n \geq n_x$ e $U_{x,n} = \emptyset$ para $n < n_x$. Para $n \in \mathbb{N}$ seja $U_n = \{U_{x,n} : |p x| < n \text{ e } \|f\|_{U_x} \leq n\}$. Então $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$. Seja $\mathcal{V} = \{U_n; n=1, 2, \dots\}$. É claro que $\mathcal{V}$ é uma cobertura enumerável e limitada. Vamos provar que $\mathcal{V}$ é admissível: Dado U_n existem s ,

$0 < s < \frac{1}{n}$ e $k > 0$ tal que $\frac{1}{n} - s > \frac{1}{k}$; $(U_{x,n})_s = B_X(x, \rho_X - (\frac{1}{n} - s)) \subset B_X(x, \rho_X - \frac{1}{k}) = U_{x,k}$. Isto prova a propriedade (a) de 3.2; a propriedade (b) é evidente, portanto $\mathcal{V}$ é admissível. Finalmente é claro que $f \in A_{\mathcal{V}}$.

De agora em diante toda cobertura admissível será enumerável e limitada e toda classe regular será definida por cobertura admissível.

Proposição 3.5: Sejam $A \subset \mathcal{H}(X)$ uma classe regular no domínio de Riemann (X, p) sobre E e $z \in X$ tal que $d_X(z) < r \leq \rho_A(z)$ para um certo $r > 0$. Então existe uma e.a.s. $j: X \rightarrow \tilde{X}$ de A tal que

$$d_{\tilde{X}}(j(z)) \geq r.$$

Demonstração: Existe uma vizinhança aberta conexa U de z tal que $p|_U: U \rightarrow p(U)$ é um homeomorfismo e $p(U)$ está contido em $B = B_E(pz, r)$. Por hipótese, cada $f \circ (p|_U)^{-1}$, $f \in A$, pode ser estendida analiticamente a B pela expansão em série de potência:

$$\tilde{f}(pz+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n f(z) \cdot a^n \text{ para } \|a\| < r. \text{ Na união disjunta de } X \text{ e } B :$$

$X \cup B$, introduzimos a seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se:

$$\begin{cases} x, y \in X \text{ com } p_x = p_y; \text{ ou} \\ x \in X, y \in B \text{ com } p_x = y; \text{ ou} \\ x \in B, y \in X \text{ com } x = p_y; \text{ ou} \\ x, y \in B \text{ com } x = y. \end{cases}$$

Seja $\tilde{X} = (X \cup B) / \sim$ o espaço quociente e seja $\tilde{x}$ a classe de equivalência do ponto $x \in X \cup B$. Então a aplicação $j: X \rightarrow \tilde{X}$ e $\tilde{X}$ é contínua. (Lembramos que $U \subset \tilde{X}$ é aberto se e somente se $j^{-1}(U)$ é aberto). Seja $\tilde{p}: X \rightarrow E$ definida por

$$\tilde{p}(\tilde{x}) = \begin{cases} p(x) & \text{se } x \in X \\ x & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Temos $p = \tilde{p} \circ j$ e $\tilde{p}|_{j(X)}$ biunívoca pois se $\tilde{p}(j(x)) = \tilde{p}(j(y))$ então $px = py$, o que implica $x \sim y$. Agora provemos que j é aberta. É fácil ver que se $A \subset X$ então $j^{-1}(j(A)) = p^{-1}(p(A))$. Seja A um aberto contido em X e $x \in A$. Seja $U_x \subset A$ tal que $p|_{U_x}: U_x \rightarrow p(U_x)$ seja homeomorfismo. Então $j^{-1}(j(U_x)) = p^{-1}(p(U_x))$. Logo $j^{-1}(j(U_x))$ é aberto em X e $j(U_x)$ é aberto em $\tilde{X}$. Como $j(x) \in j(U_x) \subset j(A)$, temos $j(A)$ aberto em $\tilde{X}$. Portanto j é aberta. Com isto é fácil provar que $\tilde{X}$ é Hausdorff e que $\tilde{p}$ é um homeomorfismo local.

Para cada $f \in A$ definimos $\tilde{f}$ em $\tilde{X}$ da seguinte maneira:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ \tilde{f}(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

É fácil ver que $\tilde{f}$ é analítica e satisfaz $f = \tilde{f} \circ j$, o que implica que j é uma e.a.s. de A . Finalmente temos $d_{\tilde{X}}(j(z)) \geq r$ desde que $\tilde{p}|_{\tilde{B}}: \tilde{B} \rightarrow B$ é um homeomorfismo, onde $\tilde{B} = \{\tilde{x} / x \in B\}$.

Teorema 3.6: Sejam $A = A_{\gamma}$ uma classe regular no domínio de Riemann (X, p) sobre E , $U \in \mathcal{V}$ e $s > 0$ tal que $d_X(U) > s$ e $U_s \subset V$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$. Então a cada x pertencente ao conjunto:

$$\hat{U}_A = \{x \in X : |f(x)| \leq \|f\|_U, \forall f \in A\}$$

vale,

(a) $\rho_f(x) \geq s$ para toda $f \in A$; isto é, A pode, se necessário, ser estendida simultaneamente a $B_X(x, s)$ (no sentido de 3.5)

(b) Cada continuação analítica $\tilde{f}$ de A satisfaz:

$$\|\tilde{f}\|_{B_X(x, s)} \leq \|f\|_V.$$

Demonstração: Usando a desigualdade de Cauchy obtemos

$\|\frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f\|_U \leq s^n \|f\|_V$ para todo $a \in B_E(0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ e $f \in A$. Pelo fato de $\hat{d}_a^n f$ pertencer a A segue: $\|\frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f(x)\| \leq \|\frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f\|_U \leq s^n \|f\|_V$, assim

$\|\frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f(x)\| \leq s^n \|f\|_V$. Agora, para todo $r \in (0, s)$ a série $\sum \|\frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f(x)\| r^n \leq \|f\|_V \sum (\frac{r}{s})^n$ é convergente, o que implica $\rho_f(x) \geq s$ para toda $f \in A$.

Para mostrar (b) podemos, de acordo com 3.5, assumir

$d_X(x) \geq s$. Seja $y \in B_X(x, s)$; então $\|py - px\| = r < s$ e

$$\|\tilde{f}(y)\| = \left| \sum \frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f(x) \cdot (py - px)^n \right| \leq \sum \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f(x) \right\| \|py - px\|^n \leq \|f\|_V \sum \left(\frac{r}{s}\right)^n =$$

$= \frac{s}{s-r} \|f\|_V$. Assim, existe $c > 0$ tal que $|\tilde{f}(y)| \leq c \|f\|_V$, $\forall f \in A$. Como

$f^j \in A$, vale $|\tilde{f}(y)|^j \leq c^j \|f\|_V^j$, $\forall f \in A$ ou $|\tilde{f}(y)| \leq \sqrt[j]{c} \|f\|_V$, $\forall f \in A$.

Fazendo $j \rightarrow \infty$ obtemos $|\tilde{f}(y)| \leq \|f\|_V$, $\forall f \in A$. Logo $\|\tilde{f}\|_{B_X(x, s)} \leq \|f\|_V$.

CAPÍTULO IV

TOPOLOGIAS SOBRE OS ESPAÇOS DAS APLICAÇÕES HOLOMORFAS

Definição 4.1: Representemos por τ_0 a topologia compacto aberta em $\mathcal{H}(X)$, ou seja a topologia definida pelas seminormas:

$$p_K: f \in \mathcal{H}(X) \rightarrow p_K(f) = \|f\|_K,$$

onde K é um compacto em X .

Definição 4.2: Diz-se que uma seminorma p em $\mathcal{H}(X)$ é portada pelo subconjunto compacto $K \subset X$ se para todo V que contém K existe um número $c(V) > 0$ tal que

$$p(f) \leq c(V) \|f\|_V,$$

para toda $f \in \mathcal{H}(X)$. A topologia definida em $\mathcal{H}(X)$ pelas seminormas p em $\mathcal{H}(X)$ que são portadas por algum subconjunto K de X se representa por τ_ω .

Observação 4.3: Foi provado que $\mathcal{H}(X) = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ onde $\mathcal{B} = \{U / U \text{ é cobertura admissível}\}$. Denotemos por τ_δ a topologia limite indutivo em $\mathcal{H}(X)$ das inclusões $A \hookrightarrow \mathcal{H}(X)$. Notação: $(\mathcal{H}(X), \tau_\delta) = \lim_{\rightarrow} A$.

Observação 4.4: $(\mathcal{H}(X), \tau_\delta)$ é um espaço bornológico e tonelado. Ver (6).

Proposição 4.5: $\tau_0 \leq \tau_\omega \leq \tau_\delta$.

Demonstração: É claro que $\tau_0 \leq \tau_\omega$. Para provar $\tau_\omega \leq \tau_\delta$ basta provar

que a identidade $\text{id}: (\mathcal{H}(X), \tau_\delta) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_\omega)$ é contínua e para isto é suficiente provar que a inclusão $A_\mathcal{V} \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_\omega)$ é contínua para todo $\mathcal{V}$. De fato, sejam $\mathcal{V}$ uma cobertura dada e p uma seminorma em $\mathcal{H}(X)$ portada por K . Então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $K \subset V$ e $c(V) > 0$ com $p(f) \leq c(V) \|f\|_V$, para toda $f \in \mathcal{H}(X)$. Assim p_K é contínua em A .

Observação 4.6: A Proposição acima mostra que um conjunto limitado para τ_δ é também limitado para τ_ω e para τ_0 . A recíproca também é válida:

Proposição 4.7: Se $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(X)$ é τ_0 -limitado então é τ_δ -limitado.

Demonstração: Seja $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(X)$ τ_0 -limitado. Basta encontrar uma cobertura admissível $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{X} \subset A_\mathcal{V}$ com $\mathcal{X}$ limitado em $A_\mathcal{V}$ pois como a aplicação inclusão $i: A_\mathcal{V} \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_\delta)$ é contínua teremos $\mathcal{X}$ limitado em $(\mathcal{H}(X), \tau_\delta)$. Para isto basta usar o lema abaixo e o análogo à demonstração da proposição 3.4.

Lema 4.8: Seja $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(X)$ τ_0 -limitado. Para $x \in X$, existe U_x e $c > 0$ tal que $\|f\|_{U_x} \leq c$ para toda $f \in \mathcal{X}$.

Demonstração: Suponhamos que existe $x_0 \in X$ em que não ocorre a afirmação do lema. Então podemos achar uma sequência $(f_n) \subset \mathcal{X}$ e uma sequência $(x_n) \subset X$, $x_n \rightarrow x_0$ tal que $|f_n(x_n)| > n$ para cada n . Assim (f_n) não é limitada em K com $K = \{x_0\} \cup \{x_n, n=1,2,\dots\}$.

Corolário 4.9: τ_δ é a topologia bornológica associada a τ_0 ou a τ_ω . Ver (6).

Proposição 4.10: Seja $j: X \rightarrow Y$ um morfismo de domínios de Riemann.

Então as aplicações $j^*: (\mathcal{H}(Y), \tau_0) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_0)$

$$g \mapsto g \circ j$$

e

$$j^*: (\mathcal{H}(Y), \tau_\omega) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_\omega)$$

$$g \mapsto g \circ j$$

são contínuas.

Demonstração: Sejam $g \in \mathcal{H}(Y)$ e $K \subset X$ com K compacto. Então,

$\|j^*(g)\|_K = \|g \circ j\|_K \leq \|g\|_{j(K)}$ com $j(K)$ compacto. Assim a primeira aplicação é contínua. Agora sejam $g \in \mathcal{H}(Y)$ e p uma seminorma em $\mathcal{H}(X)$ portada por um subconjunto compacto $K \subset X$. Seja $W \supset j(K)$. Pela continuidade de j e pela compacidade de K existe $V \supset K$ tal que $j(V) \subset W$. Como existe $c = c(V)$ tal que $p(h) \leq c \|h\|_V$, $\forall h \in \mathcal{H}(X)$, temos $p(j^*(g)) \leq c \|j^*(g)\|_V = c \|g\|_{j(V)} \leq c \|g\|_W$, $\forall g \in \mathcal{H}(Y)$. Portanto a segunda aplicação é contínua.

Lema 4.11: $(\mathcal{H}(X), \tau_\delta) = (\mathcal{H}(X), \tau_{\delta,})$ onde $\tau_{\delta,}$ é a topologia limite indutivo em $\mathcal{H}(X)$ das inclusões $A_W \hookrightarrow \mathcal{H}(X)$, onde W é apenas cobertura enumerável e satisfaz: $U \cup V \in W$ para todo $U, V \in W$.

Demonstração: Observemos que a aplicação identidade

$\text{id}: (\mathcal{H}(X), \tau_\delta) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_{\delta,})$ é contínua pois para qualquer A_W com

$\mathcal{V}$ cobertura admissível temos a inclusão $A_{\mathcal{V}} \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_{\delta,})$ contínua. Também $\text{id}: (\mathcal{H}(X), \tau_{\delta,}) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_0)$ é contínua, analogamente à demonstração de 4.5. Por 4.7 temos que se $\mathcal{X}$ é τ_0 -limitado então $\mathcal{X}$ é τ_{δ} -limitado. Assim $(\mathcal{H}(X), \tau_{\delta})$ e $(\mathcal{H}(X), \tau_{\delta,})$ têm os mesmos limitados que $(\mathcal{H}(X), \tau_0)$ e portanto τ_{δ} e $\tau_{\delta,}$ são topologias bornológicas associadas a τ_0 . Como o espaço bornológico associado a τ_0 é único obtemos $(\mathcal{H}(X), \tau_{\delta,}) = (\mathcal{H}(X), \tau_{\delta})$.

Proposição 4.12: Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura admissível do domínio (X, p) sobre E . Suponhamos que $j: X \rightarrow Y$ é uma e.a.s. de $A_{\mathcal{V}}$ e denotemos $A' = \{f' \in \mathcal{H}(Y) / f' \circ j \in A_{\mathcal{V}}\}$. Então:

(a) $\hat{y}: A_{\mathcal{V}} \ni f \rightarrow f'(y) \in \mathbb{C}$ é contínua para todo $y \in Y$;

(b) existe uma cobertura admissível $\mathcal{W}$ de Y tal que

$A' = A_{\mathcal{W}}$ e $j^*: A_{\mathcal{W}} \rightarrow A_{\mathcal{V}}$ é um isomorfismo de espaço vetorial topológico.

$$g \mapsto g \circ j$$

Demonstração: (a) O conjunto $Z = \{y \in Y / \hat{y} \text{ é contínua}\}$ é não vazio.

De fato, seja $y \in Y$ com $y = j(x)$, $x \in U$, $U \in \mathcal{V}$. Então $y \in Z$ pois para qualquer $f \in A_{\mathcal{V}}$ temos: $\|\hat{y}(f)\| = |f' \circ j(x)| = |f(x)| \leq \|f\|_U$. Z é também aberto. De fato, seja $y \in Z$ e $U \in \mathcal{V}$ tal que

$\|\hat{y}(f)\| \leq c \|f\|_U$ para toda $f \in A_{\mathcal{V}}$ e um certo $c > 0$. Substituindo f por f^m , extraíndo a raiz m -ésima e fazendo $m \rightarrow \infty$ vemos que podemos assumir $c=1$.

Sejam s e V como em 3.2. Para cada $a \in E$, a aplicação

$t \mapsto \hat{d}_a^n f(t)$ pertence a $A_{\mathcal{V}}$ para cada $f \in A_{\mathcal{V}}$. Logo $|\hat{d}_a^n f'(y)| \leq$

$\|\hat{d}_a^n f\|_U$ para qualquer $f \in A_{\mathcal{V}}$ e assim $\|\hat{d}^n f'(y)\| \leq \|\hat{d}^n f\|_U$ para qualquer

$f \in A_Y$. Portanto $\sum \|d^n f'(y)\| r^n \leq \sum \|d^n f\|_U r^n \leq \sum \|f\|_U (\frac{r}{s})^n \leq \|f\|_V \sum (\frac{r}{s})^n$,
 $\forall r, 0 < r < s$. Agora seja $0 < r < s$, $r < d_Y(y)$. Para $z \in B_Y(y, r)$ temos
 $|\hat{z}(f)| = |f'(z)| \leq \sum \|d^n f'(y)\| r^n \leq (\frac{r}{s})^n \|f\|_V$, $\forall f \in A_Y$, ou seja $z \in Z$.
 Assim $B_Y(y, r) \subset Z$ e Z é aberto. Finalmente por 1.7, para provar $Z=Y$ basta provar que Z é sequencialmente fechado. Seja (x_n) uma
 sequencia em Z convergindo para $x \in Y$. $(\hat{x}_n)$ é fracamente limitada em $(A_Y)'$, o dual de A_Y , pois $\hat{x}_n(f) = f'(x_n) \rightarrow f'(x) = \hat{x}(f)$ para
 toda $f \in A_Y$. Pelo fato de A_Y ser tonelado segue que $(\hat{x}_n)$ é equicontínua (ver (6)). Assim, podemos encontrar $U \in \mathcal{V}$ tal que
 $|\hat{x}_n(f)| \leq \|f\|_U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f \in A_Y$. Daí, $|\hat{x}(f)| \leq \|f\|_U$ para
 toda $f \in A_Y$, o que implica $x \in Z$. Portanto Z é sequencialmente
 fechado.

(b) Para $n \in \mathbb{N}$ e $U \in \mathcal{V}$ definimos $V_n(U)$ o interior do conjunto

$$\{y \in Y / d_Y(y) > 2^{-n}, \|qy\| < n \text{ e } |\hat{z}(f)| \leq \|f\|_U \forall z \in B_Y(y, 2^{-n}) \text{ e } f \in A_Y\}.$$

De (a) segue que a coleção $\mathcal{W}$ das uniões finitas dos conjuntos $V_n(U)$,
 $n \in \mathbb{N}$, $U \in \mathcal{V}$ cobre Y . Não é difícil ver que $\mathcal{W}$ é cobertura admissível de Y . Vamos provar $A' \subset A_W$. Dado $U \in \mathcal{V}$ seja $W = V_n(U)$.
 Como $|\hat{y}(f)| \leq \|f\|_U$ para qualquer $y \in W$ e $f \in A_Y$ temos
 $\|f'\|_W \leq \|f' \circ j\|_{U \circ \infty}$, $\forall f' \in A'$. Para mostrar $A_W \subset A'$ seja $U \in \mathcal{V}$ e
 $s, \mathcal{V}$ como em 3.2. Provemos $j(U) \subset V_n(V) = W$ para $2^{-n} < s$ e $\|px\| < n$,
 $\forall x \in U$. De fato, para $x \in U$, por 1.10 temos $d_Y(jx) \geq d_X(x) > s > 2^{-n}$;
 temos também $\|q(jx)\| = \|px\| < n$. Ainda, para $y = jx$ e $z \in B_Y(y, 2^{-n})$

obtemos $\left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f'(y) \right\| = \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \right\| \leq s^n \|f\|_V$ e para $\|qz - qy\| = t < 2^n < s$ vale $\|f'(z)\| \leq \sum \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f'(y) (qz - qy) \right\| \leq \sum \|f\|_V \left(\frac{t}{s}\right)^n$. Substituindo f' por $(f')^m$ obtemos $|f'(z)| \leq \|f\|_V$. Assim, para $g \in A_W$ temos $\|g \circ j\|_U = \|g\|_{j(U)} \leq \|g\|_W < \infty$ ou seja $A_W \subset A'$. A demonstraco $A_W \subset A'$ prova que para qualquer $U \in \mathcal{V}$ existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $\|j^*(g)\|_U \leq \|g\|_W$ para toda $g \in A_W$ ou que $j^*: A'_W \rightarrow A_{\mathcal{V}}$  cont  ua. A demonstraco $A' \subset A_W$ prova que dado $U \in \mathcal{V}$ temos $\|g\|_W \leq \|j^*(g)\|_U$ para toda $g \in A_W$ sendo $W = V_n(U)$. Como esses W 's definem a topologia de A_W segue que $(j^*)^{-1}: A_{\mathcal{V}} \rightarrow A_W$  também cont  ua.

Teorema 4.13: Seja $j: X \rightarrow Y$ uma e.a.s. de $\mathcal{H}(X)$. Ento

$j^*: (\mathcal{H}(Y), \tau_\delta) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_\delta)$  um isomorfismo de espaço vetorial topológico.

Demonstração: Para provar que $j^*: (\mathcal{H}(Y), \tau_\delta) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_\delta)$  cont  ua basta provar que qualquer W , cobertura enumerável de Y e que satisfaz: $U \cup V \in W$ para $U, V \in W$, obtemos $j^*|_{A_W}: A_W \rightarrow (\mathcal{H}(X), \tau_\delta)$ cont  ua, e para isto basta provar que existe $\mathcal{V}$, cobertura enumerável de X tal que $U \cup V \in \mathcal{V}$ para $U, V \in \mathcal{V}$ com $j^*|_A: A_W \rightarrow A_{\mathcal{V}}$ cont  ua. De fato, para qualquer W cobertura enumerável tal que $U \cup V \in W$ para $U, V \in W$, $\{j^{-1}(V), V \in W\}$  cobertura aberta enumerável de X como acima e $j^*|_{A_W}: A_W \rightarrow A_{\mathcal{V}}$  cont  ua pois para toda $f \in A_W$ temos $\|j^* \circ f\|_{j^{-1}(W)} = \|f \circ j\|_{j^{-1}(W)} \leq \|f\|_W$. Que j^*  aberta segue analogamente a 4.12 (b).

CAPÍTULO V

CONSTRUÇÃO DA ENVOLTÓRIA DE HOLOMORFIA

Motivação: Seja (X,p) um domínio de Riemann sobre E e $j:X \rightarrow Y$ uma e.a.s. de A_Y , onde $\mathcal{V}$ é uma cobertura admissível de X . Sejam as aplicações

$$\hat{x}:A_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto f(x) \text{ onde } x \in X$$

e

$$\hat{y}:A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto f'(y) \text{ onde } y \in Y \text{ e } f' \text{ é a extensão da } f. \text{ Então:}$$

Lema 5.1: Para $y=j(x)$ temos $\hat{y}=\hat{x}$.

Demonstração: $\hat{y}(f)=f'(y)=f'(j(x))=f(x)=\hat{x}(f)$.

Lema 5.2: As aplicações: $\mu \in E' \mapsto \hat{y}(\mu \circ p) \in \mathbb{C}$,

$$\mu \in E' \mapsto \hat{x}(\mu \circ p) \in \mathbb{C}$$

são fracamente contínuas.

Demonstração: Para a primeira aplicação temos que provar que se

$\mu_\alpha \rightarrow \mu$ fracamente então $\hat{y}(\mu_\alpha \circ p) \rightarrow \hat{y}(\mu \circ p)$, isto é $\mu_\alpha \circ q(y) \rightarrow \mu \circ q(y)$.

De fato, $\mu_\alpha(e) \rightarrow \mu(e)$, $\forall e \in E$. Para $e=q(y)$ temos

$\mu_\alpha \circ q(y) \rightarrow \mu \circ q(y)$. Vale o análogo para a outra aplicação.

De acordo com 4.12, $\hat{y}$ é contínua. Assim para construir a envoltória de holomorfia de (X,p) é razoável começar com o conjunto:

$\mathcal{M}(X, \mathcal{V}) = \{h: A_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C} \mid h \in \mathcal{Y}(A_{\mathcal{V}}) \text{ é contínua e } h \circ p^*: E' \ni \mu \mapsto h(\mu \circ p) \text{ é fracamente contínua}\}.$

Observação: Para uma álgebra A , o espectro $\mathcal{Y}(A)$ é o conjunto dos homomorfismos não nulos $A \rightarrow \mathbb{C}$.

Evidentemente $\hat{X} = \{\hat{x} \mid x \in X\} \subset \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$. Pelo teorema de Mackey-Arens (ver (6)) cada $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ define um único vetor $qh \in E$ tal que $\mu(qh) = h(\mu \circ p)$ para todo $\mu \in E'$, desde que $h \circ p^*$ é fracamente contínua.

Lema 5.3: Temos $q(\hat{x}) = p(x)$, para todo $x \in X$.

Demonstração: Como $\mu(qh) = h(\mu \circ p)$ para todo $\mu \in E'$ e $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$, tomando $h = \hat{x}$ onde $x \in X$ obtemos $\mu(q\hat{x}) = \hat{x}(\mu \circ p) = \mu \circ p(x) \forall \mu \in E'$. Assim $q(\hat{x}) = p(x)$ para $x \in X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ pode ser munida de uma topologia Hausdorff tal que $q: \mathcal{M}(X, \mathcal{V}) \rightarrow E$ é um homeomorfismo local: Dado $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $|h(f)| \leq \|f\|_U$ para toda $f \in A_{\mathcal{V}}$. Sejam s, V como em 3.2. Para $a \in B_E(0, s)$ colocamos

$$(*) \quad h_a(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} h(\hat{d}_a^n f) \text{ para } f \in A_{\mathcal{V}}.$$

Então, pela desigualdade de Cauchy, para $a \in B_E(0, s)$ temos:

$$\begin{aligned} |h_a(f)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} h(\hat{d}_a^n f) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} h(\hat{d}_a^n f) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}_a^n f \right\|_U \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|_{B(X, s)} \left(\frac{\|a\|}{s} \right)^n \leq \\ &\leq \|f\|_V \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|a\|}{s} \right)^n. \end{aligned}$$

Substituindo f por f^m , extraíndo a raiz m -ésima e fazendo $m \rightarrow \infty$ obtemos:

$$(**) |h_a(f)| \leq \|f\|_V \text{ para toda } f \in A \text{ e } a \in B_E(0, s).$$

Além disso usando que $\hat{d}_a^n(f.g) = \sum_{s+t=n} \frac{n!}{s!t!} (\hat{d}_a^s f)(\hat{d}_a^t g)$ (ver (3)) não é difícil provar que h_a é um homomorfismo. Para $\mu \in E'$ é facilmente visto que $h_a(\mu \circ p) = \mu(qh) + \mu(a)$. Então $h_a \circ p^*: E' \ni \mu \mapsto h_a(\mu \circ p) \in \mathbb{C}$ é fracamente contínua e assim $h_a \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$.

Seja $\mathcal{N}$ a base de vizinhanças abertas de $0 \in E$. Para definirmos uma topologia em $\mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ definimos uma base de vizinhanças de cada $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{N}(h) = \{h_a / a \in W \text{ com } U, s, V \text{ como dados acima, } W \in \mathcal{N} \text{ e } W \subset B_E(0, s)\}.$$

$\mathcal{N}(h)$ é uma base de vizinhanças de h pois

$$\begin{aligned} (h_a)_b(f) &= \sum \frac{1}{n!} h_a(\hat{d}_b^n f) = \sum \sum h(\frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \hat{d}_a^m f \cdot \hat{d}_b^n f) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n+m=i} h(\frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \hat{d}_a^m f \hat{d}_b^n f) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} h(\hat{d}_{a+b}^i f) = h_{a+b}(f), \text{ para toda } f \in A, a, b \in E \text{ tal que} \end{aligned}$$

$a+b \in W$. Assim $h_{a+b} = (h_a)_b$. Isto prova que dada $h_a \in \mathcal{N}(h)$,

$\mathcal{N}(h) \in \mathcal{N}(h)$, existe $\mathcal{N}(h_a) \subset \mathcal{N}(h)$ onde $\mathcal{N}(h_a) \in \mathcal{N}(h_a)$. É fácil ver que dadas $\mathcal{N}(h)$ e $\mathcal{N}(h) \in \mathcal{N}(h)$, existe $\mathcal{N}^*(h) \subset \mathcal{N}(h) \cap \mathcal{N}(h)$ com $\mathcal{N}^*(h) \in \mathcal{N}(h)$.

A topologia definida pelas bases de vizinhanças $\mathcal{N}(h)$ é uma topologia Hausdorff. De fato; suponhamos que existem

h e $h' \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$, $h \neq h'$ tal que para qualquer $N(h) \in \mathcal{N}(h)$ e qualquer $N(h') \in \mathcal{N}(h')$ existe $h'' \in N(h) \cap N(h')$. Pela continuidade de h e h' existem U e $U' \in \mathcal{V}$ tais que $|h(f)| \leq \|f\|_U$ e $|h'(f)| \leq \|f\|_{U'}$, respectivamente para qualquer $f \in A_{\mathcal{V}}$. Assim, pela definição de base de vizinhanças existe $a \in W \subset B_E(0, s)$, $a' \in W' \subset B_E(0, s')$ tal que $h'' = h_a = h'_{a'}$. Seja $a' - a = b$. Então $h_a(f) = h'_{a'}(f) = h'_{a+b}(f) = (h'_b)_a(f)$. Pelo lema abaixo, fazendo $a \rightarrow 0$ obtemos $h(f) = h'_b(f)$ e fazendo $b \rightarrow 0$ obtemos $h(f) = h'(f)$: contradição.

Lema 5.4: $h_a(f) \rightarrow h(f) \forall f \in A_{\mathcal{V}}$ quando $a \rightarrow 0$.

Demonstração: Para toda $f \in A_{\mathcal{V}}$ temos $h_a(f) - h(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} h(\hat{d}_a^n f)$ pois $h(\hat{d}_a^0 f) = h(f)$. Assim

$$|h_a(f) - h(f)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} h(\hat{d}_a^n f) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|_{U_s} \left(\frac{\|a\|}{s} \right)^n \leq \|f\|_{U_s} \frac{\|a\|}{s - \|a\|}.$$

Quando $a \rightarrow 0$ obtemos $h_a(f) \rightarrow h(f)$, $\forall f \in A_{\mathcal{V}}$. Assim $h_a = h$.

Provemos que $q: \mathcal{M}(X, \mathcal{V}) \rightarrow E$ é um homeomorfismo local. Seja

$h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$. Então existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $|h(f)| \leq \|f\|_U \forall f \in A_{\mathcal{V}}$.

Sejam s e V como em 3.2. Seja $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < s$. Então

$|qh_a - qh| = \sup_{\|p\|=1, \mu \in E'} |\mu(qh_a - qh)| = \sup_{\|p\|=1, \mu \in E'} |\mu(a)| = \|a\| < \varepsilon$ para $h_a \in N(h) = \{h_a / a \in W, W \subset B_E(0, \varepsilon)\}$. Assim q é contínua. Resta provar que

q é localmente sobrejetiva. Seja $qh + z \in E$ com $\|z\| < \varepsilon$. Seja

$h_a \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ com $a \in W \subset B_E(0, \varepsilon)$. Então $\mu(qh_z) = h_z(\mu \circ p) = \mu(qh) + \mu(z) = \mu(qh + z) \forall \mu \in E'$. Como E' separa pontos temos $qh_z = qh + z$. Portanto basta tomar $z = a$.

A extensão $\hat{f}$ de uma função $f \in A$ é dada por

$$\hat{f}: \mathcal{M}(X, \mathcal{V}) \ni h \mapsto h(f) \in \mathbb{C}.$$

$\hat{f}$ é G-analítica, desde que $\hat{f}(h_{\lambda a}) = \sum \left[\frac{1}{n!} h(d_a^n f) \right] \lambda^n$ para $|\lambda|$ pequeno, $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso $\hat{f}$ é contínua pois $|\hat{f}(h) - \hat{f}(h_a)| \rightarrow 0$ para $a \rightarrow 0$. Portanto $\hat{f}$ é analítica (por 2.5).

Denotemos por $\mathcal{E}(X, \mathcal{V})$ a componente de $\mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ que contém $\hat{X}$ e definamos

$$j_{\mathcal{V}}: X \ni x \mapsto \hat{x} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V}).$$

É fácil ver que $j_{\mathcal{V}}: X \rightarrow \mathcal{E}(X, \mathcal{V})$ é uma e.a.s. de $A_{\mathcal{V}}$.

Teorema 5.5: $j_{\mathcal{V}}: X \rightarrow \mathcal{E}(X, \mathcal{V})$ é uma e.a.s. maximal de $A_{\mathcal{V}}$.

Demonstração: Seja $j': X \rightarrow Y$ uma e.a.s. de $A_{\mathcal{V}}$. Denotemos por $f' \in \mathcal{H}(Y)$ a extensão analítica de $f \in A_{\mathcal{V}}$. Por 4.12(a), cada ponto $y \in Y$ define um homomorfismo contínuo $\hat{y}: A_{\mathcal{V}} \ni f \mapsto f'(y) \in \mathbb{C}$; por 5.2, $\hat{y} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$. A aplicação $j'': Y \ni y \mapsto \hat{y} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ é bem definida, satisfaz $p' = q \circ j''$ e $j_{\mathcal{V}} = j'' \circ j'$. Como j'' é contínua temos $j''(Y) \subset \mathcal{E}(X, \mathcal{V})$. Segue que $j_{\mathcal{V}}: X \rightarrow \mathcal{E}(X, \mathcal{V})$ é uma e.a.s. maximal de $A_{\mathcal{V}}$.

Seja $\beta(X) = \{ \mathcal{V} / \mathcal{V} \text{ é cobertura admissível de } X \}$. Definimos $\mathcal{M}_{\beta}(X) = \{ h \in \mathcal{Y}(\mathcal{H}(X)) / h \in \mathcal{E}(X, \mathcal{V}) \text{ para todo } \mathcal{V} \in \beta(X) \text{ e } \inf \{ d_{\mathcal{E}(X, \mathcal{V})}(h) / \mathcal{V} \in \beta(X) \} > 0 \}$.

É fácil ver que a família dos conjuntos

$\mathcal{U}(h,r) = \{k \in \mathcal{M}_\beta(X) / k \in B_{\beta(X,\mathcal{V})}(h,r) \text{ para todo } \mathcal{V} \in \beta(X)\}$, onde $h \in \mathcal{M}_\beta(X)$ e $0 < r < \inf\{d_{\beta(X,\mathcal{V})}(h) / \mathcal{V} \in \beta(X)\}$, é base para uma topologia em $\mathcal{M}_\beta(X)$. Também é fácil ver que $\mathcal{M}_\beta(X)$ é Hausdorff com esta topologia pois $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{V})$ é Hausdorff para cada $\mathcal{V} \in \beta(X)$. Definamos $q: \mathcal{M}_\beta(X) \rightarrow E$ da seguinte maneira: dada $h \in \mathcal{M}_b(X,\mathcal{V})$ e $\mathcal{V} \in \beta(X)$, $q(h) = q_{\mathcal{V}}(h)$ onde $q_{\mathcal{V}}$ é o homeomorfismo de $\mathcal{M}_b(X,\mathcal{V})$ em E . Agora mostremos que $q: \mathcal{M}_\beta(X) \rightarrow E$ está bem definida: seja $h \in \mathcal{M}_\beta(X)$ e sejam $\mathcal{V}, \mathcal{V}' \in \beta(X)$; então $\mu(q_{\mathcal{V}}(h)) = h(\mu \circ p)$ e $\mu(q_{\mathcal{V}'}(h)) = h(\mu \circ p) \forall \mu \in E'$; assim $q_{\mathcal{V}}(h) = q_{\mathcal{V}'}(h)$. Como para $h \in \mathcal{M}_\beta(X)$ temos $h \in \mathcal{M}_b(X,\mathcal{V})$ para todo $\mathcal{V} \in \beta(X)$ é fácil ver que $q: \mathcal{M}_\beta(X) \rightarrow E$ é um homeomorfismo local. Vamos provar que a extensão de uma função $f \in \mathcal{H}(X)$ é dada por

$$\hat{f}: \mathcal{M}_\beta(X) \ni h \mapsto h(f) \in \mathbb{C}.$$

Dada $f \in \mathcal{H}(X)$ existe $\mathcal{V}$, cobertura admissível de X , tal que $f \in A_{\mathcal{V}}$. Temos $\hat{f}$ G-analítica pois $\hat{f}(h_{\lambda,a}) = \sum \left[\frac{1}{n!} h(d_a^n f) \right] \lambda^n$ para $|\lambda|$ pequeno, $\lambda \in \mathbb{C}$. Também $\hat{f}$ é contínua pois como a aplicação $h \in \mathcal{M}_b(X,\mathcal{V}) \mapsto h(f) \in \mathbb{C}$ é contínua, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|\hat{f}(k) - \hat{f}(h)| < \varepsilon$ se $k \in B_{\beta(X,\mathcal{V})}(h,r)$. Podemos supor $r < \inf\{d_{\beta(X,\mathcal{V})}(h) / \mathcal{V} \in \beta(X)\}$. Logo $|\hat{f}(k) - \hat{f}(h)| < \varepsilon$ se $k \in \mathcal{U}(h,r)$ e assim $\hat{f}$ é analítica.

Denotemos por $\xi_\beta(X)$ a componente de $\mathcal{M}_\beta(X)$ que contém $\hat{X}$.

Então:

Teorema 5.6: Temos que $j_X: X \rightarrow \xi_\beta(X)$ é a envoltória de holomorfia de X .

Demonstração: Seja $j': X \rightarrow Y$ uma e.a.s. de $\mathcal{H}(X)$. Então j' é uma

e.a.s. de cada $A_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{V} \in \beta(X)$. De acordo com 5.5, existem morfismos $j'_{\mathcal{V}}: Y \rightarrow \mathcal{F}(X, \mathcal{V})$ tal que $j_{\mathcal{V}} = j'_{\mathcal{V}} \circ j'$ para todo $\mathcal{V} \in \beta(X)$. $j'_{\mathcal{V}}$ é definida por $j'_{\mathcal{V}}: Y \ni y \mapsto \hat{y} \in \mathcal{F}(X, \mathcal{V})$. Agora é fácil ver que $j'': Y \ni y \mapsto \hat{y} \in \mathcal{M}_{\beta}(X)$ é bem definida e contínua, daí $j''(Y) \subset \mathcal{F}_{\beta}(X)$ e a restrição $j'': Y \rightarrow \mathcal{F}_{\beta}(X)$ é um morfismo de domínios de Riemann satisfazendo $j_X = j'' \circ j'$.

CAPÍTULO VI

DOMÍNIOS DE HOLOMORFIA E PROPRIEDADES DE CONVEXIDADE

Seja (X, p) um domínio de Riemann sobre $\mathbb{C}^n$. X é chamado A-convexo se uma das seguintes propriedades é satisfeita:

- (a) $d_X(K) = d_X(\hat{K}_A)$ para todo compacto $K \subset X$;
- (b) $d_X(\hat{K}_A) > 0$ para todo compacto $K \subset X$;
- (c) Para toda sequência (x_n) de X que satisfaz $d_X(x_n) \rightarrow 0$, existe uma função holomorfa $f \in A$ tal que $\sup |f(x_n)| = \infty$.

Aqui e a seguir, $\hat{K}_A$ é definido por:

$$\hat{K}_A = \{x \in X / |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ para toda } f \in A\}.$$

Definição 6.1: Seja A uma classe regular no domínio de Riemann (X, p) sobre E . X é dito A-convexo se para todo U satisfazendo $d_X(U) > s$ e U_s é A-limitante para um certo $s > 0$, segue $d_X(\hat{U}_A) > 0$.

Proposição 6.2: Seja A uma classe regular no domínio de Riemann (X, p) sobre E e suponhamos $\rho_A(x) \leq d_X(x)$ para todo $x \in X$. Então X é A-convexo.

Demonstração: Suponhamos que X não seja A-convexo. Então existe U com $d_X(U) > s$ e U_s A-limitante para um certo $s > 0$ e $d_X(\hat{U}_A) = 0$. Logo existe uma sequência $(x_n) \subset \hat{U}_A$ tal que $d_X(x_n) \rightarrow 0$ e $|f(x_n)| \leq \|f\|_U$ $\forall f \in A$. Pelo teorema 3.6 obtemos $\rho_f(x_n) \geq s \forall f \in A$ e assim $d_X(x_n) \geq \rho_A(x_n) > s > 0$: contradição.

Lema 6.3: Seja (X, p) um domínio de Riemann sobre E . Dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$ existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que:

- (a) $d_X(x_n) \rightarrow 0$;
- (b) $x_n \in B_X(x, d_X(x) + \epsilon)$.

Demonstração: Pelo lema 1.12 existe $a \in E$ com $\|a\| = 1$ e $d_X(x, a) = d \leq d_X(x) + \epsilon$. Seja (t_n) uma sequência de números positivos que converge para d . Então $px + t_n a \rightarrow px + da$. Seja $x_n = (p|_{D_a(x, d)})^{-1}(px + t_n a) \subset D_a(x, d) \subset B_X(x, d_X(x) + \epsilon)$. Então $d_X(x_n) \leq d_X(x_n, a) = d - t_n \rightarrow 0$.

Teorema 6.4: Sejam $\mathcal{A}$ uma cobertura admissível do domínio de Riemann (X, p) sobre E e $A = A_{\mathcal{A}}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) X é A -convexo;
- (b) Para todo $U \in \mathcal{V}$ temos $d_X(\hat{U}_A) > 0$;
- (c) Para toda sequência (x_n) em X com $d_X(x_n) \rightarrow 0$, existe uma função $f \in A$ tal que $\sup |f(x_n)| = \infty$;
- (d) $\rho_A \leq d_X$;
- (e) Para todo enumerável $D \subset X$, o conjunto $R(D) = \{f \in A / \rho_f(x) \leq d_X(x) \text{ para todo } x \in D\}$ é de segunda categoria em A .

Demonstração: A implicação $(a) \Rightarrow (b)$ é trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$: Seja $\mathcal{V} = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo $U_n \subset U_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e seja (x_n) uma sequência em X com $d_X(x_n) \rightarrow 0$. Pela definição de $d_X(\hat{U}_n A)$ e como $d_X(x_n) \rightarrow 0$, existe uma subsequência

(x_{in}) de (x_n) / $x_n = x_{in} \notin \hat{U}_n$ para todo $n \in N$. Passando para subseqüências apropriadas de (U_n) e (x_n) , podemos assumir que $x_n \in \hat{U}_{n+1} \setminus \hat{U}_n$ para todo $n \in N$. Então existe $f_n \in A$ / $|f_n(x_n)| > \|f_n\|_{U_n}$ para todo $n \in N$. Seja θ tal que $|f_n(x_n)| > \theta \|f_n\|_{U_n}$. Para $h_n = \frac{f_n}{\theta}$ temos $|h_n(x_n)| > 1 > \|h_n\|_{U_n}$. Seja $g_n = h_n^k$ para k suficientemente grande tal que:

$$(i) \|g_n\|_{U_n} < 2^n \quad \text{e} \quad (ii) |g_n(x_n)| \geq n + \sum_{j=1}^{n-1} |g_j(x_n)|$$

De (i) segue que $f = \sum g_n$ é uniformemente convergente em todo U_m , $m \in N$ pois para $x \in U_m$ temos

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^m |g_n(x)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^m \|g_n\|_{U_m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^n < \infty.$$

Assim $f \in A$.

De (ii) concluimos que $|f(x_n)| \geq n-1$ para todo $n \in N$ pois

$$|f(x_n)| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x_n) \right| \geq |g_n(x_n)| - \sum_{m=1}^{n-1} |g_m(x_n)| - \sum_{m=n+1}^{\infty} |g_m(x_n)| \geq$$

$$n + \sum_{m=1}^{n-1} |g_m(x_n)| - \sum_{m=1}^{n-1} |g_m(x_n)| - \sum_{m=n+1}^{\infty} |g_m(x_n)| \geq n - \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^m \geq n-1.$$

Então $\sup |f(x_n)| = \infty$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sejam $x \in X$ e $r > d_X(x)$. Pelo lema anterior existe

$(x_n) \subset X$ com $d_X(x_n) \rightarrow 0$ e $\|px_n - px\| < r$. Por (c), existe $f \in A$ tal que $\sup |f(x_n)| = \infty$. Segue que $\rho_f(x) \leq r$ pois caso contrário, para

$B = p^{-1}(B_E(px, r))$ temos $\|f\|_B \leq \sup_{y \in B} \left| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \cdot (py - px) \right| \leq \sum \left| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \right| \|r\|^m < \infty$,

o que é uma contradição. Assim $\rho_A(x) \leq r$ para todo $r > d_X(x)$ e portanto $\rho_A(x) \leq d_X(x)$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Seja $S^k(x) = \{f \in A / \rho_f(x) \geq d_X(x) + 2^{-k}\}$ para $x \in D$ e $k \in \mathbb{N}$. Cada $f \in S^k(x)$ pode ser estendida simultaneamente a um domínio de Riemann $(\tilde{X}, \tilde{p})$ sobre E construído com em 3.5. Temos então $d_{\tilde{X}}(j(x)) \geq d_X(x) + 2^{-k}$. Denotemos por $\mathcal{W}$ a coleção das uniões finitas de $j(U)$ com $U \in \mathcal{U}$ e $B_X(j(x), d_X(j(x)) + (1 - 2^{-m})2^{-k})$. É fácil ver que $\mathcal{W}$ é uma cobertura admissível de $\tilde{X}$ e que a aplicação restrição $j^*: A_{\mathcal{W}} \ni g \rightarrow g|_X \in A$ é linear, contínua e satisfaz $j^*(A_{\mathcal{W}}) = S^k(x)$. De (d) segue que $S^k(x) \nsubseteq A_{\mathcal{U}}$ e do teorema de Banach (ver (6)) segue que $S^k(x)$ é magro, desde que j^* é uma aplicação linear contínua entre espaços de Frechet. Então

$R(D) = A \setminus \bigcup \{S^k(x) / x \in D, k \in \mathbb{N}\}$ é de segunda categoria em A .

(e) $\Rightarrow$ (a): Seja U satisfazendo $d_X(U) > s$ e U_s A -limitante para um certo $s > 0$. Como para $x \in \hat{A}(U)$ temos $|f(x)| \leq \|f\|_U$, por 3.6(a) obtemos $\rho_A(x) \geq s$ para todo $x \in \hat{A}(U)$; de (e) segue que $d_X(\hat{A}(U)) \geq s$.

Chamemos um domínio de Riemann (X, p) sobre um espaço de Banach A -separado para um conjunto $A \subset \mathcal{H}(X)$ de funções holomorfas se para todo par (x, y) de pontos de X com $x \neq y$, existe uma função holomorfa $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Proposição 6.6: Seja A uma classe regular no domínio de Riemann (X, p) sobre E . X é um A -domínio de holomorfia se e somente se X é A -convexo e A -separado.

Demonstração: Se X não é A -convexo, existe $x \in E$ tal que $\rho_A(x) > d_X(x)$ por 6.4. Daí existe uma extensão analítica simultânea própria de A construída com em 3.5. Isso contradiz o fato de X ser um A -domínio de holomorfia. Analogamente, se X não é A -separado, a projeção $X \rightarrow X/\sim$ ($x \sim y$ se e somente se $p_x = p_y$ e $f(x) = f(y)$ para toda $f \in A$) é uma extensão analítica própria de A . Agora, seja X A -convexo e A separado e seja j uma e.a.s. de A . j é sobrejetiva pois caso contrário, existe $z \in \overline{j(X)}$ com $z \notin j(X)$. Então existe $(x_n) \subset X$ com $j(x_n) \rightarrow z$, $d_X(x_n) \rightarrow 0$. Por 6.4(c), existe f tal que $\sup |f(x_n)| = \infty$ e portanto $|\tilde{f}(z)| = \infty$, o que é absurdo. j é injetiva por X ser A -domínio de holomorfia.

Teorema 6.7: Seja (X, p) um domínio de Riemann sobre um espaço separável de Banach E . Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- (a) X é o domínio de existência de uma função analítica $f: X \rightarrow \mathbb{C}$;
- (b) Existe uma classe regular A tal que X é um A -domínio de holomorfia;
- (c) Existe uma classe regular A em X tal que X é A -convexo e A -separado.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b): f está contida numa classe regular A em X (ver a demonstração da proposição 3.4). Pela definição, X é A-domínio de holomorfia.

(b) $\Rightarrow$ (c): decorre de 6.6.

(c) $\Rightarrow$ (a). Como X é separável, existe um subconjunto N em X denso e enumerável. Então o conjunto

$$D = \{(x, y) \in N \times N / x \neq y \text{ e } p_x = p_y\}$$

é também enumerável. Provemos que o conjunto

$$T(x, y) = \{f \in A / f(x) = f(y)\},$$

onde $(x, y) \in D$, é aberto e denso em A. De fato, seja $|f(x) - f(y)| = 2\varepsilon$. Então para $g \in A$ tal que $\|g - f\|_V < \varepsilon$ onde $x, y \in V$ temos

$$|g(x) - g(y)| \geq |f(x) - f(y)| - |f(y) - g(y)| - |g(x) - f(x)| > 0.$$

Assim $T(x, y)$ é aberto. Agora sejam $f \in A$, $\varepsilon > 0$ e V um elemento da cobertura admissível. Podemos supor $f(x) \neq f(y)$. Como X é A-separado, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Seja $h_\delta = f + \delta g$, $\delta > 0$; então $h_\delta(x) \neq h_\delta(y)$ e $\|h_\delta - f\|_V = \delta \|g\|_V < \varepsilon$ para $\delta < \frac{\varepsilon}{\|g\|_V}$. Logo $T(x, y)$ é denso. Assim

$$T = \{f \in A / f(x) \neq f(y) \text{ para todo } (x, y) \in D\}$$

é de segunda categoria em A. Como X é A-convexo,

$$R = \{f \in A / \rho_f(x) \leq d_X(x), x \in N\}$$

é de segunda categoria em A e pela continuidade de ρ_f e d_X ,

$$R = \{f \in A / \rho_f \leq d_X\}.$$

Logo $H \neq T \cap R$ é de segunda categoria em A e em particular é não

vazio. Para completar a demonstração, mostraremos que X é o domínio de existência de toda função $f \in H$. Seja $j: X \rightarrow Y$ uma extensão analítica simultânea de f . Provemos que j é injetora. Sejam $x, y \in X$ tais que $j(x)=j(y)$. Como $p=q \circ j$ temos que $p(x)=p(y)$ e existem vizinhanças abertas conexas U e V de x e y respectivamente tais que $p|_U$ e $p|_V$ são homeomorfismos sobre uma vizinhança W de $p(x)=p(y)$. Para $(x', y') \in U \times V$ com $p(x')=p(y')$ temos $f(x')=f(y')$. De fato, $q \circ j(x')=q \circ j(y')$, $f(x')=\tilde{f} \circ j(x')$ e $f(y')=\tilde{f} \circ j(y')$; como existe $W' \subset W$ tal que $\tilde{f}(j(x'))=\tilde{f} \circ q^{-1}|_{W'}(q \circ j(x'))$ e $\tilde{f}(j(y'))=\tilde{f} \circ q^{-1}|_{W'}(q \circ j(y'))$ temos $f(x')=f(y')$. Desde que $f \in T$ segue que $(U \times V) \cap D = \emptyset$, o que implica $(U \times V) \cap \{(x, y) \in X \times X : x=y\} = \emptyset$ e portanto $U=V$ e em particular $x=y$. Logo j é injetora. Agora, se j não fosse sobrejetora, existiria um ponto $z \in \overline{j(X)} \subset Y$, $z \notin j(Z)$; para uma sequência $(z_n) \subset j(X)$ com $z_n \rightarrow z$ temos $d_X(z_n) \rightarrow 0$ e assim $\rho_f(z_n) \rightarrow 0$. Agora $\rho_{\tilde{f}}(z) = \lim \rho_{\tilde{f}}(z_n) = 0$: absurdo. Assim j é um isomorfismo.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Barroso, J.A. - Introduccion a la Holomorfia entre Espacios Normados, Cursos y Congresos de la Universidad de Santiago de Compostela, Secretariado de la Universidad de la Universidad de Santiago de Compostela, 7, 1976.
- (2) Coeuré, Gérard - Analytic Functions and Manifolds in Infinite Dimensional Spaces, Mathematics Studies, 11, North-Holland, 1974.
- (3) Matos, M.C. - Holomorphic Mappings and Domains of Holomorphy, Monografias do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 27, Rio de Janeiro, Brasil, 1970.
- (4) Nachbin, L. - Topology on Spaces of Holomorphic Mappings, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 47, Springer-Verlag, 1969.
- (5) Noverraz, P. - Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domains d'Holomorphie en Dimension Infinite, North-Holland, 1973.
- (6) Schaeffer, H.H. - Topological Vector Spaces, Springer, 1970.
- (7) Schottenloher, M. - Über Analytische Fortsetzung Banachräumen, Math. Ann., 199, Springer-Verlag (1972), 313-336.

- (8) Schottenloher, M. - Bounding Sets in Banach Spaces and Regular Classes of Analytic Functions, Functional Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics, 384, Springer-Verlag (1972), 109-122.
- (9) Schottenloher, M. - Riemann Domains: Basis Results and Open Problems; Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, Lecture Notes in Mathematics, 364, Springer-Verlag (1973), 196-212.
- (10) Schottenloher, M. - Analytic Continuation and Regular Classes in Locally Hausdorff Spaces, Portugaliae Mathematica, 33 (1974), 219-250.